

TESE DE  
DOUTORADO

**Busca da topologia do Universo**  
**usando**  
**fontes cósmicas discretas**

GERMÁN IGNACIO GOMERO FERRER

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF  
RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 2000

# Dedicatória

*Ao Dudú, pois se não fosse por seu amor e  
dedicação, eu teria acabado esta tese  
em muito menos tempo*

# Agradecimentos

Muitas pessoas fizeram tantas coisas por mim nestes anos que eu gostaria de colocar todos aqueles nomes aqui. Infelizmente, por uma questão de espaço, essa é uma tarefa impossível. No entanto, aqui vai uma tentativa.

Ao Marcelo Rebouças que foi um grande orientador, me deixou trabalhar livremente com as minhas idéias, mas apertou quando tinha que lidar com certas tarefas desagradáveis típicas do cotidiano da pesquisa.

Ao Antônio Teixeira que me mostrou através do seu exemplo os surpreendentes frutos que podem surgir de um trabalho minucioso e paciente.

Ao Armando Bernui e o Helio Fagundes que colocaram na frente dos meus olhos esta maravilhosa área de pesquisa que é a Topologia Cósmica.

À Myriam que sempre recebeu minha ficha de inscrição semanas depois do “último dia”.

A la gente que me acompaña desde los dias de juerga y estudio en la UNI: Pelusa, el Dinosaurio, Huachano y Sputnik. Si ustedes no estuvieran acá creo que ya me habría cruzado.

À Luisa que compartilhou seus dias comigo durante os primeiros anos do doutorado e me deu um filho maravilhoso.

À Ana que compartilhou seus dias comigo durante meus últimos anos do doutorado. Hoje eu sinto muito a sua falta.

Aos amigos que graças a Deus são muitos, mas infelizmente não posso menciona-los explicitamente. Porém, faço questão de dizer que me sinto muito afortunado por conhecer a duas pessoas maravilhosas: Leny y la Piratita. Gracias por haberse atravesado en mi vida.

Finalmente quero agradecer muito carinhosamente ao povo brasileiro por ter me concedido uma bolsa de estudo através da agência CAPES, e por fazer eu me sentir em casa.

# Resumo

A idéia subjacente a este trabalho é que o Universo possui uma estrutura geométrica que apresenta aspectos locais e globais. Certos aspectos globais associados à conectividade podem ser estudados observacionalmente. O exemplo mais simples é a existência de imagens múltiplas de objetos cósmicos. De fato, se o Universo for suficientemente pequeno para que a luz proveniente de algumas fontes tenha tido tempo de atravessá-lo, o céu deve apresentar imagens múltiplas de tais fontes. Sob condições adequadas estas imagens devem estar sendo registradas em catálogos astronômicos. Esta tese concentra-se nestes aspectos observacionais no contexto de modelos cosmológicos localmente homogêneos e isotrópicos.

Apresentam-se inicialmente dois conceitos topológicos fundamentais para o estudo da topologia cósmica: o grupo fundamental e os espaços de recobrimento. A seguir, para ilustrar o efeito da topologia do espaço ambiente na evolução de um sistema físico, estuda-se um sistema irradiante formado por um oscilador harmônico acoplado a um campo escalar sem massa em espaços localmente euclidianos com diferentes topologias. Mostra-se que este sistema é topologicamente frágil, no sentido de que se o espaço tem uma topologia não trivial, o comportamento do sistema é radicalmente diferente daquele que ele apresenta quando o espaço ambiente é simplesmente conexo.

A seguir estudam-se os modelos cosmológicos localmente homogêneos e isotrópicos. Formaliza-se o conceito de catálogo de fontes discretas, discute-se sob que condições tais catálogos apresentam imagens múltiplas e estuda-se quando é que pode-se esperar que o Universo seja pequeno. Por último, faz-se um estudo detalhado do método de Cristalografia Cósmica. Encontra-se que o método CC, além de ser sensível à topologia apenas nos casos euclidiano e esférico, não é um método adequado para extrair informação topológica do Universo. A inadequação deste método deve-se, em parte, ao fato de estar baseado em correlações de distâncias entre fontes cósmicas. Finalmente faz-se um relato dos resultados contidos nesta tese e sugerem-se futuros temas de pesquisa em Topologia Cósmica com fontes discretas.

As variedades tridimensionais com curvatura seccional constante são descritas em de-

talhe em um apêndice. Apresenta-se a classificação das formas espaciais euclidianas e esféricas. Como o problema da classificação das formas espaciais hiperbólicas não foi ainda resolvido, apresentam-se apenas alguns resultados fundamentais sobre variedades hiperbólicas.

# Abstract

The idea behind this thesis is that the Universe has a geometrical structure with both local and global aspects. Some global aspects associated with connectivity can be studied observationally, the simplest example being the existence of multiple images of cosmic objects. In fact, if the Universe were small enough so that the light coming from some sources had time to traverse it a number of times, the sky would in principle exhibit multiple images of such sources. Under suitable conditions these images could be recorded in astronomical catalogs. This thesis focuses on such observational aspects in the context of locally homogeneous and isotropic cosmological models.

Initially, the fundamental group and covering spaces are presented as the two most fundamental tools for studying cosmic topology. Next, to illustrate the effects of the topology of the ambient space on the evolution of a physical system, a radiating system is studied, consisting of a harmonic oscillator coupled to a massless scalar field in locally Euclidean spaces with different topologies. It is shown that this system is topologically fragile, in the sense that if the ambient space is topologically non-trivial, the behavior of the system is radically different from what it would exhibit if the ambient space were simply connected.

In the next chapter, locally homogeneous and isotropic cosmological models are studied, and the concept of a catalog of cosmic sources is formalized. Conditions are discussed under which such catalogs present multiple images, and also for the Universe to be small. A detailed study of the Cosmic Crystallography (CC) method is then performed. It is found that the CC method is sensitive to topology only in the Euclidean and spherical cases, and even in these cases it is an unsuitable method for extracting topological information from the Universe. The inadequacy of this method is found to be due to its reliance on distance correlations of cosmic sources. Finally, an overview is given of the results obtained in this work, and possible future lines of research in Cosmic Topology with discrete sources are briefly discussed.

The 3-manifolds with constant sectional curvature are described in an appendix, where the classification of the Euclidean and the spherical space forms are also presented. Since

the problem of classification of hyperbolic space forms has not been solved yet, in this case only some fundamental results on hyperbolic manifolds are presented.

# Conteúdo

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Geometria e topologia</b>	<b>8</b>
1.1 Variedades diferenciais . . . . .	9
1.1.1 Definições e exemplos . . . . .	10
1.1.2 Variedades quociente . . . . .	18
1.1.3 Orientabilidade . . . . .	25
1.2 O grupo fundamental . . . . .	27
1.2.1 Homotopia de laços . . . . .	28
1.2.2 Tipos de homotopia . . . . .	32
1.3 O teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	35
1.3.1 Elementos da teoria combinatória de grupos . . . . .	35
1.3.2 Aplicações do teorema de Seifert-Van Kampen . . . . .	38
1.4 Espaços de recobrimento . . . . .	41
1.4.1 O grupo fundamental do círculo . . . . .	41
1.4.2 Levantamentos e transformações de recobrimento . . . . .	43
<b>2 Fragilidade topológica</b>	<b>49</b>
2.1 Sistema oscilador-campo escalar . . . . .	50
2.2 Acoplamento pontual . . . . .	53
2.3 Reverberações topológicas . . . . .	56
<b>3 Cosmologia em universos pequenos</b>	<b>63</b>
3.1 Modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître . . . . .	64
3.1.1 Espaços-tempos de Robertson-Walker . . . . .	65



3.1.2	Equações de Einstein e soluções cosmológicas . . . . .	70
3.1.3	Relações redshift-distância e redshift-tempo . . . . .	73
3.2	Catálogos em universos pequenos . . . . .	79
3.2.1	Regras de construção . . . . .	80
3.2.2	Catálogos com imagens múltiplas . . . . .	84
3.2.3	Universos pequenos localmente euclidianos . . . . .	86
3.2.4	Universos pequenos localmente não-euclidianos . . . . .	88
3.3	Cristalografia cósmica . . . . .	90
3.3.1	A assinatura topológica . . . . .	91
3.3.2	Identificando picos topológicos . . . . .	99
3.3.3	HSP's com o mesmo espectro de picos . . . . .	104
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>111</b>
4.1	Discussão dos resultados . . . . .	112
4.1.1	Resultados principais . . . . .	112
4.1.2	Outros resultados . . . . .	114
4.2	Perspectivas . . . . .	115
4.2.1	Conexão entre curvatura e topologia . . . . .	115
4.2.2	Correlações angulares . . . . .	117
4.2.3	Catálogos com galáxias de núcleo ativo . . . . .	119
4.2.4	Geração automática de catálogos simulados . . . . .	121
<b>A</b>	<b>As geometrias clássicas</b>	<b>123</b>
A.1	Espaços métricos . . . . .	124
A.2	Geometria euclideana . . . . .	126
A.3	Geometria esférica . . . . .	129
A.4	Geometria hiperbólica . . . . .	131
<b>B</b>	<b>Teoria de Grupos</b>	<b>139</b>
B.1	Grupos e subgrupos . . . . .	139
B.2	Homomorfismos . . . . .	141
B.3	Subgrupos normais e grupos quociente . . . . .	143
B.4	Produto semi-direto . . . . .	146
<b>C</b>	<b>Espaços de curvatura constante</b>	<b>147</b>
C.1	Poliedros fundamentais e instruções de colagem . . . . .	148
C.1.1	Recobrimentos riemannianos . . . . .	149

C.1.2	Poliedros de Dirichlet e instruções de colagem . . . . .	152
C.2	Formas espaciais euclidianas . . . . .	156
C.2.1	Formas espaciais euclidianas bidimensionais . . . . .	157
C.2.2	Formas espaciais euclidianas tridimensionais . . . . .	162
C.2.3	Poliedros fundamentais de formas espaciais euclidianas . . . . .	170
C.3	Formas espaciais esféricas . . . . .	177
C.3.1	Os grupos $SO(4)$ e $SO(3) \times SO(3)$ . . . . .	178
C.3.2	As formas espaciais esféricas tridimensionais. . . . .	181
C.4	Formas espaciais hiperbólicas . . . . .	185

<b>Bibliografia</b>		<b>188</b>
---------------------	--	------------

# Lista de Tabelas

3.1	Localização de saltos de isometrias não translacionais. . . . .	109
C.1	Formas espaciais euclidianas tridimensionais não compactas. . . . .	165
C.2	Formas espaciais euclidianas tridimensionais compactas orientáveis. . . . .	168
C.3	Formas espaciais euclidianas tridimensionais compactas não orientáveis. . . . .	169
C.4	Função distância das primeiras translações de uma forma da classe $\mathcal{G}_6$ . . . . .	175

# Lista de Figuras

1.1	Mudança de cartas . . . . .	11
1.2	Projeção estereográfica . . . . .	13
1.3	Expressão local de uma função diferenciável . . . . .	15
1.4	Ação discreta que não é propriamente descontínua. . . . .	22
1.5	Grupo de simetrias do quadrado. . . . .	35
1.6	Figura 8 no plano. . . . .	38
1.7	Cálculo do grupo fundamental do toro bidimensional. . . . .	40
2.1	Prova do comportamento assintótico da amplitude do oscilador . . . . .	58
2.2	Amplitude do oscilador em $E^2 \times S^1$ . . . . .	60
2.3	Energia armazenada no oscilador em $E^2 \times S^1$ . . . . .	62
3.1	Relação redshift-distância com $\Omega_{m0} \neq 0$ e $\Omega_{\Lambda 0} \neq 0$ . . . . .	89
3.2	HSP de uma variedade de tipo $\mathcal{G}_6$ . . . . .	100
3.3	HSPM de uma variedade de tipo $\mathcal{G}_6$ . . . . .	101
3.4	Erro percentual no quadrado da separação de pares em função do redshift .	102
3.5	HSP e HSPM de uma variedade de tipo $\mathcal{G}_1$ . . . . .	106
3.6	HSPE de uma variedade de tipo $\mathcal{G}_1$ . . . . .	107
3.7	Assinatura topológica de isometrias não translacionais . . . . .	108
A.1	Lugar geométrico equidistante de dois pontos. . . . .	129
A.2	Retas hiperbólicas paralelas. . . . .	137
A.3	Retas hiperbólicas paralelas que se tocam no infinito. . . . .	138
C.1	Poliedro fundamental e instruções de colagem para o orbifold de Ellis . . .	170
C.2	Instruções de colagem para uma variedade de tipo $\mathcal{G}_6$ . . . . .	172
C.3	Identificação das arestas num poliedro fundamental para uma variedade de tipo $\mathcal{G}_6$ . . . . .	174
C.4	Variedade de tipo $\mathcal{G}_2$ que recobre uma de tipo $\mathcal{G}_6$ . . . . .	176

C.5	Variedades hiperbólicas em função do comprimento da menor geodésica	
	fechada . . . . .	186

# Introdução

*One could imagine that as a result of enormously extended astronomical experience, the entire Universe consists of countless identical copies of our Milky Way, that the infinite space can be partitioned into cubes each containing an exactly identical copy of our Milky Way. Would we really cling on to the assumption of infinitely many identical repetitions of the same world? In order to see how absurd this is consider the implication that we ourselves as observing subjects would have to be present in infinitely many copies. We would be much happier with the view that these repetitions are illusory, that in reality space has peculiar connection properties so that if we leave any one cube through a side, then we immediately reenter it through the opposite side. The space that we have posited here is nothing other than the simplest Clifford-Klein space, a finite space with Euclidean geometry...*

*Karl Schwarzschild*

Esta análise, feita no final do século passado, descreve claramente o tipo de observações astronômicas que nos levariam à conclusão de que um melhor modelo para a descrição do nosso Universo é o de um espaço cujas propriedades de conectividade globais são diferentes das que estamos acostumados pela simples extrapolação da nossa experiência cotidiana. Estas propriedades globais seriam responsáveis pelas observações de cópias idênticas de fontes cósmicas no firmamento, observações que dificilmente poderiam ser explicadas como sendo produto de uma multiplicidade de objetos idênticos. Dito de uma outra forma, uma explicação mais natural, porém inicialmente contraintuitiva para a existência de imagens múltiplas de um mesmo objeto cósmico, seria a de que estas cópias idênticas não são mais do que imagens de um mesmo objeto que estaria sendo observado a partir de direções diferentes devido à peculiar “topologia” do nosso Universo. É interessante

observar que esta idéia foi sugerida à comunidade científica bem antes da formulação da teoria da Relatividade Geral por Albert Einstein.

Observações recentes da radiação cósmica de fundo feitas pelo satélite COBE [9], e resultados matemáticos [34, 108] sugerem fortemente que, com um alto grau de aproximação, o nosso Universo pode ser descrito localmente por uma métrica de Robertson-Walker (RW). Existem três famílias de modelos de universo compatíveis com uma métrica de RW, cada uma delas caracterizada pelo parâmetro  $k$  (a curvatura seccional normalizada das seções espaciais de um universo RW) que pode tomar os valores  $1, 0, -1$ . As seções espaciais de um modelo de universo com  $k = 0$  são descritas pela geometria euclideana, considera-se que cada seção espacial é o espaço euclideano, e portanto este modelo de universo tem extensão espacial infinita. Num modelo de universo com  $k = -1$  as seções espaciais são descritas pela geometria hiperbólica, neste caso costuma-se supor que cada seção espacial é o espaço hiperbólico, e portanto este modelo de universo tem também extensão espacial infinita. Por último, num modelo de universo com  $k = 1$  as seções espaciais são descritas pela geometria esférica, considera-se aqui que cada seção espacial é a esfera tridimensional, e portanto estes modelos de universo tem necessariamente extensão espacial finita. Desta forma, a antiga questão da finitude do espaço ficaria resolvida se pudéssemos determinar o valor de  $k$ , que por sua vez fica determinado pelo valor da densidade total de matéria e energia no Universo; pelo menos no contexto da Relatividade Geral.

Nesta concepção tradicional da cosmologia considera-se que toda seção espacial de um modelo cosmológico possui a propriedade topológica de que toda curva simples fechada pode ser continuamente deformada até colapsar em um ponto. Estes espaços são chamados de simplesmente conexos. Sabe-se, porém, que existem infinitos modelos de universos multiplamente conexos (não simplesmente conexos) consistentes com cada métrica RW, podendo ser estes espacialmente finitos ou infinitos quando  $k = -1$  ou  $0$ . Dois modelos com o mesmo valor de  $k$  possuem as mesmas propriedades espaciais locais, diferenciando-se porém nas suas propriedades de conectividade globais. Costuma-se referir às propriedades de conectividade globais das seções espaciais de um modelo de universo como a topologia do universo. Os modelos cosmológicos simplesmente conexos, considerados no enfoque tradicional da cosmologia, são referidos como modelos cosmológicos com topologia trivial; os modelos cosmológicos com topologia não trivial são aqueles com seções espaciais multiplamente conexas.

As teorias clássicas de gravitação e cosmologia vinculam dinamicamente quantidades locais como a curvatura e a torsão do espaço-tempo ao conteúdo de matéria-energia do universo. Estes vínculos se constroem usando equações diferenciais e são, portanto,

locais. Não parece existir uma maneira de vincular classicamente aspectos globais do espaço-tempo ao conteúdo de matéria-energia, porém a situação muda se se considera um tratamento quântico do problema. De fato, existem fortes indícios de que uma teoria quântica da gravitação possa relacionar a topologia do espaço-tempo à sua evolução dinâmica.<sup>1</sup> Porém, num contexto clássico, sob determinadas condições, dois modelos de universo com a mesma geometria local, mas globalmente distintos, exibem efeitos observáveis característicos. Pode-se portanto pensar na possibilidade real de se determinar a forma global do nosso Universo através de observações astronômicas ou astrofísicas. Esta linha de pesquisa foi examinada ocasionalmente desde início deste século, mas a maior parte dos artigos publicados nesta área foi produzida apenas nos últimos 10 anos (ver [63, 107]).

Um modelo de universo topologicamente não trivial que possua características que permitam detectar a sua topologia é conhecido como modelo de universo pequeno. Correspondentemente, diremos que vivemos num universo pequeno se for possível descrever o nosso Universo com algum destes modelos. No entanto, sabe-se muito pouco sobre quais são os efeitos observáveis decorrentes de nosso Universo ser pequeno, e nenhum dos efeitos conhecidos atualmente tem sido observável de maneira confiável na prática. Em outras palavras, conhecem-se poucos métodos aplicáveis para determinar a topologia do nosso Universo, e a tecnologia disponível ainda não é suficiente para pô-los em prática. Além disso, do ponto de vista teórico sabe-se muito pouco sobre quais são as condições específicas que definem um modelo de universo pequeno.

A pretensão deste trabalho é avançar na direção da determinação destas condições, e propor uma linha de ataque ao problema de construir métodos confiáveis que permitam (i) identificar se vivemos num universo pequeno, e (ii) determinar o tamanho e forma do nosso Universo. Em resumo, a linha de pesquisa sugerida pelo presente trabalho é a seguinte:

1. **Estudar a evolução de sistemas físicos em modelos de universo com topologia não trivial.** O estudo comparativo de sistemas físicos em modelos de universo com diferentes topologias permite selecionar efeitos característicos devidos à topologia. Por exemplo, pode-se investigar se aparecem efeitos quânticos devidos à topologia em modelos do universo primordial, e se alguns destes efeitos deixaram traços característicos fisicamente detectáveis na presente época.

---

<sup>1</sup>Em vários níveis nota-se que o formalismo da mecânica quântica está fortemente ligado à estrutura topológica do espaço base onde esta é desenvolvida, e é capaz inclusive de determinar univocamente esta topologia. Os resultados mais surpreendentes nesta linha de pesquisa são, infelizmente, pouco conhecidos (ver [6, 58, 60, 83, 99])



2. **Desenvolver métodos eficientes de detecção de propriedades de conectividade globais.** Esta etapa consiste em estabelecer procedimentos observacionais e de análise de dados que permitam extrair uma *assinatura topológica* do nosso Universo, e isto só é possível uma vez identificado e estudado algum processo ou sistema físico capaz de deixar traços observáveis na presente época. Nesta etapa, cada método em desenvolvimento deve ser testado por meio de simulações para determinar sua eficiência e margem de aplicabilidade.
3. **Determinar limites no tamanho e forma do nosso Universo.** Os métodos selecionados por sua eficácia e aplicabilidade são, finalmente, *postos para trabalhar* usando dados reais. O objetivo desta última etapa é restringir os limites no tamanho e forma do nosso Universo e, eventualmente, determinar sua topologia.

Analisemos um exemplo simples de como por em prática o programa mencionado acima. A predição mais simples que pode se fazer sob a hipótese de vivermos num universo suficientemente pequeno é a existência de imagens múltiplas de fontes astrofísicas discretas. Com efeito, se o nosso Universo for pequeno o suficiente para que a luz proveniente de algumas fontes (como por exemplo quasares) tenha tido tempo de atravessá-lo, o céu que observamos deve apresentar múltiplas cópias de tais fontes. Estas imagens distintas de uma mesma fonte estão correlacionadas pelo grupo de recobrimento da variedade que modela as seções espaciais do nosso Universo, e sob condições adequadas devem estar sendo registradas em catálogos astronômicos. Portanto, um primeiro passo para construir métodos de detecção da topologia do nosso Universo, é estudar as condições que permitam a existência de imagens múltiplas em catálogos existentes, ou em fase de construção. Numa segunda etapa, devem ser estudadas as possíveis maneiras de extrair informação topológica do Universo a partir destes catálogos. Finalmente, depois de desenvolvidos e testados, estes métodos devem ser postos para trabalhar com catálogos reais para tentar extrair informação sobre o tamanho e forma do Universo. Nesta tese discute-se com detalhe este problema.

Em resumo, a idéia subjacente a todo este trabalho é que nosso Universo possui uma estrutura matemática, fundamentalmente geométrica.<sup>2</sup> Esta estrutura geométrica do Universo possui características locais e globais, porém a cosmologia tem-se concentrado, quase exclusivamente, no estudo dos seus aspectos locais. De fato, independentemente de qualquer definição formal dos conceitos *local* e *global*, é intuitivamente claro que os resultados experimentais diretamente relacionados com a estrutura geométrica do nosso Universo são inerentemente locais. Como consequência, os modelos teóricos de que dispomos pa-

---

<sup>2</sup>Para uma análise crítica deste pressuposto veja, por exemplo, [113].

ra descrever o nosso Universo estão formulados em termos de leis locais da física. As equações de Einstein, por exemplo, são equações diferenciais que relacionam a curvatura de cada região do espaço-tempo com o conteúdo material do Universo naquela região; e a curvatura é um conceito geométrico local. O quadro muda ao considerar o campo da cosmologia observacional. Certos aspectos globais do Universo, associados à conectividade da sua estrutura geométrica, podem ser estudados observacionalmente. O exemplo mais simples é a possibilidade de observar imagens múltiplas de objetos cósmicos, como foi mencionado acima. Esta tese concentra-se nestes aspectos observacionais no contexto de modelos cosmológicos localmente homogêneos e isotrópicos, os modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître (FL). Cabe observar, no entanto, que, no contexto de outra teoria geométrica de gravitação, os modelos cosmológicos análogos aos modelos FL são modelos com homogeneidade e isotropia espacial local, e em consequência com seções espaciais com curvatura seccional constante. Portanto, todas as considerações puramente geométricas feitas neste trabalho são também aplicáveis a estes modelos.

A seguir é descrito o esquema geral desta tese. Cada capítulo tem sua própria introdução onde são justificados os tópicos apresentados. Supõe-se, por parte do leitor, um conhecimento da geometria diferencial e semi-riemanniana em nível de textos padrão de geometria escritos para físicos [21, 77, 100, 116], porém é minha opinião que um conhecimento de geometria em nível de textos como [23, 79, 87, 122] é conveniente para uma melhor compreensão da estrutura matemática subjacente à Topologia Cósmica. Supõe-se também um conhecimento da Teoria Geral da Relatividade e Cosmologia Relativista em nível de textos como [59, 119].

No capítulo 1 são apresentados os conceitos de geometria e topologia das variedades relevantes ao problema da determinação da estrutura geométrica global do nosso Universo. O capítulo começa com uma breve introdução aos conceitos de variedades e funções diferenciáveis, estruturas básicas sobre as quais se apoiam as construções matemáticas necessárias para o estudo da estrutura geométrica do nosso Universo. Logo depois passamos a estudar um método padrão de construção de variedades com propriedades de conectividade globais do tipo que esperamos existam no nosso Universo. Contudo, o corpo central deste capítulo está dedicado à apresentação dos dois conceitos topológicos fundamentais para o estudo da topologia cósmica: o grupo fundamental e os espaços de recobrimento. Uma ênfase especial é dada ao Teorema de Seifert-Van Kampen, ferramenta poderosa para calcular grupos fundamentais.

A fragilidade topológica é a sensibilidade do comportamento de um sistema físico em relação à estrutura topológica do espaço onde o sistema está imerso. No capítulo 2 estuda-se um sistema irradiante topologicamente frágil, formado por um oscilador harmônico

acoplado a um campo escalar sem massa num espaço localmente euclidiano [13, 49]. Este sistema é topologicamente frágil, no sentido de que quando em um espaço com topologia não trivial se comporta de forma radicalmente diferente a quando em um espaço simplesmente conexo.

No capítulo 3 estudam-se modelos cosmológicos localmente homogêneos e isotrópicos. Neste capítulo também formaliza-se o conceito de catálogo de fontes discretas no contexto de espaços-tempos RW, discute-se sob que condições tais catálogos apresentam imagens múltiplas e estuda-se, com certo detalhe, quando é que pode-se esperar que nosso Universo seja pequeno. Por último, faz-se um estudo detalhado do método de Cristalografia Cósmica. Este método foi proposto em [64] e analisado em detalhe em [37, 38, 46, 47, 48, 50, 65]. Encontra-se que o método CC, além de ser sensível à topologia apenas nos casos plano ou esférico, não é um método eficiente para extrair informação topológica do nosso Universo. Mostra-se também que os limites no tamanho e forma do nosso Universo, obtidos aplicando este método, não são confiáveis. A ineficiência deste método deve-se, em parte, ao fato de estar baseado em correlações de distâncias entre fontes cósmicas.

No capítulo 4 faz-se um reconto dos resultados contidos nesta tese e discutem-se futuros temas de pesquisa em Topologia Cósmica com fontes discretas.

A tese contém também três apêndices. No apêndice A estudam-se as geometrias com curvatura seccional constante: a geometria euclidiana, a esférica e a hiperbólica. Estas três geometrias, no caso tridimensional, servem de base para a construção de possíveis modelos do nosso Universo. O apêndice B é uma apresentação concisa da teoria de grupos, neste apêndice apresentamos os conceitos básicos necessários para uma compreensão do conteúdo do apêndice C. As variedades tridimensionais com curvatura seccional constante são usadas para descrever o nosso Universo no contexto dos modelos cosmológicos FL. Por isso o apêndice C, depois de expor certos resultados gerais sobre tais variedades riemannianas, concentra-se na classificação das formas espaciais euclidianas e esféricas. Como o problema da classificação das formas espaciais hiperbólicas não foi ainda resolvido, neste apêndice são apresentados apenas alguns resultados fundamentais sobre variedades hiperbólicas.

A extensão deste trabalho deve-se principalmente ao esforço feito para que esta tese possa servir de texto (pelo menos de referência) a quem quiser iniciar seus estudos nesta área de pesquisa em rápida expansão. Desta forma, ao longo de todo o texto encontram-se numerosos exemplos, muitos dos quais são utilizados posteriormente. Porém, além da teoria matemática básica, os resultados apresentados estão relacionados, quase que exclusivamente, ao problema da detecção da topologia do nosso Universo usando fontes

discretas, e particularmente ao método de Cristalografia Cósmica.

Por último, muitos resultados são enunciados usando o estilo matemático de lemas, teoremas e corolários, em parte por uma questão de gosto pessoal, mas principalmente devido ao fato de que este estilo de apresentação facilita a referência a tais resultados em seções e capítulos posteriores (e algumas vezes anteriores).

# Capítulo 1

## Geometria e topologia

*The simplicities of natural laws arise through the complexities of the languages we use for their expression.*

*Eugene Wigner*

*Structures are the weapons of the mathematician.*

*Nicholas Bourbaki (pseudônimo)*

Para especificar a posição de um ponto numa determinada região do espaço precisamos de um sistema de coordenadas formado por três eixos não paralelos e concorrentes. Na linguagem matemática moderna, o espaço físico é “localmente” idêntico ao espaço de ternas ordenadas de números reais  $R^3$ . Porém, isto não implica que o espaço físico seja “globalmente” idêntico a  $R^3$ . De fato, uma análise simples mostra que não é possível determinar as propriedades globais do espaço a partir, unicamente, das suas propriedades locais.<sup>1</sup> Dizemos, então que o nosso espaço físico é uma variedade tridimensional real.

Este capítulo está dedicado a estabelecer certas relações gerais entre propriedades locais e globais da estrutura geométrica do espaço-tempo, começando na seção 1.1 com a definição de variedade diferencial como objeto básico na modelagem da estrutura do nosso Universo. Nesta mesma seção são apresentados o conceito de aplicação diferenciável entre variedades, um método para construir variedades baseado na passagem ao quociente pela ação de um grupo sobre uma variedade *mãe*, e finalmente, e muito brevemente, o conceito de orientabilidade em variedades diferenciais.

Na seção 1.2 é apresentado o grupo fundamental de um espaço topológico. Para cada

---

<sup>1</sup>Na verdade, as propriedades locais do espaço restringem suas propriedades globais mas, como veremos neste e no apêndice C, não conseguem fixá-las univocamente. Veja também a subseção 4.2.1 para uma discussão da relação entre curvatura e topologia.

espaço topológico  $X$ , no qual dois pontos quaisquer podem ser unidos por um caminho, associa-se um grupo que revela a existência e a estrutura dos caminhos fechados que não podem ser deformados continuamente a um ponto: o grupo fundamental  $\pi_1(X)$ . Se este grupo for trivial significa que todo caminho fechado em  $X$  pode colapsar de maneira contínua a um ponto. Um espaço topológico com grupo fundamental trivial é chamado de simplesmente conexo, ou no contexto da topologia cósmica, espaço com topologia trivial.

Na seção 1.3 é apresentado em detalhe o Teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 1.7), uma ferramenta poderosa para calcular o grupo fundamental de um espaço topológico a partir de uma decomposição adequada deste. Por último, a seção 1.4 é uma exposição dos espaços de recobrimento. O ponto central desta seção é a existência do recobrimento universal de uma variedade, e do fato que toda variedade pode ser construída a partir do seu recobrimento universal usando o método, apresentado na subseção 1.1.2, da passagem ao quociente pela ação de um grupo. Uma consequência fundamental deste resultado é que o grupo usado para fazer este quociente é isomorfo ao grupo fundamental da variedade resultante.

As referências mais consultadas na preparação deste capítulo foram [18, 73, 112], onde podem ser encontrados detalhes e extensões dos tópicos aqui apresentados. Uma apresentação elementar e bastante didática da teoria do grupo fundamental e espaços de recobrimento pode ser encontrada em [62].

## 1.1 Variedades diferenciais

Intuitivamente, uma variedade  $m$ -dimensional real é um espaço localmente idêntico a  $R^m$ . O uso dos termos “localmente” e “idêntico” é feito de forma propositalmente vaga com o intuito de englobar, na idéia de variedade, uma ampla gama de objetos matemáticos. Existem diversos tipos de variedades: topológicas, diferenciais, semi-riemannianas, simplécticas, euclidianas, de contato, etc., cada tipo correspondendo a um significado preciso dos termos “localmente” e “idêntico”. Em cada caso, o termo “idêntico” é usado para indicar o tipo de estrutura matemática considerada como relevante.

O tipo de estrutura mais geral, relevante para a física, é o de variedade diferencial. As variedades diferenciais, além de servirem como base para a construção de modelos do nosso Universo, são de grande utilidade em outras áreas da física. Variedades diferenciais são usadas, p. ex., na mecânica clássica, na teoria da elasticidade, na termodinâmica, no electromagnetismo, e nas suas generalizações: as teorias de gauge. Na definição de variedade diferencial, o conceito de localidade é tomado no sentido mais amplo possível: uma região da variedade é considerada local se for homeomorfa a  $R^m$ . Além disso, como

a estrutura relevante é a diferenciabilidade de funções, no caso de variedades diferenciais, “idêntico” quer dizer “difeomorfo”. Uma variedade diferencial  $m$ -dimensional é, portanto, um espaço onde regiões homeomorfas a  $R^m$  são, na verdade, difeomorfas a ele. O conceito de variedade diferencial é estudado em detalhe na subseção 1.1.1.

Na subseção 1.1.2 é apresentado um método poderoso e de amplo uso na construção de variedades diferenciais. Este método começa classificando os pontos de uma variedade, de modo que se o método de classificação segue certas regras, o conjunto das classes de equivalência resultante é também uma variedade diferencial. Especificamente, nesta subseção são estudadas estas regras, que estão baseadas na ação de grupos de difeomorfismos da variedade inicial. A apresentação deste método de construção de variedades é feita com maior detalhe que na maioria de textos devido ao seu amplo uso na construção de modelos cosmológicos com topologias não triviais. Por último, na subseção 1.1.3 estudamos a orientabilidade em variedades diferenciais, e apresentamos alguns critérios para determinar se uma variedade é orientável ou não.

### 1.1.1 Definições e exemplos

A descrição de uma variedade diferencial como sendo um conjunto localmente difeomorfo a  $R^m$  (para algum inteiro positivo  $m$ ), é suficiente do ponto de vista intuitivo. Porém, do ponto de vista técnico, esta definição possui deficiências que são resolvidas através da introdução de duas restrições adicionais.

Começamos definindo um tipo de variedade mais geral. Uma **variedade topológica** é um espaço topológico  $M$  localmente homeomorfo a  $R^m$  (para algum inteiro positivo  $m$ ) que satisfaz duas condições adicionais:  $M$  possui a propriedade de Hausdorff e tem base enumerável. Em outras palavras,  $M$  é um espaço topológico tal que

1. Existem (i) uma cobertura aberta  $\mathcal{U}$  de  $M$  tal que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , onde  $\mathcal{A}$  é um conjunto de índices; e (ii) homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset R^m, \alpha \in \mathcal{A}. \quad (1.1)$$

O número  $m$  é a **dimensão** de  $M$ , e escrevemos  $\dim M = m$ .

2. (Hausdorff) Para quaisquer dois pontos  $p, q \in M$ , existem vizinhanças disjuntas  $U \ni p$  e  $V \ni q$ .
3. (Base enumerável)  $M$  pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças, de modo que todo aberto de  $M$  é união destas vizinhanças.

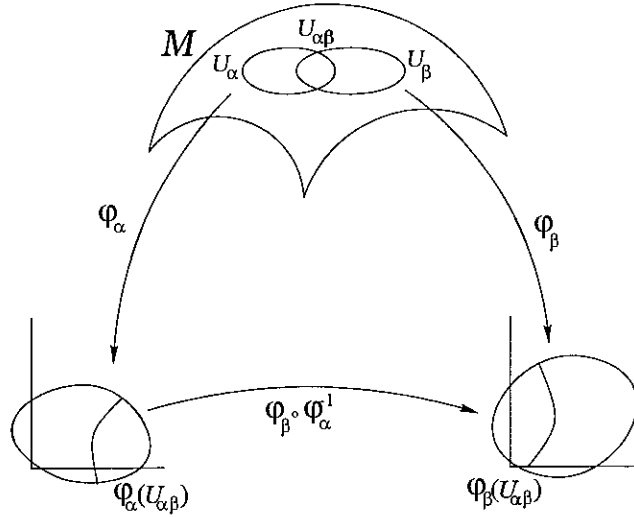


Figura 1.1: A mudança de cartas  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  na variedade  $M$  é um homeomorfismo entre os abertos  $\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$  e  $\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ . Impondo condições nestas funções é possível introduzir estruturas adicionais em  $M$ ; por exemplo, escolhendo um atlas em  $M$  tal que todas as mudanças de cartas sejam diferenciáveis obtemos uma estrutura diferencial em  $M$ .

A primeira condição estabelece que  $M$  é localmente homeomorfa a  $R^m$ , ou seja, que em torno de cada ponto de  $M$  existe uma vizinhança homeomorfa a  $R^m$ . Por outro lado, a condição de Hausdorff garante, entre outras coisas, que uma sequência convergente em  $M$  possui um limite único. Esta propriedade é fundamental para construir uma teoria de diferenciação que permita estender às variedades os resultados do cálculo em  $R^m$ . Finalmente, a terceira condição é essencial para garantir a existência de uma partição da unidade em  $M$ , condição necessária para a construção de uma teoria de integração em variedades. Estas duas condições topológicas adicionais são satisfeitas por  $R^m$ , porém o mero fato de um espaço ser localmente homeomorfo a  $R^m$  não garante que este também as satisfaça. É por esta razão que as condições 2 e 3 devem ser incluídas na definição de variedade diferencial.

Uma **carta** em  $M$  é um par  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , com  $\varphi_\alpha$  dado por (1.1). Uma família  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de cartas em  $M$  tal que  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  cobre  $M$  chama-se **atlas** de  $M$ . As funções

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}), \quad (1.2)$$

onde  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ , são chamadas **mudanças de cartas** para o atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  (veja a figura 1.1). As mudanças de cartas são homeomorfismos entre abertos de  $R^m$ , e é nelas, portanto, que podemos impor restrições que resultem em estruturas adicionais numa variedade topológica, dando assim lugar a tipos mais específicos de variedades. Esta idéia é explorada amplamente por Thurston em [112] mediante o uso de *pseudogrupos*.

Uma variedade diferencial é uma variedade topológica na qual as mudanças de cartas



são difeomorfismos. Mais formalmente, um atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  da variedade topológica  $M$  é chamado de **atlas diferencial** se cada mudança de cartas para  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  é um difeomorfismo de classe  $C^\infty$ . Dois atlas diferenciais são **equivalentes** se a sua união é um atlas diferencial. Uma classe de equivalência de atlas diferenciais de  $M$  é uma **estrutura diferencial** em  $M$ . Uma **variedade diferencial**  $M$  é uma variedade topológica junto com uma estrutura diferencial, e uma carta na variedade diferencial  $M$  é uma carta de algum atlas desta estrutura diferencial.

**Observação 1.1** É possível construir um segundo atlas  $\mathcal{V} = (V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in \mathcal{B}}$  numa variedade topológica  $M$ , neste caso a união  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  é um novo atlas de  $M$  que contém  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ . Na verdade, existe um atlas maximal de  $M$ , isto é, um atlas  $\mathcal{M}$  tal que todo atlas  $\mathcal{U}$  de  $M$  está contido em  $\mathcal{M}$ . Pode-se pensar em construir uma estrutura diferencial para  $M$  escolhendo uma carta deste atlas maximal, e selecionando a partir dela uma atlas diferencial. Quando isto é possível diz-se que a variedade topológica  $M$  é **diferenciável**, pois admite uma estrutura diferencial.<sup>2</sup> Toda variedade topológica de dimensão menor ou igual a três é diferenciável e admite uma única estrutura diferencial (veja p. ex. [112]). No entanto, em dimensões maiores existem variedades topológicas não diferenciáveis (veja por exemplo [41, 86]), e variedades topológicas diferenciáveis que admitem mais de uma estrutura diferencial [74]. O exemplo mais surpreendente deste fenômeno é  $R^4$ , que admite uma quantidade não enumerável de estruturas diferenciais não equivalentes (veja por exemplo [32, 42, 51] e também [105] para potenciais aplicações em física de partículas e cosmologia).

■

**Exemplo 1.1 Abertos em  $R^m$ .** Um conjunto aberto  $U \subset R^m$  é trivialmente uma variedade diferencial. Sua estrutura diferencial está definida pela carta  $(U, id_U)$ . Uma carta da variedade  $U$  é qualquer par  $(V, \varphi)$ , onde  $V \subset U$  é um aberto, e  $\varphi : V \rightarrow W \subset R^m$  é um difeomorfismo, ou seja, uma função diferenciável com inversa diferenciável. Em particular, o próprio  $R^m$  é uma variedade diferencial. ■

**Exemplo 1.2 Abertos numa variedade  $M$ .** Seja  $M$  uma variedade diferencial, então um aberto  $N \subset M$  é uma variedade diferencial com estrutura diferencial induzida pela estrutura diferencial de  $M$  da seguinte forma. Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $M$ , então  $(U \cap N, \varphi|_{U \cap N})$  é uma carta em  $N$ . ■

---

<sup>2</sup>Note-se a distinção entre os termos *diferencial* e *diferenciável*. Uma variedade topológica é diferenciável se admite uma estrutura diferencial. Por outro lado, uma variedade diferenciável  $M$  munida de uma estrutura diferencial, é uma variedade diferencial.

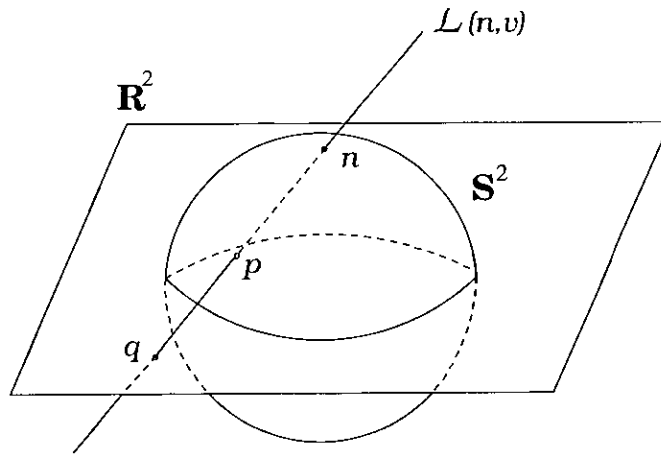


Figura 1.2: Qualquer reta que passa pelo pólo norte  $n$  e não é tangente à esfera  $S^2$  intercepta a esfera num único ponto  $p$ , e intercepta também o plano que passa pelo equador também num único ponto  $q$ . A projeção estereográfica a partir do pólo norte identifica estes dois pontos e estabelece um homeomorfismo entre  $R^2$  e  $S^2 \setminus \{n\}$ .

**Exemplo 1.3** A esfera  $m$ -dimensional  $S^m$ . A esfera  $m$ -dimensional é o conjunto

$$S^m = \{x \in R^{m+1} : |x| = 1\},$$

onde  $||$  é a norma euclideana em  $R^{m+1}$ . Para descrever cartas locais em  $S^m$  usando a projeção estereográfica resulta conveniente escrever  $R^{m+1}$  como o produto

$$R^{m+1} = R^m \times R = \{p = (x, y) : x \in R^m, y \in R\}.$$

Nesta notação, sejam  $n = (0, 1)$  o **pólo norte** e  $s = (0, -1)$  o **pólo sul** de  $S^m$ . Cada família de retas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(n, v) &= \{p = n + tv \in R^{m+1} : t \in R\} \text{ e} \\ \mathcal{L}(s, v) &= \{p = s + tv \in R^{m+1} : t \in R\}, \end{aligned}$$

com  $v \in R^{m+1}$ , define projeções estereográficas a partir dos pólos norte e sul respectivamente da seguinte forma (veja a figura 1.2). Cada reta  $\mathcal{L}(n, v)$  identifica um único ponto de  $R^m$  com cada ponto de  $S^m \setminus \{n\}$ .<sup>3</sup> De fato, para cada ponto da esfera  $p \in S^m \setminus \{n\}$ , ao escrever  $p = (x, y)$  e  $v = p - n$ , temos que para  $t = \frac{1}{1-y}$ , o ponto

$$\begin{aligned} q &= n + tv \\ &= \left( \frac{x}{1-y}, 0 \right) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Ao longo desta tese usamos a notação  $A \setminus B$  para indicar a operação *diferença* de conjuntos definida por

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

está no plano  $R^m \times \{0\}$ . Logo o conjunto de retas  $L(n, v)$  determina a seguinte bijeção contínua

$$\begin{aligned} \varphi_1 : S^m \setminus \{n\} &\rightarrow R^m \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1-y}. \end{aligned}$$

Seja agora  $q \in R^m$  e  $v = (q, 0) - n = (q, -1)$ . Para  $t = \frac{2}{|q|^2+1}$ , temos que

$$\begin{aligned} p &= n + tv \\ &= \left( \frac{2q}{|q|^2+1}, \frac{|q|^2-1}{|q|^2+1} \right). \end{aligned}$$

Como  $|p| = 1$ , segue-se que  $p \in S^m \setminus \{n\}$ . Portanto o conjunto de retas  $L(n, v)$  determina também a seguinte bijeção contínua

$$\begin{aligned} \psi_1 : R^m &\rightarrow S^m \setminus \{n\} \\ x &\mapsto \left( \frac{2x}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1} \right). \end{aligned}$$

Uma conta algébrica simples mostra que  $\psi_1 \circ \varphi_1 = id_{S^m \setminus \{n\}}$  e  $\varphi_1 \circ \psi_1 = id_{R^m}$ , portanto  $\varphi_1$  e  $\psi_1$  são homeomorfismos inversos um do outro. Para a projeção estereográfica a partir do pólo sul procedemos de forma análoga a partir de  $\mathcal{L}(s, v)$  e obtemos os homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi_2 : S^m \setminus \{s\} &\rightarrow R^m \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{1+y} \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 : R^m &\rightarrow S^m \setminus \{s\} \\ x &\mapsto \left( \frac{2x}{1+|x|^2}, \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \right), \end{aligned}$$

com  $\psi_2^{-1} = \varphi_2$ . Ambas projeções estereográficas munem  $S^m$  do atlas diferencial

$$\{(S^m \setminus \{n\}, \varphi_1), (S^m \setminus \{s\}, \varphi_2)\},$$

com efeito, a mudança de cartas

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : R^m \setminus \{0\} &\rightarrow R^m \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|^2}, \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. ■

No que resta desta seção e para simplificar a linguagem, uma variedade diferencial será chamada simplesmente de variedade. Vejamos como as cartas locais permitem visualizar

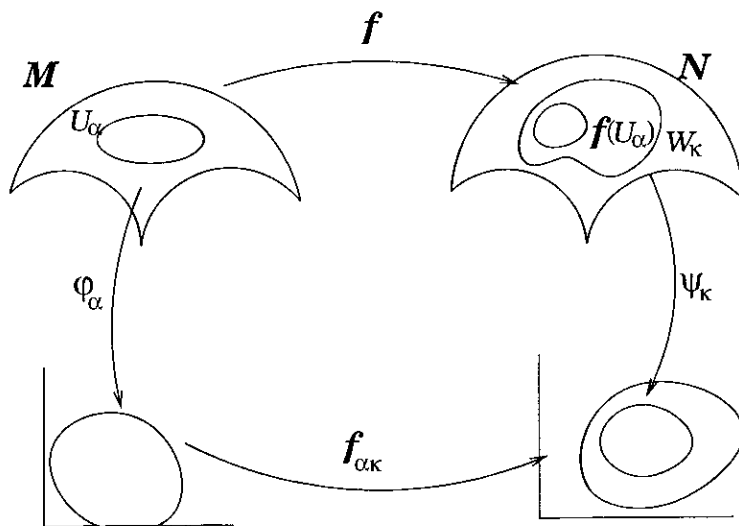


Figura 1.3: A figura ilustra a expressão local da função  $f : M \rightarrow N$  correspondente às cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$  e  $(W_k, \psi_k)$  de  $N$ . O conjunto de todas as expressões locais de uma função a determina univocamente.

objetos definidos em (ou entre) variedades em termos de objetos análogos definidos em abertos de  $R^m$ . Dada uma função  $f : M \rightarrow N$ , entre duas variedades  $M$  e  $N$ , a **expressão local** de  $f$  nas cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$  e  $(W_k, \psi_k)$  de  $N$ , onde  $f(U_\alpha) \subset W_k$ , é a função (veja a figura 1.3)

$$f_{\alpha k} = \psi_k \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \psi_k(W_k).$$

O conjunto de todas as expressões locais de  $f$  dá informação completa sobre esta função. Portanto, é possível definir funções com propriedades específicas a partir das suas expressões locais. Um exemplo deste procedimento é a definição de função diferenciável. Uma função  $f : M \rightarrow N$  é dita **diferenciável** se para algum atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $M$ , e outro  $(W_k, \psi_k)_{k \in K}$  de  $N$ , todas as expressões locais de  $f$  são funções diferenciáveis. O conjunto de todas as funções diferenciáveis de  $M$  a  $N$  é denotado por  $C^\infty(M, N)$ . Em particular, se  $N = R$ , o conjunto dos números reais, escrevemos  $\mathcal{F}(M)$  ao invés de  $C^\infty(M, R)$ . Se  $f \in \mathcal{F}(M)$ , a expressão local de  $f$  numa carta  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  de  $M$  é

$$f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow R.$$

As funções diferenciáveis são objetos fundamentais no estudo das variedades diferenciáveis. Praticamente todos os objetos de interesse na geometria diferencial são objetos definidos em termos de funções diferenciáveis entre variedades. Este é o caso dos vetores tangentes, campos vetoriais, formas diferenciais, etc. A introdução de estruturas adicionais, como conexões e métricas, é feita também mediante o uso de funções diferenciáveis. Mais ainda, certos tipos especiais de variedades, como os grupos de Lie e os fibrados, são

também definidos usando fortemente o conceito de função diferenciável. O nosso interesse principal concentra-se em dois tipos particulares de funções diferenciáveis que serão de amplo uso no decorrer deste trabalho: os difeomorfismos e as aplicações de recobrimento.

Um difeomorfismo entre duas variedades define-se de forma completamente análoga a um difeomorfismo entre abertos em  $R^m$ . Uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é um **difeomorfismo** se  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existe e é também diferenciável. Duas variedades são **difeomorfas** se existe um difeomorfismo entre elas. Do ponto de vista da estrutura diferencial, duas variedades difeomorfas são indistinguíveis. Isto é outra forma de dizer que duas variedades difeomorfas possuem as mesmas propriedades diferenciais. Porém, isto não deve ser interpretado como se duas variedades difeomorfas fossem uma mesma variedade diferencial.

**Exemplo 1.4** Considere o elipsoide

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in R^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\},$$

com  $a, b, c$  não nulos. De maneira análoga ao exemplo 1.3, as projeções estereográficas desde dois pontos antípodas mostra que  $\mathcal{E}$  é uma variedade diferencial. É fácil mostrar também que a função

$$\begin{aligned} f : \mathcal{E} &\rightarrow S^2 \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Porém  $\mathcal{E}$  e  $S^2$  são dois subconjuntos distintos de  $R^3$ , e portanto duas variedades distintas. ■

Sejam  $M$  e  $N$  variedades difeomorfas. O conjunto de todos os difeomorfismos de  $M$  em  $N$  é denotado por  $Diff(M, N)$ , em particular o conjunto dos difeomorfismos de  $M$  em  $M$  (ou seja, quando  $N = M$ ) é denotado por  $Diff(M)$ . É fácil ver que  $Diff(M)$ , munido com a composição de funções, é um grupo. As propriedades diferenciais de uma variedade estão codificadas no seu grupo de difeomorfismos. De fato, a geometria diferencial pode ser considerada como o estudo das propriedades de uma variedade, que são invariantes pela ação do seu grupo de difeomorfismos.

Uma função  $f : M \rightarrow N$  é um **difeomorfismo local** se existe um atlas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  de  $M$  tal que toda restrição

$$f|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow f(U_\alpha) \subset N$$

é um difeomorfismo. Um difeomorfismo é sempre um difeomorfismo local, porém a recíproca não é verdadeira. Existem difeomorfismos locais que não são difeomorfismos (veja o exemplo 1.5 logo adiante).

Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função diferenciável. Em geral  $f$  não é uma função injetiva, isto é, para algum  $q \in N$ , o conjunto  $f^{-1}(q)$  pode conter mais de um ponto de  $M$ . Mais ainda, seja  $U \subset N$  um aberto conexo, então  $f^{-1}(U)$  pode consistir de varias componentes conexas abertas de  $M$ . Diz-se que um aberto conexo  $U \subset N$  é **admissível** se  $f$  mapeia difeomorficamente cada componente conexa de  $f^{-1}(U)$  em  $U$ . Um **recobrimento** é uma terna  $(M, f, N)$ , onde  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável,  $M$  e  $N$  são variedades conexas e  $N$  possui uma cobertura de abertos admissíveis. A aplicação  $f$  chama-se **aplicação de recobrimento**, a variedade  $M$  chama-se **espaço de recobrimento**, ou simplesmente **recobrimento** de  $N$ , e a variedade  $N$  chama-se **espaço de base**. Observe que uma aplicação de recobrimento é, em particular, uma função sobrejetiva.

**Exemplo 1.5 Um recobrimento do círculo.** Uma maneira conveniente de olhar para o círculo é como um subconjunto do plano complexo,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

É imediato verificar que qualquer aberto da forma  $S^1 \setminus \{ponto\}$  é um aberto admissível, portanto  $f$  é uma aplicação de recobrimento, e a reta é um recobrimento do círculo. Este é o exemplo mais simples de recobrimento e será utilizado para o cálculo do grupo fundamental do círculo na seção 1.4. ■

Uma aplicação de recobrimento é um difeomorfismo local, porém nem todo difeomorfismo local é uma aplicação de recobrimento. Resumindo, temos o seguinte diagrama

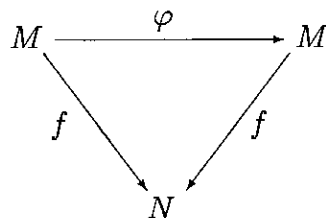
$$\text{difeomorfismos} \rightarrow \text{aplicações de recobrimento} \rightarrow \text{difeomorfismos locais},$$

que indica que todo difeomorfismo é uma aplicação de recobrimento, e que toda aplicação de recobrimento é um difeomorfismo local, porém nenhuma das afirmações recíprocas é verdadeira.

Seja  $(M, f, N)$  um recobrimento. Uma função bijetiva  $\varphi : M \rightarrow M$  é uma **transformação de recobrimento** de  $(M, f, N)$  se o seguinte diagrama comuta<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Dizer que um diagrama comuta é uma maneira formal de dizer que qualquer sequência de composições de funções, construída seguindo as flechas do diagrama, resulta na mesma função. No presente caso, a comutação do diagrama é equivalente à igualdade  $f = f \circ \varphi$ .



É imediato ver que uma transformação de recobrimento é um difeomorfismo, e que a composição de duas transformações de recobrimento é, também, uma transformação de recobrimento. Isto mostra que o grupo das transformações de recobrimento de  $(M, f, N)$ , denotado por  $Deck(M, f, N)$ , é um subgrupo de  $Diff(M)$ .

### 1.1.2 Variedades quociente

Antes de introduzir definições formais é conveniente começar com um exemplo simples e ilustrativo. No plano  $R^2$ , considere dois pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  como equivalentes se e somente se  $x_1 - x_2 = n$  e  $y_1 = y_2$ , onde  $n$  é qualquer número inteiro (positivo, negativo ou zero). Chame de  $[p]$  o conjunto de todos os pontos do plano equivalentes a  $p \in R^2$  segundo este critério. O conjunto destas classes de equivalência é uma variedade difeomorfa ao cilindro. Para melhor visualizar esta equivalência, imagine um rolo de papel toalha de altura muito grande (um cilindro) e fure o rolo com um alfinete, até atingir o tubo de papelão que está no centro. A seguir, desenrole o rolo no chão e você terá um pedaço de papel muito grande, de largura igual à altura do rolo de papel, e com um conjunto de furos igualmente espaçados distribuídos ao longo de uma reta. Este pedaço enorme de papel representa o plano  $R^2$ , e os buracos deixados no papel pelo alfinete são, todos, equivalentes segundo o critério acima descrito.<sup>5</sup> Considerar o conjunto destes pontos como um ponto só, assim como considerar qualquer outro conjunto de pontos equivalentes como um ponto só, equivale a enrolar novamente o pedaço de papel que está no chão, em torno do tubo de papelão.

O processo descrito acima serve de exemplo para um método amplamente usado na construção de variedades. Um grupo (no exemplo anterior, os números inteiros) age sobre uma variedade (o plano  $R^2$ ), se esta ação satisfaz certas condições então o espaço de órbitas (o conjunto de classes  $[p]$  de pontos do plano) é uma nova variedade (o cilindro). Nesta seção é desenvolvida esta técnica que será usada frequentemente no decorrer da tese.

<sup>5</sup>Note que estamos considerando como unidade de comprimento, o comprimento da circunferência do rolo de papel, e supondo, adicionalmente, que o papel tem uma espessura infinitesimal.

Uma **ação** de um grupo  $G$  sobre uma variedade  $M$  é um homomorfismo  $h : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ , e a ação é dita **efetiva** se o homomorfismo for injetivo, isto é, se a imagem  $h(G) \subset \text{Diff}(M)$  é isomorfa a  $G$ . É suficiente considerar ações efetivas, e portanto, quando o homomorfismo  $h$  estiver (implícita ou explicitamente) determinado, podem-se identificar os elementos de  $G$  com os da sua imagem  $h(G)$ , ou equivalentemente, pode-se interpretar todo elemento  $g \in G$  como sendo um difeomorfismo de  $M$ , como ilustra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.6 Ações de  $Z$  sobre  $R^2$ .** Considere as seguintes duas ações do grupo dos inteiros  $Z$  sobre o plano real  $R^2$ ,

$$h_1, h_2 : Z \rightarrow \text{Diff}(R^2),$$

dadas por

- $h_1(n) : (x, y) \mapsto (x + n, y)$ .
- $h_2(n) : (x, y) \mapsto (x + n, (-1)^n y)$ .

Ora, quando em algum problema ou situação concreta a ação de  $Z$  sobre o plano for dada pelo homomorfismo  $h_1$ , cada número inteiro  $n$  será identificado com a translação no plano de  $n$  unidades ao longo do eixo  $X$ . Porém, quando a ação de  $Z$  sobre o plano for dada pelo homomorfismo  $h_2$ , então cada número inteiro  $n$  será identificado com a translação no plano de  $n$  unidades ao longo do eixo  $X$ , seguida por  $n$  reflexões do plano no mesmo eixo  $X$ . ■

**Observação 1.2** Dada a ação  $h : G \rightarrow \text{Diff}(M)$ , tem-se então que cada elemento  $g \in G$  age em  $M$  de acordo à lei

$$gp = h(g)p. \tag{1.4}$$

A expressão (1.4) permite escrever as três seguintes propriedades, muito úteis na prática, e que às vezes são usadas para definir a ação do grupo  $G$  sobre  $M$ .

1.  $g_1(g_2p) = (g_1g_2)p$ , para todo  $p \in M$ , e  $g_1, g_2 \in G$ ;
2.  $e_G p = p$ , para todo  $p \in M$ , e sendo  $e_G \in G$  o elemento neutro em  $G$ ;
3. se para todo  $p \in M$  vale  $gp = p$ , então  $g = e_G$ .

A condição 3 manifesta o fato da ação de  $G$  ser efetiva. Quando a ação de  $G$  em  $M$  é escrita desta maneira, costuma-se dizer que  $G$  age em  $M$  **pela esquerda**. ■



Uma ação de  $G$  sobre  $M$  determina uma relação de equivalência  $\sim$  em  $M$ , onde  $p \sim q$  se e somente se  $q = gp$  para algum  $g \in G$ . A classe de equivalência a qual  $p \in M$  pertence, chamada de **órbita** de  $p$  pela ação de  $G$ , é portanto

$$[p] = \{q \in M : q = gp, \text{ para algum } g \in G\}.$$

O **espaço de órbitas** ou **espaço quociente**, denotado por  $M/G$ , é o conjunto das órbitas ou classes de equivalência determinadas pela ação de  $G$  em  $M$ ,

$$M/G = \{[p] : p \in M\}.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} \pi : M &\rightarrow M/G \\ p &\mapsto [p] \end{aligned} \tag{1.5}$$

é chamada de **projeção** de  $M$  no espaço de órbitas  $M/G$ .

**Observação 1.3** A notação  $M/G$ , usada para indicar o quociente de  $M$  por uma ação do grupo  $G$  em  $M$ , é ambígua pois o mesmo grupo pode agir em  $M$  de muitas maneiras diferentes. Uma notação mais consistente seria  $M/h$ , onde  $h : G \rightarrow \text{Diff}(M)$  é a ação de  $G$  em  $M$ . Porém usamos a primeira notação por ser mais sugestiva, e por estar de acordo com a tradição na literatura. A notação  $M/G$ , mesmo que ambígua, não causa confusão na prática, pois usualmente no contexto fica claro qual é a ação de  $G$  em  $M$  que está sendo considerada. Nas poucas exceções, os espaços de órbitas são tão familiares que possuem nomes próprios. ■

Para certas ações de grupos em variedades, o espaço de órbitas é também uma variedade, mas isto nem sempre acontece.

**Exemplo 1.7 Um espaço de órbitas que é variedade.** Considere a ação  $h_1 : Z \rightarrow \text{Diff}(R^2)$  dada no exemplo 1.6. Para um ponto  $(x_1, y_1) \in R^2$  tem-se

$$[(x_1, y_1)] = \{(x_2, y_2) \in R^2 : (x_2, y_2) = (x_1 + n, y_1), \text{ para algum inteiro } n\},$$

ou seja,  $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$  se e somente se  $x_2 - x_1 = n$  e  $y_2 = y_1$ . É simples, porém laborioso, construir um atlas diferencial para o espaço quociente correspondente a esta ação e mostrar que esta variedade é difeomorfa ao cilindro  $S^1 \times R$ . ■

**Exemplo 1.8 Um espaço de órbitas que não é variedade.** Denote por  $Z_2$  o grupo cíclico de ordem dois, e considere a ação de  $Z_2$  sobre o plano real,  $h : Z_2 \rightarrow \text{Diff}(R^2)$ , dada por

$$\begin{aligned} h(n) : R^2 &\rightarrow R^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, (-1)^n y). \end{aligned}$$

Tem-se neste caso, que

$$[(x_1, y_1)] = \{(x_2, y_2) \in R^2 : x_2 = x_1, y_2 = \pm y_1\}.$$

O espaço de órbitas é um semiplano com bordo dado por  $\{(x, 0) : x \in R\}$  e, portanto, não é uma variedade. ■

Quando o espaço de órbitas é uma variedade, ela chama-se **variedade quociente**. O restante desta subseção dedica-se a estudar em detalhe condições que garantam que um espaço de órbitas seja uma variedade quociente. Para isto é necessário introduzir algumas definições prévias.

Uma ação de  $G$  em  $M$  é dita **livre** se nenhum ponto  $p \in M$  é deixado fixo pela ação de um elemento de  $G$  distinto da identidade, ou equivalentemente, se o conjunto

$$\text{Stab}_p = \{g \in G : gp = p\}$$

é igual à identidade para cada  $p \in M$ . Observe que a ação do exemplo 1.7 é livre, enquanto que a ação do exemplo 1.8 não o é. De fato, uma condição necessária para que o quociente seja uma variedade, da mesma dimensão que a variedade *mãe*, é que a ação do grupo seja livre (ver teorema 1.1 adiante).

Para cada conjunto  $U \subset M$ , observe que

$$\mathcal{I}_U = \{g \in G : U \cap g(U) \neq \emptyset\}$$

é o conjunto de todos os elementos  $g \in G$  que *não levam*  $U$  *totalmente fora dele*. É claro que  $e_G \in \mathcal{I}_U$  para qualquer  $U \subset M$ . Uma ação é **discreta** se todo ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança  $U \subset M$  tal que  $\mathcal{I}_U$  é finito. Finalmente, uma ação é **propriamente descontínua** se para cada compacto  $K \subset M$ , o conjunto  $\mathcal{I}_K$  é finito.

Claramente uma ação propriamente descontínua é discreta, porém a recíproca não é verdadeira como mostra o exemplo seguinte.

