

TESE DE
DOUTORADO

Aspectos algébricos e geométricos dos modelos de Toda

GUILLERMO SANTIAGO CUBA CASTILLO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF
RIO DE JANEIRO, SETEMBRO DE 2000

Dedicatória

a Pamela Cristina, aos meus pais, irmãos e amigos

Agradecimentos

Ao povo Brasileiro.

Ao CNPq, pela bolsa concedida.

A Roman Paunov, meu orientador.

Aos professores que contribuíram a minha formação acadêmica, tanto no CBPF como em outras instituições.

Aos meus amigos, e conhecidos que fizeram agradável a estadia no CBPF.

Resumo

Estudamos a relação entre o formalismo grupo-algébrico e a simetria de vestimento para as soluções solitônicas da teoria de campo de Toda $A_n^{(1)}$ em dimensão $1 + 1$. Sólitons nos modelos de Toda afim têm sido encontrados originalmente por Olive, Turok e Underwood. Monossólitons são criados por exponenciais de elementos que ad-diagonalizam a subálgebra principal de Heisenberg. Alternativamente Babelon e Bernard exploraram a simetria vestimento para reproduzir as expressões conhecidas para as funções tau fundamentais no modelo sine-Gordon. Nesta tese mostramos a equivalência entre estes dois métodos para construir sólitons nos modelos $A_n^{(1)}$ Toda.

Estudando a geometria Riemanniana *interna* das superfícies de curvatura escalar constante negativa, obtemos um mapa natural entre as equações de Liouville e sine-Gordon. Considerando imersões isométricas no plano de Lobachevski, obtemos uma expressão uniforme para a solução geral (localmente definida) de ambas as equações. Provamos que há uma transformação de Lie-Bäcklund que mapeia Liouville em sine-Gordon e vice-versa. Derivamos também uma auto-transformação de Bäcklund para a equação de Liouville.

Abstract

We study the relation between the group–algebraic approach and the dressing symmetry one to the soliton solutions of the $A_n^{(1)}$ Toda field theory in 1+1 dimensions. Originally solitons in the affine Toda models has been found by Olive, Turok and Underwood. Single solitons are created by exponentials of elements which ad–diagonalize the principal Heisenberg subalgebra. Alternatively Babelon and Bernard exploited the dressing symmetry to reproduce the known expressions for the fundamental tau functions in the sine–Gordon model. We show the equivalence between these two methods to construct solitons in the $A_n^{(1)}$ Toda models.

By studying the *internal* Riemannian geometry of the surfaces of constant negative scalar curvature, we obtain a natural map between the Liouville, and the sine–Gordon equations. Considering isometric immersions into the Lobachevskian plane, we obtain an uniform expression for the general (locally defined) solution of both the equations. We prove that there is a Lie–Bäcklund transformation interpolating between Liouville and sine–Gordon. We also derive an auto–Bäcklund Transformation for the Liouville equation.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Introdução	1
I Aspectos Algébricos	8
1 Sólitons no modelo $A_n^{(1)}$ Toda e as transformações de vestimento relacionadas	9
2 Representação através de operadores de vértice da solução monossolitônica	19
3 A função tau N-solitônica e os operadores de vértice	25

II Aspectos Geométricos	35
4 Superfícies pseudoesféricas em \mathbb{R}^3 , e origem geométrica das equações de Liouville e sine-Gordon	36
5 Soluções gerais das equações de Liouville e sine-Gordon	44
6 As Transformações de Lie-Bäcklund	51
6.1 A transformada de Lie-Bäcklund entre as equações de Liouville e sine-Gordon	52
6.2 Auto-transformada de Bäcklund para a equação de Liouville	58
7 Superfícies Solitônicas	62
Apêndices	70
A Fatos básicos da teoria das álgebras de Lie	71
B Realização de campo livre das álgebras de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal.	77
Referências	83

Introdução

Soluções localizáveis exatas de uma teoria relativística do campo com energia finita são conhecidas na literatura dependendo da dimensão do espaço-tempo como sólitons (kinks) ou monopolos [1]. Tais soluções têm um papel importante, já que elas são interpretadas como novas partículas que aparecem no espectro da teoria. Como foi discutido em [1, 2], as partículas que correspondem aos sólitons (ou aos monopolos) são de natureza não perturbativa. Geralmente, os sólitons (monopolos) são caracterizados também por cargas topológicas não triviais. Isto fornece uma conexão entre a teoria do campo e a geometria [3]. Existe [4] uma dualidade notável que relaciona o modelo sine-Gordon com o modelo massivo de Thirring. Sob esta transformação de dualidade as partículas perturbativas são mapeadas em sólitons e vice versa. A dualidade troca também correntes de Noether com as correntes topológicas. Recentemente [5], Seiberg e Witten mostraram que existem teorias de campo supersimétricas em quatro dimensões as quais exibem dualidade exata.

