

Tese de
Doutorado

**Aspectos de Teoria Quântica de Campos:
o Vácuo e algumas Aplicações**

Raphael Dias Martins De Paola

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, dezembro de 2000.

Resumo

A energia do vácuo de um campo escalar sem massa submetido a condições de contorno suaves e semiduras é calculada. A energia do vácuo de um campo fermiônico sem massa no interior de duas placas paralelas também é calculada. Em ambos os modelos o número de dimensões do espaço-tempo é tomado como parâmetro livre e são usadas regularizações dimensional e da função zeta.

Em outro capítulo calcula-se a produção de partículas escalares gerada pela variação do espaço-tempo na presença de uma corda cósmica com momento angular variável, fazendo-se uso das transformações de Bogolubov.

Por último quantiza-se um campo escalar num referencial girante que se obtém de um referencial inercial pelas transformações de Trocherries-Takeno. Compara-se as quantizações nos dois referenciais através das transformações de Bogolubov e mostra-se que o vácuo de Minkowski contém quasi-partículas de Trocherries-Takeno. Investiga-se a taxa de excitação de um detector de Unruh-DeWitt em trajetórias inerciais e girantes na presença dos estados de vácuo de Minkowski e de Trocherries-Takeno e discute-se à esta luz o Princípio de Mach e o conceito de Espaço Absoluto.

Abstract

It is calculated the vacuum energy of a massless scalar field subjected to soft and semihard boundary conditions. It is also calculated the vacuum energy of a massless fermion field confined in the interior of two parallel plates. In both models the number of space-time dimensions is left as a free parameter and it is used both dimensional and zeta-function regularizations.

In another chapter it is calculated the scalar particle production due to the variation of the space-time metric around a cosmic string with variable angular momentum making use of the Bogolubov transformations.

Finally a scalar field is quantized in a rotating frame, obtained from an inertial one through the Trocherries-Takeno coordinate transformations. The quantizations in both frames are compared using the Bogolubov transformations and it is shown that the Minkowski vacuum contains Trocherries-Takeno quasi-particles. It is calculated the excitation rate of an Unruh-DeWitt detector in inertial and rotating trajectories in the presence of the Minkowski and Trocherries-Takeno vacuum states and in the light of that it is discussed the Mach's Principle and the concept of Absolute Space.

Agradecimentos

- Ao Nami F. Svaiter, primeiramente orientador e depois amigo, por compartilhar comigo sua sabedoria e experiência e por não desistir nunca: “Cadê as contas?”
- A Vitorio A. De Lorenci, Francisco Caruso e Robson B. Rodrigues pelas incontáveis discussões que resultaram nesta tese.
- Aos amigos: Robson, André, Gabriel, Martin, Sergio, Jorge, Gino, Johana, Danays, Fernando, Wagner, Vitorio, Tonini, Javier, Renato, Manoel, Sasaki, Alvaro, Caruso, Tião, Helayël.
- Ao ótimo e indispensável trabalho dos bibliotecários: Sergio, Rosa, José, Marina, Rosangela, Marcelo, Aldemir, Edileuza, Vera, Socorro, Valéria, Cristiano.
- Aos amigos do Lafex: Márcio, Sônia, Zélia, Simone.
- À amiga na CFC, Miriam Coutinho e ao José Ricardo, salvação desde os tempos do Lafex.
- À turma da pelada sagrada das quartas: Flavio, Boldo, Winder, Julio, Jorge Luis, Dalber, Paulo, Cambraia, Ailton, Armando, Santiago.
- Ao CBPF e todos os funcionários da segurança, limpeza e manutenção das condições de trabalho.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Dedico meu empenho e trabalho às pessoas que são tudo pra mim: meus pais e meu irmão Fred.

E à Ada que se tornou outro tudo pra mim.

Índice

1	Introdução	1
2	Teoria Quântica de Campos na presença de Fronteiras	7
2.1	O Efeito Casimir	7
2.2	Energia de Ponto-Zero de um Campo Escalar na presença de Fronteiras Suaves e Semiduras em D dimensões	8
2.2.1	A Energia de Casimir em uma Caixa Clássica bi-dimensional	12
2.2.2	A Energia de Casimir de um Campo Escalar sem massa na presença de Fronteiras Duras em D dimensões	14
2.2.3	O efeito de Fronteiras Suaves e Semiduras na Energia de Casimir	17
2.2.4	Condições Suaves e Semiduras em mais de uma direção espacial	23
2.2.5	O caso de um potencial central tipo Oscilador Harmônico em $D = 4$	27
2.3	Energia de Ponto-Zero de Férmions sem massa em uma <i>slab-bag</i>	30
2.3.1	O Vácuo de Dirac e a Energia de Casimir para a <i>slab-bag</i>	33
2.3.2	A Energia de Casimir a temperatura finita	42
3	Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo gerado por Cordas Cóslicas: um exemplo de criação de partículas	47
3.1	Produção de partículas no espaço-tempo de uma Corda Cóslica com momento angular variável	47
3.1.1	Introdução	47
3.1.2	Espaços-tempos genéricos gerados por Cordas Cóslicas girantes	48
3.1.3	Distribuição de Energia e Momento	50

3.1.4	Produção de partículas escalares entre os espaços-tempos limites . . .	53
4	Teoria Quântica de Campos num referencial girante	60
4.1	O Vácuo girante	60
4.1.1	Quantização Canônica nos referenciais inercial e girante	65
4.1.2	Taxa de excitação de um Detector de Unruh-DeWitt	71
4.2	Relações com o Experimento do Balde de Newton e com o Princípio de Mach	77
4.2.1	A Questão Mach <i>vs</i> Newton e as relações com o Vácuo girante . . .	80
5	Conclusões e Perspectivas	89

Lista de Figuras

2.1	Energia de Casimir $U(L_1, L_2)$ de uma caixa clássica bi-dimensional como função de $x = \frac{L_1}{L_2}$	14
2.2	Energia de Casimir do campo fermiônico para pequenos valores de D , à parte o fator de spin $c(D)$: $e(D) = \frac{\epsilon_D(L)L^{D-1}}{c(D)}$	40
3.1	Escalar de curvatura R como função das coordenadas t e r da geometria gerada por uma corda cósmica com momento angular variável.	53

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese abordaremos alguns temas particulares que dizem respeito à estrutura e comportamento do vácuo de campos quânticos. É fato aceito hoje em dia que o estado de menor energia de um campo quantizado, o estado de vácuo, apresenta propriedades que não são triviais e que a noção de que o vácuo é a ausência de qualquer coisa deve ser abandonada. Nesta visão já ultrapassada está se levando em conta que a entidade física fundamental que forma o conteúdo do espaço é a matéria, a cuja menor porção se dá o nome *partícula*. Desta forma, se for possível, numa certa região finita do espaço, ir retirando gradualmente toda a matéria nela existente, partículas uma a uma, chega-se à situação final em que não há mais partículas nesta região. O número de partículas é agora zero nesta região, e diz-se que foi criado ali um *vácuo*. Vemos que a noção de vácuo como ausência de qualquer coisa está intimamente ligada com a visão de que a matéria é a quantidade essencial no universo.

Numa visão moderna, a entidade que é considerada como fundamental e que preenche o espaço, ou melhor, forma o conteúdo do espaço, não é mais a matéria mas os *campos*. Exigindo-se que os campos respeitem às regras da Mecânica Quântica ao quantizá-los, encontra-se que os mesmos, em cada instante, podem ocupar qualquer um de vários estados possíveis. A este conjunto infinito de possíveis estados em que o campo pode ser encontrado dá-se o nome de Espaço de Fock. Estes estados podem ser arranjados em ordem crescente de energia e o estado de mais baixa energia denomina-se *estado de vácuo*. Os estados de energia mais alta podem ser obtidos deste último através de operações adequadas e, sob certas condições, pode-se interpretar estes estados excitados como partículas de um determinado tipo que o campo descreve. Vemos então que o que

se chama de partículas, ou a própria matéria, são manifestações de uma entidade mais fundamental, os campos.

Quando pensamos em vácuo, a primeira imagem que vem à mente é a de espaço vazio, isto é, uma região do espaço completamente desprovida de matéria. Esta é a visão do vácuo que os físicos chegaram nos séculos XVII e XVIII com os trabalhos de Torricelli e von Guericke e isto em princípio pode ser alcançado: basta para tanto que se retire desta região todos os sólidos, líquidos e também gases. Mas restará ainda, nesta região, algo que, se não pode ser identificado como matéria nas formas descritas acima, ainda assim contém energia: radiação eletromagnética. Para entendermos melhor, tomemos como exemplo um pistão perfeitamente acoplado a um recipiente cilíndrico. Imaginemos uma situação inicial em que entre o pistão e a base do cilindro não haja espaço nenhum, e que num instante posterior puxa-se para fora o pistão, mantendo-o a uma distância fixa da base por um certo intervalo de tempo. Claramente, no espaço entre o pistão e a base do cilindro não há matéria nenhuma, pelo menos na forma de sólidos, líquidos e gases, mas ainda assim o pistão não voltará à sua posição inicial mesmo que se aplique uma força nesse sentido. O que acontece é que durante o tempo em que o pistão foi mantido distante da base do cilindro, as paredes do cilindro estavam emitindo radiação térmica à temperatura ambiente para seu interior, e sabe-se que a radiação térmica responde a uma compressão de maneira análoga à de um gás: ambas, temperatura e pressão, tendem a crescer. Isto faz com que a radiação comprimida exerça uma força contrária à força de reinserção do pistão, não permitindo a este último voltar à posição inicial.

Desde que Einstein mostrou a equivalência entre matéria e energia ($E = mc^2$), passou-se a descrever a radiação eletromagnética em termos de partículas, os fótons, e portanto são estes que estão presentes no cilindro e que exercem a pressão de radiação descrita acima. Em princípio pode-se também retirar todo o conteúdo de fótons desta região, bastando para isso que se resfrie as paredes do cilindro à temperatura de zero absoluto. Chega-se então à situação em que ali não há sólidos, líquidos, gases e nem radiação térmica (zero fótons), e portanto o número de partículas - no sentido de Einstein - é zero nesta região. Esta é a visão do vácuo a que se chegou no início do século XX, e finalmente pareceu ter-se vislumbrado uma situação onde uma região não contivesse “coisa alguma”, e, portanto, seria desprovida de qualidades. Entretanto existe uma componente

da radiação eletromagnética, à parte a radiação térmica, que não pode ser removida e que parece ser uma característica inerente ao vácuo. Mesmo que a temperatura possa ser abaixada ao zero absoluto, ainda assim persistirá nesta região um padrão de flutuações do campo eletromagnético. Nesta linha, hoje em dia os físicos definem o conceito de vácuo como o que quer que sobre numa região do espaço depois que se tenha removido dela toda e qualquer coisa que possa ser removida por meios experimentais [1].

No contexto da Física moderna a palavra vácuo possui um sentido mais amplo, significando o estado de energia mínima de um sistema. Mas, pode-se perguntar, como pode o espaço vazio ter energia? Uma resposta qualitativa é a de que, segundo a Mecânica Quântica, todas as quantidades físicas tendem a flutuar, e em particular isto ocorre também para o estado de vácuo. A teoria indica que, no estado de vácuo, pares de partículas e antipartículas virtuais aparecem e desaparecem no espaço, contribuindo assim para sua energia. De fato, embora possam não estar presentes, a energia do vácuo depende das partículas reais existentes.

Este comportamento quântico tem origem no Princípio de Incerteza, isto é, existe uma limitação na determinação simultânea da posição e momento de uma partícula. Assim, por exemplo, a determinação precisa da posição de uma partícula implica numa indeterminação absoluta em sua velocidade e vice-versa. Devido a este mesmo Princípio é que aparece uma energia não nula para o estado de vácuo, ou seja, existe uma "energia de ponto-zero". O resultado é que a energia mínima de um oscilador harmônico quântico não é zero e sim igual a $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$ é a frequência do oscilador dada em termos da constante elástica k e de sua massa m e \hbar é a constante de Planck.

Uma das teorias mais bem sucedidas já elaboradas é o chamado Modelo Padrão da Física de Partículas. O Modelo Padrão é, na verdade, um conjunto de teorias que descrevem (até o limite de energia acessível nos modernos aceleradores de partículas) as partículas elementares conhecidas assim como suas interações. O sucesso desta teoria decorre da sua comprovada capacidade em descrever corretamente os resultados experimentais, bem como de ter feito previsões que foram confirmadas posteriormente. Sendo uma Teoria Quântica de Campos, o modelo padrão descreve as partículas elementares (elétron, quarks, fótons, etc.) e suas interações por meio de campos quantizados. É possível mostrar que todo campo sem interação, associado a uma partícula elementar,

pode ser considerado como uma coleção de osciladores harmônicos quânticos. Assim, cada partícula elementar dará uma contribuição para a energia do vácuo, que será a soma da energia de ponto-zero desses osciladores. Em princípio, o que ocorre é que esta energia (densidade de energia) é infinita, pois há infinitas frequências (modos) que entram nessa soma, mas na prática o que é feito é estabelecer-se, com base em argumentos físicos, uma frequência de corte (*cutoff*).

É um fato notável que existam efeitos passíveis de observação associados à energia do vácuo. Um exemplo disto é o “Efeito Casimir” [2]. O físico holandês H.B.G. Casimir mostrou que a existência de flutuações quânticas do campo eletromagnético no vácuo entre duas placas condutoras sem carga, paralelas e separadas de uma distância d , gera uma força atrativa por unidade de área (pressão de ponto-zero) entre elas igual a $\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} = 1,3 \times 10^{-18} \text{ dyne cm}^2 / d^4$. Esse efeito foi comprovado por Sparnaay [3] em 1957 e muitos outros e mais recentemente por Lamoreaux [4] em 1997, que obteve uma excelente concordância com a teoria. O Efeito Casimir [5] é essencialmente a polarização do vácuo de campos quantizados, polarização esta causada pela variação no espectro das flutuações do vácuo quando o campo interage com campos externos, com fronteiras físicas, ou ainda quando a topologia do espaço em questão não é Euclideana. No caso acima, tratado por Casimir, o efeito aparece devido à presença das placas condutoras que impõem certas condições físicas que o campo deve satisfazer sobre elas.

Nesta tese apresentaremos dois trabalhos em que estudamos o Efeito Casimir. O primeiro trabalho trata de um campo escalar sem massa e tratamos o número de dimensões do espaço-tempo como uma variável. A diferença deste para outros trabalhos da literatura é que ao invés de impormos condições de contorno usuais, vamos supor que dentro de uma determinada região o campo interage com um potencial crescente que vai simular uma fronteira física que confina o campo. Consideramos desta forma o relaxamento das condições de contorno usuais e sua influência na energia do vácuo. No segundo deles estudaremos o Efeito Casimir de um campo fermiônico sem massa confinado ao interior de uma sub-região do espaço-tempo de Minkowski e novamente trataremos o número de dimensões do espaço-tempo como uma variável. As condições de contorno escolhidas são de fluxo nulo do campo fermiônico para fora de uma região que é finita em apenas uma das direções espaciais, e foram ditadas com vistas ao modelo do MIT para hádrons conhecido

como *bag-model*. Nestes dois trabalhos calculamos a Energia de Casimir correspondente.

Uma outra linha de pesquisa desenvolvida nesta tese foi Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos. Suponhamos que haja um campo, a ser quantizado, definido em todo espaço-tempo. Consideremos ainda que tal espaço-tempo seja plano assintoticamente no passado e no futuro, mas que na região intermediária o espaço seja curvo. Ao realizar-se a quantização canônica do campo nas duas regiões assintóticas encontra-se dois estados de vácuo, um em cada região, que podem em princípio não ser equivalentes assim como os espaços de Fock correspondentes. Essa não equivalência leva a uma ambigüidade no conceito de partículas, pois o que se define como partículas numa região perde este sentido em outra. Como trabalharemos na visão de Heisenberg para descrever a dinâmica quântica, uma vez escolhido o estado do campo como o vácuo definido no infinito passado, durante toda a evolução subsequente do espaço-tempo o estado do campo permanecerá o mesmo. Ainda assim detectores inerciais podem acusar a presença de partículas no infinito futuro neste estado de “vácuo”. Pode-se desta forma dizer que partículas foram “criadas” pela variação do campo gravitacional externo. Neste sentido realizamos o cálculo da produção de partículas escalares devido ao campo gravitacional variável de uma corda cósmica que perde seu momento angular inicial com o passar do tempo. Em ambos casos limites, que correspondem à corda cósmica com momento angular ($t \rightarrow -\infty$) e sem momento angular ($t \rightarrow \infty$), as geometrias geradas são planas e resolvemos a equação de Klein-Gordon nas duas regiões, obtendo assim os modos soluções. Os cálculos da produção de partículas foram feitos através das transformações de Bogolubov entre ambos conjuntos de modos.

Por último tratamos de Teoria Quântica de Campos em referenciais não inerciais. Existem três classes de referenciais que merecem especial atenção: referenciais inerciais, referenciais com aceleração linear própria constante, e referenciais com aceleração radial própria constante. A quantização realizada num referencial inercial é a quantização usual no espaço de Minkowski. A construção de uma Teoria Quântica de Campos em um referencial com aceleração uniforme é conhecida como quantização de Rindler, e acarreta que um observador que siga esta linha de universo acelerada mede partículas mesmo com o campo no vácuo de Minkowski. Na verdade a idéia de partículas como entidades dependentes do estado de movimento do observador leva ao conceito de “quasi-partículas”,

e pode-se mostrar que o vácuo de Minkowski contém essas quasi-partículas de Rindler. Apesar de ainda restarem questões a esclarecer, a quantização no espaço de Rindler é bem conhecida na literatura. Já o caso de observadores com movimento circular uniforme, isto é, com aceleração radial própria constante, apesar de ser mais fácil de reproduzir em condições de laboratório, não recebeu ainda um tratamento adequado no que toca às transformações de coordenadas que relacionam os referenciais inercial e girante. É neste sentido que propomos um outro conjunto de transformações entre as coordenadas nos dois referenciais e realizamos então a quantização de um campo escalar no referencial girante. Novamente aqui encontra-se utilidade nas transformações de Bogolubov: neste contexto estas são usadas para comparar-se as quantizações nos dois referenciais, e como resultado mostramos que no vácuo de Minkowski estão presentes quasi-partículas girantes, chamadas de quasi-partículas de Trocheries-Takeno. Este resultado nos permitiu ainda discutir questões que remontam ao tempo de Mach e também de Newton sobre a existência do Espaço Absoluto e sobre a validade do Princípio de Mach.

Capítulo 2

Teoria Quântica de Campos na presença de Fronteiras

2.1 O Efeito Casimir

Quando se utiliza o formalismo canônico para quantizar um campo livre obtém-se uma quantidade divergente para o valor esperado da Hamiltoniana no estado fundamental, ou melhor, a energia do vácuo é formalmente divergente. Pode-se mostrar, por exemplo, que a seguinte expressão para a energia de ponto-zero de um campo escalar livre é encontrada:

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k, \quad (2.1)$$

onde ω_k é a energia do modo com momento k . Uma maneira de resolver o problema da divergência da energia de ponto-zero é redefinindo a Hamiltoniana através do ordenamento normal de Wick. O argumento usado é que não se pode medir diretamente o valor absoluto da energia, mas apenas diferenças ou variações de energia têm relevância física. De acordo com o ordenamento normal, o valor esperado da Hamiltoniana assim modificada é igual a zero, implicando que o estado de vácuo de um campo livre apresenta agora as propriedades esperadas: energia zero, momento zero e momento angular zero.

Entretanto devemos ter em conta que campos livres são uma idealização e que numa situação real os campos existem na presença de vínculos externos, ou seja, os campos estão sempre em interação com a matéria ou com outros campos externos. A presença de vínculos externos modifica o espectro das frequências ω_k e, conseqüentemente, a energia de ponto-zero é modificada também. Qualquer variação dos vínculos externos induz uma variação na energia do vácuo, que é agora considerada como uma quantidade observável.

Somos levados desta forma a calcular a energia do vácuo, ou energia de Casimir, de um campo com respeito à sua interação com os vínculos externos. A principal consequência deste conceito de vácuo, chamado agora de vácuo físico ou vácuo de Casimir, é que este estado não mais é um estado com propriedades triviais. Ao contrário, possíveis efeitos característicos do vácuo podem ser vistos como a resposta do vácuo à presença dos vínculos externos. Na configuração de Casimir, onde efetua-se a quantização do campo eletromagnético na presença de duas placas condutoras, pode-se dizer que as placas metálicas distorcem as flutuações do vácuo do campo eletromagnético e o efeito disso é que aparece uma força de atração entre as placas.

Um caso de particular interesse para nós é quando o campo em questão está confinado a uma região determinada do espaço, e uma descrição idealizada desta situação é obtida impondo que o campo satisfaça a determinadas condições de contorno. A presença das fronteiras que confinam o campo causam uma variação no espectro das flutuações do vácuo e modificam assim a energia de ponto zero. Novamente o efeito disso é o aparecimento de uma força entre as fronteiras, mas se esta força é atrativa ou repulsiva depende crucialmente tanto do campo considerado quanto da configuração geométrica das fronteiras que o confinam.

A seguir estudaremos a interação de campos quantizados com diferentes tipos de estruturas clássicas. Na seção (2.2), ao invés de considerarmos as condições de contorno usuais de Dirichlet para o campo escalar, vamos considerar a interação deste campo com um potencial dado. A interação do campo com este potencial visa simular a interação do campo com uma fronteira efetiva que confina o mesmo. Na seção (2.3) vamos calcular a energia de Casimir de um campo fermiônico sem massa confinado a uma região que apresenta tamanho finito em apenas uma direção espacial.

2.2 Energia de Ponto-Zero de um Campo Escalar na presença de Fronteiras Suaves e Semiduras em D dimensões

Em muitas situações em Teoria Quântica de Campos supõe-se que os campos estejam confinados em uma região por alguma cavidade de forma que sejam submetidos a alguma

condição de contorno “clássica”. Em grande parte da literatura em que se discute o Efeito Casimir as fronteiras onde impomos condições de contorno têm uma localização espacial bem precisa assim como uma forma geométrica bem definida (fronteira “dura”), apesar de estas serem inquestionavelmente uma idealização. Neste contexto pode-se perguntar até que ponto os cálculos sobre o Efeito Casimir dependem deste tipo de hipótese. Em alguns trabalhos estas condições de contorno foram relaxadas [6, 7, 8, 9, 10].

Nesta seção vamos aprofundar nosso conhecimento a respeito de como a energia de Casimir de um campo escalar sem massa, definido num espaço-tempo plano D -dimensional, depende das condições de contorno e do número de dimensões. Com este propósito, três diferentes tipos de fronteiras “clássicas” serão consideradas: “duras”, “semiduras” e “suaves”. O significado desta terminologia será esclarecido mais adiante.

A questão da determinação do valor esperado de um observável físico está relacionada com a seguinte pergunta: como implementar um esquema de renormalização em uma dada situação? Em 1948 Casimir apresentou um esquema para a obtenção de um resultado finito a partir da energia de ponto-zero divergente do campo eletromagnético [2]. Apesar de formalmente divergente, a diferença entre as energias de ponto-zero de configurações físicas diferentes pode ser finita. Se supormos que uma destas configurações apresenta energia de ponto-zero nula, então a diferença entre as energias do vácuo de duas configurações é a energia renormalizada. Conseqüentemente a definição formal da energia de Casimir é:

$$E_{ren}(\partial\Omega) = E_0(\partial\Omega) - E_0(0), \quad (2.2)$$

onde $E_0(\partial\Omega)$ e $E_0(0)$ são, respectivamente, as energias de ponto-zero na presença e na ausência das fronteiras. No caso de campos escalares, a abordagem de Casimir pode ser resumida nos seguintes passos: acha-se um conjunto completo de modos soluções para a equação de Klein-Gordon com condições de contorno apropriadas e as respectivas autofreqüências; a energia de ponto-zero divergente é regularizada introduzindo-se um *cutoff* ultravioleta; e, finalmente, a parte polar da energia regularizada é removida através do procedimento de renormalização descrito acima da subtração de configurações diferentes.

Antes de apresentarmos alguns cálculos bastante instrutivos, vamos discutir uma importante questão relacionada com a definição da energia renormalizada. É fato conhecido que existem duas quantidades que podem representar a energia total renormalizada de

campos quânticos [11]. A primeira é a energia dada pela soma dos modos $\langle E \rangle_{ren}^{mode}$,

$$\langle E \rangle_{ren}^{mode} = \int_0^\infty d\omega \frac{1}{2}\omega (N(\omega) - N_0(\omega)), \quad (2.3)$$

onde $\frac{1}{2}\omega$ é a energia de ponto-zero de cada modo, $N(\omega)d\omega$ é o número de modos com frequências entre ω e $\omega + d\omega$ na presença das fronteiras e $N_0(\omega)d\omega$ é a quantidade correspondente calculada no espaço vazio, isto é, na ausência de fronteiras. A equação (2.3) nos dá a soma renormalizada das energias de ponto-zero de cada modo. A segunda quantidade que pode representar a energia total renormalizada de campos quânticos é a integral no volume da densidade de energia renormalizada, $\langle E \rangle_{ren}^{vol}$, obtida através do método das funções de Green [12]. Neste último método, para calcularmos a energia renormalizada de qualquer campo, um certo operador diferencial de segunda ordem é aplicado à função de Green renormalizada $G_{ren}(x, x')$, ou seja,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren} = \lim_{x \rightarrow x'} D_{\mu\nu} [G(x, x') - G_0(x, x')], \quad (2.4)$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green na presença da fronteira $\partial\Omega$ e $G_0(x, x')$ é a função de Green na ausência de fronteira. Deutsch e Candelas [11] se referem à quantidade entre colchetes como a função de Green renormalizada, já que ambas as funções de Green, $G(x, x')$ e $G_0(x, x')$, dão origem à mesma divergência ultravioleta quando $x \rightarrow x'$. Se o ponto x pertence à fronteira $\partial\Omega$, o tensor energia-momento renormalizado $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ pode divergir à medida em que se aproxima desta superfície. Entretanto, como foi enfatizado por estes autores, o argumento acima não é uma prova de que o tensor energia-momento renormalizado $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{ren}$ vai divergir ao nos aproximarmos de $\partial\Omega$, mas apenas sugere que se o tensor energia-momento é finito perto de $\partial\Omega$ um certo cancelamento deve ter ocorrido. No caso do campo eletromagnético presente tanto no interior como no exterior de uma casca esférica perfeitamente condutora ocorre um cancelamento entre os modos TE e TM, dando origem a uma energia total finita [13].

É importante salientar que para o campo escalar minimalmente acoplado tal cancelamento não ocorre, o que leva a um conceito ambíguo da densidade de energia de ponto-zero renormalizada $\langle T_{00} \rangle_{ren}$. No entanto, sabe-se que a energia total do vácuo renormalizada associada a um campo escalar minimalmente acoplado, obtida através do método da

soma dos modos, $\langle E \rangle_{ren}^{mode}$, tem que ser igual àquela no caso de acoplamento conforme pois ambos os campos satisfazem à mesma equação de onda e possuem a mesma densidade de modos. Não obstante, as energias de ponto-zero totais renormalizadas obtidas pelo método das funções de Green, $\langle E \rangle_{ren}^{vol}$, para os acoplamentos mínimo e conforme, são diferentes. Qual destas duas quantidades, $\langle E \rangle_{ren}^{mode}$ ou $\langle E \rangle_{ren}^{vol}$, portanto, corresponde à energia renormalizada “física” do campo escalar minimalmente acoplado?