**Exemplo 1.9 Uma ação discreta que não é propriamente descontínua.** Consideremos a ação de  $Z$  sobre  $R^2 \setminus \{0\}$

$$h : Z \rightarrow R^2 \setminus \{0\}$$

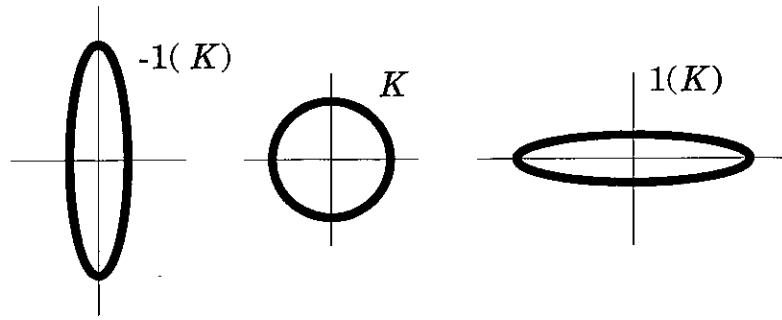


Figura 1.4: A ação de um inteiro negativo sobre o compacto  $K$ , dada por (1.6), tem por efeito esticar o anel na vertical, e comprimí-lo na horizontal. Já a ação de um inteiro positivo sobre  $K$  tem o efeito contrário. Pode-se ver que cada conjunto  $n(K)$ , com  $n$  inteiro, tem pontos em comum com  $K$ .

dada por

$$h(n) : (x, y) \mapsto (2^n x, \frac{1}{2^n} y). \quad (1.6)$$

Esta ação é livre e discreta. Porém, o compacto  $K$  da figura 1.4 mostra que  $h$  não é uma ação propriamente descontínua, pois para cada inteiro  $n$  temos  $n(K) \cap K \neq \emptyset$ . ■

Por último, os seguintes exemplos mostram que nem toda ação livre é discreta, e nem toda ação discreta é livre.

**Exemplo 1.10 Uma ação livre que não é discreta.** Os números reais formam um grupo sob a operação de adição. A ação deste grupo sobre o plano  $R^2$  dada por

$$\begin{aligned} \tau : R &\rightarrow \text{Diff}(R^2) \\ a &\mapsto \tau_a, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_a : R^2 &\rightarrow R^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + a, y), \end{aligned}$$

é livre, porém não é discreta, pois existem translações infinitesimalmente pequenas. De fato, para qualquer  $\epsilon_0 > 0$ , seja  $U$  uma bola aberta de raio  $\epsilon_0$ , então  $U \cap \tau_{\epsilon}(U) \neq \emptyset$  para todo  $\epsilon < \epsilon_0$ . ■

**Exemplo 1.11 Uma ação discreta que não é livre.** Considere a ação do grupo cíclico de ordem quatro,  $Z_4$ , sobre o plano  $R^2$  dada pelas rotações de ângulos múltiplos de  $\pi/4$  em torno da origem

$$\begin{aligned} h : Z_4 &\rightarrow \text{Diff}(R^2) \\ n &\mapsto e^{i\pi n/2}. \end{aligned}$$

Esta ação é discreta, de fato propriamente descontínua, pois  $Z_4$  é um grupo finito. Porém não é livre, pois a origem é ponto fixo de todo  $n \in Z_4$ . ■

O seguinte teorema dá condições necessárias e suficientes para que um espaço de órbitas seja uma variedade quociente, e a projeção seja uma aplicação de recobrimento.

**Teorema 1.1 Variedades quociente.** *Seja  $G$  um grupo agindo sobre uma variedade diferencial  $M$ . Então o quociente  $M/G$  é uma variedade diferencial com uma estrutura diferencial de modo que a projeção  $\pi : M \rightarrow M/G$  é uma aplicação de recobrimento se e somente se  $G$  age de maneira livre e propriamente descontínua em  $M$ .*

A prova deste teorema é simples, porém longa, e encontra-se em [112]. Da prova fica claro que a ação livre do grupo é equivalente ao fato da projeção ser uma aplicação de recobrimento, e a ação propriamente descontínua é equivalente ao fato do quociente ser um espaço de Hausdorff. No final deste capítulo veremos que o método de passagem ao quociente é bastante geral no sentido que toda variedade diferencial  $M$  é uma variedade quociente de uma variedade mãe  $\widetilde{M}$  por um subgrupo de  $Diff(\widetilde{M})$ , que age de maneira livre e propriamente descontínua em  $\widetilde{M}$ .

**Exemplo 1.12 O espaço projetivo  $m$ -dimensional  $RP^m$ .** Considere em  $S^m$  a aplicação antípoda

$$\begin{aligned} \alpha : S^m &\rightarrow S^m \\ p &\mapsto -p, \end{aligned}$$

e observe que  $\alpha^2 = id_{S^m}$ . Considere também os abertos na esfera

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(p^1, \dots, p^{m+1}) \in S^m : p^i > 0\}, \\ U_i^- &= \{(p^1, \dots, p^{m+1}) \in S^m : p^i < 0\}, \end{aligned}$$

com  $1 \leq i \leq m$ . É fácil ver que  $U_i^+ \cap U_i^- = \emptyset$ , e que  $\alpha(U_i^+) = U_i^-$ . Como o conjunto de abertos  $\{U_i^+, U_i^-\}_{1 \leq i \leq m}$  cobre  $S^m$ , temos que o grupo  $G = \{id_{S^m}, \alpha\}$  age livremente na esfera; além disso, esta ação é propriamente descontínua pois  $G$  é um grupo finito. O quociente  $S^m/G$  é chamado de **espaço projetivo real  $m$ -dimensional  $RP^m$** . As órbitas são  $[p] = \{p, -p\}$  para todo  $p \in S^m$ . ■

A ação de um grupo finito sobre uma variedade é sempre propriamente descontínua. Já quando o grupo não é finito, em geral é difícil identificar ações propriamente descontínuas. O seguinte critério para caracterizar ações propriamente descontínuas será suficiente para os casos de interesse em topologia cósmica (para uma prova veja [112]).

**Teorema 1.2** *Seja  $G$  um grupo de Lie que age transitivamente<sup>6</sup> sobre uma variedade  $M$  e de tal modo que para algum  $p \in M$ ,  $Stab_p$  é compacto. Então, todo subgrupo discreto de  $G$  age de maneira propriamente descontínua em  $M$ .*

**Exemplo 1.13 O toro  $m$ -dimensional.** Considere no espaço  $R^m$  uma base de vetores  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , e denotemos por  $G$  o grupo gerado pelas translações

$$\begin{aligned} \tau_{a_i} : R^m &\rightarrow R^m \\ p &\mapsto p + a_i, \end{aligned}$$

com  $1 \leq i \leq m$ . O grupo  $G$  é isomorfo ao produto direto de  $m$  cópias do grupo dos inteiros,  $Z^m$ , e portanto é um subgrupo discreto de  $R^m$ . Segue-se que  $G$  age sobre  $R^m$  de maneira livre e propriamente descontínua. O quociente  $R^m/G$  é chamado de  $m$ -toro  $T^m$ .

■

Duas observações são pertinentes para fechar esta subseção.

**Observação 1.4** Considere uma ação  $h : G \rightarrow Diff(M)$  livre e propriamente descontínua em  $M$ , de modo que  $(M, \pi, M/G)$  seja um recobrimento, e seja  $g \in G$ , então  $h(g) \in Diff(M)$  e para todo  $p \in M$  vale

$$\begin{aligned} \pi \circ h(g)(p) &= \pi(gp) \\ &= [p] \\ &= \pi(p), \end{aligned}$$

logo  $\pi \circ h(g) = \pi$ , e portanto  $h(g) \in Deck(M, \pi, M/G)$ . Reciprocamente, pode-se mostrar que toda transformação de recobrimento é da forma  $h(g)$  para um único elemento  $g \in G$ . Portanto segue-se que  $h(G) = Deck(M, \pi, M/G)$ . ■

**Observação 1.5** Duas ações  $h_1, h_2 : G \rightarrow Diff(M)$  são ditas **conjugadas** se existe um difeomorfismo  $\varphi \in Diff(M)$  tal que para todo  $g \in G$ , o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h_2(g)} & M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{h_1(g)} & M \end{array} .$$

<sup>6</sup>O grupo  $G$  age de maneira transitiva sobre  $M$  se a órbita de qualquer ponto coincide com  $M$ .

Suponha que  $h_1$  e  $h_2$  sejam ações conjugadas, livres e propriamente descontínuas em  $M$ , e sejam  $M_1$  e  $M_2$  os quocientes de  $M$  por ditas ações. Então

$$\begin{aligned}
 [p]_2 &= \{q \in M : q = h_2(g)p, \text{ para algum } g \in G\} \\
 &= \{q \in M : q = \varphi^{-1} \circ h_1(g) \circ \varphi(p), \text{ para algum } g \in G\} \\
 &= \{q \in M : \varphi(q) = h_1(g) \circ \varphi(p), \text{ para algum } g \in G\} \\
 &= \{q \in M : \varphi(q) \in [\varphi(p)]_1\} \\
 &= \varphi^{-1}([\varphi(p)]_1),
 \end{aligned}$$

logo a função

$$\begin{aligned}
 \varphi_* : M_1 &\rightarrow M_2 \\
 [p]_1 &\mapsto [p]_2
 \end{aligned}$$

é uma bijeção. Usando abertos admissíveis é fácil ver que  $\varphi_*$  é um difeomorfismo, e mais ainda, que todo difeomorfismo entre  $M_1$  e  $M_2$  é desta forma. De fato, é possível provar que se  $M_1$  e  $M_2$  são variedades quociente por duas ações do mesmo grupo  $G$  em  $M$ , então elas são difeomorfas se e somente se as tais ações são conjugadas. ■

### 1.1.3 Orientabilidade

Uma **orientação** num espaço vetorial de dimensão finita é uma classe de equivalência de bases ordenadas que podem ser levadas uma a outra por uma transformação linear com determinante positivo. Um espaço vetorial munido com uma orientação é dito **espaço vetorial orientado**, e diz-se que um isomorfismo linear entre espaços orientados **preserva a orientação** ou **reverte a orientação** dependendo se o seu determinante é positivo ou negativo.

Intuitivamente, uma variedade  $M$  é orientável se o espaço tangente a  $M$  em cada ponto pode ser orientado de maneira consistente. Isto significa que  $M$  pode ser coberto por cartas locais tais que a derivada do sistema de coordenadas local de cada ponto  $p \in M$  é um isomorfismo que preserva a orientação entre  $T_p M$  e  $R^m$ . De acordo com esta noção de orientabilidade, resulta natural definir uma orientação em  $M$  impondo restrições nas mudanças de cartas em um atlas de sua estrutura diferencial.

Um atlas diferencial  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  em  $M$  é dito **orientado** se cada uma de suas mudanças de cartas possui jacobiano positivo. Dois atlas orientados em  $M$  são equivalentes se a sua união é também um atlas orientado. Uma **orientação** em  $M$  é uma classe de equivalência de atlas orientados em  $M$ . Uma variedade é dita **orientável** se admite

uma orientação; e uma variedade orientável, junto com uma orientação é chamada de **variedade orientada**.

Uma variedade orientável conexa possui exatamente duas orientações. Dadas duas variedades  $M$  e  $N$ , e um difeomorfismo entre elas  $f : M \rightarrow N$ , é imediato verificar que  $M$  é orientável se e somente se  $N$  o for. Suponha agora que  $M$  e  $N$  são variedades orientadas, o difeomorfismo  $f$  induz uma orientação em  $N$  que pode ou não coincidir com a orientação de  $N$ , no primeiro caso diz-se que  $f$  preserva a orientação, e no segundo que  $f$  reverte a orientação. Mas geralmente, diz-se que um difeomorfismo local entre variedades orientadas **preserva a orientação** ou **reverte a orientação** dependendo se o jacobiano da sua derivada em cada ponto é positivo ou negativo.

Evidentemente uma variedade que pode ser coberta por uma única carta é orientável, porém a grande maioria das variedades precisa de mais de uma carta para poder ser totalmente descrita. Um critério simples, porém útil para identificar certas variedades orientáveis é o seguinte: se uma variedade  $M$  pode ser coberta por duas cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  de modo que a interseção  $U \cap V$  é conexa, então  $M$  é orientável. De fato, o jacobiano da mudança de cartas  $\psi \circ \varphi$  é não nulo e não muda de sinal. Se ele for positivo então o atlas formado por estas duas cartas define uma orientação. Por outro lado, se o jacobiano for negativo, trocando o sinal de uma das funções coordenadas obtemos uma orientação em  $M$ .

**Exemplo 1.14 Orientabilidade de  $S^m$ .** Do exemplo 1.3 tem-se que a esfera  $S^m$  pode ser coberta por duas cartas dadas pelas projeções estereográficas a partir dos pólos norte e sul. Para  $m > 1$ , a interseção destas cartas é conexa e portanto  $S^m$  é orientável. Já no caso de  $S^1$ , a orientabilidade é imediata por causa da dimensão. ■

Um critério mais geral para determinar a orientabilidade de uma variedade, e que será suficiente para os nossos propósitos, é dado pelo seguinte teorema cuja prova encontra-se em [23].

**Teorema 1.3** *Seja  $G$  um grupo agindo de maneira livre e propriamente descontínua numa variedade  $M$ , e  $(M, \pi, M/G)$  o recobrimento resultante. Então  $M/G$  é orientável se e somente se  $\text{Deck}(M, \pi, M/G)$  consiste unicamente de difeomorfismos que preservam a orientação. Em particular, quocientes de variedades não orientáveis são não orientáveis.*

**Exemplo 1.15 Orientabilidade de  $RP^m$ .** Observe que a aplicação antípoda em  $S^m$ ,

$$\begin{aligned} \alpha : S^m &\rightarrow S^m \\ p &\mapsto -p, \end{aligned}$$

é uma restrição da aplicação antípoda em  $R^{m+1}$ . Portanto preserva a orientação (logo  $RP^m$  é orientável) quando  $m$  é ímpar, e reverte a orientação (logo  $RP^m$  é não orientável) quando  $m$  é par. ■

**Exemplo 1.16 Orientabilidade do  $m$ -toro.** Toda translação em  $R^m$  preserva a orientação, logo o  $m$ -toro é uma variedade orientável. ■

## 1.2 O grupo fundamental

Seja  $G$  um grupo agindo sobre uma variedade diferencial  $M$  de maneira livre e propriamente descontínua, e considere no recobrimento  $(M, \pi, M/G)$  uma curva que vai de um ponto  $p \in M$  a outro ponto  $q \in M$  da órbita de  $p$ . Esta curva é projetada por  $\pi$  a uma curva fechada em  $M/G$  que começa e acaba em  $[p] = [q]$ . Em particular, se  $M$  for orientável e  $M/G$  for não orientável, a curva fechada em  $M/G$  não poderá ser deformada continuamente a um ponto. De fato, os espaços tangentes a  $p$  e a  $q$ , orientados, são projetados em espaços tangentes a  $[p]$  com orientações diferentes, ou seja, um habitante em  $M/G$  percorrendo esta curva fechada voltaria ao mesmo ponto de onde saiu e encontraria tudo com a orientação contrária à da saída. Mas uma curva fechada em  $M/G$  que pode ser deformada a um ponto não pode reverter a orientação.

A existência de curvas fechadas que não podem ser deformadas continuamente até colapsar num ponto não é uma exclusividade das variedades não orientáveis. De fato, muitas variedades diferenciais possuem este tipo de curvas fechadas. Estes espaços são chamados de multiplamente conexos. A existência de curvas fechadas não deformáveis a um ponto é o que caracteriza uma *topologia não trivial* no contexto da topologia cósmica (veja a observação 1.7). Por exemplo, o espaço  $R^3$  e a esfera  $S^3$  possuem uma topologia trivial (são simplesmente conexos), enquanto que o espaço projetivo  $RP^3$  e o tritoro  $T^3$  possuem uma topologia não trivial.<sup>7</sup>

Quando as curvas fechadas numa variedade  $M$  são classificadas de acordo a um critério de como elas podem ser deformadas, emerge um objeto algébrico de uso imprescindível na topologia cósmica: o grupo fundamental  $\pi_1(M)$ . A subseção 1.2.1 está dedicada à formulação e ao estudo das propriedades básicas do grupo fundamental. Na subseção 1.2.2 e na seção 1.3 são apresentadas certas técnicas úteis para o cálculo de grupos fundamentais de espaços multiplamente conexos, sendo o resultado mais importante o teorema de Seifert-Van Kampen na seção 1.3 (teorema 1.7).

---

<sup>7</sup>Deve-se observar porém que, pelo menos na cosmologia, o termo *topologia não trivial* tem um significado contextual, pois em certos casos (que não da topologia cósmica) a esfera  $S^3$  é considerada como tendo uma topologia não trivial pelo fato de ser compacta.



Apesar do nosso interesse particular em variedades diferenciais, é conveniente estudar o grupo fundamental desde uma perspectiva mais ampla. Isto porque, como veremos adiante, o cálculo do grupo fundamental de uma variedade diferencial requer, às vezes, que se conheçam os grupos fundamentais de certos espaços que não possuem estrutura de variedade. No que segue,  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  denotam espaços topológicos conexos por caminhos (veja a definição deste conceito no início da subseção 1.2.1), e, adicionalmente,  $J$  denota o intervalo fechado  $[0, 1]$ .

### 1.2.1 Homotopia de laços

Um **caminho** em  $X$  com ponto inicial  $x \in X$  e ponto final  $y \in X$  é uma aplicação contínua  $\gamma : J \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . Diz-se que o caminho  $\gamma$  une os pontos  $x$  e  $y$ . O espaço  $X$  é dito **conexo por caminhos** se para quaisquer dois pontos de  $X$  existe um caminho que os une. Em particular, as variedades topológicas conexas (e portanto as variedades diferenciais conexas) são conexas por caminhos.

O **caminho inverso** de  $\gamma : J \rightarrow X$  é

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : J &\rightarrow X \\ t &\mapsto \gamma(1-t), \end{aligned}$$

Observe que neste contexto  $\gamma^{-1}$  não representa a função inversa de  $\gamma$ . De fato, em geral  $\gamma$  não é uma bijeção e, portanto, a função inversa de  $\gamma$  não existe. Porém, o caminho inverso de  $\gamma$  sempre existe.

Um **laço** em  $X$ , com base no ponto  $x \in X$ , é um caminho que começa e acaba em  $x$ , ou seja, um caminho  $\gamma : J \rightarrow X$  tal que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . O conjunto de todos os laços com base em  $x \in X$  é denotado por  $\Lambda(X, x)$ . O **produto** de dois laços  $\alpha, \beta \in \Lambda(X, x)$ , com base em  $x$ , é definido por

$$\gamma(t) = \alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Intuitivamente  $\gamma$  é o laço obtido percorrendo o laço  $\alpha$  durante a primeira metade do intervalo  $J$ , e percorrendo o laço  $\beta$  durante a segunda metade. O laço  $\gamma = \alpha \cdot \beta$  também está em  $\Lambda(X, x)$ , e portanto, é natural se perguntar se  $\Lambda(X, x)$  é um grupo (ou possui alguma estrutura algébrica) com a operação de produto acima definida. Acontece que  $\Lambda(X, x)$  não é um grupo pois, por exemplo, o produto (1.7) não é associativo. Para poder construir um *grupo de laços* devemos, primeiro, agrupar os laços em classes de equivalência. Um critério que permite agrupar estes laços é a **homotopia** de laços. Salvo

especificado em contrário, todos os laços que consideraremos a seguir serão laços com base num ponto  $x \in X$  previamente fixado.

Diz-se que o laço  $\gamma_0$  é **homotópico** ao laço  $\gamma_1$  se existe uma aplicação contínua, chamada **homotopia relativa** a  $x \in X$ ,  $H : J \times J \rightarrow X$  tal que

1.  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$  e  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ , para todo  $t \in J$ , e
2.  $H(0, s) = H(1, s) = x$  para todo  $s \in J$ .

A homotopia de laços captura a idéia intuitiva de deformação contínua de laços num espaço topológico. O laço  $\gamma_0$  é homotópico ao laço  $\gamma_1$  se a imagem de  $\gamma_0$  (a curva) pode ser deformada continuamente em  $X$  até fazê-la coincidir com a imagem de  $\gamma_1$ , isto corresponde à primeira condição da definição de homotopia. Deve-se observar, também, que durante a deformação dos laços o ponto de base permanece fixo, ditto é a segunda condição. Destas observações fica claro que a relação entre laços “é homotópico a” é uma relação de equivalência.

Denotando por  $\sim$  esta relação de equivalência, escrevemos para as classes de caminhos homotópicos (ou **classes de homotopia**)

$$[\alpha] = \{\beta \in \Lambda(X, x) : \alpha \sim \beta\} .$$

O quociente  $\Lambda(X, x) / \sim$  é denotado por  $\pi_1(X, x)$ , formalmente escreve-se

$$\pi_1(X, x) = \{[\alpha] : \alpha \in \Lambda(X, x)\} .$$

O seguinte lema é fundamental na determinação da estrutura algébrica de  $\pi_1(X, x)$ .

**Lema 1.1** *Sejam  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  laços com base em  $x \in X$  tais que  $\alpha_0 \sim \alpha_1$  e  $\beta_0 \sim \beta_1$ . Então  $\alpha_0 \cdot \beta_0 \sim \alpha_1 \cdot \beta_1$ .*

Este lema é importante pelo seguinte fato: Quando  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  e  $\beta_1 \sim \beta_2$  podemos escrever  $[\alpha_1] = [\alpha_2]$  e  $[\beta_1] = [\beta_2]$ . Pelo lema anterior temos que, neste caso,  $\alpha_1 \cdot \beta_1 \sim \alpha_2 \cdot \beta_2$ , ou seja  $[\alpha_1 \cdot \beta_1] = [\alpha_2 \cdot \beta_2]$ . Devido a esta independência podemos definir o produto de classes de laços homotópicos por

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta] , \tag{1.8}$$

e como resultado temos o seguinte teorema:

**Teorema 1.4 Grupo fundamental.** *Seja  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos, e  $\pi_1(X, x)$  o conjunto de todas as classes de homotopia de laços baseados em  $x \in X$ . O produto  $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$  faz de  $\pi_1(X, x)$  um grupo chamado **grupo fundamental** ou **primeiro grupo de homotopia** de  $X$  em  $x$ .*

Sejam  $\alpha : J \rightarrow X$  um laço em  $X$  com base em  $x \in X$  e  $\varphi : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Então  $\varphi \circ \alpha : J \rightarrow Y$  é um laço em  $Y$  com base em  $y = \varphi(x) \in Y$ , e portanto temos que  $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$  e  $[\varphi \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y)$ . É imediato ver que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(Y, y) \\ [\alpha] &\mapsto [\varphi \circ \alpha] \end{aligned}$$

possui as seguintes propriedades

1.  $\varphi_*([\alpha] \cdot [\beta]) = \varphi_*([\alpha]) \cdot \varphi_*([\beta])$ , para quaisquer laços  $\alpha, \beta \in \Lambda(X, x)$ .
2. Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : Y \rightarrow Z$  são duas aplicações contínuas, então

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* .$$

A primeira propriedade afirma que  $\varphi_*$  é um homomorfismo de grupos, este homomorfismo é chamado de **homomorfismo induzido** por  $\varphi$ . Consideremos agora dois espaços homeomorfos  $X$  e  $Y$ , e seja  $\varphi : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo entre eles, com inversa  $\varphi^{-1} : Y \rightarrow X$ . Pela segunda propriedade tem-se

$$\begin{aligned} (id_X)_* &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* \\ &= (\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* , \end{aligned}$$

mas como  $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x)}$ , então

$$(\varphi^{-1})_* = (\varphi_*)^{-1} ,$$

ou seja,  $\varphi_*$  é um isomorfismo entre os grupos  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(Y, \varphi(x))$ . Costuma-se referir a este fato dizendo que o grupo fundamental é um **invariante topológico**, ou em outras palavras, que espaços homeomorfos possuem o mesmo grupo fundamental. A recíproca, porém, não é verdadeira pois existem espaços não homeomorfos que possuem o mesmo grupo fundamental.

Para determinar a dependência do grupo fundamental com o ponto escolhido como base devemos estender a definição de produto de laços. A operação de produto de laços pode ser estendida para um produto de caminhos quando estes satisfazem uma condição de *continuidade*. Sejam  $\alpha, \beta : J \rightarrow X$  dois caminhos tais que o ponto final de  $\alpha$  e o ponto inicial de  $\beta$  coincidem, ou seja  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Então o produto de caminhos,  $\alpha \cdot \beta$ , vem definido pela mesma expressão (1.7) que define o produto de laços. Dois caminhos,  $\gamma_0, \gamma_1 : J \rightarrow X$ , com os mesmos pontos inicial e final,  $x = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$  e  $y = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ , são homotópicos se existe uma homotopia entre eles, relativa aos pontos  $x, y \in X$ , ou seja, uma função  $H : J \times J \rightarrow X$  tal que

1.  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$  e  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ , para todo  $t \in J$ .
2.  $H(0, s) = x$  e  $H(1, s) = y$ , para todo  $s \in J$ .

O produto de classes de caminhos homotópicos define-se pela mesma expressão (1.8) que define o produto de classes de laços homotópicos. Este produto é associativo, e para todo caminho  $\alpha : J \rightarrow X$ , o laço  $\alpha \cdot \alpha^{-1}$  é homotópico ao laço constante em  $x$ . Nestas condições é fácil provar o seguinte teorema:

**Teorema 1.5** *Seja  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos, e  $x, y \in X$ . Então os grupos  $\pi_1(X, x)$  e  $\pi_1(X, y)$  são isomorfos, e um isomorfismo é dado por*

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : \pi_1(X, x) &\rightarrow \pi_1(X, y) \\ [\alpha] &\mapsto [\gamma^{-1} \cdot \alpha \cdot \gamma], \end{aligned}$$

onde  $\gamma : J \rightarrow X$  é um caminho que une  $x$  com  $y$ .

Este teorema permite falar do grupo fundamental de um espaço conexo por caminhos  $X$ , e escrever  $\pi_1(X)$  para ele, quando o ponto de base não for importante.

Um espaço topológico conexo por caminhos  $X$  é dito **simplesmente conexo** se o seu grupo fundamental for trivial, ou seja se  $\pi_1(X)$  se reduz ao elemento identidade. Nestes espaços tem-se que todos os laços com base num ponto quaisquer  $x \in X$  são homotopicamente equivalentes. Na verdade vale um resultado mais geral: num espaço simplesmente conexo, dois caminhos com os mesmos pontos inicial e final são homotópicos.

Identificar um espaço como sendo multiplamente conexo é usualmente muito fácil; basta encontrar uma curva fechada que não seja continuamente deformável a um ponto. Identificar um espaço como sendo simplesmente conexo, porém, pode resultar numa tarefa complicada pois, neste caso, devemos garantir que não exista nenhuma curva fechada que não seja continuamente deformável a um ponto.

O seguinte exemplo apresenta uma classe bastante geral de espaços simplesmente conexos.

**Exemplo 1.17** **Todo conjunto estrelado de  $R^n$  é simplesmente conexo.** Seja  $X \subset R^n$  um conjunto **estrelado** no ponto  $x \in X$ , ou seja tal que para qualquer ponto  $y \in X$ , o segmento

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in J\}$$

está contido em  $X$ . Dado um laço  $\alpha : J \rightarrow X$  com base em  $x \in X$ , a aplicação

$$\begin{aligned} H : J \times J &\rightarrow X \\ (t, s) &\mapsto sx + (1-s)\alpha(t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

é uma homotopia entre  $\alpha$  e o caminho constante  $x$ , pois

1.  $H(t, 0) = \alpha(t)$  e  $H(t, 1) = x$ , para todo  $t \in J$ ; e
2.  $H(0, s) = H(1, s) = x$ , para todo  $s \in J$ ;

portanto todo conjunto estrelado é simplesmente conexo. Agora, um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **convexo** se para quaisquer par de pontos  $x, y \in X$ , o segmento  $[x, y]$  está contido em  $X$ . Em particular, um conjunto convexo é estrelado, e portanto simplesmente conexo. Mais ainda, como  $\mathbb{R}^n$  é convexo, segue-se que  $\mathbb{R}^n$  é simplesmente conexo. ■

O seguinte lema é um caso especial (na verdade o caso mais simples) do teorema de Seifert-Van Kampen, que permite calcular o grupo fundamental de um espaço a partir de um recobrimento aberto deste, se conhecemos os grupos fundamentais destes abertos e suas interseções.

**Lema 1.2** *Suponha que o espaço  $X$ , conexo por caminhos, pode ser decomposto em uma família de abertos  $\{V_i : i \in I\}$  tais que para todo  $i \neq j$ ,  $V_i \cap V_j = W \neq \emptyset$ . Se  $W$  é conexo por caminhos e cada  $V_i$  é simplesmente conexo, então  $X$  é simplesmente conexo.*

Vejamos algumas aplicações deste lema.

**Exemplo 1.18** Para  $m \geq 2$ , a esfera  $S^m$  é simplesmente conexa. Pela projeção estereográfica (veja o exemplo 1.3), os conjuntos  $A = S^m - \{n\}$  e  $B = S^m - \{s\}$  são homeomorfos a  $\mathbb{R}^m$ , e portanto simplesmente conexos. A interseção  $A \cap B = S^m - \{n, s\}$  é homeomorfa a  $\mathbb{R}^m - \{\bar{0}\}$ , logo, se  $m \geq 2$ ,  $A \cap B$  é um espaço conexo por caminhos. Segue-se que para  $m \geq 2$ , a esfera  $m$ -dimensional é simplesmente conexa. ■

**Observação 1.6** Quando  $m = 1$ , a interseção  $A \cap B = S^1 - \{n, s\}$  não é conexa, logo não se aplica o lema 1.2. Usando a teoria de espaços de recobrimento, vamos provar na subseção 1.4.1 adiante que  $\pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ . ■

## 1.2.2 Tipos de homotopia

Uma **homotopia** de aplicações contínuas, de um espaço topológico  $X$  em um espaço topológico  $Y$ , é uma aplicação contínua

$$H : X \times J \rightarrow Y . \tag{1.10}$$

Duas aplicações  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  são **homotópicas** se existe uma homotopia entre elas, isto é, se existe uma homotopia (1.10) tal que  $H(x, 0) = \varphi_0(x)$  e  $H(x, 1) = \varphi_1(x)$  para

todo  $x \in X$ . A homotopia estabelece uma relação de equivalência no conjunto  $C(X, Y)$  de todas as funções contínuas de  $X$  a  $Y$ . Se  $\varphi_0$  é homotópica a  $\varphi_1$  escrevemos  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ .

Uma função  $\varphi : X \rightarrow Y$  é uma **equivalência homotópica com inversa homotópica**  $\psi : Y \rightarrow X$ , se  $\psi \circ \varphi \sim id_X$  e  $\varphi \circ \psi \sim id_Y$ . A equivalência homotópica define uma relação de equivalência entre espaços topológicos. Se existe uma equivalência homotópica entre  $X$  e  $Y$  escrevemos  $X \sim Y$ , neste caso dizemos que  $X$  e  $Y$  são do mesmo **tipo homotópico**.

Uma homotopia  $H : X \times J \rightarrow Y$  é dita **relativa** ao subespaço  $A \subset X$  se para cada  $a \in A$ , tem-se  $H(a, t) = H(a, 0)$  para todo  $t \in J$ . Duas aplicações  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$  são **homotópicas relativamente** a  $A \subset X$  se  $\varphi_0|_A = \varphi_1|_A$  e se existe uma homotopia relativa a  $A$  entre elas.

**Exemplo 1.19** Uma homotopia  $H : J \times J \rightarrow X$  entre os laços  $\alpha_0, \alpha_1 : J \rightarrow X$  com base no ponto  $x \in X$  é uma homotopia relativa a  $\partial J = \{0, 1\} \subset J$ . ■

O seguinte teorema é bastante útil para o cálculo de grupos fundamentais

**Teorema 1.6** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos, e  $\varphi : X \rightarrow Y$  uma equivalência homotópica. Então o homomorfismo induzido*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

*é um isomorfismo.*

Este teorema afirma que o grupo fundamental de um espaço topológico é um **invariante homotópico**, ou seja, dois espaços do mesmo tipo homotópico possuem grupos fundamentais isomorfos.

**Exemplo 1.20** A esfera  $m$ -dimensional é do mesmo tipo homotópico que  $R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}$ . Considere as funções

$$\begin{aligned} \varphi : R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\} &\rightarrow S^m \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi : S^m &\rightarrow R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\} \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

onde  $||$  é a norma euclídeana em  $R^{m+1}$ . Observe que

1.  $\varphi \circ \psi = id_{S^m}$ , e

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\} &\rightarrow R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\} \\ x &\mapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

2. A função

$$\begin{aligned} H : (R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}) \times J &\rightarrow R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\} \\ (x, s) &\mapsto sx + (1-s)\varphi(x) \end{aligned}$$

é uma homotopia entre  $\psi \circ \varphi$  e  $id_{R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}}$ .

Tem-se, então, que  $\varphi$  é uma equivalência homotópica e portanto

$$\pi_1(R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}) \approx \pi_1(S^m).$$

Em particular  $\pi_1(R^2 \setminus \{\bar{0}\}) \approx \pi_1(S^1)$ . ■

O estudo das deformações contínuas de espaços topológicos costuma ser de muita utilidade para a intuição ao estudar a invariância homotópica do grupo fundamental. O conceito que formaliza a idéia de deformação contínua de um espaço topológico é o de retrato por deformação. Um subespaço  $A \subset X$  é um **retrato** de  $X$  se existe uma **retração** de  $X$  para  $A$ , isto é, uma função contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ . O retrato  $A \subset X$  é um **retrato por deformação** de  $X$  se a função  $i \circ r : X \rightarrow X$ , onde  $i : A \hookrightarrow X$  é a inclusão, é homotópica a  $id_X$ . A homotopia entre  $id_X$  e  $i \circ r$  captura a idéia de deformação contínua de  $X$  para  $A$ .

**Exemplo 1.21** O exemplo anterior mostra que a esfera  $S^m$  é um retrato por deformação de  $R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}$ . Além disso, como  $R^{m+1} \setminus \{\bar{0}\}$  é homeomorfo à esfera  $S^{m+1} \setminus \{s, n\}$ , então  $S^m$  é um retrato por deformação de  $S^{m+1} \setminus \{s, n\}$ . ■

Da própria definição é imediato constatar que se  $A \subset X$  é um retrato por deformação de  $X$ , então  $A$  e  $X$  são do mesmo tipo homotópico, e portanto  $\pi_1(A) \approx \pi_1(X)$ .

Como a aplicação constante  $r_x : X \rightarrow \{x\}$ , com  $x \in X$ , é uma função contínua, então todo ponto de  $X$  é um retrato dele. Se algum ponto de  $X$  for um retrato por deformação do próprio  $X$ , então diz-se que  $X$  é um espaço **contrátil**. Um espaço contrátil é, portanto, do mesmo tipo homotópico que um ponto. Uma consequência imediata é que um espaço contrátil é simplesmente conexo. Os conjuntos estrelados (veja o exemplo 1.17) são espaços contráteis, de fato, é fácil ver que estes espaços são continuamente deformáveis a um ponto. Por outro lado,  $S^m$  e  $R^m \setminus \{\bar{0}\}$  não são continuamente deformáveis a um ponto. De fato, pode-se mostrar que estes espaços não são contráteis, mas a prova deste fato requer certas técnicas adicionais que não serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

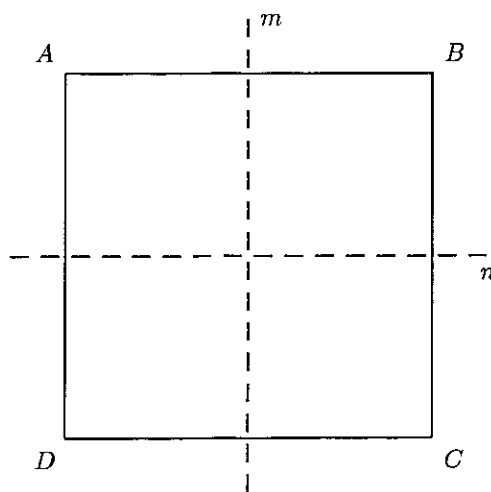


Figura 1.5: O grupo de simetrias do quadrado, denotado por  $D_4$ , possui oito elementos: o elemento identidade, três rotações em torno do centro do quadrado, e quatro reflexões, duas nos eixos indicados na figura e duas nos eixos definidos pelas diagonais.

### 1.3 O teorema de Seifert-Van Kampen

O teorema de Seifert-Van Kampen permite calcular o grupo fundamental de um espaço topológico conexo por caminhos a partir de uma decomposição adequada do espaço em subespaços dos quais se conhecem os grupos fundamentais.

**Teorema 1.7 (Seifert-Van Kampen)** *Seja  $X$  um espaço topológico conexo por caminhos, e  $\{V_i \subset X : i \in I\} \cup \{W\}$  uma cobertura de abertos conexos por caminhos de  $X$  tais que para todo  $i \neq j$ ,  $V_i \cap V_j = W \neq \emptyset$ . Então o grupo fundamental de  $X$  é isomorfo ao produto livre de  $\{\pi_1(V_i) : i \in I\}$  amalgamado por  $\pi_1(W)$  e os homomorfismos  $\rho_{i*} : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(V_i)$ , induzidos pelas inclusões  $\rho_i : W \rightarrow V_i$ .*

A linguagem adequada para formular e aplicar o teorema de Seifert-Van Kampen é a teoria combinatória de grupos que é apresentada na subseção 1.3.1. Na subseção 1.3.2 apresentamos algumas aplicações simples.

#### 1.3.1 Elementos da teoria combinatória de grupos

A teoria combinatória de grupos é essencialmente uma linguagem usada para descrever um grupo em termos de geradores e relações. Com o objetivo de introduzir o conceito de apresentação de um grupo por meio de geradores e relações, vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.22 Grupo de simetrias do quadrado.** Considere o grupo de isometrias do quadrado, denotado por  $D_4$  (veja a figura 1.5). Este grupo consiste de oito elementos:



a identidade, que denotamos por  $id$ ; três rotações no sentido horário de  $\pi/2$ ,  $\pi$  e  $3\pi/2$  radianos, em torno do eixo que passa pelo centro  $O$  e é ortogonal ao quadrado, e denotadas por  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  respectivamente; e quatro reflexões nos eixos  $AC$ ,  $BD$ ,  $m$  e  $n$ , denotadas por  $\rho_{AC}$ ,  $\rho_{BD}$ ,  $\rho_m$  e  $\rho_n$ . As rotações  $r_1$  e  $r_3$  são elementos de ordem quatro (ou seja,  $r_1^4 = r_3^4 = id$ ), enquanto que a rotação  $r_2$ , e todas as reflexões são elementos de ordem dois. Por outro lado temos que  $r_2 = r_1^2$  e  $r_3 = r_1^3$ , ou seja, a existência de  $r_1$  em  $D_4$  determina a existência de  $r_2$  e  $r_3$ . Dizemos então que  $r_1$  **gera**  $r_2$  e  $r_3$ . Temos também que  $\rho_{BD} = r_1^2 \rho_{AC}$ ,  $\rho_m = r_1 \rho_{AC}$  e  $\rho_n = r_1^3 \rho_{AC}$ , ou seja  $r_1$  e  $\rho_{AC}$  geram todos os elementos de  $D_4$ . Dizemos que  $r_1$  e  $\rho_{AC}$  formam um **conjunto completo de geradores** do grupo  $D_4$ . Observe também que, como  $\rho_m^2 = id$  e  $\rho_m = r_1 \rho_{AC}$ , então vale a relação entre os geradores  $r_1 \rho_{AC} r_1 \rho_{AC} = id$ , e esta relação junto com  $\rho_{AC}^2 = r_1^4 = id$  determina toda a estrutura de  $D_4$ . De fato, é fácil verificar que se definimos um grupo abstrato  $G = \langle a, b; a^4, b^2, abab \rangle$ , como sendo o grupo gerado pelos elementos  $a$  e  $b$ , e sujeito às relações  $a^4 = b^2 = abab = id$ , então a aplicação  $a \mapsto r_1$  e  $b \mapsto \rho_{AC}$  é um isomorfismo. Dizemos que  $\langle a, b; a^4, b^2, abab \rangle$  é uma **apresentação** do grupo  $D_4$ , e escrevemos

$$D_4 \approx \langle a, b; a^4, b^2, abab \rangle.$$

O grupo  $D_4$  é chamado também de **grupo diedro** de ordem quatro. ■

Podemos agora generalizar o exemplo anterior e dizer que, dado um grupo  $G$ , um conjunto  $S \subset G$  é um **conjunto completo de geradores** de  $G$  se  $S$  não está contido em nenhum subgrupo próprio de  $G$ , e portanto todo elemento de  $G$  pode ser escrito como produto de elementos de  $S$ . Os elementos de  $S$  chamam-se **geradores** de  $G$ , e se  $g = s_1 s_2 \dots s_l$ , com  $g \in G$  e  $s_1, s_2, \dots, s_l \in S$ , então  $s_1 s_2 \dots s_l$  é uma **palavra** para  $g$ . A escolha do conjunto de geradores é, até certo ponto, arbitrária de modo que para um mesmo grupo  $G$  pode-se escolher diversos conjuntos de geradores. Mais ainda, dado um conjunto de geradores  $S \subset G$ , existem várias maneiras de expressar um mesmo elemento  $g \in G$  como produto de elementos de  $S$ , e é desta forma que surge o conceito de relações.

De fato, se  $r_1 r_2 \dots r_k$  e  $s_1 s_2 \dots s_l$  são duas palavras para um mesmo elemento  $g \in G$  em termos do conjunto de geradores  $S$ , então  $r_1 r_2 \dots r_k s_l^{-1} \dots s_2^{-1} s_1^{-1} = id$ . O lado esquerdo desta última expressão é chamado de **relação** em  $G$  entre os elementos de  $S$ . Um conjunto  $R$  de relações em  $G$  entre elementos de  $S$  é dito **completo** se para cada  $g \in G$ , podemos transformar qualquer palavra para  $g$ , mediante o uso exclusivo dos elementos de  $R$ , em qualquer outra palavra para  $g$ . Como ilustração, consideremos no exemplo anterior as palavras  $r_1^3 \rho_{AC}$  e  $\rho_{AC} r_1$  de  $\rho_n$ , e observe que

$$\rho_{AC} r_1 = r_1^4 \rho_{AC} r_1$$

$$\begin{aligned}
&= r_1^3 \rho_{AC}^2 r_1 \rho_{AC} r_1 \\
&= r_1^3 \rho_{AC} r_1^4 \rho_{AC} r_1 \rho_{AC} r_1 \\
&= r_1^3 \rho_{AC} r_1^3 (r_1 \rho_{AC} r_1 \rho_{AC}) r_1 \\
&= r_1^3 \rho_{AC} r_1^4 \\
&= r_1^3 \rho_{AC}.
\end{aligned}$$

Vemos então que as três relações  $r_1^4$ ,  $\rho_{AC}^2$  e  $r_1 \rho_{AC} r_1 \rho_{AC}$  permitem transformar a palavra  $\rho_{AC} r_1$  de  $\rho_n$ , na palavra  $r_1^3 \rho_{AC}$ , também de  $\rho_n$ .

Uma **apresentação** do grupo  $G$  é um par  $(S, R)$ , onde  $S$  é um conjunto de geradores de  $G$ , e  $R$  é um conjunto completo de relações entre estes geradores em  $G$ . Uma apresentação  $(S, R)$  é dita **finita** se tanto  $S$  quanto  $R$  são conjuntos finitos. Um grupo  $G$  é **finitamente apresentável** se existe pelo menos uma apresentação finita para ele. Um grupo **finitamente apresentado** é um grupo  $G$  junto com uma apresentação finita para ele. Se  $(S, R)$  é uma apresentação de  $G$ , costuma-se escrever

$$G = \langle S ; R \rangle.$$

Como toda apresentação de um grupo depende da escolha dos conjuntos de geradores e de relações, segue-se imediatamente que o mesmo grupo pode ter diferentes apresentações.

Vamos terminar esta breve incursão na teoria combinatória de grupos introduzindo dois conceitos que são amplamente usados nas aplicações do teorema de Seifert-Van Kampen. Seja  $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$  uma família de grupos apresentados na forma

$$G_i = \langle S_i ; R_i \rangle,$$

o **produto livre** de  $\mathcal{G}$  é

$$\prod_{i \in I}^* G_i = \langle \bigcup_{i \in I} S_i ; \bigcup_{i \in I} R_i \rangle.$$

Adicionalmente, se  $A = \langle S_0 ; R_0 \rangle$ , e  $\rho_i : A \rightarrow G_i$  são monomorfismos, o **produto livre em  $\mathcal{G}$  amalgamado** por  $A$  e  $\{\rho_i\}_{i \in I}$  é

$$\prod_{i \in I}^A G_i = \langle S ; R \cup H \rangle,$$

onde

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i \quad , \quad R = \bigcup_{i \in I} R_i \quad \text{e}$$

$$H = \{\rho_i(s) \rho_j(s)^{-1} : s \in S_0, i, j \in I\}.$$

Observe que as relações em  $A$  não interessam.

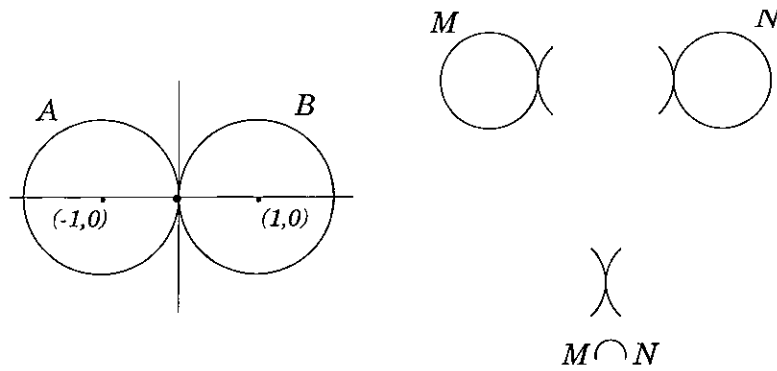


Figura 1.6: A figura mostra uma curva em forma de “oito”, e a decomposição utilizada para calcular o seu grupo fundamental usando o teorema de Seifert-Van Kampen. A curva é formada por dois círculos,  $A$  e  $B$ , de raio 1, um deles centrado em  $(-1, 0)$  e o outro em  $(1, 0)$ .

### 1.3.2 Aplicações do teorema de Seifert-Van Kampen

As aplicações que faremos do teorema de Seifert-Van Kampen estão baseados nos seguintes dois corolários.

**Corolário 1.1** *Nas condições do enunciado do teorema de Seifert-Van Kampen (teorema 1.7), suponha que  $W$  é simplesmente conexo. Então  $\pi_1(X)$  é isomorfo ao produto livre de  $\{\pi_1(V_i) : i \in I\}$ .*

**Corolário 1.2** *Nas condições do teorema de Seifert-Van Kampen (teorema 1.7), suponha que todos os abertos  $V_i$  são simplesmente conexos, exceto um deles que denotamos por  $V$ . Se  $\pi_1(V)$  e  $\pi_1(W)$  possuem as apresentações  $\pi_1(V) = \langle S ; R \rangle$  e  $\pi_1(W) = \langle S_0 ; R_0 \rangle$ , então  $\pi_1(X)$  possui a seguinte apresentação*

$$\pi_1(X) \approx \langle S ; R \cup K \rangle,$$

onde  $K = \{\rho_*(s) : s \in S_0\}$ .

Nas condições do corolário 1.2, suponha que  $\pi_1(V)$  e  $\pi_1(W)$  possuem as apresentações  $\pi_1(V) = \langle S ; R \rangle$  e  $\pi_1(W) = \langle S_0 ; R_0 \rangle$ . Então, pelo corolário 1.2,  $\pi_1(X)$  possui a seguinte apresentação

$$\pi_1(X) \approx \langle S ; R \cup K \rangle,$$

onde  $K = \{\rho_*(s) : s \in S_0\}$ .

**Exemplo 1.23 Grupo fundamental da “figura 8”.** Seja  $X$  um subespaço do plano em forma de um oito, conforme mostra a figura 1.6. É evidente que podemos escrever  $X = A \cup B$ , onde  $A$  e  $B$  são homeomorfos ao círculo  $S^1$ , e  $A \cap B = \{\text{origem}\}$ . Porém nem  $A$  nem  $B$  são abertos, e portanto não podemos aplicar diretamente o corolário 1.1.

Para aplicar este corolário, consideremos o aberto  $M \subset X$ , obtido interceptando o disco centrado em  $(-1, 0)$  e raio um pouco maior do que 1 com  $X$ . É claro que  $A \subset M$ , e  $M$  é do mesmo tipo homotópico que  $A$ . Analogamente, construímos um aberto  $N \subset X$  que contenha  $B$  e seja do mesmo tipo de homotopia de  $B$ . Como  $M \cap N$  é contrátil, então  $\pi_1(X) \approx \langle a, b \rangle$ , onde  $a$  e  $b$  são os geradores de  $\pi_1(A)$  e  $\pi_1(B)$  respectivamente. ■

**Exemplo 1.24 Círculos com um ponto em comum.** O exemplo anterior pode ser generalizado trivialmente. Seja  $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$  uma família de espaços homeomorfos a  $S^1$  com um único ponto em comum, ou seja tais que para todo  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \{x\}$ . O grupo fundamental do espaço  $X = \cup_{i \in I} A_i$  é

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \prod_{i \in I}^* \pi_1(A_i) \\ &= \prod_{i \in I}^* \langle a_i \rangle \\ &= \langle S \rangle, \end{aligned}$$

onde  $S = \{a_i : \pi_1(A_i) = \langle a_i \rangle, i \in I\}$ . ■

**Exemplo 1.25** Como aplicação dos exemplos anteriores vamos calcular o grupo fundamental do plano  $R^2$  menos  $n$  pontos. Observe que o plano menos  $n$  pontos é do mesmo tipo homotópico que  $n$  círculos com um ponto em comum, logo

$$\pi_1(R^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle,$$

onde  $a_i$  é a classe de equivalência dos laços que dão uma volta em torno do ponto  $p_i$  no sentido anti-horário. ■

**Exemplo 1.26 O toro  $T^2$ .** Um domínio fundamental para o toro  $T^2 = R^2/G$ , onde  $G$  é o grupo gerado pelas translações  $(x, y) \mapsto (x+1, y)$  e  $(x, y) \mapsto (x, y+1)$ , é um quadrado de lado 1 centrado na origem do plano  $R^2$ , e com lados paralelos aos eixos coordenados. Na figura 1.7 mostram-se este domínio fundamental e as instruções de colagem. Nesta figura mostra-se também uma decomposição do toro em abertos  $A$  e  $B$ , adequada para a aplicação do corolário 1.2, pois  $B$  é simplesmente conexo. Observe também que  $A$  é do mesmo tipo de homotopia que a “figura 8”, logo

$$\pi_1(A) = \langle a, b \rangle,$$

e que  $A \cap B = B \setminus \{p\}$  é do mesmo tipo de homotopia do círculo, logo

$$\pi_1(A \cap B) = \langle c \rangle.$$

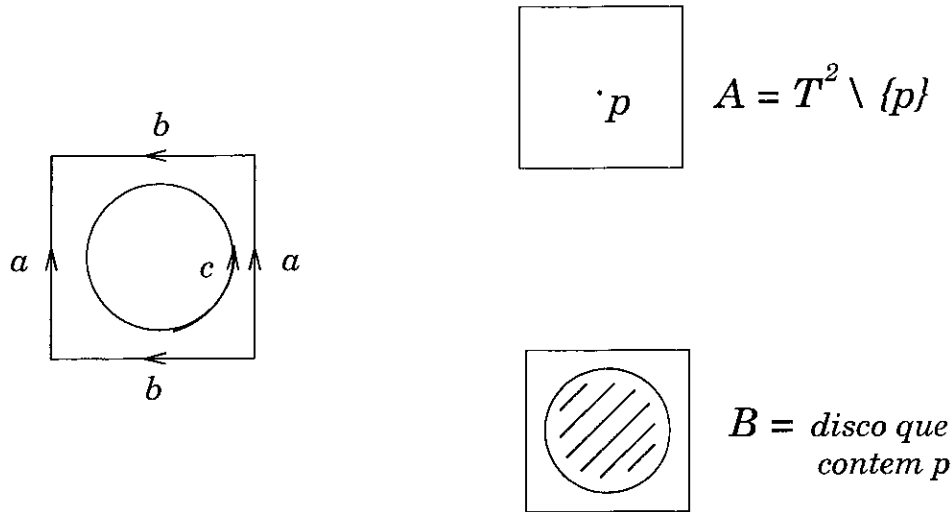


Figura 1.7: Domínio fundamental e instruções de colagem para o toro  $T^2$ . Os geradores  $a$  e  $b$  estão representados por laços com base no ponto que resulta da identificação dos vértices do quadrado. Na figura aparecem também a decomposição usada para calcular o grupo fundamental do toro aplicando o teorema de Seifert-Van Kampen, e o homomorfismo induzido pela inclusão do gerador do grupo fundamental do disco menos o centro, no domínio fundamental do toro.

Além disso, a inclusão em  $A$  de um laço em  $A \cap B$ , representante do gerador  $c$ , dá um laço em  $A$  representante da classe  $aba^{-1}b^{-1}$ , como mostra a figura 1.7, ou seja

$$\rho_*(c) = aba^{-1}b^{-1}.$$

Portanto

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b; aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

Observe que a única relação de  $\pi_1(T^2)$  é uma condição de comutação, portanto  $\pi_1(T^2)$  é abeliano. ■

**Exemplo 1.27 O espaço projetivo  $RP^m$  ( $m \geq 2$ ).** Uma forma de olharmos para  $RP^m$  é identificar pontos antípodos na esfera  $S^m$ . Uma outra, mais conveniente para o cálculo de  $\pi_1(RP^m)$ , é olharmos para  $S^m$  como a união dos hemisférios superior e inferior colados pelo equador, logo  $RP^m$  é só um dos hemisférios (qualquer um), colando no equador os pontos antípodos. Consideremos então o hemisfério superior  $S_+^m = \{x \in S^m : x_{m+1} \geq 0\}$ , e os conjuntos  $A = \{x \in S_+^m : x_{m+1} > 1/4\}$  e  $B = \{x \in S_+^m : x_{m+1} < 3/4\}$ , e observemos o seguinte

- $A$  é homeomorfo a  $R^m$ , logo  $\pi_1(A) \approx \{e\}$ .
- $B$  é contrátil ao equador, logo  $\pi_1(B) \approx \pi_1(RP^{m-1})$ .
- $A \cap B$  é homotopicamente equivalente à esfera  $S^{m-1}$ , logo  $\pi_1(A \cap B) \approx \pi_1(S^{m-1})$ .

Portanto, para  $m \geq 3$  temos  $\pi_1(A \cap B) \approx \{e\}$ , e logo

$$\pi_1(RP^m) \approx \pi_1(RP^{m-1}).$$

Para  $m = 2$  temos

$$\begin{aligned}\pi_1(B) &\approx \pi_1(RP^1) \\ &\approx \pi_1(S^1) \\ &\approx \langle a \rangle,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi_1(A \cap B) &\approx \pi_1(S^1) \\ &\approx \langle b \rangle,\end{aligned}$$

sendo que o monomorfismo induzido pela inclusão  $\rho : A \cap B \hookrightarrow B$  leva o gerador de  $\pi_1(A \cap B)$  no quadrado do gerador de  $\pi_1(B)$ . Temos portanto

$$\begin{aligned}\pi_1(RP^2) &\approx \langle a ; a^2 \rangle \\ &\approx Z_2.\end{aligned}$$

Segue-se então que o grupo fundamental de  $RP^m$  é isomorfo a  $Z_2$ . ■

## 1.4 Espaços de recobrimento

A teoria de espaços de recobrimento fornece, entre outras coisas, um método para calcular representações concretas de grupos fundamentais, muitas vezes como subgrupos discretos de grupos topológicos. É possível adquirir certa intuição e familiaridade com alguns resultados da teoria dos espaços de recobrimento ao realizar o cálculo direto de  $\pi_1(S^1)$ , pois neste processo somos obrigados a introduzir o conceito de recobrimento universal, e a utilizar propriedades deste. A subseção 1.4.1 está dedicada a este cálculo. Na subseção 1.4.2 estuda-se o conceito de levantamento de funções em recobrimentos e as transformações de recobrimento, sendo o resultado principal que o grupo fundamental de um espaço topológico satisfazendo certas propriedades é isomorfo ao grupo de transformações de recobrimento do seu recobrimento universal. Nesta última subseção é também apresentada uma versão recíproca do teorema 1.1.

### 1.4.1 O grupo fundamental do círculo

Esta subseção está dedicada exclusivamente à prova do teorema 1.8, a motivação para incluir este resultado bastante óbvio e conhecido é de ordem pedagógica. Os aspectos

básicos da teoria dos espaços de recobrimento podem ser facilmente assimilados estudando este exemplo em detalhe, pois o cálculo do grupo fundamental do círculo envolve de maneira bastante simplificada muitas propriedades dos recobrimentos. De fato, prova do teorema 1.8 reduz-se essencialmente a três lemas que depois serão generalizados.

**Teorema 1.8 Grupo fundamental do círculo** *O grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo dos números inteiros, e o gerador do grupo é a classe de equivalência do laço*

$$\begin{aligned} \alpha : J &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} . \end{aligned} \tag{1.11}$$

**Prova.** Consideremos o recobrimento do círculo dado no exemplo 1.5,

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi it} . \end{aligned} \tag{1.12}$$

O primeiro lema garante a existência de uma vasta quantidade de caminhos em  $R$  que, pela aplicação (1.12), se projetam no círculo em caminhos previamente fixados.

**Lema 1.3 (Propriedade de levantamento de caminhos.)** *Seja  $\gamma : J \rightarrow S^1$  um caminho com  $\gamma(0) = 1$ , então para cada inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , existe um único caminho  $\tilde{\gamma}_n : J \rightarrow R$  tal que  $\tilde{\gamma}_n(0) = n$ , e que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \tilde{\gamma}_n & \downarrow f \\ J & \xrightarrow{\gamma} & S^1 \end{array} .$$

O caminho  $\tilde{\gamma}_n$  chama-se **levantamento** do caminho  $\gamma$  a partir de  $n \in \mathbb{Z}$ . O lema 1.3 diz, em particular, que todo laço com base em  $1 \in S^1$  possui um único levantamento que começa em  $0 \in R$ . E pelo lema abaixo, os levantamentos a partir do mesmo ponto, de dois laços homotópicos, são homotópicos.

**Lema 1.4 (Homotopia de caminhos levantados.)** *Sejam  $\alpha, \beta : J \rightarrow S^1$  caminhos homotópicos (isto implica em particular que  $\alpha(0) = \beta(0)$  e  $\alpha(1) = \beta(1)$ ). Sejam  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : J \rightarrow R$  levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, tais que  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ . Então  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ , e  $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$ .*

Seja agora  $\gamma : J \rightarrow S^1$  um laço com  $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ , e  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow R$  seu levantamento a partir de  $0 \in R$ ; então  $\tilde{\gamma}(1) \in f^{-1}(1) = Z$ . Seja  $n = \tilde{\gamma}(1)$ ; este inteiro é chamado de **grau** do laço  $\gamma$ , e escrevemos  $n = \text{deg}(\gamma)$ . Pelo lema 1.4 o valor  $\text{deg}(\gamma)$  depende só da classe de homotopia  $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$ , portanto, com certo abuso de notação, fica definida a função

$$\begin{aligned} \text{deg} : \pi_1(S^1, 1) &\rightarrow Z \\ [\gamma] &\mapsto \text{deg}(\gamma). \end{aligned}$$

O seguinte lema fecha prova da primeira parte do teorema.

**Lema 1.5** *A função  $\text{deg} : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow Z$  é um isomorfismo.*

Para ver que o gerador de  $\pi_1(S^1, 1)$  é a classe de equivalência do laço (1.11), basta observar que  $\text{deg}(\alpha) = 1$ . ■

## 1.4.2 Levantamentos e transformações de recobrimento

As aplicações de recobrimento entre variedades diferenciáveis foram definidas na subseção 1.1.1, e este conceito foi relacionado com as variedades quociente a través do teorema 1.1. De fato, na topologia cósmica estamos interessados em estudar o conceito de recobrimento entre variedades com mais estrutura do que somente a diferenciabilidade: interessam-nos as variedades riemannianas tridimensionais. Porém, da mesma forma que no caso do grupo fundamental, é conveniente estudar a teoria dos espaços de recobrimento no contexto mais geral dos espaços topológicos. Algumas observações de topologia geral são relevantes para o que segue.

Todos os espaços topológicos que consideraremos a seguir são espaços de Hausdorff, conexos por caminhos, e localmente conexos por caminhos. Um espaço topológico  $X$  é **localmente conexo por caminhos** se para cada ponto  $x \in X$ , toda vizinhança  $U$  de  $x$  contém uma vizinhança de  $x$  conexa por caminhos. Analogamente, um espaço  $X$  é **localmente conexo** se para todo ponto  $x \in X$ , toda vizinhança  $U$  de  $x$  contém uma vizinhança de  $x$  conexa.

Uma variedade diferencial conexa é conexa por caminhos, e localmente conexa por caminhos, logo a definição de aplicação de recobrimento dada na subseção 1.1.1 generaliza-se trivialmente. Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $p : X \rightarrow Y$  uma função contínua. Diz-se que um aberto  $U \subset Y$  é **admissível** se  $p$  mapeia homeomorficamente cada componente conexa de  $p^{-1}(U)$  em  $U$ . Um **recobrimento** é uma terna  $(X, p, Y)$ , onde  $p : X \rightarrow Y$



é uma função contínua,  $X$  e  $Y$  são espaços topológicos conexos, e  $Y$  possui uma cobertura de abertos admissíveis conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos. A aplicação  $p$  chama-se **aplicação de recobrimento**, o espaço  $X$  chama-se **espaço de recobrimento**, e o espaço  $Y$  chama-se **espaço de base**.

Os dois primeiros lemas usados no cálculo do grupo fundamental do círculo são casos particulares dos seguintes dois teoremas. Em particular, o lema 1.3 é um corolário do seguinte teorema.

**Teorema 1.9 Propriedade de levantamento de caminhos.** *Seja  $p : X \rightarrow Y$  uma aplicação de recobrimento, e seja  $\alpha : J \rightarrow Y$  um caminho. Seja também  $x_0 \in X$  tal que  $p(x_0) = \alpha(0)$ . Então existe um único caminho  $\tilde{\alpha} : J \rightarrow X$  tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ , e  $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ .*

Este teorema enuncia-se de maneira gráfica dizendo que dados um caminho  $\alpha : J \rightarrow Y$  e uma aplicação de recobrimento  $p : X \rightarrow Y$ , então existe uma única função contínua  $\tilde{\alpha} : J \rightarrow X$  que completa o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{\alpha} & \downarrow p \\ J & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array} .$$

O lema 1.4 é um caso particular do corolário 1.3, o qual segue-se do seguinte teorema.

**Teorema 1.10 Homotopia de recobrimento.** *Seja  $W$  um espaço localmente conexo e  $p : X \rightarrow Y$  uma aplicação de recobrimento. Seja  $H : W \times J \rightarrow Y$  uma homotopia e  $h : W \times \{0\} \rightarrow X$  um levantamento de  $H|_{W \times \{0\}}$ . Então existe uma única homotopia  $\tilde{H} : W \times J \rightarrow X$  que faz o seguinte diagrama comutar*

$$\begin{array}{ccc} W \times \{0\} & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ W \times J & \xrightarrow{H} & Y \end{array} .$$

Além disso, se  $H$  é uma homotopia relativa a  $V \subset W$ , então  $\tilde{H}$  também o é.

**Corolário 1.3** *Seja  $(X, p, Y)$  um recobrimento e  $f_1, f_2 : I \rightarrow Y$  caminhos homotópicos em  $Y$ , com  $y_0 = f_1(0) = f_2(0)$ . Sejam  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : I \rightarrow X$  levantamentos de  $f_1$  e  $f_2$  a partir do mesmo ponto  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ . Então  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  são homotópicos.*

O seguinte corolário é muito útil no desenvolvimento da relação entre o grupo fundamental de um espaço  $Y$  e os espaços de recobrimento dos quais  $Y$  é o espaço base. Em particular, ele será utilizado para caracterizar o grupo fundamental de  $Y$  a partir de um recobrimento  $(X, p, Y)$  muito particular, chamado *recobrimento universal*.

**Corolário 1.4** *Seja  $(X, p, Y)$  um recobrimento com  $p(x_0) = y_0$ . Então, o homomorfismo induzido*

$$p_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

*é um monomorfismo cuja imagem consiste nas classes de laços em  $y_0$  que levantam a laços em  $x_0$ .*

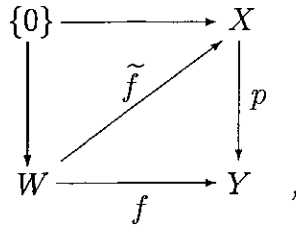
**Observação 1.7** Um recobrimento  $(X, p, Y)$  é dito **trivial** se  $p$  é um homeomorfismo. Portanto, se um espaço  $Y$  possui um recobrimento não trivial, então  $\pi_1(Y)$  é um grupo não trivial. Como a existência de curvas fechadas não contráteis em  $Y$  está refletida na não trivialidade de  $\pi_1(Y)$ , segue-se que  $Y$  é um espaço multiplamente conexo se e somente se  $Y$  possui um recobrimento não trivial. ■

Um problema importante em topologia é o de decidir quando uma função  $f : W \rightarrow Y$  pode ser *levantada* a uma função  $g : W \rightarrow X$ , tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array} ,$$

onde  $p : X \rightarrow Y$  é uma função dada. Muitos problemas em topologia reduzem-se a encontrar este tipo de levantamentos. Para o caso em que  $p : X \rightarrow Y$  seja uma aplicação de recobrimento existem condições necessárias e suficientes para que um tal levantamento sempre exista.