No contexto do método de espalhamento inverso (MEI) [6] é requerido que as equações solitônicas admitam uma representação de Lax ou de curvatura zero. Esta representação garante que o espectro do operador de Lax seja constante no tempo. A idéia principal do MEI é considerar a evolução temporal como uma evolução dos dados de espalhamento do operador Lax correspondente. Em vista da condição de curvatura zero, as equações do movimento para os dados de espalhamento associados podem ser encontradas explicitamente. No contexto do MEI, os sólitons correspondem a potenciais sem reflexão. Impondo-se esta condição, a transformação espectral inversa reduz-se a um sistema linear algébrico. A integrabilidade (no sentido de Liouville) assegura também que a interação entre um sóliton e outro seja elástica. Esta intrigante propriedade sobrevive a quanti-

zação e é usada para calcular exatamente as matrizes S quânticas para vários modelos integráveis [7].

A propagação das ondas em redes unidimensionais com interação exponencial entre os vizinhos mais próximos foi estudada por Toda [8]. Nesta tese estudamos também soluções solitônicas exatas. As equações da rede de Toda admitem uma teoria de campo analoga em 1+1 dimensões [9] a qual exibe tanto integrabilidade quanto relação com as álgebras de Lie. Devido à última seqüência de trabalhos, tornou-se claro que as matrizes (generalizadas) de Cartan podem ser usadas para construir interações exponenciais integráveis em duas dimensões. Mostrou-se também que as equações do campo admitem uma representação de curvatura zero da conexão de Lax, cujas componentes pertencem a certa álgebra de Lie. Uma relação profunda entre hierarquias integráveis e as álgebras de Kac–Moody (ou afim) Lie álgebras [10] foi esclarecida por Drinfeld e Sokolov [11]. No último artigo foi também explicada a importância das subálgebras de Heisenberg e das gradações relacionadas a elas para construir equações de evolução integráveis [12, 13].

Soluções solitônicas do modelo sine–Gordon são conhecidas desde os primeiros dias do MEI [6]. Soluções N –solitônicas nos modelos $A_n^{(1)}$ Toda são encontradas usando o método de Hirota em [14]. Tornou-se também claro que os observáveis físicos, quando avaliados nos sólitons, assumem quantidades reais finitas para valores imaginários da constante de acoplamento. Estes resultados foram estendidos usando métodos grupo–algébricos [15, 16], os quais fornecem também uma ponte entre os modelos integráveis e as álgebras de Kac–Moody. Em particular, as funções tau solitônicas que correspondem a um estado de peso maximal $|\Lambda\rangle$ da álgebra de Lie afim admitem a representação

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\Phi_0)} = \langle \Lambda | \prod_{i=1}^N (1 + X_i F^{r_i}(\mu_i)) | \Lambda \rangle \quad (1)$$

onde Φ_0 é a solução do vácuo, X_i são fatores numéricos dependendo exponencialmente das coordenadas do cone de luz e F^{r_i} são elementos da álgebra de Lie afim que diagonalizam a ação adjunta da subálgebra principal de Heisenberg (para detalhes veja [10, 15]) e N é o número de sólitons. A expressão acima é analoga à representação obtida pelo grupo de Kyoto [17] para a função tau da hierarquia KP. Os modelos integráveis possuem a simetria de vestimento [18]. O grupo de vestimento age através transformações de calibre

sobre a conexão de Lax preservando sua forma. Uma propriedade importante da simetria de vestimento é que esta é um grupo de Lie–Poisson. As aplicações desta simetria às teorias de campo de Toda foram feitas em [19]. Usando a simetria vestimento, se obtêm uma expressão alternativa para as funções tau solitônicas

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\Phi_0)} = \langle \Lambda | g_-^{-1}(x^+, x^-) \cdot g_+(x^+, x^-) | \Lambda \rangle \quad (2)$$

onde g_-^{-1} e g_+ são elementos triangulares do grupo afim que geram sólitons do vácuo. Babelon e Bernard demonstraram que as expressões (1) e (2) são equivalentes, ao menos para sólitons do modelo sine–Gordon afim. No trabalho [21] os autores obtêm expressões explícitas para os elementos g_\pm (2). Nesta tese, usando os resultados de [21], mostramos que a representação mediante operador de vértice das funções tau (1) que correspondem às representações fundamentais da álgebra de Lie afim é uma consequência da expressão do grupo de vestimento (2) para sólitons arbitrários $A_n^{(1)}$ Toda.