Alguns autores têm sugerido que um tratamento quântico completo das condições de contorno pode resolver o problema mencionado acima. Recentemente Ford e Svaiter [10] confirmaram esta expectativa trabalhando com fronteiras flutuantes. Ao tratar-se as placas confinantes como objetos quânticos com distribuição de probabilidade para suas posições $|\psi(q)|^2$, foi mostrado que esta abordagem resolve a discrepância entre $\langle E \rangle_{ren}^{mode}$ e $\langle E \rangle_{ren}^{vol}$ para o campo escalar minimalmente acoplado.

Existem outras abordagens diferentes com o intuito de relaxar-se as condições de contorno clássicas. Investigando o modelo de *bag*, alguns autores discutiram correções quânticas a este modelo ao quantizarem as flutuações ao redor da solução da *bag* clássica [14]. Indo na mesma direção, Creutz [15] estudou os efeitos de se considerar diferentes configurações de *bag* utilizando-se de integrais de caminho em uma teoria com campos escalares com massas diferentes para as regiões interior e exterior à *bag*. Golestanian e Kardar [9] também se utilizam das integrais de caminho para investigarem o problema de cavidades perfeitamente condutoras que sofrem uma deformação dinâmica arbitrária. Estes autores conseguem calcular o comportamento da função resposta mecânica (isto é, a razão entre a força induzida e o campo de deformação no regime linear). Alguns autores, por outro lado, aplicaram uma abordagem alternativa mais simples, que permite lidar com situações físicas mais gerais que as condições de contorno clássicas “duras” utilizadas na literatura. Supõe-se uma fronteira confinante “suave” modelada por um potencial que cresce suavemente, e que representa alguma distribuição de matéria que interage com o campo quântico [6, 7]. Utilizando-se esta abordagem é possível recuperar as fronteiras “duras” em um dado limite. Este ponto ficará mais claro adiante.

O objetivo desta seção é discutir o Efeito Casimir para campos escalares sem massa sujeitos não apenas a condições de contorno “duras” num espaço-tempo D -dimensional mas também condições “semiduras” e “suaves” num espaço-tempo plano D -dimensional

[16].

2.2.1 A Energia de Casimir em uma Caixa Clássica bi-dimensional

Com o objetivo de aprofundarmos nosso conhecimento no problema de como extrair quantidades renormalizadas de quantidades divergentes associadas a campos confinados, vamos rever, nesta seção, um exemplo bem conhecido. Uma das situações mais simples que se pode imaginar é a de um campo escalar com acoplamento mínimo satisfazendo condições de contorno “duras” em um espaço-tempo $3D$. Queremos ressaltar que neste exemplo aparece um fato bastante interessante: o sinal da energia renormalizada fica dependente da razão entre os comprimentos característicos da cavidade.

Desta forma vamos considerar um campo escalar sem massa, livre, confinado numa caixa retangular bi-dimensional que satisfaz condições de contorno de Dirichlet nas paredes da caixa. Queremos enfatizar que este modelo com arestas foi usado por Peterson, Hansson e Johnson [17] no estudo de diagramas de Feynman de um campo escalar confinado numa caixa retangular.

Um campo escalar real sem massa e livre, $\varphi(x)$, definido em um espaço-tempo plano, satisfaz à equação de Klein-Gordon homogênea. Se restringirmos o campo ao interior da caixa, os modos do campo serão enumeráveis e as partes de frequências positivas e negativas formam um conjunto completo ortonormal. A energia renormalizada pode ser obtida depois de um procedimento de regularização e renormalização conveniente da soma infinita das energias de ponto-zero de cada modo do campo. Pelo fato de não haver diferença entre a densidade de modos dos campos escalares com acoplamento mínimo e conforme, o exemplo abaixo serve nos dois casos. Nesta seção iremos seguir os passos de [18].

Em um espaço-tempo $3D$ as autofrequências do campo sujeito às condições de Dirichlet nos lados da caixa são dadas por:

$$\omega_{n_1 n_2} = \left(\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L_2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad n_1, n_2 = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

onde L_1 e L_2 são os comprimentos dos lados da caixa. A energia de ponto-zero é dada por:

$$E(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \omega_{n_1 n_2}, \quad (2.6)$$

onde $\omega_{n_1 n_2}$ é dada pela equação (2.5). Esta expressão é divergente e pode ser escrita como:

$$E_\zeta(L_1, L_2, s) = \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2=1}^{\infty} \omega_{n_1 n_2}^{-2s}, \quad (2.7)$$

para $s = -\frac{1}{2}$.

A equação (2.7) é analítica para $Re(s) > 1$. Um método de regularização analítica consiste em calcular-se a extensão analítica da função zeta acima ao ponto $s = -\frac{1}{2}$. Manipulações algébricas com a equação (2.7), usando a equação (2.5), nos dão:

$$E_\zeta(L_1, L_2, s) = \frac{1}{8} A\left(\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2, \left(\frac{\pi}{L_2}\right)^2; s\right) - \frac{1}{4} \left(\left(\frac{L_1}{\pi}\right)^{2s} + \left(\frac{L_2}{\pi}\right)^{2s}\right) \zeta(2s), \quad (2.8)$$

onde $\zeta(2s)$ é a função zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (2.9)$$

e $A(a_1, a_2, s)$ é a função zeta de Epstein, definida como:

$$A(a_1, a_2, s) = \sum'_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2)^{-\frac{s}{2}}.$$

A linha no somatório significa que o termo $n_1 = n_2 = 0$ deve ser excluído. Desta forma $E_\zeta(L_1, L_2; s)$ é analítica em todo o plano complexo s com exceção dos pólos simples $s = \frac{1}{2}, 1$, e o cálculo de $E_\zeta(L_1, L_2, -\frac{1}{2})$ fornece a energia de Casimir $U(L_1, L_2)$:

$$U(L_1, L_2) = \frac{\pi}{48} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) - \frac{L_1 L_2}{32\pi} \sum'_{p, q=-\infty}^{\infty} (p^2 L_1^2 + q^2 L_2^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.10)$$

Em vez de implementar-se a regularização analítica da energia de ponto-zero pode-se obter a energia de Casimir introduzindo-se um *cutoff*. Para detalhes destes cálculos no caso de hiper-placas num espaço-tempo D -dimensional veja a referência [19], e para uma discussão geral sobre métodos de regularização analítica usados para obtenção da energia de vácuo renormalizada de campos livres em um espaço-tempo ultra-estático arbitrário, ver a referência [20]. A expressão (2.10) dá o seguinte comportamento para a energia renormalizada: o sinal da energia de Casimir depende da razão entre L_1 e L_2 , e seu comportamento é mostrado na figura 2.1 (veja, por exemplo, [21]). Nas próximas seções vamos estender estes cálculos a um espaço-tempo D -dimensional impondo não apenas condições de contorno de Dirichlet mas também outras categorias de fronteiras.

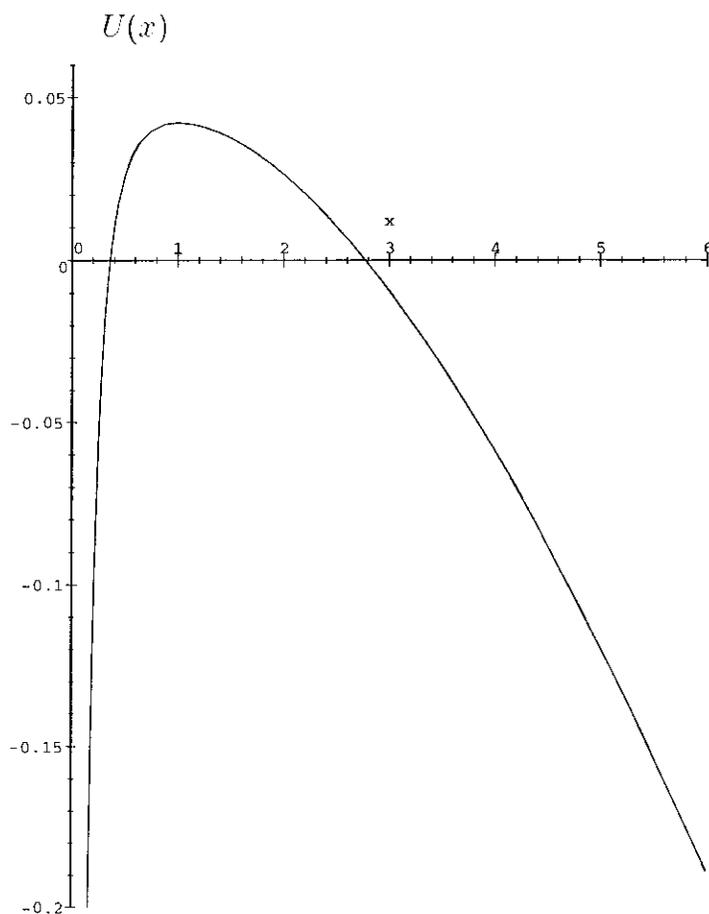


Figura 2.1: Energia de Casimir $U(L_1, L_2)$ de uma caixa clássica bi-dimensional como função de $x = \frac{L_1}{L_2}$.

2.2.2 A Energia de Casimir de um Campo Escalar sem massa na presença de Fronteiras Duras em D dimensões

Considere um campo escalar sem massa, livre, $\varphi(x)$, definido em um espaço-tempo de Minkowski $D = (d + 1)$ -dimensional. Se impormos condições de contorno de Dirichlet em uma caixa $(D - 1)$ -dimensional com lados de comprimento L_1, L_2, \dots, L_{D-1} , as

autofrequências serão dadas por:

$$\omega_{n_1, n_2, \dots, n_{D-1}} = \left[\left(\frac{n_1 \pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2 \pi}{L_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n_{D-1} \pi}{L_{D-1}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.11)$$

No limite em que um dos lados da caixa for muito menor que os outros, $a = L_{D-1} \ll L_i, i = 1, 2, \dots, D-2$, a energia do estado de vácuo terá a forma:

$$E_D(L_i, a) = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{D-2} L_i \right) \frac{1}{(2\pi)^{D-2}} \int_0^\infty dk_1 \dots \int_0^\infty dk_{D-2} \sum_{n=1}^\infty \left[(k_1)^2 + \dots + (k_{D-2})^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

O somatório começa em $n = 1$ pois para o campo escalar não se deve incluir os modos para os quais todos os inteiros n_1, n_2, \dots, n_{D-1} se anulam. Como discutido na última seção, existem duas maneiras diferentes de obter-se a energia de Casimir usando o método da soma dos modos. A primeira é usar regularização dimensional nas variáveis contínuas na equação (2.12) e estender analiticamente a função zeta de Epstein que aparece após a regularização dimensional. Uma outra forma é introduzir um *cutoff* que atenua os modos de alta frequência e depois removê-lo. Por questões didáticas usaremos este segundo método neste caso. Para fronteiras “suaves” e de outros tipos, é útil considerar-se ambas regularizações, dimensional e analítica.

A parte angular da integral sobre o espaço k ($D-2$)-dimensional pode ser calculada, e se definirmos a energia por unidade de área como $\epsilon_D = \frac{E_D}{\prod L_i}$, para $i = 1, 2, \dots, D-2$, teremos então:

$$\epsilon_D(a) = F(D) \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty r^{D-3} \left(r^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.13)$$

onde

$$F(D) = \frac{(2\sqrt{\pi})^{2-D}}{\Gamma(\frac{D-2}{2})}. \quad (2.14)$$

A energia por unidade de área é divergente e deve ser regularizada. Vamos introduzir, na equação (2.13), um fator de convergência, isto é, um regulador ultravioleta

$$\exp \left[-\lambda \left(r^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (2.15)$$

onde devemos assumir $Re(\lambda) > 0$. A densidade de energia regularizada $\epsilon_D(\lambda, a)$ (energia regularizada por unidade de área) é finita contanto que $Re(\lambda) > 0$, e é dada por:

$$\epsilon_D(\lambda, a) = F(D) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} r^{D-3} \left(r^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[-\lambda \left(r^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (2.16)$$

Como devemos remover o *cutoff*, um procedimento de renormalização deve ser utilizado. Este é implementado subtraindo-se a energia regularizada de diferentes configurações isovolumétricas e de mesma área. Além disso para que a energia das configurações auxiliares não sejam contadas, devemos introduzir o segundo limite na expressão abaixo. Desta forma, a energia de Casimir (energia renormalizada do vácuo por unidade de área) fica definida por

$$U_D(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} [\epsilon_D(\lambda, a) + \epsilon_D(\lambda, R - a) - \epsilon_D(\lambda, \eta R) - \epsilon_D(\lambda, (1 - \eta)R)], \quad (2.17)$$

onde η é um número real entre zero e um.

É importante salientar que na abordagem de Casimir a contribuição dos modos exteriores deve ser levada em conta (ver equação (2.17)). A energia renormalizada é obtida ao somar-se as energias de ponto-zero do campo dentro e fora da cavidade. Como a região de fora das placas é a soma de dois domínios simplesmente conexos, a contribuição dos modos exteriores é cancelada no procedimento de renormalização. Note que na energia regularizada temos termos divergentes proporcionais ao volume e à área da caixa; conseqüentemente a subtração de configurações isovolumétricas e de mesma área total resultará numa energia de Casimir finita.

Continuando nosso cálculo, pode-se mostrar [19] que:

$$U_D(a) = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\zeta(D)}{a^{D-1}}. \quad (2.18)$$

Assim a energia de Casimir é negativa para qualquer D nesta configuração. Este resultado está de acordo com Ambjorn e Wolfram [22] e Caruso *et al* [23]. Após uma revisão esquemática destes casos bem conhecidos, estamos agora em posição de investigar dois tipos diferentes de fronteiras: “semiduras” e “suaves”. Enfatizamos novamente que, como estamos empregando o método de soma dos modos, ambos os casos do campo escalar com acoplamentos mínimo e conforme estão sendo levados em conta. Como discutido anteriormente, isto é decorrência do fato de que não há diferença entre a densidade dos modos nos dois casos.

2.2.3 O efeito de Fronteiras Suaves e Semiduras na Energia de Casimir

Nesta seção vamos investigar o Efeito Casimir de um campo escalar sem massa na presença de fronteiras “semiduras” e “suaves” em um espaço-tempo D -dimensional. A idéia é substituir as paredes “duras” de Dirichlet por algum potencial confinante $V(\vec{x})$ na direção x_{D-1} [6] (as condições de contorno de Dirichlet correspondem ao caso particular em que $V(\vec{x})$ é nulo no interior da cavidade e abruptamente se torna infinito na parede). Neste caso a equação de Klein-Gordon para o campo leva a que os modos espaciais do campo escalar satisfarão uma equação do tipo Schrödinger, com espectro denotado por ν_n^2 . Este potencial confinante pode ser interpretado como representando uma distribuição de matéria com a qual o campo quântico interage. Como o potencial age como placas efetivas, é importante deixar claro que a força de Casimir resultante irá agir sobre a distribuição de matéria modelada por $V(\vec{x})$. Na situação em que todos os modos do campo são completamente suprimidos pelo potencial apenas quando $x \rightarrow \infty$, esta fronteira efetiva recebe o nome de fronteira suave. Pode-se também imaginar uma situação intermediária entre as fronteiras duras e suaves – a qual chama-se semidura —, onde a completa supressão de todos os modos do campo acontece para algum valor finito de x . Neste caso o potencial $V(\vec{x})$ decresce suavemente de um valor infinito na superfície da fronteira $\partial\Omega$ para um valor finito (que pode ser $V = 0$) longe de $\partial\Omega$. Neste sentido, Actor e Bender [6] atribuem uma espécie de “textura” à fronteira efetiva, onde foi tratado o caso do potencial de oscilador harmônico em uma direção particular, por exemplo x_{D-1} , em $D = 4$ (ver também [7]).

Nosso objetivo é determinar qual influência terá na energia de Casimir de um campo escalar sem massa a substituição das condições de contorno de Dirichlet por um potencial confinante. Como na seção passada, trabalharemos num espaço-tempo D -dimensional, em $D - 2$ das quais manteremos as placas de Dirichlet, e em apenas uma direção espacial trocaremos as placas de Dirichlet por um potencial arbitrário. Supondo que as condições de contorno na direção $x_{D-1} = x$ sejam ditadas pelo potencial genérico $V(x, a)$, onde a é um comprimento característico do potencial, a energia do vácuo pode ser escrita como (ver Eq.(2.12)):

$$E_D(L_i, a) = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^{D-2} L_i \right) \frac{1}{(2\pi)^{D-2}}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty dk_1 \dots \int_0^\infty dk_{D-2} \sum_n \left[(k_1)^2 + \dots + (k_{D-2})^2 + \nu_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{D-2} \sum_n \int d^{D-2}k \left[k^2 + \nu_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

onde $k^2 = (k_1)^2 + \dots + (k_{D-2})^2$. Esta última integral está na forma apropriada para efetuarmos o bem conhecido resultado da regularização dimensional [24]:

$$\int \frac{d^k u}{(u^2 + a^2)^s} = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(s)} \Gamma\left(s - \frac{k}{2}\right) \frac{1}{(a^2)^{s - \frac{k}{2}}}, \tag{2.20}$$

daonde obtemos, finalmente, a energia do vácuo por unidade de área dividindo a expressão por L^{D-2} :

$$\epsilon_D(a) = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \sum_n (\nu_n^2)^{\frac{D-1}{2}}. \tag{2.21}$$

A primeira situação que gostaríamos de discutir é a de um potencial que seja semiduro perto da origem e suave para grandes valores de x . Um exemplo de tal situação pode ser dado pelo seguinte potencial:

$$V(x, a, b) = V_0^{1/2} \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{b} \right)^2, \tag{2.22}$$

onde a e b têm dimensão de [*comprimento*] e V_0 tem dimensão de [*comprimento*] $^{-2}$. A solução da equação de Schrödinger no caso $b = a$ é conhecida [25]. Entretanto, o potencial na forma acima é mais adequado para investigarmos alguns limites e na verdade apenas pequenas mudanças são necessárias para chegar-se à solução no caso $b \neq a$. Neste caso, portanto, pode-se mostrar que os níveis de energia que resultam da equação de Schrödinger são dados por:

$$\nu_n^2 = \left(\frac{32V_0}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{8V_0 a^2 + 1} - \sqrt{8V_0 a^2} \right) \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.23}$$

Substituindo a equação (2.23) na densidade de energia do vácuo dada pela equação (2.21), obtemos:

$$\epsilon_D(a, b) = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{32V_0}{b^2} \right)^{\frac{D-1}{4}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \zeta\left(\frac{1-D}{2}; q\right), \tag{2.24}$$

onde q é dado por

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\sqrt{8V_0 a^2 + 1} - \sqrt{8V_0 a^2} \right). \tag{2.25}$$

Realizaremos agora a extensão analítica da função zeta de Hurwitz

$$\zeta(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z},$$

que é analítica em princípio para $Re(z) > 1$. Primeiramente usaremos a seguinte representação integral da função gama:

$$\Gamma(z) = k^z \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-kt}, \quad Re(z), Re(k) > 0; \quad (2.26)$$

fazendo $k = n + q$ e somando em n vemos que:

$$\begin{aligned} \zeta(z; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+q)t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{t(1-q)}}{e^t - 1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como $q > 0$, o integrando acima é bem comportado para $t \rightarrow \infty$ mas apresenta divergência para $t \rightarrow 0$, de forma que vamos separar o intervalo de integração em: $[0, 1)$ e $[1, \infty)$. A segunda integração é, como vimos, convergente, e para realizarmos a integral no primeiro intervalo usaremos que:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad 0 \leq |t| < 2\pi. \quad (2.28)$$

Os passos a seguir são trocar a ordem do somatório com a integral e calculá-la termo a termo. Tudo isso leva, no presente caso, à seguinte densidade de energia do vácuo:

$$\begin{aligned} \epsilon_D(a, b) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left(\frac{32V_0}{b^2} \right)^{\frac{D-1}{4}} \\ &\left[\int_1^{\infty} dt t^{-\frac{(1+D)}{2}} \frac{e^{t(1-q)}}{e^t - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(q)}{n!} \frac{1}{n - \frac{D+1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Na equação acima $B_n(q)$ são os polinômios de Bernoulli [26]. Fica claro que mesmo se levarmos em conta os modos externos, não conseguiremos lidar com a parte divergente da energia regularizada referente aos modos no interior da cavidade. Não obstante, o termo divergente pode ser absorvido através de uma renormalização adequada. Para obter-se a energia de Casimir deve-se subtrair a parte polar da equação acima, que é um único termo

do somatório, já que a integral tem valor finito. Cabem aqui dois comentários: o primeiro é que o procedimento de renormalização é necessário apenas para espaços-tempos com dimensão ímpar ($D = 2m - 1, m = 1, 2, \dots$), pois a equação (2.24) já é finita para D par. Isto não é uma surpresa porque em alguns casos, quando se regulariza uma expressão, o resultado já é finito, ou seja, já é renormalizado (ver, por exemplo, [22, 27, 28] e também a seção (2.3)). O segundo comentário é que as fronteiras suaves modificam a estrutura polar do modelo, isto é, o resíduo da parte polar é dado por (D é um inteiro ímpar):

$$\text{Res}(\epsilon_D(a, b)) = \frac{(-1)^{\frac{D+1}{2}}}{\left(\frac{D+1}{2}\right)!} B_{\frac{D+1}{2}}(q).$$

Dois limites são de interesse (manteremos b fixo de agora em diante): (i) $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ e, portanto, $q \rightarrow 3/4$, caso em que o potencial se comporta como uma parede dura impenetrável (Dirichlet) para $x \rightarrow 0$, enquanto que se comporta como um potencial de oscilador harmônico restrito à região $x > 0$, e (ii) $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ ($q \rightarrow 1/2$). No formalismo de Actor e Bender [6], é possível obter-se o limite (i) do resultado do oscilador harmônico (OH) ao simplesmente descartar alguns dos autovalores na função zeta, e podemos chamar este de o limite de meio oscilador: $\frac{1}{2}OH$.

Investiguemos primeiro o limite $a^2 \ll (V_0)^{-1}$. Com o intuito de compararmos a energia de Casimir com o valor obtido em [6], onde o caso $D = 4$ foi tratado, precisamos do valor particular da função zeta de Hurwitz $\zeta(-3/2; 3/4) = 0.02093$. Ademais, podemos definir ainda $\lambda = (V_0/b^2)^{-1/4}$, com dimensão de [*comprimento*], e interpretar λ como a “distância de separação característica” entre a parede dura em $x = 0$ e a “parede suave” em $x \approx \lambda$. Assim, da equação (2.24), obtemos imediatamente:

$$\epsilon_4(a, b) = -\frac{2^{7/4}}{3\pi} \lambda^{-3} \zeta(-3/2; 3/4), \quad (2.30)$$

e ϵ_4 é a metade do valor achado em [6]. No entanto, deve-se notar que este valor encontrado em [6], para o caso bem conhecido da energia de Casimir em $D = 4$ entre duas placas de Dirichlet, como um limite do resultado deles para o potencial de oscilador harmônico, é também o dobro do valor encontrado em [22, 23]. No limite de grandes separações entre as “paredes” ($\lambda \rightarrow \infty$), recobra-se o resultado para o espaço livre (restrito a $x > 0$): $\epsilon \rightarrow 0^-$.

Examinemos agora os valores da densidade de energia do vácuo dados pela equação (2.29), para $D = 2, 3, 4$, em ambos casos limites $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ e $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ ($q \rightarrow 1/2$ e $q \rightarrow 3/4$ respectivamente). Encontramos uma característica interessante para espaços-tempos de baixa dimensão, *i.e.*, para $D = 2$ e $D = 3$: de fato, quando $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ as flutuações do vácuo dão origem a forças repulsivas que correspondem a densidades de energia:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_2(a, b) = [+0,0724]\lambda^{-1} \quad (2.31)$$

e

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_3(a, b) = [+0,0160]\lambda^{-2}, \quad (2.32)$$

respectivamente, enquanto que no limite $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ a força se torna atrativa, correspondendo a densidades de energia

$$\lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_2(a, b) = [-0,0562]\lambda^{-1} \quad (2.33)$$

e

$$\lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_3(a, b) = [-0,0108]\lambda^{-2}. \quad (2.34)$$

Assim, para $D = 2, 3$ devem existir valores finitos de a para os quais a energia de Casimir se anula. O mesmo comportamento foi encontrado no caso da caixa bi-dimensional com paredes duras na seção 2.2.1, onde mostramos que o sinal da energia de Casimir depende da razão entre os lados da caixa. É importante enfatizar que pólos simples aparecem em ambos os limites apenas para $D = 3$. No caso $D = 4$, em ambos os limites, encontramos que a força de Casimir é sempre atrativa, com valores para a densidade de energia correspondendo a:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [-0,0059]\lambda^{-3} \quad (2.35)$$

e

$$\lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [-0,0075]\lambda^{-3}, \quad (2.36)$$

e este último resultado é exatamente o valor da equação (2.30), obtida lá diretamente da Eq.(2.24). Apenas no limite $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ a energia de Casimir tem o mesmo sinal (negativo) que para $D = 2, 3$, enquanto que no limite $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ o sinal da energia de

Casimir para $D = 4$ tem sinal oposto a aqueles para $D = 2$ e $D = 3$. Listamos abaixo os valores das densidades de energia do vácuo do campo escalar submetidos às condições de Dirichlet entre placas separadas de distância a [22, 23], nos casos $D = 2, 3, 4$, para simples comparação com os valores das Eqs.(2.31)-(2.36): $\epsilon_2 = [-0,065]a^{-1}$, $\epsilon_3 = [-0,024]a^{-2}$, $\epsilon_4 = [-0,0069]a^{-3}$.

A segunda situação que gostaríamos de discutir é o caso de um potencial crescente na direção x que se torna infinito para $x = 0$ e $x = a$. Para representar esta situação vamos trabalhar com um potencial da seguinte forma:

$$V(x) = V_0^{1/2} \cot^2\left(\frac{\pi x}{a}\right). \quad (2.37)$$

Usando a terminologia de Actor e Bender [6], pode-se dizer que esta situação é equivalente a ter duas paredes semiduras, uma em $x = 0$, e a outra em $x = a$. Podemos reparar que, neste caso, o campo fica confinado no interior de uma região finita, $0 < x < a$. Pode-se mostrar que os valores de ν_n^2 são dados por:

$$\nu_n^2 = \frac{\pi^2}{a^2}(n^2 + 4n\beta - 2\beta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

onde a definição de β é:

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{8}{\pi^2} V_0 a^2 + 1} - 1 \right). \quad (2.39)$$

Segue-se que a densidade de energia do vácuo tem agora a forma:

$$\epsilon_D(a) = -\frac{\pi^{\frac{D-1}{2}}}{2^D} \frac{1}{a^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 4n\beta - 2\beta)^{\frac{D-1}{2}}. \quad (2.40)$$

Aqui torna-se necessário estender analiticamente a função zeta de Epstein modificada. Isto foi feito por Ford e também Birrell e Ford [29]. Neste caso a expressão da extensão analítica para a densidade de energia do vácuo é muito complicada e não vamos escrevê-la aqui, mas uma diferença importante entre o primeiro potencial e este segundo é que em algum limite é possível reobter exatamente as paredes de Dirichlet, isto é, placas planas paralelas perfeitamente condutoras separadas de uma distância a . Este caso é obtido no limite $V_0 \rightarrow 0$: quando $V_0 \rightarrow 0$ também ocorre que $\beta \rightarrow 0$ e a energia de Casimir reduz-se novamente a (ver equação (2.18)):

$$\epsilon_D(a) = -\frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\zeta(D)}{a^{D-1}}, \quad (2.41)$$

após o uso da fórmula de reflexão da função zeta $\zeta(1 - D)$,

$$\Gamma(D/2)\pi^{-D/2}\zeta(D) = \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right)\pi^{\frac{D-1}{2}}\zeta(1-D).$$

No outro limite, $V_0 \rightarrow \infty$, há um regime para o qual se obtém o potencial de oscilador harmônico. De fato, neste limite tem-se que $\beta \rightarrow \infty$, e considerando-se apenas os níveis de mais baixa energia, *i.e.*, $n \ll \beta$, obtém-se o seguinte espectro:

$$\nu_n^2 = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (2.42)$$

onde $\omega = \frac{\pi}{a}\sqrt{8V_0}$. Este limite é completamente análogo ao caso do potencial de oscilador harmônico estudado nas referências [6, 7] e pode ser obtido ao expandir-se o presente potencial ao redor do ponto $x = \frac{a}{2}$ e desprezando termos de ordem mais alta que a segunda ordem.