**Teorema 1.11 Teorema de levantamentos.** *Seja  $(X, p, Y)$  um recobrimento com  $p(x_0) = y_0$ , e  $f : W \rightarrow Y$  uma função contínua com  $f(w_0) = y_0$ . Então existe o levantamento  $\tilde{f} : W \rightarrow X$  tal que o seguinte diagrama comuta*



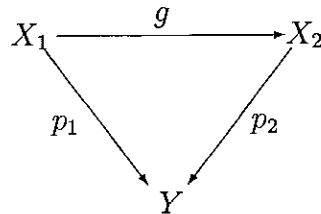
se e somente se  $f_*(\pi_1(W, w_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$ .

Este teorema dá lugar a dois corolários fundamentais.

**Corolário 1.5** *Sejam  $(X_i, p_i, Y)$ , com  $i = 1, 2$ , recobrimentos tais que  $X_1$  é simplesmente conexo; e sejam também  $x_i \in X_i$  e  $y \in Y$  tais que  $p_i(x_i) = y$ . Então existe uma única função  $g : X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $g(x_1) = x_2$ , e tal que  $p_2 \circ g = p_1$ . Além disso,  $(X_1, g, X_2)$  é um recobrimento.*

**Corolário 1.6** *Sejam  $(X_i, p_i, Y)$ , com  $i = 1, 2$ , recobrimentos tais que  $X_1$  e  $X_2$  são simplesmente conexos. Se  $x_i \in X_i$  são tais que  $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ , então existe uma única função  $g : X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $p_2 \circ g = p_1$ , e  $g(x_1) = x_2$ . Além disso,  $g$  é um homeomorfismo.*

O corolário 1.6 fornece uma generalização imediata da definição de transformação de recobrimento (veja o diagrama comutativo no final da subseção 1.1.1). Sejam  $(X_i, p_i, Y)$ , com  $i = 1, 2$ , dois recobrimentos tais que existe uma função  $g : X_1 \rightarrow X_2$  que faz o diagrama



comutar, neste caso diz-se que  $g$  é um **homomorfismo de recobrimentos**. Agora, se  $(X_3, p_3, Y)$  é um outro recobrimento, e  $f : X_2 \rightarrow X_3$  é um homomorfismo de recobrimentos, então  $f \circ g : X_1 \rightarrow X_3$  é também um homomorfismo de recobrimentos. Um homomorfismo de recobrimentos que é um homeomorfismo chama-se **isomorfismo de recobrimentos**, ou simplesmente uma **equivalência de recobrimentos**. O corolário 1.6 simplesmente afirma que dois recobrimentos  $(X_1, p_1, Y)$  e  $(X_2, p_2, Y)$ , com  $X_1$  e  $X_2$  simplesmente conexos, são equivalentes ou isomorfos. Por este motivo, um recobrimento

$(X, p, Y)$ , com  $X$  simplesmente conexo, é dito **recobrimento universal**, e  $X$  é chamado de **espaço de recobrimento universal** de  $Y$ . Existem espaços topológicos que não possuem um recobrimento universal, porém, se um espaço  $Y$  possui um recobrimento universal, então ele é único módulo isomorfismos. Pode-se mostrar que toda variedade topológica conexa possui um espaço de recobrimento universal (veja por exemplo o teorema 8.4 de [18]).

Vamos agora generalizar o conteúdo do lema 1.5 no corolário 1.7 adiante. Para este fim é conveniente considerar apenas uma subclasse de recobrimentos. Um recobrimento  $(X, p, Y)$  é dito **regular** se  $Deck(X, p, Y)$  age transitivamente nas fibras do recobrimento. Pode-se provar que se  $(X, p, Y)$  é um recobrimento regular, então dados  $y_0 \in Y$  e  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ , temos que  $p_*(\pi_1(X, x_0))$  é um subgrupo normal de  $\pi_1(Y, y_0)$ . O seguinte teorema caracteriza as transformações de recobrimentos de um recobrimento regular.

**Teorema 1.12** *Se  $(X, p, Y)$  é um recobrimento regular, então*

$$Deck(X, p, Y) \approx \pi_1(Y, y_0) / p_*(\pi_1(X, x_0)),$$

onde  $y_0 \in Y$  e  $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ .

A consequência mais importante deste teorema é dada pelo seguinte corolário, que é a generalização do lema 1.5 acima mencionado.

**Corolário 1.7** *Se  $(X, p, Y)$  é um recobrimento universal, então*

$$Deck(X, p, Y) \approx \pi_1(Y, y_0),$$

para qualquer  $y_0 \in Y$ .

Para encerrar esta subseção (e este capítulo), sejam  $\widetilde{M}$  e  $M$  variedades diferenciais, e  $(\widetilde{M}, p, M)$  um recobrimento universal; e denotemos por  $\Gamma = Deck(\widetilde{M}, p, M)$ . Pelo corolário 1.7,  $\Gamma \approx \pi_1(M, x_0)$ , onde  $x_0 \in M$ . Além disso,  $\Gamma$  age de maneira livre em  $\widetilde{M}$  e de maneira propriamente descontínua em  $\widetilde{M}$  [112]. Segue-se que  $\widetilde{M}/\Gamma$  é uma variedade diferencial com grupo de recobrimento  $\Gamma$ . Se  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$  é a projeção de recobrimento, então a função

$$\begin{aligned} \psi : M &\rightarrow \widetilde{M}/\Gamma \\ x &\mapsto \pi(p^{-1}(x)) \end{aligned} \tag{1.13}$$

é um difeomorfismo. De fato, como ambas projeções,  $p$  e  $\pi$ , possuem as mesmas fibras,  $\psi$  é uma bijeção. A diferenciabilidade de  $\psi$  e  $\psi^{-1}$  prova-se rapidamente tomando vizinhanças admissíveis em  $M$  e  $\widetilde{M}/\Gamma$ , e considerando que  $p$  e  $\pi$  são difeomorfismos locais. Temos então o seguinte teorema.

**Teorema 1.13** *Sejam  $\widetilde{M}$  e  $M$  variedades diferenciáveis conexas, e  $(\widetilde{M}, p, M)$  um recobrimento universal. Seja  $\Gamma = \pi_1(M, x)$ , com  $x \in M$ , então*

$$M \approx \widetilde{M}/\Gamma,$$

*com o difeomorfismo canônico dado por (1.13).*

## Capítulo 2

# Fragilidade topológica

*Half of the secret to resistance of disease is cleanliness; the other half is dirtiness.*

*Anônimo*

*Everything that happens, happens as it should, and if you observe carefully, you will find this to be so.*

*Antoninus Marcus Aurelius*

As considerações globais são usualmente subestimadas ao formular as leis físicas em termos de equações diferenciais locais. Por exemplo, quando se estuda a radiação eletromagnética de fontes localizadas em regiões limitadas, frequentemente considera-se que os campos se anulam no infinito. Esta escolha de *condições de contorno* é possível, e sobretudo conveniente, quando o espaço-tempo é o espaço de Minkowski ordinário. Mas é claramente impossível de implementar se consideramos seções espaciais compactas, nas quais sequer existe o conceito de *infinito espacial*. Na cosmologia, em particular, as considerações topológicas adquirem especial relevância pois a estrutura global do espaço-tempo possui, num certo sentido, uma característica dinâmica.

Supondo a validade da lei de Gauss num espaço-tempo com seções espaciais compactas é fácil mostrar que a carga elétrica líquida no universo deve ser zero (veja por exemplo [20] para generalizações e aplicações destes resultados à cosmologia). Este resultado mostra que mudanças nos pressupostos sobre a estrutura topológica do espaço-tempo podem induzir mudanças insuspeitadas no comportamento de sistemas físicos. Este tipo de sensibilidade do comportamento de um sistema, em relação à estrutura topológica do espaço-tempo é denominada de **fragilidade topológica**, e foi introduzida no contexto cosmológico em [88]. Deve-se observar que em sistemas topologicamente frágeis não é vio-

lada nenhuma lei local da física. Portanto, determinar se, e/ou até que ponto, a evolução de sistemas físicos depende da topologia do espaço ambiente onde estão imersos, torna-se um problema relevante na física.

Neste capítulo estuda-se um exemplo simples de sistema topologicamente frágil. O sistema consiste em um oscilador harmônico acoplado a um campo escalar sem massa imerso num espaço-tempo localmente minkowskiano. O oscilador harmônico irradia toda a sua energia quando o espaço ambiente é o espaço de Minkowski: a amplitude, e portanto a energia armazenada nele, decai exponencialmente no tempo. Porém se o ambiente onde está o oscilador harmônico é localmente minkowskiano, mas possui seções espaciais com topologia não trivial, então o comportamento do oscilador muda drasticamente. Vamos mostrar neste capítulo que, neste caso, a amplitude do oscilador, e portanto a energia contida nele, aumenta de maneira exponencial com o tempo. Este resultado independe da topologia da seção espacial, desde que seja multiplamente conexa. O sistema irradiante analisado aqui tem sido usado para modelar uma ampla gama de fenômenos oscilantes (ver por exemplo [2, 3, 4, 8, 11, 12, 22, 54, 101, 106, 114]), mas em todas estas aplicações o espaço ambiente era simplesmente conexo, e portanto apresentava-se sempre o decaimento exponencial da energia do oscilador. O fato deste sistema ser topologicamente frágil só foi descoberto recentemente [13, 49].

Este sistema topologicamente frágil foi analisado numericamente, para os casos em que as seções espaciais do espaço-tempo ambiente eram compactas e orientáveis, em [13]; e generalizado para seções espaciais arbitrárias em [49]. Neste último trabalho obteve-se também uma solução analítica para a equação de reação à radiação do oscilador. O sistema irradiante é descrito em detalhe na subseção 2.1, e na subseção 2.3 apresenta-se a solução do problema obtida em [49].

## 2.1 Sistema oscilador-campo escalar

Seja  $M$  uma variedade localmente euclideana tridimensional com grupo de recobrimento  $\Gamma$  ( $M$  pode ser inclusive o próprio  $E^3$ ). O espaço-tempo localmente minkowskiano onde o nosso sistema está imerso é da forma  $R \times M$ , onde  $R$  fornece a coordenada temporal, e  $M$  é a sua seção espacial constante. Um **campo escalar** em  $M$  é uma função  $\varphi : R \times M \rightarrow R$  e, denotando o espaço de Minkowski por  $R \times E^3$ , temos que o recobrimento  $\pi : E^3 \rightarrow M$  define um campo escalar em  $R \times M$  dado pelo seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
R \times E^3 & & \\
\downarrow \pi_T & \searrow \tilde{\varphi} & \\
R \times M & \xrightarrow{\varphi} & R \quad ,
\end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}
\pi_T : R \times E^3 &\rightarrow R \times M \\
(t, \vec{x}) &\mapsto (t, \pi(\vec{x})) .
\end{aligned}$$

Agora, se  $\Gamma$  é o grupo de recobrimento de  $M$ , então para todo  $g \in \Gamma$  temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
R \times E^3 & \xrightarrow{g_T} & R \times E^3 \\
& \searrow \tilde{\varphi} & \swarrow \tilde{\varphi} \\
& & R \quad ,
\end{array}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_T : R \times E^3 &\rightarrow R \times E^3 \\
(t, \vec{x}) &\mapsto (t, g\vec{x}) .
\end{aligned}$$

Seja  $\tilde{\varphi} : R \times E^3 \rightarrow R \times E^3$  um campo escalar invariante por  $\Gamma$  para cada  $t \in R$  fixo, ou seja um campo tal que

$$\tilde{\varphi} \circ g_T = \tilde{\varphi} \tag{2.1}$$

para cada  $g \in \Gamma$ . A projeção  $\pi : E^3 \rightarrow M$  define um campo escalar  $\varphi : R \times M \rightarrow R$  tal que  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi_T$ . Portanto, existe uma correspondência biunívoca entre os campos escalares em  $M$  e os campos escalares em  $E^3$  invariantes sob  $\Gamma$ .

Agora, considere um oscilador harmônico localizado num ponto arbitrário  $q \in M$ , e suponha que a aplicação de recobrimento  $\pi : E^3 \rightarrow M$  leva a origem de  $E^3$  ao ponto  $q$ . Seja  $\mathcal{O}_q = \pi^{-1}(q)$  a órbita da origem de  $E^3$  sob a ação de  $\Gamma$  em  $E^3$ . Se o campo escalar  $\varphi$  está acoplado ao oscilador harmônico localmente, ou seja o acoplamento limita-se a uma vizinhança contrátil de  $q \in M$ , então o campo  $\tilde{\varphi}$  está acoplado localmente a cada oscilador localizado em  $\mathcal{O}_q$ . Portanto, a evolução do oscilador harmônico em  $q \in M$  pode ser obtida



estudando o sistema equivalente no recobrimento universal  $E^3$ , o qual é formado por um conjunto infinito de osciladores idênticos, cada um deles localizado num ponto da órbita  $\mathcal{O}_q$  e interagindo com o campo escalar  $\tilde{\varphi}$  da mesma maneira que o oscilador em  $q \in M$  interage com  $\varphi$ . Adicionalmente todos os osciladores estão sujeitos ao mesmo conjunto de condições iniciais que o oscilador em  $M$ .

Segue-se que a dinâmica do nosso sistema em  $M$  pode ser derivada da ação deste sistema equivalente em  $E^3$

$$S = S_f + S_o + S_i, \quad (2.2)$$

onde  $S_f$  corresponde ao termo livre do campo escalar,  $S_o$  corresponde ao termo livre dos osciladores, e  $S_i$  é o termo de acoplamento entre o campo escalar e os osciladores. Estes três termos são respectivamente

$$S_f = \frac{1}{2} \int d^4x \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\varphi}(t, \vec{x}) \partial_\nu \tilde{\varphi}(t, \vec{x}), \quad (2.3)$$

$$S_o = \frac{1}{2} \sum_{\vec{p} \in \mathcal{O}_q} \int dt [\dot{Q}_{\vec{p}}^2(t) - \omega^2 Q_{\vec{p}}^2(t)], \quad (2.4)$$

$$S_i = \lambda \sum_{\vec{p} \in \mathcal{O}_q} \int d^4x \rho_{\vec{p}}(\vec{x}) \Theta(t) \tilde{\varphi}(t, \vec{x}) Q_{\vec{p}}(t), \quad (2.5)$$

onde  $t \in (0, \infty)$ ,  $\tilde{\varphi}$  é o campo escalar sem massa,  $Q_{\vec{p}}(t)$  é a amplitude do oscilador localizado em  $\vec{p} \in \mathcal{O}_q$ ,  $\omega$  é a frequência angular de cada oscilador, e  $\lambda \neq 0$  é a constante de acoplamento entre os osciladores e o campo escalar. Além disso,  $\rho$  é uma função de densidade normalizada não negativa ( $\int \rho = 1$ ) com suporte compacto contrátil e conexo (correspondendo à região de interação do oscilador com o campo), e portanto contido no interior do domínio de Dirichlet de  $M$  com centro na origem, e finalmente,  $\rho_{\vec{p}}(\vec{x}) = \rho(g^{-1}\vec{x})$ , onde  $g \in \Gamma$  e  $g(0, 0, 0) = \vec{p}$  (observe que  $\rho_{\vec{0}}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ ). A função de Heaviside  $\Theta(t)$  é usada para indicar que a interação é *ligada* em  $t = 0$ .

Variando a ação em relação a  $\tilde{\varphi}$  e  $Q_{\vec{p}}$  obtemos as equações de movimento no sistema equivalente em  $E^3$

$$\square \tilde{\varphi}(t, \vec{x}) = \lambda \sum_{\vec{p} \in \mathcal{O}_q} \rho_{\vec{p}}(\vec{x}) \Theta(t) Q_{\vec{p}}(t), \quad (2.6)$$

$$\ddot{Q}_{\vec{p}}(t) + \omega^2 Q_{\vec{p}}(t) = \lambda \int d^3x \rho_{\vec{p}}(\vec{x}) \Theta(t) \tilde{\varphi}(t, \vec{x}), \quad (2.7)$$

onde  $\square$  é o d'Alembertiano. Observe que a soma em (2.6) é uma soma finita. De fato, devido aos suportes compactos disjuntos das funções  $\rho_{\vec{p}}(\vec{x})$  o lado direito desta equação contém no máximo um termo não nulo.

A solução geral de (2.6), considerada como um problema de valores iniciais, pode ser escrita como  $\tilde{\varphi}(t, \vec{x}) = \tilde{\varphi}_{NH}(t, \vec{x}) + \tilde{\varphi}_H(t, \vec{x})$ , onde  $\tilde{\varphi}_H(t, \vec{x})$  satisfaz a correspondente

equação homogênea, e  $\tilde{\varphi}_{NH}(t, \vec{x})$  é uma solução particular da equação não-homogênea. Vamos considerar, por simplicidade, que toda a energia está armazenada inicialmente no oscilador. Portanto, as condições iniciais do nosso problema são  $\tilde{\varphi}(0, \vec{x}) = \dot{\tilde{\varphi}}(0, \vec{x}) = 0$  e  $Q_{\vec{p}}(0) = \alpha$ ,  $\dot{Q}_{\vec{p}}(0) = \beta$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais arbitrárias. Estas condições iniciais implicam que  $\tilde{\varphi}_H(t, \vec{x}) = 0$ , e portanto  $\tilde{\varphi}(t, \vec{x}) = \tilde{\varphi}_{NH}(t, \vec{x})$ .

Agora, como por hipótese a interação começa a agir em  $t = 0$ , a função de Green para o d'Alembertiano é

$$G(t, \vec{x}; \tau, \vec{y}) = \frac{\delta(t - \tau - |\vec{x} - \vec{y}|)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (2.8)$$

Portanto, a solução para a equação (2.6) pode ser formalmente escrita como

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{\vec{r} \in \mathcal{O}_q} \int d^3y \frac{\rho_{\vec{r}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Theta(t - |\vec{x} - \vec{y}|) Q_{\vec{r}}(t - |\vec{x} - \vec{y}|). \quad (2.9)$$

Finalmente, inserindo (2.9) em (2.7) obtemos as equações da reação à radiação para os osciladores,

$$\ddot{Q}_{\vec{p}}(t) + \omega^2 Q_{\vec{p}}(t) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \sum_{\vec{r} \in \mathcal{O}_q} \int d^3x d^3y \frac{\rho_{\vec{p}}(\vec{x}) \rho_{\vec{r}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Theta(t - |\vec{x} - \vec{y}|) Q_{\vec{r}}(t - |\vec{x} - \vec{y}|). \quad (2.10)$$

Como o conjunto de infinitos osciladores está sujeito ao mesmo conjunto de condições iniciais, as amplitudes devem evoluir de maneira idêntica. Segue-se que o conjunto de equações da reação à radiação reduzem-se à única equação

$$\ddot{Q}(t) + \omega^2 Q(t) = \frac{\lambda^2}{4\pi} \sum_{\vec{r} \in \mathcal{O}_q} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho_{\vec{r}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Theta(t - |\vec{x} - \vec{y}|) Q(t - |\vec{x} - \vec{y}|), \quad (2.11)$$

que é válida para cada oscilador em  $\mathcal{O}_q \subset E^3$ , e cuja solução fornece a evolução temporal da amplitude do oscilador harmônico em  $M$ . Observe que o lado direito das equações (2.9)–(2.11) é uma soma finita para qualquer instante  $t > 0$  devido aos suportes compactos disjuntos das funções  $\rho_{\vec{p}}(\vec{x})$ , e aos efeitos de corte da função  $\Theta$ . Portanto, nestas equações não surge nenhum problema de convergência com séries e, em particular, não é necessário nenhum esquema de regularização para trabalhar com elas. Por outro lado, um procedimento de regularização é necessário para estudar o caso de acoplamento pontual entre o oscilador harmônico e o campo escalar.

## 2.2 Acoplamento pontual

Vamos estudar nesta seção o caso de acoplamento pontual entre o oscilador e o campo escalar. Formalmente o acoplamento pontual é o limite  $\rho(\vec{x}) \rightarrow \delta^3(\vec{x})$ , e para lidar com ele

consideramos uma sequência infinita de sistemas oscilador-campo, que passamos a chamar de  $N$ -sistema, com a mesma constante de acoplamento  $\lambda \neq 0$ , e tal que o  $n$ -ésimo elemento do  $N$ -sistema (o  $n$ -ésimo sistema oscilador-campo da sequência) está caracterizado por uma frequência angular  $\omega_n$  e uma função de densidade  $\rho_n$  satisfazendo a condição de Aichelburg-Beig generalizada [2]

$$\omega_n^2 - \frac{\lambda^2}{4\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho_n(\vec{x})\rho_n(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \equiv \Omega^2 > 0, \quad (2.12)$$

onde  $\Omega$  é a mesma constante para cada membro do  $N$ -sistema, e  $\{\rho_n\}$  é uma  $\delta$ -sequência no sentido das distribuições [89] tal que se  $m < n$ , então  $\text{supp}(\rho_n) \subset \text{supp}(\rho_m)$ . A desigualdade (2.12) é uma condição suficiente para obter decaimento da energia do oscilador pontual quando o sistema oscilador-campo está imerso no espaço de Minkowski (veja por exemplo [2]).

Agora, como (2.11) é válida para qualquer membro do  $N$ -sistema, usando a relação (2.12) encontramos

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_n(t) + 2\Gamma \int d^3x d^3y \rho_n(\vec{x}) \rho_n(\vec{y}) \frac{Q_n(t) - \Theta(\tau) Q_n(\tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ + \Omega^2 Q_n(t) = 2\Gamma \sum_{\vec{r} \in \tilde{\mathcal{O}}_q} \int d^3x d^3y \frac{\rho_n(\vec{x}) \rho_{n,\vec{r}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Theta(\tau) Q_n(\tau), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\tau = t - |\vec{x} - \vec{y}|$ ,  $2\Gamma = \lambda^2/4\pi$  e  $\tilde{\mathcal{O}}_q = \mathcal{O}_q - \{(0, 0, 0)\}$ .

Para passar ao limite  $\rho(\vec{x}) \rightarrow \delta^3(\vec{x})$  escrevemos (2.13) na forma

$$\ddot{Q}_n(t) + 2\Gamma I_n(t) + \Omega^2 Q_n(t) = 2\Gamma \sum_{\vec{r} \in \tilde{\mathcal{O}}_q} J_{n,\vec{r}}(t), \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \int d^3x d^3y \rho_n(\vec{x}) \rho_n(\vec{y}) \frac{Q_n(t) - \Theta(\tau) Q_n(\tau)}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad e \\ J_{n,\vec{r}}(t) &= \int d^3x d^3y \frac{\rho_n(\vec{x}) \rho_{n,\vec{r}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Theta(\tau) Q_n(\tau). \end{aligned}$$

O limite pontual equivale a tomar o limite  $n \rightarrow \infty$ , no  $N$ -sistema, e para efetuar esse limite vamos apelar à seguinte versão do teorema do valor médio,

**Teorema 2.1** *Sejam  $\rho_1$  e  $\rho_2$  funções reais contínuas com suportes compactos conexos em  $\mathbb{R}^n$ , e  $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, onde  $\mathcal{I} = \text{supp}(\rho_1) \times \text{supp}(\rho_2)$ , então existe um ponto  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in \mathcal{I}$  tal que*

$$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \int d^3x d^3y \rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{y}) f(\vec{x}, \vec{y}).$$

Agora, considerando que os suportes das funções  $\rho_{n,\vec{r}}$ , com  $\vec{r} \in \mathcal{O}_q$  são conexos, seja  $R_n$  o raio de  $\text{supp}(\rho_n)$  e considere um ponto  $\vec{r} \in \tilde{\mathcal{O}}_q$ . Pelo teorema 2.1, existe uma sequência de pares de pontos  $(\vec{x}_{0,n}, \vec{y}_{0,n}) \in \mathcal{I}$  tal que para cada  $t > 0$  temos a sequência de números

$$J_{n,\vec{r}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < |\vec{r}| - 2R_n, \\ \text{não conhecida} & \text{se } |\vec{r}| - 2R_n < t < |\vec{r}| + 2R_n, \\ Q_n(t - \epsilon_n)/\epsilon_n & \text{se } |\vec{r}| + 2R_n < t, \end{cases}$$

onde  $\epsilon_n = |\vec{x}_{0,n} - \vec{y}_{0,n}|$ . Como  $R_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , o subintervalo central colapsa ao ponto  $t = |\vec{r}|$ , e portanto é irrelevante para os nossos propósitos a forma de  $J_{n,\vec{r}}(t)$  naquela região. Mais ainda, como  $\epsilon_n \rightarrow |\vec{r}|$  temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n,\vec{r}}(t) = \frac{\Theta(t - |\vec{r}|) Q(t - |\vec{r}|)}{|\vec{r}|}. \quad (2.15)$$

Por outro lado, observando que para um valor fixado de  $t > 0$ , existe um número natural  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  temos  $t > 2R_n$ ; então, pelo teorema 2.1 existe um par de pontos  $\vec{x}_{0,n}, \vec{y}_{0,n} \in \text{supp}(\rho_n)$  tal que

$$I_n(t) = \frac{Q_n(t) - Q_n(t - \epsilon_n)}{\epsilon_n},$$

com  $\epsilon_n = |\vec{x}_{0,n} - \vec{y}_{0,n}| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $Q_n(t)$  possui primeira derivada contínua, podemos expandi-la em torno do valor fixado  $t > 0$  em primeira ordem obtendo

$$I_n(t) = \dot{Q}_n(t) + O(\epsilon_n).$$

Vale, portanto o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(t) = \dot{Q}(t). \quad (2.16)$$

Finalmente, usando as relações (2.14), (2.15) e (2.16) obtemos a equação da reação à radiação

$$\ddot{Q}(t) + 2\Gamma \dot{Q}(t) + \Omega^2 Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Theta(t - t_k) Q(t - t_k), \quad (2.17)$$

onde  $C_k = 2\Gamma D_k/t_k$ ,  $D_k$  é o número de pontos  $\vec{r} \in \tilde{\mathcal{O}}_q$  tais que  $|\vec{r}| = t_k$ , a sequência  $\{t_k\}$  está ordenada de forma crescente, e  $t_k \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Observação 2.1** Observe que o termo da direita em (2.17) está determinado pela variedade  $M$  e a localização  $q \in M$  do oscilador, e é nulo quando  $M = E^3$ . Neste último caso a equação (2.17) reduz-se à equação de um oscilador harmônico amortecido, e por tanto a amplitude do oscilador decai exponencialmente no tempo (no caso sub-amortecido o decaimento é oscilante), como era de se esperar. ■

## 2.3 Reverberações topológicas

Vamos apresentar agora uma solução exata recursiva de (2.17) e estudar o seu comportamento assintótico. Considere o operador diferencial

$$D = d^2 + 2\Gamma d + \Omega^2, \quad (2.18)$$

que age sobre funções reais diferenciáveis por partes de acordo com

$$Df = \ddot{f} + 2\Gamma\dot{f} + \Omega^2 f. \quad (2.19)$$

A solução de

$$Df = g, \quad (2.20)$$

com  $g$  integrável, e com condições iniciais  $f(0) = \dot{f}(0) = 0$  é

$$f(t) = e^{-\Gamma t} \int_0^t e^{\Gamma\tau} h(t-\tau) g(\tau) d\tau, \quad (2.21)$$

com  $\mu^2 = \Omega^2 - \Gamma^2$  e

$$h(t) = \begin{cases} \mu^{-1} \text{sen } \mu t & \text{se } \mu^2 > 0, \\ t & \text{se } \mu^2 = 0, \\ \nu^{-1} \text{senh } \nu t & \text{se } \mu^2 = -\nu^2 < 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nosso propósito é encontrar uma função real  $Q : [0, \infty) \rightarrow R$  de classe  $C^1$  tal que  $Q(0) = \alpha$  e  $\dot{Q}(0) = \beta$ , e que satisfaça (2.17), a qual, em termos do operador  $D$ , pode ser escrita na forma

$$DQ(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Theta(t-t_k) Q(t-t_k). \quad (2.23)$$

Definindo  $s_0$  como sendo a solução de (2.20) com  $g = 0$ , e com condições iniciais  $s_0(0) = \alpha$  e  $\dot{s}_0(0) = \beta$  temos

$$s_0(t) = e^{-\Gamma t} \begin{cases} A \text{sen } \mu t + B \cos \mu t & \text{se } \mu^2 > 0 \\ A + B t & \text{se } \mu^2 = 0 \\ A \text{senh } \nu t + B \cosh \nu t & \text{se } \mu^2 = -\nu^2 < 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

onde as constantes  $A$  e  $B$  são tais que as condições iniciais são satisfeitas.

Logo, escolhendo  $f(t) = Q(t) - s_0(t)$ , e considerando (2.20) e (2.21) com  $g$  dado pelo termo do lado direito de (2.23), esta equação é equivalente à equação integro-diferencial

$$Q(t) = s_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Theta(t-t_k) e^{-\Gamma(t-t_k)} \int_0^{t-t_k} e^{\Gamma\tau} h(t-t_k-\tau) Q(\tau) d\tau, \quad (2.25)$$

a qual, por sua vez, pode ser escrita como

$$Q(t) = s_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Theta(t - t_k) Q_1(t - t_k), \quad (2.26)$$

onde, de (2.20) e (2.21), a função

$$Q_1(t) = e^{-\Gamma t} \int_0^t e^{\Gamma \tau} h(t - \tau) Q(\tau) d\tau \quad (2.27)$$

satisfaz a equação  $D Q_1(t) = Q(t)$  com condições iniciais  $Q_1(0) = \dot{Q}_1(0) = 0$ .

Podemos agora encontrar uma solução explícita de (2.17). De fato, como estamos interessados em funções reais definidas na reta e que sejam nulas em  $(-\infty, 0)$ , definamos recursivamente as funções  $s_n$  por

$$\begin{aligned} D s_0(t) &= 0, \\ D s_n(t) &= s_{n-1}(t) \quad \text{para } n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.28)$$

com condições iniciais  $s_n(0) = \dot{s}_n(0) = 0$  para  $n \geq 1$ , e  $s_0$  dada por (2.24). Consideremos também as funções

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= Q(t), \\ D Q_n(t) &= Q_{n-1}(t) \quad \text{para } n \geq 1, \end{aligned}$$

com  $Q_n(0) = \dot{Q}_n(0) = 0$  para  $n \geq 1$ . Então, por indução temos que

$$Q_n(t) = s_n(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \Theta(t - t_k) Q_{n+1}(t - t_k). \quad (2.29)$$

Observe que fazendo  $n = 0$  em (2.29) obtemos (2.26), e portanto  $Q_0$  é a solução procurada de (2.23). A integração de (2.28) dá como resultado

$$s_n(t) = e^{-\Gamma t} \int_0^t e^{\Gamma \tau} h(t - \tau) s_{n-1}(\tau) d\tau \quad \text{para } n \geq 1, \quad (2.30)$$

portanto, definindo

$$\begin{aligned} q_0(t) &= s_0(t), \\ q_1(t) &= \sum_{k_1} C_{k_1} \Theta(t - t_{k_1}) s_1(t - t_{k_1}), \\ q_2(t) &= \sum_{k_1, k_2} C_{k_1} C_{k_2} \Theta(t - t_{k_1} - t_{k_2}) s_2(t - t_{k_1} - t_{k_2}), \\ &\vdots \\ q_i(t) &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_i} \left( \prod_{j=1}^i C_{k_j} \right) \Theta\left(t - \sum_{j=1}^i t_{k_j}\right) s_i\left(t - \sum_{j=1}^i t_{k_j}\right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

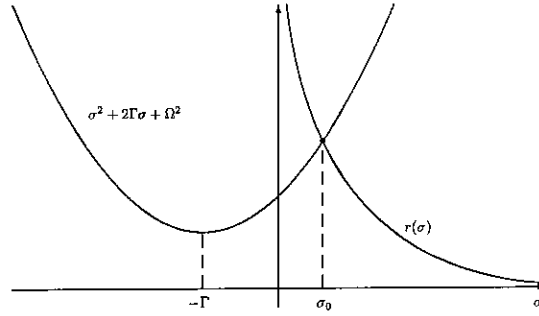


Figura 2.1: Representação esquemática das curvas correspondentes aos lados esquerdo e direito da equação (2.33), cuja interseção num único ponto deixa evidente que esta equação possui uma única solução real positiva.

temos que a solução explícita de (2.17) é

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(t) . \quad (2.32)$$

**Observação 2.2** Como a solução (2.32) é dada, recursivamente, em termos de  $s_0$ , fica evidente que a evolução temporal da amplitude do oscilador é determinada pelas condições iniciais do problema, como era de esperar. ■

**Observação 2.3** O lado direito de (2.32) é uma soma finita. Isto é consequência da presença da função de Heaviside em (2.31). De fato, somente aqueles  $q_i(t)$  com  $i < t/t_1$  contribuem na soma em (2.32). Além disso, para qualquer  $t > 0$  cada  $q_i(t)$  é uma soma finita. ■

Consideremos agora o comportamento assintótico da amplitude do oscilador nos casos em que  $M$  é multiplamente conexo. Vamos considerar que este comportamento assintótico é exponencial, da forma  $Q(t) = \gamma \exp(\sigma t)$ , com  $\sigma$  e  $\gamma$  constantes reais. Então, no limite  $t \rightarrow \infty$ , a equação (2.17) se reduz a

$$\sigma^2 + 2 \Gamma \sigma + \Omega^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\sigma t_k} . \quad (2.33)$$

O comportamento assintótico da solução (2.32) desprende-se facilmente do seguinte lema.

**Lema 2.1** *A equação (2.33) possui uma única solução real, e ela é positiva.*

**Prova.** Observe que o lado direito de (2.33) é uma função positiva e monotonamente decrescente  $r(\sigma)$  com  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} r(\sigma) = \infty$  and  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} r(\sigma) = 0$ . Portanto o gráfico de  $r(\sigma)$  está todo no primeiro quadrante do plano e o atravessa da parte superior esquerda até a inferior direita (veja a figura 2.1). Por outro lado, o lado esquerdo de (2.33) é uma parábola côncava como vértice em  $\sigma = -\Gamma$ , e portanto intercepta o gráfico de  $r(\sigma)$  num único ponto do primeiro quadrante. Este ponto corresponde a um valor positivo de  $\sigma$ , e é a única solução real de (2.33). ■

Temos então que a amplitude do oscilador exhibe um comportamento assintótico exponencialmente divergente ( $Q(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ ). Agora, se a amplitude do oscilador cresce de maneira exponencial para tempos grandes, a sua energia também deve crescer da mesma forma. Portanto, devemos investigar com mais detalhe o que acontece com a energia total do sistema. Em particular, devemos identificar qual é a fonte da qual o oscilador extrai esta energia. Como o nosso sistema irradiante original, com acoplamento não pontual entre oscilador e campo, está imerso num espaço-tempo estático, e a ação não depende do tempo (para  $t > 0$ ), então a energia total do sistema  $\mathcal{E}$  é finita e uma constante do movimento para qualquer função densidade  $\rho$ . Porém, isto não é tão evidente no caso do limite pontual  $\rho(\vec{x}) \rightarrow \delta^3(\vec{x})$ .

Da ação (2.2)–(2.5), a energia  $\mathcal{E}$  pode ser escrita na forma

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_f(t) + \mathcal{E}_o(t) + \mathcal{E}_i(t), \quad (2.34)$$

onde

$$\mathcal{E}_f(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} d^3x \{ \dot{\tilde{\varphi}}^2(t, \vec{x}) + [\nabla \tilde{\varphi}(t, \vec{x})]^2 \}, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{E}_o(t) = \frac{1}{2} [\dot{Q}^2(t) + \omega^2 Q^2(t)], \quad (2.36)$$

$$\mathcal{E}_i(t) = -\lambda Q(t) \int_{\mathcal{D}} d^3x \rho(\vec{x}) \tilde{\varphi}(t, \vec{x}), \quad (2.37)$$

para  $t \in (0, \infty)$ , e  $\mathcal{D}$  denota o poliedro de Dirichlet de  $M$  centrado na origem .

Observe que, usando a equação (2.9), a componente de interação da energia apresenta uma divergência do tipo  $|\vec{x}|^{-1}$  na vizinhança da origem, no caso limite de interação pontual. Introduzindo a quantidade divergente

$$\Lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r}, \quad (2.38)$$

renormalizamos o termo de energia de interação definindo  $E_i(t)$ , finito para todo  $0 < t < \infty$ , através da equação

$$\mathcal{E}_i(t) = E_i(t) - \Lambda Q^2(t). \quad (2.39)$$



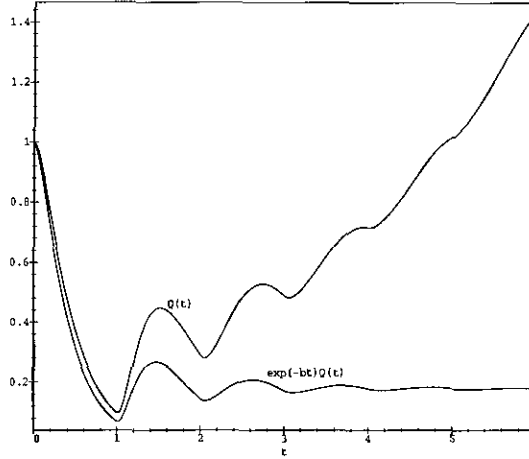


Figura 2.2: Amplitude do oscilador super-amortecido com  $\Gamma = 6$  em  $\Omega = 5$  num espaço-tempo localmente minkowskiano com seções espaciais com topologia  $E^2 \times S^1$ , e distância entre primeiros vizinhos  $a = 1$ . As condições iniciais são  $Q(0) = 1$  and  $\dot{Q}(0) = 0$ . Observe a existência de alguns máximos e mínimos relativos seguidos por um crescimento de  $Q(t)$ . A comparação da amplitude do oscilador com o gráfico da função  $\exp(-bt)Q(t)$ , onde  $b = 0,35$  é a raiz aproximada da eq. (2.46), ilustra o comportamento assintótico exponencial de  $Q(t)$ .

A energia  $\mathcal{E}_f(t)$  dada por (2.35) também diverge. De fato, usando (2.9) encontra-se que na vizinhança da origem o campo escalar adquire a forma

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{x}) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{Q(t)}{|\vec{x}|} + (n.d.), \quad (2.40)$$

onde  $(n.d.)$  denota os termos não divergentes para qualquer  $t \in (0, \infty)$ . Portanto, na vizinhança da origem temos  $|\nabla \tilde{\varphi}| = |(\lambda/4\pi) Q(t) / |\vec{x}|^2|$ , e a integral correspondente a este termo em (2.35),  $\int_{\mathcal{D}} 4\pi r^2 dr |\nabla \tilde{\varphi}|^2$ , possui uma contribuição divergente da forma  $\Lambda Q^2(t)$  quando  $r = |\vec{x}| \rightarrow 0$ . Agora, como a contribuição do termo  $\dot{\tilde{\varphi}}^2$  à integral de (2.35) é finita para todo  $t \in (0, \infty)$ , podemos também introduzir o termo renormalizado de energia do campo  $E_f(t)$  através de

$$\mathcal{E}_f(t) = E_f(t) + \frac{1}{2} \Lambda Q^2(t), \quad (2.41)$$

que é finito para todo tempo  $t > 0$ .

O termo de energia devida ao oscilador dado por (2.36) pode ser escrito em forma mais conveniente no caso do limite de interação pontual considerando que  $\omega^2 = \Omega^2 + \Lambda$ . De fato, com esta frequência renormalizada podemos escrever

$$\mathcal{E}_o(t) = E_o(t) + \frac{1}{2} \Lambda Q^2(t), \quad (2.42)$$

onde a energia renormalizada do oscilador é

$$E_o(t) = \frac{1}{2} [\dot{Q}^2(t) + \Omega^2 Q^2(t)], \quad (2.43)$$

a qual é finita para todo  $t > 0$ . Finalmente, observe que de acordo às equações (2.39), (2.41) e (2.42), os termos divergentes da forma  $\Lambda Q^2(t)$  se cancelam na soma  $\mathcal{E}_i(t) + \mathcal{E}_f(t) + \mathcal{E}_o(t)$ . Segue-se de (2.34) que a energia total do sistema reduz-se a

$$\mathcal{E} = E_f(t) + E_o(t) + E_i(t), \quad (2.44)$$

a qual é constante e finita para todo  $t > 0$ , inclusive no caso limite do acoplamento pontual.

O fato que a energia total do sistema no caso limite de interação pontual seja finita e constante é um requisito fundamental para a consistência do nosso modelo. Agora, como a energia do oscilador  $E_o(t)$  e a do campo  $E_f(t)$  são sempre positivas, é claro que a fonte da qual o oscilador e o campo extraem energia é o termo de interação  $E_i(t)$ , que não está limitada inferiormente. É esta característica de  $E_i(t)$  que torna possível o comportamento assintótico da amplitude, e portanto da energia, do oscilador. Observe que este comportamento do sistema é possível independente do espaço onde ele está imerso, mas é só quando o universo é multiplamente conexo que este grau de liberdade é excitado. Em outras palavras, a topologia não trivial do espaço excita este *modo físico* latente no sistema irradiante, ilustrando de maneira clara que o sistema oscilador-campo definido por (2.2) é topologicamente frágil.

**Exemplo 2.1 O oscilador no cilindro  $E^2 \times S^1$ .** Consideremos o sistema oscilador-campo imerso no espaço localmente minkowskiano com seções espaciais isométricas ao cilindro  $E^2 \times S^1$  (ou  $S_1^0$  na notação do teorema C.14 e da tabela C.1) e com grupo de recobrimento gerado pela translação  $\tau_{a\hat{i}}$ , com  $a \in R$  positivo. Considerando então que a distância entre dois pontos equivalentes em  $E^3$  é  $t_k = ka$ , sendo  $k$  um inteiro positivo, tem-se que  $C_k = 4\Gamma/t_k$ . Logo a amplitude do oscilador é (2.32) com os  $q_i(t)$  dados por

$$q_i(t) = \left(\frac{4\Gamma}{a}\right)^i \sum_{k_1, k_2, \dots, k_i} \left(\prod_{j=1}^i \frac{1}{k_j}\right) \Theta\left(t - a \sum_{j=1}^i k_j\right) s_i\left(t - a \sum_{j=1}^i k_j\right). \quad (2.45)$$

A equação (2.33), neste caso, é

$$\sigma^2 + 2\Gamma\sigma + \Omega^2 = -\frac{4\Gamma}{a} \ln(1 - e^{-\sigma a}). \quad (2.46)$$

A figura 2.2 corresponde ao gráfico da amplitude deste oscilador para o caso super-amortecido com parâmetros  $\Gamma = 6$  e  $\Omega = 5$ ; as condições iniciais utilizadas são  $Q(0) = 1$  and  $\dot{Q}(0) = 0$ , e por conveniência consideramos  $a = 1$ . Observa-se que a amplitude do oscilador exhibe máximos e mínimos relativos seguidos por um crescimento assintoticamente exponencial, de acordo à equação (2.46), como mostra o gráfico da função  $\exp(-bt)Q(t)$ ,

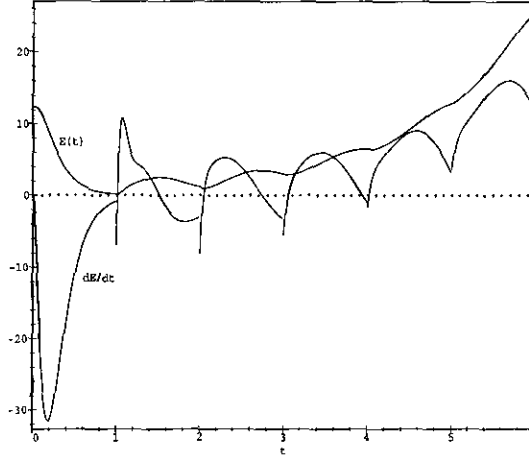


Figura 2.3: Gráfico da energia do oscilador super-amortecido com  $\Gamma = 6$  em  $\Omega = 5$  no espaço-tempo localmente minkowskiano com seções espaciais com topologia  $E^2 \times S^1$ , e distância entre primeiros vizinhos  $a = 1$ . Todos os parâmetros e condições iniciais são idênticos aos utilizados na figura 2.2. Similarmente ao comportamento da amplitude, a energia no oscilador exibe alguns máximos e mínimos relativos seguidos por um comportamento assintoticamente divergente. Na figura mostra-se também um gráfico da derivada  $\dot{E}(t)$ , a qual apresenta descontinuidades finitas em cada  $t = ka$ , com  $k$  um inteiro positivo. O gráfico da derivada da energia mostra também a existência de somente um número finito de pontos extremos.

onde  $b = 0,35$  é a raiz aproximada de (2.46). Na figura 2.3 observa-se que a energia armazenada no oscilador exibe um número finito de máximos e mínimos relativos, seguidos por um comportamento divergente. ■

**Observação 2.4** As descontinuidades da derivada da energia mostradas na figura 2.3 aparecem sempre que o sistema oscilador-campo está imerso num espaço-tempo com seções espaciais com topologia não trivial. De fato, derivando (2.43), e usando (2.17) obtemos

$$\dot{E}(t) = 2\Gamma \dot{Q}(t) \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{t_k} \Theta(t - t_k) Q(t - t_k) - \dot{Q}(t) \right]. \quad (2.47)$$

Desta equação notamos que as descontinuidades aparecem em  $t = t_k$ , ou seja cada vez que um novo termo  $\Theta(t - t_k) Q(t - t_k)$  torna-se não nulo no lado direito de (2.17). ■

## Capítulo 3

# Cosmologia em universos pequenos

*There is a myth in modern cosmology that the Universe in which we live is one of the three possible manifolds -if  $\Omega > 1$ , space is a 3-sphere,  $S^3$ ; if  $\Omega = 1$  it is infinite Euclidean (flat) 3-space,  $E^3$ ; if  $\Omega < 1$  it is infinite hyperbolic (negatively curved) 3-space  $H^3$  . . . Thus, all that is needed to determine the global properties of the Universe is to measure  $\Omega$ . This myth, like many others, has elements of truth, but is not the truth... Beyond geometry lies topology.*

*Glenn Starkman*

Uma grande quantidade de dados observacionais sustenta a hipótese de que o nosso Universo é localmente homogêneo e isotrópico, e está expandindo-se isotropicamente. A melhor evidência desta hipótese vem da isotropia da radiação cósmica de fundo [9]. De fato, Ehlers, Geren e Sachs [34] demonstraram que se todo observador medisse uma radiação cósmica de fundo isotrópica então o modelo geométrico para nosso Universo deveria possuir uma geometria RW ou ser estacionário. Por outro lado, o Universo não pode ser estacionário devido ao movimento de recessão das galáxias observado pela primeira vez por Hubble, e confirmado por diversas vezes até o presente. Além disso, admitindo a validade do Princípio Cosmológico, segundo o qual não ocupamos um lugar privilegiado no Universo, tem-se que qualquer outro observador, independente da sua localização, deverá observar também uma recessão isotrópica das galáxias e uma radiação de fundo também isotrópica. Segue-se do resultado de Ehlers, Geren e Sachs que nosso Universo deve possuir uma geometria RW.

Pode-se argumentar que a radiação de fundo não é exatamente isotrópica, de vez que tem sido observadas pequenas anisotropias na temperatura desta radiação [9]. Porém,

recentemente Stoeger, Maartens e Ellis [108] estenderam o resultado obtido por Ehlers, Geren e Sachs em [34] e mostraram que, sob condições bastante gerais, se a radiação cósmica de fundo for aproximadamente isotrópica numa região do Universo em expansão, então esta região do Universo é localmente *quase* RW. Segue-se portanto que a escolha de modelos de Universo baseados na métrica de RW é bem fundamentada tanto do ponto de vista observacional como teórico. Deve-se notar, porém, que é perfeitamente possível construir modelos de Universo baseados em outras métricas, compatíveis com os dados observacionais disponíveis na atualidade (veja por exemplo [35] e [78]).

Este trabalho baseia-se no fato que o nosso Universo pode ser bem descrito por um espaço-tempo RW, e na seção 3.1 estudam-se certos aspectos geométricos destes espaços-tempos relevantes para a topologia cósmica, tais como as medidas de tempo e distância, e a existência ou não de horizontes de partículas. Também, nesta seção são utilizadas as equações de Einstein para relacionar dinamicamente a geometria de um espaço-tempo RW com o conteúdo de matéria-energia do Universo. O estudo da topologia cósmica com fontes discretas começa na seção 3.2 com uma breve análise das características dos catálogos reais de fontes astrofísicas discretas, e uma formalização do conceito de catálogo adequada à simulação por computador. Também estudam-se nesta seção as condições para que (i) um catálogo de fontes discretas num universo pequeno apresente imagens múltiplas, e (ii) um modelo de universo localmente euclideo seja pequeno considerando que os dados observacionais são apenas catálogos de fontes discretas. Finalmente, na última seção estuda-se o método de cristalografia cósmica, e analisam-se as suas limitações e possíveis aplicações.

### 3.1 Modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître

Homogeneidade e isotropia local em qualquer ponto do espaço, num dado instante de tempo, implica que qualquer observador constatará essencialmente a mesma distribuição de matéria (galáxias, quasares, poeira, etc.) e radiação (microondas, luz, raios X, raios gama, etc.), qualquer que seja a direção que observe. Isto implica que o espaço, num certo instante de tempo, é um espaço com curvatura seccional constante, o que equivale a dizer que o espaço pode ser descrito através de uma forma espacial tridimensional.

Por outro lado, a velocidade de recessão das galáxias e a isotropia da radiação cósmica de fundo implicam que a forma espacial que descreve o espaço físico está crescendo isotropicamente, ou seja que a escala com que se medem as distâncias entre pontos com coordenadas fixas (distâncias co-móveis) está aumentando no mesmo ritmo em qualquer direção. Como resultado, a variedade  $\mathcal{M}$  que descreve o nosso Universo é topologicamen-

te o produto cartesiano de uma *linha*, que parametriza o tempo, e uma forma espacial tridimensional  $M$ ; ou seja

$$\mathcal{M} = I \times M,$$

onde  $I$  é um intervalo da reta. Já a métrica de  $\mathcal{M}$  é dada por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\sigma^2 \quad (3.1)$$

onde  $d\sigma$  é a métrica padrão em  $M$ , a função  $a(t)$ , que carrega as unidades de comprimento, é chamada de **fator de escala**, e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Esta é a **métrica de Robertson-Walker** (RW). A variedade riemanniana  $(M, a(t)d\sigma)$ , com  $t \in I$ , será denotada daqui por diante por  $M(t)$ .

Na subseção 3.1.1 estuda-se esta métrica em um sistema de coordenadas conveniente, e relaciona-se a distância ao observador de uma fonte cósmica qualquer com o seu “redshift”.<sup>1</sup> Da análise feita nesta subseção resulta que a relação entre o redshift de uma fonte e a sua distância ao observador só pode ser calculada se o fator de escala for determinado. O fator de escala, por outro lado, é determinado pela dinâmica da geometria do espaço-tempo, e na subseção 3.1.2 usam-se as equações de Einstein e o pressuposto de que o conteúdo material do Universo é constituído de fluidos perfeitos que não interagem entre si, para encontrar uma equação diferencial para  $a(t)$ . Esta equação diferencial, porém, é de difícil solução exceto nos casos mais simples, e portanto sozinha não é de grande ajuda na determinação da relação redshift-distância. No entanto, uma manipulação apropriada das equações de Einstein, juntamente com certas relações auxiliares, permite encontrar expressões fechadas das relações redshift-distância e redshift-tempo na subseção 3.1.3.

### 3.1.1 Espaços-tempos de Robertson-Walker

A métrica de uma forma espacial tridimensional  $M$  pode ser escrita nas duas formas equivalentes seguintes;

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.2)$$

$$= d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.3)$$

onde  $k = \pm 1$  ou  $0$ , denota a curvatura seccional em qualquer ponto de  $M$ ,

$$f(\chi) = \begin{cases} \text{sen } \chi & \text{se } k = 1, \\ \chi & \text{se } k = 0, \\ \text{senh } \chi & \text{se } k = -1, \end{cases} \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Vamos utilizar sistematicamente a palavra inglesa “redshift” no lugar da tradução ao português “desvio para o vermelho” para manter uma certa fluidez na redação, de vez que frequentemente apareceram termos como “relação redshift-distância”, ou “relação redshift-tempo”.

e a relação entre (3.2) e (3.3) é dada a través da transformação de coordenadas

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

No que segue vamos adotar a expressão (3.3) para a métrica de  $M$ . Portanto, a métrica de RW neste sistema de coordenadas assume a seguinte forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + f^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)]. \quad (3.5)$$

A métrica de RW escrita nesta forma é muito conveniente para o cálculo de distâncias co-móveis a fontes cósmicas, e tempos de propagação de sinais. Daqui em diante vamos colocar a origem do sistema de coordenadas no observador.

Temos então que a distância num instante  $t$  entre o observador e uma fonte cósmica co-móvel localizada em  $(\chi, \theta, \varphi)$  é

$$d(t) = a(t)\chi, \quad (3.6)$$

e portanto a velocidade de recessão desta fonte, devida à expansão do universo é

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) &= \dot{a}(t)\chi \\ &= H(t)d(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.8)$$

é a **função de Hubble**, e o ponto sobre uma função indica derivação em relação a  $t$ . Denotando por  $t_0$  o instante de tempo presente obtemos de (3.7) a **lei de Hubble**

$$v = H_0 d_0, \quad (3.9)$$

onde  $v = \dot{d}(t_0)$  é a velocidade de recessão atual,  $d_0 = d(t_0)$  é a **distância co-móvel** da fonte ao observador no presente, e  $H_0 = H(t_0)$  é a **constante de Hubble**.<sup>2</sup>

Suponha agora que um fóton  $\gamma$  procedente de uma fonte em  $(\chi, \theta, \varphi)$  incidiu sobre o observador no instante  $t_0$ . Para determinar o instante  $t$  no qual este fóton foi emitido devemos notar que durante o seu percurso da fonte ao observador, o fóton manteve as coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$  constantes, e a coordenada radial mudou de  $\chi$  no instante  $t$ , até 0 no instante  $t_0$ . Como para um fóton vale  $ds = 0$ , temos que a equação da trajetória do fóton é

$$a(t)d\chi = -cdt,$$

---

<sup>2</sup>Daqui em diante, um índice 0 em qualquer função do tempo indicará o seu valor no instante presente  $t_0$ .

e portanto o instante de emissão do fóton é dado pela solução da equação

$$\chi = c \int_t^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)}. \quad (3.10)$$

Das expressões (3.6) e (3.10) temos que uma fonte cuja luz emitida no instante  $t$  e que está sendo observada no instante atual, encontra-se no momento presente a uma distância

$$d_0 = c a_0 \int_t^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} \quad (3.11)$$

do observador.

Por outro lado, o comprimento de onda de um fóton propagando-se num espaço-tempo RW sofre variações no tempo pois o quociente  $\lambda/a(t)$  é constante. O **desvio para o vermelho**, ou simplesmente **redshift**, de um fóton que saiu de uma fonte na posição  $(\chi, \theta, \varphi)$  no instante  $t$ , e incidiu sobre o observador no instante  $t_0$  é

$$z = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t)}{\lambda(t)},$$

ou equivalentemente

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1. \quad (3.12)$$

O redshift de uma fonte cósmica é uma quantidade facilmente mensurável. Portanto, de posse de um modelo de espaço-tempo RW para o nosso Universo, podemos tentar resolver a equação

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} \quad (3.13)$$

para achar o instante de emissão  $t$ , e substituir este valor em (3.11) para calcular a distância co-móvel  $d_0$  da fonte ao observador em função do redshift. Se a equação (3.13) tiver uma única solução, então existirá uma relação direta entre redshift e distância co-móvel atual. Em muitos dos modelos cosmológicos baseados na métrica RW, a equação (3.13) possui uma única solução, porém achar a relação redshift-distância nem sempre é fácil.

É possível, todavia, escrever a relação redshift-distância como uma expansão em série de Taylor em torno de  $t_0$ , e calcular os coeficientes para os primeiros termos da série. A vantagem deste procedimento é que fornece, em princípio, um método prático para determinar parâmetros cosmológicos em número suficiente para distinguir observacionalmente entre diversos modelos de universo.

Definamos as funções

$$\begin{aligned} \delta : I &\rightarrow R \\ t &\mapsto c a_0 \int_t^{t_0} \frac{d\tau}{a(\tau)} \end{aligned} \quad (3.14)$$



e

$$\begin{aligned} \xi : I &\rightarrow R \\ t &\mapsto \frac{a_0}{a(t)} - 1, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $I \subset R$  é um intervalo aberto contendo  $t_0$ . Podemos considerar  $I$  como sendo a componente conexa, contendo  $t_0$ , do domínio de definição da função fator de escala. Pelas expressões (3.11) e (3.12), para  $t < t_0$ ,  $\delta(t)$  é a distância co-móvel atual de uma fonte cujos fótons emitidos no instante  $t$  estão sendo observados no instante  $t_0$ , e  $\xi(t)$  é o redshift destes fótons.

A função

$$d : J \rightarrow R$$

definida por

$$\delta = d \circ \xi \quad (3.16)$$

é chamada de **relação redshift-distância**. O intervalo  $J \subset R$  é o intervalo maximal contendo 0, tal que a equação

$$z = \xi(t) \quad , \quad t \in I, z \in J,$$

possua uma única solução. Pelo teorema da função inversa, este intervalo sempre existe.

A expansão em série de Taylor em torno de  $z = 0$ , até a terceira ordem, da relação redshift-distância é

$$d(z) = d'(0)z + \frac{1}{2}d''(0)z^2 + \frac{1}{6}d'''(0)z^3 + \dots, \quad (3.17)$$

onde a plica indica derivação em relação a  $z$ . Derivando sucessivamente as expressões (3.14)-(3.16), avaliando as expressões em  $z = 0$  (ou equivalentemente em  $t = t_0$ ), e resolvendo para  $d^{(n)}(0)$  obtemos

$$d(z) = \frac{cz}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{2}(1 + q_0)z + \frac{1}{6}(2 + 4q_0 + 3q_0^2 - q_1)z^2 - \dots \right], \quad (3.18)$$

onde

$$q_0 H_0^2 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0} \quad (3.19)$$

é o **parâmetro de desaceleração**, e

$$q_1 H_0^3 = \frac{\dddot{a}_0}{a_0}. \quad (3.20)$$

As definições destas duas constantes são motivadas pela expansão do fator de escala em série de Taylor em torno de  $t_0$ ,

$$a(t) = a_0 \left[ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}q_1 H_0^3(t - t_0)^3 - \dots \right]. \quad (3.21)$$

Um método prático de construir exemplos de fatores de escala simples e úteis é considerar a expressão (3.8) como uma equação diferencial com função de Hubble conhecida e integrá-la. A solução geral desta equação é

$$a(t) = a_0 \exp \left( - \int_t^{t_0} H(\tau) d\tau \right) . \quad (3.22)$$

**Exemplo 3.1 Espaço-tempo de de-Sitter.** Um universo de de Sitter é um universo com função de Hubble constante

$$H(t) = H_0 \quad , \quad t \in R .$$

O fator de escala é então

$$a(t) = Ae^{H_0 t} ,$$

com constante de integração

$$A = a_0 e^{-H_0 t_0} .$$

A função (3.14) é então

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{c}{H_0} \left( \frac{a_0}{a(t)} - 1 \right) \\ &= \frac{c \xi(t)}{H_0} , \end{aligned}$$

e portanto a relação redshift-distância é

$$d(z) = \frac{cz}{H_0} . \quad (3.23)$$

Num espaço-tempo de de-Sitter temos então que a relação redshift-distância é linear, e conseqüentemente da lei de Hubble obtemos que a velocidade de recessão das fontes cósmicas é

$$v = cz$$

para qualquer valor de redshift. Comparando (3.23) com (3.18) obtemos  $q_0 = -1$  e  $q_1 = 1$ , valores que podem ser obtidos também por cálculo direto a partir das definições dos parâmetros  $q_0$  e  $q_1$  dadas por (3.19) e (3.20). ■

**Exemplo 3.2 Espaços-tempos  $t^n$ .** Consideremos espaços-tempos RW com função de Hubble dada por

$$H(t) = \frac{n}{t} \quad , \quad n, t > 0 ,$$

Integrando a expressão (3.22) obtemos o fator de escala

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^n , \quad (3.24)$$

e a correspondente relação redshift-distância é

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \begin{cases} \ln(1+z) & \text{se } n = 1 \\ \frac{n}{1-n} \left[ 1 - (1+z)^{\frac{n-1}{n}} \right] & \text{se } n \neq 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Expandindo (3.25) em torno de  $z = 0$  obtemos

$$d(z) = \frac{cz}{H_0} \left[ 1 - \frac{1}{2n} z + \frac{1+n}{6n^2} z^2 - \dots \right],$$

válida para todo  $n > 0$ . Um cálculo direto mostra que

$$q_0 = -\frac{n(n-1)}{n^2} \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}. \quad (3.26)$$

Um caso especial de espaço-tempo  $t^n$  é o **espaço-tempo de Einstein-de Sitter**, definido pelos parâmetros  $k = 0$  e  $n = 2/3$ .<sup>3</sup> Para este modelo temos em particular

$$d(z) = \frac{2c}{H_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right), \quad (3.27)$$

com expansão

$$d(z) = \frac{cz}{H_0} \left( 1 - \frac{3}{4} z + \frac{5}{8} z^2 - \dots \right).$$

Comparando com (3.26) obtemos  $q_0 = 1/2$  e  $q_1 = 1$ . ■

### 3.1.2 Equações de Einstein e soluções cosmológicas

Vamos considerar modelos cosmológicos nos quais o conteúdo material do Universo é uma mistura de  $N$  fluidos perfeitos. As equações de Einstein são

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.28)$$

com o tensor de energia-momentum dado por

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u^\mu u^\nu - p c^2 g^{\mu\nu}. \quad (3.29)$$

Aquí a **densidade total** de matéria  $\rho$  e a **pressão total** da matéria  $p$  são definidas por

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i \quad \text{e} \quad p = \sum_{i=1}^N p_i,$$

sendo  $\rho_i$  a densidade e  $p_i$  a pressão do  $i$ -ésimo fluido. Observe que ao escrever nesta forma o tensor energia-momentum estamos considerando que as componentes materiais

<sup>3</sup>O valor  $k = 0$  é imposto pelas equações de Friedmann-Lemaître, como se verá na próxima subsecção.

interagem entre si tão fracamente que podemos considerá-las independentes. É claro que, nesta aproximação, a única interação remanescente entre elas é a gravitacional.

Na métrica RW, a componente (0,0) de (3.28) se reduz à equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (3.30)$$

e a componente (1,1) à equação

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right] = -\frac{4\pi G}{c^2} p. \quad (3.31)$$

As componentes (2,2) e (3,3) fornecem equações equivalentes a (3.31). Agora, introduzindo (3.30) em (3.31) obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 3p) = 0. \quad (3.32)$$

Temos duas equações, (3.30) e (3.32), e  $2N + 1$  funções desconhecidas,  $a$ ,  $\rho_i$ ,  $p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Falta portanto prescrever  $2N - 1$  equações adicionais independentes para ter um sistema determinado de equações. Para determinar estas equações adicionais, resulta útil escrever a equação de conservação do tensor energia-momentum, que pode ser encontrada igualando a zero a derivada covariante de  $T_{\mu\nu}$ , ou equivalentemente, derivando (3.30) e utilizando (3.32) para eliminar o termo com  $\ddot{a}$ . O resultado é

$$\dot{\rho} + 3\frac{H}{c^2} (\rho c^2 + p) = 0. \quad (3.33)$$

Como estamos supondo que as componentes materiais interagem entre si tão fracamente que podemos considerá-las independentes, a equação (3.33) desacopla em  $N$  equações

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{H}{c^2} (\rho_i c^2 + p_i) = 0, \quad (3.34)$$

com  $i = 1, \dots, N$ ; sendo que apenas  $N - 1$  são independentes, pois a soma delas deve satisfazer (3.33).