2.2.4 Condições Suaves e Semiduras em mais de uma direção espacial

Na seção passada estudamos a situação em que o campo escalar estava confinado em uma hiper-caixa onde em apenas uma direção as placas duras de Dirichlet foram substituídas por um potencial confinante. Nesta seção vamos analisar diferentes situações nas quais, de todas as D dimensões do espaço-tempo, em um número p destas o campo satisfaz a condições de contorno de Dirichlet, enquanto que nas restantes $D - p - 1$ direções o campo está sujeito a potenciais confinantes (uma das dimensões é o tempo). Como estamos trabalhando com um sistema de coordenadas cartesiano, este formalismo irá nos permitir escolher potenciais diferentes agindo sobre o campo em cada uma das restantes $D - p - 1$ direções.

Nas direções $x^i, i = 1, 2, \dots, p$, vamos impor que o campo se anula em placas paralelas localizadas em $x^i = 0, L_i, i = 1, 2, \dots, p$ (condições de contorno de Dirichlet): nas direções $x^j, j = p + 1, p + 2, \dots, D - 1$, escolhemos $D - p - 1$ potenciais $V_j(x_j, a_j)$, cada um dependendo de diferentes comprimentos característicos a_j . Repare que os $D - p - 1$ potenciais podem em princípio ser diferentes em cada direção. A energia do vácuo pode então ser escrita como:

$$E_D = \frac{1}{2} \sum_{n_1, \dots, n_{D-1}} \left[\left(\frac{n_1\pi}{L_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n_p\pi}{L_p}\right)^2 + \sum_{j=p+1}^{D-1} \nu_{n_j}^2(a_j) \right]^{1/2}, \quad (2.43)$$

onde as funções $\nu_{n_j}^2(a_j)$ representam os espectros dos autovalores da equação de Schrödinger correspondente. Agora, se todos os L_i forem muito maiores que os a_j , podemos então substituir os primeiros p somatórios por integrais:

$$E_D = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1}^p L_i \right) \sum_{n_{p+1}, \dots, n_{D-1}} \int \frac{d^p k}{(2\pi)^p} \left[k^2 + \sum_{j=p+1}^{D-1} \nu_{n_j}^2(a_j) \right]^{1/2}, \quad (2.44)$$

onde k é o comprimento do vetor (k_1, \dots, k_p) . A integral acima está numa forma conveniente para aplicarmos a regularização dimensional, com o resultado:

$$E_D = -\frac{1}{2(4\pi)^{\frac{D+1}{2}}} \left(\prod_{i=1}^p L_i \right) \Gamma\left(-\frac{1+p}{2}\right) \sum_{n_{p+1}, \dots, n_{D-1}} \left[\nu_{n_{p+1}}^2(a_{p+1}) + \dots + \nu_{n_{D-1}}^2(a_{D-1}) \right]^{\frac{1+p}{2}}. \quad (2.45)$$

Ao invés de estudar o caso genérico, trabalharemos em dois casos específicos num espaço-tempo $4D$. Em uma direção espacial, por exemplo z , vamos impor condições de contorno de Dirichlet com placas separadas por uma distância L ; desta forma $p = 1$. Além disso vamos sujeitar o campo ao mesmo potencial nas direções x e y :

$$V(x, a, b) = V_0^{1/2} \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{b} \right)^2 \quad (2.46)$$

e

$$V(y, a, b) = V_0^{1/2} \left(\frac{a}{y} - \frac{y}{b} \right)^2. \quad (2.47)$$

Os respectivos espectros da equação de Schrödinger já são conhecidos por nós:

$$\nu_n^2 = \left(\frac{32V_0}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} (n + q) \quad (2.48)$$

e

$$\nu_m^2 = \left(\frac{32V_0}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} (m + q), \quad (2.49)$$

onde o valor de q é dado pela equação (2.25). Explorando a simetria nas direções x e y , o somatório que aparece na equação (2.45),

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} [n + m + 2q], \quad (2.50)$$

pode ser colocado numa forma mais tratável (ver [30]):

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} [n+m+c]^{-s} = \zeta(s-1; c) + (1-c)\zeta(s; c). \quad (2.51)$$

Do resultado geral da equação (2.45), derivamos os limites $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ e $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ (respectivamente $q \rightarrow 1/2$ e $q \rightarrow 3/4$). No limite $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ a energia do vácuo fica dada por:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} E_4(a, b) = L \left(\frac{V_0}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_1^{\infty} dt \frac{t^{-3}}{e^t - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{n-3} \right]. \quad (2.52)$$

É simples obter daqui a densidade de energia, isto é, a energia por unidade de área. Primeiro divide-se a expressão por L . Apesar de as placas nas direções x e y terem sido substituídas pelos potenciais, pode-se ainda assim atribuir a essas direções “distâncias características” entre as “paredes”, como explicamos na seção passada, dadas por $\lambda = \left(\frac{V_0}{b^2} \right)^{-1/4}$. Assim, para obtermos a densidade de energia ϵ , dividimos ainda a equação (2.52) por λ , o que resulta em:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = \lambda^{-3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\int_1^{\infty} dt \frac{t^{-3}}{e^t - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{n-3} \right], \quad (2.53)$$

onde a integral é finita e a parte polar, dada pelo quarto termo do somatório, é identicamente nula já que $B_3 = 0$ (senão seria descartada como de costume). Desta forma, a energia de Casimir neste limite tem o valor:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [-0,0069] \lambda^{-3}, \quad (2.54)$$

que é um valor próximo do obtido na seção passada, equação (2.35), para o caso do potencial agindo em apenas uma direção.

No outro limite $a^2 \ll (V_0)^{-1}$, a densidade de energia do vácuo fica dada por (ver equação (2.51)):

$$\begin{aligned} \lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) &= \lambda^{-3} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\left(\int_1^{\infty} dt \frac{t^{-3} e^{-t/2}}{e^t - 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(3/2)}{n!} \frac{1}{n-3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\int_1^{\infty} dx \frac{x^{-2} e^{-x/2}}{e^x - 1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m B_m(3/2)}{m!} \frac{1}{m-2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde cada somatório contém um pólo, com resíduos correspondentes a: $\frac{-B_3(3/2)}{6} = \frac{-1}{8}$ e $\frac{B_2(3/2)}{2} = \frac{11}{24}$. A densidade de energia do vácuo regularizada, ou, simplesmente, a energia de Casimir neste caso tem o valor:

$$\lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [-0, 0310] \lambda^{-3}, \quad (2.56)$$

também negativo, dando origem a uma força de Casimir atrativa. Este valor deve ser comparado com a equação (2.36). Assim, nestes casos, a substituição de duas placas de Dirichlet pelo potencial em uma direção extra, em comparação com o caso da seção passada, faz com que o valor absoluto da energia de Casimir aumente.

Para completar, vamos calcular a energia de Casimir na situação em que este mesmo potencial age em todas as três direções espaciais, de novo para $D = 4$; assim, $p = 0$. Podemos obter, neste caso, a densidade de energia do vácuo da equação (2.45) simplesmente ao dividi-la por $\lambda^2 = \left(\frac{V_0}{b^2}\right)^{-1/2}$:

$$\epsilon_4(a, b) = +2^{1/4} \lambda^{-3} \sum_{n,m,l=0}^{\infty} [n + m + l + 3q]^{1/2}. \quad (2.57)$$

Novamente este somatório pode ser simplificado [30] se fizermos uso da relação:

$$\sum_{n,m,l=0}^{\infty} [n + m + l + c]^{-s} = \frac{1}{2} \zeta(s-2; c) + \left(\frac{3}{2} - c\right) \zeta(s-1; c) + \frac{1}{2} (c-1)(c-2) \zeta(s; c). \quad (2.58)$$

No limite $a^2 \gg (V_0)^{-1}$ a energia de Casimir fica dada por:

$$\lim_{a^2 \gg (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [-0, 0132] \lambda^{-3}, \quad (2.59)$$

e no limite $a^2 \ll (V_0)^{-1}$ ela fica como:

$$\lim_{a^2 \ll (V_0)^{-1}} \epsilon_4(a, b) = [+0, 0255] \lambda^{-3}. \quad (2.60)$$

Para esta nova configuração o resultado é qualitativamente diferente da situação com potenciais em apenas duas direções. No limite $a^2 \gg (V_0)^{-1}$, ϵ_4 é ainda negativa e o dobro do valor da equação (2.54); no outro limite, $a^2 \ll (V_0)^{-1}$, ϵ_4 muda de sinal mas seu valor absoluto é menor do que o valor da equação (2.56).

2.2.5 O caso de um potencial central tipo Oscilador Harmônico em $D = 4$

Passaremos agora a estudar o caso em que o campo escalar esteja confinado por um potencial esfericamente simétrico, ou seja, com simetria radial. Calcularemos a energia de Casimir para o caso particular em que este potencial é o potencial de oscilador harmônico, no caso específico de $D = 4$. Então, na equação de Schrödinger:

$$\left[-\nabla^2 + V(\vec{x})\right] \Phi_m(\vec{x}) = \omega_m^2 \Phi_m(\vec{x}), \quad (2.61)$$

vamos tratar o caso em que $V(\vec{x}) = V(r) = \Lambda^2 r^2$, onde Λ tem dimensão de $[\text{comprimento}]^{-2}$. A equação de Schrödinger, no caso de um potencial central, separa nas coordenadas (r, θ, ϕ) , mas não vamos apresentas aqui os detalhes de sua solução (ver [31]). Vamos apenas usar que os níveis de energia neste caso se apresentam como:

$$\omega_{nl} = \left[2\Lambda\left(2n + l + \frac{3}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.62)$$

onde n representa o número quântico principal, e l é o valor do momento angular orbital. Os níveis de energia são degenerados, pois existem $(2l + 1)$ estados com energia ω_{nl} . Desta forma o método da soma das energias de todos os modos fornece, para a energia de ponto-zero ou energia do vácuo, a seguinte expressão :

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= \sum_k \frac{1}{2} \omega_k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} (2l + 1) \omega_{nl} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{nl}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

e, finalmente,

$$\langle 0|H|0\rangle = (2\Lambda)^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left[2n + l + \frac{3}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.64)$$

de onde, após regularização, obtém-se a energia de Casimir. Usando-se a definição da função zeta de Hurwitz,

$$\zeta(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + q)^z}, \quad (2.65)$$

chega-se a:

$$\langle 0|H|0\rangle = 2\Lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) \zeta(-\frac{1}{2}; \frac{l}{2} + \frac{3}{4}). \quad (2.66)$$

Usamos então a seguinte representação integral da função zeta de Hurwitz:

$$\zeta(z; q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} dt t^{z-1} \frac{e^{t(1-q)}}{e^t - 1}, \quad (2.67)$$

em termos da qual a expressão (2.66) fica:

$$\langle 0|H|0\rangle = 2\Lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{t(1-\frac{l}{2}-\frac{3}{4})}}{e^t - 1}. \quad (2.68)$$

Após algumas manipulações algébricas a equação acima toma a forma:

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{2\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{t}{4}}}{e^t - 1} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) e^{-\frac{t}{2}(l+\frac{1}{2})}. \quad (2.69)$$

Vamos nos concentrar primeiro no somatório. Vê-se claramente que:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) e^{-\frac{t}{2}(l+\frac{1}{2})} &= -\frac{\partial}{\partial(\frac{t}{2})} \left[\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}(l+\frac{1}{2})} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial(\frac{t}{2})} \left[e^{-\frac{t}{4}} \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}l} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial(\frac{t}{2})} \left[\frac{e^{\frac{t}{4}}}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{t}{4}} \frac{e^{\frac{t}{2}} + 1}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Podemos agora voltar à equação (2.69):

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{3t}{4}}}{e^t - 1} \frac{e^{\frac{t}{2}} + 1}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^2} \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{3t}{4}}}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^3}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

O integrando acima diverge para $t \rightarrow 0$, de forma que separamos o intervalo de integração em $[0, 1)$ e $[1, \infty)$. Chamando a segunda integral de g , e recorrendo ao Maple para calculá-la, encontramos o valor:

$$\begin{aligned} g &\equiv \int_1^{\infty} dt t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{3t}{4}}}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^3} \\ &= +2,138082. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Vamos agora desenvolver o integrando com o intuito de calcularmos a integral no intervalo $[0, 1]$:

$$t^{-\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{3t}{4}}}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^3} = 2t^{-\frac{5}{2}} A(t)B(t), \quad (2.73)$$

onde

$$A(t) \equiv \frac{\frac{t}{2} e^{\frac{t}{4}}}{e^{\frac{t}{2}} - 1} \quad (2.74)$$

e

$$B(t) \equiv \frac{e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^2}. \quad (2.75)$$

De

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (2.76)$$

com $x = \frac{1}{2}$, encontramos a expansão em série para $A(t)$:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(\frac{1}{2})}{n!} \frac{t^n}{2^n}. \quad (2.77)$$

Para $B(t)$ usamos a equação (2.76) com $x = 0$, e denotamos $B_m(0) \equiv B_m$, que são os números da Bernoulli; com isso:

$$\frac{1}{e^{\frac{t}{2}} - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \frac{t^{m-1}}{2^{m-1}}. \quad (2.78)$$

Derivando a expressão acima com relação a $\frac{t}{2}$, encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial(\frac{t}{2})} \frac{1}{e^{\frac{t}{2}} - 1} = -\frac{e^{\frac{t}{2}}}{(e^{\frac{t}{2}} - 1)^2} = -B(t), \quad (2.79)$$

e podemos agora derivar a equação (2.78) termo a termo, obtendo:

$$B(t) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} \frac{m-1}{2^{m-2}} t^{m-2}. \quad (2.80)$$

Com isso tudo voltamos agora à equação (2.71):

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \left[g + 2 \int_0^1 dt t^{-\frac{5}{2}} A(t)B(t) \right] \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \left[g - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_n(\frac{1}{2}) B_m}{n! m!} \frac{m-1}{2^{n+m-3}} \int_0^1 dt t^{n+m-\frac{9}{2}} \right] \\ &= \frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \left[g - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_n(\frac{1}{2}) B_m}{n! m!} \frac{m-1}{2^{n+m-3}} \frac{1}{n+m-\frac{7}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Recorremos novamente ao Maple para calcular o somatório Σ_1 acima, tendo considerado até o termo $n = m = 50$, que é da ordem de 10^{-108} ; o resultado do somatório é:

$$\Sigma_1 = +2,110217. \quad (2.82)$$

Finalmente usamos que $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\pi^{\frac{1}{2}}$, chegando a:

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= -\frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}}{2\pi^{\frac{1}{2}}} [g - \Sigma_1] \\ &= -\Lambda^{\frac{1}{2}} [0,007861]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Para completar, comparamos este valor com o encontrado em [6]. Tomamos a forma para o potencial $V(r) = \Lambda^2 r^2$, enquanto que em [6] a forma do potencial de oscilador harmônico para $D = 4$ é $V(r) = \frac{\alpha^4}{4} r^2$; assim as constantes se comparam da seguinte forma: $\Lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, de maneira que o valor por nós encontrado foi:

$$\langle 0|H|0\rangle = -\alpha [0,0055] \quad (2.84)$$

e o encontrado em [6] é:

$$\langle 0|H|0\rangle_{actor} = -\alpha [0,0111]. \quad (2.85)$$

Novamente aqui encontramos a metade do valor obtido por Actor e Bender.

2.3 Energia de Ponto-Zero de Férmions sem massa em uma *slab-bag*

Nesta seção calcularemos a energia de Casimir numa situação um pouco diferente da estudada nas seções anteriores. Queremos estudar um modelo onde os campos estão confinados numa sub-região do espaço-tempo. Um modelo que se adequa a esta hipótese é a Cromodinâmica Quântica.

A Cromodinâmica Quântica é uma teoria de campos de calibre não abeliana que descreve a dinâmica dos quarks. A não observação de quarks isolados, ou seja, o fato que apenas estados sem cor são fisicamente realizados na natureza, introduziu a idéia de confinamento. O mecanismo através do qual este confinamento ocorre é ainda desconhecido,

e o modelo de *bag* [32] é uma tentativa de conciliar o sucesso do modelo de quarks com o confinamento e seu ponto chave é a aproximação de que a *bag* é uma cavidade esférica clássica com quarks e gluons confinados. Em uma primeira aproximação os quarks e gluons se movem livremente dentro da *bag*, mas são absolutamente confinados ao seu interior. Como todo campo quântico dá origem ao efeito Casimir [2] quando submetido a condições de contorno clássicas, é de se esperar que o confinamento dos quarks e gluons dê origem à energia de Casimir dos mesmos [33]. Durante os últimos anos muitos autores calcularam a energia de ponto-zero renormalizada de diferentes tipos de campos no modelo de *bag*. A energia do vácuo renormalizada de um campo escalar neste modelo foi calculada por Bender e Hays [34] e mais recentemente por Romeo [35] e também Bordag *et al* [36]. O cálculo para o caso do campo gluônico foi feito por Milton [33] e também por Romeo [37], e para o caso do campo fermiônico Milton [33] e Bender e Hays [34] obtiveram a energia de Casimir no modelo de *bag*.

No programa de renormalização, onde se deve extrair quantidades finitas, duas situações fisicamente diferentes aparecem. A primeira é aquela na qual campos satisfazem condições de contorno clássicas em superfícies e estes campos existem em todo o espaço-tempo; a segunda é aquela na qual os campos satisfazem condições de contorno clássicas em superfícies mas esses campos só existem numa sub-região do espaço-tempo [32]. Este segundo é o caso do modelo de *bag*. Neste caso, como não há modos dos campos na região exterior, se usarmos o método das funções de Green ou o método de *cutoff* para regularizar a energia de ponto-zero, aparecerão divergências que não poderão ser absorvidas por meio de um procedimento de renormalização. Existem muitas tentativas para resolver este problema, mas parece que esta questão ainda está aberta na literatura. Usando o teorema de Weyl [38] não é difícil mostrar que a distribuição assintótica dos autovalores do operador $-\nabla^2$ agindo num campo escalar confinado em um volume finito vai apresentar termos divergentes proporcionais ao volume, à área e aos outros parâmetros geométricos da região à qual o campo está confinado. Milton, ao considerar que o campo fermiônico existe tanto dentro quanto fora de uma cavidade esférica [33], mostrou que há um cancelamento destas divergências. Fica claro então que se considerarmos férmions apenas no interior da esfera, a princípio será necessária a introdução de termos de contato na densidade lagrangeana original para lidar com as divergências da energia de Casimir regularizada.

O propósito desta seção é calcular a energia de ponto-zero de férmions sem massa confinados à região interior de duas placas planas, paralelas, em um número qualquer de dimensões do espaço-tempo [39]. A mesma idéia foi usada por Chodos e Thorn [32], onde o campo fermiônico é confinado entre duas placas separadas por uma distância L - a tal configuração geométrica atribui-se o nome de *slab*. Trataremos o número de dimensões do espaço-tempo como um parâmetro contínuo e com o intuito de regularizar a energia de ponto-zero faremos uso da regularização dimensional nas variáveis contínuas (relacionadas com os lados da caixa de comprimento infinito) e depois faremos a extensão analítica da função zeta de Hurwitz que aparece depois da regularização dimensional. Resulta que provamos que a densidade de energia de ponto-zero regularizada é finita para qualquer número de dimensões do espaço-tempo. Em outras palavras, não é necessária a introdução de contratermos na lagrangeana original, isto é, temos uma situação onde há regularização que já é uma renormalização. Como discutido acima, este resultado não é esperado. Façamos alguns comentários. Nas referências [18, 40], Svaiter e Svaiter provam, para um campo escalar real sem massa, que o método da função zeta é equivalente ao método de *cutoff* depois que se subtrai os termos polares. A idéia básica empregada por Casimir é de que, apesar da energia de ponto-zero divergir, mudanças na configuração geométrica acarretam uma variação finita na energia total. Empregando-se um *cutoff* exponencial a energia total é regularizada antes da subtração da energia de uma configuração de referência. Esta energia total é obtida ao somar-se as energias regularizadas do campo dentro e fora da cavidade. Esta abordagem é bastante razoável se estivermos lidando com um sistema em que há campo no interior bem como no exterior da cavidade. Entretanto, no caso de uma *bag*, onde é suposto que o campo exista apenas dentro da cavidade, esta abordagem não nos serve, e então seguiremos a conclusão de Svaiter e Svaiter de que a energia de Casimir calculada usando a extensão analítica da função zeta elimina estes termos divergentes.

As condições de contorno de *bag* para campos de spin meio, ou seja, a premissa de que ele existe apenas no interior de uma região, só pode ser implementada no caso onde há apenas uma direção com tamanho finito, pois a presença de arestas impede soluções para a equação de Dirac para hipercubos em dimensões mais altas [22]. A situação para campos fermiônicos massivos é ainda pior pois, neste caso, não existe solução nem no caso

de uma direção apenas com tamanho finito [41].

A apresentação desta seção está estruturada da seguinte forma: primeiro discutiremos brevemente a quantização de campos de Dirac em um espaço-tempo D -dimensional e então calcularemos a energia de ponto zero regularizada na *slab-bag*. É encontrado que, tanto para número par quanto ímpar de dimensões, esta energia é finita, porque o resíduo da parte polar que aparece nos casos de dimensão ímpar se anula identicamente. Posteriormente efeitos de temperatura serão discutidos, onde obteremos o limite de baixas temperaturas. Estaremos usando o sistema de unidades onde $\hbar = c = k_B = 1$.

2.3.1 O Vácuo de Dirac e a Energia de Casimir para a *slab-bag*

Consideremos uma variedade plana D -dimensional. Definamos um sistema de coordenadas cartesianas $x^\mu = \{x^0, x^1, x^2, \dots, x^d\}$ e consideremos um campo fermiônico sem massa livre $\{\Psi(x), \bar{\Psi}(x)\}$, descrito pela ação:

$$S[\Psi, \bar{\Psi}] = \int dt L = \int d^D x \bar{\Psi}(x) i \not{\partial} \Psi(x), \quad (2.86)$$

onde $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ e γ^μ são as matrizes de Dirac. Variando-se esta ação com respeito a $\bar{\Psi}$ resulta na equação de Dirac livre, sem massa:

$$i \not{\partial} \Psi(x) = 0. \quad (2.87)$$

Os campos podem ser expandidos em termos de ondas planas de energia positiva e negativa $u(p)e^{-ip \cdot x}$ e $v(p)e^{ip \cdot x}$, soluções da equação (2.87), onde $u(p)$ e $v(p)$ são espinores em D dimensões. A expansão toma a forma:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d 2\omega_p} \left[b_i(p) u^i(p) e^{-ip \cdot x} + d_i^\dagger(p) v^i(p) e^{ip \cdot x} \right], \quad (2.88)$$

e

$$\Psi^\dagger(x) = \sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d 2\omega_p} \left[b_i^\dagger(p) u^{i\dagger}(p) e^{ip \cdot x} + d_i(p) v^{i\dagger}(p) e^{-ip \cdot x} \right]. \quad (2.89)$$

Para quantizar a teoria necessitamos impor as regras de anti-comutação a tempos iguais, apropriada para férmions:

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^d(\vec{x} - \vec{x}'),$$

$$\{\Psi_\alpha(t, \vec{x}), \Psi_\beta(t, \vec{x}')\} = \{\Psi_\alpha^\dagger(t, \vec{x}), \Psi_\beta^\dagger(t, \vec{x}')\} = 0. \quad (2.90)$$

Desta forma os campos $\Psi(x)$ e $\bar{\Psi}(x)$ ou, equivalentemente, $\Psi^\dagger(x)$, são agora operadores. Acima, $c(D)$ é o número de estados diferentes de helicidade, ou spin, em um espaço-tempo D -dimensional. Um espinor possui, em um espaço-tempo D -dimensional, $2^{D/2}$ componentes se D é par, e $2^{\frac{D-1}{2}}$ componentes se D é ímpar. Em ambos os casos metade destas componentes estão relacionadas a partículas (energia positiva) e a outra metade a anti-partículas (energia negativa). O número de estados diferentes de spin é, portanto, igual à metade do número de componentes do espinor, isto é, $c(D) = 2^{\frac{D-2}{2}}$, para D par e $c(D) = 2^{\frac{D-3}{2}}$ para D ímpar.

Nas equações (2.88) e (2.89) acima, os coeficientes $b_i(p)$ e $b_i^\dagger(p)$ são operadores de aniquilação e de criação de férmions, ao passo que $d_i(p)$ e $d_i^\dagger(p)$ são operadores de aniquilação e de criação dos anti-férmions. Em vista da equação (2.90), as regras de anti-comutação para estes operadores ficam:

$$\{b_i(\vec{p}), b_j^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_i(\vec{p}), d_j^\dagger(\vec{p}')\} = 2\omega_p \delta_{ij} \delta^d(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.91)$$

sendo todos os outros anti-comutadores nulos. Em termos destes operadores é possível escrever o operador hamiltoniano:

$$H = \sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} [b_i^\dagger(p)b_i(p) + d_i^\dagger(p)d_i(p) - 2\omega_p]. \quad (2.92)$$

O estado de vácuo de Dirac em teoria de campos é o estado $|0\rangle$ do espaço de Fock para o qual:

$$b_i(p)|0\rangle = d_i(p)|0\rangle = 0, \quad \forall p, i. \quad (2.93)$$

$|0\rangle$ é o estado com nenhum férmion ou anti-férmion de energia positiva. Os estados de muitas partículas podem ser obtidos através de sucessivas aplicações dos operadores de criação no estado $|0\rangle$. A relação de Einstein entre a energia ω e os momenta nas d direções espaciais, para o caso sem massa, se escreve:

$$\omega_p^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{d-1}^2 + p_d^2. \quad (2.94)$$

O valor esperado no vácuo do hamiltoniano, equação (2.92), levando em conta a equação (2.93), resulta que a energia de ponto-zero do campo de Dirac é obtida somando-se a energia de ponto-zero $-\frac{1}{2}\omega_p$ de cada estado de partícula com energia ω_p com a energia de ponto-zero de cada estado de anti-partícula com mesma energia. O sinal negativo na energia de ponto-zero do campo de Dirac é uma consequência do caráter fermiônico das partículas que este campo descreve. Isto significa que a energia de ponto-zero, ou energia do vácuo, do campo de Dirac pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \langle 0|H|0\rangle &= -\sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_p (\text{partículas}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_p (\text{anti-partículas}) \\ &= -\sum_{i=1}^{c(D)} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \omega_p. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Observando que a energia de cada estado é independente do spin, a última igualdade pode ser escrita na seguinte forma:

$$\langle 0|H|0\rangle = -c(D) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \omega_p. \quad (2.96)$$

Passemos agora ao cálculo da energia de ponto-zero do campo de Dirac na configuração de uma *slab* D -dimensional, ou seja, na presença de duas placas paralelas presentes em uma das d dimensões espaciais (por exemplo, na direção d), nas posições $x_d = 0$ e $x_d = L$. Desta maneira estaremos considerando que o campo está confinado a uma região finita em apenas uma direção, a direção d , enquanto que em todas as outras o campo está presente desde $x_i = -\infty$ até $x_i = \infty$, para $i = 1, 2, \dots, d-1$. A condição de contorno que será imposta é a de corrente nula através das paredes, e consequentemente chamaremos esta configuração de *slab-bag*. Em forma covariante de Lorentz temos:

$$\eta^\mu \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi = 0, \quad (2.97)$$

onde $\vec{\eta}$ é o vetor unitário normal à superfície direcionado ao interior da *slab*.