Por último, as  $N$  equações restantes são equações de estado que relacionam a pressão com a densidade de cada componente material. Estas equações de estado podem sempre ser escritas na forma

$$p_i = w_i \rho_i c^2, \quad (3.35)$$

com  $i = 1, \dots, N$ . Os coeficientes  $w_i$  que aparecem em (3.35) são, em geral, funções do tempo cósmico, da densidade  $\rho_i$ , ou equivalentemente, do fator de escala, e em primeira aproximação podem ser considerados constantes. Introduzindo (3.35) em (3.34) obtemos

$$\dot{\rho}_i + 3H(1 + w_i)\rho_i = 0, \quad (3.36)$$

e portanto, da condição  $w_i = cte$  para todo  $i = 1, \dots, N$ , temos que (3.36) implica

$$\rho_i a^{3(1+w_i)} = cte. \quad (3.37)$$

Definamos a **densidade crítica do universo** por

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (3.38)$$

o **parâmetro de densidade** da  $i$ -ésima componente material e o **parâmetro da densidade total** por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad \text{e} \quad \Omega = \sum_{i=1}^N \Omega_i. \quad (3.39)$$

Usualmente os parâmetros de densidade são chamados simplesmente de densidade. Isto equivale a medir a densidade de matéria em unidades de densidade crítica e não gera nenhuma confusão. O significado físico da densidade crítica (3.38) fica claro ao escrever (3.30) na forma

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = H^2\Omega,$$

o que implica que

$$a^2 H^2 (\Omega - 1) = kc^2. \quad (3.40)$$

Isto implica que o lado esquerdo de (3.40) é constante. Como  $a^2 H^2$  é sempre positivo, segue-se que o universo é

1. localmente euclideano ( $k = 0$ ) se e somente se  $\Omega = 1$ ;
2. localmente esférico ( $k = 1$ ) se e somente se  $\Omega > 1$ ;
3. localmente hiperbólico ( $k = -1$ ) se e somente se  $\Omega < 1$ .

Agora, substituindo (3.35) em (3.32), e usando (3.37)-(3.39), obtemos a equação diferencial

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \sum_{i=1}^N \frac{\Omega_{i0} (1 + \omega_i) a_0^{3(1+\omega_i)}}{a^{3(1+\omega_i)}} = 0, \quad (3.41)$$

como é usual, o índice zero numa função (p. ex.  $\Omega_i$ ) indica o seu valor no tempo presente. Os valores destas funções no tempo presente são chamados de **parâmetros cosmológicos**.

**Observação 3.1** Não existe ainda consenso quanto aos valores dos parâmetros cosmológicos pois os diversos métodos utilizados para a sua determinação possuem erros sistemáticos consideráveis. Porém, é possível afirmar com um certo grau de confiabilidade que  $H_0 = 71 \pm 7 \text{ km s}^{-1} / \text{Mpc}$  [43], e que  $\Omega_{m0} = 0,3 \pm 0,1$  e  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7 \pm 0,1$  (veja [92] para uma determinação elementar destes últimos dois valores). Os parâmetros  $\Omega_{m0}$  e  $\Omega_{\Lambda 0}$  estão definidos nos exemplos 3.3 e 3.4, e  $\Omega_0 = \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0}$ . ■

**Observação 3.2** Da expressão (3.40) podemos, rapidamente, obter um limite inferior para o atual raio de curvatura do Universo nos casos esférico e hiperbólico. Observe que

$$a_0 = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|}}, \quad (3.42)$$

portanto tomando  $H_0 \leq 78 \text{ km s}^{-1}/\text{Mpc}$  e  $0,8 \leq \Omega_0 \leq 1,2$  (veja a observação 3.1), temos que  $a_0 \geq 8600 \text{ Mpc}$ . ■

Salvo nos casos mais simples, a equação (3.41) é difícil de ser resolvida, portanto ela não resulta de grande ajuda na determinação da relação redshift-distância. Para encontrar esta relação procedemos, na próxima subseção, de uma maneira indireta.

### 3.1.3 Relações redshift-distância e redshift-tempo

Passemos agora para o cálculo da relação redshift-distância. Devido a (3.37) temos que

$$H^2 \Omega_i a^{3(1+w_i)} = H_0^2 \Omega_{i0} a_0^{3(1+w_i)}$$

é constante, e portanto

$$H^2 \Omega = H_0^2 \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} \frac{a_0^{3(1+w_i)}}{a^{3(1+w_i)}}. \quad (3.43)$$

Usando (3.40) e (3.43) temos então que

$$\begin{aligned} a\dot{a} &= a^2 H \\ &= a \left[ a^2 H^2 \Omega - a^2 H^2 (\Omega - 1) \right]^{1/2} \\ &= a \left[ a^2 H_0^2 \sum_{i=1}^N \left( \Omega_{i0} \frac{a_0^{3(1+w_i)}}{a^{3(1+w_i)}} \right) - a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Mas, devido a (3.13),

$$\begin{aligned} a\dot{a} &= \frac{a_0}{1+z} \left[ \frac{a_0^2 H_0^2}{(1+z)^2} \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} - a_0^2 H_0^2 (\Omega_0 - 1) \right]^{1/2} \\ &= \frac{a_0^2 H_0}{(1+z)^2} \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, de (3.13) temos também que

$$da = - \frac{a_0 dz}{(1+z)^2}, \quad (3.44)$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{dt}{a} &= \frac{da}{a\dot{a}} \\ &= - \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right]^{-1/2} \frac{dz}{a_0 H_0}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Segue-se de (3.11) que a relação redshift-distância é

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+x)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+x)^2 \right]^{-1/2} dx. \quad (3.46)$$

Observe também que

$$\begin{aligned} dt &= \frac{da}{\dot{a}} \\ &= - \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right]^{-1/2} \frac{a dz}{a_0 H_0}, \end{aligned}$$

e portanto, usando (3.13), segue-se que

$$\begin{aligned} \tau(z) &= t_0 - t(z) \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^z \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+x)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+x)^2 \right]^{-1/2} \frac{dx}{1+x}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

A quantidade  $\tau(z) = t_0 - t(z)$  é chamada de **relação redshift-tempo (retrógrado)**, e informa há quanto tempo foram emitidos os fótons que estão sendo observados hoje com redshift  $z$ .

Seja  $\bar{\Omega}_0 = (\Omega_{10}, \dots, \Omega_{N0})$ , e denote o termo entre colchetes em (3.46) e (3.47) por  $h(z; \bar{\Omega}_0)$ , ou seja,

$$h(z; \bar{\Omega}_0) = \left[ \sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{3(1+w_i)} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2 \right]^{1/2}.$$

Se  $h(z; \bar{\Omega}_0) \neq 0$  para todo  $z > 0$ , então é possível integrar (3.46) e (3.47) em toda a semi-reta  $R^+$ , obtendo

$$d_{hor} = \frac{c}{H_0} \int_0^\infty \frac{dx}{h(x; \bar{\Omega}_0)}, \quad (3.48)$$

e

$$T_{Univ} = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{1}{h(x; \bar{\Omega}_0)} \frac{dx}{(1+x)}. \quad (3.49)$$

A interpretação destas expressões é simples. A quantidade  $T_{Univ}$  é chamada de **idade do universo** pois, por (3.13),  $z = \infty$  corresponde à singularidade inicial  $a = 0$ . Por outro lado,  $d_{hor}$  é chamado de **raio do horizonte de partículas**, ou **raio do universo observável**, pois representa a maior distância da qual um observador no tempo presente pode receber informação por meio de radiação eletromagnética. Em outras palavras, o **universo observável** de um observador (a região causalmente conectada com ele) é uma bola centrada nele e com raio  $d_{hor}$ .

Observe que para modelos de universo com idade finita temos  $cT_{Univ} < d_{hor}$ , e portanto cabem as seguintes possibilidades:

1. O raio do universo observável é finito. É claro que neste caso só pode ser explorada uma região limitada do universo. Como exemplo considere um universo de Einstein-de Sitter, com  $d(z)$  dado por (3.27).
2. O universo possui uma idade finita, mas o raio do universo observável é infinito. Um exemplo deste caso é o universo  $t^1$  do exemplo 3.2, onde  $d(z) = \frac{c}{H_0} \ln(1+z)$ , e  $\tau(z) = \frac{t_0 z}{1+z}$ ; observe que neste modelo  $t_0$  é a idade do universo.
3. O universo possui idade infinita, e portanto o raio do universo observável é também infinito. O exemplo mais conhecido é o universo de de Sitter, onde  $\tau(z) = \frac{1}{H_0} \ln(1+z)$ .

Suponha agora que  $h(z; \bar{\Omega}_0) = 0$  para algum  $z > 0$ , ou seja que a equação

$$\sum_{i=1}^N \Omega_{i0} (1+z)^{1+3w_i} = \Omega_0 - 1 \quad (3.50)$$

tenha solução  $z = z_M > 0$ . Então pode acontecer uma das três alternativas seguintes, análogas aos três casos anteriores,

1. As integrais em (3.46) e (3.47) são próprias, ou seja  $d(z_M)$  e  $\tau(z_M)$  são finitos, e portanto no instante  $t_M = t_0 - \tau(z_M)$  o fator de escala atingiu o seu valor mínimo dado por

$$a(t_M) = \frac{a_0}{1+z_M}. \quad (3.51)$$

Mas, como no tempo presente o universo está expandindo, isto significa que para tempos  $t < t_M$  ele estava contraindo. Neste caso, em qualquer intervalo  $[t, t_0]$ , com  $t < t_M$ , a equação (3.13) não terá solução única. Os modelos de universo oscilantes possuem este tipo de comportamento.

2. A integral em (3.46) é imprópria e a integral em (3.47) é própria. É interessante observar que os universos inflacionários possuem este tipo de comportamento.
3. As integrais em (3.46) e (3.47) são impróprias, ou seja  $d(z_M) = \tau(z_M) = \infty$ , e portanto o universo é infinitamente velho e pode ser observado na sua totalidade mesmo que ele seja de extensão infinita. Isto é possível porque o universo passou por uma fase estacionária de duração infinita, com o fator de escala quase constante dado por

$$a_M = \frac{a_0}{1+z_M}. \quad (3.52)$$

**Observação 3.3** O principal interesse nesta tese reside na relação redshift-distância. A relação redshift-tempo será utilizada somente no último capítulo. ■



Os primeiros modelos cosmológicos baseados na métrica de RW foram estudados por Friedmann e Lemaître. O conteúdo material nestes modelos consiste de um fluido perfeito e uma constante cosmológica. Historicamente, o primeiro a estudar estes modelos foi Friedmann, que considerou como fluido uma poeira sem pressão. Posteriormente, Lemaître considerou o caso geral de um fluido perfeito com pressão não nula (veja [40] para uma breve introdução histórica e uma análise detalhada dos modelos de Friedmann). Nesta tese vamos nos restringir aos modelos cosmológicos de Friedmann.

**Exemplo 3.3 Modelos de universo só com poeira cósmica.** Estamos interessados em estudar o Universo em épocas *recentes*, ou seja queremos recuar no tempo até estágios posteriores ao período de formação das primeiras galáxias. Portanto podemos considerar uma componente material como sendo poeira cósmica. Na verdade, vamos começar considerando modelos onde o conteúdo material consiste de um só tipo de matéria, chamada **poeira**, com equação de estado

$$p = 0. \quad (3.53)$$

A relação redshift-distância (3.46) se reduz neste caso à expressão

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x\Omega_0}}, \quad (3.54)$$

que pode ser integrada facilmente para obter

$$d(z) = \frac{2c}{H_0} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0-1}} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+z\Omega_0}-1}{\sqrt{1+z\Omega_0-1+\Omega_0}} \sqrt{\Omega_0-1} \right] & \text{se } \Omega_0 > 1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} & \text{se } \Omega_0 = 1. \\ \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} \tanh^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+z\Omega_0}-1}{\sqrt{1+z\Omega_0-1+\Omega_0}} \sqrt{1-\Omega_0} \right] & \text{se } \Omega_0 < 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

Como  $\Omega_0 \geq 0$ , a relação redshift-distância (3.54) evidencia que os modelos que contém só poeira cósmica possuem horizonte de partículas, e portanto modelam universos com idade finita, exceto no caso limite  $\Omega_0 = 0$ , que corresponde a um universo  $t^1$ . Fazendo  $z = \infty$  em (3.55) obtemos

$$d_{hor} = \frac{2c}{H_0} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_0-1}} \tan^{-1} \sqrt{\Omega_0-1} & \text{se } \Omega_0 > 1 \\ 1 & \text{se } \Omega_0 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_0}} \tanh^{-1} \sqrt{1-\Omega_0} & \text{se } \Omega_0 < 1. \end{cases} \quad (3.56)$$

Agora, nos casos com  $\Omega_0 \neq 1$  é conveniente expressar o horizonte de partículas em unidades do raio de curvatura. Fazendo  $\rho_{hor} = d_{hor}/a_0$  e utilizando (3.42) temos

$$\rho_{hor} = 2 \begin{cases} \tan^{-1} \sqrt{\Omega_0-1} & \text{se } \Omega_0 > 1, \\ \tanh^{-1} \sqrt{1-\Omega_0} & \text{se } \Omega_0 < 1. \end{cases} \quad (3.57)$$

A interpretação desta equação é muito simples: quanto mais *plana* for a seção espacial no tempo presente ( $\Omega_0 \approx 1$ ), menor será a distância do horizonte de partículas, comparada com o raio de curvatura do universo. Isto tem implicações importantes em topologia cósmica, pois permite determinar quais modelos com poeira e seções espaciais topologicamente não triviais são pequenos (veja a subseção 3.2.4). Agora, as expressões em (3.55) podem ser invertidas resultando em

$$z(d) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_0} \left[ \left( \frac{y(\rho)\Omega_0}{\sqrt{|\Omega_0-1|-y(\rho)}} + 1 \right)^2 - 1 \right] & \text{se } \Omega_0 \neq 1 \\ \left( \frac{1}{1-\frac{H_0 d}{2c}} \right)^2 - 1 & \text{se } \Omega_0 = 1, \end{cases} \quad (3.58)$$

onde

$$y(\rho) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\rho}{2}\right) & \text{se } \Omega_0 > 1 \\ \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) & \text{se } \Omega_0 < 1, \end{cases} \quad (3.59)$$

e  $\rho$  é a distância atual, em unidades do raio de curvatura, de uma fonte observada com redshift  $z(d)$ , ou seja

$$\rho = \frac{H_0 d}{c} \sqrt{|\Omega_0 - 1|}. \quad (3.60)$$

Observe que  $z(d)$  possui uma singularidade em  $d = d_{hor}$ , como era de se esperar. ■

**Exemplo 3.4 Modelos de universo com poeira e constante cosmológica.** Dados observacionais recentes [82] indicam que o nosso Universo encontra-se numa fase de expansão acelerada, deixando os modelos com poeira cósmica insatisfatórios para acomodar estas novas observações. De fato, da equação (3.32) é fácil notar que a taxa de aceleração (ou desaceleração) na expansão do universo está dado pelo sinal do termo  $\rho c^2 + 3p$ . Tem-se que quando

1.  $\rho c^2 > -3p$  a expansão do universo está desacelerando,
2.  $\rho c^2 < -3p$  a expansão do universo está acelerando, e
3.  $\rho c^2 = -3p$  a expansão do universo é uniforme.

Vamos então considerar um conteúdo material mais geral, que engloba o caso particular anterior, onde a primeira componente de matéria é poeira, e a segunda componente corresponde à **energia do vácuo**, com equação de estado

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (3.61)$$

Segue-se de (3.37) que  $\rho_\Lambda$  é constante. Definindo

$$\Lambda = 8\pi G\rho_\Lambda,$$

vemos que esta energia do vácuo reproduz uma **constante cosmológica** nas equações de Einstein. É fácil constatar que a condição

$$\Omega_{\Lambda 0} > \frac{\Omega_{m0}}{2} \quad (3.62)$$

deve ser satisfeita para que um modelo de universo apresente expansão acelerada.<sup>4</sup> A relação redshift-distância (3.46) se reduz, para esta família de modelos, à expressão

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z [(1+x)^3 \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} - (1+x)^2 (\Omega_0 - 1)]^{-1/2} dx. \quad (3.63)$$

Esta integral é difícil de se resolver, e um tratamento numérico é mais adequado. Observe que se  $\Omega_0 \leq 1$ , então os modelos com poeira cósmica e constante cosmológica positiva possuem horizonte de partículas, e portanto modelam universos com idade finita. Já se  $\Omega_0 > 1$ , a equação (3.50) toma a forma

$$\Omega_{\Lambda 0} = \frac{(1+z)^2}{(1+z)^2 - 1} (1 + z\Omega_{m0}). \quad (3.64)$$

Agora, a função

$$g(z) = \frac{(1+z)^2}{(1+z)^2 - 1} (1 + z\Omega_{m0})$$

possui os seguintes limites,

$$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \infty,$$

quando  $\Omega_{m0} > 0$ . Segue-se que  $g(z)$  possui um valor mínimo absoluto na semi-reta  $R^+$ , e portanto a equação (3.64) possui uma solução somente se  $\Omega_{\Lambda 0}$  é maior que este valor mínimo. Um processo algébrico elementar mas muito longo permite mostrar que este valor mínimo de  $g(z)$  é muito alto. Portanto modelos com poeira cósmica e constante cosmológica sem singularidade inicial apresentam um raio de curvatura muito pequeno, incompatível com o valor limite obtido na observação 3.2. Segue-se que todos os modelos cosmológicos com poeira cósmica e constante cosmológica positiva, compatíveis com os dados observacionais atuais possuem uma idade finita, e portanto um horizonte de partículas. ■

---

<sup>4</sup>Seguindo correntes atuais poderíamos considerar também um *vácuo dinâmico*. Neste caso a equação de estado não seria mais a (3.61), mas alguma outra proveniente das equações dinâmicas do vácuo, e portanto a densidade de energia do vácuo não seria mais constante (veja por exemplo [81] e [97]). Neste caso, também, a expansão acelerada do universo dar-se-ia quando a condição (3.62) fosse satisfeita.

## 3.2 Catálogos em universos pequenos

Para formalizar o conceito de **catálogo de fontes discretas** num modelo de universo baseado na métrica RW, vamos supor que o fator de escala  $a(t)$  correspondente ao modelo é uma função monotonamente crescente no tempo, de modo que a relação redshift-distância seja biunívoca. Além disso, vamos supor que nosso modelo de universo possui uma singularidade inicial, e portanto uma idade finita. Na seção anterior foi mostrado que todos os modelos cosmológicos com poeira cósmica e constante cosmológica positiva, e parâmetros cosmológicos compatíveis com as observações, satisfazem estas condições. Num estágio inicial das nossas considerações é conveniente supor também que todos os objetos cósmicos (ou simplesmente objetos) que nos interessam são pontuais e possuem um tempo de vida tão longo que foram criados nos estágios iniciais do universo, e nenhum deles foi extinto até o presente momento. Mais ainda, vamos considerar também que todos os objetos são co-móveis, isto é suas posições espaciais são fixas no tempo.

Estes pressupostos são altamente irrealistas, porém são bastante úteis para o entendimento das consequências observacionais num universo pequeno, e em estágios posteriores da pesquisa devem ser relaxados ou eliminados. Por exemplo, ao relaxar os pressupostos de objetos cósmicos pontuais e de idade muito longa, surge o conceito de *regras de seleção* para um catálogo (veja os exemplos 3.6 e 3.7 adiante). Já para eliminar a hipótese de objetos co-móveis, isto é, ao levar em consideração as velocidades peculiares das fontes cósmicas, resulta conveniente (em topologia cósmica) restringir a região estudada a pequenos intervalos de redshift (veja o capítulo 4).

Devemos observar que existem basicamente dois tipos de catálogos usualmente encontrados na prática: catálogos reais, que são obtidos a partir de observações astronômicas, e catálogos simulados, que são gerados por computador sob considerações impostas para simular limitações observacionais ou para levar em conta hipóteses simplificadoras. A definição de catálogos que vamos fornecer adiante se ajusta de maneira natural a estes dois tipos de catálogos. Adicionalmente, o processo de construção de catálogos descrito a seguir pressupõe a escolha antecipada de um tipo particular de fontes (por exemplo quasares), ou de alguma combinação destas (por exemplo quasares e objetos BL Lac), antes de realizar o levantamento de dados. Esta abordagem está em aparente conflito com a maneira em que os astrônomos constroem os seus catálogos: coletam primeiro todas as fontes dentro da sua gama de interesse e limitações observacionais, e só depois selecionam os diferentes tipos de fontes, ou seja, constroem os seus catálogos. A nossa formalização do processo de construção de catálogos está baseado no fato de que qualquer catálogo de um tipo específico de fontes é, na verdade, uma seleção entre todas as fontes desse

tipo que em princípio são observáveis. Além disso, o processo de construção de catálogos descrito a seguir é facilmente implementado em simulações por computador.

### 3.2.1 Regras de construção

Suponha então que no Universo com seção espacial  $M$  existam  $N$  objetos cósmicos do tipo que nos interessa.<sup>5</sup> Como todos estes objetos são co-móveis, as suas posições espaciais são constantes. Portanto o conjunto de objetos em  $M$  é dado por uma lista das suas atuais posições co-móveis, e a partir desta lista podemos definir a função

$$\begin{aligned} \mu : M(t_0) &\rightarrow \{0, 1\} \\ p &\mapsto \mu(p) = \begin{cases} 1 & \text{se existe um objeto em } p \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.65)$$

O conjunto de objetos em  $M(t_0)$  pode portanto ser identificado com  $\mu^{-1}(1)$ . Este é um conjunto discreto em  $M(t_0)$  sem pontos de acumulação. De fato, a partir de qualquer aplicação  $\mu : M(t_0) \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $\mu^{-1}(1)$  seja um conjunto discreto sem pontos de acumulação podemos definir como conjunto de objetos cósmicos, o próprio conjunto  $\mu^{-1}(1)$ . Vamos considerar adicionalmente que o conjunto de objetos é uma amostra representativa de alguma distribuição **bem comportada** em  $M(t_0)$ . Para os nossos propósitos, uma distribuição bem comportada é aquela que da origem a amostras de pontos que não se concentram todas em pequenas regiões de  $M(t_0)$ , observe que uma distribuição de objetos apresentando aglomeração, ou uma distribuição fractal de objetos pode ser uma distribuição bem comportada.

Seja  $\pi : \widetilde{M}(t_0) \rightarrow M(t_0)$  a projeção de recobrimento universal de  $M(t_0)$  e  $p$  um objeto, ou seja  $p \in \mu^{-1}(1)$ . O conjunto  $\pi^{-1}(p)$  é a coleção das cópias topológicas de  $p$  em  $\widetilde{M}(t_0)$ . Vamos nos referir a estas cópias como as **imagens topológicas**, ou simplesmente **imagens**, do objeto  $p$ . Portanto a aplicação  $\tilde{\mu}$  definida pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}(t_0) & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\mu} & \\ M(t_0) & \xrightarrow{\mu} & \{0, 1\} \end{array}$$

nos fornece o conjunto de todas as imagens topológicas na variedade de recobrimento

---

<sup>5</sup>Aqui vamos abusar um pouco da linguagem, e vamos permitir que  $N$  seja infinito no caso em que a variedade  $M$  possua volume infinito.

universal  $\widetilde{M}(t_0)$ . De fato, as imagens dos objetos em  $M(t_0)$  são os elementos do conjunto  $\tilde{\mu}^{-1}(1)$ .

Ao considerarmos fontes cósmicas discretas, o **universo observável** é a parte da variedade de recobrimento universal  $\widetilde{M}(t_0)$  da seção espacial  $M(t_0)$  do espaço-tempo, causalmente conectada a uma imagem do observador a partir do momento do desacoplamento da radiação com a matéria. Este universo observável é uma bola centrada numa imagem do observador no recobrimento universal com raio igual à distância à última superfície de espalhamento, mas pode ser tomado para nossos propósitos como o raio do horizonte de partículas.

Suponhamos agora que realizamos um levantamento de fontes cobrindo uma região do céu desde um redshift mínimo  $z_{min}$  até um redshift máximo de  $z_{max}$ , e confinado entre certos valores dos ângulos de ascensão reta e declinação. Como estamos admitindo que podemos calcular as distâncias correspondentes a estes redshifts, então podemos determinar a região observada correspondendo a nosso levantamento de fontes, esta região é denominada de **universo observado** pelo levantamento. Se, por exemplo, o levantamento cobre todo o céu desde  $z_{min} = 0$  até um  $z_{max}$ , qualquer bola  $\mathcal{U} \subset \widetilde{M}(t_0)$  com raio  $d(z_{max})$  e centrada numa imagem da nossa posição é uma representação do universo observado correspondente a este levantamento de fontes. Se, por outro lado, o levantamento for do tipo *feixe fino*, o universo observado  $\mathcal{U}$  será um cone fino com vértice na posição de uma imagem do observador, e raio  $d(z_{max})$ . O conjunto finito  $\mathcal{O} = \tilde{\mu}^{-1}(1) \cap \mathcal{U}$  é o conjunto da **imagens observáveis** pelo levantamento, pois ele contém todas as imagens topológicas dos objetos em  $M(t_0)$  que, em princípio, podem ser observadas e registradas no levantamento.

O conjunto de **imagens observadas** por um levantamento ou **catálogo** é um subconjunto  $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$ , pois devido a diversas limitações observacionais não é possível registrar todas as imagens que se encontram dentro do universo observado. As nossas limitações observacionais podem ser formuladas em termos de **regras de seleção** que descrevem como o conjunto  $\mathcal{C}$  é obtido a partir de  $\mathcal{O}$ . Estas regras de seleção, junto com a lei de distribuição que os objetos em  $M$  obedecem, serão referidas como **regras de construção** do catálogo  $\mathcal{C}$ . Um bom exemplo de regras de construção é o usado para gerar um catálogo simulado em [64], onde num universo observado definido pelo redshift máximo  $z_{max} = 0.26$ , toma-se uma distribuição uniforme de pontos, e em vez de considerar regras de construção triviais, isto é  $\mathcal{C} = \mathcal{O}$ , simula-se o efeito de obscurecimento devido ao plano galáctico exigindo que só as imagens dentro de um cone duplo, com eixos passando pelos pólos norte e sul galácticos, e abertura  $120^\circ$ , são registradas. Porém, em simulações mais complexas devemos considerar regras de seleção mais elaboradas, como por exemplo a

seleção por limiar de luminosidade, a seleção por tempo finito de vida, ocultação por efeitos da linha de visão, ou alguma combinação de tais regras.

**Exemplo 3.5 Seleção por limiar de luminosidade.** Todo levantamento astronômico de fontes discretas possui uma limitação no brilho ou luminosidade que os aparelhos utilizados são capazes de detectar de maneira confiável (veja por exemplo [109]). Esta limitação inerente ao equipamento utilizado gera a necessidade de construir uma regra de seleção por **limiar de luminosidade**. Uma maneira de implementar uma tal regra de seleção consiste em assignar a cada objeto uma luminosidade absoluta segundo alguma lei de distribuição, e calcular a luminosidade aparente para cada imagem observável relativa ao centro do universo observado. Fixamos então um **limiar de luminosidade aparente** ( $l_{lim}$ ), e por esta regra de seleção uma imagem é registrada no catálogo apenas se a sua luminosidade aparente é maior que, ou igual a  $l_{lim}$ . ■

**Exemplo 3.6 Seleção por tempo finito de vida.** Toda fonte cósmica considerada pontual é na verdade uma estrutura extremamente complexa formada por subestruturas, numa hierarquia consideravelmente organizada. Uma galáxia espiral, por exemplo, consiste do seu núcleo, com uma alta densidade de estrelas de idade média, rodeado por um halo que consiste de aglomerados globulares formados principalmente por estrelas velhas. Os braços espirais estão dispostos num disco, formando uma estrutura (quase) bidimensional que consiste de estrelas novas e de média idade como o nosso sol. A galáxia toda está permeada por poeira galáctica, gas interestelar, campos magnéticos e matéria escura, e apresenta uma dinâmica e evolução extremamente complexa que ainda hoje não é bem compreendida (veja [69]). Toda esta estrutura altamente organizada deve ter se formado em algum momento depois da época do desacoplamento da radiação com a matéria, e supostamente não vai durar para sempre. Segue-se portanto que toda fonte cósmica observada no céu possui um tempo de vida finito. Para implementar a regra de seleção por tempo finito de vida assignamos a cada objeto um tempo de vida e uma data de nascimento, de maneira a conhecermos o segmento da sua linha de universo que representa o objeto *vivo* (o seu **segmento de vida**). Pela regra de seleção por tempo de vida finito, uma imagem observável é registrada no catálogo se o seu segmento de vida intercepta o cone de luz observado. A implementação desta regra de seleção é inevitável ao trabalhar com catálogos de quasares (ou mais geralmente, com catálogos de galáxias de núcleo ativo), pois o tempo de vida estimado para estes objetos é da ordem de um milésimo da idade estimada do nosso Universo [33, 52, 71]. ■

**Exemplo 3.7 Ocultação por efeitos da linha de visão.** Devido à alta resolução dos telescópios modernos, é possível detectar e medir a extensão angular de muitas das fontes

cósmicas que, numa primeira aproximação, são consideradas pontuais. Segue-se que um objeto que esteja mais afastado que outro, mas na mesma linha de visão, poderá não ser observado, e portanto não será detectado num levantamento de fontes. Para implementar a regra de seleção por este tipo de ocultação atribui-se a cada objeto cósmico um perfil geométrico tridimensional (um elipsóide, por exemplo), e declara-se como não observável uma fonte que fique oculta por alguma outra. O critério de ocultação dependerá de parâmetros como um limiar de contraste de luminosidades, e algum critério que simule a resolução do telescópio utilizado no levantamento. ■

Ao longo deste trabalho vamos considerar que todos os catálogos podem ser descritos por regras de construção bem definidas, e diremos que dois catálogos são **comparáveis** se são definidos através das mesmas regras de construção, mesmo que possuam um número significativamente distinto de fontes e correspondam a diferentes variedades que modelam as seções espaciais do universo. De acordo com esta definição, para que dois catálogos sejam comparáveis eles devem corresponder ao mesmo conjunto de parâmetros cosmológicos, isto é ao mesmo fator de escala e curvatura espacial; e devem corresponder ao mesmo universo observado, isto é, a regiões isométricas do recobrimento universal  $\widetilde{M}(t_0)$ , com os mesmos limites de  $z_{min}$  e  $z_{max}$ .

Formulamos a nossa definição de comparabilidade de catálogos deste jeito porque estamos interessados, em última instância, em comparar catálogos simulados com catálogos reais. De fato, por construção, os catálogos reais estão limitados por um redshift mínimo e um redshift máximo, e os redshifts são convertidos a distâncias depois de fixar valores para os parâmetros cosmológicos. Portanto, para construir catálogos simulados devemos usar o mesmo conjunto de parâmetros cosmológicos utilizado para converter redshifts em distâncias, e os mesmos redshifts mínimo e máximo empregados nos catálogos reais. Correspondentemente, as regras de construção aplicadas na construção dos catálogos simulados têm por objetivo modelar a distribuição de objetos reais no universo e as causas da incompletude dos catálogos reais; e quando pudermos elaborar regras de construção adequadas, teremos que os catálogos simulados construídos com tais regras serão comparáveis aos catálogos reais no sentido acima definido.

**Observação 3.4** Se  $M$  for simplesmente conexo então  $M$  e  $\widetilde{M}$  são a mesma variedade, e portanto existe exatamente uma única imagem para cada objeto. Mas se  $M$  for multiplamente conexo cada objeto têm várias imagens topológicas (de fato um número infinito de imagens nos casos de curvatura zero e negativa). Como nós não sabemos a priori se o nosso Universo é multiplamente conexo ou não, não sabemos se estamos registrando objetos ou imagens nos catálogos reais. Por este motivo é conveniente dizer que um catálogo



é formado por fontes cósmicas. ■

### 3.2.2 Catálogos com imagens múltiplas

Suponhamos que  $M$  é multiplamente conexa e seja  $P \subset \widetilde{M}(t_0)$  um domínio fundamental de  $M(t_0)$ . Podemos sempre escolher  $P$  de maneira que  $\tilde{\mu}^{-1}(1) \cap \partial P = \emptyset$ , onde  $\partial P$  é o bordo de  $P$ . Considerando o recobrimento universal  $\widetilde{M}(t_0)$  tecelado por  $P$ , claramente pode-se notar que  $\tilde{\mu}^{-1}(1)$  apresenta todas as periodicidades devidas ao grupo de recobrimento  $\Gamma$ , no sentido que em cada cópia  $gP$  do domínio fundamental (aqui  $g \in \Gamma$ ) é um conjunto igual de imagens com as mesmas posições relativas que em  $P$ .

Para estabelecermos um critério que garanta a existência de imagens múltiplas em um catálogo precisamos introduzir o conceito de **levantamento profundo**. Um levantamento de dados é profundo se o seu correspondente universo observado  $\mathcal{U}$  possui a propriedade que para o poliedro de Dirichlet  $P$  centrado numa imagem do observador, existem faces  $F$  e  $F'$ , identificadas por uma isometria  $g \in \Gamma$ , e tais que algumas regiões  $E \subset F$  e  $g(E) \subset F'$  estão no interior de  $\mathcal{U}$ . Em particular, quando  $M$  é compacto com o correspondente poliedro de Dirichlet dentro do universo observado, este universo observado corresponde a um levantamento profundo. Este tem sido o caso mais estudado na literatura de topologia cósmica. Consideremos, como exemplo, um levantamento que cobre todo o céu desde um  $z_{min} = 0$  até algum  $z_{max}$ . Para determinar se ele é ou não profundo, na prática, tudo que devemos fazer é determinar a imagem topológica do observador mais próxima do centro do poliedro e computar o redshift  $z_{lim}$  correspondente à metade de tal distância; se  $z_{max} > z_{lim}$ , o levantamento é profundo.<sup>6</sup>

Quando  $M$  é multiplamente conexa e o levantamento é profundo, o conjunto  $\mathcal{O}$ , i.e. o conjunto das imagens topológicas observáveis, contém imagens múltiplas de alguns objetos cósmicos. Se, adicionalmente nossas capacidades observacionais permitem o registro de algumas destas imagens múltiplas em  $\mathcal{C}$ , então o catálogo contém informações sobre as periodicidades devidas ao grupo de recobrimento  $\Gamma$ , e portanto, sobre a topologia da variedade  $M$ . Cada par observado de imagens de um mesmo objeto está relacionado por uma isometria  $g \in \Gamma$ . Estes pares de imagens foram chamados de **gg-pares** [64], porém ao nos referirmos a eles coletivamente usaremos o termo  **$\Gamma$ -pares**, reservando o termo  **$g$ -par** para qualquer par relacionado pela isometria  $g \in \Gamma$ . Os  $\Gamma$ -pares no catálogo  $\mathcal{C}$  dão origem a correlações nas posições das imagens observadas.

---

<sup>6</sup>De fato,  $z_{lim}$  é o redshift correspondente ao raio da bola inscrita no domínio de Dirichlet de  $M(t_0)$  centrada numa imagem do observador. Este raio é chamado de **raio de injetividade**, e denotado por  $r_{inj}$ .

**Observação 3.5** A identificação direta de imagens múltiplas de um objeto cósmico em um catálogo real possui problemas práticos muito graves, por exemplo:

1. Duas imagens do mesmo objeto a distâncias distintas do observador correspondem a diferentes estágios na sua evolução. Como o mesmo objeto pode apresentar uma morfologia diferente em cada um desses estágios, a identificação de imagens múltiplas é impossível sem algum modelo adequado da evolução do tipo de objeto em consideração.
2. Duas imagens do mesmo objeto são observadas segundo orientações diferentes, e o objeto pode apresentar uma morfologia diferente de acordo ao ângulo de visão.
3. As regras de seleção em muitos casos podem impedir a observação de uma ou mais cópias de uma mesma fonte, dificultando assim a identificação das isometrias do grupo de recobrimento das seções espaciais do Universo.

Uma maneira de superar estas dificuldades é utilizar métodos estatísticos para detectar as correlações nas posições das fontes que surgem devido à distribuição (quase) periódica das imagens observadas num catálogo que possua imagens múltiplas. O principal objetivo de qualquer abordagem estatística à topologia cósmica usando fontes discretas é o de desenvolver métodos que revelem estas correlações. Em particular, as correlações nas posições originam correlações de distâncias entre pares de fontes, e na seção 3.3 estudamos um destes métodos, o método de Cristalografia Cósmica, o qual está baseado na busca destas correlações de distância usando histogramas de separação de pares de fontes discretas. ■

É importante enfatizar que existem duas condições independentes que devem ser satisfeitas para que exista uma quantidade suficiente de imagens múltiplas num catálogo, afim de que a topologia do espaço possa ser detectada. A primeira é obviamente que o levantamento de dados deve ser profundo, de modo que no universo observado existam múltiplas imagens observáveis de objetos cósmicos. A segunda condição é que as regras de seleção que definem o catálogo não sejam muito restritivas de modo a suprimir o registro de imagens múltiplas em número suficiente para fazer possível a sua detecção. Obviamente, se o levantamento não for profundo, não existirão imagens múltiplas no catálogo, independentemente da qualidade das observações. Por outro lado, mesmo com um levantamento profundo, se as regras de seleção forem muito restritivas, estas podem reduzir a quantidade de imagens múltiplas no catálogo em um nível no qual a detecção da topologia seja muito difícil ou até impossível (veja a observação 3.5). Portanto, ambas condições são igualmente importantes na aplicação de qualquer método estatístico usando fontes

discretas. Porém, o papel das regras de seleção neste processo não tem recebido quase nenhuma atenção nos estudos de topologia cósmica.

### 3.2.3 Universos pequenos localmente euclidianos

Um universo é pequeno se as suas seções espaciais são multiplamente conexas, e existe a possibilidade de detectar a sua topologia. Evidentemente, a qualidade de um universo ser pequeno ou não dependerá da capacidade observacional dos seus habitantes. Nesta subseção analisam-se algumas condições que determinam se um universo localmente euclidiano é pequeno quando as observações limitam-se ao uso de fontes cósmicas discretas.

Num universo Einstein-de Sitter a relação redshift-distância está dada pela expressão correspondente a  $\Omega_0 = 1$  em (3.55), com horizonte de partículas dado por (3.56), e redshift para uma fonte a uma distância co-móvel  $d$  dado por (3.58). Considere agora três modelos de universo de Einstein-de Sitter cujas seções espaciais são toros cúbicos.

1. O primeiro modelo é um toro cúbico com lado  $l_1 = d_{hor}/6$ , e portanto raio de injetividade  $r_{inj} = d_{hor}/12$ . Este raio de injetividade corresponde a um redshift  $z_{tim} \approx 0,19$ . Isto significa que fontes com  $z > 0,19$  são possíveis imagens múltiplas de fontes com  $z < 0,19$ . Portanto catálogos de aglomerados de galáxias ( $z_{max} \approx 0,3$ ) ou quasares ( $z_{max} \approx 4$ ) são profundos. Segue-se que se as regras de seleção para estes catálogos permitem a existência de imagens múltiplas, um observador neste mundo poderia, em princípio, detectar a topologia do universo se fosse capaz de extrair esta informação dos catálogos.
2. O segundo modelo é um toro cúbico com lado  $l_2 = 3d_{hor}/2$ , e portanto raio de injetividade  $r_{inj} = 3d_{hor}/4$ . Este raio de injetividade corresponde a um redshift  $z_{tim} = 15$ , e portanto um observador neste mundo não poderia detectar a topologia usando fontes discretas, pelo menos até possuir tecnologia suficiente para construir catálogos com  $z_{max} > 15$ , e isto só se existirem fontes discretas com redshifts tão altos. Hoje este observador teria que recorrer a algum outro tipo de predições dos seus modelos cosmológicos para tentar encontrar algum sinal da topologia do seu universo. Poderia, por exemplo, usar a radiação cósmica de fundo.<sup>7</sup>
3. O terceiro modelo é um toro com lado  $l_3 = 5d_{hor}/2$ , e portanto raio de injetividade  $r_{inj} = 5d_{hor}/4 > d_{hor}$ . Segue-se que toda a porção do universo causalmente conectada com qualquer observador está dentro do domínio de Dirichlet centrado neste

---

<sup>7</sup>Esta é uma linha de pesquisa muito ativa que, porém, não é abordada nesta tese. Veja contudo a seguinte lista (incompleta) de referências dos últimos três anos, onde se usa a radiação cósmica de fundo com vistas à detecção da topologia do nosso universo [5], [15]-[17], [24]-[28], [57], [66]-[68], [98] e [118].

observador, e portanto a detecção da topologia não seria possível com técnicas de detecção baseadas na existência de imagens múltiplas.

Os primeiros dois exemplos anteriores correspondem a modelos de universos pequenos, e o terceiro exemplo corresponde ao que poderíamos chamar de **modelo de um universo grande**. Por definição, um universo grande é observacionalmente indistinguível de um universo com topologia trivial. Mas um universo grande pode tornar-se pequeno, pois em algum momento, algum observador pode conceber uma técnica que possibilite a detecção da topologia. Por exemplo, no terceiro modelo acima, efeitos quânticos no universo primordial podem ter deixado certas *marcas* que façam este universo distinguível de um universo com topologia trivial, e que, com modelos teóricos e técnicas de observação adequadas, possam ser detectadas.

**Observação 3.6** Dizemos que nosso Universo é pequeno se ele pode ser descrito por um modelo de um universo pequeno, caso contrário dizemos que nosso Universo é grande. Que nosso Universo seja grande não significa, portanto, que ele seja topologicamente trivial, ou que não possa, no futuro, tornar-se pequeno. De fato, podemos nos perguntar se nosso Universo é pequeno ou grande, mas não podemos nos perguntar se ele é topologicamente trivial; pois não temos nenhum critério para afirmar (nem ao menos teoricamente) que, se nosso Universo for grande então ele é topologicamente trivial. ■

Consideremos agora um modelo de universo localmente euclídeo, mas com  $\Omega_{m0}$  e  $\Omega_{\Lambda0}$  em geral não nulos. Como  $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$ , então a relação redshift-distância é

$$d(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\Lambda0} + \Omega_{m0}(1+x)^3}}. \quad (3.66)$$

É possível inverter a expressão (3.66) em termos de funções elípticas para poder calcular  $z(d)$  e realizar sistematicamente análises análogas aos exemplos dados no início desta subseção (veja por exemplo [30]). Porém, para fins ilustrativos, é mais simples utilizar um procedimento numérico para resolver (3.66), e é isto que foi feito para construir os exemplos seguintes.

Consideremos os modelos com  $\Omega_{m0} = 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda0} = 0,7$ , e seções espaciais iguais às consideradas no início desta subseção. Temos os seguintes casos,

1. Para o modelo com  $r_{inj} = d_{hor}/12$  temos  $z(r_{inj}) \approx 0,296$ , e portanto catálogos de aglomerados de galáxias ( $z \approx 0,3$ ) já não são mais adequados; porém catálogos de quasares o são.
2. Para o modelo com  $r_{inj} = 3d_{hor}/4$  temos  $z(r_{inj}) \approx 18,5$ , portanto as conclusões são as mesmas que para o caso de Einstein-de Sitter.

3. Para o modelo com  $r_{inj} = 5d_{hor}/4$  as conclusões também permanecem inalteradas.

### 3.2.4 Universos pequenos localmente não-euclidianos

Vamos estabelecer agora certas relações quantitativas que vão nos permitir determinar quando um modelo de universo localmente hiperbólico ou esférico é pequeno, supondo que estamos testando a topologia com catálogos de fontes discretas. Suponhamos que estamos interessados em estudar a região de nosso Universo até uma distância  $\rho_M$  em unidades do raio de curvatura. Esta distância  $\rho_M$  pode ser um múltiplo do raio de injetividade de algum poliedro de Dirichlet, mas para nossa análise não é importante como é escolhido este valor. Qual é o mínimo valor de redshift necessário para poder explorar esta escala de distâncias? Como depende este valor de redshift das densidades  $\Omega_{m0}$  e  $\Omega_{\Lambda 0}$ ? Começamos restringindo o estudo a universos contendo só poeira cósmica, para depois examinar brevemente o caso de poeira e constante cosmológica.

Em primeiro lugar, observemos que uma condição necessária para podermos explorar esta escala de distâncias é que a distância do horizonte de partículas seja maior que  $\rho_M$ . A equação (3.57) implica que para que  $\rho_{hor} > \rho_M$ ,  $\Omega_0$  deve se afastar de 1 uma quantidade dada por

$$|\Omega_0 - 1| > \begin{cases} \tan(\frac{\rho_M}{2}) & \text{se } \Omega_0 > 1 \\ \tanh(\frac{\rho_M}{2}) & \text{se } \Omega_0 < 1. \end{cases} \quad (3.67)$$

No que segue vamos supor que a desigualdade (3.67) é satisfeita, pois de outro modo qualquer fonte que dista  $\rho_M$  do observador está além da região causal dele.

A relação redshift-distância (3.55) é, em unidades do raio de curvatura, dada por

$$\rho(z) = 2 \begin{cases} \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+z\Omega_0}-1}{\sqrt{1+z\Omega_0}-1+\Omega_0} \sqrt{\Omega_0 - 1} \right] & \text{se } \Omega_0 > 1 \\ \tanh^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+z\Omega_0}-1}{\sqrt{1+z\Omega_0}-1+\Omega_0} \sqrt{1 - \Omega_0} \right] & \text{se } \Omega_0 < 1. \end{cases} \quad (3.68)$$

Agora, usando a expressão (3.58), temos que para que um catálogo com profundidade  $z_{max}$  permita explorar a escala de distâncias dada por  $\rho_M$ , deve se satisfazer

$$z_{max} > \frac{1}{\Omega_0} \left[ \left( \frac{y(\rho_M)\Omega_0}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|} - y(\rho_M)} + 1 \right)^2 - 1 \right], \quad (3.69)$$

com a função  $y$  dada por (3.59).

**Exemplo 3.8** Suponha  $\Omega_0 < 1$ , seja  $l_{min}$  o comprimento da menor geodésica fechada de uma variedade hiperbólica  $M$ , e considere um catálogo  $\mathcal{C}$  com profundidade  $z_{max} = 5$ . Se  $z_{max}$  satisfaz a desigualdade (3.69) para  $\rho_M = l_{min}/2$ , então  $\mathcal{C}$  corresponderá a um

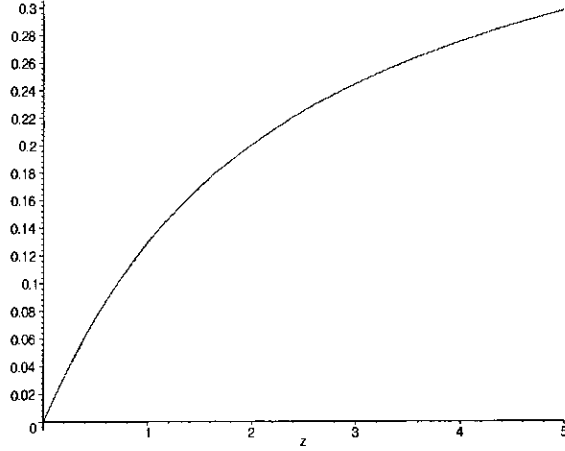


Figura 3.1: Relação redshift-distância em unidades do raio de curvatura para modelos cosmológicos com  $\Omega_{m0} = 0,34$  e  $\Omega_{\Lambda0} = 0,63$ . Claramente, qualquer modelo cosmológico com seção espacial compacta tal que o comprimento da menor geodésica fechada é  $l_{min} < 0,6$  será pequeno.

levantamento profundo, e um modelo de universo com  $M$  como seção espacial será pequeno (veja a subseção 3.2.2). Observe que no censo de Hodgson-Weeks o comprimento da menor geodésica fechada de 2401 variedades hiperbólicas com volume menor que 5 possui  $l_{min} < 0,4$ , e o comprimento da menor geodésica fechada de 3428 destas variedades possui  $l_{min} < 0,5$  (veja a seção C.4). Agora, resolvendo a desigualdade (3.69) obtemos  $\Omega_0 < 0,972$  para  $\rho_M = 0,20$  e  $\Omega_0 < 0,956$  para  $\rho_M = 0,25$ .<sup>8</sup> Estes limites superiores para  $\Omega_0$  são compatíveis com (3.67), portanto, se usamos catálogos de quasares, modelos de universo localmente hiperbólicos *quase* planos são pequenos para milhares de seções espaciais compactas. ■

Ao considerar modelos com  $\Omega_{m0} \neq 0$  e  $\Omega_{\Lambda0} \neq 0$ , o tratamento analítico não é mais possível e, em particular, não existe uma expressão fechada para a inversão da relação redshift-distância  $z(\rho)$ . Porém, por simples inspeção podemos determinar facilmente se um conjunto de parâmetros cosmológicos permite a existência de universos pequenos. De fato, relação redshift-distância em unidades do raio de curvatura é

$$\rho(z) = \sqrt{1 - \Omega_0} \int_0^z [(1+x)^3 \Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} - (1+x)^2 (\Omega_0 - 1)]^{-1/2} dx. \quad (3.70)$$

A figura 3.1 apresenta o gráfico de (3.70) para modelos cosmológicos de Friedmann com  $\Omega_{m0} = 0,34$  e  $\Omega_{\Lambda0} = 0,63$ . Observe que o valor da densidade correspondente,  $\Omega_0 = 0,97$ , cabe comodamente dentro do intervalo experimental  $0,8 \leq \Omega_0 \leq 1,2$  (veja a

<sup>8</sup>Não apresentamos a expressão que resulta da solução da desigualdade (3.69) pois ela é muito grande e não fornece nenhuma informação interessante, a não ser para o cálculo destes valores de  $\Omega_0$ . De qualquer forma, estes valores de  $\Omega_0$  podem ser obtidos resolvendo (3.69) numericamente.

observação 3.1). Portanto, este gráfico mostra claramente que os limites nos parâmetros de curvatura admitem a existência de muitos modelos de universos pequenos quando são usados catálogos com  $z_{max} = 5$ .

### 3.3 Cristalografia cósmica

O método de Cristalografia Cósmica foi o primeiro método estatístico proposto para detectar a topologia do nosso Universo usando fontes cósmicas discretas. A cristalografia cósmica, proposta por Lehoucq, Lachièze-Rey e Luminet [64], procura por correlações de distância entre fontes cósmicas usando **histogramas de separação de pares** (HSP's), ou seja gráficos que mostram o número de pares de fontes em função da separação (ou alguma função da separação) dos pares. Como vimos na seção anterior, estas correlações de distância, se existirem no nosso Universo, surgem por causa das isometrias do grupo de recobrimento da variedade que modela as seções espaciais do espaço-tempo, e podem fornecer uma assinatura observável da forma espacial global do nosso Universo. Desta maneira, a Cristalografia Cósmica é um método potencialmente interessante para investigar o tamanho e forma do nosso Universo.

Quando o método foi proposto em [64] pensou-se que estas correlações manifestavam-se como picos muito agudos chamados *spikes*. Adicionalmente, pensou-se que as posições e amplitudes relativas destes picos eram uma assinatura inequívoca da forma do nosso Universo, até que simulações feitas por [65] e [38] indicaram que HSP's correspondentes a variedades hiperbólicas não apresentavam picos. Na mesma época, e de maneira independente foi desenvolvido um método bastante geral para calcular a assinatura topológica proveniente destas correlações de distância em Cristalografia Cósmica [46]. Mostrou-se que as correlações devidas a translações de Clifford manifestam-se como picos muito agudos, de agora em diante chamados de picos topológicos ou simplesmente picos, enquanto que as outras isometrias manifestam-se como pequenas deformações do HSP *esperado* (HSPE) da correspondente variedade de recobrimento universal. Este resultado esclarece de maneira simples as simulações descritas em [65] e [38]. De fato, como não existem translações de Clifford na geometria hiperbólica (veja o teorema A.8), nenhum HSP construído com catálogos de fontes discretas num universo pequeno hiperbólico pode apresentar picos de origem topológica. Segue-se que os HSP's não são capazes de fornecer informação topológica em modelos de universo com densidade de matéria menor que a crítica, de vez que a assinatura topológica de isometrias não translacionais aparece sempre coberta pelo ruído estatístico. Na subseção 3.3.1 apresenta-se este método.

As implicações dos resultados teóricos obtidos em [46] para HSP's correspondentes a

variedades euclidianas e esféricas ficaram durante algum tempo pouco esclarecidas. Por um lado alguns autores afirmavam que cada isometria euclideana que gerasse  $\Gamma$ -pares em algum catálogo deveria se manifestar no correspondente HSP como um pico (veja por exemplo [65] e [115]). Esta afirmação está em clara contradição com os resultados obtidos em [46], segundo os quais somente as translações de Clifford geram picos topológicos. Num trabalho posterior [47] apresentamos simulações que confirmaram nosso resultado teórico, e mostramos claramente a contribuição à assinatura topológica das isometrias não translacionais apenas para a geometria euclideana. O estudo exhaustivo para as três geometrias de curvatura constante foi feito em [48] e [50]. Na subseção 3.3.2 apresentamos algumas simulações reportadas em [47] que mostram que o único sinal claramente visível da assinatura topológica, em HSP's correspondentes a modelos de universo localmente euclidianos, são os picos devidos às translações de Clifford. Nesta subseção apresentamos também uma análise preliminar da sensibilidade do método de Cristalografia Cósmica em relação à precisão dos parâmetros cosmológicos.

Por último, na subseção 3.3.3 apresentamos simulações descritas em [47] que ilustram a existência, em geral, de vários modelos localmente euclidianos com o mesmo espectro de picos em HSP's construídos com catálogos comparáveis. Isto se deve ao fato de que toda forma espacial euclideana compacta é recoberta por um tritoro (veja o teorema C.17).

### 3.3.1 A assinatura topológica

A primeira análise teórica do método de cristalografia cósmica foi realizada em [46], onde clarificou-se a origem e a natureza das correlações de distância. Neste trabalho foi derivada uma expressão para o **histograma de separação por pares esperado** (HSPE) para uma coleção de catálogos comparáveis com o mesmo número de fontes, correspondendo à mesma variedade que modela as seções espaciais do espaço-tempo. O HSPE é essencialmente um HSP com o ruído estatístico suprimido, e mostrou-se que o HSPE de uma variedade multiplamente conexa é, essencialmente, o HSPE do recobrimento universal correspondente mais a *assinatura topológica*, que consiste em contribuições individuais de cada isometria de recobrimento. Como um corolário, provou-se que os picos de natureza topológica em um HSP são devidos somente às translações de Clifford do grupo de recobrimento da variedade, entanto que as isometrias não translacionais manifestam-se como pequenas deformações do HSPE do recobrimento universal correspondente. Segue imediatamente deste resultado que as variedades hiperbólicas não exibem nenhum pico topológico em seus HSP's, desde que não existem translações de Clifford na geometria hiperbólica (veja o teorema A.8). Além disso, segue-se também que há variedades eu-



clideanas que não podem ser distinguidas pelos seus espectros de picos topológicos, pois existem diversas variedades euclideanas que têm exatamente as mesmas translações em seus grupos de recobrimento (veja o teorema C.17).

Seja  $M$  uma forma espacial,  $M(t)$  a seção espacial de um modelo de universo pequeno no instante  $t$ ,  $\widetilde{M}$  o recobrimento universal de  $M$ , e  $\Gamma$  o grupo de recobrimento de  $M$ . A **separação** de um  $g$ -par  $(x, gx)$ , com  $x \in \widetilde{M}$  e  $g \in \Gamma$ , é simplesmente  $\delta_g(x)$ , onde  $\delta_g$  é a função distância de  $g$  (veja a introdução do capítulo C). Para construir um HSP, avalia-se simplesmente uma função bijetiva apropriada  $f$  da separação  $r$  de cada par de fontes cósmicas de um catálogo dado  $\mathcal{C}$ , e conta-se o número dos pares para os quais estes valores  $f(r)$  se encontram dentro de determinados subintervalos. Estes subintervalos devem formar uma partição do intervalo  $(0, f(D)]$ , onde  $D$  é o diâmetro do universo observado que corresponde ao catálogo. Geralmente, todos os subintervalos são de igual comprimento. O HSP não é mais do que um gráfico normalizado desta contagem. A função  $f$  é considerada geralmente como sendo a função quadrado, mas para catálogos muito profundos pode ser conveniente tentar alguma função hiperbólica, se estivermos considerando modelos cosmológicos FL abertos ( $\Omega_0 < 1$ ), ou alguma função trigonométrica, se estivermos considerando modelos cosmológicos FL fechados ( $\Omega_0 > 1$ ).

É conveniente ter uma descrição formal do procedimento acima descrito. Dado um catálogo  $\mathcal{C}$  de fontes cósmicas, seja  $\eta(s)$  o número de pares de fontes com separação  $r$ , tal que  $f(r) = s$ . Formalmente,  $\eta(s)$  é dada pela função

$$\begin{aligned} \eta : (0, f(D)] &\rightarrow [0, \infty) \\ s &\mapsto \frac{1}{2} \text{Card}(\Delta^{-1}(s)), \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde, como é usual,  $\text{Card}(\Delta^{-1}(s))$  é o número de elementos do conjunto  $\Delta^{-1}(s)$ , e  $\Delta$  é a função

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow [0, f(D)] \\ (p, q) &\mapsto f \circ d(p, q). \end{aligned}$$

O coeficiente  $1/2$  na definição de  $\eta$  é devido ao fato de que os pares  $(p, q)$  e  $(q, p)$  são, para efeitos da contagem, o mesmo par.

A etapa seguinte consiste em dividir o intervalo  $(0, f(D)]$  em  $m$  subintervalos iguais de comprimento  $\delta s = f(D)/m$ . Cada subintervalo é da forma

$$J_i = \left( s_i - \frac{\delta s}{2}, s_i + \frac{\delta s}{2} \right] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.72)$$

com centro

$$s_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) \delta s.$$

Finalmente, o HSP é obtido de

$$\Phi(s_i) = \frac{2}{N(N-1)} \frac{1}{\delta s} \sum_{s \in J_i} \eta(s), \quad (3.73)$$

onde  $N$  é o número de fontes em  $\mathcal{C}$ . A soma em (3.73) é uma contagem, e o coeficiente da soma é uma constante de normalização, de modo que

$$\sum_{i=1}^m \Phi(s_i) \delta s = 1. \quad (3.74)$$

Embora o HSP seja realmente o gráfico da função  $\Phi(s_i)$ , a própria função  $\Phi(s_i)$  pode ser considerada como o histograma. Vamos nos referir a  $\Phi(s_i)$  simplesmente como o HSP. No que segue vamos considerar  $f(r) = r^2$ .

Como mencionado na seção anterior, num universo multiplamente conexo a distribuição periódica das imagens em  $\widetilde{M}$  (devida ao grupo de recobrimento) gera correlações em suas posições, e estas correlações traduzem-se em correlações nas distâncias entre pares de imagens observáveis. Num catálogo  $\mathcal{C}$  que possua imagens múltiplas em número suficiente, estas correlações em posições persistem, e assim existem ainda correlações de distâncias entre pares de imagens observadas.

**Exemplo 3.9** Considere um modelo de universo localmente euclideano cujas seções espaciais  $M(t)$  são variedades da classe  $\mathcal{G}_6$ . Suponha que no tempo presente,  $M(t_0)$  está parametrizada pelos valores  $a = L$ ,  $b = c = L/\sqrt{2}$  (veja a subseção C.2.3). Então o poliedro de Dirichlet para  $M(t_0)$ , com centro na origem de  $E^3$  é um cubo de lado  $L$  e faces perpendiculares aos eixos dados pela base (C.17). Suponha, para ser específico, que o universo observado é uma bola centrada na origem com raio  $R$  dado por  $L = 0,7R$ , e considere a isometria  $g = \alpha^{-1}\beta^{-1}\delta^{-1}$ . Usando (C.18) temos

$$g = (2L\hat{e}_2 - \bar{a}, \widetilde{A}_1),$$

e portanto, para todo  $(x, y, z) \in E^3$  temos

$$g(x, y, z) = (x - L, -y + 2L, -z).$$

O quadrado da separação do  $g$ -par  $(p, gp)$ , com  $p = (x, y, z)$ , é

$$d^2 = L^2 + 4[(y - L)^2 + z^2], \quad (3.75)$$

a partir do qual podemos concluir o seguinte:

1.  *$g$ -pares vizinhos possuem separações próximas.* Em termos mais técnicos, a separação de um  $g$ -par é uma função diferenciável da posição de qualquer uma das

imagens que constituem o par. A separação de um  $g$ -par é diferenciável porque é a composição de duas funções diferenciáveis da posição: a métrica na geometria euclídeana e a isometria  $g$ . A diferenciabilidade da função distância  $\delta_g$  permite definir dois  $g$ -pares  $(p, gp)$  e  $(q, gq)$  como distantes (vizinhos) se os pontos  $p$  e  $q$ , e portanto os pontos  $gp$  e  $gq$ , são distantes (vizinhos).

2. *Existem  $g$ -pares distantes com separações muito aproximadas.* Certamente, quaisquer dois  $g$ -pares  $(p, gp)$  e  $(q, gq)$  tais que  $p$  e  $q$  estejam perto do cilindro

$$(y - L)^2 + z^2 = r^2,$$

com  $r = cte$ , terão separações próximas, não importando quão distantes elas sejam. Portanto, existem correlações de distâncias entre  $g$ -pares.

3. *Nem todos os  $g$ -pares estão separados pela mesma distância.* Isto pode ser observado a partir da eq. (3.75), pois o quadrado da separação do  $g$ -par  $(p, gp)$  pode variar de  $d_{min}^2 = L^2$ , se  $p$  estiver no eixo  $(x, L, 0)$  dentro de  $\mathcal{U}$ ; até  $d_{max}^2 = 4R^2$ , para  $p = R(0, 7, \sqrt{207})/16$ . Note que  $d_{max}^2 \approx 8d_{min}^2$ ; assim, as correlações de distância de  $g$ -pares (neste exemplo) não se manifestam como um pico, mas como uma distribuição larga.

Como a separação de qualquer  $g$ -par na geometria euclídeana é independente do par somente quando  $g$  é uma translação, a partir deste exemplo, pode-se esperar que, em general, correlações de distância associadas a translações manifestam-se como picos nos HSP's; porém, correlações de distância associadas a outras isometrias (como a deste exemplo) não se manifestam como picos, mas como desvios suaves do histograma devido aos pares não correlacionados. Esta conjectura será provada a seguir. ■

Vamos usar agora elementos da teoria das probabilidades (veja por exemplo [91]) para mostrar que a descrição qualitativa das correlações de distância num HSP dada no exemplo anterior é válida num contexto geral, deixando evidente que esta descrição não depende das regras de construção do catálogo  $\mathcal{C}$ . O pressuposto geral no qual baseamos os cálculos é a existência de um coleção de catálogos comparáveis a algum catálogo  $\mathcal{C}$  dado (real ou simulado). Todos os catálogos da coleção possuem o mesmo número de fontes, e correspondem à mesma variedade  $M(t_0)$ . Portanto, as regras de construção de  $\mathcal{C}$  permitem o cálculo de probabilidades e valores esperados de quantidades que dependem das fontes em  $\mathcal{C}$ . As quantidades necessárias para o cálculo do **histograma de separação de pares esperado** (HSPE) são as seguintes:

1. O número esperado de pares de fontes observadas, separadas por uma distância quadrada em  $J_i$ , com  $J_i$  dado por (3.72). Este número é denotado por  $\eta_{exp}(s_i)$ .
2. A probabilidade que um  $g$ -par observado esteja separado por uma distância quadrada em  $J_i$ , denotada por  $F_g(s_i)$ .
3. O número esperado de  $g$ -pares observados, denotado por  $N_g$ .
4. A probabilidade que um par de fontes não correlacionadas observadas esteja separado por uma distância quadrada em  $J_i$ , denotada  $F(s_i)$ .

O nosso propósito agora é calcular  $\eta_{exp}(s_i)$ , pois o HPSE está dado, em clara analogia com (3.73), por

$$\Phi_{exp}(s_i) = \frac{2}{N(N-1)} \frac{1}{\delta_S} \eta_{exp}(s_i), \quad (3.76)$$

onde  $N$  é o número de fontes em  $\mathcal{C}$ . O HSPE carrega toda a informação relevante sobre as correlações de distância entre imagens observadas devidas ao grupo de recobrimento de  $M(t_0)$ , que em cada HPS individual encontram-se mascaradas pelo ruído estatístico, pois

$$\Phi(s_i) = \Phi_{exp}(s_i) + \text{ruído estatístico}, \quad (3.77)$$

onde  $\Phi(s_i)$  é o HSP construído com  $\mathcal{C}$  e dado por (3.73).

Considere agora  $K$  catálogos  $\mathcal{C}_k$  comparáveis com  $\mathcal{C}$ , cada um com  $N$  fontes e correspondendo à mesma variedade  $M$ . Como cada par de fontes em cada catálogo é um  $\Gamma$ -par ou um par não correlacionado, o número  $\eta_k(s_i)$  de pares de fontes em  $\mathcal{C}_k$  com separações quadradas em  $J_i$  é

$$\eta_k(s_i) = \eta_k^u(s_i) + \frac{1}{2} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \eta_k^g(s_i), \quad (3.78)$$

onde  $\eta_k^u(s_i)$  é o número de pares de fontes em  $\mathcal{C}_k$  não correlacionados (o índice  $u$  deve-se ao termo em inglês *uncorrelated*), com separações quadradas em  $J_i$ ; e  $\eta_k^g(s_i)$  é o número de  $g$ -pares em  $\mathcal{C}_k$  cujas separações quadradas estão em  $J_i$ .  $\tilde{\Gamma}$  é o grupo de recobrimento  $\Gamma$  sem o elemento neutro, e o coeficiente  $1/2$  no somatório é devido ao fato de que, ao considerarmos todas as isometrias de recobrimento não triviais, estamos contando cada  $\Gamma$ -par duas vezes, pois se  $(p, q)$  é um  $g$ -par, então  $(q, p)$  é um  $(g^{-1})$ -par.

Tomando o valor médio dos  $\eta_k(s_i)$  sobre os  $K$  catálogos temos

$$\langle \eta(s_i) \rangle = \langle \eta^u(s_i) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \langle \eta^g(s_i) \rangle, \quad (3.79)$$

onde

$$\langle \eta(s_i) \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \eta_k(s_i), \quad (3.80)$$

e expressões análogas valem para  $\langle \eta^u(s_i) \rangle$  e  $\langle \eta^g(s_i) \rangle$ . Como os valores esperados são os limites dos valores médios quando o número de amostras  $K$  tende para infinito, segue-se que o número esperado  $\eta_{exp}(s_i)$  pode ser decomposto nas suas partes não correlacionada e correlacionada como

$$\eta_{exp}(s_i) = \eta_{exp}^u(s_i) + \frac{1}{2} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \eta_{exp}^g(s_i), \quad (3.81)$$

onde  $\eta_{exp}^u(s_i)$  é o valor esperado dos pares não correlacionados de fontes observadas com separações quadradas em  $J_i$ , e  $\eta_{exp}^g(s_i)$  é o número esperado de  $g$ -pares observados cujas separações quadradas estão em  $J_i$ .

Por outro lado temos que

$$\eta_{exp}^g(s_i) = N_g F_g(s_i), \quad (3.82)$$

e

$$\eta_{exp}^u(s_i) = \left[ \frac{1}{2} N(N-1) - \frac{1}{2} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} N_g \right] F(s_i). \quad (3.83)$$

Como  $N_g$  é proporcional ao  $N$ , escrevemos também

$$N_g = N \nu_g, \quad (3.84)$$

com  $0 \leq \nu_g < 1$ . Usando (3.76) e (3.81)-(3.84) temos que

$$\Phi_{exp}(s_i) = \frac{1}{\delta_S} \left[ F(s_i) + \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \nu_g [F_g(s_i) - F(s_i)] \right], \quad (3.85)$$

onde a soma em (3.85) é uma soma finita pois  $\nu_g$  é não nulo somente para um número finito de isometrias.

Observe que se  $M$  é simplesmente conexo temos  $\tilde{\Gamma} = \emptyset$ , e o HSPE é então

$$\Phi_{exp}^{sc}(s_i) = \frac{1}{\delta_S} F(s_i). \quad (3.86)$$

Porém, na presença de isometrias (3.86) vale só aproximadamente, como mostram simulações reportadas em [48] [50], e portanto escrevendo

$$\Phi_{exp}^u(s_i) = \frac{1}{\delta_S} F(s_i) \quad \text{e} \quad \Phi_{exp}^g(s_i) = \frac{1}{\delta_S} F_g(s_i), \quad (3.87)$$

temos

$$\Phi_{exp}(s_i) = \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \frac{\nu_u}{N-1} [\Phi_{exp}^u(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i)] + \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \nu_g [\Phi_{exp}^g(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i)], \quad (3.88)$$

onde  $N_u$  é o número esperado de pares de fontes observadas não correlacionadas e  $\nu_u = 2N_u/N$ . Definindo a **assinatura topológica** como

$$\varphi^\Gamma(s_i) = \nu_u [\Phi_{exp}^u(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i)] + \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \nu_g [\Phi_{exp}^g(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i)], \quad (3.89)$$

temos portanto uma expressão mais descritiva para o HSPE, que é

$$\Phi_{exp}(s_i) = \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \frac{1}{N-1} \varphi^\Gamma(s_i). \quad (3.90)$$

Ou seja, o HSPE correspondente a uma variedade multiplamente conexa é o HSPE correspondente ao seu recobrimento universal mais um termo proporcional à assinatura topológica.

Agora, na aproximação<sup>9</sup>

$$\Phi_{exp}^{sc}(s_i) \approx \Phi_{exp}^u(s_i), \quad (3.91)$$

o HSPE é

$$\Phi_{exp}(s_i) \approx \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}} \nu_g [\Phi_{exp}^g(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i)]. \quad (3.92)$$

A relação (3.92) evidencia que (i) somente  $\Gamma$ -pares contribuem para a assinatura topológica em HSP's; e garante que (ii) a assinatura topológica surge no HSPE mesmo que existam poucas imagens múltiplas para cada objeto.

De (3.87) observamos que quando  $g$  é uma translação de Clifford temos

$$\Phi_{exp}^g(s_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } |g|^2 \notin J_i, \\ (\delta s)^{-1} & \text{se } |g|^2 \in J_i. \end{cases} \quad (3.93)$$

Segue-se de (3.89) e (3.90) que a contribuição de cada translação de Clifford  $g$  à assinatura topológica é um pico de amplitude  $\nu_g [(N-1)\delta s]^{-1}$  localizado no subintervalo  $J_{i_g}$ , menos um termo proporcional ao HSPE do recobrimento universal  $\Phi_{exp}^{sc}(s_i)$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Por outro lado, quando  $g$  não é uma translação de Clifford, a função distância  $\delta_g$  depende da posição do  $g$ -par de maneira suave porque é a composição de duas funções suaves: a métrica e a isometria  $g$  (veja o exemplo 3.9). Mais ainda, os valores que  $|g|$  assume espalham-se sobre um intervalo largo a partir de um valor mínimo, portanto  $F_g(s_i)$  será não nulo para muitos subintervalos  $J_i$ . Segue-se de (3.89) e (3.90) que os picos em HSP's se devem unicamente a translações de Clifford. Observe que este resultado continua válido independentemente da geometria ser euclideana, esférica ou hiperbólica, e independe também das regras de construção do catálogo. Mais ainda, particularizando a geometria obtemos dois resultados interessantes:

<sup>9</sup>Esta aproximação é justificada *a posteriori* na figura 3.7 para o caso de um toro. Veja também a observação 3.10.

1. Como existem variedades euclidianas que possuem as mesmas translações nos seus grupos de recobrimentos, HSP's destas variedades construídos a partir de catálogos comparáveis com o mesmo número de fontes, terão o mesmo espectro de picos de origem topológica, ou seja picos topológicos com as mesmas posições e amplitudes. Portanto, os picos topológicos não são suficientes para distinguir entre estas topologias.
2. Como não existem translações de Clifford na geometria hiperbólica (além da trivial é claro) segue-se que HSP's correspondentes a variedades hiperbólicas não apresentam picos topológicos.

Vamos agora apresentar um método prático para calcular, de maneira aproximada, o HSPE de um catálogo  $\mathcal{C}$ . De fato, como cada HSP individual possui flutuações estatísticas capazes de esconder consideravelmente a assinatura topológica, uma maneira simples de reduzir este ruído até níveis aceitáveis é usando o **histograma de separação de pares médio** (HSPM), que descrevemos a seguir. Suponha dados  $K$  catálogos comparáveis  $\mathcal{C}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ), com aproximadamente o mesmo número de fontes cósmicas e correspondendo à mesma variedade  $M(t_0)$ , e com HSP's dados por

$$\Phi_k(s_i) = \frac{2}{N_k(N_k - 1)} \frac{1}{\delta s} \sum_{s \in J_i} \eta_k(s), \quad (3.94)$$

onde  $N_k = \text{Card}(\mathcal{C}_k)$  e  $\eta_k(s)$  é dado por (3.71). O HSPM é definido por

$$\langle \Phi(s_i) \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Phi_k(s_i). \quad (3.95)$$

**Lema 3.1** *Sejam  $K$  catálogos  $\mathcal{C}_k$  comparáveis, com aproximadamente o mesmo número de fontes cósmicas e correspondendo à mesma variedade  $M(t_0)$ . No limite  $K \rightarrow \infty$ , o HSPM dos  $K$  catálogos é aproximadamente igual ao HSPE da coleção de catálogos com  $N$  fontes, ou seja*

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \langle \Phi(s_i) \rangle \approx \Phi_{exp}(s_i). \quad (3.96)$$

A aproximação (3.96) torna-se uma igualdade quando todos os  $K$  catálogos possuem o mesmo número fontes.

**Prova.** Seja

$$N_k = N + \Delta N_k$$

o número de fontes no catálogo  $\mathcal{C}_k$ . Como  $\Delta N_k$  é pequeno, expandimos a constante de normalização de (3.94) até primeira ordem em  $\Delta N_k$ ,

$$\frac{1}{N_k(N_k - 1)} \approx \frac{1}{N(N - 1)} - \frac{2N - 1}{[N(N - 1)]^2} \Delta N_k,$$

de maneira que o HSPM reduz-se, nesta aproximação, a

$$\langle \Phi(s_i) \rangle \approx \frac{2}{N(N-1)} \frac{1}{\delta s} \left[ \langle \eta(s_i) \rangle - \frac{2N-1}{N(N-1)} \langle \Delta N \eta(s_i) \rangle \right], \quad (3.97)$$

com

$$\langle \Delta N \eta(s_i) \rangle = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Delta N_k \eta^{(k)}(s_i).$$

Como as quantidades  $\Delta N_k$  e  $\eta^{(k)}(s_i)$  são estatisticamente independentes em um considerável grau de aproximação, temos

$$\langle \Delta N \eta(s_i) \rangle = \langle \Delta N \rangle \langle \eta(s_i) \rangle,$$

de modo que (3.97) é da forma

$$\langle \Phi(s_i) \rangle \approx \left[ 1 - \frac{2N-1}{N(N-1)} \langle \Delta N \rangle \right] \frac{2}{N(N-1)} \frac{1}{\delta s} \langle \eta(s_i) \rangle. \quad (3.98)$$

No limite  $K \rightarrow \infty$  temos que  $\langle \Delta N \rangle \rightarrow 0$  e  $\langle \eta(s_i) \rangle \rightarrow \eta_{exp}(s_i)$ . Portanto, na aproximação de primeira ordem em  $\Delta N_k$  obtemos (3.96). ■

**Observação 3.7** O HSPM contém muito menos ruído que um HSP individual, e carrega a mesma informação topológica. De fato, por estatística básica, as flutuações no HSPM são reduzidas por um fator proporcional a  $1/\sqrt{K}$  em relação a um único HSP. ■

**Observação 3.8** Obviamente, é impossível construir muitos catálogos reais e comparáveis de fontes cósmicas. Por outro lado, é muito fácil obter centenas ou até mesmo milhares de catálogos comparáveis gerados por computador, e portanto a construção de HSPM's é facilmente implementável em simulações. Disto desprende-se que o HSPM pode ser amplamente utilizado para estudar as características estruturais dos HSP's de maneira rotineira, e é isto o que faremos a seguir. Cabe observar que de (3.90) resulta que a amplitude da contribuição da assinatura topológica a um HSP decresce com o número de fontes no catálogo. Portanto ao construir HSPM's é muito conveniente usar catálogos *pequenos*, ou seja catálogos com um número pequeno de fontes. A experiência com estes gráficos sugere que valores entre  $N \approx 100$  e  $N \approx 200$  são recomendáveis. ■

### 3.3.2 Identificando picos topológicos

Nesta subseção e na seguinte estudamos a assinatura topológica das isometrias euclidianas em HSP's usando a técnica HSPM para reduzir o ruído estatístico inerente a HSP's individuais. Desta maneira é possível distinguir entre picos de origem topológica e picos



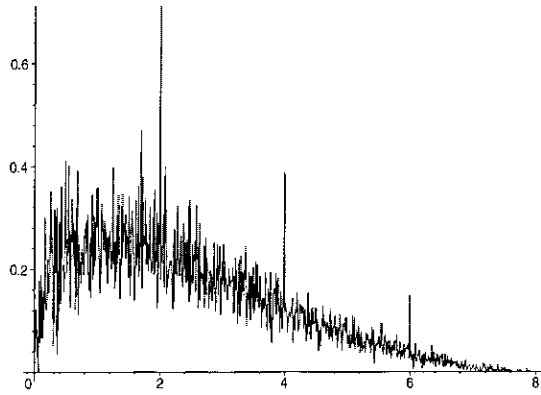


Figura 3.2: HSP para a variedade  $M$  de tipo  $\mathcal{G}_6$  descrita no texto, correspondendo a um universo observado de raio  $R = \sqrt{2}$  centrado na origem. O catálogo utilizado contém aproximadamente 240 fontes. O intervalo  $(0, 4R^2]$  foi subdividido em caixinhas de 0,01 de largura.

devido ao ruído estatístico. No que resta desta seção vamos utilizar regras de construção triviais, ou seja, consideraremos que as fontes estão uniformemente distribuídas no espaço, e que todas as fontes observáveis em  $\mathcal{U}$  são registradas nos catálogos; mais ainda, os catálogos corresponderão a levantamentos cobrindo todo o céu, desde um  $z_{min} = 0$  até um  $z_{max}$ . Estes pressupostos são suficientes para ilustrar os resultados gerais encontrados acima.

Vamos calcular HSPM's para uma variedade de classe  $\mathcal{G}_6$ , reduzindo o ruído estatístico até um nível que permita identificar o picos de origem topológica. Mostraremos, desta maneira, como (i) os picos estatísticos que poderiam ser confundidos com picos topológicos são removidos, e (ii) os picos topológicos que ficam escondidos por causa do ruído estatístico em HSP's individuais são revelados, mostrando que eles existem mesmo quando há poucos  $\Gamma$ -pares correspondentes. Além disso, ficará evidente a partir destas simulações, que a amplitude das contribuições à assinatura topológica das isometrias não translacionais é extremamente pequena em relação ao ruído, e portanto ela permanece inobservável no HSPM..

Seja  $M$  a variedade de classe  $\mathcal{G}_6$  com grupo de recobrimento  $\Gamma$  gerado pelas isometrias (C.18) com parâmetros  $a = 1$  e  $b = c = 1/\sqrt{2}$ . Esta variedade é descrita em detalhe na subseção C.2.3. Realizamos simulações para um universo observado  $\mathcal{U}$  de raio  $R = \sqrt{2}$ . Para cada simulação colocamos 20 objetos no poliedro fundamental, o que conduz a catálogos com aproximadamente 240 fontes. Na figura 3.2 apresenta-se um HSP para um destes catálogos, para o qual subdividimos o intervalo  $(0, 4R_i^2]$  em caixinhas de largura 0,01. Na figura 3.3 mostra-se um HSPM construído com 50 catálogos comparáveis ao catálogo usado para gerar o HSP da figura 3.2, com aproximadamente 240 fontes em cada um. Pode-se notar que, ao tomar a média sobre esta amostra de 50 catálogos o

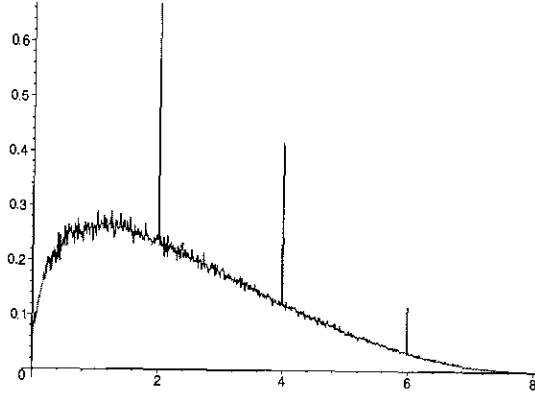


Figura 3.3: HSPM para uma variedade de tipo  $\mathcal{G}_6$  correspondendo a um universo observado de raio  $R = \sqrt{2}$ . O HSPM foi construído com uma amostra de 50 catálogos comparáveis ao catálogo usado para construir o HSP da figura 3.2, e com aproximadamente 240 fontes cada. O intervalo  $(0, 4R^2]$  foi subdividido em caixinhas de 0,01 de largura.

ruído estatístico foi consideravelmente reduzido. Observe agora que a equação (C.24) fornece a posição de qualquer pico topológico potencial em HSP's baseados em modelos de universo com  $M$  como seção espacial do espaço-tempo. O que determina se um dado pico vai aparecer ou não é o tamanho e a forma do universo observado  $\mathcal{U}$  correspondente ao catálogo usado para construir o HSP, ou seja a região explorada pelo levantamento de fontes ao construir o catálogo. Segue-se daqui que não existem picos de origem topológico em posições com  $s$  ímpar, pois  $|\rho(2k_1, 2k_2, n)|^2$  e  $|\mu(2k_1, 2k_2, n)|^2$  assumem sempre valores inteiros pares.

**Observação 3.9** O método de cristalografia cósmica está baseado fortemente no pressuposto de que as distâncias entre fontes cósmicas podem ser determinadas com grande precisão. Porém, em catálogos reais as coordenadas de uma fonte discreta são duas coordenadas angulares e o redshift da fonte. E o redshift é *transformado* em distância por meio da relação redshift-distância. Os erros na determinação das posições das fonte cósmica são, portanto, de três tipos,

1. Erros na medição dos parâmetros observacionais da posição, ou seja na posição angular e o redshift. Estes erros são inerentes ao processo de medição, e não vamos discutí-los aqui.
2. Erros na conversão de redshift para distância. Estes erros devem-se à imprecisão nos valores dos parâmetros cosmológicos, principalmente as densidades  $\Omega_{m0}$  e  $\Omega_{\Lambda0}$ .
3. Erros devidos às velocidades peculiares das fontes.

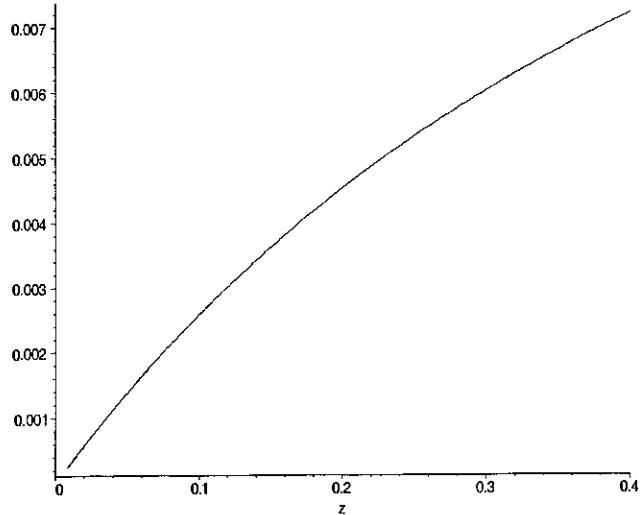


Figura 3.4: Erro percentual no quadrado da separação de pares em função do redshift, para duas fontes cósmicas com  $z_1 = z_2 = z$ , e  $\Omega_{m0}^{(r)} = 0,99$ .

No que segue vamos discutir o efeito das incertezas nos valores dos parâmetros cosmológicos, na presença de picos em HSP's correspondentes a modelos cosmológicos com seções espaciais localmente euclidianas. ■

Considere um modelo de universo com seções espaciais  $M(t)$ , e suponha que

1. A métrica do modelo é “quase” Einstein-de Sitter, ou seja  $\Omega_{m0}^{(r)} \approx 1$  e  $\Omega_{\Lambda 0}^{(r)} \approx 0$ ; onde o índice  $(r)$  indica que os valores dos parâmetros são os “reais”.<sup>10</sup>
2. O universo observado é o mesmo usado nas simulações anteriores, e a unidade de comprimento é tal que  $d_{hor} = 10$ . Em particular, da expressão (3.99), é fácil ver que  $c/H_0 \leq 5$ .
3. Foram feitas simulações de HSPM's transformando redshift a distância usando a “fórmula correta”

$$d^{(r)}(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1 + \Omega_{m0}^{(r)} [(1+x)^3 - 1]}}, \quad (3.99)$$

de modo que os picos topológicos aparecem nitidamente nos histogramas.

Observe que a expressão (3.99) e a unidade de comprimento escolhida determinam o valor  $z_{max}$  nos catálogos utilizados. De fato se por exemplo  $\Omega_{m0}^{(r)} = 0,9$  então  $z_{max} \approx 0,369$ .

Suponha agora que um indivíduo realiza simulações usando os mesmos catálogos, e a relação redshift-distância correspondente a um universo Einstein-de Sitter. Quão *quase*

<sup>10</sup>Vamos nos permitir, nas considerações a seguir, um certo abuso de linguagem, e chamar os parâmetros cosmológicos exatos no modelo de “reais”.

Einstein-de Sitter tem que ser o universo para que seus histogramas ainda apresentem picos? Para responder esta pergunta, suponha que duas fontes cósmicas com redshifts  $z_1$  e  $z_2$ , e separação angular  $\theta$ , formam um  $g$ -par, sendo  $g$  uma translação. Pela figura 3.2 temos que  $s = d_{12}^2 = 2, 4$  ou  $6$ , onde  $d_{12}$  é a separação das fontes. Usando a lei dos cossenos obtemos imediatamente

$$s = d^2(z_1) + d^2(z_2) - 2d(z_1)d(z_2) \cos \theta, \quad (3.100)$$

e portanto

$$\frac{\partial s}{\partial \Omega_{m0}} = 2 \left[ [d(z_1) - d(z_2) \cos \theta] \frac{\partial d(z_1)}{\partial \Omega_{m0}} + [d(z_2) - d(z_1) \cos \theta] \frac{\partial d(z_2)}{\partial \Omega_{m0}} \right]. \quad (3.101)$$

Observe que, em primeira ordem em  $\Omega_{m0}$ , temos,

$$s^{(r)} = s^{ES} - \frac{\partial s}{\partial \Omega_{m0}} \Big|_{\Omega_{m0}=1} (1 - \Omega_{m0}^{(r)}), \quad (3.102)$$

onde  $s^{(r)}$  e  $s^{ES}$  são as separações do par calculadas usando os parâmetros cosmológicos “reais”, e os de Einstein-de Sitter, respectivamente. Como estamos interessados apenas em estimativas do erro na determinação da separação de pares, vamos supor para simplificar que  $z_1 = z_2 = z$ . Então, usando (3.100), (3.101) e (3.102), temos que o erro percentual na separação de pares pode ser escrito simplesmente como

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{s^{ES}} &= \frac{2(1 - \Omega_{m0}^{(r)})}{d^{ES}(z)} \frac{\partial d(z)}{\partial \Omega_{m0}} \Big|_{\Omega_{m0}=1} \\ &= 2(1 - \Omega_{m0}^{(r)}) \left[ 1 - \frac{1}{7} \frac{(1+z)^{1/7} - 1}{(1+z)^3(\sqrt{1+z} - 1)} \right], \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde  $\Delta s = |s^{(r)} - s^{ES}|$ . A figura 3.4 é o gráfico deste erro para o caso  $\Omega_{m0}^{(r)} = 0,99$ . Observe que, como a largura das caixinhas nos histogramas das figuras 3.2 e 3.3 é  $\delta s = 0,01$ , então o erro porcentual para que a separação do  $g$ -par ainda contribua para o pico correspondente deve satisfazer

$$\frac{\Delta s}{s^{ES}} \leq \begin{cases} 0,0025 & \text{se } s^{(r)} = 2 \\ 0,00125 & \text{se } s^{(r)} = 4 \\ 0,00083 & \text{se } s^{(r)} = 6. \end{cases}$$

Agora, da figura 3.4 segue-se imediatamente que somente pares com redshifts  $z \leq 0,1$  satisfazem esta condição. Mas uma fonte com redshift  $z \leq 0,1$  está a uma distância  $d \leq 0,46$  do centro do domínio de Dirichlet de  $M(t_0)$ , e portanto dentro dele. Assim, não existem  $g$ -pares com igual redshift que contribuam aos picos nos PSH's se são usados os parâmetros cosmológicos de Einstein-de Sitter. Os resultados desta análise não mudam apreciavelmente se considerarmos o caso em que as fontes possuem redshifts diferentes. Em conclusão, um erro na determinação dos parâmetros cosmológicos de 1% tem como consequência a supressão dos picos nos histogramas de separação por pares.

### 3.3.3 HSP's com o mesmo espectro de picos

Nesta subseção vamos construir um HSPE para o toro minimal que recobre a variedade  $M$  de classe  $\mathcal{G}_6$  usada na subseção anterior, e vamos produzir o gráfico da diferença entre este HSPE e um HSPM de  $M$ . Como os grupos de recobrimento deste toro e de  $M$  possuem as mesmas translações, tem-se que os HSP's a partir de catálogos comparáveis com o mesmo número de fontes, para estas duas variedades, exibem o mesmo espectro de picos topológicos. Segue-se que a diferença entre o HSPE do toro minimal de recobrimento e um HSPM de  $M$  fornece a assinatura topológica das isometrias não translacionais de  $M$ , além, claro, do ruído estatístico devido ao uso de um HSPM de  $M$  no lugar do HSPE. As simulações apresentadas aqui mostram sem lugar a dúvidas que a identificação dos picos topológicos em HSP's não permite uma determinação unívoca da variedade que deu lugar ao histograma. Mostramos também qual é a cara da contribuição das isometrias não translacionais à assinatura topológica.

Vamos começar complementando a teoria para este fim. Seja  $\Gamma_t \subset \Gamma$  o subgrupo de todas as translações de Clifford de  $\Gamma$ . Para  $g \in \Gamma_t$  temos

$$\Phi_{exp}^g(s_i) = \frac{\delta_{i,i_g}}{\delta s}, \quad (3.104)$$

onde  $\delta_{i,i_g}$  é a delta de Kronecker,  $\delta s$  é a largura dos subintervalos (3.72), e  $i_g$  é a posição do pico devido à translação  $g \in \Gamma_t$ , ou seja  $|g|^2 \in J_{i_g}$ . Podemos então escrever (3.90) como

$$\Phi_{exp}(s_i) \approx \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \varphi_{exp}^t(s_i) + \varphi_{exp}^{nt}(s_i), \quad (3.105)$$

onde<sup>11</sup>

$$\varphi_{exp}^t(s_i) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \Gamma_t} \nu_g \left[ \frac{\delta_{i,i_g}}{\delta s} - \Phi_{exp}^{sc}(s_i) \right] \quad (3.106)$$

é a contribuição das translações de Clifford à assinatura topológica do HSPE, e

$$\varphi_{exp}^{nt}(s_i) \approx \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \Gamma \setminus \Gamma_t} \nu_g \left[ \Phi_{exp}^g(s_i) - \Phi_{exp}^{sc}(s_i) \right] \quad (3.107)$$

é a contribuição à assinatura topológica associada às isometrias não translacionais de  $\Gamma$ .

De (3.105) é evidente que variedades com as mesmas translações nos seus grupos de recobrimento exhibirão o mesmo espectro de picos dado por (3.106), sendo a diferença entre seus HSPE's a assinatura topológica associada às isometrias não translacionais. Mais ainda, devido a (3.105) podemos escrever

$$\varphi_{exp}^{nt}(s_i) \approx \Phi_{exp}(s_i) - \Phi_{exp}^{torus}(s_i), \quad (3.108)$$

<sup>11</sup>Estas relações são aproximadas pois estamos supondo a validade de (3.91). Este presuposto é plenamente justificado *a posteriori* pela figura 3.7. Veja também a observação 3.10.

com

$$\Phi_{exp}^{torus}(s_i) \approx \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \varphi_{exp}^t(s_i), \quad (3.109)$$

sendo  $\Phi_{exp}^{torus}(s_i)$  o HSPE do toro minimal que recobre  $M$ .

Agora, usando o fato que  $\langle \Phi(s_i) \rangle \approx \Phi_{exp}(s_i)$  obtemos uma outra expressão aproximada para a assinatura topológica das isometrias não translacionais de modelos de universo localmente euclidianos e pequenos,

$$\varphi_{exp}^{nt}(s_i) \approx \langle \Phi(s_i) \rangle - \Phi_{exp}^{torus}(s_i). \quad (3.110)$$

Esta expressão pode ser avaliada numericamente pois o HSPM é obtido mediante simulações por computador, e  $\Phi_{exp}^{torus}(s_i)$  é dado explicitamente por

$$\Phi_{exp}^{torus}(s_i) \approx \left( 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}_t} \nu_g \right) \Phi_{exp}^{sc}(s_i) + \frac{1}{\delta_s (N-1)} \sum_{g \in \tilde{\Gamma}_t} \nu_g \delta_{i, i_g}. \quad (3.111)$$

No que segue usaremos (3.110) e (3.111) para identificar o aspecto da assinatura das isometrias não translacionais de uma forma espacial euclideana. Usando resultados em [14] podemos calcular facilmente  $\Phi_{exp}^{sc}(s_i)$  para o caso de regras de construção triviais e uma bola de raio  $R$  como universo observado  $\mathcal{U}$ , obtendo

$$\Phi_{exp}^{sc}(s) = \frac{3}{32} \frac{\sqrt{s}}{R} \left( 2 - \frac{\sqrt{s}}{R} \right)^2 \left( 4 + \frac{\sqrt{s}}{R} \right) \Theta \left( 2 - \frac{\sqrt{s}}{R} \right), \quad (3.112)$$

onde  $\Theta$  é a função de Heaviside. Os coeficientes  $\nu_g$  podem ser calculados baseando-se em argumentos geométricos simples. De fato, a isometria  $g$  transforma isometricamente a bola  $g^{-1}(\mathcal{U})$  na bola  $\mathcal{U}$ , de modo que só as fontes em  $g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U}$  possuem um  $g$ -parceiro em  $\mathcal{U}$  e formam  $g$ -pares. Temos então

$$\nu_g = \frac{\text{Vol}(g^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U})}{\text{Vol}(\mathcal{U})}.$$

Uma conta simples mostra que

$$\nu_g = 1 - \frac{3}{4} \left( \frac{d_g}{R} \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{d_g}{R} \right)^3, \quad (3.113)$$

onde

$$d_g = \delta_g(\bar{0}, g\bar{0}),$$

ou seja,  $d_g$  é a distância do centro de  $\mathcal{U}$  até a sua imagem pela isometria  $g$ . O HSPE (3.111) pode então ser construído usando as expressões (3.112) e (3.113).

O grupo de recobrimento  $\Gamma_t$  do toro minimal  $T_M$  que recobre  $M$  é gerado pelas translações  $a = \alpha^2$ ,  $b = \beta^2$  e  $c = \beta^{-1}\delta$ , e o poliedro de Dirichlet deste toro é um paralelepípedo de altura 2 e base quadrada de lado  $\sqrt{2}$ . Como HSP's correspondentes a modelos de

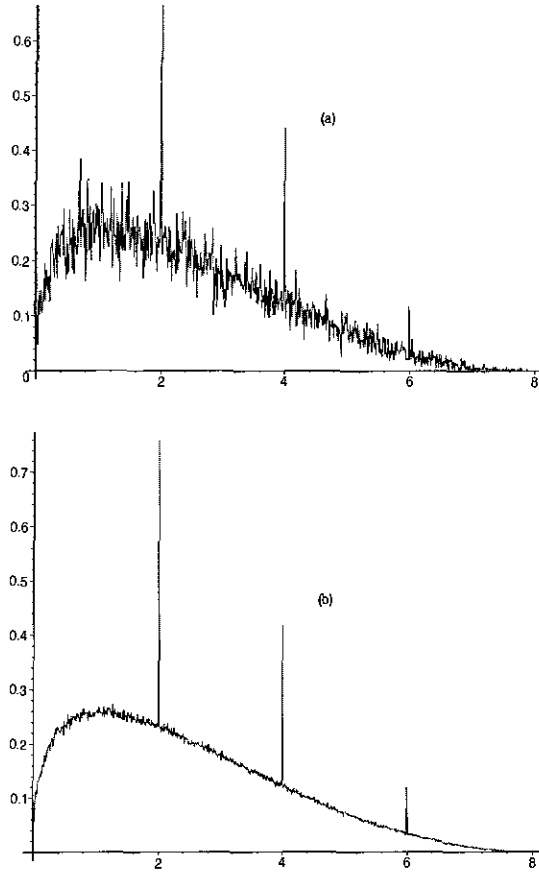


Figura 3.5: A parte (a) é um HSP e a parte (b) é um HSPM para o toro  $T_M$  que recobre a variedade  $\mathcal{G}_6$  correspondente às figuras 3.2 e 3.3. Todos os catálogos utilizados são compáveis com dos utilizados nestas figuras anteriores, e possuem aproximadamente 240 fontes cada um. Os intervalos  $(0, 4R^2]$  foi subdividido em caixinhas de 0,01 de largura. Observe que não existe nenhuma diferença relevante entre os histogramas da variedade  $\mathcal{G}_6$  e os do toro que a recobre, ilustrando o fato que o espectro de picos topológicos não é suficiente para diferenciá-los.

universo que possuem as mesmas translações nos seus grupos de recobrimento exibem o mesmo espectro de picos topológicos, então histogramas de  $M$  e de  $T_M$  não devem ser distinguíveis a partir de uma análise do espectro de picos apenas. Isto está ilustrado na figura 3.5 onde é mostrado um HSP, e um HSPM construído com 50 catálogos simulados em  $T_M$ . Todos os catálogos usados para construir os histogramas na figura 3.5 são comparáveis aos usados nas simulações feitas na subseção anterior, e possuem aproximadamente 240 fontes. Pode-se observar que não existe nenhuma diferença importante entre os histogramas correspondentes a  $M$  e os correspondentes a  $T_M$ , mesmo depois de ter reduzido o ruído tomando a média sobre uma amostra de 50 catálogos.<sup>12</sup> Assim, pela mera inspeção dos picos nos histogramas das figuras 3.2, 3.3 e 3.5, não é possível saber

<sup>12</sup>Uma inspeção mais detalhada mostra que o nível de ruído nos histogramas correspondentes a  $T_M$  é menor que nos histogramas correspondentes a  $M$ . Porém, como não podemos quantificar o ruído estatístico num histograma, esta informação não é de muita utilidade.

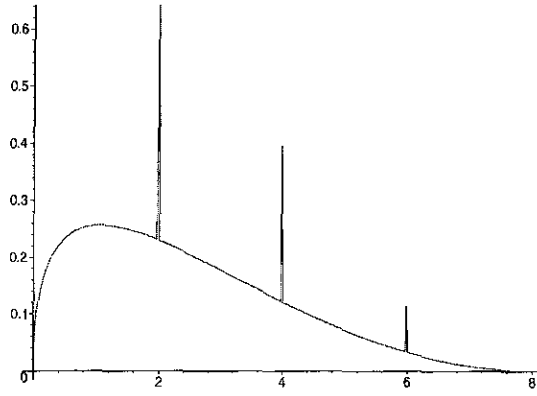


Figura 3.6: HSPE dado por (3.111) para toro  $T_M$  que recobre a variedade  $\mathcal{G}_6$  correspondente às figuras 3.2 e 3.3. A comparação entre o HSPE desta figura com o HSPM na figura 3.5(b) mostra a exatidão da técnica HSPM.

se foram construídos com catálogos em modelos de tipo  $\mathcal{G}_6$  ou do tipo  $\mathcal{G}_1$ . Em síntese, os picos de origem topológica não são suficientes para distinguir entre estas duas variedades porque elas possuem o mesmo conjunto de translações de Clifford no seus grupos de recobrimento.

Para examinar a assinatura topológica das isometrias não translacionais de  $M$  em Cristalografia Cósmica, e portanto, para poder distinguir entre  $M$  e  $T_M$ , faremos uso de (3.110) e (3.111). A figura 3.6 apresenta o gráfico de  $\Phi_{exp}^{torus}(s_i)$  dado por (3.111) para o caso de um universo observado de raio  $R = \sqrt{2}$ . A comparação entre este HSPE e o HSPM da figura 3.5 evidencia o poder da técnica de HSPM. Nas figuras 3.6 e 3.7 reduzimos o número de fontes de 240 a 120 para aumentar a amplitude da assinatura topológica das isometrias não translacionais, enquanto incrementamos a largura das caixinhas de 0,01 para 0,02 para manter a amplitude dos picos topológicos igual às simulações anteriores. As figuras 3.7a e 3.7b são gráficos de (3.110). O primeiro gráfico corresponde à diferença dada pela equação (3.110) com um HSPM para  $T_M$ , enquanto o segundo corresponde à mesma diferença, mas com um HSPM para  $M$ . Ambos HSPM's foram construídos tomando amostras de 5000 catálogos. Como os HSP's de ambas variedades possuem o mesmo espectro de picos topológicos, as diferenças dadas por (3.110) e apresentadas na figura 3.7 fornecem a assinatura topológica das eventuais isometrias não translacionais mais algum ruído estatístico remanescente. A figura 3.7a é essencialmente ruído estatístico, como esperado, pois um toro não possui isometrias não translacionais no seu grupo de recobrimento; já a figura 3.7b mostra a assinatura topológica das isometrias não translacionais de  $\Gamma$ .

**Observação 3.10** Da figura 3.7b pode-se ver que a amplitude da assinatura topológica das isometrias não translacionais é de aproximadamente uma ordem de grandeza menor



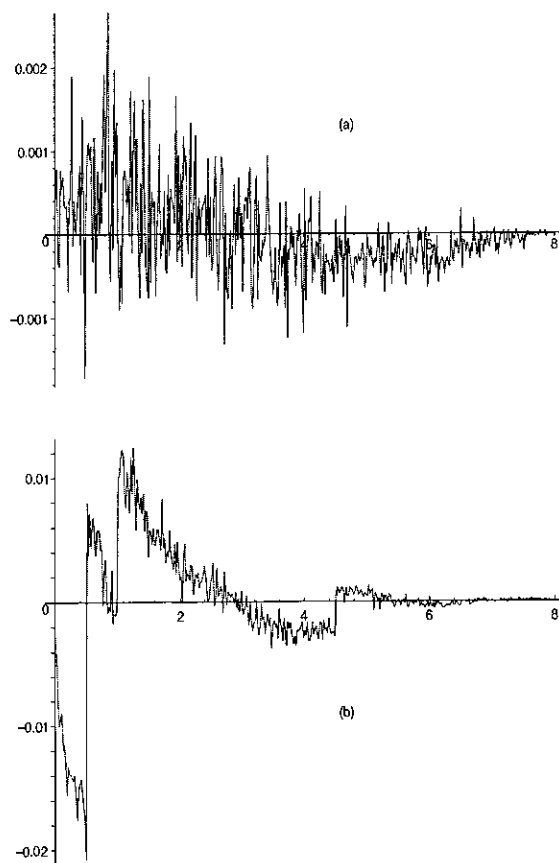


Figura 3.7: HSPM's correspondendo às assinaturas topológicas das isometrias não translacionais dadas por (3.110). A parte (a) corresponde ao toro  $T_M$  das figuras 3.5 e 3.6. Ambos HSPM foram construídos com amostras de 5000 catálogos com aproximadamente 120 fontes, e caixinhas de largura 0,02. Enquanto (a) exhibe essencialmente só ruído estatístico, (b) apresenta a assinatura topológica das isometrias não translacionais da variedade  $\mathcal{G}_6$ .

que a amplitude e o ruído estatístico de um HSP individual, como mostra a figura 3.2, de modo que esta assinatura dificilmente poderá ser extraída de um HSP individual construída com algum catálogo real. Tivemos sucesso em evidenciar esta pequena assinatura topológica nas nossas simulações, porque pudemos reduzir o ruído estatístico em duas ordens de grandeza usando a técnica HSPM. Por outro lado, a outra componente da assinatura topológica dada pela expressão exata (3.89), para o caso do toro  $T_M$ , tem uma amplitude, no mínimo, três ordens de grandeza menor que a amplitude do HSP, pois ela não se manifesta na figura 3.7a. Podemos esperar que esta componente correspondente a  $M$  seja da mesma ordem de grandeza, e portanto desprezível, justificando assim a aproximação (3.91). ■

Podemos obter um melhor entendimento das características estruturais exibidas na figura 3.7b, em particular a posição exata dos *saltos* da assinatura topológica das isometrias não translacionais, observando que, como  $\Gamma$  age livremente e de maneira discreta

$ g _{min}^2$	Tipo	$k_1$	$k_2 + n$	$n$
0.5	PI	-	0,-1	-
	II( $\rho$ )	-	-	0,1
	II( $\mu$ )	-	-	0,-1
1	IP	0,-1	-	-
4.5	PI	-	1,-2	-
	II( $\rho$ )	-	-	-1,2
	II( $\mu$ )	-	-	1,-2
9	IP	1,-2	-	-
12.5	PI	-	2,-3	-
	II( $\rho$ )	-	-	-2,3
	II( $\mu$ )	-	-	2,-3

Tabela 3.1: Primeiros cinco valores para  $|g|_{min}^2$ , e especificações do tipo de isometrias e valores dos parâmetros que as definem.

no espaço euclidiano, existe uma separação mínima não nula entre todos os  $g$ -pares, para cada  $g \in \tilde{\Gamma}$ , e portanto os termos  $\Phi_{exp}^g(s_i)$ , que aparecem na definição da assinatura topológica das isometrias não translacionais, equação (3.107), são zero até a  $i$ -ésima caixinha dada por  $|g|_{min}^2 \in J_i$ . Como pode ser inferido do exemplo 3.9, estas funções começam bruscamente nesta  $i$ -ésima caixinha, portanto pode-se esperar que a assinatura topológica das isometrias não translacionais apresentem estes saltos em posições bem definidas, que determinaremos no que se segue.

Observe que todas as isometrias não translacionais de  $\Gamma$  podem ser catalogadas em alguma das seguintes categorias, de acordo a se os parâmetros  $l$  e  $m$  em (C.23) são pares (P) ou ímpares (I):

**Tipo IP**  $l = 2k_1 + 1$  e  $m = 2k_2$ ,

**Tipo PI**  $l = 2k_1$  e  $m = 2k_2 + 1$ , e

**Tipo II**  $l = 2k_1 + 1$  e  $m = 2k_2 + 1$ ,

onde  $k_1$  e  $k_2$  são inteiros. Um cálculo simples, porém longo permite mostrar que

$$\begin{aligned}
|\rho(2k_1 + 1, 2k_2, n)|_{min}^2 &= (2k_1 + 1)^2, \\
|\mu(2k_1 + 1, 2k_2, n)|_{min}^2 &= (2k_1 + 1)^2, \\
|\rho(2k_1, 2k_2 + 1, n)|_{min}^2 &= 2(k_2 + n + 1/2)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mu(2k_1, 2k_2 + 1, n)|_{min}^2 &= 2(k_2 + n + 1/2)^2, \\
|\rho(2k_1 + 1, 2k_2 + 1, n)|_{min}^2 &= 2(n - 1/2)^2, \\
|\mu(2k_1 + 1, 2k_2 + 1, n)|_{min}^2 &= 2(n + 1/2)^2.
\end{aligned}$$

Destas equações é fácil ver que as contribuições das isometrias não translacionais à assinatura topológica começam bruscamente em  $s_i = 0.5, 1, 4.5, 9, 12.5 \dots$  (veja tabela 3.1). Um universo observável correspondendo a um levantamento cobrindo todo o céu, e de raio  $R = \sqrt{2}$  da lugar a contribuições não nulas de isometrias não translacionais com  $|g|_{min}^2 < 4R_1^2 = 8$ , e portanto a sua assinatura topológica deve apresentar saltos somente em  $s_i = 0.5, 1$  e  $4.5$ , conforme com a figura 3.7b.

# Capítulo 4

## Conclusões

*‘Would you tell me, please, which way I ought to go from here?’ ‘That depends a good deal on where you want to get to’, said the Cat. ‘I don’t much care where...’, said Alice. ‘Then it doesn’t matter which way you go’, said the Cat. ‘So long as I get somewhere’, Alice added as an explanation. ‘Oh, you’re sure to do that’, said the Cat, ‘If you only walk long enough.’*

*Lewis Carroll*

*Every sentence I utter must be understood not as an affirmation but as a question.*

*Niels Bohr*

Qual é a forma e o tamanho do Universo? As ferramentas matemáticas necessárias para uma formulação precisa e uma abordagem sistemática deste problema não fazem parte do acervo de conhecimentos que um físico, em geral, possui. Por este motivo, nesta tese apresentamos sucintamente e de maneira unificada os elementos da teoria do grupo fundamental e dos espaços de recobrimento (capítulo 1), e a teoria dos espaços localmente homogêneos e localmente isotrópicos, as chamadas formas espaciais (apêndice C). A teoria das formas espaciais é bastante técnica e sua leitura pode resultar bastante pesada, por este motivo foi colocada em um apêndice.

As formas espaciais são variedades riemannianas completas com curvatura seccional constante. No caso tridimensional, uma classificação completa das formas espaciais só pode ser feita em duas das três geometrias de curvatura constante. No caso euclidiano ( $k = 0$ ) existem classificações módulo difeomorfismos e módulo isometrias. No caso esférico ( $k = 1$ ) a classificação isométrica evidencia que ela é também uma classificação

difeomorfa. Já no caso hiperbólico ( $k = -1$ ), devido ao teorema de Mostow, a classificação difeomorfa é também uma classificação isométrica, porém ela permanece como um problema aberto. Para o caso hiperbólico então, fizemos somente alguns comentários sobre formas hiperbólicas tridimensionais.

A maior parte do conteúdo do capítulo inicial e do apêndice C encontra-se espalhada em diversas publicações, livros e revistas, tornando laborioso o seu estudo para quem está querendo iniciar-se neste tema. A intenção ao incluir nesta tese este material de natureza puramente matemática, foi a de facilitar o processo de aprendizado destas ferramentas, evitando que o leitor tivesse que recorrer a diferentes fontes de estudo, o que muitas vezes implica em ter que mudar de estilo de apresentação, notação, e muitas vezes, até enfoque das teorias matemáticas envolvidas. Por tanto, na seção 4.1 vamos nos restringir essencialmente a uma revisão crítica dos resultados dos capítulos 2 e 3. Finalmente, na seção 4.2 sugerimos algumas linhas de pesquisa que consideramos relevantes para a busca da topologia do Universo usando fontes discretas.

## 4.1 Discussão dos resultados

Se o nosso Universo é pequeno o céu deve apresentar múltiplas cópias de fontes cósmicas. Estas diferentes imagens de uma mesma fonte estão correlacionadas pelo grupo de recobrimento da variedade que descreve as seções espaciais do espaço-tempo, e sob condições adequadas devem estar sendo registradas em catálogos astronômicos. Portanto, a busca da topologia cósmica usando fontes discretas se reduz (i) à construção de métodos para extrair informação topológica do Universo a partir destes catálogos e, depois de desenvolvidos e testados tais métodos, (ii) à sua aplicação a catálogos reais para tentar extrair informação sobre o tamanho e forma do Universo.

Nesta tese discutimos em detalhe um de tais métodos, a Cristalografia Cósmica. Na subseção 4.1.1 apresentamos as conclusões que resultam desta tese relacionadas ao método de Cristalografia Cósmica. Na subseção 4.1.2 apresentamos outros resultados paralelos que surgem deste trabalho.

### 4.1.1 Resultados principais

A identificação direta de imagens múltiplas de um objeto cósmico possui problemas de ordem prática. Algumas das principais dificuldades são:

1. Duas imagens do mesmo objeto a distâncias distintas do observador correspondem a diferentes estágios na sua evolução. Como o mesmo objeto pode apresentar

uma morfologia diferente em cada um desses estágios, a identificação de imagens múltiplas é impossível sem algum modelo adequado da evolução do tipo de objeto em consideração.

2. Duas imagens do mesmo objeto são observadas segundo orientações diferentes, e o objeto pode apresentar uma morfologia diferente de acordo ao ângulo de visão.
3. As regras de seleção em muitos casos podem impedir a observação de uma ou mais cópias de uma mesma fonte, dificultando assim a identificação das isometrias do grupo de recobrimento das seções espaciais do Universo.

Estes problemas diminuem em grande medida se utilizarmos métodos estatísticos para detectar as correlações de distância que surgem devido à distribuição (quase) periódica das imagens observadas num catálogo que possua imagens múltiplas.

O método estatístico estudado em detalhe nesta tese é o método de Cristalografia Cósmica, e está baseado na busca das correlações de distância usando histogramas de separação de pares a partir de um catálogo de fontes discretas. Este método, porém sofre de duas limitações:

1. O método está baseado fortemente no suposto conhecimento das distâncias fonte-fonte e fonte-observador.
2. O método só é capaz de revelar a existência e a função distância das primeiras translações de Clifford do grupo de recobrimento da variedade que descreve as seções espaciais do nosso Universo. De fato, os gráficos de HSPM's apresentados na seção 3.3 indicam que a assinatura topológica das isometrias não translacionais é muito pequena para ser de utilidade prática na busca da topologia do nosso Universo.

A segunda limitação faz este método inadequado para detectar a topologia no caso que o Universo seja localmente hiperbólico, e além disso não permite distinguir entre duas variedades que possuam o mesmo subgrupo de translações de Clifford nos seus grupos de recobrimento. Já a primeira limitação é fatal para as aplicações do método a catálogos reais no momento, pois a presença de picos nos HSP's é fortemente sensível à precisão na determinação dos parâmetros de densidade usados na relação redshift-distância que transforma o redshift observado de cada fonte em distância da fonte ao observador.

Os valores mais prováveis para os parâmetros de densidade são  $\Omega_{m0} \approx 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda0} \approx 0,7$ , quando é imposto o vínculo  $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda0} = 1$  (veja por exemplo [92]). Como foi mostrado na subseção 3.3.2, usando catálogos de aglomerados de galáxias ( $z_{max} \approx 0,3$ ) é necessário atingir uma precisão maior que 1% na determinação de  $\Omega_{m0}$  para poder observar picos no

HSP, caso o Universo seja pequeno e localmente plano. Compare este valor com a precisão atual para  $\Omega_{m0}$  de aproximadamente 30%! [92]. É evidente que usando a relação redshift-distância com valores dos parâmetros cosmológicos atuais, os PSH's de catálogos reais dificilmente vão apresentar picos mesmo que nosso Universo seja pequeno e localmente euclidiano. Portanto, a ausência de picos nestes histogramas não implica na imposição de limites observacionais na forma e tamanho do nosso Universo. Em outras palavras, desta tese desprende-se que a Cristalografia Cósmica não é capaz de descartar modelos de Universo pequenos na escala de  $\approx 10^3 Mpc$ .

## 4.1.2 Outros resultados

Podemos mencionar alguns resultados secundários que se originam desta tese.

1. O poliedro de Dirichlet e as instruções de colagem de uma forma espacial que não é globalmente homogênea dependem fortemente do ponto escolhido como centro. Na subseção C.2.3 apresentamos um poliedro fundamental e instruções de colagem para uma forma espacial  $M$  de classe  $\mathcal{G}_6$ , e as duas formas espaciais não isométricas que recobrem  $M$  e são, por sua vez, recobertas por  $T_M$ , o toro minimal que recobre  $M$ . Mostramos que ambas as variedades são da classe  $\mathcal{G}_2$ . Porém não é trivial identificar uma delas como sendo parte desta família pois o poliedro de Dirichlet centrado na origem e as instruções de colagem correspondentes não são da forma canônica. A sua identificação dentro da classificação difeomorfa dada pelo teorema C.18 se faz calculando o primeiro grupo de homologia. Mostramos também como escolhendo convenientemente o centro do poliedro de Dirichlet, as novas instruções de colagem permitem a identificação desta variedade dentro desta classificação.
2. Existem sistemas físicos muito sensíveis ao espaço ambiente. Este tipo de sensibilidade, denominada de fragilidade topológica, foi estudada para um sistema formado por um oscilador harmônico acoplado a um campo escalar. Encontrou-se que a amplitude do oscilador aumenta assintoticamente de maneira exponencial com o tempo quando o espaço ambiente é localmente euclidiano, mas multiplamente conexo; em contraste com o decaimento exponencial da amplitude quando o espaço ambiente é o espaço euclidiano. Este exemplo fornece uma lição: não devemos subestimar o papel da topologia do espaço ambiente mesmo que o sistema físico em estudo seja simples.
3. Foi apresentada uma formalização do processo de construção de catálogos facilmente implementável em um programa de computador. Este algoritmo leva em

consideração a região do céu explorada pela coleta de dados (o universo observado), a distribuição das fontes cósmicas no espaço e as regras de seleção, que estabelecem quais das fontes observáveis são, de fato, observadas e portanto registradas no catálogo. Foram também determinadas as condições necessárias para que um levantamento seja profundo, de modo que existam imagens múltiplas de fontes cósmicas no universo observado através do levantamento. É importante observar que para que em um catálogo existam pares de fontes correlacionadas, o levantamento que deu lugar ao catálogo deve ser profundo, e as regras de seleção não devem ser muito restritivas de modo a suprimir o registro de muitas fontes observáveis.

4. A técnica HSPM empregada para reduzir o ruído estatístico em HSP's individuais é um método bastante apropriado para identificar assinaturas topológicas de isometrias não translacionais somente em catálogos simulados. Além disso, esta metodologia pode ser igualmente utilizada para modelos baseados em variedades esféricas e hiperbólicas (veja por exemplo [48]).

## 4.2 Perspectivas

O método estudado nesta tese para identificar a topologia do nosso Universo, a Cristalografia Cósmica, não é adequado para este propósito no momento. Nesta seção sugerimos algumas estratégias para desenvolver novos métodos, à primeira vista mais adequados, para extrair uma assinatura topológica a partir de catálogos de fontes discretas.

### 4.2.1 Conexão entre curvatura e topologia

A conexão entre curvatura e topologia foi colocada num contexto cosmológico pela primeira vez por Bernshteĭn e Shvartsman [10], e estudada com mais detalhe por Roukema e Luminet [96]. A análise feita em [96] é baseada na escolha de um candidato a seção espacial do universo (SEU) e os métodos usados são, em princípio, capazes de determinar os parâmetros de curvatura com muita precisão. Porém, os candidatos a SEU's existentes atualmente não são robustos, pois estão baseados em identificações de imagens individuais [95], ou identificações de configurações de quasares usando catálogos necessariamente incompletos [94] (para uma discussão crítica do uso de quasares em topologia cósmica veja a subseção 4.2.3).

A conexão entre curvatura e topologia sugere, porém, uma estratégia bastante interessante esquematizada a seguir. Se desenvolvermos métodos para achar candidatos a SEU's, e acharmos alguns candidatos robustos, podemos usá-los para determinar valores preci-



so nos parâmetros de curvatura como sugerido em [96]. Depois, com os parâmetros de curvatura determinados com os candidatos a SEU's aplicaríamos algum método de busca topológica baseado em correlações de distância (Cristalografia Cósmica, por exemplo) a algum catálogo real de fontes discretas. A assinatura topológica obtida pela aplicação deste último método deve coincidir com a assinatura topológica predita pelo candidato a SEU, desta maneira seria possível eliminar vários dos candidatos, e em última instancia determinar a forma e tamanho do Universo.

Como os métodos para procurar candidatos a SEU's baseados em identificações de imagens ou configurações de imagens, e os métodos baseados em correlações de distância não são adequados, sugerimos desenvolver métodos baseados em correlações angulares para determinar a estrutura algébrica do grupo de recobrimento  $\Gamma$  do candidato a SEU, e usar este grupo para determinar os parâmetros de curvatura.<sup>1</sup> De fato, como foi apontado por Bernshteĭn e Shvartsman em [10], a estrutura algébrica de  $\Gamma$  determina o sinal da curvatura espacial do espaço-tempo no caso do candidato a SEU ser compacto, pois se

1.  $\Gamma$  é finito, então  $k = 1$ . De fato,  $Isom S^3 = SO(4)$  é compacto, de modo que qualquer subgrupo discreto de isometrias da esfera  $S^3$  é necessariamente finito.
2.  $\Gamma$  possui um subgrupo comutativo com três geradores independentes, então  $k = 0$ , pois toda forma espacial euclideana compacta é recoberta por um toro.
3.  $\Gamma$  é infinito e qualquer subgrupo comutativo não possui mais de dois geradores independentes, então  $k = -1$ .

Devido aos teoremas de classificação das formas espaciais euclidianas e esféricas, se  $k = 0$  a estrutura algébrica de  $\Gamma$  permite identificar o candidato a SEU módulo difeomorfismo, e se  $k = 1$  a estrutura algébrica de  $\Gamma$  permite identificar o candidato a SEU univocamente, exceto no caso de  $\Gamma$  ser cíclico, onde teríamos vários candidatos: os espaços lente. Por último, no caso hiperbólico o teorema de Mostow e a extensa lista de variedades hiperbólicas contida no censo de Hodgson-Weeks permitiria a identificação de vários candidatos a SEU. Porém, a existência de seqüências de variedades hiperbólicas compactas acumulando-se em variedades com pontas pode tornar muito difícil uma identificação unívoca.

Nos casos  $k \neq 0$  a desigualdade  $\rho_{max} < \rho_{hor}$ , onde  $\rho_{max}$  é a maior distância em unidades do raio de curvatura determinada por  $\Gamma$ , estabelece um limite superior ao raio de curvatura do Universo (subseção 3.2.4). Por outro lado, um limite inferior ao raio de curvatura existe devido aos valores observacionais dos parâmetros cosmológicos (observação 3.2).

---

<sup>1</sup>Um método potencialmente útil para este propósito é brevemente descrito na subseção 4.2.2.

Assim, se o nosso Universo é hiperbólico ou esférico, a determinação dos parâmetros de curvatura fica grandemente reduzido pela existência destes limites. Já no caso euclidiano, o espaço de parâmetros é unidimensional (supondo, claro, que os parâmetros de curvatura sejam apenas  $\Omega_{m0}$  e  $\Omega_{\Lambda0}$ ), e portanto pode ser usado o método de Cristalografia Cósmica varrendo todas as possibilidades dentro do intervalo compatível com as observações atuais.

## 4.2.2 Correlações angulares

Toda a estratégia descrita na subseção anterior depende fortemente do desenvolvimento de algum método capaz de determinar uma apresentação combinatória de  $\Gamma$ . Vamos sugerir agora como isto pode ser feito usando correlações angulares entre fontes discretas. Os métodos de busca da topologia usando as anisotropias da radiação cósmica de fundo estão baseados em correlações angulares. O método que propomos é uma mistura de (i) a proposta de Cornish, Spergel e Starkman [26] que consiste em identificar círculos com o mesmo padrão de anisotropia da radiação na superfície do último espalhamento, e (ii) uma modificação do método de Coleta de Pares Correlacionados (CPC) sugerido em [115]. Vamos descrever primeiro a versão original do método CPC para depois modificá-lo de modo que seja capaz de revelar correlações angulares entre fontes discretas.

Seja  $\mathcal{C}$  um catálogo de fontes discretas com  $N$  fontes, e  $P = N(N - 1)/2$  o número de pares de fontes no catálogo. O método CPC consiste das seguintes etapas.

1. Computar as  $P$  distâncias  $d(p, q)$ , com  $p, q \in \mathcal{C}$  e  $p \neq q$ .
2. Ordenar as  $P$  distâncias numa lista  $\{d_i\}_{1 \leq i \leq P}$  tal que

$$d_i \leq d_{i+1}.$$

3. Criar uma lista de *incrementos*  $\{\Delta_i\}_{1 \leq i \leq P-1}$ , onde

$$\Delta_i = d_{i+1} - d_i.$$

4. Definir o índice CPC por

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{N}}{P - 1},$$

onde  $\mathcal{N} = \text{Card}\{i : \Delta_i = 0\}$ .

Numa situação mais realista o índice CPC é substituído por

$$\mathcal{R}_\epsilon = \frac{\mathcal{N}_\epsilon}{P - 1},$$

onde  $\mathcal{N}_\epsilon = \text{Card}\{i : \Delta_i \leq \epsilon\}$ , e  $\epsilon > 0$  é um parâmetro que quantifica erros na determinação das posições das fontes do catálogo.

Se nosso Universo for grande, então a probabilidade de dois pares de fontes estarem separados pela mesma distância é nula, e portanto  $\mathcal{R} \approx 0$ . Já num universo pequeno, dado  $g \in \Gamma$ , se  $p$  e  $q$  são fontes no catálogo, e  $gp$  e  $gq$  também estão no catálogo, então (i) os pares  $(p, q)$  e  $(gp, gq)$  estão separados pela mesma distância, e (ii) se  $g$  é uma translação de Clifford, os  $g$ -pares  $(p, gp)$  e  $(q, gq)$  também estão separados pela mesma distância. Segue-se que se o catálogo  $\mathcal{C}$  possui imagens múltiplas, então  $\mathcal{R} > 0$ , ou seja o índice CPC é um bom indicador da presença de uma topologia não trivial no Universo.

Observe que o uso de parâmetros cosmológicos *falsos* na passagem de redshift para distância implica na determinação de distâncias diferentes das reais, e portanto destrói as correlações de distância. Segue-se que usando parâmetros *falsos* obtemos  $\mathcal{R} \approx 0$  mesmo no caso do Universo ser pequeno. Já o uso dos *verdadeiros* parâmetros cosmológicos fornece  $\mathcal{R} > 0$ , e portanto o índice CPC permite, em princípio, uma determinação precisa dos parâmetros cosmológicos. A principal desvantagem do método CPC é que não dá nenhuma informação sobre a identidade do candidato a SEU, a não ser a de que o SEU tem topologia não trivial.

Suponha agora que o catálogo  $\mathcal{C}$  é decomposto em  $K$  subcatálogos  $\{\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)\}_{i=1, \dots, K}$ , onde cada  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$  é formado por todas as fontes de  $\mathcal{C}$  com redshift no intervalo  $(z_i - \frac{\delta z_i}{2}, z_i + \frac{\delta z_i}{2}]$ , e a largura  $\delta z_i$  de cada subintervalo é escolhida de modo a fornecer uma largura na escala temporal aproximadamente constante (veja a subseção 4.2.3). Aplicando o método CPC a cada um destes catálogos obtemos um índice que depende de  $z$ ,  $\mathcal{R}(z_i)$ . Mais ainda, como o universo observado correspondente a cada catálogo é um casquete esférico muito fino, podemos substituir as distâncias entre pares de fontes por separações angulares, obtendo deste modo um método de busca da topologia usando correlações angulares, e portanto independente dos parâmetros cosmológicos, e válido, em princípio, para qualquer geometria de curvatura constante.

Para catálogos  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$  correspondentes a levantamentos não profundos temos que  $\mathcal{R}(z_i) \approx 0$ . Já para catálogos  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$  correspondentes a levantamentos profundos,  $\mathcal{R}(z_i) > 0$ , e portanto a assinatura topológica deste método, a função  $\mathcal{R}$ , é um gráfico que é nulo para os primeiros valores  $z_i$ , e positivo a partir de um redshift  $z_{lim}$ . Este valor de  $z_{lim}$  é o valor de redshift mínimo para levantamentos profundos (veja a subseção 3.2.2).

Se para certo catálogo  $\mathcal{C}$  o índice  $\mathcal{R}$  é positivo a partir de certo  $z_{lim}$ , é possível isolar os pares correlacionados e desenhá-los sobre uma esfera. Mediante um ajuste de curvas, então, é possível reconhecer os pares de círculos identificados de maneira análoga ao método proposto por Cornish, Spergel e Starkman em [26], e a partir daqui podemos utilizar alguma adaptação do algoritmo de Weeks [118] para construir uma apresentação combinatória de  $\Gamma$ , obtendo desta maneira um candidato a SEU robusto para ser usado

no programa descrito na subseção 4.2.1. De fato, a cada par de círculos identificados corresponde uma isometria (elemento de  $\Gamma$ ). Com um número suficiente de pares de círculos é possível iniciar uma busca de relações em  $\Gamma$ , e em última instancia determinar sua estrutura algébrica (apresentação combinatória). Com esta apresentação de  $\Gamma$  pode-se, então identificar o sinal da curvatura e, possivelmente, a topologia do espaço.

### 4.2.3 Catálogos com galáxias de núcleo ativo

As galáxias de núcleo ativo (GNA) são os objetos astronômicos mais luminosos conhecidos no Universo. Existe uma grande diversidade de objetos cósmicos classificados como GNA's: quasares, rádio galáxias, objetos BL-Lac, galáxias de Seifert. Porém, no presente acredita-se que todas elas (ou pelo menos uma grande parte) são manifestações do mesmo tipo de objeto cósmico, e a sua aparente diversidade deve-se à orientação da GNA em relação à nossa linha de visão (veja por exemplo [33, 117, 120]). Devido à sua alta luminosidade intrínseca elas podem ser observadas a distâncias muito grandes e, portanto, com valores altos de redshift. Valores típicos de redshifts de GNA's variam entre  $z \approx 2$  e  $z \approx 3$ , embora tenham sido observadas também GNA's com  $z > 5$  [19, 39, 80]. Isto faz das GNA's fontes discretas interessantes para serem utilizadas na busca da topologia do Universo. Porém, as GNA's sofrem de um defeito, a primeira vista, devastador: elas possuem um tempo de vida muito curto. De fato, o tempo de vida de uma GNA típica é estimado em  $0,05Gyr$  [33, 52, 71].