Considere agora

$$\begin{aligned} (i\eta_\mu \gamma^\mu)^2 &= -\eta_\mu \eta_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -\frac{1}{2} \eta_\mu \eta_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= -g^{\mu\nu} \eta_\mu \eta_\nu = -\left[(\eta^0)^2 - \vec{\eta} \cdot \vec{\eta} \right] = 1. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Assim, $i\eta_\mu \gamma^\mu$ deve ter autovalores ± 1 , de maneira que vamos supor que:

$$(i\eta_\mu \gamma^\mu)\Psi(x) = \Psi(x) \text{ sobre as superficies.} \quad (2.99)$$

Temos também que o complexo conjugado da equação acima fornece:

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\eta_\mu = -\bar{\Psi} \text{ sobre as superficies,} \quad (2.100)$$

de forma que

$$i\eta_\mu j^\mu = i\eta_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = -\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}\Psi = 0. \quad (2.101)$$

Conseqüentemente, se quisermos ver satisfeita a equação (2.97), é suficiente que (2.99) se cumpra. Para acharmos as autofreqüências, consideremos a função de onda de energia positiva na forma [32]:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp(-i\omega t)\phi(\vec{x}) \\ &= \exp(-i\omega t)\exp\left(i\sum_{i=1}^{d-1} p_i x_i\right) \left[\exp(ip_d x_d) + i\gamma^d \exp(-ip_d x_d)\right] u(p), \end{aligned} \quad (2.102)$$

onde $u(p)$ é um espinor de energia positiva. As condições de contorno $i\gamma^d\phi(0) = \phi(0)$ e $i\gamma^d\phi(L) = -\phi(L)$ serão satisfeitas por (2.102) se:

$$i\gamma^d \left[\exp(ip_d L) + i\gamma^d \exp(-ip_d L)\right] u(p) = - \left[\exp(ip_d L) + i\gamma^d \exp(-ip_d L)\right] u(p), \quad (2.103)$$

ou

$$\exp(-ip_d L) = -\exp(ip_d L), \quad (2.104)$$

o que significa que os valores permitidos para o momento na direção d serão dados por [42]

$$p_d = p_d(n, L) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.105)$$

A energia de ponto-zero do campo de Dirac nesta configuração, levando em conta as equações (2.94) e (2.105), e também que as integrações nos momenta na equação (2.96) neste caso correspondem a $d - 1$ integrações e um somatório, é dada por:

$$\langle 0|H|0\rangle = -c(D) \prod_{i=1}^{d-1} \left(\frac{L_i}{2\pi}\right) \int_0^\infty dp_1 \int_0^\infty dp_2 \dots \int_0^\infty dp_{d-1} \sum_{n=0}^\infty \left(p_1^2 + \dots + p_{d-1}^2 + p_d^2(n, L)\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.106)$$

Definindo a energia total de ponto-zero por unidade de área das placas, ou seja, a densidade de energia do vácuo, por meio de:

$$\varepsilon_D(L) = \frac{\langle 0|H|0\rangle}{\prod L_i} = \varepsilon_{d+1}(L), \quad (2.107)$$

chegamos a:

$$\varepsilon_D(L) = -\frac{c(D)}{(2\pi)^{D-2}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d^{D-2}p \left(p^2 + p_d^2(n, L) \right)^{1/2}, \quad (2.108)$$

onde $p^2 = p_1^2 + \dots + p_{d-1}^2$. A expressão acima é claramente divergente, tanto nas integrações como no somatório. Para regularizá-la faremos regularização dimensional nas variáveis contínuas e então faremos a extensão analítica da função zeta de Hurwitz advinda da regularização dimensional. Usando o resultado Eq.(2.20), é fácil mostrar que a energia do vácuo por unidade de área fica dada por:

$$\varepsilon_D(L) = \frac{c(D)\pi^{(D-1)/2}}{2^{D-1}L^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{D-1}. \quad (2.109)$$

Podemos definir $f(D) = \frac{c(D)\pi^{(D-1)/2}}{2^{D-1}}$, e, notando que

$$\zeta(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^z} \quad (2.110)$$

é a função zeta de Hurwitz, podemos escrever a densidade de energia do vácuo do campo fermiônico sem massa na configuração da *slab-bag* na seguinte forma:

$$\varepsilon_D(L) = \frac{f(D)}{L^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) \zeta\left(1-D; \frac{1}{2}\right). \quad (2.111)$$

Vamos tratar os dois casos, a saber, D ímpar e D par, separadamente a princípio, para mostrarmos exatamente aonde aparecerão as divergências, ou seja, para quais números de dimensões do espaço-tempo a expressão diverge. Depois faremos um tratamento unificado para as duas situações.

Examinemos primeiro o caso em que D é par. Neste caso a função Γ não apresenta pólos e pode-se usar que:

$$\zeta(-m, v) = \frac{-B_{m+1}(v)}{m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.112)$$

e também a relação entre os polinômios de Bernoulli e os números de Bernoulli [26]: $B_D(\frac{1}{2}) = -(1 - 2^{1-D})B_D$, para obter-se a densidade de energia do vácuo:

$$\varepsilon_D(L) = -\frac{f(D)}{L^{D-1}} \Gamma\left(\frac{1-D}{2}\right) (2^{1-D} - 1) \frac{B_D}{D} \quad \text{para } D \text{ par.} \quad (2.113)$$

Como conclusão, a equação (2.113) mostra que a densidade de energia do vácuo, regularizada, do campo de Dirac sem massa, na configuração de uma *slab-bag* em número de dimensões par é finita. Em particular, avaliando a expressão acima em $D = 4$, acha-se o valor:

$$\varepsilon_4(L) = -\frac{7\pi^2}{2880L^3}, \quad (2.114)$$

em acordo com [43].

No caso em que D é ímpar, pode-se começar com a fórmula de duplicação para as funções gama:

$$\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \Gamma(-s), \quad (2.115)$$

então definir

$$g(D) = \frac{f(D)\sqrt{\pi} 2^D}{\Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right)}, \quad (2.116)$$

em termos da qual a densidade de energia do vácuo se dá por:

$$\varepsilon_D(L) = \frac{g(D)}{L^{D-1}} \Gamma(1-D) \zeta\left(1-D; \frac{1}{2}\right). \quad (2.117)$$

A seguir escreve-se a representação integral da função zeta de Hurwitz:

$$\zeta(z; q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{e^{t(1-q)}}{e^t - 1}, \quad (2.118)$$

e separa-se o intervalo de integração em: $[0, 1) + [1, \infty)$, com o intuito de usar-se a expansão:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad 0 \leq |t| < 2\pi. \quad (2.119)$$

A integral no segundo intervalo $[1, \infty)$ é uma função regular de z , já que o integrando diverge para t pequeno apenas, e esta vai ser denotada por

$$h_1(z, q) = \int_1^\infty dt t^{z-1} \frac{e^{t(1-q)}}{e^t - 1}. \quad (2.120)$$

Integrando-se termo a termo no primeiro intervalo, e usando-se a equação (2.120), temos que:

$$\zeta(z; q) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[h_1(z, q) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n(q)}{n!} \frac{1}{z+n-1} \right], \quad (2.121)$$

onde foi usado que $B_n(1-q) = (-1)^n B_n(q)$. Juntando tudo, re-escreve-se a equação (2.117) como:

$$\varepsilon_D(L) = \frac{g(D)}{L^{D-1}} \left[h_1 \left(1 - D, \frac{1}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^{1-n} - 1) B_n}{n!} \frac{1}{n - D} \right], \quad (2.122)$$

onde usou-se novamente $B_n(\frac{1}{2}) = -(1 - 2^{1-n})B_n$. Vemos da equação (2.122) que existe um pólo no somatório para $n = D$, com resíduo:

$$Res[\varepsilon_D(L)] = \frac{(-1)^D (2^{1-D} - 1) B_D}{D!}. \quad (2.123)$$

Entretanto, repare que para D ímpar, $D \neq 1$, $B_D = 0$, e o resíduo da densidade de energia do vácuo se anula neste caso. Apesar de $B_1 = -\frac{1}{2}$, a equação (2.123) mostra que o resíduo se anula também para $D = 1$.

A equação (2.122) é geral e válida também para o caso D par. Apesar de aparecer um pólo no somatório para neste caso, este é cancelado pela função gama do denominador da equação (2.116), e a equação (2.113) é o resultado, como pode ser facilmente mostrado.

Desta forma provamos que a densidade de energia do vácuo regularizada para férmions sem massa na configuração de uma *slab-bag* D -dimensional é livre de divergências.

A partir da equação (2.111) poderia-se tomar outro caminho e usar que $\zeta(s; \frac{1}{2}) = (2^s - 1)\zeta(s)$ e também a fórmula de reflexão:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{s-1/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad (2.124)$$

válida para todo s , para encontrar-se:

$$\varepsilon_D(L) = -\frac{c(D)(1-2^{1-D})}{2^{D-1}\pi^{D/2}L^{D-1}} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \zeta(D). \quad (2.125)$$

O aparecimento de termos potencialmente divergentes fica escondido automaticamente ao usar-se a fórmula de reflexão para as funções zeta. O resultado acima é finito para

todo $D > 0$, sendo sempre negativo, como mostrado na figura 2.2 (ao traçar o gráfico, deixamos de lado o fator de spin $c(D)$). Tende a $-\infty$ tanto para $D \rightarrow 0$ quanto para $D \rightarrow \infty$, tomando o valor máximo de -4.9×10^{-6} em $D \approx 26.1$. Para $D = 4$ o resultado (2.114) é obtido, e este valor é $7/2$ do valor da energia de Casimir de um campo escalar satisfazendo condições de contorno de Dirichlet em duas placas paralelas. A energia de Casimir de um campo escalar com condições de contorno de Dirichlet é obtida em [22] como função de D ; esta é também sempre negativa e seu máximo ocorre também para o mesmo valor de D .

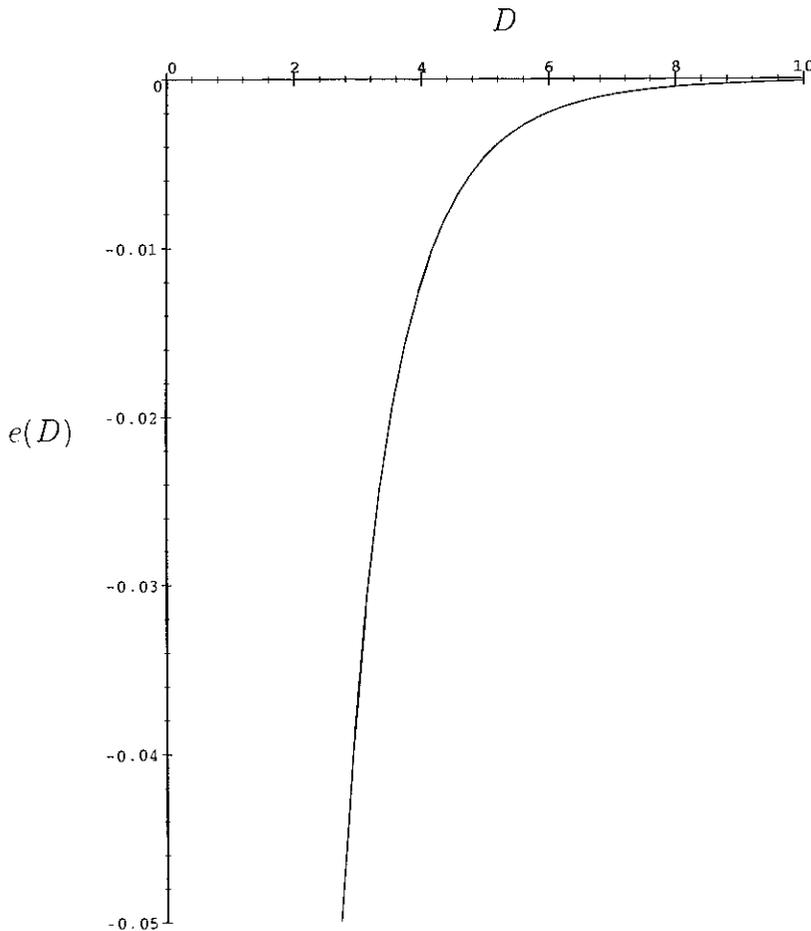


Figura 2.2: Energia de Casimir do campo fermiônico para pequenos valores de D , à parte o fator de spin $c(D)$: $e(D) = \frac{\epsilon_D(L)L^{D-1}}{c(D)}$.

A pressão que o vácuo exerce sobre as placas é igualmente negativa, o que significa que ela age tendendo a fazer com que as placas se aproximem. A pressão é dada por:

$$-\frac{\partial}{\partial L}\varepsilon_D(L) = -\frac{c(D)(D-1)(1-2^{1-D})}{2^{D-1}\pi^{D/2}L^D}\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)\zeta(D). \quad (2.126)$$

Deve-se notar que a regularização através da continuação analítica no parâmetro contínuo D usada acima implica numa energia nula para placas muito distantes uma da outra ($L \rightarrow \infty$). Isto significa que o resultado (2.125), obtido ao impor-se condições de contorno de *bag*, ou seja, considerando que o campo só exista dentro das placas, também seria obtido se fosse considerado que o campo existe em todo o espaço mas satisfazendo à condição de fluxo nulo através das placas, já que a energia do campo no espaço exterior é nula. Em outras palavras, campos exteriores a apenas um par de placas paralelas não influem na energia de Casimir associada com as placas [22]. É importante ressaltar que no método usual de *cutoff* a inclusão dos modos exteriores é crucial para o cancelamento das divergências que aparecem na energia regularizada do vácuo (teorema de Weyl). Considerando-se campos para os quais pode-se implementar condições de contorno do tipo *bag* em mais de uma direção, a inclusão do campo do lado de fora se torna importante quando se considera mais de uma direção com tamanho restrito.

Devemos notar que Dolan e Nash [27], ao usarem um procedimento de continuação analítica para calcular a energia de Casimir de campos escalares sem massa em esferas S^N , encontram que, para o caso de acoplamento conforme, a energia de Casimir se anula para esferas em número de dimensões par, não apresentando nenhuma divergência, e para esferas em número de dimensões ímpar o resíduo da parte polar é automaticamente nulo, dando como resultado um valor finito para a Energia de Casimir.

Na próxima seção, calcularemos correções de temperatura à energia de Casimir. Repare que a imposição de fluxo nulo através das placas é formalmente equivalente à situação em que o campo fermiônico está em equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura $\beta^{-1} = L^{\omega_1}$ (veja Eq. (2.105)). A inclusão de efeitos de temperatura transforma o problema em uma teoria quântica de campos com duas dimensões compactificadas, isto é, em um espaço-tempo não simplesmente conexo $S \times R \times M^{D-2}$, onde S representa a variável temporal identificada periodicamente, R representa a direção espacial na qual o campo está confinado, e M^{D-2} é o espaço de Minkowski nas outras direções espaciais.

2.3.2 A Energia de Casimir a temperatura finita

Até aqui consideramos que o campo de Dirac está no seu estado de vácuo. Vamos agora levar em conta que o campo de Dirac está em equilíbrio termodinâmico com um reservatório à temperatura $T \equiv 1/\beta$. Tal sistema é descrito pela função de gran-partição:

$$Z = \text{tr} \left(e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{Q})} \right), \tag{2.127}$$

onde \hat{H} é o hamiltoniano do sistema e μ é o potencial químico associado à carga conservada \hat{Q} . O traço é tomado no espaço de Fock. Com a função de partição em mãos, pode-se extrair todas as propriedades termodinâmicas do sistema em equilíbrio, como pressão, número de partículas, entropia e energia livre:

$$P \equiv T \frac{\partial \ln Z}{\partial V}, \quad N_i \equiv T \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu_i}, \quad S \equiv \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T},$$

$$F \equiv -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \tag{2.128}$$

O hamiltoniano do campo acima contém também a energia de ponto zero, ou seja, $\hat{H} = E_0 + : \hat{H} :$, onde $: \hat{H} :$ denota o ordenamento de Wick. Conseqüentemente, a função de partição pode ser fatorizada da seguinte forma: $Z = Z_0 \bar{Z}$, em que Z_0 contém a energia de ponto-zero e \bar{Z} se refere a todos os estados excitados ocupados, isto é, esta é a parte dependente da temperatura. Desta maneira a energia livre total (2.128) é a soma da energia de ponto-zero E_0 com a parte que depende da temperatura:

$$F = F(0) + \bar{F}$$

$$= E_0 - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \bar{Z}. \tag{2.129}$$

Que o termo independente da temperatura E_0 é realmente a energia de Casimir calculada na última seção, após a remoção dos infinitos, pode ser visto ao considerar-se a função de gran-partição para férmions a temperatura finita [44]:

$$\ln Z = c(D) V \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [\beta\omega + \ln(1 + e^{-\beta(\omega - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega + \mu)})]. \tag{2.130}$$

Acima, μ é o potencial químico para partículas de spin $1/2$ e $-\mu$ o das anti-partículas,

$$V = \left(\prod_{i=1}^{d-1} L_i \right) \times L \quad (2.131)$$

é o volume espacial e $c(D)$ novamente é o fator de degenerescência de spin. As equações (2.94) and (2.105) permanecem válidas. Desta forma fica claro que a primeira integral acima dá origem à energia de ponto-zero calculada na última seção : $E_0 = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_0$.

A função de partição, Eq. (2.130), pode ser separada em três partes:

$$\begin{aligned} \ln Z &= I_1(\beta, D, L) + I_2(\mu, \beta, D, L) + I_3(\mu, \beta, D, L) \\ &= I_1(\beta, D, L) + I_2(\mu, \beta, D, L) + I_2(-\mu, \beta, D, L), \end{aligned} \quad (2.132)$$

onde reconhecemos $I_1(\beta, D, L) = \ln Z_0$ e $I_2(\mu, \beta, D, L) + I_2(-\mu, \beta, D, L) = \ln \bar{Z}$. A seguir, vamos nos concentrar no cálculo de $\ln \bar{Z}$. Para a configuração da *slab*, como mencionado anteriormente, tem-se $d - 1$ integrações e um somatório, levando a:

$$I_2(\pm\mu, \beta, D, L) = c(D) V \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \ln(1 + e^{-\beta(\omega \pm \mu)}). \quad (2.133)$$

Pode-se usar a fórmula:

$$\int d^N l F(l) = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} \int_0^{\infty} dl l^{N-1} F(l), \quad (2.134)$$

válida se o integrando for uma função apenas do módulo de l , para se re-escrever $I_2(\pm\mu, \beta, D, L)$ na seguinte forma:

$$I_2(\pm\mu, \beta, D, L) = \alpha(D) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dp p^{D-3} \ln(1 + e^{-\beta(\omega \pm \mu)}), \quad (2.135)$$

onde definimos $\alpha(D)$ por

$$\alpha(D) = \frac{c(D) V}{2^{D-3} \pi^{\frac{D-2}{2}} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right)}. \quad (2.136)$$

No caso $|\mu| < \omega$, pode-se expandir o logaritmo da seguinte forma:

$$\ln(1 + x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k,$$

de tal forma que I_2 fique:

$$I_2(\pm\mu, \beta, D, L) = \alpha(D) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} e^{\pm k\beta\mu} \int_0^{\infty} dp p^{D-3} \exp\left(-\beta k(p^2 + a_n^2)^{1/2}\right), \quad (2.137)$$

onde foi definido que $a_n^2 = (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^2}{L^2}$. A integral resultante pode ser calculada em termos das funções de Bessel modificadas $K_\nu(x)$, com ajuda da fórmula [45] (veja também [46])

$$\int_u^{\infty} dy y (y^2 - u^2)^{\nu-1} e^{-\mu y} = \frac{2^{\nu-1/2}}{\sqrt{\pi}} \mu^{1/2-\nu} u^{1/2+\nu} \Gamma(\nu) K_{\nu+1/2}(u\mu).$$

Juntando todos os resultados chega-se a:

$$\begin{aligned} \ln \bar{Z} &= \frac{c(D)V}{2^{\frac{D-5}{2}} L^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{\beta^{\frac{D-3}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{\frac{D-1}{2}}} \cosh(k\beta\mu) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{D-1}{2}} K_{\frac{D-1}{2}} \left(\frac{k\beta\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.138)$$

Com o intuito de obter a densidade de energia livre, ou seja, a energia livre por unidade de área das placas, usa-se as equações (2.129) e (2.131) e divide-se a função de partição acima pelo fator $(\prod_{i=1}^{d-1} L_i)$. Obtemos assim que a densidade de energia livre \bar{F} é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mu, \beta, D, L) &\equiv \frac{\bar{F}}{(\prod_{i=1}^{d-1} L_i)} \\ &= \frac{c(D)}{(2L\beta)^{\frac{D-3}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{\frac{D-1}{2}}} \cosh(k\beta\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{D-1}{2}} \\ &\quad \left\{ \frac{D-3}{\beta} K_{\frac{D-1}{2}} \left(\frac{k\beta\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k\pi \left(n + \frac{1}{2}\right)}{L} \left[K_{\frac{D-3}{2}} \left(\frac{k\beta\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + K_{\frac{D+1}{2}} \left(\frac{k\beta\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.139)$$

onde foi usado que $2K'_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)$.

Como o único parâmetro dimensional da teoria é a separação entre as placas L , os efeitos a baixas temperaturas são obtidos no limite $\beta \gg L$. A seguir calcularemos o limite de baixas temperaturas da função de partição $\ln \bar{Z}$, da qual se pode obter a densidade de energia livre com o uso das Eqs. (2.129) e (2.131).

Obtém-se facilmente o limite de baixas temperaturas expressando-se $\cosh(k\beta\mu)$ através de exponenciais e usando-se o comportamento assintótico das funções de Bessel modificadas:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots \right), \quad (2.140)$$

levando a

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \gg L} \ln \bar{Z} &= \frac{c(D)V}{2^{\frac{D-4}{2}} L^{\frac{D}{2}} \beta^{\frac{D-2}{2}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{\frac{D-2}{2}}} \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{D-2}{2}} \left[e^{-k\beta[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L} - \mu]} + e^{-k\beta[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L} + \mu]} \right]. \end{aligned} \quad (2.141)$$

É fácil também de ver que no caso de potencial químico nulo, por causa das exponenciais, $\lim_{\beta \gg L} \ln \bar{Z} = 0$, isto é, a parte dependente da temperatura da densidade de energia livre vai a zero. Isto significa que, neste limite, a energia interna total tende ao valor da energia de Casimir à temperatura zero da seção (2.3.1).

Dos resultados acima pode-se ir um pouco além e inverter a ordem dos somatórios e usar as funções poli-logarítmicas, definidas por:

$$Li_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^s}, \quad (2.142)$$

em termos das quais a equação (2.141) fica:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \gg L} \ln \bar{Z} &= -\frac{c(D)V}{2^{\frac{D-4}{2}} L^{\frac{D}{2}} \beta^{\frac{D-2}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{D-2}{2}} \\ &\quad \left[Li_{\frac{D-2}{2}} \left(-e^{-\beta[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L} - \mu]} \right) + Li_{\frac{D-2}{2}} \left(-e^{-\beta[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{L} + \mu]} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

A expressão acima, após o uso das equações (2.129) e (2.131), fornece o limite a baixas temperaturas da parte dependente da temperatura da densidade de energia livre de um campo fermiônico sem massa dentro de uma *slab-bag*.

Em conclusão, na seção (2.3) discutimos questões abertas a respeito das partes divergentes da energia de ponto-zero regularizada de um campo fermiônico confinado numa região finita. Mostramos que a energia de ponto-zero regularizada de férmions sem massa

no interior de duas placas paralelas é finita em qualquer número de dimensões do espaço-tempo. Para tanto fizemos uso da regularização dimensional nos momenta contínuos, relacionados com as $d - 1$ direções transversais de comprimento infinito, e então estendemos analiticamente a função zeta de Hurwitz que resulta da primeira. Para número par de dimensões a energia de ponto-zero é finita; no caso ímpar, foi mostrado que o resíduo da parte polar se anula e, portanto, a subtração usual da parte polar de uma quantidade divergente não se faz necessária. Estudamos ainda os efeitos de temperatura e obtivemos as correções de baixas temperaturas a este modelo. Como nosso interesse é o modelo de *bag* para os hádrons, isto é, a suposição de que o campo esteja confinado a uma região finita e se anule fora desta, não estudamos as correções de altas temperaturas; isto porque é esperado que a altas temperaturas haja o desconfinamento dos campos, ou seja, existe uma temperatura crítica de desconfinamento a partir da qual o próprio hádron deixa de existir, resultando num plasma de quarks e gluons.

Capítulo 3

Teoria Quântica de Campos no espaço-tempo gerado por Cordas Cóslicas: um exemplo de criação de partículas

3.1 Produção de partículas no espaço-tempo de uma Corda Cóslica com momento angular variável

Neste capítulo analisaremos a variação de momento angular de uma corda cósmica girante devido à emissão de partículas escalares. Calculamos a taxa de produção de partículas entre os dois espaços-tempos assintóticos: o espaço-tempo de uma corda cósmica girante no infinito passado, e o espaço-tempo de uma corda cósmica estática no infinito futuro. Analisaremos também as propriedades do fluido que gera o espaço-tempo de uma corda cósmica girante cujos casos limites são espaços-tempos planos, correspondendo a uma corda cósmica com momento angular constante no infinito passado e a uma corda cósmica sem momento angular no infinito futuro.

3.1.1 Introdução

Existe um grande número de predições de vários modelos em Teorias de Grande Unificação (GUT), entre as quais a de que transições de fase no universo primordial podem ter resultado na formação de cordas cósmicas [47]. Tal tipo de estrutura representa tubos delgados de um falso vácuo com uma grande densidade linear de massa μ e que podem também apresentar momento angular intrínscio J . Estes objetos constituem o que se chama de de-

feitos topológicos e são objetos extensos em uma só dimensão, e de tamanho infinito nesta dimensão. As cordas cósmicas são comumente chamadas de defeitos topológicos pois a seção $t = cte, z = cte$ tem uma estrutura cônica para a região espacial onde a corda está definida, e esta topologia cônica pode acarretar uma série de efeitos gravitacionais, pois elas podem agir, por exemplo, como lentes gravitacionais [48], e também podem produzir partículas devido ao campo gravitacional variável durante sua formação [49]. Apesar de defletirem a luz, cordas cósmicas estáticas não afetam partículas massivas ao seu redor na aproximação de campo fraco [50]. Existe uma extensa literatura abordando o estudo de processos quânticos no espaço-tempo de uma corda cósmica. As que são de especial interesse para nós são as seguintes: [51], onde a produção de pares no espaço-tempo de uma corda cósmica extensa é investigada; [52] onde a taxa de transição de um sistema de dois níveis acoplado a um campo escalar na presença de uma corda cósmica é analisada; e [53], onde investiga-se o espaço-tempo de uma corda cósmica girante.

Neste capítulo estamos interessados em dois cálculos: primeiramente analisar a distribuição de energia-momento de um espaço-tempo de uma corda cósmica cujo momento angular varia com o tempo através de uma função particular, e segundo calcular a produção de partículas devida à variação do campo gravitacional na situação da perda gradual do momento angular da corda cósmica [54, 55]. Usaremos $\hbar = k_B = c = 1$.

3.1.2 Espaços-tempos genéricos gerados por Cordas Cósmicas girantes

A equação de Einstein da Relatividade Geral é dada por:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

em que a constante κ é definida de forma a dar o limite newtoniano correto, resultando em:

$$\kappa = 8\pi G. \quad (3.2)$$

G na equação acima representa a constante gravitacional de Newton.

Para obtermos a geometria gerada pela corda cósmica girante procedemos da seguinte maneira. Primeiramente escolhemos um sistema de coordenadas cilíndricas ($x^\mu = \{t, r, \varphi, z\}$)

no qual está presente uma corda cósmica infinitamente longa e delgada ao longo do eixo z . Consideraremos uma corda cósmica com densidades lineares de massa μ e de momento angular \mathcal{J}_0 . A densidade de massa é proporcional a uma função delta de Dirac em duas dimensões, enquanto que a densidade de momento angular é proporcional a derivadas de funções delta. As componentes T_{00} e T_{0i} do tensor momento-energia associado serão proporcionais à função delta e a suas derivadas, respectivamente. Desta maneira a equação de Einstein conduz à seguinte geometria:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4G\mathcal{J}_0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4G\mathcal{J}_0 & 0 & -(b^2r^2 - 16G^2\mathcal{J}_0^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

onde

$$b \equiv 1 - 4G\mu. \quad (3.4)$$

De posse destas componentes da métrica pode-se construir o elemento de linha associado:

$$ds^2 = (dt + 4G\mathcal{J}_0 d\varphi)^2 - dr^2 - b^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (3.5)$$

Como foi observado por Deser e Jackiw [56], o tensor métrico dependente dos dois parâmetros $(\mu; \mathcal{J}_0)$ mostrado acima representa uma solução geral independente do tempo das equações de Einstein na região exterior a qualquer distribuição de matéria finita no plano com simetria rotacional. Neste capítulo estamos considerando apenas a região exterior à corda cósmica.

De uma forma análoga, a métrica exata de um espaço-tempo que representa a solução de vácuo das equações de Einstein para uma corda cósmica sem rotação é dada por [57]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (3.6)$$

Claramente se vê que esta métrica é um caso particular da equação (3.5), com densidade nula de momento angular.

Cabem aqui as seguintes perguntas: como o espaço-tempo pode evoluir de um espaço-tempo de uma corda cósmica girante para o de uma corda cósmica estática? E também,

qual a taxa de produção de partículas entre estes dois limites? Deixemos a segunda pergunta para a última seção deste capítulo e nos concentremos por ora na primeira.

Em primeiro lugar, vamos admitir que a corda cósmica é gerada de tal forma que haja perda gradual e espontânea de energia associada à mudança em sua velocidade de rotação, ou seja, seu momento angular. Quantitativamente tal processo corresponderia a uma geometria não-estacionária que pode ser descrita pela métrica (3.5) mas com um momento angular dependente do tempo $\mathcal{J}(t)$ ao invés de \mathcal{J}_0 :

$$ds^2 = (dt + 4G\mathcal{J}(t)d\varphi)^2 - dr^2 - b^2r^2d\varphi^2 - dz^2, \quad (3.7)$$

acrescida das condições assintóticas

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_0, \quad (3.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{J}(t) = 0. \quad (3.9)$$

Uma escolha particular para o momento angular como função do tempo que satisfaz às duas condições acima é:

$$\mathcal{J}(t) = \frac{\mathcal{J}_0}{2} [1 - \tanh(t)]. \quad (3.10)$$

Na seção seguinte vamos procurar qual o conteúdo material responsável por gerar tal geometria do espaço-tempo.

3.1.3 Distribuição de Energia e Momento

Como se pode notar, o espaço-tempo entre os dois limites assintóticos é um espaço-tempo curvo. Das equações de Einstein pode-se mostrar que o fluido que caracteriza tal geometria é representado pelas seguintes componentes do tensor energia-momento:

$$[T_{\mu\nu}] = -\frac{2G\mathcal{J}_0}{\kappa r \cosh t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2G\mathcal{J}_0}{b^2r} F(t) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2G\mathcal{J}_0}{b^2r} F(t) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

com a função $F(t)$ definida por:

$$F(t) \equiv \frac{3 + \sinh(2t) - 2 \cosh^2(t)}{\cosh^3(t)}. \quad (3.12)$$

Analisemos agora as propriedades do fluido caracterizado acima. Primeiramente definimos o campo vetorial de quadri-velocidade V^μ

$$V^\mu = \delta_0^\mu \quad (3.13)$$

e o tensor de projeção $h_{\alpha\beta}$

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta. \quad (3.14)$$

De maneira padrão, podemos expressar o tensor energia-momento em termos de suas partes irredutíveis da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu - pg_{\mu\nu} + q_{(\mu}V_{\nu)} + \Pi_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

onde introduzimos as seguintes quantidades relacionadas com o fluido: densidade de energia, pressão isotrópica, fluxo de calor e pressão anisotrópica, dadas respectivamente por:

$$\rho = T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \quad (3.16)$$

$$p = -\frac{1}{3}T_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \quad (3.17)$$

$$q_\alpha = T_{\mu\nu}V^\nu h^\mu{}_\alpha \quad (3.18)$$

$$\Pi_{\mu\nu} = T_{\alpha\beta}h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu + ph_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

No caso que estamos analisando as únicas quantidades que não se anulam são a pressão isotrópica e a pressão anisotrópica, que são dadas por:

$$p(t, r) = -\frac{8G^2 J_0^2}{3\kappa b^2 r^2} (\tanh^2 t - 1) (3 \tanh^2 t - 2 \tanh t - 1) \quad (3.20)$$

e

$$[\Pi_{\mu\nu}] = -\frac{p(t, r)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{\pi} & 0 \\ 0 & \tilde{\pi} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

onde

$$\tilde{\pi} \equiv -\frac{3b^2 r}{2GJ_0} \left(\frac{1}{3 \tanh^2 t - 2 \tanh t - 1} \right). \quad (3.22)$$

Dos cálculos acima vê-se que não há densidade de energia de matéria, mas apenas fluxo de energia que aparece como pressão. Das equações de Einstein pode-se obter a relação entre o traço do tensor energia-momento e a curvatura do espaço-tempo $R = \kappa T$, que resulta em:

$$R = -3\kappa p(t, r). \quad (3.23)$$

A geometria do espaço-tempo é plana nos dois limites assintóticos correspondentes ao infinito passado e ao infinito futuro. Vale a pena então analisarmos o comportamento da curvatura na região intermediária. Na figura 3.1 traçamos a curvatura R como função do tempo t e da coordenada radial r , distância do eixo z da corda cósmica. Para $t \ll 0$, o espaço-tempo é aproximadamente plano para todos os valores de r , e para grandes valores de r o espaço-tempo é também plano para qualquer valor de t , como se poderia esperar pelo fato de se estar muito afastado da corda cósmica. À medida que o tempo t vai de valores negativos para valores positivos, a curvatura decresce até atingir seu valor mínimo para $t \approx -0.926$. Após este ponto a curvatura começa a crescer, se torna positiva e atinge seu valor máximo em $t \approx 0.233$. Finalmente a curvatura vai assintoticamente a zero. A única diferença entre os dois espaços-tempos planos assintóticos é que para $t \rightarrow -\infty$ a corda cósmica tem rotação com densidade de momento angular J_0 , enquanto que para $t \rightarrow \infty$ a corda cósmica tem momento angular zero.

Como resultado geral desta análise obtivemos que a perda de momento angular da corda cósmica acarreta uma variação nas propriedades métricas do espaço-tempo. É fato conhecido que variações no espaço-tempo podem acarretar produção de partículas [58], de tal forma que devemos investigar a criação de partículas e de radiação resultante da variação do campo gravitacional ao longo do tempo em que a corda cósmica perde seu momento angular inicial. Trataremos deste problema na próxima seção através dos cálculos das transformações de Bogolubov.

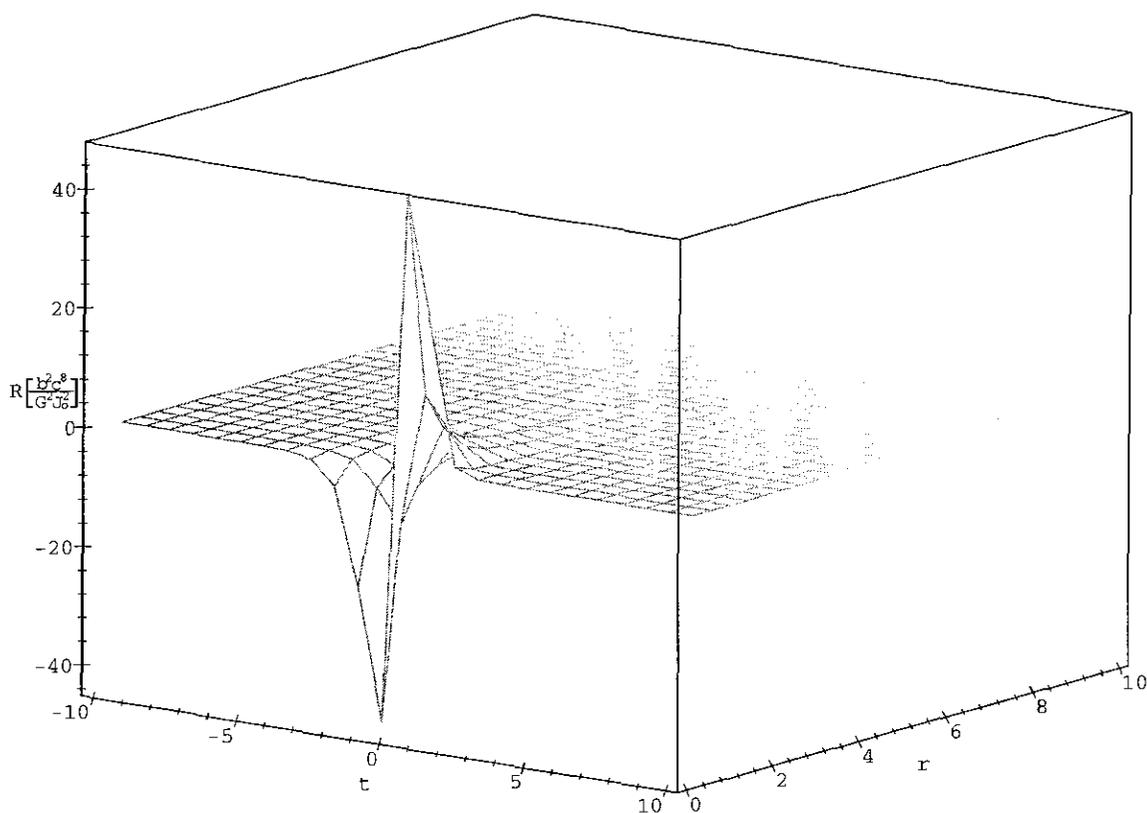


Figura 3.1: Escalar de curvatura R como função das coordenadas t e r da geometria gerada por uma corda cósmica com momento angular variável.

3.1.4 Produção de partículas escalares entre os espaços-tempos limites

Da geometria geral dada pela equação (3.7) e das condições (3.8) e (3.9), nas duas regiões assintóticas — infinito passado e infinito futuro — a métrica do espaço-tempo dá-se por:

$$ds_{-\infty}^2 = (dt + 4GJ_0 d\varphi)^2 - dr^2 - b^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (3.24)$$

$$ds_{+\infty}^2 = dt^2 - dr^2 - b^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2. \quad (3.25)$$

As métricas acima representam a estrutura do espaço-tempo na região exterior a uma corda cósmica com momento angular e sem momento angular, respectivamente.

Nesta seção vamos calcular a taxa de produção de partículas escalares que resulta do campo gravitacional variável representante da evolução no tempo de uma corda cósmica que perde seu momento angular. Uma idéia similar foi usada por Bernard e Duncan [59] ao estudarem um modelo de Robertson-Walker em duas dimensões onde o fator de escala conforme tem a mesma dependência funcional no tempo que a equação (3.10). Nos dois limites assintóticos o espaço-tempo se torna Minkowskiano, e estes autores obtêm os modos soluções da equação de Klein-Gordon nos dois limites. O cálculo dos coeficientes de Bogolubov entre os modos nos dois limites (*in* e *out*) fornece a taxa de produção de partículas escalares durante a expansão do universo. É importante salientar que tal método foi primeiramente introduzido por Parker [60] com o objetivo de calcular a criação de partículas devida à expansão do universo.

Vamos então considerar um campo escalar real com massa, minimalmente acoplado, $\phi(t, r, \varphi, z)$, definido em todo o espaço-tempo dado pela equação (3.7). A equação de Klein-Gordon nesta métrica é dada por:

$$\left[g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu + M^2 \right] \phi(t, r, \varphi, z) = 0, \quad (3.26)$$

onde o símbolo D_α denota a derivada covariante com respeito à métrica $g_{\alpha\beta}$, e M é a massa do campo escalar.

Com o objetivo de mantermos a energia das partículas produzidas em uma região limitada, vamos impor que o campo satisfaça condições de contorno de Dirichlet em $r = R$:

$$\phi(t, r, \varphi, z)|_{r=R} = 0, \quad (3.27)$$

e também condições de contorno periódicas com período L na direção z .

Sabe-se que o espaço-tempo de uma corda cósmica girante apresenta curvas do tipo tempo fechadas na região $r < 4GJ/b$ e, portanto, para contornarmos este problema, vamos impor uma condição de contorno de Dirichlet adicional em $r = R_0 > 4GJ/b$. Desta forma o campo fica restrito à região $R_0 < r < R$ da coordenada radial. Pode-se consultar [61] para um estudo cuidadoso de como construir Teoria Quântica de Campos em espaços-tempos com curvas do tipo tempo fechadas, mas deixaremos de lado aqui este problema.

O mesmo problema aparece em gravitação em $(2 + 1)$ dimensões, pois o espaço-tempo gerado por uma corda cósmica girante é exatamente a solução das equações de Einstein em $(2 + 1)$ dimensões de uma fonte pontual massiva girante [62].

A equação de Klein-Gordon escrita no espaço-tempo no infinito passado (espaço-tempo da equação (3.24)) é dada por:

$$\left[\left(1 - \frac{16G^2 J_0^2}{b^2 r^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{b^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{8G J_0^2}{b^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} + M^2 \right] \phi(t, r, \varphi, z) = 0. \quad (3.28)$$

Pode-se mostrar que os modos soluções u_j têm a forma:

$$u_j(t, \vec{x}) = N_1 e^{-i\omega_l t} e^{ikz} e^{im\varphi} \left[\frac{J_\mu(qr)}{J_\mu(qR)} - \frac{Y_\mu(qr)}{Y_\mu(qR)} \right], \quad (3.29)$$

com

$$\mu \equiv \frac{|m + 4GJ\omega_l|}{b}, \quad (3.30)$$

$$q = \sqrt{\omega_l^2 - k^2 - M^2} \quad (3.31)$$

e

$$k = \frac{2\pi n}{L}. \quad (3.32)$$

Nas equações acima, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, J_μ são as funções de Bessel e Y_μ são as funções de Neumann. Escolhemos a constante de normalização N_1 de forma que o conjunto seja ortonormal segundo o produto escalar de Klein-Gordon, o que resulta em:

$$N_1 = (2\omega_l)^{-\frac{1}{2}} \left\{ V \left[\frac{J'_\mu(qR)}{J_\mu(qR)} - \frac{Y'_\mu(qR)}{Y_\mu(qR)} \right]^2 - V_0 \left[\frac{J'_\mu(qR_0)}{J_\mu(qR_0)} - \frac{Y'_\mu(qR_0)}{Y_\mu(qR_0)} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

onde definimos os volumes $V \equiv b\pi LR^2$ e $V_0 \equiv b\pi LR_0^2$. Os valores que o parâmetro q pode assumir serão dados por uma equação transcendental que vem das condições de contorno, ou seja:

$$J_\mu(qR_0)Y'_\mu(qR) - J'_\mu(qR)Y_\mu(qR_0) = 0, \quad (3.34)$$

e as infinitas raízes desta equação são indexadas por $l = 1, 2, 3, \dots$

O conjunto de modos $\{u_j(t, \vec{x}), u_j^*(t, \vec{x})\}$ forma uma base completa no espaço das soluções da equação de Klein-Gordon e são usados para expandir o operador de campo da seguinte forma:

$$\phi_{in}(\vec{x}, t) = \sum_j \left\{ a_j u_j(t, \vec{x}) + a_j^\dagger u_j^*(t, \vec{x}) \right\}, \quad (3.35)$$

onde introduzimos o índice coletivo $j \equiv \{l, m, n\}$. Os operadores de criação e aniquilação de partículas, a_j^\dagger e a_j , satisfazem à relação de comutação:

$$[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}, \quad (3.36)$$

e definimos o estado de vácuo in através de:

$$a_j |0, in\rangle = 0 \quad \forall j. \quad (3.37)$$

De maneira inteiramente análoga pode-se implementar a quantização canônica do campo no espaço-tempo do infinito futuro. A equação de Klein-Gordon no espaço-tempo da corda cósmica estática se escreve como:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{b^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + M^2 \right] \phi(t, r, \varphi, z) = 0. \quad (3.38)$$

Os modos soluções v_j são dados por:

$$v_j(t, \vec{x}) = N_2 e^{-i\Omega_\nu t} e^{ik'z} e^{im'\varphi} \left[\frac{J_\nu(\bar{q}r)}{J_\nu(\bar{q}R)} - \frac{Y_\nu(\bar{q}r)}{Y_\nu(\bar{q}R)} \right], \quad (3.39)$$

com

$$\nu \equiv \frac{|m'|}{b}, \quad (3.40)$$

$$\bar{q} = \sqrt{\Omega_\nu^2 - k'^2 - M^2}, \quad (3.41)$$

e

$$k' = \frac{2\pi n'}{L}. \quad (3.42)$$

Escolhendo a constante de normalização N_2 de forma que o conjunto completo $\{v_j, v_j^*\}$ seja ortonormal, resulta em:

$$N_2 = (2\Omega_\nu)^{-\frac{1}{2}} \left\{ V \left[\frac{J'_\nu(\bar{q}R)}{J_\nu(\bar{q}R)} - \frac{Y'_\nu(\bar{q}R)}{Y_\nu(\bar{q}R)} \right] - V_0 \left[\frac{J'_\nu(\bar{q}R_0)}{J_\nu(\bar{q}R)} - \frac{Y'_\nu(\bar{q}R_0)}{Y_\nu(\bar{q}R)} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.43)$$

e os valores possíveis de \bar{q} são dados por uma equação transcendental do mesmo tipo que a de antes.

Como dito acima, os modos *out*, soluções da equação de Klein-Gordon, também formam um conjunto completo e podem ser usados para expandir-se o operador de campo como:

$$\phi_{out}(t, \vec{x}) = \sum_j \{b_j v_j(t, \vec{x}) + b_j^\dagger v_j^*(t, \vec{x})\}. \quad (3.44)$$

Os operadores de criação e aniquilação b_j^\dagger e b_j satisfazem à regra usual de comutação:

$$[b_j, b_{j'}^\dagger] = \delta_{j,j'}, \quad (3.45)$$

e o estado de vácuo *out* é definido por:

$$b_j |0, out\rangle = 0 \quad \forall j. \quad (3.46)$$

Nos cálculos seguintes seguiremos a idéia de Parker [49], e vamos calcular a taxa de produção de partículas escalares que resulta do campo gravitacional variável entre os dois limites assintóticos: o espaço-tempo de uma corda cósmica girante no infinito passado e o espaço-tempo de uma corda cósmica estática, ou sem rotação, no infinito futuro.

Um ponto importante a salientar é que neste modelo de evolução do espaço-tempo não precisamos lidar com os problemas das condições de junção entre os dois limites, pois aqui não fizemos uso da aproximação *súbita*, como o faz Parker. Este autor calcula a produção de partículas devida à formação instantânea de uma corda cósmica, isto é, para $t = 0^-$ o espaço-tempo é o de Minkowski (ausência de corda cósmica), e em $t = 0^+$ instantaneamente aparece uma corda cósmica (no caso de Parker, sem rotação). No presente caso a métrica evolui continuamente entre os dois casos limites, pois a corda cósmica perde gradualmente todo seu momento angular. Atribuímos a perda do momento angular da corda à produção de partículas. A quantidade fundamental que devemos calcular é o coeficiente de Bogolubov entre os modos *in* e *out*. O número médio de partículas *out* no modo $j = (l, m, n)$, presentes no vácuo *in*, produzido por este processo é dado por:

$$\langle in, 0 | b_j^\dagger b_j | 0, in \rangle = \sum_i |\beta_{ij}|^2. \quad (3.47)$$

Usando a definição dos coeficientes de Bogolubov β_{ij} dada por:

$$\beta_{jj'} = -(u_j, v_{j'}^*), \quad (3.48)$$

onde o produto escalar de Klein-Gordon é definido por:

$$(\phi, \chi) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^{\mu} \sqrt{-g} [\phi \partial_{\mu} \chi^* - \chi^* \partial_{\mu} \phi], \quad (3.49)$$

com $d\Sigma^{\mu} = n^{\mu} d\Sigma$, em que n^{μ} é um vetor unitário, ortogonal à hiper-superfície Σ e orientado para o futuro, temos que

$$\beta_{jj'} = -2\pi bL(\Omega_{l'} - \omega_l) N_1 N_2 \xi(R, R_0) \delta_{m, -m'} \delta_{n, -n'}, \quad (3.50)$$

onde

$$\xi(R, R_0) \equiv \int_{R_0}^R dr r \left[\frac{J_{\mu}(qr)}{J_{\mu}(qR)} - \frac{Y_{\mu}(qr)}{Y_{\mu}(qR)} \right] \left[\frac{J_{\nu}(\bar{q}r)}{J_{\nu}(\bar{q}R)} - \frac{Y_{\nu}(\bar{q}r)}{Y_{\nu}(\bar{q}R)} \right]. \quad (3.51)$$

Substituindo (3.50) na equação (3.47), e usando as definições das constantes de normalização N_1 e N_2 , o número médio de partículas produzidas no modo $j = (l, m, n)$ fica dado por:

$$\begin{aligned} \langle in, 0 | b_j^{\dagger} b_j | 0, in \rangle &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\Omega_{l'}}{\omega_l} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\omega_l}{\Omega_{l'}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &\times \left\{ V \left[\frac{J'_{\mu}(qR)}{J_{\mu}(qR)} - \frac{Y'_{\mu}(qR)}{Y_{\mu}(qR)} \right]^2 - V_0 \left[\frac{J'_{\mu}(qR_0)}{J_{\mu}(qR_0)} - \frac{Y'_{\mu}(qR_0)}{Y_{\mu}(qR_0)} \right]^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A expressão acima é bastante complicada, e algumas simplificações feitas por Mendell e Hiscock [49] não podem ser usadas aqui. O ponto chave é que no trabalho de Parker foi feito uso da aproximação *súbita*, explicada acima. Mendell e Hiscock generalizam o trabalho de Parker considerando alguns modelos diferentes mas ainda fazendo uso da aproximação *súbita*. Se Δt representar o tempo de formação da corda, a produção de partículas nos modos com frequências grandes em comparação com Δt^{-1} será suprimida. No nosso modelo o processo de produção de partículas causado pela perda do momento

angular da corda leva um tempo infinito, já que temos dois espaços-tempos assintoticamente planos e um espaço-tempo curvo entre os dois limites. Mesmo assim podemos obter algumas conclusões. Note que a parte da expressão acima que vem entre chaves não depende da energia Ω_l da partícula produzida. Disto fica claro que o número de partículas produzidas diverge para os modos com frequências muito baixas e também muito altas. Este comportamento é esperado para os modos de baixas energias, mas não para os de altas energias. Uma forma de avançar neste modelo é supor um tempo finito Δt_0 ao longo do qual a corda perde o momento angular, introduzindo desta forma um *cutoff* natural pois nesta situação os modos cujas energias são grandes em comparação com Δt_0 serão também suprimidos, como no caso da aproximação *súbita*.

Capítulo 4

Teoria Quântica de Campos num referencial girante

4.1 O Vácuo girante

Neste capítulo compararemos a quantização de um campo escalar real sem massa em um referencial inercial com a quantização em um referencial girante. Usaremos as transformações de Trocherries-Takeno para relacionar as coordenadas adaptadas a ambos os referenciais. Uma solução exata da equação de Klein-Gordon escrita em termos das coordenadas girantes é apresentada, de forma que as transformações de Bogolubov entre os modos inerciais e girantes pode ser calculada [63]. Cálculos mostram que os coeficientes β_{ij} são diferentes de zero. Isto implica que um observador girante define um estado de vácuo unitariamente não equivalente ao vácuo de Minkowski, chamado vácuo de Trocherries-Takeno. Em contra-partida a estes cálculos que envolvem apenas a quantização canônica do campo escalar neutro no referencial não inercial, introduzimos um sistema quântico de dois níveis acoplado ao campo escalar capaz de medir as flutuações do vácuo do campo. Este sistema é conhecido na literatura como detector de Unruh-DeWitt e usando teoria de perturbações calculamos a função resposta do detector acoplado ao campo em diversas situações. A princípio quando o campo é preparado no vácuo de Minkowski e o detector gira uniformemente e quando o campo é preparado no vácuo de Trocherries-Takeno e o detector segue uma trajetória inercial. Por completeza calculamos também a função resposta do detector quando este gira uniformemente interagindo com o campo preparado no vácuo de Trocherries-Takeno.

O ponto chave da Relatividade Especial é que o grupo de Poincaré é o grupo de

simetria de todos os sistemas físicos. A definição dos grupos de Lorentz e de Poincaré é de que estes grupos de transformações deixam invariantes a métrica plana. A consequência natural disto é que um observador inercial atribui a cada evento do espaço-tempo uma localização espacial e temporal através de réguas rígidas e relógios. Para obter-se uma interpretação física das transformações de Poincaré deve-se achar relações gerais entre quantidades medidas por observadores em diferentes referenciais inerciais.

Neste momento podemos perguntar como observadores não inerciais relacionam suas medidas àquelas medidas obtidas por observadores inerciais. Dois exemplos clássicos destas situações são observadores com aceleração própria constante e observadores girando uniformemente. A literatura acerca da primeira situação é bastante extensa, enquanto que deixa a desejar no caso da segunda. Podemos então perguntar como comparar quantidades medidas por observadores que giram uniformemente com aquelas medidas por observadores inerciais. Em outras palavras, com o objetivo de comparar-se medidas realizadas por observadores inerciais e não inerciais (por exemplo, um observador girante), devemos apresentar as transformações de coordenadas que relacionam os pontos do espaço-tempo entre estes dois observadores.

Num contexto galileano é possível relacionar-se as medidas de tempo e espaço entre o referencial girante e um inercial através da seguinte transformação de coordenadas:

$$t = t', \quad (4.1)$$

$$r = r', \quad (4.2)$$

$$\theta = \theta' - \Omega t', \quad (4.3)$$

$$z = z', \quad (4.4)$$

onde Ω é a velocidade angular constante ao redor do eixo z' do referencial inercial, coincidente com o eixo z do referencial girante. Acima, o sistema de coordenadas cilíndricas $x'^{\mu} = \{t', r', \theta', z'\}$ está adaptado ao referencial inercial e o sistema de coordenadas girantes $x^{\mu} = \{t, r, \theta, z\}$ está adaptado ao referencial girante. Não obstante o esforço de vários autores de tentar construir a contra-partida destas transformações incorporando a Relatividade Especial [64], a resposta para esta questão ainda se encontra em aberto.