Para calcular o intervalo de redshift  $\Delta z$  correspondente a um intervalo de tempo equivalente ao tempo estimado de vida de uma GNA, derivamos a relação redshift-tempo retrógrado (3.47) em relação a  $z$ ,

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \tau'(z)\Delta z \\ &= \frac{1}{H_0} [\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda 0} - (\Omega_0 - 1)(1+z)^2]^{-1/2} \frac{\Delta z}{1+z}. \end{aligned}$$

Tomando como parâmetros cosmológicos  $H_0 = 70 \text{ kms}^{-1}/\text{Mpc}$ ,  $\Omega_{m0} = 0,3$  e  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,6$ , e considerando os valores típicos  $z = 2$  e  $\Delta\tau = 0,05Gyr$  para GNA's, obtemos

$$\Delta z \approx 0,03. \quad (4.1)$$

A interpretação deste resultado é muito simples. Primeiro suponha que uma galáxia possua duas imagens com redshifts  $z_1 = 1$  e  $z_2 = 2$ . A primeira fonte emitiu a luz que está sendo observada hoje há  $\tau(z_1) = 8,07Gyr$ , enquanto que a segunda fonte emitiu a luz que está sendo observada hoje há  $\tau(z_2) = 10,66Gyr$ . Portanto, o intervalo de tempo entre as duas emissões de luz é  $\Delta\tau = 2,59Gyr$ . É claro que se a galáxia é observada

como sendo uma GNA com  $z = 2$ , então ela será observada como uma galáxia normal com  $z = 1$ , pois o tempo de vida típico de uma GNA é bem menor que  $2,59Gyr$ . Assim, uma das imagens (aquela com  $z = 1$ ) não aparecerá no catálogo de GNA's. O intervalo de redshift (4.1) é a maior diferença entre os redshifts de duas imagens de uma mesma galáxia com  $z \approx 2$  para que, se uma das imagens é uma GNA, a outra também o seja.

Em conclusão, ao usar GNA's como fontes discretas na busca da topologia do Universo devemos nos restringir a catálogos correspondentes a universos observados com redshift (quase) constante. Este é justo o tipo de catálogos utilizados no método de correlações angulares sugerido na subseção anterior. Deve-se observar, no entanto, que ao limitar o universo observado a cascas esféricas o número de fontes em cada catálogo  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$  é grandemente reduzido. De fato, assumindo, para fins ilustrativos, uma distribuição homogênea de GNA's no universo (ou seja uma distribuição independente de  $z$ ), e denotando por  $N_i$  o número de fontes no catálogo  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$ , e por  $N$  o número de fontes no catálogo original  $\mathcal{C}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{N_i}{N} &\approx \frac{Vol(\mathcal{U}_i)}{Vol(\mathcal{U})} \\ &\approx \frac{3\Delta d(z_i)}{d(z_i)}, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{U}_i$  é o universo observado correspondente ao catálogo  $\mathcal{C}(z_i, \delta z_i)$ , e  $\mathcal{U}$  é o universo observado correspondente ao catálogo  $\mathcal{C}$ , e estamos considerando que o catálogo  $\mathcal{C}$  foi construído a partir de um levantamento cobrindo todo o céu. Adotando os mesmos valores dos parâmetros cosmológicos usados para calcular (4.1), obtemos que para  $z_i = 2$  e  $\Delta z_i = 0,03$ ,  $N_i/N \approx 2,5\%$ . Ou seja, se o catálogo  $\mathcal{C}$  possui 1000 fontes, o catálogo  $\mathcal{C}(z_i \approx 2, \delta z_i \approx 0,03)$  possuirá aproximadamente 25 fontes.

Os catálogos atuais de GNA's potencialmente úteis para topologia cósmica possuem menos de 2000 fontes [53]. O maior esforço atual que está sendo feito para construir um catálogo de GNA's é o Sloan Digital Sky Survey (SDSS), que pretende coletar espectros de aproximadamente  $10^5$  GNA's com redshifts de até  $z \approx 6$  [70]. Porém o universo observado deste catálogo corresponde a somente 25% do céu, e portanto não é claro se este catálogo será de uso em topologia cósmica. Contudo, considerável trabalho teórico e computacional será necessário antes de podermos determinar (i) quais são as limitações do método CPC com correlações angulares usando GNA's, e (ii) que características deve ter um catálogo para poder ser utilizado no contexto deste método.

#### 4.2.4 Geração automática de catálogos simulados

Seria muito conveniente se pudéssemos contar com vários métodos que permitam detectar a topologia do Universo para fazermos testes de consistência, caso apareçam vários candidatos a SEU. Porém o desenvolvimento de cada método envolve muito trabalho computacional. De fato, para testar algum método de busca da topologia do Universo (i) seleciona-se um modelo cosmológico, ou seja um conjunto de parâmetros cosmológicos e uma variedade  $M$  (com grupo de recobrimento  $\Gamma$ ) representando as seções espaciais do espaço-tempo, (ii) selecionam-se regras de construção e determina-se o universo observado, (iii) geram-se catálogos segundo estas regras de construção, e finalmente (iv) aplica-se o método que está sendo estudado a cada um destes catálogos. É fácil ver que as duas últimas etapas que envolvem muito cálculo numérico.

Como a geração de catálogos é essencialmente independente do método que está sendo testado, pode ser muito útil e conveniente dispor de um programa de geração automática de catálogos. Num programa deste tipo os dados de entrada seriam os parâmetros do modelo cosmológico, um conjunto de geradores de  $\Gamma$ , a posição do observador dentro de  $M$  (quando não for globalmente homogênea), um conjunto de regras de construção e uma descrição do universo observado. O programa, por sua vez, daria como saída uma lista de fontes cósmicas fornecendo para cada uma delas (i) a posição angular, (ii) a distância da fonte ao observador ou redshift (segundo convenha) e (iii) quaisquer outras características que o método que está sendo estudado venha a precisar.

Contudo, a parte do processo de geração de catálogos de fontes discretas que independe do método de busca topológica, consiste na elaboração da lista das posições das fontes cósmicas. Este processo consiste, esquematicamente, das seguintes etapas:

1. Construção do poliedro de Dirichlet  $\mathcal{D}$  com centro em uma imagem do observador no recobrimento universal de  $M$ .
2. Construção, usando as isometrias de recobrimento de  $M$ , das cópias de  $\mathcal{D}$  que interceptam o universo observado. Chamemos estes poliedros de PF secundários.
3. Geração das imagens das fontes cósmicas em  $\mathcal{D}$  segundo a distribuição de matéria dada pelas regras de construção.
4. Geração, usando as isometrias de recobrimento de  $M$ , das imagens que estão na interseção dos PF secundários com o universo observado.
5. Geração do catálogo, registrando somente aquelas fontes que satisfazem todas as regras de seleção.

6. Transformação da distância radial, de cada fonte no catálogo, em redshift usando os parâmetros cosmológicos (Opcional).

É conveniente aclarar o que estamos querendo dizer com “construção” de um poliedro. Devido ao lema C.3, a construção do poliedro de Dirichlet  $\mathcal{D}$  é equivalente à determinação das isometrias  $g_F$  das instruções de colagem. Portanto, o problema algébrico a ser resolvido no item 1 é o de determinar o conjunto de geradores  $\{g_F \in \Gamma : F \text{ é uma face de } \mathcal{D}\}$ , ou geometricamente, por (C.9), o conjunto dos semi-espacos essenciais para  $\mathcal{D}$ . Em relação ao item 2, é possível calcular as relações entre os geradores  $g_F$  usando o lema C.4. Os ciclos de arestas e as relações entre os geradores  $g_F$  são usadas para construir uma cobertura do universo observado com poliedros fundamentais (cópias de  $\mathcal{D}$ ). Finalmente, a lista das isometrias  $g \in \Gamma$  que levam  $\mathcal{D}$  em cada um destes PF secundários é toda a informação que se precisa para implementar posteriormente o item 4.

A implementação dos outros itens é relativamente simples e não será comentada aqui.

# Apêndice A

## As geometrias clássicas

*Se esta é uma linha reta [mostrando à audiência uma linha reta desenhada com uma régua], então necessariamente a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos; e reciprocamente, se a soma não é igual a dois ângulos retos, então o triângulo não é retilíneo.*

*Aristóteles*

*A Geometria não é verdadeira, ela é vantajosa.*

*Henri Poincaré*

Historicamente, a primeira geometria, e virtualmente a única em quase 5000 anos da história da humanidade, foi a geometria euclideana que, formulada na sua forma sintética ou axiomática, é baseada nos famosos cinco postulados de Euclides. Com o advento das geometrias não euclidianas no início do XIX abriu-se uma nova era na matemática, e por conseguinte, na formulação de teorias físicas.

As geometrias não euclidianas, na sua formulação sintética, estão baseadas na substituição do quinto postulado de Euclides. Uma das muitas maneiras equivalentes de formular o quinto postulado de Euclides é em termos de paralelas: *por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela a esta*. Substituindo este postulado pela afirmação de que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela a esta, chega-se à geometria esférica. Por outro lado, substituindo o quinto postulado pela afirmação de que por um ponto fora de uma reta passam infinitas paralelas a esta chega-se à geometria hiperbólica.

A formulação sintética de uma geometria, baseada em axiomas e definições de conceitos geométricos, é muito onerosa e pouco prática do ponto de vista das aplicações na



física. A moderna geometria riemanniana permite a formulação destas geometrias em termos algébrico-analíticos, uma herança da formulação cartesiana da geometria euclideana. Esta formulação moderna está baseada no conceito de distância e de transformações que preservam esta distância, as isometrias, e é o ponto de vista adotado neste trabalho. As seções A.2, A.3 e A.4 são dedicadas a apresentar, seguindo este enfoque, as três geometrias clássicas e alguns resultados relevantes para a cosmologia.

Uma característica da formulação métrica das geometrias clássicas, e que constitui uma clara vantagem do ponto de vista das aplicações em cosmologia, é que deixa evidente a natureza limite da geometria euclideana em relação às geometrias esférica e hiperbólica. Os conceitos de métrica e paralelismo em geometria riemanniana levam naturalmente aos conceitos de curvatura, e particularmente ao de curvatura seccional. Acontece que a geometria esférica é uma geometria com curvatura seccional constante positiva, enquanto que a geometria hiperbólica é uma geometria com curvatura seccional constante negativa. Cada uma destas geometrias constitui, na realidade, uma família de geometrias parametrizadas pelo valor da sua curvatura seccional. A geometria euclideana, sendo uma geometria com curvatura seccional nula, é vista como caso limite das famílias de geometrias não euclidianas quando o valor da curvatura seccional se anula. Sob o pressuposto que nosso Universo é localmente homogêneo e isotrópico, a pergunta: Qual é a geometria que descreve melhor o nosso Universo? pode ser reformulada como: Qual é a curvatura (seccional) do nosso Universo?

Neste apêndice apresentamos uma breve introdução às três geometrias clássicas: a geometria euclideana, a esférica e a hiperbólica. Na primeira seção revisamos algumas definições relevantes sobre espaços métricos. Nas seções A.2, A.3 e A.4 estudamos as três geometrias clássicas. Para cada geometria enunciamos teoremas que caracterizam o seu grupo de isometrias, e suas geodésicas. O conteúdo deste apêndice está baseado no livro [87], onde o leitor interessado poderá encontrar detalhes e demonstrações de todos os enunciados apresentados aqui.

## A.1 Espaços métricos

Antes de passar ao estudo das geometrias não euclidianas, é conveniente lembrar algumas definições sobre espaços métricos. Uma **métrica** num conjunto  $X$  é uma função  $d : X \times X \rightarrow R$  que é não negativa, não degenerada, simétrica, e que satisfaz a desigualdade triangular, ou seja, tal que para todo  $x, y, z \in X$ ,

1.  $d(x, y) \geq 0$ .

2.  $d(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

Um **espaço métrico** é um par  $(X, d)$ , onde  $X$  é um conjunto qualquer, e  $d$  é uma métrica em  $X$ . Em muitos casos a métrica em  $X$  fica clara do contexto, e portanto chama-se o próprio conjunto  $X$  de espaço métrico.

Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma **bola aberta** com centro em  $a \in X$  e raio  $r > 0$  é o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}.$$

A **topologia métrica** em  $(X, d)$  é a topologia gerada por todas as bolas abertas em  $X$ . Sempre que consideremos um espaço métrico vamos dotá-lo com a sua topologia métrica.

Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos. Diz-se que uma função  $\varphi : X \rightarrow Y$  **preserva distâncias** se para todo  $x, y \in X$  vale

$$d_Y(\varphi(x), \varphi(y)) = d_X(x, y).$$

Observe que uma função que preserva distâncias é uma função injetiva contínua nas topologias métricas. Uma **isometria** do espaço métrico  $(X, d_X)$  no espaço métrico  $(Y, d_Y)$  é uma bijeção  $\varphi : X \rightarrow Y$  que preserva distâncias. Dois espaços são ditos **isométricos** se existe uma isometria entre eles. Pode-se mostrar facilmente que a relação “é isométrico a” é uma relação de equivalência entre os espaços métricos.

Claramente, o conjunto de isometrias de um espaço métrico  $(X, d)$  nele mesmo forma um grupo: o grupo das isometrias de  $(X, d)$  que é denotado por  $Isom(X)$ . O espaço métrico  $(X, d)$  é dito **homogêneo** se para quaisquer par de pontos  $x, y \in X$ , existe uma isometria  $\varphi \in Isom(X)$  tal que  $\varphi(x) = y$ ; ou equivalentemente, se  $Isom(X)$  age transitivamente em  $(X, d)$ .<sup>1</sup> Também, dada uma isometria  $\varphi : X \rightarrow X$  num espaço métrico  $(X, d)$ , a **função distância** de  $\varphi$  é a função real

$$\begin{aligned} \delta_\varphi : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, \varphi(x)). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Uma isometria é chamada de **translação de Clifford** se a sua função distância é constante.

Sejam  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  dois espaços métricos. Diz-se que uma função  $\varphi : X \rightarrow Y$  **preserva distâncias localmente** se  $X$  possui uma cobertura aberta  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ,

---

<sup>1</sup>Um espaço homogêneo é chamado as vezes de globalmente homogêneo.

onde  $\mathcal{A}$  é um conjunto de índices, tal que para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $\varphi|_{U_\alpha}$  preserva distâncias. Agora, sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a < b$ ; então, uma **curva geodésica** em  $(X, d)$  é uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow X$  que preserva distâncias localmente. Por outro lado, uma **geodésica** em  $(X, d)$  é uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$  que preserva distâncias localmente. O espaço métrico  $(X, d)$  é dito **geodésicamente completo** se e somente se cada curva geodésica em  $X$  estende-se a uma geodésica de maneira única.

**Observação A.1** Habitualmente chama-se também de (curva) geodésica à imagem de uma (curva) geodésica propriamente dita; esta prática não costuma causar confusão, e nós faremos uso dela com certa frequência, como por exemplo, nos comentários que seguem. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico, e  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$  uma geodésica, a distância de um ponto  $x \in X$  a  $\alpha$  é definida por

$$d(x, \alpha) = \inf_{y \in \alpha(\mathbb{R})} d(x, y).$$

Por outro lado, a imagem de uma geodésica por uma isometria é uma geodésica, e se  $\varphi \in \text{Isom}(X)$  é uma translação de Clifford em  $(X, d)$ , e  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$  é uma geodésica em  $X$ ; então  $\varphi \circ \alpha : \mathbb{R} \rightarrow X$  é uma geodésica tal que

$$d(x, \varphi \circ \alpha) = d(y, \varphi \circ \alpha)$$

para todo  $x, y \in \alpha(\mathbb{R})$ . Isto significa que uma translação de Clifford leva cada geodésica em uma geodésica equidistante. ■

## A.2 Geometria euclideana

O modelo padrão para a geometria euclideana  $n$ -dimensional é o espaço vetorial

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

O produto interno definido por

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i,$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , define uma distância em  $\mathbb{R}^n$ , dada por

$$d_E(x, y) = |x - y|,$$

chamada de **distância euclideana**, onde  $|\cdot|$  é a norma definida a partir do produto interno segundo

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

O par  $(R^n, d_E)$  é chamado de **espaço euclidiano  $n$ -dimensional**, e é denotado por  $E^n$ .

Uma **translação** em  $E^n$  é uma função

$$\begin{aligned} \tau_a : E^n &\rightarrow E^n \\ x &\mapsto x + a, \end{aligned} \tag{A.2}$$

onde  $a \in E^n$ . O conjunto das translações formam um grupo isomorfo a  $R^n$ , e são isometrias em  $E^n$ . Observe que uma translação em  $E^n$  é uma translação de Clifford. Agora, uma **transformação ortogonal** é uma função  $\varphi : E^n \rightarrow E^n$  que preserva o produto interno, ou seja que para todo  $x, y \in E^n$ ,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Uma matriz real  $n \times n$   $A$  é dita **ortogonal** se a transformação linear associada

$$\begin{aligned} A : E^n &\rightarrow E^n \\ x &\mapsto Ax, \end{aligned}$$

é ortogonal.<sup>2</sup> Uma transformação ortogonal também é uma isometria euclidiana, porém não é uma translação de Clifford. O grupo das matrizes ortogonais,  $O(n)$ , chama-se **grupo ortogonal  $n$ -dimensional**.

O seguinte teorema caracteriza as isometrias euclidianas.

**Teorema A.1 Caracterização das isometrias euclidianas.** *Uma função  $\varphi : E^n \rightarrow E^n$  é uma isometria em  $E^n$  se e somente se  $\varphi = \tau_a \circ A$ , onde  $a \in E^n$  e  $A$  é uma transformação ortogonal.*

Este teorema afirma que toda isometria euclidiana pode ser decomposta numa transformação ortogonal seguida de uma translação. Assim, se  $\varphi : E^n \rightarrow E^n$  é uma isometria, então existem  $a \in E^n$  e  $A \in O(n)$  tal que para todo  $x \in E^n$ ,

$$\varphi(x) = Ax + a. \tag{A.3}$$

Mais ainda, o teorema A.1 nos assegura que esta decomposição é única. Para a isometria  $\varphi$  dada por (A.3) escrevemos  $\varphi = (a, A)$ . É fácil ver que  $\varphi$  é uma translação de Clifford se e somente se  $A = I$ , portanto as únicas translações de Clifford em  $E^n$  são as translações (A.2).

---

<sup>2</sup>Para associar uma matriz a uma transformação linear fazemos uso da base canônica em  $R^n$ . Também, denotamos a transformação linear associada à matriz  $A$  pela mesma letra devido a esta identificação canônica, e porque isto não deve causar nenhuma confusão no que segue.

Sejam  $\alpha, \beta \in \text{Isom}(E^n)$ , pelo teorema A.1 existem matrizes  $A, B \in O(n)$  e vetores  $a, b \in E^n$  únicos, tais que para todo  $x \in E^n$ ,

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= Ax + a, \\ \beta(x) &= Bx + b.\end{aligned}$$

A lei de composição em  $\text{Isom}(E^n)$  é dada por

$$\alpha \circ \beta(x) = ABx + Ab + a,$$

ou equivalentemente, escrevendo  $\alpha = (a, A)$  e  $\beta = (b, B)$ ,

$$(a, A) \circ (b, B) = (a + Ab, AB). \quad (\text{A.4})$$

Como  $\text{Isom}(E^n) = O(n) \times E^n$ , no sentido de variedades, então  $\text{Isom}(E^n)$  é uma variedade diferencial. Por outro lado, a lei de multiplicação (A.4) é uma operação diferenciável, portanto  $\text{Isom}(E^n)$  é um grupo de Lie. Observe que a estrutura de grupo de  $\text{Isom}(E^n)$  é a de um produto semi-direto de  $E^n$  com  $O(n)$  (veja o exemplo B.12). O grupo das isometrias euclidianas age transitivamente em  $E^n$ , portanto  $E^n$  é um espaço homogêneo. Além disso, por construção, a ação de  $\text{Isom}(E^n)$  em  $E^n$  é efetiva.

Seja  $\hat{u}$  um vetor unitário em  $E^n$  e  $r$  um número real não negativo. O  $(n - 1)$ -plano ortogonal a  $\hat{u}$  e que está a uma distância  $r \geq 0$  da origem é

$$P(\hat{u}, r) = \{x \in E^n : \langle \hat{u}, x \rangle = r\}.$$

Esta representação de um hiperplano é única salvo quando  $r = 0$ , pois neste caso  $P(\hat{u}, 0) = P(-\hat{u}, 0)$ . No que segue, vamos nos referir a um  $(n - 1)$ -plano simplesmente como plano.

Uma **reflexão** no plano  $P(\hat{u}, r)$  é uma isometria de  $E^n$  que tem como conjunto de pontos fixos o plano  $P(\hat{u}, r)$ . Seja  $\rho : E^n \rightarrow E^n$  uma reflexão no plano  $P(\hat{u}, r)$ , se mostra facilmente que para todo  $x \in E^n$ ,

$$\rho(x) = x + 2(r - \langle \hat{u}, x \rangle) \hat{u}. \quad (\text{A.5})$$

Claramente,  $\rho^2 = I$ .

O lema a seguir será utilizado no estudo dos poliedros de Dirichlet (veja a seção C.1).

**Lema A.1** *Sejam  $k, s \in E^n$  com  $|k| \leq |s|$ ; então o conjunto dos pontos equidistantes de  $s$  e  $k$  é  $P\left(\frac{s-k}{|s-k|}, r\right)$ , onde*

$$r = \left\langle \frac{s+k}{2}, \frac{s-k}{|s-k|} \right\rangle. \quad (\text{A.6})$$

*Ou seja (veja a figura A.1)*

$$P\left(\frac{s-k}{|s-k|}, r\right) = \{x \in E^n : d_E(x, k) = d_E(x, s)\}.$$

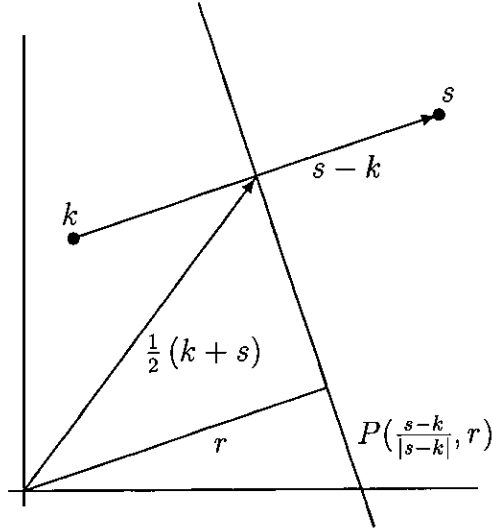


Figura A.1: O plano  $P(\frac{s-k}{|s-k|}, r)$  é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de  $k$  e  $s$ .

Além disso, se  $\rho$  é a reflexão em  $P(\frac{s-k}{|s-k|}, r)$ , então

$$\rho(k) = s. \quad (\text{A.7})$$

Para concluir esta subseção enunciamos para referências futuras um resultado familiar.

**Teorema A.2** *As geodésicas em  $E^n$  são as linhas retas.*

### A.3 Geometria esférica

O modelo padrão para a geometria esférica  $n$ -dimensional é a esfera unitária em  $E^{n+1}$ ,

$$S^n = \{x \in E^{n+1} : |x| = 1\}, \quad (\text{A.8})$$

com a métrica em  $S^n$  induzida pela métrica euclidiana  $d_E$  em  $E^{n+1}$ .

Sejam  $x, y \in S^n$  e denotemos por  $\theta(x, y)$  o ângulo euclidiano entre  $x$  e  $y$ . A **distância esférica** entre  $x$  e  $y$  é

$$d_S(x, y) = \theta(x, y). \quad (\text{A.9})$$

Observe que para todo  $x, y \in S^n$ ,  $0 \leq d_S(x, y) \leq \pi$ , e  $d_S(x, y) = \pi$  se e somente se  $x = -y$ ; ou seja, a distância é máxima somente para pontos antípodos. Esta métrica em  $S^n$  é a métrica induzida pela métrica euclidiana em  $E^{n+1}$ , e portanto o espaço  $(S^n, d_S)$  é chamado de **espaço esférico  $n$ -dimensional**.

**Observação A.2** A esfera  $n$ -dimensional de raio  $R > 0$  é o conjunto

$$S_R^n = \{x \in E^{n+1} : |x| = R\}.$$

## O difeomorfismo

$$\begin{aligned}\alpha_R : S^n &\rightarrow S_R^n \\ x &\mapsto Rx\end{aligned}\tag{A.10}$$

é uma transformação de escala quando as esferas  $S^n$  e  $S_R^n$  estão munidas com as métricas induzidas pela métrica euclideana  $d_E$  em  $E^{n+1}$ . Esta transformação de escala permite uma passagem direta da geometria em  $S_R^n$  à geometria em  $S^n$ . Assim, o estudo do modelo padrão da geometria esférica dado por (A.8) é suficiente para os nossos objetivos. O difeomorfismo (A.10) induz a métrica

$$d_{S_R}(x, y) = R\theta(x, y)\tag{A.11}$$

$$= R d_S\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right)\tag{A.12}$$

em  $S_R^n$ . Desta forma, a geometria em  $S_R^n$  está relacionada à geometria em  $S^n$  pela transformação de escala (A.10) e por (A.11). ■

Como as transformações ortogonais em  $E^{n+1}$  presservam os ângulos entre vetores, o seguinte resultado é intuitivamente óbvio.

**Teorema A.3** *O grupo  $Isom(S^n)$  é isomorfo a  $O(n+1)$ .*

Um  $k$ -plano em  $S^n$ , com  $k < n$ , é a interseção de  $S^n$  com um subespaço vetorial de  $E^{n+1}$  de dimensão  $k+1$ . Vamos nos referir a um  $(n-1)$ -plano simplesmente como plano. Um plano é então determinado por um par de pontos antípodas em  $S^n$ , ou equivalentemente, por um ponto em  $RP^n$ . Denotemos por  $Q(x)$  o plano determinado pelo par  $\{x, -x\}$ , com  $x \in S^n$ . Observe que  $Q(x) = Q(-x)$ , e que  $Q(x) = Q(y)$  se e somente se  $x = \pm y$ . Como  $Q(x) = P(x, 0) \cap S^n$ , e a reflexão  $\rho$  no plano  $P(x, 0)$  é uma transformação ortogonal que tem  $P(x, 0)$  como conjunto de pontos fixos, segue-se que a restrição  $\hat{\rho} = \rho|_{S^n}$  é uma isometria em  $S^n$  com  $Q(x)$  como conjunto de pontos fixos. Esta isometria chama-se **reflexão** no plano  $Q(x)$ . Se  $\hat{\rho}$  é uma reflexão no plano  $Q(x)$ , então  $\hat{\rho}(x) = -x$ .

Devido à identificação de  $Isom(S^n)$  com  $O(n+1)$ , o lema A.1 dá lugar ao seguinte resultado:

**Lema A.2** *Sejam  $k, s \in S^n$ , então o conjunto dos pontos equidistantes de  $s$  e  $k$  é  $Q\left(\frac{k-s}{|k-s|}\right)$ , ou seja*

$$Q\left(\frac{k-s}{|k-s|}\right) = \{r \in S^n : d_S(r, s) = d_S(r, k)\}.$$

*Além disso, se  $\rho$  é a reflexão em  $Q\left(\frac{k-s}{|k-s|}\right)$ , então*

$$\rho(k) = s.$$

Um **círculo máximo** em  $S^n$  é um 1-plano, ou seja a interseção de  $S^n$  com um plano bidimensional de  $E^{n+1}$  que passa pela origem. O seguinte teorema é um resultado caracteriza as geodésicas nos espaço esférico.

**Teorema A.4** *As geodésicas em  $S^n$  são os círculos máximos.*

## A.4 Geometria hiperbólica

Vamos exibir dois modelos para o espaço hiperbólico  $n$ -dimensional. Estes modelos são conjuntos de pontos essencialmente distintos que, quando munidos de métricas adequadas, viram isométricos. O primeiro é um subconjunto do espaço de Minkowski, portanto começamos com um breve resumo da geometria minkowskiana.

O conjunto  $R^n$  munido com o produto escalar definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x^i y^i - x^n y^n, \quad (\text{A.13})$$

é chamado de **espaço de Minkowski**, e denotado por  $E_1^n$ . Um vetor  $v \in E_1^n$  é dito do tipo

1. **espacial** se  $\langle v, v \rangle > 0$ ;
2. **luminoso** se  $\langle v, v \rangle = 0$ ;
3. **temporal** se  $\langle v, v \rangle < 0$ .

O conjunto de todos os vetores de tipo luminoso em  $E_1^n$  é chamado de **cone de luz**, e é denotado por  $C_1^n$ . O conjunto de todos os vetores de tipo espacial é um aberto de  $E_1^n$  chamado de **exterior** de  $C_1^n$ , e o conjunto de todos os vetores de tipo temporal é um aberto de  $E_1^n$  chamado de **interior** de  $C_1^n$ . Um vetor tipo luminoso ou tipo temporal é dito **positivo** (resp. **negativo**) se e somente se  $x^n > 0$  (resp.  $x^n < 0$ ). A categoria na qual se enquadra um vetor é o seu **caráter causal**.

Uma função  $\varphi : E_1^n \rightarrow E_1^n$  é uma **transformação de Lorentz** se preserva o produto escalar (A.13), ou seja, se para todo  $x, y \in E_1^n$ ,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Uma base  $\xi = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  de  $E_1^n$  é dita **ortonormal** se

$$\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij},$$



onde

$$\eta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } i = j = 1, \dots, n-1 \\ -1 & \text{se } i = j = n \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

A base canônica de  $E_1^n$  é uma base ortonormal. Uma vez escolhida uma base ortonormal, a cada transformação de Lorentz  $A : E_1^n \rightarrow E_1^n$  corresponde uma única matriz, que denotaremos simplesmente por  $A$ , tal que

$$A^T \eta A = \eta. \quad (\text{A.14})$$

Uma matriz que satisfaz (A.14) é chamada de **matriz de Lorentz** em  $E_1^n$ . O grupo das matrizes de Lorentz em  $E_1^n$  é denotado por  $O(n-1, 1)$ . De (A.14) segue-se imediatamente que  $(\det A)^2 = 1$ , e portanto  $\det A = \pm 1$ . Denota-se por  $SO(n-1, 1)$  o grupo das matrizes de Lorentz com  $\det A = 1$ . Note que  $SO(n-1, 1)$  é um subgrupo de índice dois em  $O(n-1, 1)$ , e é chamado de **grupo de Lorentz especial**.

No espaço de Minkowski acontece um fato peculiar. O conjunto de vetores tipo temporal é desconexo, uma componente conexa é formada pelos vetores de tipo temporal positivos, e a outra componente pelos vetores de tipo temporal negativos. Uma transformação de Lorentz é dita **positiva** se não muda o sinal dos vetores de tipo temporal. O grupo das transformações de Lorentz positivas,  $PO(n-1, 1)$ , é um subgrupo de  $O(n-1, 1)$  de índice dois, e é chamado de **grupo de Lorentz positivo**. Por último, o grupo  $PSO(n-1, 1)$  é o grupo formado por todas as transformações de Lorentz positivas e com determinante 1.  $PSO(n-1, 1)$  é um subgrupo de  $SO(n-1, 1)$  de índice dois, e um subgrupo de  $O(n-1, 1)$  de índice quatro.  $PSO(n-1, 1)$  é chamado de **grupo positivo especial de Lorentz**.

Mostra-se facilmente o seguinte resultado.

**Lema A.3** *Sejam  $x, y \in E_1^n$  vetores distintos de zero e ortogonais. Se um deles é de tipo temporal, então o outro é de tipo espacial.*

Seja agora  $V$  um subespaço vetorial de  $E_1^n$ . Diz-se que

1.  $V$  é um **subespaço do tipo temporal** se  $V$  contém um vetor de tipo temporal;
2.  $V$  é um **subespaço do tipo espacial** se todo vetor de  $V$  é de tipo espacial;
3.  $V$  é um **subespaço do tipo luminoso** em qualquer outro caso.

Por um processo de ortogonalização de tipo Gramm-Schmidt mostra-se que se  $V_1$  e  $V_2$  são dois subespaços de tipo temporal de  $E_1^n$ , então existe uma transformação  $A \in PSO(n-1, 1)$  tal que  $A(V_1) = V_2$ .

Sejam  $x, y \in E_1^n$  dois vetores de tipo temporal positivos. Como  $PSO(n-1, 1)$  age transitivamente no conjunto dos subespaços vetoriais bidimensionais de tipo tempo, podemos supor que  $x = x^n e_n$ . Segue-se portanto que  $\langle x, y \rangle < 0$ . Defina

$$z = x - \alpha y,$$

com

$$\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|^2}.$$

Tem-se que  $\langle y, z \rangle = 0$ , e portanto  $z$  é de tipo espacial, ou seja  $|z|^2 \geq 0$ . Então

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \langle z + \alpha y, z + \alpha y \rangle \\ &= |z|^2 + \alpha^2 |y|^2 \\ &\geq \alpha^2 |y|^2, \end{aligned}$$

e portanto

$$\langle x, y \rangle \leq |x||y|, \quad (\text{A.15})$$

onde a igualdade é satisfeita se e somente se  $x$  e  $y$  são paralelos. Como  $|x|$  e  $|y|$  são imaginários, então  $|x||y| < 0$ , e portanto

$$|\langle x, y \rangle| \geq ||x||y||. \quad (\text{A.16})$$

Logo, existe um número não negativo  $\eta(x, y)$  tal que

$$\langle x, y \rangle = |x||y| \cosh \eta(x, y). \quad (\text{A.17})$$

Este número é o **ângulo lorentziano** entre os vetores de tipo temporal positivos  $x, y \in E_1^n$ . Claramente  $\eta(x, y) = 0$  se e somente se  $x$  e  $y$  são paralelos.

Agora, os dois conjuntos que vão nos servir como modelos do espaço hiperbólico são:

1. **O hiperbolóide unitário positivo de  $E_1^{n+1}$ .** Em analogia com o modelo padrão da esfera  $n$ -dimensional, definimos o modelo padrão do espaço hiperbólico  $n$ -dimensional como a folha positiva do hiperbolóide  $|x|^2 = -1$ , ou seja

$$F^n = \{x \in E_1^{n+1} : |x|^2 = -1 \text{ e } x^{n+1} > 0\}. \quad (\text{A.18})$$

2. **A bola unitária de Poincaré.** Usando uma adaptação da projeção estereográfica de  $F^n$  a partir do *pólo*  $s = (0, -1)$ , obtemos o difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : F^n &\rightarrow B^n \\ (x, x^{n+1}) &\mapsto \frac{x}{1 + x^{n+1}}, \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

com inversa

$$\begin{aligned}\psi : B^n &\rightarrow F^n \\ x &\mapsto \left( \frac{2x}{1 - |x|_E^2}, \frac{1 + |x|_E^2}{1 - |x|_E^2} \right).\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Nesta projeção estereográfica identificamos  $R^{n+1} = R^n \times R$ , e  $B^n$  é a bola unitária em  $R^n$  (com a métrica euclideana). Observe que estamos usando a notação  $\|\cdot\|_E$  para a norma euclideana em  $R^n$ .

Vamos começar descrevendo a geometria hiperbólica usando o modelo do hiperbolóide unitário positivo de  $E_1^{n+1}$ . Observe que cada ponto  $x \in F^n$  é um vetor temporal positivo em  $E_1^{n+1}$ . Portanto dados  $x, y \in F^n$ , a **distância hiperbólica** entre  $x$  e  $y$  é definida por

$$d_H(x, y) = \eta(x, y). \quad (\text{A.21})$$

De (A.17) temos então que

$$\cosh d_H(x, y) = -\langle x, y \rangle. \quad (\text{A.22})$$

O espaço  $(F^n, d_H)$  é chamado de **espaço hiperbólico  $n$ -dimensional**, e é denotado por  $H^n$ .

**Observação A.3** O hiperbolóide  $n$ -dimensional de raio  $R > 0$  é o conjunto

$$F_R^n = \{x \in E_1^{n+1} : |x|^2 = -R^2\}.$$

O difeomorfismo

$$\begin{aligned}\alpha_R : F^n &\rightarrow F_R^n \\ x &\mapsto Rx\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

é uma transformação de escala quando os hiperbolóides  $F^n$  e  $F_R^n$  estão munidos com as métricas induzidas pelo produto escalar (A.13) em  $E^{n+1}$ . Esta transformação de escala permite uma passagem direta da geometria em  $F_R^n$  à geometria em  $F^n$ . Assim, o estudo do modelo padrão da geometria hiperbólica dado por (A.18) é suficiente para os nossos objetivos. O difeomorfismo (A.23) induz a métrica

$$d_{H_R}(x, y) = R \eta(x, y) \quad (\text{A.24})$$

$$= R d_H\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right) \quad (\text{A.25})$$

em  $F_R^n$ . Desta forma, a geometria em  $F_R^n$  está relacionada à geometria em  $F^n$  pela transformação de escala (A.23) e por (A.24). ■

Usando a identidade

$$\cosh d_H(x, y) = 1 + \frac{1}{2} |x - y|^2, \quad (\text{A.26})$$

válida para todo  $x, y \in F^n$ , é imediato verificar que toda transformação de Lorentz positiva de  $E_1^{n+1}$  restringe-se a uma isometria em  $H^n$ , e que toda isometria de  $H^n$  estende-se de maneira única a uma transformação de Lorentz positiva de  $E_1^{n+1}$ . Esta correspondência estabelece o seguinte teorema.

**Teorema A.5** *O grupo  $Isom(H^n)$  é isomorfo a  $PO(n, 1)$ .*

Vamos agora estudar as reflexões hiperbólicas. Um  **$k$ -plano** em  $H^n$  é a interseção de  $H^n$  com um subespaço vetorial de tipo temporal de  $E_1^{n+1}$ , de dimensão  $k + 1$ . Um  $(n - 1)$ -plano será chamado simplesmente de plano. Seja  $\hat{u} \in E_1^{n+1}$  um vetor unitário de tipo espacial, então o subespaço de  $E_1^{n+1}$  ortogonal a  $\hat{u}$ ,

$$P(\hat{u}) = \{x \in E_1^{n+1} : \langle \hat{u}, x \rangle\},$$

é um subespaço de tipo temporal de dimensão  $n$ . Denotemos por  $Q(\hat{u})$  a interseção de  $H^n$  com  $P(\hat{u})$ , e por  $\rho$  a reflexão no plano  $P(\hat{u})$ ; temos que para todo  $y \in E_1^{n+1}$  vale

$$\rho(y) = y - 2\langle \hat{u}, y \rangle \hat{u}.$$

É fácil ver que  $\rho \in PO(n, 1)$ , de fato

$$\begin{aligned} \langle \rho(y), \rho(y) \rangle &= \langle y - 2\langle \hat{u}, y \rangle \hat{u}, y - 2\langle \hat{u}, y \rangle \hat{u} \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - 4\langle \hat{u}, y \rangle^2 + 4\langle \hat{u}, y \rangle^2 \\ &= \langle y, y \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $y \in E_1^{n+1}$ , e adicionalmente, se  $y$  é um vetor de tipo temporal, então

$$\begin{aligned} \langle \rho(y), y \rangle &= \langle y - 2\langle \hat{u}, y \rangle \hat{u}, y \rangle \\ &= \langle y, y \rangle - 2\langle \hat{u}, y \rangle^2 \\ &< 0, \end{aligned}$$

logo  $\rho(y)$  e  $y$  possuem o mesmo sinal temporal. Segue-se que  $\rho$  restringe-se a  $H^n$ , e denotamos  $\hat{\rho} = \rho|_{H^n}$  a reflexão em  $Q(\hat{u})$ .

Apresentamos agora um lema análogo aos lemas A.1 e A.2 que será útil no estudo dos poliedros fundamentais e das instruções de colagem na seção C.1.

**Lema A.4** *Sejam  $k, s \in H^n$ , então o conjunto dos pontos equidistantes de  $s$  e  $k$  é  $Q\left(\frac{k-s}{|k-s|}\right)$ , ou seja*

$$Q\left(\frac{k-s}{|k-s|}\right) = \{r \in H^n : d_H(r, s) = d_H(r, k)\}.$$

Além disso, se  $\rho$  é a reflexão em  $Q(\frac{k-s}{|k-s|})$ , então

$$\rho(k) = s.$$

Uma **linha hiperbólica** ou **reta hiperbólica** é a interseção de  $H^n$  com um plano bidimensional de  $E_1^{n+1}$  que passa pela origem, gerado por um vetor de tipo temporal e outro de tipo espacial. O seguinte teorema caracteriza as geodésicas em  $H^n$ .

**Teorema A.6** *As geodésicas em  $H^n$  são as linhas hiperbólicas.*

Passemos agora a estudar o segundo modelo do espaço hiperbólico. Ele resulta muito conveniente para caracterizar as translações de Clifford hiperbólicas. A métrica hiperbólica em  $B^n$  está definida pela expressão

$$d_B(x, y) = d_H(\psi(x), \psi(y)), \quad (\text{A.27})$$

para todo  $x, y \in B^n$ , e onde  $\psi$  é dado por (A.20). A expressão (A.27) não somente define uma métrica em  $B^n$ , como também estabelece que os espaços  $(B^n, d_B)$  e  $(F^n, d_H)$  são isométricos, com as isometrias canônicas dadas por (A.19) e (A.20). O espaço métrico  $(B^n, d_B)$  é também chamado **modelo da bola conforme** do espaço hiperbólico.

Observe que para todo  $x, y \in B^n$ ,

$$\begin{aligned} \cosh d_B(x, y) &= \cosh d_H(\psi(x), \psi(y)) \\ &= -\langle \psi(x), \psi(y) \rangle \\ &= \frac{4\langle x, y \rangle_E}{(1 - |x|_E^2)(1 - |y|_E^2)} + \frac{(1 + |x|_E^2)(1 + |y|_E^2)}{(1 - |x|_E^2)(1 - |y|_E^2)} \\ &= \frac{1 + |x|_E^2 + |y|_E^2 + |x|_E^2 |y|_E^2 - 4\langle x, y \rangle_E}{(1 - |x|_E^2)(1 - |y|_E^2)} \\ &= 1 + \frac{2|x - y|_E^2}{(1 - |x|_E^2)(1 - |y|_E^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

O seguinte teorema caracteriza os  $(n - 1)$ -planos em  $B^n$ .

**Teorema A.7** *Um conjunto  $P \subset B^n$  é um  $(n - 1)$ -plano hiperbólico se e somente se  $P$  é a interseção de  $B^n$  com*

1. *um subespaço vetorial  $(n - 1)$ -dimensional de  $E^n$ , ou*
2. *uma  $(n - 1)$ -esfera em  $E^n$  ortogonal a  $\partial B^n$ .*

Levando em conta que um  $k$ -plano hiperbólico é a interseção de  $n - k$  planos hiperbólicos, temos o seguinte corolário.

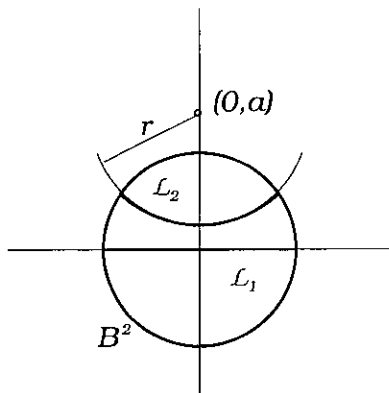


Figura A.2: As retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  são retas paralelas. Existe uma distância mínima elas, porém elas não são equidistantes, pois a distância de um ponto da reta  $\mathcal{L}_2$  que está fora do eixo vertical à reta  $\mathcal{L}_1$  é maior que a mínima.

**Corolário A.1** *Um conjunto  $P \subset B^n$  é um  $k$ -plano hiperbólico se e somente se  $P$  é a interseção de  $B^n$  com*

1. *um subespaço vetorial  $k$ -dimensional de  $E^n$ , ou*
2. *uma  $k$ -esfera em  $E^n$  ortogonal à fronteira topológica  $\partial B^n$ .*

**Observação A.4** Este corolário assegura que toda geodésica em  $B^n$  é a interseção de  $B^n$  com uma reta que passa pela origem, ou com um círculo em  $E^n$  ortogonal a  $\partial B^n$ . ■

Considere agora duas retas hiperbólicas coplanares em  $B^n$ ,  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , e seja  $p \in \mathcal{L}_1$  um ponto qualquer. Escolha qualquer isometria que leve  $p$  ao centro de  $B^n$ , então o 2-plano de  $B^n$  que contém  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  é a interseção de  $B^n$  com um 2-plano de  $E^n$  que passa pela origem. Escolhendo adequadamente os eixos em  $E^n$  podemos supor que este 2-plano de  $E^n$  é gerado pelos vetores  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , e portanto o 2-plano hiperbólico que contém as retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ , é o disco unitário em  $E^2$ .

Se as duas retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  não se interceptam podemos supor que  $\mathcal{L}_1$  é a reta horizontal que passa pela origem, e

1.  $\mathcal{L}_2$  é a interseção de  $\partial B^2$  com o círculo com centro em  $(0, a)$ , e raio  $r = \sqrt{a^2 - 1}$ , sendo  $a > 1$  (veja a figura A.2), ou
2.  $\mathcal{L}_2$  é a interseção de  $\partial B^2$  com o círculo com centro em  $(1, r)$  e raio  $r > 0$  (veja a figura A.3).

Em qualquer caso, é fácil ver que a distância entre as retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  não permanece constante, ou seja, retas paralelas no espaço hiperbólico não são equidistantes. Isto dá lugar ao seguinte teorema.

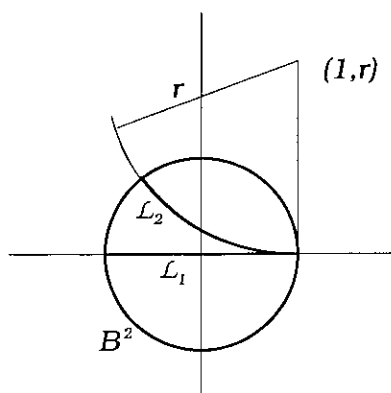


Figura A.3: As retas  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$  são retas paralelas que se tocam num dos extremos infinitos. Claramente, estas retas não são equidistantes.

**Teorema A.8** *A única translação de Clifford no espaço hiperbólico é a identidade.*

Este teorema tem consequências fundamentais na topologia cósmica, particularmente no que respeita ao método de Cristalografia Cósmica, pois, como veremos na seção 3.3, este método só é sensível às translações de Clifford.

# Apêndice B

## Teoria de Grupos

A teoria de grupos permeia a matemática da topologia cósmica. Este apêndice é uma apresentação concisa de alguns aspectos da teoria de grupos relevantes no estudo e classificação das formas espaciais. Para uma exposição mais detalhada o leitor pode consultar o texto básico de álgebra [29]. Os livros [93, 104] são altamente recomendáveis.

### B.1 Grupos e subgrupos

Um **grupo**  $(G, \pi)$  é um conjunto  $G$ , junto com uma operação binária,

$$\begin{aligned}\pi : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto \pi(a, b) = ab,\end{aligned}\tag{B.1}$$

chamada **produto**, que satisfaz as seguintes condições

1. Associatividade. Para todo  $a, b, c \in G$ ,  $(ab)c = a(bc)$ .
2. Existência do elemento neutro. Existe um elemento  $e \in G$  tal que para todo  $a \in G$ ,  $ae = a = ea$ .
3. Existência da inversa. Para cada elemento  $a \in G$  existe  $b \in G$  tal que  $ab = e = ba$ ; este elemento é denotado por  $a^{-1}$ .

**Observação B.1** As vezes escreve-se  $e_G$  para denotar o elemento neutro de  $G$ . Isto acontece quando faz-se necessário especificar o grupo, por exemplo quando estão sendo considerados dois ou mais grupos simultaneamente. Quando se trata de grupos de matrizes, o elemento neutro costuma ser denotado por  $I$ , e quando se trata de grupos de números (reais, complexos ou quatérnios) o elemento neutro é denotado simplesmente por 1. Em certas situações, por exemplo ao trabalhar com grupos de transformações,



o elemento neutro costuma ser chamado de elemento identidade, ou simplesmente de identidade. ■

**Exemplo B.1** Seja  $A$  um conjunto e denote por  $B(A)$  o conjunto de todas as funções bijetivas  $f : A \rightarrow A$ .  $B(A)$  junto com a composição de funções é um grupo, chamado o **grupo das permutações** de  $A$ . ■

Um grupo  $(G, \pi)$  é dito **comutativo** ou **abeliano** se o produto for comutativo, ou seja se para todo  $a, b \in G$ ,  $ab = ba$ . Neste caso é comum chamar a operação de grupo de soma, escrever  $a + b$  no lugar de  $ab$  e denotar o elemento neutro por 0.

No que segue denotaremos o grupo  $(G, \pi)$  simplesmente por  $G$  a menos que seja estritamente necessário nos referirmos à operação produto de maneira explícita. Se  $G$  possui um número finito de elementos então  $G$  é um **grupo finito**, neste caso o número de elementos de  $G$  é chamado **ordem** de  $G$ , e denotado por  $o(G)$ . Adicionalmente, se para algum elemento  $a \in G$  existe um número natural  $n > 0$  tal que  $a^n = e$ , então  $a \in G$  é um elemento de **ordem finita**; a ordem de  $a \in G$ , denotada por  $o(a)$  é o menor  $n > 0$  para o qual  $a^n = e$ . Claramente, se  $G$  é finito, então todo elemento de  $G$  é de ordem finita. Um grupo que não possui elementos de ordem finita é dito **grupo sem torção**.

Seja  $(G, \pi)$  um grupo. Um subconjunto  $H \subset G$  é chamado de **subgrupo** de  $G$  se  $(H, \pi)$  é um grupo. Observe que, aqui, a notação  $(G, \pi)$  para denotar um grupo é muito conveniente pois exprime que a operação de grupo deve ser a mesma tanto em  $G$  quanto em  $H$ . Claramente  $\{e_G\}$  e  $G$  são subgrupos de  $G$ . Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ , se  $H \neq \{e_G\}$  então  $H$  é um subgrupo **não trivial** de  $G$ , e se  $H \neq G$  então  $H$  é um subgrupo **próprio** de  $G$ . Evidentemente, se  $H$  é um subgrupo de  $G$  então  $e_H = e_G$ .

O seguinte lema é extremamente conveniente para identificar subgrupos.

**Lema B.1** *Seja  $G$  um grupo e  $H \subset G$  um subconjunto qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $H$  é um subgrupo de  $G$ .
2. As duas seguintes condições são satisfeitas:
  - (a) Se  $a, b \in H$ , então  $ab \in H$ .
  - (b) Se  $a \in H$ , então  $a^{-1} \in H$ .
3. Se  $a, b \in H$ , então  $ab^{-1} \in H$ .

*Mais ainda, se  $H$  é finito, então no item 2, a condição (a) é suficiente.*

Os seguintes exemplos de subgrupos são bastantes gerais e de muita utilidade ao longo desta tese.

**Exemplo B.2 O centro de um grupo.** Dado um grupo  $G$ , o conjunto

$$Z(G) = \{x \in G : ax = xa, \text{ para todo } a \in G\}$$

é chamado de **centro** de  $G$ .  $Z(G)$  é um subgrupo de  $G$ . ■

**Exemplo B.3 A torção de um grupo.** Dado um grupo  $G$ , o conjunto

$$T(G) = \{a \in G : o(a) \text{ é finito}\}$$

é chamado de **torção** de  $G$ . Se  $G$  é abeliano, então  $T(G)$  é um subgrupo de  $G$ . ■

**Exemplo B.4 O centralizador de um elemento.** Seja  $G$  um grupo e considere um elemento  $a \in G$ . O **centralizador** de  $a$  em  $G$  é o conjunto de todos os elementos de  $G$  que comutam com  $a \in G$ ,

$$C_G(a) = \{x \in G : ax = xa\}.$$

$C_G(a)$  é um subgrupo de  $G$ . ■

**Exemplo B.5 O centralizador de um subgrupo.** Seja  $H \subset G$  um subgrupo de  $G$ , o **centralizador** de  $H$  em  $G$  é o conjunto de todos os elementos de  $G$  que comutam com cada elemento de  $H$ ,

$$C_G(H) = \{x \in G : ax = xa, \text{ para todo } a \in H\}.$$

É claro que  $C_G(H)$  é um subgrupo de  $G$  e, se  $a \in H$ , então  $C_G(H)$  é também um subgrupo de  $C_G(a)$ . Além disso, para qualquer subgrupo  $H \subset G$  tem-se que  $Z(G) = C_G(G) \subset C_G(H)$ . ■

## B.2 Homomorfismos

Um **homomorfismo** do grupo  $(G, \pi)$  ao grupo  $(H, p)$  é uma função  $f : G \rightarrow H$  que respeita as operações  $\pi$  e  $p$ . Formalmente,  $f$  é um homomorfismo se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{f \times f} & H \times H \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array} .$$

Em termos mais comuns, e evitando a menção explícita das operações de grupo, temos que  $f$  é um homomorfismo se para todo  $a, b \in G$

$$f(ab) = f(a)f(b). \quad (\text{B.2})$$

Observe que o lado esquerdo de (B.2) corresponde ao caminho  $f \circ \pi$  do diagrama anterior, o lado direito ao caminho  $p \circ (f \times f)$ , e a igualdade à comutação do diagrama. O conjunto dos homomorfismos de  $G$  em  $H$  é denotado por  $\text{Hom}(G, H)$ .

Um homomorfismo injetivo é chamado de **monomorfismo**, um homomorfismo sobrejetivo é chamado de **epimorfismo**, e um homomorfismo bijetivo é chamado de **isomorfismo**. Dois grupos são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles. Se  $G$  e  $H$  são grupos isomorfos escreve-se  $G \approx H$ , ou  $G \stackrel{f}{\approx} H$ , onde  $f : G \rightarrow H$  é um isomorfismo. Esta última notação é utilizada quando é relevante especificar o isomorfismo  $f$  em particular.

Um caso de particular importancia se dá quando  $G = H$ . Um homomorfismo de  $G$  em  $G$  é chamado de **endomorfismo** de  $G$ , e um isomorfismo de  $G$  em  $G$  é chamado de **automorfismo** de  $G$ . O conjunto dos endomorfismos de  $G$  é denotado por  $\text{End}(G)$ , e o conjunto dos automorfismos de  $G$  é denotado por  $\text{Aut}(G)$ . Claramente  $\text{Aut}(G) \subset \text{End}(G)$ . A composição de dois endomorfismos é um endomorfismo, e como  $\text{Aut}(G)$  é um subconjunto do grupo das permutações de  $G$ , segue-se que  $\text{Aut}(G)$  é um subgrupo de  $B(G)$ . Um **grupo de automorfismos** de  $G$  é qualquer subgrupo de  $\text{Aut}(G)$ .

Seja  $f : G \rightarrow H$  um homomorfismo, o **núcleo** de  $f$  é o conjunto

$$\text{Ker } f = \{a \in G : f(a) = e_H\}$$

e a **imagem** de  $f$  é o conjunto

$$\text{Im } f = \{b \in H : f(a) = b \text{ para algum } a \in G\}.$$

$\text{Ker } f$  e  $\text{Im } f$  são subgrupos de  $G$  e  $H$  respectivamente, e se  $f$  é um monomorfismo então  $\text{Ker } f$  é o subgrupo trivial de  $G$  e  $G \stackrel{f}{\approx} \text{Im } f$ .

**Exemplo B.6 Automorfismos internos.** Seja  $G$  um grupo e  $a \in G$ . Defina a função

$$\begin{aligned} \theta_a : G &\rightarrow G \\ b &\mapsto aba^{-1}, \end{aligned}$$

chamada de **conjugação** por  $a$ . É imediato verificar que  $\theta_a$  é um automorfismo com inversa  $\theta_a^{-1} = \theta_{a^{-1}}$ , e portanto

$$\begin{aligned} \theta : G &\rightarrow \text{Aut}(G) \\ a &\mapsto \theta_a \end{aligned}$$

é um homomorfismo com núcleo  $\text{Ker } \theta = Z(G)$ . Cada automorfismo  $\theta_a$ , com  $a \in G$ , chama-se **automorfismo interno** de  $G$ , e o conjunto de todos os automorfismos internos de  $G$ ,  $\text{In}(G)$ , é a imagem de  $\theta$ . ■

Sejam  $f : G \rightarrow H$  e  $g : H \rightarrow K$  homomorfismos, a sequência curta de homomorfismos

$$G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$$

é dita **exata** se  $\text{Im } f = \text{Ker } g$ . Uma sequência longa de homomorfismos

$$\dots \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K \xrightarrow{h} L \longrightarrow \dots$$

é dita **exata** se cada subsequência curta é exata. A afirmação de que a sequência

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K \longrightarrow 1 \tag{B.3}$$

é exata equivale a dizer que  $f$  é injetiva e que  $g$  é sobrejetiva. Também, a sequência

$$1 \longrightarrow G \xrightarrow{f} H \longrightarrow 1$$

é exata se e somente se  $G \stackrel{f}{\approx} H$ .

Quando existe uma sequência exata (B.3) diz-se que  $H$  é uma **extensão** de  $G$  por  $K$ . Se  $f(G) \subset Z(H)$ , então  $H$  é uma **extensão central** de  $G$  por  $K$ .

### B.3 Subgrupos normais e grupos quociente

Seja  $H$  um subgrupo de  $G$  e defina a relação  $\sim$  por

$$a \sim b \iff ab^{-1} \in H, \tag{B.4}$$

para todo  $a, b \in G$ . É claro que esta é uma relação de equivalência, e as classes de equivalência

$$[a] = \{b \in G : a \sim b\}$$

são chamadas de **co-conjuntos pela direita** de  $H$ . O termo *pela direita* é colocado devido a que se  $b \in [a]$ , então existe  $z \in H$  tal que  $ba^{-1} = z$ , e portanto  $b = za$ . Isto dá lugar à notação mais convencional

$$[a] = Ha.$$

Definindo uma outra relação de equivalência  $\sim_2$  por

$$a \sim_2 b \iff a^{-1}b \in H,$$

tem-se

$$[a]_2 = aH,$$

onde

$$[a]_2 = \{b \in G : a \sim_2 b\}.$$

Estas classes são chamadas de **co-conjuntos pela esquerda** de  $H$ . Os conjuntos  $H$ ,  $Ha$  e  $aH$ , qualquer que seja  $a \in G$ , tem a mesma cardinalidade.

O conjunto quociente pela relação  $\sim$  é denotado por  $G/H$ , ou seja

$$G/H = \{[a] : a \in G\}.$$

O **índice** de  $H$  em  $G$ , denotado por  $(G : H)$ , é a cardinalidade de  $G/H$ , ou seja, a quantidade de co-conjuntos pela direita de  $H$  em  $G$ . Se  $(G : H)$  é finito então diz-se que  $H$  é de índice finito em  $G$ . Estas considerações dão lugar ao seguinte teorema.

**Teorema B.1 Teorema de Lagrange.** *Seja  $H$  um subgrupo de um grupo finito  $G$ . Então*

$$(G : H) = \frac{o(G)}{o(H)}.$$

Um subgrupo  $H$  de  $G$  é dito **subgrupo normal** de  $G$  se para todo  $a \in G$  vale  $aH = Ha$ . Em particular, todo subgrupo de um grupo abeliano é normal. Outros exemplos mais interessantes são:

**Exemplo B.7** Se  $H$  é um subgrupo de índice dois em  $G$ , então  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ . ■

**Exemplo B.8**  $Z(G)$  é um subgrupo normal de  $G$ . Mais ainda, todo subgrupo de  $G$  contido em  $Z(G)$  é um subgrupo normal de  $G$ . ■

**Exemplo B.9** Seja  $f : G \rightarrow H$  um homomorfismo, então  $\text{Ker } f$  é um subgrupo normal de  $G$ . ■

**Exemplo B.10 O normalizador de um subgrupo.** Seja  $H$  um subgrupo de  $G$ , o **normalizador** de  $H$  em  $G$  é o subgrupo

$$N_G(H) = \{a \in G : aha^{-1} \in H, \text{ para todo } h \in H\}.$$

É fácil ver que  $H$  é um subgrupo normal de  $N_G(H)$ , de fato,  $N_G(H)$  é o maior subgrupo de  $G$  no qual  $H$  é normal. ■

**Exemplo B.11** Considere a sequência exata

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 1.$$

Então  $Imf$  é um subgrupo normal de  $G$ . ■

Se  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ , então o conjunto quociente  $G/H$  adquire uma estrutura de grupo com operação produto dada por

$$[a][b] = [ab].$$

Este grupo é chamado de **grupo quociente**, e o homomorfismo

$$\begin{aligned} p : G &\rightarrow G/H \\ a &\mapsto [a] \end{aligned}$$

é chamado de **projeção canônica**, ou simplesmente **projeção**.

Podemos agora complementar o exemplo B.11 e dizer que  $H$  é um subgrupo normal de  $G$  se e somente se existem um grupo  $K$  e um homomorfismo  $g : G \rightarrow K$  tais que a sequência

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{g} K \longrightarrow 1,$$

onde  $i : H \rightarrow G$  é o monomorfismo inclusão, ou seja  $i(a) = a$  para todo  $a \in H$ , é exata. Neste caso tem-se  $K \approx G/H$ .

Sejam  $H \subset G$  um subgrupo e  $T \subset G$  um subconjunto de  $G$  tais que

1. Se  $a, b \in T$  então  $a \not\sim b$ , onde a relação de equivalência é definida por (B.4).
2.  $G = \bigcup_{a \in T} Ha$ .

Então  $T$  é dito **transversal direito** de  $H$  em  $G$ . Para construir um transversal direito de  $H$  em  $G$  simplesmente pegamos um elemento de cada co-conjunto pela direita de  $H$  em  $G$ . Analogamente define-se um transversal esquerdo de  $H$  em  $G$ . Agora, seja  $H$  um subgrupo normal de  $G$  e considere a sequência exata

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/H \longrightarrow 1. \quad (\text{B.5})$$

Escolher um conjunto transversal a  $H$  em  $G$  equivale a definir uma função  $\tau : G/H \rightarrow G$  tal que  $p \circ \tau = id_{G/H}$ . Esta função chama-se **função transversal** a  $H$  em  $G$ . Se a sequência (B.5) admite uma função transversal que seja um homomorfismo, diz-se que a sequência **se divide**.

## B.4 Produto semi-direto

Sejam  $H$  e  $K$  dois grupos, e

$$\begin{aligned}\theta : H &\rightarrow \text{Aut}(K) \\ h &\mapsto \theta_h\end{aligned}$$

um homomorfismo, onde escrevemos

$$\begin{aligned}\theta_h : K &\rightarrow K \\ k &\mapsto h(k).\end{aligned}$$

Então o conjunto  $K \times H$  junto com a operação produto definida por

$$(k, h)(m, n) = (kh(m), hn),$$

para todo  $k, m \in K$  e  $h, n \in H$ , forma um grupo chamado de **produto semi-direto** de  $K$  e  $H$ , e denotado por  $K \times_{\theta} H$ . Observe que quando  $\theta$  é o homomorfismo trivial, ou seja quando  $\theta_h = id_K$  para todo  $h \in H$ , então  $K \times_{\theta} H$  é simplesmente o **produto direto** de  $K$  e  $H$ .

**Exemplo B.12** Considere o caso  $H = O(n)$ ,  $K = E^n$  e  $\theta_A(v) = Av$ , para todo  $A \in O(n)$  e  $v \in E^n$ . Então temos que

$$\text{Isom}(E^n) = E^n \times_{\theta} O(n).$$

Veja a seção A.2. ■

**Exemplo B.13** Considere o caso  $H = Z_2 = \langle t ; t^2 \rangle$ ,  $K = Z_n = \langle s ; s^n \rangle$ , com  $n \leq \infty$ , e o automorfismo  $\theta_t(s) = s^{-1}$ . Então

$$\begin{aligned}Z_n \times_{\theta} Z_2 &= \langle s, t ; s^n, t^2, stst \rangle \\ &= D_n\end{aligned}$$

Ou seja, o grupo diedro  $D_n$  é o produto semidireto de  $Z_n$  e  $Z_2$ . ■

# Apêndice C

## Espaços de curvatura constante

*Man: Hello, my boy. And what is your dog's name?*

*Boy: I don't know. We call him Rover.*

*Stafford Beer*

Euclides escreveu em 300 a.C. seus *Elementos*, um compêndio de treze volumes onde apresentava, entre outros temas, toda a geometria conhecida àquela época. Este trabalho tornou-se a referência básica de geometria durante dois mil anos, até o aparecimento das chamadas *geometrias não euclidianas* no século XIX (veja [75] para uma breve introdução histórica das geometrias não euclidianas e o seu desenvolvimento até os tempos atuais). Durante todo esse tempo, e até finais do século XIX, o pensamento generalizado era que o espaço “real” era euclidiano. Poucos pensadores tiveram a audácia de sugerir que as relações métricas no espaço físico correspondessem a uma geometria não euclidiana.<sup>1</sup> Além dos criadores destas geometrias como Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Riemann e Poincaré, entre outros, também houve filósofos como Pierce [31] e astrônomos como Schwarzschild [102] que, inclusive, propuseram métodos capazes de, em princípio, determinar qual geometria ajustava-se melhor ao nosso Universo.

Com o aparecimento da teoria da relatividade geral, e posteriormente de outras teorias geométricas da gravitação, chegou-se ao consenso quase que unânime de que não existe nenhum motivo a priori pelo qual a descrição do nosso Universo tivesse que supeditar-se exclusivamente ao uso da geometria euclidiana. A escolha da *melhor* geometria deveria ser decidida com base em medições e observações astronômicas.

Em 1929 Edwin Hubble [55] observou que as galáxias distantes possuem uma velocidade de recessão que é maior quanto mais distantes elas se encontram de nós. Hubble também determinou que, dentro da precisão das suas medidas, a distribuição das galáxias

---

<sup>1</sup>De fato, o próprio Lobachevsky chamava de “imaginária” à geometria hiperbólica criada por ele.



e suas velocidades de recessão não dependiam da direção de observação, estabelecendo então que o Universo observável é isotrópico.<sup>2</sup> Por outro lado, apelando ao chamado *princípio cosmológico*, segundo o qual a nossa posição no Universo não é privilegiada, e portanto um observador em qualquer outro lugar do Universo deveria também observar uma distribuição isotrópica de galáxias, e de velocidades de recessão de galáxias. Sob estas condições pode-se provar que, (i) a distribuição de galáxias é homogênea, (ii) a velocidade de recessão das galáxias não se deve a seus movimentos próprios, mas a uma *expansão do Universo*, e (iii) esta expansão é homogênea e isotrópica [61].

Estas observações astronômicas determinam então que a geometria que descreve nosso Universo deve ser uma geometria localmente homogênea, localmente isotrópica, e deve apresentar uma taxa de expansão global isotrópica. No apêndice A estudamos as geometrias com curvatura seccional constante, que são exatamente as geometrias localmente homogêneas e localmente isotrópicas: a euclídeana, a esférica e a hiperbólica. Estas três geometrias, no caso tridimensional, servem de base para a construção de possíveis modelos do nosso Universo. Na verdade, cada uma destas três geometrias pode fornecer uma quantidade infinita de modelos para o nosso Universo, estes modelos são chamados de formas espaciais; e todas as formas espaciais, com exceção de uma para cada geometria, possuem topologia não trivial. O estudo geométrico da expansão do Universo, assim como a dinâmica geradora desta expansão, são deixados para o próximo capítulo.

Na seção C.1 estuda-se com detalhe um método geral para contruir e descrever de maneira eficiente estas formas espaciais. Nas seções C.2 e C.3 desenvolve-se a teoria das formas espaciais para duas destas geometrias, classificando todas as formas espaciais euclídeanas (seção C.2) e esféricas (seção C.3) tridimensionais. A classificação das formas espaciais hiperbólicas é um problema matemático ainda não resolvido, e em intensa fase de investigação. Portanto na seção C.4 apresentam-se unicamente elementos da teoria das formas espaciais hiperbólicas e alguns exemplos.

## C.1 Poliedros fundamentais e instruções de colagem

Nesta seção iniciamos o estudo das variedades riemannianas de curvatura seccional constante e topologia não trivial. Na subseção C.1.1 estuda-se como fornecer uma estrutura riemanniana a um recobrimento, definindo desta maneira um recobrimento riemanniano. Nesta subseção também é introduzido o conceito de homogeneidade local. Na subseção C.1.2 apresentamos uma técnica extensivamente utilizada em topologia cósmica para des-

---

<sup>2</sup>Estas observações foram confirmadas com grande precisão em [56], e até o presente não foi encontrada nenhuma discrepância observacional.

crever as seções espaciais dos modelos de universo com topologia não trivial: a técnica dos poliedros fundamentais e instruções de colagem.

### C.1.1 Recobrimentos riemannianos

Nesta subseção começamos apresentando um lema que permite introduzir uma estrutura riemanniana numa das variedades de um recobrimento  $(M, p, N)$ , dada uma métrica na outra variedade (uma apresentação da teoria dos espaços de recobrimento encontra-se no apêndice 1). Posteriormente, nos teoremas C.1 e C.2, este lema é particularizado para o caso em que uma das variedades possui curvatura seccional constante. A prova do teorema C.1 é longa e complexa, mas encontra-se em vários textos de geometria riemanniana, já a prova do teorema C.2 é, essencialmente, uma aplicação direta do lema C.1.

Dadas duas variedades riemannianas  $M$  e  $N$ , um recobrimento  $(M, p, N)$  é dito **recobrimento riemanniano** se a aplicação de recobrimento  $p : M \rightarrow N$  é uma **isometria local**, ou seja, se  $N$  pode ser coberta por abertos admissíveis  $U \subset N$  tais que  $p$  restrita a cada componente conexa de  $p^{-1}(U)$  é uma isometria. O seguinte lema é frequentemente usado para construir e estudar recobrimentos riemannianos.

**Lema C.1** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciais,  $(M, p, N)$  um recobrimento, e denote por  $\Gamma = Deck(M, p, N)$ . Valem as seguintes afirmações:*

1. *Dada uma métrica riemanniana em  $N$ , existe uma única métrica riemanniana em  $M$  tal que  $(M, p, N)$  é um recobrimento riemanniano.*
2. *Se o recobrimento  $(M, p, N)$  é riemanniano, então  $\Gamma \subset Isom(M)$ .*
3. *Se  $(M, p, N)$  é um recobrimento regular, e  $M$  é uma variedade riemanniana tal que  $\Gamma \subset Isom(M)$ , então existe uma única métrica em  $N$  tal que  $(M, p, N)$  é um recobrimento riemanniano.*

Vamos agora enunciar dois teoremas clássicos em geometria riemanniana. O primeiro caracteriza o recobrimento universal de uma variedade de curvatura constante e pode ser enunciado como segue (veja por exemplo [23, 79, 122]). Já o segundo teorema é recíproco ao primeiro.

**Teorema C.1** *Se  $M$  é uma variedade riemanniana completa  $n$ -dimensional conexa com curvatura seccional constante  $k$ , então o seu espaço de recobrimento universal  $\widetilde{M}$ , com a métrica de recobrimento, é isométrico ao espaço*

1. *euclídeano  $E^n$  se  $k = 0$ ,*

2. esférico  $S^n$  se  $k = 1$ ,

3. hiperbólico  $H^n$  se  $k = -1$ .

**Teorema C.2** *Seja  $\widetilde{M}$  o espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico  $n$ -dimensional, e  $\Gamma$  um grupo de isometrias de  $\widetilde{M}$ . Então o quociente  $M = \widetilde{M}/\Gamma$ , com a métrica induzida pela aplicação de recobrimento  $p : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ , é uma variedade riemanniana completa, conexa e com curvatura seccional constante se e somente se  $\Gamma$  é discreto e age de maneira livre em  $\widetilde{M}$ .*

Uma **forma espacial** é uma variedade riemanniana completa, conexa e com curvatura seccional constante. O seguinte teorema permite identificar e classificar formas espaciais isométricas.

**Teorema C.3** *Seja  $\widetilde{M}$  o espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico  $n$ -dimensional, e  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \text{Isom}(\widetilde{M})$  grupos discretos agindo livremente em  $\widetilde{M}$ . Então  $\widetilde{M}/\Gamma_1 \approx \widetilde{M}/\Gamma_2$  se e somente se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são conjugados em  $\text{Isom}(\widetilde{M})$ .*

**Observação C.1** Como consequência dos teoremas C.2 e C.3, o problema de construir todas as formas espaciais  $n$ -dimensionais com curvatura constante  $k$  (para algum  $n$  dado) torna-se um problema em teoria de grupos: classificar todos os grupos de isometrias discretos e que agem livremente em  $\widetilde{M}$  módulo conjugação. Este problema já foi resolvido para o caso esférico em todas as dimensões, e para o caso euclidiano nas dimensões  $n \leq 4$  (veja [122] para uma apresentação matemática detalhada). As seções C.2 e C.3 são dedicadas à apresentação desta classificação para o caso euclidiano em dimensões 2 e 3 (Sec.C.2) e o caso esférico em dimensão 3 (Sec.C.3). O caso hiperbólico permanece sem solução inclusive no caso bidimensional [87, 112]. ■

Os teoremas C.1 e C.2 combinados fornecem um procedimento prático para construir formas espaciais que passamos a descrever. No que segue  $\widetilde{M}$  é o espaço euclidiano, esférico ou hiperbólico de dimensão  $n > 1$ .<sup>3</sup>

1. Escolha um subgrupo discreto  $\Gamma$  de isometrias de  $\widetilde{M}$  agindo livremente em  $\widetilde{M}$ .
2. Defina a relação de equivalência em  $\widetilde{M}$  dada por  $x \sim y$  se e somente se existe  $\varphi \in \Gamma$  tal que  $\varphi(x) = y$ , e considere o quociente  $M = \widetilde{M}/\Gamma$ . O grupo  $\Gamma$  é uma imersão (uma representação fiel) do grupo fundamental de  $M$  no grupo  $\text{Isom}(\widetilde{M})$ .

---

<sup>3</sup>O caso  $n = 1$  é trivial pois  $\widetilde{M}^1 = E^1$ , e neste caso a única variedade com topologia não trivial é o círculo  $S^1$ .

3. Defina no quociente  $M$  a distância

$$d([x], [y]) = \min_{\varphi, \psi \in \Gamma} \{d(\varphi(x), \psi(y))\}.$$

Como  $\Gamma$  é discreto e age livremente sobre  $\widetilde{M}$ , esta distância está bem definida, e o elemento de linha em  $M$  é o mesmo que o elemento de linha em  $\widetilde{M}$  e, como consequência, a curvatura seccional em  $M$  coincide com a curvatura seccional em  $\widetilde{M}$ .

Vamos generalizar agora o conceito de homogeneidade (ou homogeneidade global) apresentado na seção A.1, e estabelecer quando é que uma forma espacial é homogênea. Um espaço métrico  $M$  é dito **localmente homogêneo** se para todo par de pontos  $p, q \in M$  existem vizinhanças abertas  $U_p$  e  $U_q$  de  $p$  e  $q$ , e uma isometria  $\varphi : U_p \rightarrow U_q$  tal que  $\varphi(p) = q$ . Um espaço métrico completo, simplesmente conexo e localmente homogêneo é (globalmente) homogêneo.

Denotemos por  $X$  um espaço homogêneo e simplesmente conexo, e seja  $\Gamma$  um subgrupo discreto de  $Isom(X)$  agindo livremente em  $X$ . Seja  $A$  o centralizador de  $\Gamma$  em  $Isom(X)$ , e suponha que  $A$  seja transitivo em  $X$ . Como  $g \in \Gamma$  mapeia fibras em fibras, então  $A$  induz um grupo transitivo de isometrias em  $X/\Gamma$ , e portanto  $X/\Gamma$  é homogêneo. Temos então o seguinte teorema que resulta muito útil para identificar variedades homogêneas.

**Teorema C.4** *Seja  $X$  um espaço homogêneo simplesmente conexo,  $\Gamma$  um subgrupo discreto de  $Isom(X)$  agindo livremente em  $X$ , e  $A$  o centralizador de  $\Gamma$  em  $Isom(X)$ . Então,  $X/\Gamma$  é um espaço homogêneo se e somente se  $A$  é transitivo em  $X$ .*

Suponha que  $X/\Gamma$  seja um espaço homogêneo. Dados  $\varphi \in \Gamma$  e  $x, y \in X$ , seja  $A$  o centralizador de  $\Gamma$  em  $Isom(X)$ . Como  $A$  é transitivo em  $X$ , existe  $\alpha \in A$  tal que  $\alpha(x) = y$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} \delta_\varphi(x) &= d(x, \varphi(x)) \\ &= d(\alpha(x), \alpha\varphi(x)) \\ &= d(\alpha(x), \varphi\alpha(x)) \\ &= d(y, \varphi(y)) \\ &= \delta_\varphi(y). \end{aligned}$$

Portanto  $\varphi$  é uma translação de Clifford. Temos então a seguinte caracterização de espaços homogêneos em termos de translações de Clifford.

**Teorema C.5** *Seja  $X$  um espaço homogêneo simplesmente conexo e  $\Gamma$  um subgrupo discreto de  $\text{Isom}(X)$  agindo livremente em  $X$ . Se  $X/\Gamma$  é homogênea, então  $\Gamma$  consiste só de translações de Clifford.*

**Observação C.2** Segue-se deste teorema que se  $\Gamma$  contém uma isometria que não é translação de Clifford, então  $X/\Gamma$  não é um espaço homogêneo. No entanto deve se observar que  $X/\Gamma$  é localmente homogêneo. Não se sabe se a recíproca do teorema C.5 vale quando  $X$  é uma variedade homogênea, porem Wolf [122] tem provado que vale quando  $X$  tem curvatura seccional constante. ■

### C.1.2 Poliedros de Dirichlet e instruções de colagem

O conceito de **domínio fundamental** fornece uma descrição bastante útil das variedades quocientes. Vamos descrever um tipo particular de domínio fundamental denominado **domínio de Dirichlet** [7, 87], que é suficiente para os nossos propósitos nesta tese. É importante observar também que este procedimento é algorítmico e portanto pode ser implementado num programa de computador. O domínio de Dirichlet de  $\Gamma$  com centro  $x \in \widetilde{M}$  é o conjunto

$$\mathcal{D}_x = \{y \in \widetilde{M} : d(x, y) \leq d(\varphi(x), y), \forall \varphi \in \Gamma\}. \quad (\text{C.1})$$

**Observação C.3** Fixado um  $x \in \widetilde{M}$ , observe que cada isometria  $\varphi \in \Gamma$  define um  $(n - 1)$ -plano

$$P_x^\varphi = \{y \in \widetilde{M} : d(x, y) = d(\varphi(x), y)\}, \quad (\text{C.2})$$

tal que

1. se  $\rho$  é a reflexão em  $P_x^\varphi$ , então  $\rho(x) = \varphi(x)$ .

2.  $\varphi(P_x^{\varphi^{-1}}) = P_x^\varphi$ .

De fato, a primeira afirmação é imediata a partir das definições de reflexão num plano em cada uma das geometrias de curvatura constante (veja os lemas A.1 A.2 e A.4). Já para a segunda afirmação, note que  $y \in P_x^{\varphi^{-1}}$  é equivalente à igualdade  $d(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), y)$ ; mas então

$$\begin{aligned} d(x, \varphi(y)) &= d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1} \circ \varphi(y)) \\ &= d(\varphi^{-1}(x), y) \\ &= d(x, y) \\ &= d(\varphi(x), \varphi(y)), \end{aligned}$$

e portanto  $\varphi(y) \in P_x^\varphi$ . ■

Agora, um  $(n - 1)$ -plano  $P$  em  $\widetilde{M}$  gera dois semi-espacos  $H_1, H_2 \subset \widetilde{M}$ , tais que  $H_1 \cap H_2 = P$  e  $\rho(H_1) = H_2$ , onde  $\rho$  é a reflexão em  $P$ . Temos então que cada isometria  $\varphi \in \Gamma$  define um semi-espaço  $H_x^\varphi \subset \widetilde{M}$ , que é o semi-espaço gerado por  $P_x^\varphi$  que contém o ponto  $x \in \widetilde{M}$ . Observe que

$$H_x^\varphi = \{y \in \widetilde{M} : d(x, y) \leq d(\varphi(x), y)\}, \quad (\text{C.3})$$

e portanto o domínio de Dirichlet centrado em  $x \in \widetilde{M}$  é

$$\mathcal{D}_x = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} H_x^\varphi. \quad (\text{C.4})$$

Segue-se que o domínio de Dirichlet (C.1) é um **poliedro convexo**, ou seja, a interseção de uma família localmente finita de semi-espacos de  $\widetilde{M}$ .<sup>4</sup>

Seja  $P$  um poliedro convexo em  $\widetilde{M}$ , e  $\partial P$  a sua fronteira. Um subconjunto  $F \subset \partial P$  tal que  $F = P \cap L$ , para algum  $(n - 1)$ -plano  $L$  de  $\widetilde{M}$ , chama-se **face  $k$ -dimensional**, ou  **$k$ -face**, se está contido em algum  $k$ -plano de  $\widetilde{M}$ , com  $k < n$ , e não está contido em nenhum  $(k - 1)$ -plano de  $\widetilde{M}$ . Um poliedro convexo é **totalmente finito** se para cada  $k < n$ , o número de  $k$ -faces de  $P$  é finito. Embora o seguinte resultado seja intuitivamente óbvio, a sua demonstração é bastante técnica.

**Teorema C.6** *Seja  $M$  uma forma espacial,  $\widetilde{M}$  o seu espaço de recobrimento universal e  $\Gamma \subset \text{Isom}(\widetilde{M})$  o seu grupo de recobrimento. Então  $M$  é compacta se e somente se para qualquer  $x \in \widetilde{M}$ , o seu domínio de Dirichlet é um poliedro compacto. Além disso, se  $M$  é uma forma espacial compacta, então  $\mathcal{D}_x$  é um poliedro convexo totalmente finito.*

**Observação C.4** Um resultado bem menos óbvio é o seguinte: se a forma espacial  $M$  não é globalmente homogênea, a forma do poliedro de Dirichlet depende do ponto escolhido como centro. Isto é uma manifestação da inhomogeneidade global de  $M$ , em contraste com a homogeneidade global do seu recobrimento universal  $\widetilde{M}$ . O lema C.2 fornece uma justificativa parcial desta observação. ■

Os três lemas seguintes formam a base para uma construção algorítmica do poliedro de Dirichlet de uma forma espacial  $M$  (veja subseção 4.2.4). Observemos que, se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos, então  $A \setminus B$  denota o conjunto diferença de  $A$  e  $B$ .

<sup>4</sup>Que uma família  $\mathcal{H}$  de semi-espacos de  $\widetilde{M}$  seja **localmente finita** quer dizer que cada ponto de  $y \in H$ , onde  $H$  é um semi-espaço de  $\mathcal{H}$ , possui uma vizinhança que intercepta um número finito de fronteiras de semi-espacos de  $\mathcal{H}$ . A família de semi-espacos

$$\mathcal{H}_x^\Gamma = \{H_x^\varphi : \varphi \in \Gamma\} \quad (\text{C.5})$$

é localmente finita porque  $\Gamma$  é um grupo discreto de  $\text{Isom}(\widetilde{M})$ .

**Lema C.2 Semi-espacos essenciais.** *Seja  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  uma forma espacial,  $\mathcal{H}_x^\Gamma$  a famlia de semi-espacos dada por C.3 e C.5, com  $x \in \widetilde{M}$ , e*

$$\mathcal{M}_x^\Gamma = \left\{ H_0 \in \mathcal{H}_x^\Gamma : \mathcal{D}_x \neq \bigcap_{H \in \mathcal{H}_x^\Gamma \setminus \{H_0\}} H \right\}. \quad (\text{C.6})$$

Ento

1.  $\mathcal{D}_x$  * a intersecao dos elementos de  $\mathcal{M}_x^\Gamma$ , ou seja*

$$\mathcal{D}_x = \bigcap_{H \in \mathcal{M}_x^\Gamma} H. \quad (\text{C.7})$$

2.  $\mathcal{M}_x^\Gamma$  *gera todas as faces de  $\mathcal{D}_x$ , ou seja*

$$\mathcal{M}_x^\Gamma = \{H \in \mathcal{H}_x^\Gamma : \mathcal{D}_x \cap \partial H \text{ é uma } (n-1)\text{-face de } \mathcal{D}_x\}. \quad (\text{C.8})$$

3.  $\mathcal{M}_x^\Gamma$  *depende de  $x \in \widetilde{M}$ .*

Os elementos de  $\mathcal{M}_x^\Gamma$  chamam-se **semi-espacos essenciais** do poliedro  $\mathcal{D}_x$ , de vez que qualquer semi-espaco  $H \in \mathcal{H}_x^\Gamma \setminus \mathcal{M}_x^\Gamma$  não  necessário para construir o poliedro de Dirichlet com centro em  $x \in \widetilde{M}$ . Porém se retirarmos um semi-espaco de  $\mathcal{M}_x^\Gamma$ , a intersecao dos semi-espacos restantes já não fornece  $\mathcal{D}_x$ .

No restante desta secao vamos nos restringir aos casos bi- e tridimensionais, porém cabe observar que todos os enunciados a seguir podem ser convenientemente generalizados para dimensões arbitrárias [36]. Ao trabalhar com poliedros tridimensionais é usual se denominar as faces com nomes especiais de acordo com a dimensão. Assim, uma face 0-dimensional  chamada de **vrtice**, uma face 1-dimensional  chamada de **aresta**, e uma face 2-dimensional  chamada simplesmente de face. Adicionalmente, um poliedro bidimensional é chamado de **polígono**, mas para evitar repetições fúteis, no resto desta secao, ao tratar o caso bidimensional, vamos chamar os polígonos de poliedros, as arestas de faces, e os vrtices de arestas.

O seguinte lema segue-se facilmente a partir da observação C.3 e do lema C.2.

**Lema C.3 Instruções de colagem.** *Seja  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  uma forma espacial e  $\mathcal{D}_x$  um poliedro de Dirichlet para  $M$ , com  $x \in \widetilde{M}$ . Ento, para cada face  $F \subset \mathcal{D}_x$  existe uma outra face  $F' \subset \mathcal{D}_x$ , e uma isometria  $\varphi_F \in \Gamma$  tal que*

1.  $\varphi_F(F) = F'$ ,
2.  $\varphi_{F'} = \varphi_F^{-1}$ ,

3.  $\varphi_F$  leva rigidamente o interior de  $\mathcal{D}_x$  para fora de  $\mathcal{D}_x$ ,

4.  $\{\varphi_F : F \text{ é uma face de } \mathcal{D}_x\}$  é um conjunto de geradores de  $\Gamma$ .

As ternas  $(F, \varphi_F, F')$  definidas no lema acima são chamadas de **instruções de colagem** do poliedro  $\mathcal{D}_x$ , e a forma espacial  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  é descrita como sendo o poliedro  $\mathcal{D}_x$  com as faces  $F$  e  $F'$  identificadas (coladas) sob a ação de  $\varphi_F$ , ou seja um ponto  $y \in F$  é identificado com um ponto  $z \in F'$  se e somente se  $\varphi_F(y) = z$ . O poliedro  $\mathcal{D}_x$  é chamado, por simplicidade, de poliedro fundamental de  $M$ , e o conjunto dos semi-espacos essenciais para  $\mathcal{D}_x$  é construído usando estritamente as isometrias  $\varphi_F$ , ou seja

$$\mathcal{M}_x^\Gamma = \{P_x^{\varphi_F} : F \text{ é uma face de } \mathcal{D}_x\}, \quad (\text{C.9})$$

onde  $P_x^{\varphi_F}$  é dado por (C.2).

O lema C.3 nos fornece, no seu item 4, um conjunto de geradores para o grupo de recobrimento  $\Gamma$ . As relações necessárias para uma apresentação combinatória de  $\Gamma$  são dadas pelas considerações a seguir. Como cada aresta de  $\mathcal{D}_x$  é compartilhada por exatamente duas faces, podemos realizar a seguinte sequência de operações: escolha uma aresta  $C_1$  e uma das faces  $F_1$  que contém  $C_1$ , e seja  $F'_1 = \varphi_{F_1}(F_1)$ . Pegue  $C_2 = \varphi_{F_1}(C_1)$  e  $F_2$  a outra face contendo  $C_2$  diferente de  $F'_1$ , seja  $F'_2 = \varphi_{F_2}(F_2)$ . Pegue  $C_3 = \varphi_{F_2}(C_2)$  e continue desta maneira. Constrói-se desta forma a seguinte sequência de faces e arestas

$$F_1 \ C_1 \ F'_1 \ F_2 \ C_2 \ F'_2 \ F_3 \ C_3 \ F'_3 \ F_4 \ \dots, \quad (\text{C.10})$$

associada à qual temos a sequência de instruções de colagem  $\varphi_{F_1}, \varphi_{F_2}, \varphi_{F_3}, \dots$ , com a qual formamos a seguinte sequência de isometrias de recobrimento

$$\varphi_{F_1}, \varphi_{F_2} \circ \varphi_{F_1}, \varphi_{F_3} \circ \varphi_{F_2} \circ \varphi_{F_1}, \dots$$

**Lema C.4 Ciclos de arestas.** *Para cada sequência do tipo (C.10) existe um número inteiro  $r > 0$  tal que*

1.  $C_{r+1} = C_1$ , e

2.  $\varphi_{F_4} \circ \dots \circ \varphi_{F_2} \circ \varphi_{F_1} = id_{\widetilde{M}}$ ,

e portanto a soma dos ângulos diedros em torno das arestas da sequência (C.10), tomados de  $F'_{i-1}$  a  $F_i$ , é  $2\pi$ .

As relações entre os geradores dadas pelo item 2 do lema C.4 formam um conjunto completo de relações, portanto os lemas C.3 e C.4 fornecem uma apresentação para  $\Gamma$  em termos de geradores e relações. Observe que se  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  é compacto, então a apresentação de  $\Gamma$  obtida é finita.



**Observação C.5** Existe uma versão recíproca dos resultados descritos pelos lemas C.3 e C.4, conhecido como **teorema do poliedro de Poincaré** [84], que garante que se um poliedro  $P$  em  $\widetilde{M}$  possui as propriedades mencionadas nestes lemas, então (i) o grupo  $\Gamma$  gerado pelas isometrias  $\varphi_F$ 's é discreto, (ii) age livremente sobre  $\widetilde{M}$ , e portanto (iii)  $M = \widetilde{M}/\Gamma$  é uma forma espacial. Relaxando o segundo item do lema C.4 ao exigir que a soma dos ângulos diedros de algum ciclo de arestas seja  $2\pi/m$  para algum inteiro positivo  $m$ , resulta que o grupo  $\Gamma$  continua sendo discreto, mas não age mais de maneira livre sobre  $\widetilde{M}$  se  $m > 1$ . Neste caso o quociente  $\widetilde{M}/\Gamma$  não é mais uma variedade, mas o que Thurston denomina de **orbifold** [36, 44, 72, 87, 112]. O teorema do poliedro de Poincaré foi implementado algoritmicamente num programa de computador para o caso hiperbólico tridimensional por Riley em [90], e posteriormente por Jeffrey Weeks no programa SnapPea (veja por exemplo [1]). ■

O seguinte teorema é intuitivamente óbvio.

**Teorema C.7** *Seja  $M$  uma forma espacial. Então todos os domínios de Dirichlet de  $M$  possuem o mesmo volume; isto é, se  $x, y \in \widetilde{M}$ , então*

$$Vol(D_x) = Vol(D_y).$$

Este teorema permite definir o volume de uma forma espacial  $M$  como sendo o volume de qualquer um dos seus domínios de Dirichlet. Em particular temos o seguinte corolário.

**Corolário C.1** *Se  $M_1$  e  $M_2$  são formas espaciais isométricas, então*

$$Vol(M_1) = Vol(M_2).$$

## C.2 Formas espaciais euclidianas

As seções espaciais nos modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître com densidade de matéria igual à densidade crítica  $\rho_c$  (veja a equação (3.38) na seção 3.1) são formas espaciais euclidianas tridimensionais. Nesta seção são estudadas com detalhe as formas espaciais euclidianas bi- e tridimensionais.

Na subseção C.2.1 são apresentados dois teoremas de classificação das formas espaciais euclidianas bidimensionais. O primeiro é um teorema que classifica estas formas módulo difeomorfismos, já o segundo teorema refina esta classificação a uma classificação isométrica. Estes dois teoremas são utilizados para apresentar uma classificação módulo difeomorfismos, e outra módulo isometrias, das formas euclidianas tridimensionais não

compactas na subseção C.2.2. Nesta subseção apresentam-se também classificações difeomorfas e isométricas das formas espaciais euclidianas compactas. A classificação módulo difeomorfismos das formas espaciais compactas é apresentada em forma tabelada para facilitar o seu uso posterior. As formas orientáveis encontram-se na tabela C.2, e as não orientáveis na tabela C.3. Finalmente, na subseção C.2.3 estuda-se com detalhe, e a título de exemplo, uma variedade de tipo  $\mathcal{G}_6$  e alguns recobrimentos desta. Esta seção está baseada nas seções 2.5 e 3.1-3.5 de [122].

Antes de passar ao estudo destas classificações, é conveniente fazer as seguintes observações técnicas. Seja  $\alpha = (a, A) \in Isom(E^n)$ , então  $\alpha$  não tem pontos fixos se e somente se  $a \notin (A - I)E^n$ . De fato, a existência de um  $y \in E^n$  tal que  $\alpha(y) = y$ , é equivalente à existência de um  $y \in E^n$  tal que  $a = (I - A)y$ , ou seja, à condição  $a \in (A - I)E^n$ . Por outro lado, como o subespaço  $(A - I)E^n$  é ortogonal ao autoespaço de  $A$  com autovalor  $+1$ , então  $\alpha$  possui pontos fixos se e somente se  $a$  é ortogonal a este autoespaço. Segue-se que se  $\alpha$  não possui pontos fixos, então o grupo gerado por  $\alpha$  é cíclico infinito.

Suponha agora que  $\Gamma \subset Isom(E^n)$  é um subgrupo fechado. Para qualquer  $a \in E^n$

$$\begin{aligned} Stab_a &= \{g \in \Gamma : ga = a\} \\ &= \Gamma \cap (\tau_a \cdot O(n) \cdot \tau_a^{-1}), \end{aligned}$$

e como  $O(n)$  é compacto, então  $Stab_a$  também o é. Segue-se que  $\Gamma$  age livremente em  $E^n$  se e somente se  $\Gamma$  não tem elementos de ordem finita, ou seja se  $\Gamma$  é um grupo **sem torção**.

Resumindo os resultados acima temos o seguinte teorema:

**Teorema C.8 Formas espaciais euclidianas.** *Seja  $\Gamma \subset Isom(E^n)$ , então  $E^n/\Gamma$  é uma forma espacial euclidiana se e somente se  $\Gamma$  é um grupo discreto e sem torção.*

Portanto, o problema de classificar todas as formas espaciais euclidianas de dimensão  $n$  reduz-se a encontrar todos os subgrupos discretos e sem torção de  $Isom(E^n)$ . Mais ainda, para classificar todas as formas espaciais euclidianas módulo isometrias é necessário classificar as classes de conjugação destes subgrupos discretos e sem torção em  $Isom(E^n)$ .

## C.2.1 Formas espaciais euclidianas bidimensionais

O principal interesse na topologia cósmica está nas formas espaciais tridimensionais. Porém, devido ao teorema C.13 adiante, as classificações das formas espaciais euclidianas não compactas, e a classificação isométrica das formas compactas euclidianas tridimensionais, é possível só depois de ter obtido classificações análogas no caso bidimensional. Esta

subseção, portanto, é dedicada à apresentação das classificações difeomorfas e isométricas das formas espaciais euclidianas bidimensionais. A aplicação do teorema C.8 ao caso bidimensional dá lugar ao seguinte teorema.

**Teorema C.9** *As formas espaciais euclidianas bidimensionais são o plano euclideo, os cilindros, as faixas de Möbius, os toros e as garrafas de Klein. Mais ainda, quaisquer*

*dois cilindros                      são difeomorfos,*  
*duas faixas de Möbius        são difeomorfos,*  
*dois toros                            são difeomorfos,*  
*duas garrafas de Klein        são difeomorfos.*

Vamos descrever as formas espaciais dadas pelo teorema C.9 em termos de subgrupos de isometrias do plano euclideo. A prova que estas são as únicas formas espaciais euclidianas bidimensionais consiste em mostrar que estes grupos são os únicos subgrupos discretos e sem torção de  $Isom(E^2)$ . Esta prova não é complicada, porém é longa e pode ser encontrada na seção 2.5 de [122]. A prova do teorema C.9 está baseada nos seguintes dois lemas que enunciamos para seu uso posterior.

**Lema C.5** *Seja  $\Gamma$  um grupo de isometrias agindo livremente em  $E^2$ , e seja  $\Gamma_t \subset \Gamma$  o subgrupo que consiste em todas as translações em  $\Gamma$ . Então  $\Gamma = \Gamma_t$  ou  $\Gamma = \Gamma_t \cup \gamma\Gamma_t$ , onde (com uma escolha apropriada da origem e de uma base em  $E^2$ )*

$$\gamma = (b, B) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad Bb = b \neq 0. \quad (C.11)$$

*Reciprocamente, um grupo  $\Gamma = \Gamma_t \cup \gamma\Gamma_t$  age livremente em  $E^2$  se e somente se  $\gamma = (0, I)$ , ou  $\gamma$  está dado por (C.11) e  $2b \neq (B + I)a$  para todo  $(a, I) \in \Gamma_t$ .*

**Lema C.6** *Um grupo  $\Gamma_t$  de translações age de maneira propriamente descontínua em  $E^n$  se e somente se existem  $m$  vetores linearmente independentes  $v_i \in E^n$ , com  $0 \leq m \leq n$ , tal que as translações  $\tau_{v_i}$  geram  $\Gamma_t$ .*

A prova do lema C.6 é uma aplicação direta dos teoremas C.2 e 1.2, já a prova do lema C.5 envolve um pouco de álgebra linear e pode ser encontrada em [122].

A descrição das formas espaciais planas bidimensionais é como segue:

**Plano euclideo.**  $\Gamma = \{(0, I)\}$ , e portanto  $E^2/\Gamma = E^2$ .

**Cilindro.**  $\Gamma = \Gamma_t = \langle (a, I) \rangle$ , com  $a \neq 0$ .

**Faixa de Möbius.**  $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ , com  $\gamma$  dado por (C.11). Neste caso  $\Gamma_t = \langle \gamma^2 \rangle = \langle (2b, I) \rangle$ , e portanto  $E^2/\Gamma$  pode ser construído a partir do cilindro  $E^2/\Gamma_t$  cortando-o longitudinalmente pela metade, e colando uma destas metades pelos bordos com orientações revertidas.

**Toro.**  $\Gamma = \Gamma_t = \langle (a, I) \rangle \oplus \langle (b, I) \rangle$ , com  $a$  e  $b$  linearmente independentes.

**Garrafa de Klein.**  $\Gamma = \langle \alpha, \gamma; \alpha\gamma\alpha\gamma^{-1} \rangle$ , onde  $\alpha = (a, I)$  e  $\gamma$  vem dada por (C.11), com  $a$  ortogonal a  $b$ . Além disso,  $\Gamma_t = \langle \alpha \rangle \oplus \langle \gamma^2 \rangle$ , e portanto a garrafa de Klein  $E^2/\Gamma$  pode ser obtida cortando o toro  $E^2/\Gamma_t$  ao longo do *gerador vertical*,  $\alpha$ , e colando os extremos de uma das partes com orientações revertidas.

Até este ponto as formas espaciais euclidianas bidimensionais tem sido agrupadas em famílias de formas difeomorfas. Porém, com exceção do plano euclideo, em cada uma das famílias restantes podem ser encontradas formas espaciais *de diferentes tamanhos*, ou seja, não isométricas. É conveniente então proceder a um refinamento desta classificação para poder identificar formas espaciais isométricas. A classificação isométrica dos cilindros, faixas de Möbius e garrafas de Klein é imediata e óbvia, e está resumida no seguinte teorema.

**Teorema C.10 Classificação isométrica das formas espaciais bidimensionais (exceto o toro).**

- *As classes de isometria dos cilindros e das faixas de Möbius estão parametrizadas pelos números reais positivos. Por convenção, a classe de  $E^2/\langle a \rangle$  está caracterizada pelo número  $|a|$ , e a classe de  $E^2/\langle \gamma \rangle$  está caracterizada pelo número  $2|b|$ .*
- *As classes de isometria das garrafas de Klein estão parametrizadas pelos pares ordenados de números reais positivos. Por convenção, a classe de  $E^2/\Gamma$  está caracterizada pelo par  $(2|b|, |a|)$ .*

Este teorema diz que dois cilindros são isométricos somente se as geodésicas fechadas correspondentes aos geradores dos seus grupos de recobrimento são do mesmo comprimento, ou seja, enuncia o resultado intuitivamente óbvio de que dois cilindros são do mesmo tamanho somente se tem a mesma largura. O mesmo aplica-se para as faixas de Möbius, porém, neste caso cabe observar que o parâmetro usado para caracterizar uma faixa de Möbius é o tamanho do cilindro que o recobre. No caso das garrafas de Klein, como as translações que entram na definição do seu grupo de recobrimento são ortogonais, a

classificação isométrica se dá também somente em termos de comprimentos de geodésicas fechadas.

A classificação isométrica dos toros é um pouco mais problemática, pois um toro tem mais *graus de liberdade* do que apenas os comprimentos de geodésicas fechadas. De fato, os geradores do grupo de recobrimento de um toro podem não ser ortogonais, e esta possibilidade é a origem das dificuldades na sua classificação isométrica. A classificação isométrica dos toros de dimensão  $m$  é feita a partir das seguintes considerações. Um **reticulado** em  $E^m$  é a órbita da origem sob a ação de um grupo discreto de  $m$  translações linearmente independentes em  $E^m$ . Escolhendo uma base  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} \subset E^m$  constrói-se um reticulado fazendo agir o grupo pelas translações  $\tau_{e_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sob a origem. Este reticulado é o conjunto

$$\Lambda_e = \{n^i e_i : n^i \in \mathbb{Z}\}.$$

Agora, nem sempre bases diferentes produzem reticulados diferentes. De fato, considere o subgrupo de  $GL(m, \mathbb{R})$  com entradas inteiras e determinante 1,

$$SL(m, \mathbb{Z}) = \{A = [a_{ij}] \in GL(m, \mathbb{R}) : \det(A) = 1, a_{ij} \in \mathbb{Z}\};$$

então o reticulado  $\Lambda_f$ , onde  $f = A \cdot e$ , com  $A \in SL(m, \mathbb{Z})$ , é igual a  $\Lambda_e$ . Isto segue-se da seguinte observação; cada  $f_i$  é uma combinação linear inteira da base  $e$ , e portanto  $\Lambda_f \subset \Lambda_e$ . Reciprocamente,  $e = A^{-1} \cdot f$ , e portanto  $\Lambda_e \subset \Lambda_f$ . Segue-se que  $\Lambda_e = \Lambda_f$ , ou seja, se duas bases em  $E^m$  estão relacionadas por um elemento de  $SL(m, \mathbb{Z})$  então elas produzem o mesmo reticulado. Porém duas bases podem produzir o mesmo reticulado sem estar relacionadas por um elemento de  $SL(m, \mathbb{Z})$ , um exemplo simples é dado pelas bases  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  e  $f = \{-e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , que estão relacionadas apenas por uma transformação ortogonal. Isto dá lugar à seguinte generalização: dois reticulados em  $E^m$  são equivalentes se as bases que os geram estão relacionadas por uma transformação ortogonal. Temos portanto o seguinte lema.

**Lema C.7** *Duas bases  $e$  e  $f$  de  $E^m$  geram reticulados equivalentes se e somente se existem  $A \in SL(m, \mathbb{Z})$  e  $B \in O(m)$  tais que  $f = A \cdot e \cdot B$ .<sup>5</sup>*

Observando agora que na passagem ao quociente para construir o  $m$ -toro  $E^m/\Gamma$ , onde  $\Gamma$  é o grupo gerado pelas translações definidas pela base  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , todos os pontos do reticulado  $\Lambda_e$  são equivalentes, e que dois  $m$ -toros  $E^m/\Gamma_1$  e  $E^m/\Gamma_2$  são isométricos se e somente se os seus reticulados associados são equivalentes, chegamos ao seguinte teorema:

---

<sup>5</sup>Denotamos  $A \cdot B$  o produto de duas matrizes  $A$  e  $B$ , e uma base é considerada como uma matriz quadrada cujas filas estão formadas pelos vetores que a compõem.

**Teorema C.11** *As classes de isometria dos  $m$ -toros estão parametrizados pelo espaço quociente duplo  $SL(m, Z) \backslash GL(m, R) / O(m)$  da seguinte maneira: seja  $T^m = E^m / \Gamma$  um  $m$ -toro com  $\Gamma$  gerado pelas translações definidas pela base  $e = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , este toro é determinado pela classe de equivalência  $[A(T^m)] = SL(m, Z) \cdot A(T^m) \cdot O(m)$ , onde*

$$A(T^m) = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} \in GL(m, R).$$

Aplicamos este teorema ao caso bidimensional. Seja  $e = \{e_1, e_2\}$  uma base em  $E^2$ ,  $\Lambda_e$  o reticulado associado a  $e$ ,  $\Gamma$  o grupo gerado pelas translações definidas por  $\Lambda_e$ , e  $T_e$  o toro correspondente. Mediante uma transformação ortogonal conveniente podemos supor que  $e_1 = r\hat{i}$  e  $e_2 = s\hat{i} + t\hat{j}$ , com  $r, t > 0$  e  $|e_2| \geq |e_1|$ . Identificando  $E^2$  com o plano complexo temos a seguinte correspondência

$$\begin{aligned} e_1 &\longleftrightarrow r \in R^+ \\ e_2 &\longleftrightarrow s + ti, \quad s \in R, t \in R^+ \quad \text{e} \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Usando esta correspondência o reticulado  $\Lambda_e$  é

$$\Lambda_e = \{r(n^1 + n^2 z) : n^1, n^2 \in Z\},$$

onde  $z = (s + ti)/r$ . Portanto  $T_e$  fica caracterizado pelo par  $(r, z) \in R^+ \times C$ , com  $|z| \geq 1$ . Observe, porém, que o par  $(r, w)$  com  $w = mr + z$ ,  $m \in Z$ , também caracteriza o mesmo toro, pois a base  $f = \{e_1, me_1 + e_2\}$  gera o toro  $T_f$  isométrico a  $T_e$ .

Para obter uma parametrização unívoca do toro  $T_e$  considere a ação de  $SL(2, R)$  em  $H^2$  dada por<sup>6</sup>

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

e os reticulados  $L_z$  e  $L_w$ , onde

$$L_z = \{n + mz : n, m \in Z\},$$

com  $z \in H^2$ .

Se  $w \sim z$  pela ação de  $SL(2, Z)$  em  $H^2$ , então existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, Z)$  tal que

$w = \frac{az+b}{cz+d}$ , e portanto

$$\begin{aligned} n + mw &= n + \frac{maz + mb}{cz + d} \\ &= \frac{1}{cz + d} [(nd + mb) + (nc + ma)z]. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Observe que estamos usando o modelo do semi-plano superior para  $H^2$ .

Segue-se que  $L_w = \frac{1}{cz+d}L_z$ . Suponha agora que  $L_w = \beta L_z$  para algum  $\beta \in C$ . Como  $1, w \in L_w$ , então existem inteiros  $a, b, c, d$  tais que

$$\begin{aligned} 1 &= \beta(d + cz), \\ w &= \beta(b + az), \end{aligned}$$

e portanto

$$w = \frac{w}{1} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Por outro lado, a condição  $L_z = \frac{1}{\beta}L_w$  implica que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$  também tem entradas inteiras, e portanto  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, Z)$ . Em particular tem-se que  $Im(w) = |\beta|^2 Im(z)$ .

Agora, dois reticulados  $\Lambda_e$  e  $\Lambda_f$  geram o mesmo toro se  $\Lambda_e = e^{i\theta}\Lambda_f$ , e portanto  $H^2/SL(2, R)$  parametriza os toros bidimensionais módulo dilatação, ou seja  $E^2/\Gamma_e$  e  $E^2/\Gamma_f$  são equivalentes sob a ação de  $SL(2, R)$  em  $H^2$  se e somente se  $E^2/\Gamma_e$  é isométrico a  $E^2/r\Gamma_f$  para algum  $r > 0$ . Temos portanto o seguinte teorema:

**Teorema C.12 Classificação isométrica dos toros.** *As classes isométricas dos toros bidimensionais estão parametrizadas pelos pares  $(r^2, [w]) \in R^+ \times H^2/SL(2, Z)$ . O par  $(r^2, [w])$  corresponde ao toro gerado pelo reticulado  $L_{rw} = \{nr + mrw : n, m \in Z\}$ , com  $r > 0$ .*

## C.2.2 Formas espaciais euclidianas tridimensionais

Nesta subseção são discutidas com detalhe as formas espaciais euclidianas tridimensionais. Em particular, apresentam-se classificações difeomorfas e isométricas para as formas euclidianas não compactas (teorema C.14) e compactas (teoremas C.18 e C.19). Adicionalmente obtém-se, a partir de um teorema de Bieberbach, um resultado com consequências importantes para a topologia cósmica, e em particular para o método de cristalografia cósmica: toda forma espacial euclidiana tridimensional compacta é recoberta por um tritoro.

Seja  $N \subset M$  uma subvariedade riemanniana de  $M$ ,  $N$  é dita **totalmente geodésica** se toda geodésica de  $M$  tangente a  $N$  em algum ponto está totalmente contida em  $N$ . Tem-se que uma subvariedade  $N \subset M$  é totalmente geodésica se e somente se toda  $N$ -geodésica é também uma  $M$ -geodésica. Se  $E$  é uma seção plana de  $T_p N$ , para algum  $p \in N$ , então a superfície riemanniana  $S_E = exp_p(E)$  é a mesma em  $M$  ou em  $N$ , e a

sua curvatura gaussiana é a curvatura seccional  $K(p, E)$ , seja ela computada em  $M$  ou em  $N$ . Em particular se  $M$  é de curvatura constante, então  $N$  também o é. Agora, a classificação das formas espaciais não compactas está baseada no seguinte teorema cuja prova encontra-se em [122].

**Teorema C.13** *Seja  $M$  uma forma espacial euclideana, então existe uma retração por deformação diferenciável de  $M$  sobre uma subvariedade compacta totalmente geodésica.*

**Exemplo C.1** Considere o cilindro  $S^1 \times E^1$ , quociente do plano  $E^2$  pelo grupo  $\langle \tau_{2\pi e_1} \rangle$ , com  $e_1 = (1, 0)$ . Todo ponto do cilindro é da forma  $([x], y)$ , onde  $x, y \in R$ , e  $[x] = \{u \in R : u = x + 2\pi n, \text{ para algum } n \in Z\}$ . A retração

$$\begin{aligned} f : S^1 \times E^1 &\rightarrow S^1 \\ ([x], y) &\mapsto [x] \end{aligned}$$

mostra que o círculo é um retrato por deformação do cilindro. O círculo é uma variedade totalmente geodésica do cilindro pois é o quociente do subespaço do plano  $E^1 = \{(x, 0) : x \in R\}$  pelo grupo  $\langle \tau_{2\pi e_1} \rangle$ . ■

Considere a isometria sem pontos fixos  $\alpha = (a, A) \in Isom(E^3)$ . Se  $A \in SO(3)$  então  $A = I$  ou  $A$  possui autovalores  $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ , com  $0 < \theta \leq \pi$ , e é portanto uma rotação de um ângulo  $\pm\theta$  em torno do eixo  $\hat{a}$  formado pelos autovetores de  $A$  com autovalor 1. Logo  $\alpha$  é uma rotação em torno do eixo  $\hat{a}$  seguido de uma translação numa direção não ortogonal a  $\hat{a}$ . Podemos portanto decompor

$$a = a' + b',$$

onde  $Aa' = a' \neq 0$ , e  $b'$  ortogonal a  $\hat{a}$ . Como existe um único  $b \in E^3$  ortogonal a  $\hat{a}$  tal que  $(I - A)b = b'$ , tem-se que para todo  $x \in E^3$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= Ax + a' + b' \\ &= Ax + a' + (I - A)b \\ &= A_b(x) + a', \end{aligned}$$

onde  $A_b = \tau_b \circ A \circ \tau_b^{-1}$  é uma rotação de um ângulo  $\pm\theta$  em torno do eixo  $\hat{a}$  deslocado até  $b, \tau_b(\hat{a})$ , seguido de uma translação  $a'$  paralela ao eixo  $\hat{a}$ . Segue-se então o seguinte lema

**Lema C.8 Movimentos de parafuso.** *Toda isometria  $\alpha = (a, A)$ , sem pontos fixos e que preserva a orientação, é um movimento de parafuso, ou seja uma rotação ao longo de algum eixo (não necessariamente passando pela origem) seguida por uma translação não nula paralela a esse eixo.*



Considere agora a isometria sem pontos fixos  $\alpha = (a, A) \in Isom(E^3)$ , com  $\det(A) = -1$ . A transformação ortogonal  $A$  deve possuir pelo menos um autovalor  $+1$ , logo os autovalores de  $A$  são  $\{-1, 1, 1\}$ , e portanto  $A$  é uma reflexão no plano ortogonal ao eixo  $\hat{\alpha}$  formado pelos autovetores de  $A$  com autovalor  $-1$ . Adicionalmente,  $a$  é uma translação não paralela a este eixo  $\hat{\alpha}$ , e portanto podemos escrever

$$a = a' + 2b',$$

com  $Ab' = -b'$  e  $a' \neq 0$  ortogonal a  $\hat{\alpha}$ . Como  $b' = \frac{1}{2}(I - A)b'$  tem-se que para todo  $x \in E^3$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= Ax + a' + 2b' \\ &= Ax + (I - A)b' + a' \\ &= A_{b'}(x) + a', \end{aligned}$$

onde  $A_{b'} = \tau_{b'} \circ A \circ \tau_{b'}^{-1}$  é uma reflexão no plano ortogonal ao eixo  $\hat{\alpha}$  que passa pelo ponto  $b'$ . Temos então o seguinte lema.

**Lema C.9 Reflexões com deslizamento.** *Toda isometria  $\alpha = (a, A)$  sem pontos fixos e que reverte a orientação é uma **reflexão com deslizamento**, ou seja uma reflexão num plano (não necessariamente passando pela origem) seguida de uma translação não nula paralela a este plano.*

Considere agora uma base  $\{a, b, c\}$  em  $E^3$ , com  $c$  ortogonal a  $a$  e  $b$ , e as seguintes rotações

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

e reflexões

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

escritas nesta base. Temos a seguinte classificação das formas espaciais euclidianas tridimensionais não compactas, a qual está baseada no teorema C.13 e na classificação das formas espaciais euclidianas compactas de dimensão menor que três.

**Teorema C.14 Formas espaciais euclidianas tridimensionais não compactas.** *As formas espaciais euclidianas tridimensionais não compactas são dadas na tabela C.1. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Dois formas espaciais são difeomorfas se e somente se pertencem à mesma classe.*

Classe	Geradores de $\Gamma$	Direções das translações	Retrato
$E^3$	$(1,0)$	–	Ponto
$S_1^\theta$	$(a, S_\theta)$	$S_\theta(a) = a$	Círculo
$S_2$	$(a, E)$	$E(a) = a$	Círculo
$\mathcal{T}_1$	$a, b$	$a$ e $b$ l.i.	Toro
$\mathcal{T}_2$	$(a, E), (b, E)$	$E(a) = a, E(b) = b, a$ e $b$ l.i.	Toro
$\mathcal{K}_1$	$a, (b, B)$	$B(a) = -a, B(b) = b$	Garrafa de Klein
$\mathcal{K}_2$	$a, (b, F)$	$F(a) = -a, F(b) = b$	Garrafa de Klein
$\mathcal{K}_3$	$(a, E), (b, B)$	$E(a) = a = -B(a), E(b) = b = B(b)$	Garrafa de Klein

Tabela C.1: Classes difeomorfas de formas espaciais euclidianas não compactas.  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

2. Duas formas espaciais difeomorfas são afim-difeomorfas, ou uma delas é do tipo  $S_1^{\theta_1}$  e a outra do tipo  $S_1^{\theta_2}$ , com  $\theta_1 \neq \theta_2$ .
3. Duas formas espaciais afim-difeomorfas são isométricas se e somente se as subvariedades compactas às quais estas são retraídas são isométricas.

**Observação C.6** As formas espaciais  $E^3, S_1^\theta, \mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{K}_1$  são orientáveis; as formas espaciais  $S_2, \mathcal{T}_2, \mathcal{K}_2$  e  $\mathcal{K}_3$  são não orientáveis. ■

Consideremos agora a classificação das formas espaciais compactas. Um grupo discreto  $\Gamma \subset Isom(E^n)$  é um **grupo cristalográfico**  $n$ -dimensional se o quociente  $E^n/\Gamma$  é compacto. Os grupos cristalográficos estão totalmente caracterizados pelos teoremas de Bieberbach que passamos a enunciar [87, 112, 122]. Dada uma isometria  $\alpha = (a, A) \in Isom(E^n)$ , a transformação ortogonal  $A$  é chamada de **componente ortogonal** de  $\alpha$ .

**Teorema C.15 (Bieberbach)** *Seja  $\Gamma$  um grupo cristalográfico  $n$ -dimensional. Então  $\Gamma_t = \Gamma \cap E^n$  é um subgrupo normal de índice finito em  $\Gamma$ , e todo conjunto minimal de geradores de  $\Gamma_t$  é uma base de  $E^n$  relativa à qual as componentes ortogonais dos elementos de  $\Gamma$  são matrizes inteiras.*

**Teorema C.16 (Bieberbach)** *Para cada inteiro  $n > 0$  existe um número finito de classes de isomorfismo de grupos cristalográficos  $n$ -dimensionais. Dois grupos cristalográficos são isomorfos se e somente se são conjugados em  $E^n$  por uma transformação afim.*

Como, em particular, as formas espaciais compactas  $n$ -dimensionais são quocientes de  $E^n$  por grupos cristalográficos sem torção, os teoremas de Bieberbach dão lugar aos resultados resumidos no seguinte teorema que tem consequências fundamentais na topologia cósmica.

**Teorema C.17** *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Toda forma espacial euclideana compacta  $n$ -dimensional admite um recobrimento riemanniano regular por um toro  $n$ -dimensional.*
2. *Para cada  $n > 0$  existe um número finito de classes de difeomorfismo afim de formas espaciais euclidianas compactas de dimensão  $n$ .*
3. *Duas formas espaciais euclidianas compactas são afim-difeomorfas se e somente se possuem grupos fundamentais isomorfos.*

A classificação das formas espaciais euclidianas compactas tridimensionais fornece dois invariantes topológicos adicionais: o grupo de holonomia e o primeiro grupo de homologia. Os grupos de homologia,  $H_n(M, Z)$ , de uma variedade  $M$  não tem sido apresentados nesta tese pois possuem definições extensas demais para serem incluídas, e só será utilizado marginalmente o primeiro grupo de homologia  $H_1(M, Z)$  que pode ser calculado abelianizando o grupo fundamental de  $M$  (veja por exemplo o teorema 3.4 em [18]). Exemplos deste procedimento encontram-se na próxima subseção.

Passamos agora a descrever o grupo de holonomia de uma variedade afim, ou seja uma variedade diferencial munida de uma conexão afim (veja, por exemplo, [122]). Dados um ponto  $p \in M$  e  $\alpha : I \rightarrow M$  um laço seccionalmente diferenciável com base em  $p$ , considere o transporte paralelo  $\tau_\alpha : T_p M \rightarrow T_p M$  de vetores tangentes ao longo do laço  $\alpha$ . O produto de laços em  $p \in M$  induz um produto nos transportes paralelos  $\tau_\alpha$ , os quais formam um grupo  $\Psi_p$  de transformações lineares em  $T_p M$  chamado **grupo de holonomia linear** em  $p$ . Como  $M$  é conexa, dado um outro ponto  $q \in M$ , a função

$$\begin{aligned} \eta : \Psi_p &\rightarrow \Psi_q \\ \tau &\mapsto \tau_\beta \cdot \tau \cdot \tau_\beta^{-1}, \end{aligned}$$

onde  $\beta : I \rightarrow M$  é um caminho de  $p$  a  $q$ , é um isomorfismo entre  $\Psi_p$  e  $\Psi_q$ . Esta equivalência entre os grupos de holonomia de cada ponto numa variedade conexa permite falar do grupo de holonomia linear  $\Psi$  de  $M$ . Se  $\alpha, \beta : I \rightarrow M$  são dois laços com base em  $p \in M$  homotopicamente equivalentes, então a homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$  estabelece um caminho entre  $\tau_\alpha$  e  $\tau_\beta$  em  $\Psi_p$ . Portanto os transportes paralelos ao longo de laços homotópicos estão na mesma componente conexa por caminhos de  $\Psi_p$ . Denotando por  $\Psi_p^0$  a componente conexa por caminhos à identidade em  $\Psi_p$ , temos então o seguinte homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{aligned} h : \pi_1(M, p) &\rightarrow \Psi / \Psi_p^0 \\ [\alpha] &\mapsto [\tau_\alpha]. \end{aligned}$$

Observe no entanto que este homomorfismo não é um isomorfismo, e portanto  $\pi_1(M, p)$  e  $\Psi_p$  são grupos diferentes.

Agora, se  $M$  é uma forma espacial euclideana compacta com grupo de recobrimento  $\Gamma \subset Isom(E^n)$ , então pelo teorema C.17 o toro minimal que recobre  $M$  é  $T^n = E^n/\Gamma_t$ , com  $\Gamma_t = \Gamma \cap E^n$ . Se  $G = \Gamma/\Gamma_t$ , então  $M = T^n/G$ . Vamos agora caracterizar o grupo  $G$  em termos da holonomia de  $M$ . Observemos que  $\Psi^0$  é trivial pois  $M$  é quociente de  $E^n$ , e o espaço euclidiano tem holonomia trivial, logo o homomorfismo  $h : \pi_1(M) \rightarrow \Psi/\Psi^0$  vira um homomorfismo  $h : \pi_1(M) \rightarrow \Psi$ , e portanto  $\Psi$  é totalmente desconexo. Por outro lado, identificando  $\Gamma$  com  $\pi_1(M)$ , interpretamos  $(a, A) \in \Gamma$  como representante do laço em  $M$  que é a projeção do caminho que vai de  $0 \in E^n$  a  $a \in E^n$ . É claro que  $h(a, A) = A$ , ou seja o grupo de holonomia linear da forma espacial  $E^n/\Gamma$  é

$$\Psi = \{A \in O(n) : (a, A) \in \Gamma\}.$$

Em particular, a holonomia de um toro é trivial. Também tem-se que a seguinte sequência de homomorfismos é exata,

$$1 \longrightarrow \Gamma_t \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{h} \Psi \longrightarrow 1,$$

e portanto  $\Psi \approx \Gamma/\Gamma_t$ . Segue-se que se  $\Psi$  é a holonomia de  $M = E^n/\Gamma$ , então  $M = T^n/\Psi$ ; ou seja (veja o teorema 1.12)

$$\Psi = Deck(T^n, p, M),$$

onde  $p : T^n \rightarrow M$  é a projeção de recobrimento de  $M$  por  $T^n$ .

Considere agora uma base  $\{a, b, c\}$  em  $E^3$ , e as seguintes rotações

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.14)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e reflexões

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (C.15)$$

escritas na base  $\{a, b, c\}$ . Temos a seguinte classificação das formas espaciais euclidianas tridimensionais compactas.

Classe	Geradores de $\Gamma$	$\Psi$	Direções das translações	$H_1(M, Z)$
$\mathcal{G}_1$	$a, b, c$	$id_{\mathbb{E}^3}$	–	$Z \times Z \times Z$
$\mathcal{G}_2$	$(\frac{a}{2}, A_1), b, c$	$Z_2$	$A_1(a) = a,$ $A_1(b) = -b,$ $A_1(c) = -c$	$Z \times Z_2 \times Z_2$
$\mathcal{G}_3$	$(\frac{a}{3}, B), b, c$	$Z_3$	$B(a) = a,$ $B(b) = c,$ $B(c) = -b - c$	$Z \times Z_3$
$\mathcal{G}_4$	$(\frac{a}{4}, C), b, c$	$Z_4$	$C(a) = a,$ $C(b) = c,$ $C(c) = -b$	$Z \times Z_2$
$\mathcal{G}_5$	$(\frac{a}{6}, D), b, c$	$Z_6$	$D(a) = a,$ $D(b) = c,$ $D(c) = c - b$	$Z$
$\mathcal{G}_6$	$(\frac{a}{2}, A_1),$ $(\frac{b+c}{2}, A_2),$ $(\frac{a+b+c}{2}, A_3),$	$Z_2 \times Z_2$	$A_1(a) = -A_2(a) = -A_3(a) = a,$ $-A_1(b) = A_2(b) = -A_3(b) = b,$ $-A_1(c) = -A_2(c) = A_3(c) = c,$	$Z_4 \times Z_4$

Tabela C.2: Classes difeomorfas de formas espaciais euclidianas compactas orientáveis.

**Teorema C.18** *As classes afim-difeomorfas de formas espaciais euclidianas compactas tridimensionais orientáveis são dadas na tabela C.2, e as não orientáveis são dadas na tabela C.3. Sejam  $M$  e  $N$  duas formas espaciais euclidianas compactas de dimensão três, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $M$  e  $N$  são homeomorfas.
2.  $M$  e  $N$  são afim-difeomorfas.
3.  $\pi_1(M) \sim \pi_1(N)$ .

Além disso, se  $H_1(M, Z) \sim H_1(N, Z)$  então valem as afirmações anteriores, ou uma das formas é de classe  $\mathcal{G}_2$  e a outra de classe  $\mathcal{B}_3$ .

Classe	Geradores de $\Gamma$	$\Psi$	Direções das translações	$H_1(M, Z)$
$\mathcal{B}_1$	$(\frac{a}{2}, E), b, c$	$Z_2$	$E(a) = a,$ $E(b) = b,$ $E(c) = -c$	$Z \times Z \times Z_2$
$\mathcal{B}_2$	$(\frac{a}{2}, F), b, c$	$Z_2$	$F(a) = a,$ $F(b) = b,$ $F(c) = a + b - c$	$Z \times Z$
$\mathcal{B}_3$	$(\frac{a}{2}, A_1), (\frac{b}{2}, E), c$	$Z_2 \times Z_2$	$A_1(a) = E(a) = a,$ $-A_1(b) = E(b) = b,$ $-A_1(c) = -E(c) = c$	$Z \times Z_2 \times Z_2$
$\mathcal{B}_4$	$(\frac{a}{2}, A_1), (\frac{b+c}{2}, E), c$	$Z_2 \times Z_2$	$A_1(a) = E(a) = a,$ $-A_1(b) = E(b) = b,$ $-A_1(c) = -E(c) = c$	$Z \times Z_4$

Tabela C.3: Classes difeomorfas de formas espaciais euclidianas compactas não orientáveis.

A classificação isométrica das formas espaciais euclidianas tridimensionais compactas segue-se de uma inspeção das tabelas C.2 e C.3, e utilizando a classificação isométrica das formas espaciais bidimensionais. A classificação isométrica dos toros já foi feita no teorema C.11.

**Teorema C.19** *A classificação isométrica das formas espaciais euclidianas tridimensionais compactas é como segue:*

1. A classe  $\mathcal{G}_1$  é parametrizada pelas classes de equivalência  $SL(3, Z) \cdot A(T^3) \cdot O(3)$ , onde  $A(T^3)$  é a matriz cujas filas são formadas pelos vetores de alguma base de  $E^3$  que gera o grupo de recobrimento do toro.
2. A classe  $\mathcal{G}_2$  é parametrizada pelas ternas  $(|a|, r^2, [w])$ , onde o par  $(r^2, [w])$  parametriza o toro bidimensional gerado pelos vetores  $b$  e  $c$ .
3. As classes  $\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$  e  $\mathcal{G}_5$  são parametrizadas pelos pares ordenados  $(|a|, |b|)$ .
4. As classes  $\mathcal{G}_6, \mathcal{B}_3$  e  $\mathcal{B}_4$  são parametrizadas pelas ternas ordenadas  $(|a|, |b|, |c|)$ .
5. As classes  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são parametrizadas pelas ternas  $(r^2, [w], |c|)$ , onde o par  $(r^2, [w])$  parametriza o toro bidimensional gerado pelos vetores  $a$  e  $b$ .

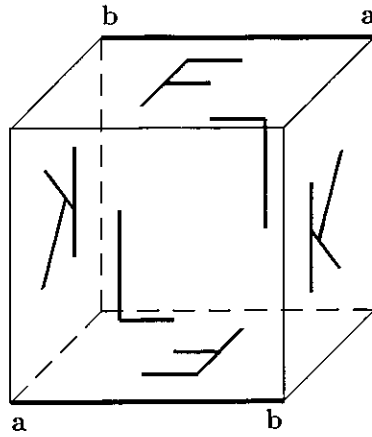


Figura C.1: Na figura é mostrado um ciclo de arestas de ordem dois, o que mostra que este poliedro fundamental e as instruções de colagem correspondem a um orbifold. Seguindo as instruções de colagem pode-se ver que, de fato, todos os ciclos de arestas são de ordem dois.