Em dois trabalhos recentes [65], foi usada a premissa de que as transformações de coordenadas que relacionam as coordenadas adaptadas aos referenciais inercial e girante

são dadas por:

$$t = t' \cosh \Omega r' - r' \theta' \sinh \Omega r', \quad (4.5)$$

$$r = r', \quad (4.6)$$

$$\theta = \theta' \cosh \Omega r' - \frac{t'}{r'} \sinh \Omega r', \quad (4.7)$$

$$z = z'. \quad (4.8)$$

Tal grupo de transformações foi apresentado há muitos anos por Trocherries e também por Takeno [66]. No desenvolvimento de Takeno, três hipóteses foram feitas: (i) as leis de transformação devem constituir um grupo; (ii) para valores pequenos de velocidade angular deve-se recuperar a lei usual de que a velocidade linear de um ponto à distância r do eixo de rotação é proporcional a r : $v = \Omega r$; (iii) a lei de composição de velocidades deve estar de acordo também com a Relatividade Especial. De fato, das transformações de Trocherries-Takeno resulta que a velocidade linear de um ponto à distância r do eixo de rotação é dada por $v(r) = \tanh(\Omega r)$.

O nosso propósito neste capítulo é duplo. Primeiro efetuar a quantização canônica de um campo escalar real sem massa no referencial girante utilizando as transformações de Trocherries-Takeno. Obteremos que além do vácuo de Minkowski, adaptado a observadores inerciais, e do vácuo de Rindler, adaptado a observadores com aceleração linear constante, existe um terceiro vácuo, adaptado a observadores girantes; este estado é chamado de vácuo de Trocherries-Takeno. Segundo é introduzir um sistema quântico de dois níveis acoplado ao campo escalar capaz de medir as flutuações do vácuo do campo. O conceito de partículas escalares medidas por observadores girantes será amplamente discutido.

A quantização canônica do campo escalar em um referencial girante, tomando como base as transformações de coordenadas (4.1-4.4), foi realizada por Denardo e Percacci e também por Letaw e Pfautsch [67]. Para comparar as quantizações realizadas nos referenciais inercial e girante, os autores calcularam as transformações de Bogolubov [58] entre os modos inerciais $\psi_i(t', r', \theta', z')$ e os modos adaptados ao referencial girante, $\bar{\psi}_j(t, r, \theta, z)$. Como foi encontrado que os coeficientes de Bogolubov β_{ij} são nulos, eles concluem que o vácuo girante, ou melhor, o estado de zero partículas como definido pelo observador girante, é exatamente o vácuo de Minkowski $|0, M\rangle$.

Uma outra forma de comparar-se diferentes quantizações é estudar a atividade do vácuo de um campo quântico, o que pode ser realizado introduzindo-se um sistema quântico que seja acoplado ao campo via uma lagrangeana de interação. (No que segue estaremos considerando o modelo de detector de Unruh e DeWitt [68, 69].) Fazendo-se uso de teoria de perturbações em primeira ordem, é possível calcular-se a probabilidade de excitação por unidade de tempo (tempo próprio do detector) de tal sistema (quando este segue uma dada linha de universo), de efetuar uma transição do seu estado fundamental para seu estado excitado. A esta probabilidade de excitação por unidade de tempo chama-se *taxa de excitação* [70]. Considere que o detector segue uma linha de universo inercial e que o campo está preparado no estado de vácuo de Minkowski. Nesta situação, o detector irá permanecer no estado fundamental, e portanto a taxa de excitação é nula. A interpretação óbvia deste resultado é a de que no vácuo de Minkowski não há partículas inerciais, ou melhor, o detector está medindo zero partículas inerciais no vácuo de Minkowski. Por outro lado, se o detector seguir uma linha de universo uniformemente acelerada e se o campo for preparado no vácuo de Minkowski, há uma probabilidade não nula do detector ser encontrado no estado excitado. Esta probabilidade é exatamente igual à probabilidade de um detector inercial preparado no estado fundamental ser encontrado no estado excitado se este interage com um banho térmico. Este é o chamado efeito Unruh-Davies, e o resultado quantitativo está em acordo com o fato de que o vácuo de Minkowski é “visto” como um estado térmico por um observador acelerado, com temperatura proporcional à sua aceleração própria [68]. A construção de uma teoria quântica de campos com a respectiva implementação de um espaço de Fock na variedade de Rindler acarreta a definição de um estado de vácuo, o vácuo de Rindler $|0, R\rangle$. Por completeza, na situação em que o campo é preparado em tal estado e o detector percorre uma linha de universo uniformemente acelerada, o detector não se excita. Esta situação é esperada devido ao fato que no vácuo de Rindler não há partículas de Rindler que possam ser detectadas por um observador acelerado.

Entretanto, não existe acordo entre as respostas de um detector e dos coeficientes de Bogolubov em situações mais gerais. Em outras palavras, não há a correlação direta entre a função resposta de um detector que segue uma determinada trajetória e a quantização canônica construída por um observador que segue a mesma linha de universo. De fato,

como foi mostrado por Letaw e Pfautsch, se o detector seguir uma linha de universo circular uniforme e se o campo for preparado no vácuo de Minkowski $|0, M\rangle$, encontra-se uma taxa de excitação não nula. Este resultado estabelece um paradoxo pois podemos substituir o vácuo de Minkowski pelo vácuo girante (lembramos que os coeficientes de Bogolubov entre os modos inerciais e os modos girantes são nulos). Temos então uma situação onde um detector de partículas girando uniformemente mede partículas mesmo quando interage com o campo preparado no vácuo girante. Este resultado não é esperado e é conhecido na literatura [71] como o problema do detector girante.

Recentemente Davies *et al* [72] (ver também [73]) tentam resolver este paradoxo. Estes autores consideram as transformações de coordenadas de Galileu (4.1-4.4) entre os referenciais inercial e girante. Em primeiro lugar é importante salientar que a linha de universo de um observador em repouso no referencial girante é uma curva integral do vetor de Killing $\xi = (1 - \Omega^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t}$, que é do tipo tempo apenas para $\Omega r < 1$. Conseqüentemente, para uma dada velocidade angular Ω , haverá um valor máximo para a coordenada radial $r_{max} = \frac{1}{\Omega}$ (cilindro de luz), para o qual um observador que esteja a uma distância $r > r_{max}$ estará se movendo com uma velocidade superior à da luz. O coeficiente de Bogolubov β_{ij} é dado por um produto escalar sobre uma hiper-superfície do tipo espaço, em que a coordenada radial assume valores no intervalo $0 \leq r < \infty$, e a própria noção de transformações de Bogolubov se torna obscura para uma região exterior ao cilindro de luz. Com o intuito de contornar este problema, Davies *et al* introduzem um cilindro feito de um condutor perfeito, cujo raio é $a < r_{max}$, e conseguem assim mostrar que a taxa de excitação do detector se anula quando este é colocado a uma distância $r < a$ do eixo de rotação. Eles concluem que “um detector de partículas girantes, interagindo com o estado de vácuo girante (definido apenas dentro do cilindro), registra a ausência de partículas”, e obtêm assim acordo com a quantização canônica implementada por Letaw e Pfautsch: o detector girante não se excita no vácuo de Minkowski pois para um observador girante o vácuo de Minkowski é um estado de zero “partículas girantes”. Devemos ressaltar o fato de que estes autores ainda consideram o vácuo de Minkowski como o estado de zero partículas para um observador girante, pois eles trabalham num contexto galileano, usando as transformações (4.1-4.4).

A seguir efetuaremos a quantização de um campo escalar sem massa nos referenciais

inercial e girante, respectivamente. A equivalência unitária das duas quantizações será checada através dos cálculos dos coeficientes de Bogolubov. A grande diferença entre o que fazemos no momento e os trabalhos anteriores de Letaw e Pfausch, Denardo e Percacci e de Davies *et al.*, é que agora estamos usando que o grupo de transformações que relacionam um evento no espaço-tempo medido por um observador inercial e medido por um observador girante é dado pelas transformações de Trocherries-Takeno. Como já enfatizamos, mostraremos que é possível encontrar um conjunto completo de modos, base no espaço de soluções da equação de Klein-Gordon, escrito em termos das coordenadas girantes. O resultado fundamental é que os coeficientes de Bogolubov entre os modos girantes e inerciais não são nulos, de modo que o vácuo de Minkowski e o vácuo girante não são unitariamente equivalentes.

4.1.1 Quantização Canônica nos referenciais inercial e girante

Para iniciar vamos comparar a quantização do campo de Klein-Gordon sem massa realizada no referencial inercial àquela realizada no referencial girante. Voltamos a insistir que não estamos assumindo as transformações de Galileu e sim as transformações de Trocherries-Takeno para comparar medidas efetuadas por observadores nos dois referenciais. A quantização canônica efetuada por observadores inerciais é implementada introduzindo-se coordenadas cilíndricas $x'^{\mu} = \{t', r', \theta', z'\}$ sobre hipersuperfícies $t' = ct'$ e escrevendo-se a equação de Klein-Gordon em termos destas. Como isto foi feito em [67], apenas citaremos os resultados obtidos. Modos de frequência positiva (com relação ao tempo inercial t'), soluções da equação de Klein-Gordon, são dados por:

$$v_{q'm'k'}(t', r', \theta', z') = N_1 e^{ik'z' + im'\theta'} e^{-i\omega't'} J_{m'}(q'r'), \quad (4.9)$$

onde $\omega'^2 = q'^2 + k'^2$, $J_{m'}(q'r')$ são funções de Bessel bem comportadas na origem e $N_1 = q'^{\frac{1}{2}} [2\pi(2\omega')^{1/2}]^{-1}$ é um fator de normalização. Acima, $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $0 \leq q' < \infty$ e $-\infty \leq k' < \infty$. Assim o operador de campo é expandido da seguinte forma:

$$\phi(x'^{\mu}) = \sum_{m'} \int dq' dk' \left[b_{q'm'k'} v_{q'm'k'}(x'^{\mu}) + b_{q'm'k'}^{\dagger} v_{q'm'k'}^*(x'^{\mu}) \right], \quad (4.10)$$

onde os coeficientes $b_{q'm'k'}$ e $b_{q'm'k'}^{\dagger}$ são, respectivamente, os operadores de aniquilação e de criação dos quanta de Minkowski do campo e satisfazem à regra usual de comutação

$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Acima, os modos v_i and v_i^* são chamados, respectivamente, de modos de frequência positiva e negativa com respeito ao vetor de Killing $\partial/\partial t'$. É importante salientar que em geometrias estacionárias, tais como o espaço-tempo de Minkowski, a definição de modos de frequência positiva e negativa não apresenta ambigüidades. O estado de vácuo de Minkowski é definido por:

$$b_{q'm'k'} |0, M\rangle = 0, \quad \forall q', m', k'. \quad (4.11)$$

Consideremos agora a quantização efetuada por observadores que seguem uma linha de universo uniformemente girante.

Partindo da hipótese de que as transformações (4.5-4.8) são as que relacionam eventos medidos por observadores inerciais e girantes, com as respectivas coordenadas adaptadas aos referenciais inercial e girante dadas por $x'^\mu = \{t', r', \theta', z'\}$ e $x^\mu = \{t, r, \theta, z\}$, o elemento de linha escrito em termos das coordenadas girantes assume uma forma não-estacionária [65]:

$$ds^2 = dt^2 - (1 + P)dr^2 - r^2d\theta^2 - dz^2 + 2Qdrd\theta + 2Sdtdr, \quad (4.12)$$

em que P, Q e S são dados por:

$$P = \left(\frac{Y}{r^2} + 4\Omega\theta t\right) \sinh^2 \Omega r - \frac{\Omega}{r}(t^2 + r^2\theta^2) \sinh 2\Omega r + \Omega^2 Y, \quad (4.13)$$

$$Q = r\theta \sinh^2 \Omega r - \frac{1}{2}t \sinh 2\Omega r + \Omega r t, \quad (4.14)$$

$$S = \frac{t}{r} \sinh^2 \Omega r - \frac{1}{2}\theta \sinh 2\Omega r - \Omega r \theta, \quad (4.15)$$

onde $Y = (t^2 - r^2\theta^2)$. Note que esta métrica não apresenta horizonte de eventos. A implementação da quantização canônica se dá após ser resolvida a equação de Klein-Gordon escrita no sistema de coordenadas de Trocherries-Takeno:

$$\square\phi(t, r, \theta, z) = 0. \quad (4.16)$$

Pode ser mostrado que um conjunto completo, base no espaço de soluções da equação de Klein-Gordon, é dado por $\{u_{qmk}, u_{qmk}^*\}$, onde

$$\begin{aligned} u_{qmk}(t, r, \theta, z) &= N_2 e^{ikz} \exp[i(m \cosh \Omega r + \omega r \sinh \Omega r) \theta] \\ &\times \exp\left[-i\left(\frac{m}{r} \sinh \Omega r + \omega \cosh \Omega r\right) t\right] J_m(qr). \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que $\omega^2 = q^2 + k^2$ e N_2 é um fator de normalização. Novamente, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, $0 \leq q < \infty$ e $-\infty < k < \infty$. Vê-se que estes modos são bem comportados em toda a variedade. Fazendo-se uso das transformações (4.5-4.8) pode-se mostrar que estes modos são os modos de frequência positiva segundo o critério de di Sessa [74], que diz que um dado modo é de frequência positiva se este se anula no limite $(t') \rightarrow -i\infty$, onde t' é o tempo inercial, enquanto que u_j^* são modos de frequência negativa. Expande-se, conseqüentemente, o operador de campo como:

$$\phi(x^\mu) = \sum_m \int dq dk \left(a_{qmk} u_{qmk}(x^\mu) + a_{qmk}^\dagger u_{qmk}^*(x^\mu) \right), \quad (4.18)$$

onde os coeficientes a_{qmk} e a_{qmk}^\dagger são, respectivamente, os operadores de aniquilação e de criação dos quanta de Trocherries-Takeno. O estado de vácuo definido pelo observador girante é então o vácuo de Trocherries-Takeno $|0, T\rangle$ e é dado por

$$a_{qmk} |0, T\rangle = 0, \quad \forall q, m, k. \quad (4.19)$$

Os estados de uma e mais partículas de Trocherries-Takeno podem ser obtidos através de sucessivas aplicações dos operadores de criação neste vácuo assim definido.

Neste momento podemos comparar as duas quantizações através do cálculo dos coeficientes de Bogolubov [58]. Pelo fato de ambos os conjuntos de modos serem completos, pode-se expandir os modos inerciais (4.9) em termos dos modos (4.17) e vice-versa, onde os coeficientes desta expansão são chamados de coeficientes de Bogolubov; a propósito:

$$u_i(x) = \sum_j \alpha_{ij} v_j(x) + \beta_{ij} v_j^*(x) \quad (4.20)$$

ou, por outro lado:

$$v_j(x) = \sum_i \alpha_{ij}^* u_i(x) - \beta_{ij} u_i^*(x), \quad (4.21)$$

em que os coeficientes do Bogolubov são dados por $\alpha_{jj'} = (u_j, v_{j'})$ e $\beta_{jj'} = -(u_j, v_{j'}^*)$, onde o produto escalar é definido por:

$$(\phi, \chi) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^\mu \sqrt{-g} [\phi \partial_\mu \chi^* - \chi^* \partial_\mu \phi], \quad (4.22)$$

com $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, em que n^μ é um vetor unitário, ortogonal à hiper-superfície Σ e orientado para o futuro. Escolhemos para Σ a hiper-superfície $t' = 0$, em que t' é o tempo inercial. O coeficiente relevante para nossa análise é o coeficiente $\beta_{jj'}$, pois este é o que fornecerá o conteúdo de partículas de Trocheries-Takeno presentes no vácuo de Minkowski, e para prosseguirmos o cálculo precisamos expressar os modos girantes $u_j(x)$ em termos das coordenadas inerciais usando as transformações (4.5-4.8). Procedendo desta maneira:

$$\begin{aligned} u_{qm k}(t', r', \theta', z') &= N_2 e^{ikz'} \exp(i\theta' [m \cosh 2\Omega r' + \omega r' \sinh 2\Omega r']) \\ &\times \exp\left(-it' \left[\omega \cosh 2\Omega r' + \frac{m}{r'} \sinh 2\Omega r'\right]\right) J_m(qr') \end{aligned} \quad (4.23)$$

e o coeficiente de Bogolubov $\beta_{jj'}$ toma a forma:

$$\begin{aligned} \beta_{jj'} &= +i \int_0^\infty r' dr' \int_{-\infty}^\infty dz' \int_0^{2\pi} d\theta' \left[u_j(x') \frac{\partial v_{j'}(x')}{\partial t'} - v_{j'}(x') \frac{\partial u_j(x')}{\partial t'} \right] \\ &= N_1 N_2 \int_{-\infty}^\infty dz' e^{i(k+k')z'} \\ &\times \int_0^\infty r' dr' \left[\omega' - \omega \cosh 2\Omega r' - \frac{m}{r'} \sinh 2\Omega r' \right] J_{m'}(q'r') J_m(qr') \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta' \exp(i\theta' [m' + m \cosh 2\Omega r' + \omega r' \sinh 2\Omega r']). \end{aligned} \quad (4.24)$$

A primeira integral é calculada facilmente, fornecendo a função delta $2\pi\delta(k+k')$, enquanto que a terceira nos dá:

$$\int_0^{2\pi} d\theta' \exp(i\theta' A_{m,m'}(r, \omega)) = (iA_{m,m'}(r, \omega))^{-1} [\exp(2\pi i A_{m,m'}(r, \omega)) - 1],$$

onde

$$A_{m,m'}(r, \omega) = m' + m \cosh 2\Omega r' + \omega r' \sinh 2\Omega r'. \quad (4.25)$$

Obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} \beta_{jj'} &= 2\pi N_1 N_2 \delta(k+k') \\ &\times \int_0^\infty r' dr' \left(\omega' - \omega \cosh 2\Omega r' - \frac{m}{r'} \sinh 2\Omega r' \right) J_{m'}(q'r') J_m(qr') \\ &\times (iA_{m,m'}(r, \omega))^{-1} [\exp(2\pi i A_{m,m'}(r, \omega)) - 1]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

É difícil calcular a última expressão de forma fechada, mas de qualquer maneira esta é diferente de zero e no resto desta seção daremos uma prova indireta deste fato. Isto

significa que os dois estados de vácuo não são equivalentes, ou seja, $|0, M\rangle \neq |0, T\rangle$, com o significado de que o vácuo de Minkowski $|0, M\rangle$ contém quanta girantes, isto é, partículas de Trocherries-Takeno [58].

Estamos interessados no número de partículas de Trocherries-Takeno em um dado estado $j = (q, m, k)$ que estão presentes no vácuo de Minkowski. Este número é dado em termos dos coeficientes de Bogolubov, segundo a expressão [58]:

$$\langle 0, M | a_j^\dagger a_j | 0, M \rangle = \sum_{j'} |\beta_{jj'}|^2. \quad (4.27)$$

Vemos que este número é dado pela soma dos quadrados dos módulos dos vários coeficientes. Se for possível mostrar que pelo menos um destes coeficientes é não nulo, então mostra-se que o vácuo de Minkowski apresenta um número não nulo de partículas de Trocherries-Takeno. Daremos a seguir uma prova indireta de que um destes coeficientes de fato é diferente de zero. Os cálculos no texto mostram que:

$$\begin{aligned} \beta_{jj'} &= 2\pi N_1 N_2 \delta(k + k') \\ &\times \int_0^\infty r' dr' \left(\omega' - \omega \cosh 2\Omega r' - \frac{m}{r'} \sinh 2\Omega r' \right) J_{m'}(q'r') J_m(qr') \\ &\times (iA_{m,m'}(r, \omega))^{-1} [\exp(2\pi i A_{m,m'}(r, \omega)) - 1]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde

$$A_{m,m'}(r, \omega) = m' + m \cosh 2\Omega r' + \omega r' \sinh 2\Omega r'. \quad (4.29)$$

Estudemos o limite de altas velocidades, $\Omega \rightarrow \infty$, do coeficiente β_{00} , que denota $m = 0$ e $m' = 0$:

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= -2\pi i N_1(m' = 0) N_2(m = 0) \delta(k + k') \\ &\times \int_0^\infty r dr \frac{\omega' - \omega \cosh(2\Omega r)}{\omega r \sinh(2\Omega r)} J_0(qr) J_0(q'r) [e^{2\pi i \omega r \sinh(2\Omega r)} - 1]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Já que $\frac{1}{\sinh x} \rightarrow 0$ e $\frac{\cosh x}{\sinh x} \rightarrow 1$ no limite $x \rightarrow \infty$, encontra-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \beta_{00} &= -2\pi i N_1(m' = 0) N_2(m = 0) \delta(k + k') \\ &\times \int_0^\infty dr J_0(qr) J_0(q'r) [1 - e^{2\pi i \omega r \sinh(2\Omega r)}]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Chamando de $K(q, q', \omega, \Omega)$ a integral acima, note que:

$$K(q, q', \omega, \Omega) = \Re \{K(q, q', \omega, \Omega)\} + i\Im \{K(q, q', \omega, \Omega)\}, \quad (4.32)$$

onde as partes real e imaginária são dadas por:

$$\Re \{K(q, q', \omega, \Omega)\} = \int_0^\infty dr J_0(qr) J_0(q'r) (1 - \cos [2\pi\omega r \sinh(2\Omega r)]) \quad (4.33)$$

e

$$\Im \{K(q, q', \omega, \Omega)\} = \int_0^\infty dr J_0(qr) J_0(q'r) \sin [2\pi\omega r \sinh(2\Omega r)]. \quad (4.34)$$

Note que na equação (4.33), a segunda integral não é capaz de fazer anular $\Re \{K(q, q', \omega, \Omega)\}$ se a primeira for não nula. E este é realmente o caso, já que se pode encontrar a primeira delas em [45], em termos das funções hipergeométricas:

$$\int_0^\infty dr J_0(qr) J_0(q'r) = \frac{1}{q+q'} F \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{4qq'}{(q+q')^2} \right], \quad (4.35)$$

e esta é diferente de zero.

Uma outra maneira de mostrarmos que β é diferente de zero é a seguinte: começamos pela equação (4.28); como para $m = m' = 0$ os integrandos têm o comportamento $\frac{1}{\sinh(2\Omega r)}$, e como $\frac{1}{\sinh(2\Omega r)}$ diverge para $r \rightarrow 0$, calculemos $\beta_{0,1}$, denotando $m = 0$ e $m' = 1$:

$$\begin{aligned} \beta_{01} &= -2\pi i N_1(m' = 1) N_2(m = 0) \delta(k + k') \\ &\times \int_0^\infty r dr \frac{(\omega' - \omega \cosh 2\Omega r)}{(1 + r\omega \sinh 2\Omega r)} J_0(qr) J_1(q'r) \\ &\times [\exp(2\pi i(1 + r\omega \sinh 2\Omega r)) - 1]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Chamaremos de I à integral acima:

$$I = \int_0^\infty r dr \frac{(\omega' - \omega \cosh 2\Omega r)}{(1 + r\omega \sinh 2\Omega r)} J_0(qr) J_1(q'r) [\exp(2\pi i(1 + r\omega \sinh 2\Omega r)) - 1]. \quad (4.37)$$

A primeira integral é a única que é função de ω' : se conseguirmos provar que esta é diferente de zero, mostraremos então que $\beta_{01} \neq 0$, já que a segunda integral não é capaz de fazer anular a expressão toda. Chamemos esta de $I(\omega')$:

$$I(\omega') = \omega' \int_0^\infty r dr \frac{J_0(qr) J_1(q'r)}{(1 + r\omega \sinh 2\Omega r)} [\exp(2\pi i r \omega \sinh 2\Omega r) - 1]. \quad (4.38)$$

É possível separar $I(\omega')$ em suas partes real e imaginária e, usando o mesmo raciocínio usado para a equação (4.33), podemos nos concentrar na segunda integral acima, a que chamamos de $I_1(\omega')$:

$$I_1(\omega') = -\omega' \int_0^\infty r dr \frac{J_0(qr)J_1(q'r)}{(1+r\omega \sinh 2\Omega r)}. \quad (4.39)$$

Não há uma expressão analítica para $I_1(\omega')$, mas fazendo uso do Maple pode-se calcular valores particulares, como por exemplo:

$$\int_0^\infty r dr \frac{J_0(r)J_1(r)}{(1+r \sinh r)} = 0.183096; \quad (4.40)$$

provamos então, através de uma forma indireta, que $\beta \neq 0$.

4.1.2 Taxa de excitação de um Detector de Unruh-DeWitt

Passaremos agora a considerar a probabilidade de excitação de um detector que se move numa trajetória circular ao redor de um ponto fixo, com velocidade angular constante Ω e distante R_0 do eixo de rotação, quando este interage com o campo escalar. Tomaremos em conta que o estado inicial do detector de dois níveis é o estado fundamental e que o estado inicial do campo pode ser tanto o vácuo de Minkowski como o vácuo de Trocherries-Takeno e calcularemos a taxa de excitação para ambos os casos. A interação com o campo pode induzir transições entre os níveis de energia do detector de maneira que ele pode ser encontrado, após um tempo finito, num estado excitado. Usando as idéias de Sciamia, Candelas e Deutsch [75] diz-se que o detector mediu o espectro das flutuações do vácuo do campo.

A discussão seguinte tomará como modelo de detector o sistema proposto por Unruh e De Witt [68, 69], que é um sistema que apresenta dois auto-estados internos de energia. Este sistema permite a transição de um destes estados para o outro: em outras palavras, a matriz do operador de monopolo deste detector apresenta elementos fora da diagonal não nulos. Este último fato torna possível transições entre os estados internos do detector, ou seja, processos de excitação e de decaimento. De acordo com a literatura [70], a probabilidade de excitação por unidade de tempo próprio do detector (sem levar em conta a seletividade do detector), ou, simplesmente, a *taxa de excitação*, é dada por:

$$R(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t e^{-iE\Delta t} G^+(x, x'), \quad (4.41)$$

em que $\Delta t = t - t'$, $E > 0$ é a diferença entre as energias dos estados excitado e fundamental do detector e $G^+(x, x')$ é a função de Wightman de frequência positiva calculada ao longo da trajetória do detector. A função de Wightman de frequência positiva é dada por:

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle, \quad (4.42)$$

onde $|0\rangle$ é um estado de vácuo do campo, que pode ser tanto $|0, M\rangle$ quanto $|0, T\rangle$. Consideremos primeiramente esta última possibilidade.

Separando-se o operador de campo em suas partes de frequências positivas e negativas com respeito à coordenada temporal de Trocherries-Takeno t , na forma $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$, onde $\phi^+(x)$ contém apenas operadores de aniquilação e $\phi^-(x)$ contém apenas operadores de criação (ver a equação (4.18)), e ademais se considerarmos $|0\rangle$ como o vácuo de Trocherries-Takeno ($|0\rangle = |0, T\rangle$), então, usando a equação (4.19), encontra-se:

$$G_T^+(x, y) = \sum_i u_i(x) u_i^*(y), \quad (4.43)$$

onde o índice T denota a função de Wightman calculada no vácuo de Trocherries-Takeno. Considere agora os modos dados pela equação (4.17), e que estamos interessados na situação em que o detector está em repouso no referencial de Trocherries-Takeno, que significa que $\theta = \text{constante}$, $z = \text{constante}$ e $r = R_0 = \text{constante}$; encontra-se assim:

$$G_T^+(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 e^{-i[\frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0] \Delta t} J_m^2(q R_0). \quad (4.44)$$

Substituindo a expressão acima na equação (4.41), encontra-se:

$$\begin{aligned} R_T^{(r)}(E, R_0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 J_m^2(q R_0) \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t e^{-i[E + \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0] \Delta t}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

(O índice T denota o vácuo de Trocherries-Takeno e o índice (r) denota a linha de universo girante seguida pelo detector.) A última integral fornece $2\pi \delta\left(E + \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0\right)$, para a qual o argumento é não nulo apenas se $m < 0$; tomamos então o índice da soma assumindo os valores $m = 1, 2, 3, \dots$, resultando em:

$$\begin{aligned} R_T^{(r)}(E, R_0) &= 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 J_m^2(q R_0) \\ &\times \delta\left(E - \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0\right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

A expressão acima indica que assintoticamente o detector será encontrado no estado excitado, e depende de uma maneira não trivial de sua distância R_0 ao eixo de rotação. Repare que novamente encontramos o desacordo entre a quantização canônica e o formalismo de detectores, apontada por Letaw e Pfautsch e também por Padmanabhan: como é possível um detector *girante* ser excitado na presença do *vácuo girante*? Entretanto, note que existe uma diferença crucial entre os trabalhos acima relacionados e o presente trabalho: nós estamos afirmando, como mostramos na última seção, que o vácuo girante não é igual ao vácuo de Minkowski, isto é, o vácuo de Minkowski contém partículas de Trocheres-Takeno. Analisaremos agora as duas causas que contribuem independentemente para o resultado não nulo da equação (4.46).

A possibilidade de um detector de Unruh-DeWitt posto a girar no vácuo girante se excitar, deve ser contrastada com os dois casos seguintes: de fato, este mesmo modelo de detector *não se excita*, tanto quando ele percorre uma linha de universo inercial e interage com o vácuo inercial (Minkowski) [58, 70], quanto no caso em que ele está uniformemente acelerado e interagindo com o campo preparado no vácuo de Rindler [76]. Porém, note que ambos espaços-tempos de Minkowski e de Rindler são estáticos, diferentemente da métrica de Trocheres-Takeno, e também da métrica girante obtida fazendo-se uso das transformações de Galileu, que são exemplos de métricas não-estáticas. Lembre-se que mesmo no caso da transformação de Galileu para um referencial girante também foi encontrado por Letaw e Pfautsch uma taxa de excitação não nula para o detector girante no vácuo girante, estado este considerado por estes autores como o próprio vácuo de Minkowski $|0, M\rangle$. Conseqüentemente a excitação no presente caso pode ser atribuída à não-estacionariedade da métrica de Trocheres-Takeno.

A outra origem para assintoticamente encontrarmos o detector no estado excitado pode ser atribuída ao modelo de detector que usamos [77]. Note que separando o operador de campo em suas partes de frequências positivas e negativas com respeito ao tempo de Trocheres-Takeno t na equação (4.42), pode-se expressar a função de Wightman como:

$$\begin{aligned} G^+(x, x') &= \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \phi^+(x) \phi^+(x') | 0 \rangle + \langle 0 | \phi^+(x) \phi^-(x') | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | \phi^-(x) \phi^+(x') | 0 \rangle + \langle 0 | \phi^-(x) \phi^-(x') | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.47)$$

No caso em que $|0\rangle = |0, T\rangle$, por causa da equação (4.19) apenas o segundo termo acima é não nulo, e este corresponde à emissão (criação) de uma partícula de Trocherries-Takeno com a simultânea excitação do detector e este é o termo responsável pela taxa diferente de zero, equação (4.46). No contexto da Ótica Quântica, a foto-deteção corresponde apenas a processos de foto*absorção* [78, 79], de forma que um detector só pode ser excitado quando absorve (aniquila) um quantum do campo. Assim, sempre que aparecerem termos do tipo acima estes serão descartados, e apenas consideram-se termos do tipo do terceiro acima. A tal procedimento deu-se o nome de aproximação de onda girante [79]. Com base nesta discussão, detectores que puderem ser excitados exclusivamente através da absorção de partículas darão sempre como resultado uma taxa nula quando calculada no estado de vácuo do campo. Fica claro então que o modelo de Glauber de detectores não será excitado quando forçado a seguir uma linha de universo girante na presença do campo no vácuo de Trocherries-Takeno. Um outro contexto em que a inclusão dos termos anti-ressonantes (do tipo do segundo termo acima) tem um papel fundamental é o de observadores acelerados, em que o caráter térmico do vácuo de Minkowski como visto por um observador de Rindler não se manifesta se for usada a função de correlação de Glauber, mas apenas se for usada a de Wightman. Com efeito, a função de correlação de Wightman contém o termo das flutuações do vácuo que são deliberadamente omitidas na função de Glauber e exatamente a estas flutuações do vácuo pode ser atribuída a taxa de excitação não nula, equação (4.46). Por causa desta característica o modelo de Unruh-DeWitt, que leva em conta a função de Wightman, é também chamado de flutuômetro [75], pois este é sensível às flutuações do vácuo.

Vamos discutir agora o caso em que o detector está numa trajetória circular e o campo foi preparado no vácuo de Minkowski. Escrevendo $|0, M\rangle$ por $|0\rangle$ na equação (4.42), vê-se que a função de Wightman de frequência positiva fica dada por:

$$G_M^+(x, y) = \sum_j v_j(x)v_j^*(y), \quad (4.48)$$

onde o índice M denota o vácuo de Minkowski. Como a taxa de excitação, dada pela equação (4.41), está escrita em termos do tempo próprio do detector, devemos expressar a equação (4.48) em termos das coordenadas girantes, usando a inversa das transformações de Trocherries-Takeno. Começemos com $G_M^+(x', y')$, escrita nas coordenadas inerciais, com

as identificações apropriadas $r'_1 = r'_2 = R_0$ e $z'_1 = z'_2$:

$$G_M^+(x', y') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_1^2 e^{-i\omega(t'_1 - t'_2) + im(\theta'_1 - \theta'_2)} J_m^2(qR_0). \quad (4.49)$$

A inversa das transformações de Trocherries-Takeno é dada por:

$$t' = t \cosh \Omega r + r\theta \sinh \Omega r, \quad (4.50)$$

$$r' = r, \quad (4.51)$$

$$\theta' = \theta \cosh \Omega r + \frac{t}{r} \sinh \Omega r, \quad (4.52)$$

$$z' = z. \quad (4.53)$$

Fazendo-se uso das equações acima na equação (4.49), e notando-se o fato que o detector está em repouso no referencial girante, ou seja, $\theta_1 = \theta_2$, vê-se que a função de Wightman para o vácuo de Minkowski é função da diferença no tempo próprio $\Delta t = t_1 - t_2$, o que permite calcular-se a taxa de excitação do detector girante na presença do vácuo de Minkowski:

$$R_M^{(r)}(E, R_0) = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_1^2 J_m^2(qR_0) \times \delta\left(E - \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0\right). \quad (4.54)$$

O resultado acima é similar à equação (4.46), só que agora aparece a normalização dos modos inerciais N_1 em vez de N_2 . Repare que o resultado $R_M^{(r)} \neq 0$ já podia ser antecipado, pois na última seção mostramos que o vácuo de Trocherries-Takeno não é unitariamente equivalente ao vácuo de Minkowski, o que implica que o vácuo de Minkowski é descrito como uma superposição de estados de muitas partículas de Trocherries-Takeno; era então de se esperar que um detector girante se excitasse na presença do vácuo de Minkowski, pois este estado, para o observador girante, contém partículas. Mais uma vez lembramos que, no contexto das transformações galileanas (4.1-4.4), não era esperado que um detector girante se excitasse na presença do vácuo de Minkowski porque o resultado da quantização canônica do campo escalar no referencial girante apontava que o vácuo de Minkowski era visto por um observador girante como um estado sem partículas.

Para aprofundarmos o nosso conhecimento deste estado físico, o vácuo de Trocherries-Takeno, vamos supor que seja possível preparar o campo neste estado. Colocando o detector numa linha de universo inercial, consideraremos a taxa de excitação nesta situação, que é dada por:

$$R_T^{(i)}(E, R_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t' e^{-iE\Delta t'} G_T^+(x', y'), \quad (4.55)$$

onde o índice (i) denota a trajetória inercial seguida pelo detector, $\Delta t'$ é a diferença no tempo próprio no referencial inercial, e $G_T^+(x', y')$ é dada pela equação (4.43). Escrevendo-se $G_T^+(x', y')$ em termos das coordenadas inerciais e usando-se o fato de que agora o detector não está em repouso no referencial girante, chega-se ao resultado:

$$\begin{aligned} R_T^{(i)}(E, R_0) &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 J_m^2(qR_0) \\ &\times \delta\left(E - \left(\omega\Omega R_0 - \frac{m}{R_0}\right) \sinh(2\Omega R_0) - (m\Omega - \omega) \cosh(2\Omega R_0)\right). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ao estudarmos a atividade do vácuo de Trocherries-Takeno, nós calculamos a taxa de excitação de um detector de Unruh-DeWitt interagindo com o campo neste estado, em duas diferentes situações: quando o detector segue uma trajetória circular e uma trajetória inercial, respectivamente as equações (4.46) e (4.56). A equação (4.46), que representa a taxa de excitação de um detector uniformemente girante na presença do vácuo de Trocherries-Takeno, é diferente de zero e, como já discutido, este é um resultado não esperado. Deixaremos de lado este problema e vamos considerar esta taxa não nula como uma espécie de “ruído” inerente ao vácuo de Trocherries-Takeno. De acordo com isso vamos admitir que o vácuo de Trocherries-Takeno produzirá o mesmo “ruído” em um detector, independentemente do estado de movimento deste último; em outras palavras, quando calcularmos a taxa de excitação de um detector que se mova em qualquer trajetória na presença do vácuo de Trocherries-Takeno, este “ruído”, equação (4.46), já estará sendo automaticamente levado em conta. Conseqüentemente, nós escolhemos normalizar a taxa de excitação de um detector que segue uma dada linha de universo $x^\mu(\tau)$ na presença do vácuo de Trocherries-Takeno, ou seja, $R_T^{(x^\mu(\tau))}$, considerando a diferença entre $R_T^{(x^\mu(\tau))}$ e o “ruído” (4.46):

$$\mathcal{R}_T^{(x^\mu(\tau))} \equiv R_T^{(x^\mu(\tau))} - R_T^{(r)}.$$

De acordo com esta re-definição, um detector girante não mais será excitado no vácuo de Trocherries-Takeno. Ao procedermos desta maneira, resulta que a taxa normalizada de excitação de um detector inercial na presença do vácuo de Trocherries-Takeno fica dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_T^{(i)}(E, R_0) &\equiv R_T^{(i)} - R_T^{(r)} \\
 &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 J_m^2(qR_0) \times \\
 &\quad \left[\delta \left(E - \left(\omega \Omega R_0 - \frac{m}{R_0} \right) \sinh(2\Omega R_0) - (m\Omega - \omega) \cosh(2\Omega R_0) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \delta \left(E - \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0 \right) \right]. \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

Resta ainda esclarecer porque aparece a distância R_0 na taxa acima, pois que o detector se encontra em repouso num referencial inercial. Ao estudar-se a quantização do campo no referencial girante, deve-se primeiro fixar qual a linha de universo que o observador girante vai seguir, e esta é parametrizada por duas quantidades: a velocidade angular Ω e a distância R_0 ao eixo de rotação. O estado de vácuo que resulta da quantização feita desta forma será conseqüentemente indexado também por estes dois parâmetros e esta é a origem da dependência em R_0 na equação acima. Uma dependência similar da taxa de excitação de um detector sobre parâmetros geométricos acontece, por exemplo, no caso conhecido do efeito Unruh-Davies: um detector uniformemente acelerado interagindo com o campo no vácuo de Minkowski vai absorver partículas da mesma maneira que se ele estivesse inercial e interagindo com um banho térmico, com uma temperatura que se pode relacionar com a aceleração própria sofrida pelo detector no caso anterior.

4.2 Relações com o Experimento do Balde de Newton e com o Princípio de Mach

Nesta última seção usaremos os resultados obtidos na seção anterior acerca da definição do vácuo girante (vácuo de Trocherries-Takeno) e traçaremos uma discussão [80] que tem paralelo com questões antigas que remontam ao tempo de Mach e até de Newton para as quais até hoje não foram encontradas respostas satisfatórias.

Usaremos o fato de que é possível definir, para um campo quantizado, um estado de vácuo diferente do vácuo de Minkowski adaptado a um observador girante, chamado

de vácuo girante ou vácuo de Trocherries-Takeno [63, 65], para estudarmos um detector interagindo com o campo escalar quantizado. Estamos interessados nas seguintes situações: o detector numa trajetória circular uniforme interagindo com o campo no vácuo de Miukowski e o detector inercial interagindo com o campo preparado no vácuo de Trocherries-Takeno. O estudo da interação do detector com o campo nestas duas situações distintas nos permite levantar questões análogas àquelas que Mach discutiu no experimento do balde de Newton. Tomaremos este sistema quantizado como um análogo do experimento do balde de Newton e traçaremos uma discussão paralela à de Mach neste novo arranjo. Trabalharemos num espaço-tempo plano e, portanto, estamos considerando um análogo do Princípio de Mach na ausência de matéria. Vamos também trabalhar num nível quântico, pois estamos considerando um campo quantizado. Estes pontos serão esclarecidos no decorrer do texto. Trabalhos importantes acerca do problema clássico do disco girante estão listados em [66, 81], e acerca da definição de um estado de vácuo adaptado a um observador girante, ver [63, 65, 67, 71, 72, 73].

Começemos com uma breve exposição do experimento do balde de Newton, realizado por ele com o intuito de demonstrar os efeitos da rotação com respeito ao Espaço Absoluto; tal conceito era considerado por ele como um dos princípios de sua Mecânica. Encha um balde com água e observe como a forma da superfície da água é aproximadamente plana. Então ponha-o a girar ao redor de seu eixo de simetria: as paredes do balde vão, gradativamente, comunicando seu movimento de rotação à água, até que se atinge uma situação de equilíbrio: tanto o balde como a água estão agora girando juntos. Observe que nesta situação a forma da superfície da água é um parabolóide de rotação. Newton considerava que a mudança na forma da superfície da água quando o balde está girando acontece em decorrência do fato de que a água não está em repouso em relação ao Espaço Absoluto, mas encontra-se agora em rotação. Consegue-se distinguir desta forma se o balde está girando ou não: se a água está plana, não há rotação; mas se a água tem forma parabólica, então o balde está girando. Neste sentido, a rotação é um conceito absoluto. Por outro lado, Mach afirma que a inércia não é relativa ao Espaço Absoluto, um conceito dispensável segundo ele, mas sim em relação à toda a massa do universo, o que implica que pode-se igualmente manter o balde fixo e fazer girar todo o resto do universo ao redor do eixo do balde que se obterá o mesmo resultado: água com a superfície parabólica [82].

Para Mach o que importa é o movimento relativo entre as massas. Repare que, segundo Mach, na situação em que o balde e as outras massas do universo estiverem girando juntas, de forma que não haja rotação relativa entre eles, a forma da superfície da água volta a ser plana, enquanto que para Newton, não importa se há ou não movimento relativo entre as massas da água e do resto do universo, pois se ambos estiverem, mesmo que juntos, em rotação com respeito ao Espaço Absoluto, a forma da superfície da água será parabólica.

A possibilidade de se definir para um campo quantizado um estado de vácuo girante nos permite discutir perguntas análogas às de Mach. Consideraremos a interação entre um detector de Unruh-DeWitt com um campo de Klein-Gordon real sem massa, sendo esta interação responsável pelas transições entre os estados internos do detector. Utilizaremos dois resultados básicos para a discussão futura: primeiro, como já salientamos, a possibilidade de se definir um estado de vácuo girante diferente do vácuo de Minkowski, e, segundo, que a taxa de excitação de um detector se movendo em uma linha de universo genérica é dada pela transformada de Fourier da função de dois pontos de Wightman de frequência positiva. A idéia é então comparar-se as duas situações seguintes, sempre admitindo que inicialmente o detector se encontra no seu estado fundamental: o detector girante interagindo com o campo preparado no vácuo de Minkowski, e o detector inercial interagindo com o campo no vácuo de Trocherries-Takeno. Na analogia que estamos considerando entre este sistema quantizado e o experimento do balde de Newton, o detector fará o papel do balde com água, de forma que seu estado fundamental corresponderá à forma plana da água e seu estado excitado à forma parabólica da mesma. Isso porque o efeito da rotação, que se manifestava como a forma parabólica da água, se fará sentir no sistema quantizado como a excitação do detector. Por outro lado, o papel que desempenhavam as outras massas do universo no experimento do balde, segundo Mach, será desempenhado agora pelo estado de vácuo que podemos escolher para o campo, da seguinte maneira: o vácuo de Minkowski corresponde à situação em que as outras massas do universo estão fixas, e o vácuo de Trocherries-Takeno pode ser pensado como o análogo de se colocar todo o universo para girar. Estaremos desta maneira investigando a rotação relativa entre o campo e o detector, ao invés da rotação relativa entre massas, como faz Mach. Calculamos então a taxa de excitação do detector, ou seja, a probabilidade por unidade de tempo próprio do detector se excitar devido à interação com o campo, nestas

duas situações . O fato de o detector se excitar nos dois casos claramente significa que, também no nível quântico, um observador pode distinguir se há ou não rotação relativa entre o campo e o detector, mas nosso concernimento aqui é se as taxas de excitação nos dois casos são iguais ou não. Pode-se ver daqui que a discussão acima encontra paralelo claro com as questões de Mach a respeito do experimento do balde de Newton, com a ressalva que no presente caso estamos trabalhando num nível quântico e num espaço-tempo plano, ou seja, sem matéria.

De passagem, devemos notar que existe uma clara contradição entre o Princípio de Mach levando em conta as transformações de Galileu entre os referenciais inercial e girante e as leis da Relatividade Especial. De fato, se o Princípio for válido, no caso do movimento de rotação da Terra tanto faz se é a Terra quem gira em relação ao resto do universo, ou se as outras massas do universo é que giram ao redor da Terra imóvel. Mas se levarmos em conta as transformações de Galileu entre os referenciais, que predizem que a velocidade linear de uma massa que esteja à distância r do eixo de rotação se dá por $v = \Omega r$, neste segundo caso esta lei de velocidade prevê que as estrelas mais distantes estão animadas de velocidades maiores que a da luz, o que vai contra a Relatividade Especial. Entretanto sabemos que a origem deste problema é que as transformações de Galileu levam em conta que corpos rígidos existam realmente, e não que sejam apenas uma aproximação.

4.2.1 A Questão Mach vs Newton e as relações com o Vácuo girante

O estudo do movimento, iniciado por Galileu, Descartes e Giordano Bruno, culminou com a proposta da Mecânica de Newton. Suas três leis de movimento estão intimamente ligadas à existência de uma classe especial de referenciais, os chamados referenciais inerciais. Mas cabe de início a seguinte pergunta: qual propriedade determina, dentre todos os referenciais possíveis, aqueles que são inerciais? Dizer que um referencial inercial é aquele onde um corpo sobre o qual não age nenhuma força externa segue um movimento retilíneo uniforme é um argumento que pode ser revertido, pois precisa da definição tanto de força externa (que pode ser entendida como a ação externa que tira o corpo deste estado uniforme de movimento visto num referencial inercial) quanto do que é um movimento retilíneo uniforme (que pode ser entendido como o estado de movimento que o corpo

vai seguir visto de um referencial inercial se não agirem forças externas). Vê-se que as definições dos conceitos de referencial inercial, força externa e movimento uniforme recorrem umas às outras e é fácil ver que não há saída sem apelar para um conceito externo. É exatamente a isto que recorre Newton quando ele postulou a existência do *Espaço Absoluto*. Segundo suas palavras:

“Espaço Absoluto sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre imutável e imóvel. Espaço relativo é alguma dimensão ou medida móvel do Espaço Absoluto, a qual nossos sentidos determinam por sua posição com relação a outros corpos e é comumente tomado como o Espaço Absoluto.”

O conjunto de todos os referenciais inerciais seria composto desta maneira pelo próprio Espaço Absoluto e mais todos aqueles que estivessem num estado de movimento uniforme com respeito a este. Newton não encontrou nenhuma maneira de estabelecer qual dos referenciais inerciais corresponderia ao Espaço Absoluto e postulou que ele deveria coincidir com o centro de massa do Sistema Solar, mas fica óbvio que qualquer outro referencial inercial se prestaria ao mesmo papel.

Uma consequência natural da existência do Espaço Absoluto é que as forças inerciais, do tipo das forças centrífugas, devem aparecer quando o referencial próprio de um corpo não estiver em movimento uniforme relativamente ao Espaço Absoluto. Por exemplo, as leis de movimento dos corpos no referencial de um observador situado na superfície terrestre têm que conter termos de força centrífuga e de força de Coriolis. Essas forças inerciais, que recebem também de Newton o nome de forças fictícias, só precisam ser levadas em conta pelo observador na Terra, pois para um observador inercial situado fora da Terra as forças fictícias não aparecem. Para Newton, portanto, as forças fictícias aparecem exclusivamente porque o observador terrestre não é inercial, ou seja, não está num estado de movimento uniforme com respeito ao Espaço Absoluto.

Mach, ao contrário de Newton, não podia aceitar a idéia da existência do Espaço Absoluto; ele achava que a forma como um corpo vai responder a determinada força, em outras palavras, sua inércia, era determinada por todos os outros corpos existentes. Apareceria então, segundo Mach, um único referencial onde todas as massas do universo estariam em repouso, ou seja, um referencial onde as estrelas pareceriam fixas. Os outros referenciais inerciais seriam aqueles que se movessem uniformemente em relação a este.

Conseqüentemente Mach acreditava que as forças inerciais devem aparecer sempre que um corpo for acelerado com respeito a todas as massas do universo. Para ele:

“...apenas movimentos relativos existem... Quando um corpo gira em relação às estrelas fixas, forças centrífugas serão observadas, mas quando este gira relativamente a um outro corpo e não com relação às estrelas fixas, nenhuma força centrífuga é sentida.” [83]

Como observado por Weinberg [84], Mach substituiu o que Newton descrevia como aceleração absoluta (ou seja, em relação ao Espaço Absoluto) por uma aceleração relativa a todas as outras massas do universo. Assim, as forças centrífugas, que para Newton são causadas pela rotação com respeito ao Espaço Absoluto, são consideradas por Mach como forças gravitacionais verdadeiras pois que estas aparecem do movimento relativo entre todas as massas do universo. As propriedades inerciais de um corpo são então determinadas pela massa de todos os outros corpos, tanto os distantes como os próximos, o que resulta em uma possível anisotropia ou relatividade da inércia (ver [83]). Em suma, todos os corpos que não estiverem submetidos à ação de forças se encontram animados de velocidade retilínea e uniforme, ou em repouso, em relação ao centro de gravidade das massas que preenchem o universo, e as acelerações a que são submetidos quando agidos por alguma força, devem ser referidas a este centro de massas universal.

A resposta obtida por Einstein a estas questões, apesar de ele ter se guiado nas idéias de Mach, não aponta nem na direção de Newton nem na de Mach. O seu Princípio de Equivalência aponta numa direção intermediária. Se tivermos o tensor energia-momento renormalizado de todos os campos não gravitacionais, então é possível encontrarmos o tensor métrico via as equações de Einstein. Com os potenciais gravitacionais podemos achar as conexões e resolver a equação da geodésica, encontrando assim um referencial inercial ou referencial em queda livre. Neste referencial a forma como são escritas as leis da Física são as mesmas da Relatividade Especial.

O leitor pode se questionar se o Princípio de Mach é válido na Relatividade Geral. Existe um grande número de tentativas de incorporar-se o Princípio na Relatividade Geral, como por exemplo em [85], em que o autor sustenta que o espaço-tempo de Minkowski é Machiano. Por um lado, é sabido que a Relatividade Geral admite soluções não Machianas, tais como, por exemplo, a solução de Gödel [86], mas esta tem o problema fundamental de apresentar curvas do tipo tempo fechadas. O comportamento não Machiano deste modelo

reside em que há rotação da matéria mesmo relativa ao referencial inercial local. Um avanço no modelo cosmológico de Gödel é o modelo de Ozsváth-Schücking [87], que admite constante cosmológica não nula. Este modelo não apresenta o problema das curvas do tipo tempo fechadas pois admite uma *foliação* por uma seqüência de hipersuperfícies do tipo espaço, porém apresenta o mesmo comportamento não Machiano. Ademais, estes modelos são geralmente desconsiderados por estarem em desacordo com a expansão observada do universo, pois que eles são estáticos. Concluimos que o Princípio de Mach não é satisfeito nestas soluções das equações de Einstein.

Ainda hoje é uma questão controversa dar um significado preciso ao Princípio de Mach e se a Relatividade Geral inclui o Princípio de Mach ou se precisa ser modificada para ser consistente com ele. Mesmo assim há um consenso que o *arrasto de referenciais inerciais* por massas girantes, predita pela Relatividade Geral, é um efeito Machiano. O primeiro autor a fazer os cálculos de tais efeitos, sugeridos por Einstein numa carta a Mach de 1913, foi Thirring [88]. Usando-se do limite de campos fracos das equações de Einstein, este autor encontrou que uma casca esférica girando lentamente pode arrastar os referenciais inerciais dentro dela. Ainda estudando cascas esféricas girantes, Brill e Cohen e também Orwig encontram esses efeitos de arrasto [89]. O Pêndulo de Foucault é um instrumento útil para entender-se o arrasto de referenciais inerciais de que temos falado [82]. Os únicos pontos da Terra que não têm movimento de rotação com relação às estrelas fixas são os pólos. Portanto é sabido que exatamente sobre os pólos a precessão, relativa a um observador situado próximo do pólo e fixo na Terra, do plano de oscilação de um pêndulo, alcança seu valor máximo: para este observador, o plano de oscilação dá uma volta a cada vinte e quatro horas. De acordo com Newton, diria-se que o plano de oscilação do pêndulo está fixo em relação ao Espaço Absoluto e que é a Terra que está girando abaixo deste e por isso o observador fixo na Terra vê o plano de oscilação do pêndulo precessando. Mas seguidores das idéias de Mach sustentariam que o movimento do plano de oscilação do pêndulo é completamente determinado por toda a massa do universo, incluindo, é claro, a Terra. Pode-se agora supor um *gedanken experiment*: suponha que exista apenas a Terra no universo. Neste caso a única massa determinante das propriedades inerciais do pêndulo seria a da própria Terra. Assim, o plano de oscilação do pêndulo deveria estar em repouso em relação à Terra, esteja ela girando ou não (aliás esta é uma questão que se

põe no contexto das idéias de Mach: pode uma massa que esteja sozinha no universo ter movimento, de rotação ou qualquer que seja?). Ao contrário, para Newton nada mudaria na situação em que a Terra está sozinha no universo: o pêndulo continuaria a estar em repouso com respeito ao Espaço Absoluto e a Terra estaria girando abaixo deste. Ao introduzir-se de volta, gradualmente, toda a massa restante no universo, estas cada vez mais influiriam nas propriedades inerciais do pêndulo, superando pouco a pouco o “poder de influência” da Terra. Mas repare que este “poder de influência” da Terra jamais desaparece por completo. Concluimos assim que a Terra deve estar arrastando consigo os referenciais inerciais a sua volta, segundo Mach, por menor que seja esta influência em comparação com a influência de todas as outras massas do universo. Está-se tentando medir estes efeitos atualmente, mas ainda sem resultados definitivos [83].