### C.2.3 Poliedros fundamentais de formas espaciais euclidianas

Os poliedros fundamentais e as instruções de colagem para um exemplar de cada uma das classes das formas espaciais euclidianas tridimensionais orientáveis e compactas tem sido descritos em diversos trabalhos de topologia cósmica (ver por exemplo [63]). Porém, a descrição dada para o exemplar da classe  $\mathcal{G}_6$  não corresponde a uma variedade. De fato, o poliedro fundamental apresentado para esta variedade é descrito como sendo um cubo unitário (de lado igual a 1) com instruções de colagem como as ilustradas na figura C.1. Como pode-se observar por simples inspeção da figura, cada ciclo de arestas é de ordem dois, o que mostra que, de acordo ao teorema do poliedro de Poincaré, esta descrição corresponde a um orbifold (veja a observação C.5).

Nesta subseção é apresentado um poliedro fundamental e instruções de colagem para uma forma espacial  $M$  de classe  $\mathcal{G}_6$ . Esta descrição foi obtida pela primeira vez em [45], e utilizada no contexto da topologia cósmica em [37] e [47] (veja a subseção 3.3.2). Adicionalmente, apresentam-se aqui as duas formas não isométricas que recobrem  $M$  e são, por sua vez, recobertas por  $T_M$ , o toro minimal que recobre  $M$ . A primeira destas formas é facilmente reconhecível como sendo da classe  $\mathcal{G}_2$  a partir da inspeção dos seus geradores. Já não é trivial reconhecer a segunda forma como sendo da classe  $\mathcal{G}_2$ , pois o poliedro de Dirichlet centrado na origem e as instruções de colagem correspondentes não são da forma canônica. A sua identificação dentro da classificação difeomorfa dada pelo teorema C.18 se faz calculando o primeiro grupo de homologia. Finalmente, mostramos como escolhendo convenientemente o centro do poliedro de Dirichlet, as novas instruções de colagem permitem a identificação desta variedade dentro desta classificação. Este exemplo ilustra claramente como o poliedro de Dirichlet e as instruções de colagem de

uma forma espacial dependem fortemente do ponto escolhido como centro do poliedro.

Os geradores do grupo de recobrimento  $\Gamma$ , de uma forma espacial de classe  $\mathcal{G}_6$ , dados pela tabela C.2, são

$$\begin{aligned}\alpha &= (\bar{a}, A_1) \\ \beta &= (\bar{b} + \bar{c}, A_2) \\ \gamma &= (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, A_3),\end{aligned}\tag{C.16}$$

onde  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  é uma base ortogonal de  $E^3$ , e as matrizes  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  estão dadas por (C.14). Denotemos o quociente  $E^3/\Gamma$  por  $M$ . Escrevendo então  $\bar{a} = a\hat{i}$ ,  $\bar{b} = b\hat{j}$  e  $\bar{c} = c\hat{k}$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  números reais positivos, temos pelo teorema C.19 que a terna ordenada  $(2a, 2b, 2c)$  identifica módulo isometrias a variedade  $M$  de classe  $\mathcal{G}_6$ , com grupo de recobrimento gerado por (C.16). Resulta conveniente substituir o gerador  $\gamma$  pela isometria

$$\begin{aligned}\delta &= \gamma^{-1}\alpha \\ &= (\bar{b} - \bar{c}, A_2).\end{aligned}$$

**Observação C.7** Denotemos por  $\bar{X}$  o eixo que passa pela origem e é paralelo a  $\bar{a}$ , e por  $\bar{Y}$  o eixo que passa pela origem e é paralelo a  $\bar{b}$ . Então, observe que a isometria  $\alpha$  é o movimento de parafuso que consiste na rotação de  $\pi$  radianos em torno do eixo  $\bar{X}$ , seguido da translação  $\tau_{\bar{a}}$ . A isometria  $\beta$  é o movimento de parafuso que consiste na rotação de  $\pi$  radianos em torno do eixo paralelo a  $\bar{Y}$  e que passa pelo ponto  $\bar{c}/2$ , seguido pela translação  $\tau_{\bar{b}}$ . Por último,  $\delta$  é o movimento de parafuso que consiste na rotação de  $\pi$  radianos em torno do eixo paralelo ao eixo  $\bar{Y}$  que passa pelo ponto  $-\bar{c}/2$ , seguido pela translação  $\tau_{\bar{b}}$ . Isto segue-se imediatamente ao aplicar a construção usada para provar o lema C.8. ■

Os geradores de  $\Gamma$  adquirem uma forma bastante simples se introduzimos um novo sistema de coordenadas em  $E^3$ . De fato, efetuando a mudança de base

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \hat{i} \\ \hat{e}_2 &= \frac{1}{L}(b\hat{j} - c\hat{k}) \\ \hat{e}_3 &= \frac{1}{L}(b\hat{j} + c\hat{k}),\end{aligned}\tag{C.17}$$

com  $L = \sqrt{b^2 + c^2}$ , os geradores e suas inversas assumem as seguintes expressões

$$\begin{aligned}\alpha &= (\bar{a}, \tilde{A}_1) \quad ; \quad \alpha^{-1} = (-\bar{a}, \tilde{A}_1) \\ \beta &= (L\hat{e}_3, \tilde{A}_2) \quad ; \quad \beta^{-1} = (-L\hat{e}_2, \tilde{A}_2) \\ \delta &= (L\hat{e}_2, \tilde{A}_2) \quad ; \quad \delta^{-1} = (-L\hat{e}_3, \tilde{A}_2) ;\end{aligned}\tag{C.18}$$



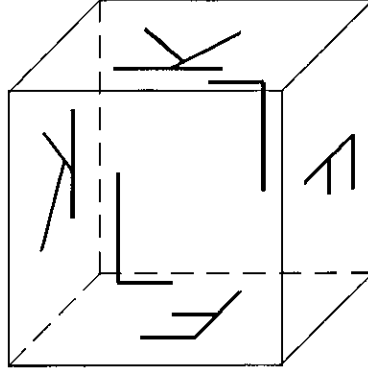


Figura C.2: Instruções de colagem para a variedade de tipo  $\mathcal{G}_6$  com parâmetros  $(2, 2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2})$ . As faces denotadas com  $L$  são identificadas pela isometria  $\alpha$ , as faces denotadas com  $K$  são identificadas pela isometria  $\beta$ , e as faces denotadas com  $F$  são identificadas pela isometria  $\delta$ .

onde as componentes ortogonais das isometrias são calculadas usando a expressão  $\tilde{A}_i = PA_iP^{-1}$ , com  $i = 1, 2, 3$ , e sendo  $P$  a matriz de mudança de base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{L} & -\frac{c}{L} \\ 0 & \frac{b}{L} & \frac{c}{L} \end{pmatrix}$$

com inversa

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{2b} & \frac{L}{2b} \\ 0 & -\frac{L}{2c} & \frac{L}{2c} \end{pmatrix}.$$

Explicitamente temos

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas expressões dos geradores de  $\Gamma$  são bastante simples, porém estão escritas numa base, em geral, não ortogonal de  $E^3$ . Contudo, para os valores dos parâmetros  $a = 1$  e  $b = c = 1/\sqrt{2}$ , a base (C.17) é, de fato, ortonormal, pois  $L = 1$ . Vamos construir um poliedro de Dirichlet para  $M$  correspondente a estes parâmetros tomando a origem como centro. Com efeito, os geradores  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , junto com as suas respectivas inversas, levam a origem de  $E^3$  a pontos localizados nos eixos coordenados a uma distância igual a 1. Segue-se que o poliedro de Dirichlet é o cubo mostrado na figura C.2, onde também são mostradas as instruções de colagem, enquanto que a figura C.3 mostra os ciclos de arestas.

Observe que cada ciclo de arestas é de ordem quatro, e portanto o poliedro fundamental e as instruções de colagem correspondem a uma variedade euclideana.

Como verificação, calculemos o grupo de homologia  $H_1(M, Z)$ . O primeiro passo é calcular o grupo fundamental de  $M$  usando o teorema de Seifert-van Kampen (veja a figura C.3). O resultado é

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c ; ac^{-1}bc^{-1}, a^2b^{-2}, acbc \rangle . \quad (\text{C.19})$$

Agora, o primeiro grupo de homologia é calculado abelianizando  $\pi_1(M)$  (veja [73]). Abelianizar  $\pi_1(M)$  significa adicionar à lista das relações na apresentação (C.19), relações de comutação entre todos os geradores. O primeiro grupo de homologia de  $M$  é então

$$H_1(M, Z) = \langle a, b, c ; ac^{-1}bc^{-1}, a^2b^{-2}, acbc, aba^{-1}b^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1} \rangle . \quad (\text{C.20})$$

Usando as relações de comutação temos que a primeira e terceira relações na apresentação (C.20) podem ser escritas como  $abc^{-2}$  e  $abc^2$  respectivamente; e como estas palavras são iguais à identidade, temos  $c^4 = 1$ . Por outro lado, da primeira relação é fácil ver que  $b = a^{-1}c^2$ , e portanto o elemento  $b$  pode ser eliminado da lista de geradores. Fazendo isto, a segunda relação em (C.20) reduz-se a  $a^4 = 1$ . Temos portanto que

$$\begin{aligned} H_1(M, Z) &= \langle a, c ; a^4, c^4, aca^{-1}c^{-1} \rangle \\ &\cong Z_4 \times Z_4 . \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Comparando (C.21) com a tabela C.2 verificamos que, de fato, este poliedro fundamental e instruções de colagem correspondem a uma variedade de tipo  $\mathcal{G}_6$ .

**Observação C.8** O poliedro de Dirichlet obtido no exemplo anterior é um cubo de volume 1, e a variedade correspondente pode ser denominada de variedade  $\mathcal{G}_6$  padrão, em analogia ao toro padrão cujo poliedro de Dirichlet é também um cubo de volume 1. Observe, porém, que escolhendo um outro ponto como centro obteremos, em geral, um poliedro de Dirichlet e instruções de colagem diferentes para a mesma variedade  $\mathcal{G}_6$  padrão. Este fenômeno, que se manifesta nas formas espaciais que não são globalmente homogêneas, será ilustrado a seguir para o caso de uma forma da classe  $\mathcal{G}_2$ . ■

Vamos agora construir o toro minimal  $T_M$  que recobre  $M$ . Observe primeiro que  $\alpha^2$ ,  $\beta^2 = \delta^2$ ,  $\beta\delta$  e  $\delta\beta$  são translações, e portanto comutam. Observe também que as seguintes relações são satisfeitas

$$\beta\alpha = \alpha^{-1}\delta^{-1} \quad ; \quad \beta\alpha^{-1} = \alpha\delta^{-1} \quad ; \quad \beta^{-1}\alpha = \alpha^{-1}\delta \quad ; \quad \beta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha\delta . \quad (\text{C.22})$$

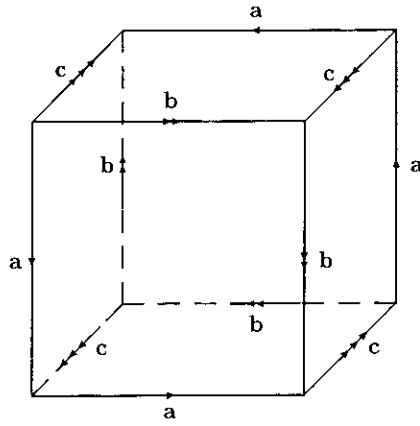


Figura C.3: Identificação das arestas no poliedro fundamental para a variedade de tipo  $\mathcal{G}_6$  da figura C.2. Observe que os ciclos de arestas são de ordem quatro. Adicionalmente, estas identificações de arestas servem para calcular o grupo fundamental da variedade correspondente, e com isso, verificar que a variedade descrita pelas intruções de colagem é de tipo  $\mathcal{G}_6$ .

As translações e as relações dadas em (C.22) permitem transpor a isometria  $\alpha^{\pm 1}$  à esquerda de uma isometria  $\beta^{\pm 1}$  ou  $\delta^{\pm 1}$  quando se encontra do lado direito, e reduzir qualquer palavra em  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  a uma forma canônica. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\beta\alpha\beta\delta\alpha &= \alpha^{-1}\delta^{-1}\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \\
&= \alpha^{-1}\delta^{-1}\alpha\delta^{-1}\beta^{-1} \\
&= \alpha^{-1}\alpha^{-1}\beta\delta^{-1}\beta^{-1} \\
&= \alpha^{-2}(\delta^{-1}\delta)\beta\delta^{-1}\beta^{-1} \\
&= \alpha^{-2}\delta^{-1}(\delta\beta)(\beta\delta)^{-1} \\
&= \alpha^{-2}\delta^{-1}(\beta\delta)^{-1}(\delta\beta) \\
&= \alpha^{-2}\delta^{-1}\delta^{-1}\beta^{-1}(\delta\beta) \\
&= \alpha^{-2}\beta^{-3}(\delta\beta).
\end{aligned}$$

Desta forma, qualquer isometria de recobrimento de  $M$  pode ser escrita em uma das duas seguintes formas canônicas

$$\rho(l, m, n) = \alpha^l \beta^m (\beta\delta)^n \quad , \quad \mu(l, m, n) = \alpha^l \beta^m (\delta\beta)^n, \quad (\text{C.23})$$

onde  $l$ ,  $m$  e  $n$  são inteiros, e  $n \geq 0$ . Para todo  $l$  e  $m$  temos que  $\rho(l, m, 0) = \mu(l, m, 0)$ , enquanto que para  $n \neq 0$ ,  $\rho(l, m, n) \neq \mu(l, m, n)$ .

As translações em  $\Gamma$  são as isometrias com  $l$  e  $m$  pares, independentemente do valor de  $n$ . Na base (C.17) temos explicitamente que

$$\begin{aligned}
\rho(2k_1, 2k_2, n) &= \tau_{(2k_1, k_2, k_2+2n)}, \\
\mu(2k_1, 2k_2, n) &= \tau_{(2k_1, k_2+2n, k_2)},
\end{aligned}$$

$k_1$	$k_2$	$n$	$ \rho  =  \mu $
0	$\pm 1$	0	$\sqrt{2}$
0	-1	1	$\sqrt{2}$
$\pm 1$	0	0	2
0	0	1	2
0	-2	1	2

Tabela C.4: Valores da função distância para as primeiras translações do grupo de recobrimento de  $M$ .

onde  $k_1$  e  $k_2$  são inteiros. Portanto, denotando por  $|\varphi|$  para a função distância da translação  $\varphi$  temos

$$|\rho(2k_1, 2k_2, n)|^2 = |\mu(2k_1, 2k_2, n)|^2 = 2 [2k_1^2 + (k_2 + n)^2 + n^2] , \quad (\text{C.24})$$

Na tabela C.4 mostram-se as translações de  $\Gamma$  com os menores valores da função distância. Daqui obtém-se facilmente os geradores de  $\Gamma_t$ , o grupo de recobrimento do toro minimal  $T_M$ . Estes geradores são  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  e  $\beta^{-1}\delta$ . O poliedro de Dirichlet do toro minimal é, portanto, um paralelepípedo reto de base quadrada de lado  $\sqrt{2}$  e altura 2.

Podemos agora passar a construir todas as formas espaciais que recobrem  $M$  e são recobertas por  $T_M$ . Denotemos por  $M_i$  uma destas formas, e por  $\Gamma_i$  o seu grupo de recobrimento. Temos então que todo  $\Gamma_i$  deve satisfazer a relação

$$\Gamma_i < \Gamma_i < \Gamma, \quad (\text{C.25})$$

onde  $A < B$  significa neste caso que  $A$  é um subgrupo de  $B$ . Como  $\Gamma$  é gerado pelas isometrias  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$ , e  $\Gamma_i$  é gerado pelas isometrias  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  e  $\beta^{-1}\delta$ , é claro que os únicos grupos (módulo conjugação) que satisfazem a relação (C.25) são  $\Gamma_1$  gerado por  $\alpha$ ,  $\beta^2$  e  $\beta^{-1}\delta$ , e  $\Gamma_2$  gerado por  $\alpha^2$ ,  $\beta$  e  $\delta$ .

É fácil ver que  $M_1$  é uma variedade de tipo  $\mathcal{G}_2$ , pois os seus geradores são duas translações em direções independentes ( $\beta^2$  e  $\beta^{-1}\delta$ ) e um movimento de parafuso com rotação de  $\pi$  radianos em torno de um eixo ortogonal ao plano formado pelos dois geradores anteriores. Agora, os geradores de  $M_2$  são dois movimentos de parafuso ( $\beta$  e  $\delta$ ) e uma translação, e portanto não é imediata a sua identificação dentro da classificação difeomorfa das formas espaciais euclidianas (veja a tabela C.2). Na figura C.4 apresentam-se o poliedro de Dirichlet centrado na origem de  $E^3$  e as instruções de colagem de  $M_2$ , e os ciclos de arestas correspondentes a estas instruções de colagem. Mais uma vez, não é evidente, a partir da inspeção deste poliedro, a qual classe  $\mathcal{G}_i$  pertence  $M_2$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Observe que  $M_2$  é orientável, portanto é suficiente considerar a tabela C.2.

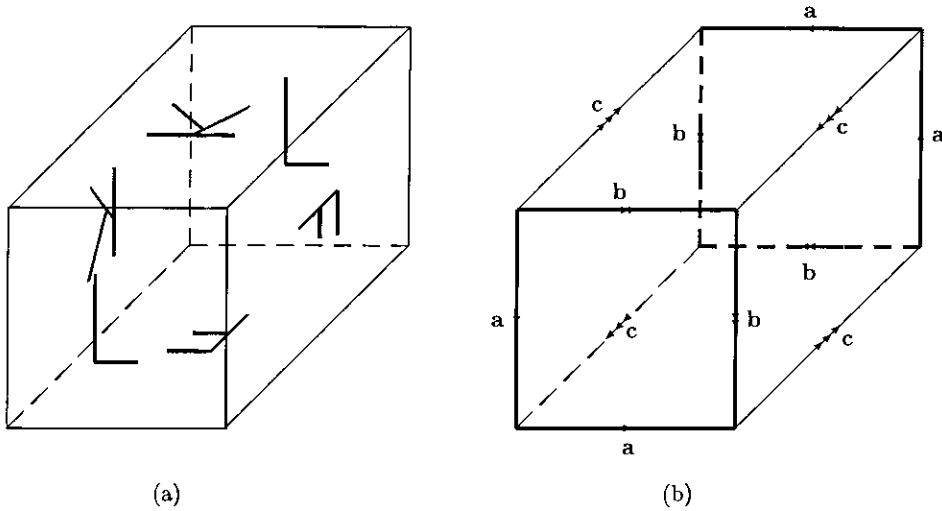


Figura C.4: Em (a) mostram-se as instruções de colagem para  $M_2$ . As faces denotadas com  $L$  são identificadas pela translação  $\alpha^2$ , as faces denotadas com  $K$  são identificadas pela isometria  $\beta$ , e as faces denotadas com  $F$  são identificadas pela isometria  $\delta$ . Não é evidente que  $M_2$  é da classe  $\mathcal{G}_2$ , porém isto é rapidamente verificado calculando o seu primeiro grupo de homologia com ajuda dos ciclos de arestas dados em (b).

No entanto, podemos identificar a classe à qual  $M_2$  pertence calculando o seu primeiro grupo de homologia. Da figura C.4 obtemos para o grupo fundamental de  $M_2$

$$\pi_1(M_2) = \langle a, b, c; a^2b^{-2}, aca^{-1}c, bcb^{-1}c \rangle, \quad (\text{C.26})$$

e o primeiro grupo de homologia de  $M_2$  é então

$$H_1(M_2, \mathbb{Z}) = \langle a, b, c; a^2b^{-2}, aca^{-1}c, bcb^{-1}c, aba^{-1}b^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1} \rangle. \quad (\text{C.27})$$

Usando as relações de comutação temos que a segunda e terceira relações de (C.27) se reduzem à única relação  $c^2 = 1$ . Por outro lado, a primeira relação de (C.27) é  $a^2b^{-1} = (ab^{-1})^2$ . Logo, substituindo  $b$  pelo gerador  $d = ab^{-1}$ , temos que

$$\begin{aligned} H_1(M_2, \mathbb{Z}) &= \langle a, c, d; c^2, d^2, aca^{-1}c^{-1}, ada^{-1}d^{-1}, cdc^{-1}d^{-1} \rangle \\ &\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Segue-se imediatamente que  $M_2$  é da classe  $\mathcal{G}_2$ .

Para encontrar um poliedro de Dirichlet para  $M_2$  com as identificações de faces padrões vamos escolher o centro no ponto  $-\bar{c}/2$  (veja a observação C.7). Neste caso, o gerador  $\delta$  é uma rotação de  $\pi$  radianos em torno de um eixo paralelo a  $\bar{Y}$  que passa pelo centro do poliedro, seguido da translação  $\tau_{\bar{b}}$ . Por outro lado, o gerador  $\alpha^2$  é uma translação ortogonal a  $\bar{Y}$ . Agora, substituindo o gerador  $\beta$  pela translação  $\beta^{-1}\delta = \tau_{2\bar{c}}$ , temos como terceiro gerador uma translação ortogonal a  $\bar{Y}$  e independente de  $\alpha^2$ . As isometrias  $\alpha$ ,

$\beta^{-1}\delta$  e  $\delta$  geram  $\Gamma_2$ , e o poliedro de Dirichlet de  $\Gamma_2$  centrado em  $-\bar{c}/2$  possui claramente instruções de colagem padrões.

### C.3 Formas espaciais esféricas

As seções espaciais nos modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître com densidade de matéria maior que a densidade crítica  $\rho_c$  (veja a equação (3.38) na seção 3.1) são formas espaciais esféricas tridimensionais, e nesta seção estudam-se com detalhe estas formas espaciais.

A classificação das formas espaciais esféricas de dimensão  $n$  pode ser encontrada em [122], porém os métodos empregados nesta classificação são complexos e não serão apresentados aqui. Existe, no entanto, uma maneira de obter a classificação das formas espaciais esféricas tridimensionais baseada numa afortunada coincidência entre os grupos  $SO(4)$  e  $SO(3) \times SO(3)$ . Esta conexão é estudada em detalhe na subseção C.3.1, onde se mostra que estes grupos são localmente isomorfos. Este isomorfismo local relaciona a classificação dos grupos discretos de  $SO(4)$  com os grupos discretos de  $SO(3)$ , e na subseção C.3.2 apresenta-se a classificação das formas espaciais esféricas tridimensionais. Detalhes da classificação apresentada nesta seção encontram-se em [103].

Diferente do caso euclideano, a classificação das formas espaciais esféricas bidimensionais é de pouca ou nenhuma ajuda para a classificação das formas esféricas tridimensionais. Todavia, antes de particularizar para o caso tridimensional vamos estabelecer dois resultados gerais.

Seja  $M = S^{2n}/\Gamma$  uma forma espacial esférica de dimensão par, então  $\Gamma$  é um subgrupo discreto e livre de  $O(2n+1)$ . Se  $g \in \Gamma$  possui determinante 1, então  $g$  possui pelo menos um autovalor +1, logo para algum ponto  $p \in S^{2n}$ ,  $gp = p$ . Como  $\Gamma$  é um grupo livre segue-se que  $g$  é a identidade. Seja agora  $g \in \Gamma$  com determinante  $-1$ , então  $g^2$  tem determinante 1, e portanto  $g^2 = I$ . Segue-se que  $g$  só pode ter autovalores +1 e  $-1$ , mas se algum autovalor fosse +1, então  $g$  não seria livre, logo  $g = -I$ . Portanto temos que  $\Gamma = \{I\}$  ou  $\Gamma = \{I, -I\}$ , o que estabelece o seguinte teorema.

**Teorema C.20** *As únicas formas espaciais esféricas de dimensão par são as esferas  $S^{2n}$  e os espaços projetivos  $RP^{2n}$ .*

Consideremos agora uma forma espacial esférica de dimensão ímpar  $M = S^{2n-1}/\Gamma$ . Como  $\Gamma$  é um subgrupo discreto e livre de  $O(2n)$ , então o único elemento  $g \in \Gamma$  com autovalor +1 é a identidade. Qualquer outro elemento terá autovalores da forma  $e^{i\theta}$ ,  $e^{-i\theta}$  e  $-1$ , com  $0 < \theta < \pi$ . Além disso, se  $e^{i\theta}$  for autovalor de  $g$ , então  $e^{-i\theta}$  também o é pois  $g$

é essencialmente uma matriz definida nos reais. Segue-se que  $g \in SO(2n)$ , o que dá lugar ao seguinte resultado.

**Teorema C.21** *Seja  $M = S^{2n-1}/\Gamma$  uma forma espacial esférica. Então  $\Gamma$  é um subgrupo discreto de  $SO(2n)$  no qual o único elemento com autovalor igual a  $+1$  é a identidade. Duas formas espaciais esféricas  $M = S^{2n-1}/\Gamma$  e  $N = S^{2n-1}/\Delta$  são isométricas se e somente se  $\Delta$  é conjugado a  $\Gamma$  em  $SO(2n)$ .*

**Observação C.9** Em particular este teorema afirma que todas as formas espaciais esféricas de dimensão ímpar são orientáveis. Segue-se que o problema de encontrar todas as formas espaciais esféricas tridimensionais se reduz a identificar todos os subgrupos finitos de  $SO(4)$  nos quais todos os elementos, exceto a identidade, possuem autovalores diferentes de  $+1$ , e a classificar estes subgrupos módulo conjugação. ■

### C.3.1 Os grupos $SO(4)$ e $SO(3) \times SO(3)$

Vamos proceder agora a estudar a relação entre os grupos  $SO(4)$  e  $SO(3) \times SO(3)$ . Estes dois grupos são localmente isomorfos, e  $SO(3) \times SO(3)$  é identificado com o grupo das isometrias do espaço projetivo  $RP^3$  que preservam a orientação. Assim, o problema de encontrar todos os grupos discretos de  $SO(4)$  que agem livremente em  $S^3$  se traduz a um problema em termos da conhecida classificação dos subgrupos discretos de  $SO(3)$  em grupos cíclicos e poliédricos (veja o lema C.11).

No que segue é conveniente olhar para  $S^3$  de maneiras diferentes da convencional

$$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = 1 \right\}.$$

Escrevendo  $z_1 = x_1 + ix_2$  e  $z_2 = x_3 + ix_4$ , com  $i = \sqrt{-1}$ , temos uma segunda descrição de  $S^3$  em termos de pares de números complexos,

$$S^3 = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = 1 \right\}. \quad (\text{C.29})$$

Por outro lado, o grupo  $SU(2)$  é definido como

$$SU(2) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) : A^\dagger A = I \quad \text{e} \quad \det A = 1 \right\}.$$

Agora, se  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$ , então  $A^\dagger = A^{-1}$ , mas

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

logo  $\delta = \alpha^*$  e  $\gamma = -\beta^*$ . Além disso, como  $\det A = 1$  segue-se que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , e portanto a função

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 &\rightarrow SU(2) \\ (z_1, z_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z_1 & -z_2^* \\ z_2 & z_1^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma bijeção. Segue-se que

1.  $SU(2)$  possui uma estrutura diferenciável tal que  $\varphi$  é um difeomorfismo.

2.  $S^3$  possui uma estrutura de grupo tal que  $\varphi$  é um isomorfismo.

Mais ainda, estas duas estruturas são compatíveis de forma que  $S^3$  e  $SU(2)$  são grupos de Lie isomorfos.

Por último, uma quarta descrição de  $S^3$  é obtida em termos da álgebra de quatérnios reais. Esta álgebra, denotada por  $Q$ , é o espaço  $R^4$  com base denotada por  $\{1, i, j, k\}$  e tabela de multiplicação dada por

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 & ij &= k & ik &= -j \\ ji &= -k & j^2 &= -1 & jk &= i \\ ki &= j & kj &= -i & k^2 &= -1, \end{aligned}$$

e  $1q = q = q1$ , para todo  $q \in Q$ . Uma correspondência entre  $C^2$  e  $Q$  é dada por  $z = (z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2j$ , onde a ordem do produto  $z_2j$  tem que ser respeitada, pois  $Q$  não é uma álgebra comutativa. A operação de conjugação em  $Q$  é definida como  $z \mapsto z^* = z_1^* - jz_2^*$ , e com isto é fácil mostrar que para todo  $z \in Q$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{zz^*} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}. \end{aligned}$$

Segue-se que a esfera  $S^3$  é o conjunto dos quatérnios de norma 1, ou seja

$$S^3 = \{q \in Q : |q| = 1\}. \quad (\text{C.30})$$

Mostra-se após um pouco de álgebra que, na representação quaterniônica, o produto interno de  $R^4$  é dado por

$$\langle z, w \rangle = \text{Re}(zw^*),$$

e portanto as ações à esquerda e à direita de  $S^3$  em  $Q$ ,

$$\begin{aligned} L_a : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto aq, \end{aligned}$$



e

$$\begin{aligned} R_a : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto qa, \end{aligned}$$

são elementos de  $SO(4)$ . Em particular, dados  $a, b \in S^3$ , a função

$$\begin{aligned} F(a, b) : Q &\rightarrow Q \\ q &\mapsto aqb^{-1} \end{aligned}$$

é um elemento de  $SO(4)$ , e portanto é possível definir o homomorfismo

$$\begin{aligned} F : S^3 \times S^3 &\rightarrow SO(4) \\ (a, b) &\mapsto F(a, b). \end{aligned}$$

Com um pouco de álgebra mostra-se que o núcleo deste homomorfismo consiste de  $\{\pm(1, 1)\}$ . Como  $F$  é uma função contínua entre compactos de mesma dimensão, segue-se que  $F$  é sobrejetiva, e portanto

$$SO(4) \approx \frac{S^3 \times S^3}{\{\pm(1, 1)\}}.$$

Vale o seguinte lema:

**Lema C.10** *Seja  $\Gamma \subset SO(4)$  e  $\Gamma^* = F^{-1}(\Gamma)$ . Então  $\Gamma$  age de maneira livre em  $S^3$  se e somente se para todo  $(a, b) \in \Gamma^*$ ,  $a$  e  $b$  não são conjugados em  $S^3$ .*

Considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : S^3 &\rightarrow SO(4) \\ a &\mapsto F(a, a); \end{aligned}$$

tem-se que  $\text{Ker}\Psi = \{\pm 1\}$ , e portanto

$$\text{Im}\Psi \approx S^3 / \text{Ker}\Psi \approx SO(3).$$

É fácil ver também que  $\text{Im}\Psi$  consiste de todos os elementos de  $SO(4)$  que tem o centro de  $S^3$  como pontos fixos. A **ação por conjugação** de  $S^3$  nela própria é

$$\begin{aligned} h_\Psi : S^3 &\rightarrow \text{Isom}(S^3) \\ a &\mapsto \Psi(a), \end{aligned}$$

e as órbitas desta ação são esferas  $S^2$  centradas em  $\pm 1$ . É fácil ver que o quociente  $S^3 / \Psi$  é o semicírculo de  $S^1$  com parte imaginária não negativa. Segue-se portanto que dois

quatérnios unitários são conjugados em  $S^3$  se e somente se tem a mesma parte real. Por outro lado, como um quatérnio unitário é de ordem quatro se e somente se a sua parte real é zero, segue-se que todos os quatérnios unitários de ordem quatro são conjugados.

O diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 \times S^3 & \xrightarrow{F} & SO(4) \\
 \Psi \times \Psi \searrow & & \swarrow \varphi \\
 & & SO(3) \times SO(3)
 \end{array}$$

define o homomorfismo  $\varphi : SO(4) \rightarrow SO(3) \times SO(3)$ , mencionado no início desta subseção. É imediato ver que  $\text{Ker } \varphi = \{I, -I\}$ . Além disso, como  $SO(3)$  tem centro trivial, segue-se que  $\{I, -I\}$  é o centro de  $SO(4)$ . Agora,  $\{I, -I\}$  age livremente em  $S^3$  com quociente  $RP^3$ , e portanto o homomorfismo  $\varphi$  pode ser identificado com a transformação natural

$$\Phi : \text{Isom}(S^3) \rightarrow \text{Isom}(RP^3),$$

pois cada elemento de  $SO(4)$  desce por  $\varphi$  a uma isometria de  $RP^3$ .

### C.3.2 As formas espaciais esféricas tridimensionais.

Passamos agora a classificar as formas espaciais esféricas tridimensionais. Como  $SO(3) \approx S^3/\{\pm 1\}$ , podemos identificar  $RP^3$  com  $SO(3)$ , e portanto a ação natural de  $SO(3) \times SO(3)$  em  $RP^3$ ,  $g : SO(3) \times SO(3) \rightarrow \text{Isom}(RP^3)$ , é definida pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 SO(4) & \xrightarrow{h} & \text{Isom}(S^3) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \Psi \\
 SO(3) \times SO(3) & \xrightarrow{g} & \text{Isom}(RP^3)
 \end{array} \quad ,$$

onde a ação  $h : SO(4) \rightarrow \text{Isom}(S^3)$  é definida pelo homomorfismo  $F : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ . Segue-se que  $(u, v) \in SO(3) \times SO(3)$  age em  $SO(3)$  segundo a lei  $(u, v) : x \mapsto uxv^{-1}$ . Portanto uma isometria  $(u, v)$  em  $RP^3$  possui pontos fixos se e somente se  $u$  e  $v$  são conjugados em  $SO(3)$ . Como as rotações em  $SO(3)$  são conjugadas se e somente se possuem o mesmo ângulo de rotação, este critério para determinar ações livres de grupos de isometrias do espaço projetivo resulta extremamente conveniente.

**Lema C.11** *Se um grupo finito  $G \subset SO(4)$  age livremente em  $S^3$  então  $H = \varphi(G) \subset SO(3) \times SO(3)$  age livremente no espaço projetivo.*

Seja  $H \subset SO(3) \times SO(3)$  um grupo finito agindo livremente em  $SO(3)$ . Denotemos por  $p_j : SO(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)$  a projeção sobre a  $j$ -ésima componente, e  $H_j = p_j(H)$ . Tem-se que  $H \subset H_1 \times H_2$ , onde cada  $H_j$  é um subgrupo finito de  $SO(3)$ . Desta maneira, a classificação dos subgrupos finitos de  $SO(4)$  que agem livremente na esfera está fortemente relacionada com a classificação dos grupos finitos de rotações tridimensionais fornecida pelo seguinte teorema.

**Teorema C.22 Grupos finitos de rotações.** *Seja  $G$  um subgrupo finito de  $SO(3)$ , então vale uma das seguintes afirmações,*

1.  $G \approx Z_N$ , com  $N$  inteiro.
2.  $G \approx D_N$ , com  $N$  inteiro.
3.  $G$  é isomorfo ao grupo poliédrico  $T$ ,  $O$  ou  $I$ .

O teorema a seguir descreve as formas espaciais esféricas que são recobertas pelo espaço projetivo  $RP^3$ .

**Teorema C.23** *Seja  $H$  um grupo finito de  $SO(3) \times SO(3)$  agindo livremente em  $RP^3$ , e  $H_1$  e  $H_2$  as projeções de  $H$  em cada fator, então vale o seguinte,*

1.  $H_1$  ou  $H_2$  é cíclico.
2. *Se um dos fatores não é cíclico, então uma das seguintes afirmações é válida:*
  - (a)  $H = H_1 \times H_2$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  tem ordem co-prima.
  - (b) O fator cíclico tem ordem  $3n$ , com  $n$  ímpar; o fator não cíclico é isomorfo a  $T$ ; e  $H$  é um subgrupo diagonal de índice três em  $H_1 \times H_2$ .
  - (c) O fator cíclico tem ordem  $2m$ ; o fator não cíclico é isomorfo a  $D_n$ , com  $n$  ímpar;  $m$  e  $n$  são co-primos; e  $H$  é um subgrupo diagonal de índice dois em  $H_1 \times H_2$ .
3. *Se  $H_1$  e  $H_2$  são cíclicos, então  $H$  é cíclico.*

Considere agora a inclusão

$$\begin{aligned} f : S^1 &\rightarrow S^3 \\ z &\mapsto (z, 0), \end{aligned}$$

onde a esfera  $S^3$  está sendo descrita como conjunto de  $C^2$ . Por simplicidade vamos escrever  $S^1 \times S^3$  no lugar de  $f(S^1) \times S^3$ , e analogamente  $S^3 \times S^1$  no lugar de  $S^3 \times f(S^1)$ . Suponha que  $G$  é um subgrupo finito de  $SO(4)$  agindo livremente em  $S^3$ , então pelo teorema anterior  $H = p(G) \subset SO(3) \times SO(3)$  é um subgrupo de  $H_1 \times H_2$ , com  $H_1, H_2 \in SO(3)$  e  $H_1$  ou  $H_2$  cíclico. Suponha que  $H_1$  é cíclico e denote por

$$\overline{G} = F^{-1}(\varphi^{-1}(H_1 \times H_2)) \subset S^3 \times S^3.$$

Observe que

$$\overline{G} = \Psi^{-1}(H_1) \times \Psi^{-1}(H_2),$$

e que  $G \subset F(\overline{G})$ . Seja  $q \in S^3$  tal que  $\Psi(q)$  é um gerador de  $H_1$ . Conjugando em  $S^3$  podemos supor que  $q \in S^1$ , mas então  $\Psi^{-1}(H_1)$  é um subgrupo de  $S^1$  consistindo de potências de  $q$  e  $-q$ . Segue-se que  $\overline{G}$  é conjugado em  $S^3 \times S^3$  a um subgrupo de  $S^1 \times S^3$ . Como  $G \subset F(\overline{G})$ , isto implica no seguinte lema:

**Lema C.12** *Seja  $\Gamma_1 = F(S^1 \times S^3)$  e  $\Gamma_2 = F(S^3 \times S^1)$ . Se  $G \subset SO(4)$  é um grupo finito agindo livremente em  $S^3$ , então  $G$  é conjugado em  $SO(4)$  a um subgrupo de  $\Gamma_1$  ou  $\Gamma_2$ .*

Seja agora  $\Gamma$  um grupo finito de  $SO(3)$ , e  $\tilde{\Gamma} = \Psi^{-1}(\Gamma)$  a sua pré-imagem em  $S^3$ . Tem-se que  $\tilde{\Gamma}$  é uma extensão central de  $Z_2$  por  $\Gamma$ , ou seja que a sequência

$$1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\Psi} \Gamma \longrightarrow 1$$

é exata. Esta sequência se separa somente quando  $\Gamma$  tem ordem ímpar e é, portanto, cíclico. Podemos agora enumerar todos os grupos finitos de  $SO(4)$  que agem livremente em  $S^3$  módulo conjugação.

**Teorema C.24 Classificação das formas espaciais esféricas tridimensionais.** *Seja  $G$  um subgrupo finito de  $\Gamma_1 = F(S^1 \times S^3)$  agindo livremente em  $S^3$ . Então uma das seguintes afirmações é válida:*

1.  $G$  é cíclico.
2.  $H_2$  é isomorfo a  $T$ ,  $O$ ,  $I$  ou  $D_n$  e  $H_1$  é cíclico de ordem coprima à ordem de  $H_2$ . Também  $G = F(\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2) \approx H_1 \times \tilde{H}_2$ .
3.  $H_2 \approx T$  e  $H_1$  é cíclico de ordem  $3n$ , com  $n$  ímpar. Também  $G$  é um subgrupo diagonal de índice três em  $F(\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2)$ .
4.  $H_2 \approx D_n$ , com  $n$  ímpar, e  $H_1$  é cíclico de ordem  $2m$ , com  $n$  e  $m$  coprimos. Também  $G$  é um subgrupo diagonal de índice dois em  $F(\tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2)$ .

Por último, vamos caracterizar as formas esféricas tridimensionais homogêneas. Seja  $G \subset SO(4)$  um subgrupo finito agindo livremente em  $S^3$ , e suponha que  $H_1$  é trivial. O centralizador de  $\text{Ker} \Psi \times \Psi^{-1}(H_2)$  contém  $S^3 \times \{\pm 1\}$  e portanto a sua imagem em  $SO(4)$  age transitivamente em  $S^3$ . Segue-se que  $S^3/G$  é homogênea. Reciprocamente, para que um subgrupo próprio de  $S^3 \times S^3$  aja transitivamente em  $S^3$ , este deve ser da forma  $S^3 \times G_2$  ou  $G_1 \times S^3$ ; e como  $Z(S^3) = \{\pm 1\}$ , segue-se que os únicos centralizadores agindo transitivamente em  $S^3$  são  $S^3 \times \{\pm 1\}$  e  $\{\pm 1\} \times S^3$ ; mas um destes grupos é centralizador de  $F^{-1}(G)$  somente se  $H_1$  ou  $H_2$  é trivial. Temos portanto o seguinte teorema.

**Teorema C.25** *Seja  $G \subset \Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) um grupo finito agindo livremente em  $S^3$ . Então  $S^3/G$  é homogênea se e somente se  $H_1$  ( $H_2$ ) é trivial.*

**Exemplo C.2 Espaços lente.** Suponha  $G \subset SO(4)$  cíclico de ordem  $p > 2$  e agindo livremente em  $S^3$ . Então  $H \approx \varphi(G) \subset SO(3) \times SO(3)$  é cíclico, do mesmo modo que  $H_1$  e  $H_2$ . De fato, seja  $\alpha = F(a, b)$ , com  $a, b \in S^3$ , um gerador de  $G$ , então  $\alpha^p = I$ , o que implica que  $a^p = b^p = \pm I$ . Agora, conjugando em  $S^3 \times S^3$  podemos supor que  $a, b \in S^1$ , onde estamos identificando

$$S^1 = \{(z_1, z_2) \in S^3 : z_2 = 0\}.$$

Portanto, para qualquer  $(z_1, z_2) \in S^3$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(z_1, z_2) &= (a, 0)(z_1, z_2)(b^{-1}, 0) \\ &= (ab^{-1}z_1, abz_2). \end{aligned}$$

Como  $\alpha$  tem pontos fixos se e somente se  $a = b = \pm I$ , então não existem restrições sobre  $a$  e  $b$ . Uma escolha adequada destes parâmetros é

$$ab = e^{2\pi i/p} \quad \text{e} \quad ab^{-1} = e^{2\pi iq/p},$$

com  $0 \leq q < p$ . Estes são os **espaços lente**  $L(p, q)$ . Os espaços lente homogêneos são aqueles com  $b = \pm I$ , ou equivalentemente  $a = \pm I$ . Por exemplo, tomando  $b = \pm I$  temos  $q = 1$ , e portanto  $L(p, 1)$  é homogêneo. ■

**Observação C.10** Pelo teorema C.25, as formas espaciais esféricas homogêneas são os espaços de lente  $L(p, 1)$ , e os quocientes  $S^3/G$  com  $G = \tilde{D}_n, \tilde{T}, \tilde{O}$  ou  $\tilde{I}$ . As formas espaciais esféricas têm sido estudadas com detalhe em [121]. ■

## C.4 Formas espaciais hiperbólicas

As seções espaciais nos modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître com densidade de matéria menor que a densidade crítica  $\rho_c$  (veja a equação (3.38) na seção 3.1) são formas espaciais hiperbólicas tridimensionais. Ainda não existe uma classificação das formas espaciais hiperbólicas, nem sequer em dimensão dois,<sup>8</sup> portanto nesta seção limitamo-nos a apresentar alguns comentários sobre formas hiperbólicas tridimensionais.

Um resultado fundamental na teoria das formas espaciais hiperbólicas que tem profundas consequências em topologia cósmica é o teorema de Mostow, que pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema C.26 Teorema de rigidez de Mostow.** *Duas formas espaciais hiperbólicas de volume finito e dimensão  $n \geq 3$  que possuem grupos fundamentais isomorfos, são isométricas.*

**Observação C.11** Observe que duas variedades com grupos fundamentais isomorfos não são necessariamente homeomorfas (um exemplo disto são os espaços lente). Porém, no caso hiperbólico, duas variedades de dimensão  $n \geq 3$ , volume finito e com grupos fundamentais isomorfos são não apenas homeomorfos, mas também isométricos. Isto significa em particular que duas variedades hiperbólicas com a mesma *forma* tem necessariamente o mesmo *tamanho*.<sup>9</sup> Este surpreendente resultado foi provado por Mostow [76] para o caso compacto, e por Prasad [85] para o caso não compacto; e segue-se imediatamente dele que invariantes geométricos como volume e comprimentos de geodésicas fechadas, são também invariantes topológicos. ■

As variedades hiperbólicas podem ser facilmente construídas e estudadas usando o programa SnapPea (veja [1]).<sup>10</sup> De fato, Hodgson e Weeks tem compilado uma lista de 11031 variedades hiperbólicas compactas ordenadas por volume crescente. Este censo encontra-se na página da Internet mencionada no pé de página 10. A forma espacial de menor volume nesta lista é conhecida como **variedade de Weeks**, e tem volume  $V_{Weeks} = 0,942707$ .<sup>11</sup> A lista termina com uma forma espacial com volume  $V = 6,453529$ .

<sup>8</sup>Para o caso bidimensional existe uma classificação das formas espaciais hiperbólicas bidimensionais módulo difeomorfismos baseada na teoria das superfícies de Riemann, mas não existe ainda uma classificação isométrica.

<sup>9</sup>No que segue desta tese por variedade hiperbólica entenderemos uma forma espacial hiperbólica tridimensional orientável de volume finito.

<sup>10</sup> O programa SnapPea pode ser obtido na página <http://www.number.northnet.org/weeks/> da Internet.

<sup>11</sup>A compilação de Hodgson-Weeks fornece vários invariantes topológicos das variedades na lista, entre

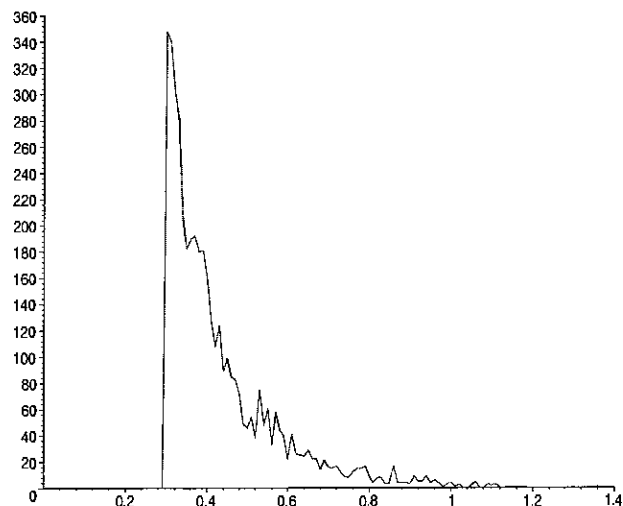


Figura C.5: Histograma que mostra o número de variedades hiperbólicas em função do comprimento da menor geodésica fechada. O gráfico foi construído a partir das 4451 variedades com volume  $V < 5$  na compilação de Hodgson-Weeks, e a última variedade da lista possui  $l_{min} = 1,369226$ . O intervalo  $[0, 1.4]$  foi subdividido em caixinhas de largura 0,01.

Agora, ordenando a compilação de Hodgson-Weeks segundo o comprimento da menor geodésica fechada encontra-se que existe um valor ínfimo para este comprimento  $l_{inf} \approx 0,3$ . De fato, a variedade com geodésica fechada de menor comprimento possui  $V = 5,680928$  e  $l_{min} = 0,300009$ . A figura C.5 apresenta um histograma que mostra o número de variedades hiperbólicas de um subconjunto da compilação de Hodgson-Weeks em função do comprimento da menor geodésica fechada. O conjunto considerado consiste das 4451 variedades com volume  $V < 5$ ; a última das quais possui  $V = 4,626565$  e  $l_{min} = 1,369226$ . Para construir este histograma subdividimos o intervalo  $[0, 1.4]$  em caixinhas de largura 0,01. Deste modo, na caixinha correspondente ao intervalo  $[0.30, 0.31]$  encontram-se 348 variedades, na caixinha correspondente ao intervalo  $[0.31, 0.32]$  encontram-se 340 variedades, e assim por diante. Nesta lista existem 2401 variedades (54% da lista) com  $l_{min} < 0,4$ , e 3428 (77%) com  $l_{min} < 0,5$ .

**Observação C.12** O teorema C.26 garante, entre outras coisas, que o volume e o comprimento de geodésicas fechadas numa variedade hiperbólica são invariantes topológicos. Isto significa que se duas delas possuem volumes diferentes ou comprimentos de menor geodésica fechada diferentes, então não são homeomorfas. Porém, existem variedades hiperbólicas em que o volume e o comprimento da menor geodésica fechada são iguais. Nesta lista, o valor do volume de cada variedade é dada com uma precisão de 16 algarismos decimais, enquanto que o comprimento da menor geodésica fechada é dado com uma precisão de 12 algarismos. Nesta subseção porém, nos utilizaremos os valores correspondentes com uma precisão de somente 6 algarismos decimais.

perbólicas que possuem o mesmo volume e comprimento de menor geodésica fechada, e no entanto não são homeomorfas. Evidentemente, elas possuem outros invariantes topológicos que permitem diferenciá-las. Na compilação de Hodgson-Weeks encontram-se numerosos destes casos. Por exemplo, existem duas variedades hiperbólicas, que chamaremos de  $M_1$  e  $M_2$ , tais que  $Vol(M_1) = Vol(M_2) = 2,343017$  e  $l_{min}(M_1) = l_{min}(M_2) = 0,307484$ , porém elas não são homeomorfas pois  $H_1(M_1, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/58$  e  $H_1(M_2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/70$ .

■

Em uma direção oposta ao teorema de rigidez de Mostow, Thurston provou um teorema que pode ser denominado um teorema de *não rigidez* [111].

**Teorema C.27 Teorema de não-rigidez de Thurston.** *Seja  $M = H^3/\Gamma$  uma variedade hiperbólica orientável não compacta e de volume finito. Então existe uma sequência infinita de variedades hiperbólicas orientáveis e compactas  $M_j = H^3/h_j(\Gamma)$ , tais que  $Vol(M_i) < Vol(M_j) < Vol(M)$  se  $i < j$ , e que se acumulam em torno de  $M$  no sentido que, na topologia de convergência pontual, o limite da sequência de homomorfismos*

$$h_j : \Gamma \rightarrow Isom(H^3)$$

*é a inclusão  $\Gamma \subset Isom(H^3)$ . Mais ainda,  $\lim Vol(M_j) = Vol(M)$ .*

Este teorema garante a existência de variedades hiperbólicas *muito parecidas*, e têm motivado o enunciado de um problema de *indecidibilidade topológica* [110].



# Bibliografia

- [1] Adams, C., *Not. Am. Math. Soc.* **37**, 273-275 (1990).
- [2] Aichelburg, P. & Beig, R., *Ann. Phys. (N.Y.)* **98**, 264 (1976).
- [3] Aichelburg, P. & Beig, R., *Phys. Rev. D* **15**, 389 (1977).
- [4] Anderson, J.L., *Gen. Rel. Grav.* **16**, 595 (1984).
- [5] Aurich, R., *ApJ* **524**, 497-503 (1999).
- [6] Balachandran, A.P., *Classical Topology and Quantum States*, quant-ph/0002055 (2000).
- [7] Beardon, A.F., *The geometry of discrete groups*, GTM 91, Springer-Verlag, New York (1983).
- [8] Beig, R., *J. Math. Phys.* **19**, 1104 (1978).
- [9] Bennett, C.L. et al., *ApJ* **464**, L1-L4 (1996).
- [10] Bernshtein, I.N. & Shvartsman, V.F., *Sov. Phys. JETP* **52**, 814-820 (1980).
- [11] Bernui, A., *Appl. Anal.* **42**, 157 (1991).
- [12] Bernui, A., *Ann. Physik* **3**, 408-421 (1994).
- [13] Bernui, A., Gomero, G.I., Rebouças, M.J. & Teixeira, A.F.F., *Phys. Rev. D* **57**, 4699 (1998).
- [14] Bernui, A. & Teixeira, A.F.F., *Cosmic crystallography: three multi-purpose functions*, astro-ph/9904180 (1999).
- [15] Bond, J.R., Pogosyan, D. & Souradeep, T., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2671-2687 (1998).
- [16] Bond, J.R., Pogosyan, D. & Souradeep, T., *Phys. Rev. D* **62**, 043005 (2000).

- [17] Bond, J.R., Pogosyan, D. & Souradeep, T., *Phys. Rev. D* **62**, 043006 (2000).
- [18] Bredon, G.E., *Topology and Geometry*, GTM 139, Springer-Verlag (1993).
- [19] van Breugel, W., *The Highest Redshift Radio Galaxies*, 0006238 (2000).
- [20] Brill, D.R. & Deser, S., *Commun. Math. Phys.* **32**, 291-304 (1973).
- [21] Burke, W.L., *Applied Differential Geometry*, Cambridge University Press (1994).
- [22] Burke, W.L., *J. Math. Phys.* **12**, 401 (1971).
- [23] do Carmo, M.P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA (1988).
- [24] Cornish, N.J. & Spergel, D.N., *A small universe after all?*, astro-ph/9906401v2 (1999).
- [25] Cornish, N.J., Spergel, D.N. & Starkman, G., *Phys. Rev. D* **57**, 5982-5996 (1998).
- [26] Cornish, N.J., Spergel, D.N. & Starkman, G., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2657-2670 (1998).
- [27] Cornish, N.J. & Turok, N.G., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2699-2710 (1998).
- [28] Cornish, N.J. & Weeks, J.R., *Measuring the shape of the universe*, astro-ph/9807311 (1998).
- [29] Crown, G.D., Fenrick, M.H. & Valenza, R.J., *Abstract Algebra*, Marcel Dekker Inc., New York (1986).
- [30] Damião Soares, I., *The Angular Size Distance-Redshift Relation for a Flat Accelerating Universe*, preprint CBPF-NF-022/00 (2000).
- [31] Dipert, R.R., *Isis*, **68**, 404-413 (1977).
- [32] Donaldson, S., *J. Diff. Geo.* **18**, 269-316 (1983).
- [33] Dunlop, J., *Contemp. Phys.* **38**, 409-427 (1997).
- [34] Ehlers, J., Geren, P., & Sachs, R.K., *J. Math. Phys.* **9**, 1344-1349 (1968).
- [35] Ellis, G.F.R., Nel, S.D., Maartens, R., Stoeger, W.R. & Whitman, A.P., *Phys. Rep.* **124**, 315-417 (1985).
- [36] Epstein, D.B.A. & Petronio, C., *Enseign. Math.* **40**, 113 (1994).

- [37] Fagundes, H.V. & Gausmann, E., *Phys. Lett. A* **238**, 235 (1998).
- [38] Fagundes, H.V. & Gausmann, E., *Cosmic Crystallography in Compact Hyperbolic Universes*, astro-ph/9811368 (1998).
- [39] Fan, X. et al., *The Discovery of a Luminous  $z=5.80$  Quasar from the Sloan Digital Sky Survey*, astro-ph/0005414 (2000).
- [40] Felten, J.E. & Isaacman, R., *Rev. Mod. Phys.* **58**, 689-698 (1986).
- [41] Freedman, M.H., *J. Diff. Geo.* **17**, 357-454 (1982).
- [42] Freedman, M.H. & Feng Luo, *Selected Applications of Geometry to Low-Dimensional Topology*, University Lecture Series 1, Amer. Math. Soc. (1989).
- [43] Freedman, W.L., *Phys. Rep.* **333-334**, 13-31 (2000).
- [44] Gomero, G.I., *O teorema do poliedro de Poincaré*, Tese de Mestrado, IMPA (1996).
- [45] Gomero, G.I., *Fundamental Polyhedron and Glueing Data for the Sixth Euclidean Compact Orientable 3-manifold*, preprint CBPF-NF-049/97 (1997).
- [46] Gomero, G.I., Teixeira, A.F.F., Rebouças, M.J. & Bernui, A., *Spikes in Cosmic Crystallography*, gr-qc/9811038 (1998).
- [47] Gomero, G.I., Teixeira, A.F.F., Rebouças, M.J. & Bernui, A., *Phys. Lett. A* **275**, 355-367 (2000).
- [48] Gomero, G.I., Rebouças, M.J. & Teixeira, A.F.F., *A topological signature in cosmic topology*, gr-qc/9911049 (1999).
- [49] Gomero, G.I., Rebouças, M.J., Teixeira, A.F.F. & Bernui, A., *Int. J. Mod. Phys. A* **15**, 4141-4162 (2000).
- [50] Gomero, G.I., Rebouças, M.J. & Teixeira, A.F.F., *A Topological Signature for the Shape of the Universe*, aceito para publicação pela International Journal of Modern Physics D.
- [51] Gompf, R., *J. Diff. Geo.* **18**, 317-328 (1983).
- [52] Haiman, Z. & Hui, L., *Constraining the Lifetime of Quasars from their Spatial Clustering*, astro-ph/0002190 (2000).
- [53] Hewitt, A. & Burbidge, G., *ApJ Supp. Series* **43**, 57-158 (1980).

- [54] Hoenselaers, C. & Schmidt, B., *Class. Quantum Grav.* **6**, 867 (1989).
- [55] Hubble, E. & Humason, M.L., *ApJ* **74**, 43-80 (1931).
- [56] Humason, M.L., Mayall, N.U. & Sandage, A.R., *ApJ* **61**, 97-161 (1956).
- [57] Inoue, R., *Class. Quantum Grav.* **16**, 3071-3094 (1999).
- [58] Isham, C.J., *Class. Quantum Grav.* **6**, 1509-1534 (1989).
- [59] Islam, *An introduction to mathematical cosmology*, Cambridge University Press (1992).
- [60] Jorjadze, G. & Piechocki, W., *Phys. Lett. B* **461**, 183-188 (1999).
- [61] Kokubun, F., *Rev. Bras. Ens. Fis.* **21**, 311-313 (1999).
- [62] Kuga, M., *Galois' Dream. Group Theory and Differential Equations*, Birkhauser (1993).
- [63] Lachièze-Rey, M. & Luminet, J.-P., *Phys. Rep.* **254**, 135-214 (1995).
- [64] Lehoucq, R., Lachièze-Rey, M. & Luminet, J.-P., *Astron. Astrophys.* **313**, 339-346 (1996).
- [65] Lehoucq, R., Luminet, J.-P. & Uzan, J.-P., *Astron. Astrophys.* **344**, 735 (1999).
- [66] Levin, J., Scannapieco, E., de Gasperis, G., Silk, J. & Barrow, J.D., *Phys. Rev. D* **58**, 123006 (1998).
- [67] Levin, J., Scannapieco, E. & Silk, J., *Phys. Rev. D* **58**, 103516 (1998).
- [68] Levin, J., Scannapieco, E. & Silk, J., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2689-2697 (1998).
- [69] Maran, S.P., Ed. *The Astronomy and Astrophysics Enciclopedia*, Cambridge University Press, (1992).
- [70] Margon, B., *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **357**, 93-103 (1999).
- [71] Martini, P. & Weinberg, D.H., *Quasar Clustering and the Lifetime of Quasars*, astro-ph/0002384 (2000).
- [72] Maskit, B., *Kleinian groups*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [73] Massey, W.S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, GTM 127, Springer-Verlag (1991).

- [74] Milnor, J., *Annals of Math.* **64** 399-405 (1956).
- [75] Milnor, J., *Bull. Ann. Math. Soc.* **6** 9-24 (1982).
- [76] Mostow, G.D., *Proc. Internat. Congr. Math., Vol.2*, 187-197 (1971).
- [77] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, (1990).
- [78] Nilsson, U.S., Ugglå, C., Wainwright, J. & Lim, W.C., *ApJ* **522**, L1-L3 (1999).
- [79] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London (1983).
- [80] Osmer, P.S., *Searches for Quasars at  $z > 5$* , astro-ph/0005540 (2000).
- [81] Overduin, J.M. & Cooperstock, F.I., *Phys. Rev. D* **58**, 043506 (1998).
- [82] Perlmutter, S. et al., *ApJ* **517**, 565-586 (1999).
- [83] Piechocki, W., *Topology of the Universe*, gr-qc/9910055 (1999).
- [84] Poincaré, H., *Acta Mathematica* **III**, 49 (1883).
- [85] Prasad, G., *Invent. Math.* **21**, 255-286 (1973).
- [86] Quinn, F., *J. Diff. Geo.* **17**, 503-521 (1982).
- [87] Ratcliffe, J.G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, GTM 149, Springer-Verlag, New York (1994).
- [88] Rebouças, M.J., Tavakol, R.K. & Teixeira, A.F.F., *Gen. Rel. Grav.* **30**, 535-543 (1998).
- [89] Richtmyer, R.D., *Principles of Advanced Mathematical Physics. Vol.I*, Springer-Verlag, New York (1978).
- [90] Riley, R., *Math. of Comp.* **40**, 607-632 (1983).
- [91] Rohatgi, V.K., *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York (1976).
- [92] Roos, M. & Harun-or-Rashid, S.M., *Astron. Astrophys.* **329**, L17-L19 (1998).
- [93] Rotman, J.J., *An Introduction to the Theory of Groups*, GTM 148, Springer-Verlag, New York (1995).

- [94] Roukema, B.F., *Mon. Not. Roy. Soc.* **283**, 1147-1152 (1996).
- [95] Roukema, B.F. & Edge, A.C., *Mon. Not. Roy. Soc.* **292**, 105-112 (1997).
- [96] Roukema, B.F. & Luminet, J.-P., *Constraining curvature parameters via topology*, astro-ph/9903453v2 (1999).
- [97] Sahni, V. & Starobinski, A., *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, 373,443 (2000).
- [98] Scannapieco, E., Levin, J. & Silk, J., *Temperature Correlations in a Finite Universe*, astro-ph/9811226v2 (1998).
- [99] Schlesinger, K.G., *J. Math. Phys.* **39**, 1441-1450 (1998).
- [100] Schutz, B., *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, (1985).
- [101] Schwalb, F. & Thirring, W., *Ergeb. exakten Naturwiss.* **36**, 219 (1964).
- [102] Schwarzschild, K., *Vierteljahrschrift d. Astronom. Gesellschaft.*, **35**, 337-347 (1900).  
Tradução ao inglês por John M. Stewart e Mary E. Stewart, *Class. Quantum Grav.* **15**, 2539-2544 (1998).
- [103] Scott, P., *Bull. London Math. Soc.* **15**, 401-487 (1983).
- [104] Simon, B., *Representations of Finite and Compact Groups*, GSM 10, American Mathematical Society (1996).
- [105] Sladowski, J., *Exotic smoothness and particle physics*, hep-th/9604137 (1996).
- [106] Stewart, J., *Gen. Rel. Grav.* **15**, 425 (1983).
- [107] Starkman, G.D., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2529 (1998).
- [108] Stoeger, W.R., Maartens, R. & Ellis, G.F.R., *ApJ* **443**, 1-5 (1995).
- [109] Strauss, M.A., & Willick, J.A., *Phys. Rep.* **261**, 271-434 (1995).
- [110] Tavakol, R.K., comunicação privada (2000).
- [111] Thurston, W.P., *Bull. Am. Math. Soc.* **6**, 357-381 (1982).
- [112] Thurston, W.P., *Three-Dimensional Geometry and Topology. Vol.1*, Edited by Silvio Levy, Princeton University Press (1997).
- [113] Torretti, R., *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **31**, 171-186 (2000).

- [114] Unruh, W., in *Gravitational Radiation*, Les Houches 1982, Eds. N. DeRuelle & T. Piran, North-Holland, Amsterdam (1983).
- [115] Uzan, J.-P., Lehoucq, R. & Luminet, J.-P., *A New Crystallographic Method for Detecting Space Topology*, astro-ph/9903155 (1999).
- [116] Visconti, A., *Introductory Differential Geometry for Physicists*, World Scientific (1992).
- [117] Wall, J.V. & Jackson, C.A., *Cosmic evolution and unified model for radio AGN*, astro-ph/9907441 (1999).
- [118] Weeks, J., *Class. Quantum Grav.* **15**, 2599-2604 (1998).
- [119] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972).
- [120] Wills, B.J., *Introduction to Unified Schemes*, astro-ph/9905093 (1999).
- [121] Witt, D.M., *J. Math. Phys.* **27**, 573-592 (1986).
- [122] Wolf, J.A., *Spaces of Constant Curvature*, fifth ed., Publish or Perish Inc., Delaware (1984).

# “Busca da Topologia do Universo usando Fontes Cósmicas Discretas”

Germán Ignácio Gomero Ferrer

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Marcelo José Rebouças – Presidente/CBPF

Helio Vasconcelos Fagundes – IFT/USP

Valdir Barbosa Bezerra – UFPB

Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira - CBPF

Ívano Damião Soares - CBPF

Suplente: Sebastião Alves Dias- CBPF

Convidado especial: Ioav Waga - UFRJ

Rio de Janeiro, 01 de dezembro de 2000