Do ponto de vista experimental existem algumas tentativas de se elucidar estas questões. Será que a presença de grandes massas próximas afeta as leis de movimento? Porque se Mach estiver certo então uma grande massa poderia produzir pequenas mudanças nas forças inerciais observadas a sua volta, enquanto que se Newton estiver certo, tais efeitos nunca ocorreriam. Cocconi e Salpeter [90] fazem notar que existem grandes massas ao nosso redor e que é possível realizar-se experimentos para testar se estas massas afetam a inércia de pequenos corpos na Terra. Hughes, Robinson e Beltran-Lopez [91] realizam uma extensa série de medidas com o propósito de testar o Princípio de Mach. De acordo com Mach efeitos inerciais são devidos à distribuição de massas no universo: desta maneira deveria ser detectável uma pequena anisotropia nestes efeitos inerciais devida à distribuição das massas em nossa galáxia. O núcleo de Lítio 7, Li^7 , no estado fundamental, tem um spin de $3/2$, de forma que na presença de um campo magnético os quatro níveis de energia se espaçam igualmente e as linhas espectrais do núcleo de Lítio teriam assim um único pico pronunciado *se as leis da Física Nuclear forem invariantes sob rotações*. Mas se a inércia apresentar alguma anisotropia, como sugerido pelo Princípio de Mach, então apareceriam espaçamentos desiguais entre os níveis de energia do núcleo de lítio e as linhas espectrais apresentariam três picos diferentes. Os resultados dos experimentos foram em direção oposta ao que diz o Princípio de Mach, mas mesmo assim alguns autores sustentam que isso não contradiz o princípio, porque as forças nucleares exibiriam também esta anisotropia e esperaria-se encontrar mesmo estes resultados “nulos”. Em

outras palavras, ambos o sistema medido e o aparato experimental seriam afetados da mesma forma pelo Princípio de Mach. A seguir vamos discutir algumas questões similares a estas, mas num espaço-tempo plano, utilizando-nos de resultados recentes acerca da definição de um vácuo girante. Trataremos de um sistema quântico de dois níveis em interação com um campo escalar quantizado num espaço-tempo plano, ou seja, na ausência de matéria.

Pode-se perguntar qual o significado do Princípio de Mach na ausência de matéria, ou até mesmo como formular o princípio em tal situação. Devemos ter em mente que o Princípio de Mach, da maneira como foi formulado por ele e por outros, não leva em conta a possibilidade de que o espaço pode estar preenchido por campos, e sua própria formulação num contexto mais moderno não está clara ainda. No contexto da Teoria Quântica de Campos são os campos que são considerados como as entidades fundamentais, de tal forma que eles constituem o conteúdo físico do espaço. Considera-se comumente que os campos quânticos das partículas elementares ocupam todo o espaço-tempo e, de fato, a matéria pode ser considerada como uma pequena perturbação dos campos. Como, então, deve ser formulado o Princípio de Mach admitindo que os campos preenchem o espaço? Quando pensamos na quantização de campos, imediatamente vem à mente o espaço de Fock dos possíveis estados que o campo pode ocupar; como na Física Clássica diz-se, segundo Mach, que o que determina as propriedades inerciais dos corpos é toda a distribuição de matéria no universo, podemos nos perguntar: em que sentido a escolha de um estado de um campo quântico pode determinar um estado de movimento? Como um caso particular, até que ponto a escolha de um *vácuo* quântico determina quais serão os referenciais inerciais? Não é nossa intenção ir nesta direção, mas apenas apresentar um sistema quantizado em que se pode levantar perguntas relacionadas com as de Mach a respeito do experimento do balde de Newton.

A seguir, vamos nos utilizar de alguns resultados obtidos na última seção e explorar a analogia entre o sistema campo escalar/detector de Unruh-DeWitt estudado lá e o experimento do balde de Newton. Não apresentamos aqui nenhum resultado novo, mas por comodidade do leitor repetiremos algumas expressões obtidas no último capítulo e vamos manter a mesma notação.

O fato de que é possível definir um vácuo quântico girante diferente do vácuo de

Minkowski foi provado em [63, 65] e também no último capítulo. Nestes trabalhos um campo escalar é quantizado nos referenciais inercial e girante, cujas coordenadas são relacionadas pelas transformações de coordenadas de Trocherries-Takeno. Em [65] foi usado o limite de baixas velocidades mas em [63] uma solução geral e exata da equação de Klein-Gordon no referencial girante foi encontrada e a construção do espaço de Fock dos estados do campo para o observador girante foi implementada. Utilizando-se dos modos soluções da equação de Klein-Gordon nos referenciais inercial e girante, pode-se comparar as duas quantizações por meio das transformações de Bogolubov. O cálculo dos coeficientes de Bogolubov β_{ij} entre os modos inerciais e girantes dá um resultado não nulo, o que implica que, para um observador girante, o vácuo de Minkowski é visto como um estado de muitas partículas de Trocherries-Takeno. Este é o resultado principal da quantização canônica do campo escalar efetuada no referencial girante levando em conta as transformações de Trocherries-Takeno.

Por outro lado, estudamos também no último capítulo a interação entre o campo escalar e o detector de Unruh-DeWitt, que é um modelo de detector sensível às flutuações do vácuo. Estudamos lá a resposta do detector nos dois casos de interesse no presente contexto da comparação com a experiência do balde de Newton: primeiro, o detector girante interagindo com o campo no vácuo de Minkowski, à qual chamamos $R_M^{(r)}$; segundo, o detector inercial interagindo com o campo no vácuo de Trocherries-Takeno, à cuja taxa de excitação chamamos de $\mathcal{R}_T^{(i)} = R_T^{(i)} - R_T^{(r)}$. Explicamos no último capítulo o porquê da normalização (subtração) da taxa de excitação nesta situação. Uma pergunta que surge de toda a discussão acima é: serão os valores destas duas taxas iguais? Tendo em mente a analogia com o experimento do balde de Newton, esta pergunta é análoga a: “Será a forma da água no balde a mesma, tanto faz se pusermos o balde ou todo o resto do universo para girar, mantendo o outro fixo?”

Passemos imediatamente a considerar os resultados obtidos no último capítulo acerca da interação entre o campo escalar e o detector de Unruh-DeWitt. A taxa de excitação deste modelo de detector é dada por:

$$R(E) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta t e^{-iE\Delta t} G^+(x, x'), \quad (4.58)$$

em que $\Delta t = t - t'$, $E > 0$ é a diferença entre as energias dos estados excitado e funda-

mental do detector e $G^+(x, x')$ é a função de Wightman de frequência positiva calculada ao longo da trajetória do detector. A função de Wightman de frequência positiva é dada por:

$$G^+(x, x') = \langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle, \quad (4.59)$$

onde $|0\rangle$ é um estado de vácuo do campo.

Na primeira situação de interesse, onde o detector está num movimento circular uniforme e o campo se encontra no vácuo de Minkowski, encontramos a seguinte taxa de excitação:

$$\begin{aligned} R_M^{(r)}(E, R_0) &= 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_1^2 J_m^2(qR_0) \\ &\times \delta\left(E - \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0\right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

No contexto da experiência do balde de Newton a situação acima seria análoga a colocar o balde para girar com relação às *estrelas fixas*; repare que o fato de que $R_M^{(r)}(E, R_0) \neq 0$ traduziria-se lá como *água com superfície com forma parabólica*.

A segunda situação de interesse toma em conta que é possível preparar o campo no estado de vácuo de Trocherries-Takeno e que o detector segue uma linha de universo inercial. Já levando em consideração a normalização explicada no último capítulo para a taxa de excitação no presente caso, ficamos com a taxa de excitação normalizada:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T^{(i)}(E, R_0) &\equiv R_T^{(i)} - R_T^{(r)} \\ &= 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dk N_2^2 J_m^2(qR_0) \times \\ &\left[\delta\left(E - \left(\omega \Omega R_0 - \frac{m}{R_0}\right) \sinh(2\Omega R_0) - (m\Omega - \omega) \cosh(2\Omega R_0)\right) \right. \\ &\left. - \delta\left(E - \frac{m}{R_0} \sinh \Omega R_0 + \omega \cosh \Omega R_0\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Voltando à analogia com o experimento do balde de Newton e com as perguntas de Mach a tal repeito, esta última situação é análoga a “colocar o resto do universo para girar” enquanto se mantém o balde fixo. O fato de que $\mathcal{R}_T^{(i)}(E, R_0) \neq 0$ traduz-se novamente como *água com superfície com forma parabólica*, mas repare que o fato de que $\mathcal{R}_T^{(i)}(E, R_0) \neq R_M^{(r)}(E, R_0)$ significa que num nível quântico estas duas situações são

diferentes, apesar de não podermos concluir nada no nível clássico, sendo possível que a conjectura de Mach a respeito do experimento do balde seja verdadeira.

Como as equações (4.60) e (4.61) não são iguais concluimos que colocar o detector numa trajetória circular com o campo no vácuo de Minkowski não é uma situação equivalente a mantê-lo inercial e interagindo com o campo no vácuo de Trocherries-Takeno. Mostramos desta forma que, levando em conta as transformações de Trocherries-Takeno entre um referencial inercial e outro girante, um análogo quântico do Princípio de Mach não é válido num espaço-tempo plano.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese abordamos diferentes aspectos de Teoria Quântica de Campos todos relacionados com situações não usuais, a saber, perda de invariância translacional espacial, perda de invariância translacional temporal e finalmente quantização em referenciais não inerciais. No primeiro capítulo investigamos aspectos da interação de campos quantizados com diferentes tipos de estruturas clássicas. A modificação das flutuações do vácuo causada por estas estruturas leva ao aparecimento de uma energia conhecida na literatura como energia de Casimir. No primeiro trabalho estudamos quais modificações se observam quando trocamos as tradicionais condições de Dirichlet para o campo escalar por fronteiras que impõem outros tipos de restrições ao campo. Os tipos de fronteiras aqui estudados são uma aproximação mais realista de materiais com os quais o campo interage no que toca à penetrabilidade dos modos de mais alta frequência, pois espera-se que estes sejam atenuados só depois de terem penetrado dentro do material. No segundo trabalho voltamos ao caso de fronteiras duras. As condições de contorno que usamos de fluxo nulo para o campo fermiônico foram ditadas pelo modelo do MIT para hádrons, o modelo de *bag*. Neste modelo a premissa é que o campo esteja confinado a uma sub-região do espaço, tendo valor nulo fora desta. Nosso concernimento aqui foi com o método de regularização empregado, e encontramos que o valor da energia de Casimir regularizada através da continuação analítica é finita para qualquer número de dimensões do espaço-tempo. Isso significa que o procedimento de regularização já funciona como uma renormalização.

Uma continuação natural do primeiro trabalho e que estaria ainda mais de acordo com a atenuação dos modos de alta frequência é considerar a interação com um potencial que seja transparente para estes mas que ao mesmo tempo confine os modos de baixa

freqüência. De fato, um condutor para o campo eletromagnético só exhibe a propriedade de condutividade para freqüências até sua freqüência de plasma, dada em função da distância interatômica do material de que é feito. Para comprimentos de onda menores que o determinado pela freqüência de plasma, espera-se que os modos do campo não sintam a presença do material. Isto pode ser alcançado considerando-se a interação com um potencial que apresente um conjunto de estados ligados para auto-freqüências menores que um determinado valor, e que acima deste apresente um espectro contínuo.

No segundo capítulo abordamos um aspecto diferente da Teoria Quântica de Campos, a saber, a produção de partículas escalares devida a variações nas propriedades métricas do espaço-tempo entre dois limites: inicialmente ($t \rightarrow -\infty$) um campo escalar é quantizado no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica com momento angular, e na situação final ($t \rightarrow \infty$) o campo é quantizado no espaço-tempo gerado por uma corda cósmica com momento angular zero. Pelo fato de estarmos trabalhando na representação de Heisenberg, uma vez escolhido o estado do campo como o estado de vácuo no infinito passado, ele permanecerá neste estado durante toda a evolução que se segue, mas os operadores, especificamente o operador energia dado em termos do operador número de partículas, é que evoluem no tempo. No infinito futuro encontra-se uma quantização que não é equivalente à do infinito passado, o que foi demonstrado pelo cálculo dos coeficientes de Bogolubov. Isto implica que os operadores e todo o espaço de Hilbert dos estados no infinito futuro são diferentes daqueles no infinito passado. Conseqüentemente o operador número de partículas no infinito futuro dá um valor esperado diferente de zero quando calculado no estado de vácuo relativo ao infinito passado, ou seja, há produção de partículas e por conseguinte, de energia.

Uma outra continuação deste trabalho, além da apontada no final do capítulo, é formular a lei de conservação de energia, ou seja, mostrar se há um balanço de energia entre a energia total das partículas criadas e a energia associada à perda do momento angular pela corda. Isto pode ser alcançado comparando-se o valor esperado no vácuo do tensor energia-momento do campo massivo nos espaços-tempos da corda girante e da corda estática.

No último capítulo, comparamos a quantização canônica de um campo escalar sem massa efetuada por um observador inercial àquela implementada por um observador não

inercial girante. Ao invés de usarmos transformações não relativísticas para comparar medidas nos dois referenciais, utilizamos as transformações de Trocherries-Takeno. A quantização canônica no referencial girante é implementada seguindo-se os seguintes passos: (i) uma solução exata da equação de Klein-Gordon é encontrada; (ii) uma expansão de Fourier para o operador de campo utilizando este conjunto completo de modos é obtida; (iii) por último os coeficientes de Bogolubov entre os modos inerciais e girantes são calculados, mostrando que o observador girante define um estado de vácuo e, conseqüentemente todo o espaço de Hilbert, unitariamente não equivalente a aquele definido por observadores inerciais. Finalmente, introduzindo um detector de Unruh-DeWitt, analisamos a função resposta deste em diferentes situações, a saber, percorrendo linhas de universo inerciais ou girante, interagindo com o campo preparado no vácuo de Minkowski ou no vácuo de Trocherries-Takeno. O estudo dessas quatro situações nos permitiu formular um análogo quântico da experiência do balde de Newton. As relações com o princípio de Mach também foram discutidas. A continuação natural destes trabalhos seria um maior entendimento do vácuo girante, isto é, vácuo de Trocherries-Takeno. Cálculos do valor esperado no vácuo de Trocherries-Takeno do tensor energia-momento renormalizado associado a um campo escalar apontam nessa direção.

Referências

- [1] T.H. Boyer, Sci.Am. **253**, 70 (1985).
- [2] H.G. Casimir, Proc.Kon.N.Akad.Wet. **51**, 793 (1948); Physica **19**, 846 (1953).
- [3] M.Y. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
- [4] S.K. Lamoreaux, Phys.Rev.Lett. **78**, 5 (1997).
- [5] G. Plunien, B. Müller e W. Greiner, Phys.Rep. **134**, 87 (1986); V.M. Mostepanenko e N.N. Trunov, Sov.Phys.Usp. **31**, 965 (1988).
- [6] A.A. Actor e I. Bender, Phys.Rev. **D 52**, 3581 (1995).
- [7] L.C. de Albuquerque, Phys.Rev. **D 55**, 7754 (1997).
- [8] H. Li e M. Kardar, Phys.Rev.Lett. **67**, 3275 (1991); Phys.Rev. **A 46**, 6490 (1992).
- [9] R. Golestanian e M. Kardar, *quant-ph/9701005*; *quant-ph/9802017*;
- [10] L.H. Ford e N.F. Svaiter, Phys.Rev. **D 58**, 065007-1 (1998).
- [11] D. Deutsch e P. Candelas, Phys.Rev. **D 20**, 3063 (1979).
- [12] L.H. Brown e G.J. Maclay, Phys.Rev. **184**, 1272 (1969); C.M. Bender e P. Hays, Phys.Rev. **D 14**, 2622, (1976); K.A. Milton, Phys.Rev. **D 22**, 1441 (1980); K.A. Milton, Phys.Rev. **D 22**, 1444 (1980).
- [13] K.A. Milton, L.L. DeRaad e J. Schwinger, Ann.Phys. **115**, 388 (1978).
- [14] D. Shalloway, Phys.Rev. **D 11**, 3545 (1975); C. Rebbi, Phys.Rev. **D 12**, 2407 (1975).
- [15] M. Creutz, Phys.Rev. **D 10**, 1749 (1974); Phys.Rev. **D 13**, 3432 (1976).
- [16] F. Caruso, R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, Int.J.Mod.Phys. **A 14**, 2077 (1999).
- [17] C. Peterson, T.H. Hansson e K. Johnson, Phys.Rev. **D 26**, 415 (1982).
- [18] N.F. Svaiter e B.F. Svaiter, J.Phys. **A 25**, 979 (1992); J.R. Ruggiero, A.H. Zimmerman e A. Villani, Rev.Bras.Fís. **7**, 663 (1977).
- [19] N.F. Svaiter e B.F. Svaiter, J.Math.Phys. **32**, 175 (1991).

- [20] B.F. Svaiter e N.F. Svaiter, Phys.Rev. **D 47**, 4581 (1993); J.Math.Phys. **35**, 1840 (1994).
- [21] W. Lukosz, Physica **56**, 109 (1971); S.D. Unwin, Phys.Rev. **D 26**, 944 (1982).
- [22] J. Ambjorn e S. Wolfram, Ann.Phys. **147**, 1 (1983).
- [23] F. Caruso, N.P. Neto, B.F. Svaiter e N.F. Svaiter, Phys.Rev. **D 43**, 1300 (1991).
- [24] P. Ramond, *Field Theory, a Modern Primer*, Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts (1981).
- [25] D. ter Haar, *Selected Problems in Quantum Mechanics*, London, Infosearch Ltd., 1964.
- [26] M. Abramowitz e I. Stegun (eds.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover, 1965.
- [27] B.P. Dolan e C. Nash, Comm.Math.Phys. **148**, 139 (1992).
- [28] S.K. Blau, M. Visser e A. Wipf, Nucl.Phys. **B 310**, 163, (1988).
- [29] L.H. Ford, Phys. Rev. **D 21**, 933 (1980); N.D. Birrell e L.H. Ford, Phys.Rev. **D 22**, 330 (1980).
- [30] A.A. Actor, J.Phys. **A 20**, 927 (1987).
- [31] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics I*, Springer-Verlag, Berlin (1971).
- [32] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn e V.F. Weisskopf, Phys.Rev. **D 9** 3471 (1974); A. Chodos e C.B. Thorn, Phys.Lett. **B 53**, 359 (1974).
- [33] K.A. Milton, Phys.Rev. **D 22**, 1441 (1980); Phys.Rev. **D22**, 1444 (1980); Ann.Phys. **150**, 432 (1983).
- [34] C.M. Bender e P. Hays, Phys. Rev. **D 14**, 2622 (1976).
- [35] A. Romeo, Phys.Rev. **D 52**, 7308 (1995).
- [36] M. Bordag, E. Elizalde, K. Kirsten e S. Leseduarte, Phys.Rev. **D 56**, 4896 (1997).
- [37] A. Romeo, Phys.Rev. **D 53**, 3392 (1996).
- [38] R. Balian e C. Bloch, Ann.Phys. **60**, 401 (1970); D. Deutsch e P. Candelas, Phys.Rev. **D 20**, 3063 (1979).
- [39] R.B. Rodrigues, R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, Mod.Phys.Lett. **A 14**, 2353 (1999).
- [40] N.F. Svaiter e B.F. Svaiter, J.Math.Phys. **32**, 175 (1991); B.F. Svaiter e N.F. Svaiter, Phys.Rev. **D 47**, 4581 (1993).
- [41] G.R. Allcock, Acta Phys.Polon. **B 11**, 875 (1980).

- [42] P.W. Milonni, *The Quantum Vacuum: an Introduction to Quantum Electrodynamics*, Academic Press, San Diego, California, 1994.
- [43] K. Johnson, *Acta Phys.Polon.* **B 6**, 865 (1975).
- [44] J.I. Kapusta, *Finite-temperature Field Theory*, Cambridge U. Press, Cambridge (UK), 1989.
- [45] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Orlando, Florida, 1980.
- [46] A. Actor, *Nucl.Phys.* **B 265**, 689 (1986).
- [47] T. W. Kibble, *J.Phys.* **A 9**, 1387 (1976); A. D. Linde, *Rep.Prog.Phys.* **42**, 390 (1979).
- [48] A. Vilenkin, *Phys.Rep.* **121**, 263 (1985).
- [49] L. Parker, *Phys.Rev.Lett.* **59**, 1369 (1987); G. Mendell e W.A. Hiscock, *Phys.Rev.* **D 40**, 282 (1989).
- [50] A. Vilenkin, *Phys.Rev.* **D 23**, 852 (1981).
- [51] D. Harari e V. D. Skarzhinsky, *Phys.Lett.* **B 240**, 322 (1990); J. Audretsch e A. Economou, *Phys.Rev.* **D 44**, 980 (1991).
- [52] P.C.W. Davies e V. Sahni, *Class.Quant.Grav.* **5**, 1 (1988); B.F. Svaiter e N.F. Svaiter, *Class.Quant.Grav.* **11**, 347 (1994); L. Iliadakis, U. Jasper e J. Audretsch, *Phys.Rev.* **D 51**, 2591 (1995).
- [53] P.O. Mazur, *Phys.Rev.Lett.* **57**, 929 (1986); D. Harari e A.P. Polychronakos, *Phys.Rev.* **D 38**, 3320 (1988); B. Jensen e H.H. Soleng, *Phys.Rev.* **D 45**, 3528 (1992).
- [54] V.A. De Lorenci, R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, *N.Cim.* **113 B** 1331 (1998).
- [55] V.A. De Lorenci, R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, *Class.Quant.Grav.* **16** 3047 (1999).
- [56] S. Deser e R. Jackiw, *Comments Nucl.Part.Phys.* **20**, 337 (1992).
- [57] W.A. Hiscock, *Phys.Rev.* **D 31**, 3288 (1985).
- [58] N.D. Birrell e P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge U. Press, Cambridge (1982).
- [59] C. Bernard e A. Duncan, *Ann.Phys.* **107**, 201 (1977).
- [60] L. Parker, *Phys.Rev.* **183**, 1057 (1969).
- [61] D.G. Boulware, *Phys.Rev.* **D 46**, 4421 (1992).
- [62] S. Deser, R. Jackiw e G. t'Hooft, *Ann.Phys.* **152**, 220 (1984); *ibid* **153**, 405 (1984); J. R. Gott III e M. Alpert, *Gen.Rel.Grav.* **16**, 243 (1984); S. Giddings, J. Abhott e K. Kuchar, *ibid* **16**, 751 (1984).

- [63] V.A. De Lorenci, R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, *Class.Quant.Grav.* **17**, 4241 (2000).
- [64] M. Strauss, *Int.J.Theor.Phys.* **11**, 107 (1974); O. Gron, *Am.J.Phys.* **43**, 869 (1975); idem, *Int.J.Theor.Phys.* **16**, 603 (1977); E.H. Hill, *Phys.Rev.* **62**, 280 (1946); idem, *ibid* **71**, 318 (1947).
- [65] V.A. De Lorenci e N.F. Svaiter, *Int.J.Mod.Phys. A* **14**, 717 (1999); *Found.Phys.* **29**, 1233 (1999).
- [66] M.G. Trocherries, *Phyl.Mag.* **40**, 1143 (1949); H. Takeno, *Prog.Theor.Phys.* **7**, 367 (1952); L. Herrera, *Nuovo Cim.* **115B**, 307 (2000).
- [67] J.R. Letaw e J.D. Pfautsch, *Phys.Rev. D* **22**, 1345 (1980); idem, *Phys.Rev. D* **24**, 1491 (1981); J.R. Letaw, *Phys.Rev. D* **23**, 1709 (1981); G. Denardo e R. Percacci, *N. Cimento* **48 B**, 81 (1978).
- [68] W.G. Unruh, *Phys.Rev. D* **14**, 870 (1976); P.C.W. Davies, *J.Phys. A* **8**, 609 (1975).
- [69] B.S. De Witt, in *General Relativity*, eds. S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge U. Press, Cambridge, 1979.
- [70] B.F. Svaiter e N.F. Svaiter, *Phys.Rev. D* **46**, 5267 (1992); **47**, 4802(E) (1993).
- [71] T. Padmanabhan e T.P. Singh, *Class.Quant.Grav.* **4**, 1397 (1987).
- [72] P.C.W. Davies, T. Dray e C.A. Manogue, *Phys.Rev. D* **53**, 4382 (1996).
- [73] O. Levin, Y. Peleg e A. Peres, *J.Phys. A* **26**, 3001 (1993).
- [74] A. di Sessa, *J.Math.Phys.* **15**, 1892 (1974).
- [75] D.W. Sciama, P. Candelas e D. Deutsch, *Adv.Phys.* **30**, 327 (1981).
- [76] V.L. Ginzburg e V.P. Frolov, *Sov.Phys.Usp.* **30**, 1073 (1987); L.P. Grishchuk, Y.B. Zel'dovitch e L. V. Rozhanski, *Sov.Phys. JETP* **65**, 11 (1987).
- [77] L.H. Ford, N.F. Svaiter e M.L. Lyra, *Phys.Rev. A* **49**, 1378 (1994).
- [78] R.J. Glauber, *Phys.Rev.* **130**, 2529 (1963).
- [79] H.M. Nussenzweig, *Introduction to Quantum Optics*, Gordon and Breach, New York, 1973; R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford U. Press, New York, 1983.
- [80] R.D.M. De Paola e N.F. Svaiter, CBPF-NF-63/00; *gr-qc/0009058*, submetido para publicação .
- [81] C.W. Berenda, *Phys.Rev.* **15**, 280 (1942); N. Rosen, *Phys.Rev.* **71**, 54 (1947); T.E. Phipps, Jr, *Nuovo Cim.Lett.* **9**, 467 (1974).
- [82] W. Rindler, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [83] I. Ciufolini e J.A. Wheeler, *Gravitation and Inertia*, Princeton U. Press, Princeton, New Jersey, 1995.

- [84] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.
- [85] D.J. Raine, *Rep.Prog.Phys.* **44**, 73 (1981).
- [86] K. Gödel, *Rev.Mod.Phys.* **21**, 447 (1949).
- [87] I. Ozsváth e E. Schücking, *Nature* **193**, 1168 (1962).
- [88] H. Thirring, *Phys.Z.* **19**, 33 (1918); idem, *Phys.Z.* **22**, 29 (1921); J. Lense e H. Thirring, *Phys.Z.* **19**, 156 (1918); estes artigos foram traduzidos para o inglês e comentados por B. Mashhoon *et al*, *Gen.Rel.Gravit.* **16**, 711 (1984).
- [89] D.R. Brill e J.M. Cohen, *Phys.Rev.* **D 143**, 1011 (1966); L.P. Orwig, *Phys.Rev.* **D 18**, 1757 (1978).
- [90] G. Cocconi e E.E. Salpeter, *Phys.Rev.Lett.* **4**, 176 (1960).
- [91] H.G. Hughes, H.G. Robinson e V. Beltran-Lopez, *Phys.Rev.Lett.* **4**, 342 (1960). (1994).

“ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: O VÁCUO E ALGUMAS APLICAÇÕES”

Raphael Dias Martins De Paola

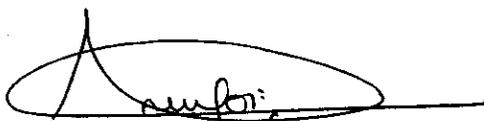
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



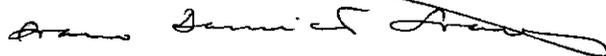
Nami Fux Svaiter – Presidente



Benar Fux Svaiter



Vítório Alberto De Lorenci



Ívano Damião Soares



Francesco Toppan

Rio de Janeiro, 29 de janeiro de 2001