Até aqui temos tratado os aspectos algébricos de alguns modelos, mais como é conhecido na física teórica, o fato de se ter uma realização geométrica destes ajuda à compreensão e talvez uma solução exata dos mesmos. Um exemplo disto são os campos de Yang–Mills (YM), os quais se descobriu ter uma interpretação geométrica bem definida: eles definem uma conexão no “fibrado principal”. Desta maneira o campo de YM encontra seu lugar natural junto aos campos de origem geométrica, como o campo eletromagnético (que é um exemplo particular para a carga unidimensional) e o campo gravitacional de Einstein, o qual tem relação com o “fibrado tangente” da variedade de Riemann espaço–temporal.

Um outro exemplo importante é dado na teoria das cordas: se mostra num contexto clássico que as equações de movimento destas, são equações de superfície mínima num espaço bersalho de curvatura constante negativa com fronteira prescrita, sendo a ação a área desta superfície. Pode–se demonstrar [40] que as equações de movimento escritas num contexto geométrico revelam ser integráveis, já que podem ser escritas via um par de Lax com um parâmetro espectral, podendo–se aplicar os métodos já conhecidos para resolvê–las como o MEL.

Isto também acontece em particular com várias equações diferenciais parciais não lineares em $(1 + 1)$ dimensões, como por exemplo: sine–Gordon, Liouville, Korteweg–de

Vries (KdV), Korteweg-de Vries modificada (mKdV), e não linear Schrödinger, os quais encontram um grande número de aplicações em física e matemática. Estes modelos exibem estruturas matemáticas muito ricas por detrás deles, tais como existência de pares de Lax, mapas de Miura, transformações de Bäcklund, número infinito de leis de conservação, estruturas bi-Hamiltonianas e possuem solução exata pelo MEI. Associadas a estas equações existem as hierarquias integráveis. Um exemplo bem conhecido disto é dado pela hierarquia KdV, a qual é um conjunto infinito de equações não lineares integráveis com as propriedades citadas acima [41].

Estamos interessados no aspecto geométrico destes modelos e exploraremos algumas das conseqüências deste ponto de vista. Para isto, consideraremos o problema de imersão de uma variedade Riemanniana em uma variedade de dimensão maior (no trabalho [56] Savaliev faz um tratamento geral disto). A variedade imersa (uma superfície) é construída mediante equações diferenciais que são determinadas pelas tangentes e normais à superfície: são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci [50] [58]. Estas formam um conjunto sobredeterminado de equações, que devem cumprir condições de integrabilidade para ter uma solução. Quando falamos em integrabilidade, queremos dizer que as equações de imersão são equivalentes à condição de curvatura nula de certa conexão (par de Lax). Estas equações são, em geral, não-lineares e por isto mesmo difíceis de resolver. Algumas imersões especiais no espaço tri-dimensional afim tem sido consideradas em [59] em relação à generalização W_3 da gravitação de Polyakov [55]. O par de Lax canônico do modelo A_n Toda foi derivado estudando-se a geometria extrínseca de superfícies, as quais são “quiralmente” imersas em CP^n [60].

A segunda parte desta tese é dedicada a um estudo dos modelos sine-Gordon e Liouville. Ambas as equações foram obtidas no século passado estudando a geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 [50, 38]. O significado geométrico destas equações é similar, pois a equação de Liouville descreve superfícies de curvatura média constante [69] (superfícies minimais), aparece também quando se estudam imersões em \mathbb{R}^3 de superfícies de curvatura escalar constante negativa que são “localmente isométricas” ao plano de Lobachevski, enquanto que a equação sine-Gordon descreve superfícies de curvatura escalar constante negativa, imersas num espaço \mathbb{R}^3 . Na verdade, a equação sine-Gordon forma parte de um

conjunto mais geral de sistemas integráveis devido a Bianchi, o qual descreve uma classe de superfícies hiperbólicas, equivalentes via uma transformação de calibre à equação de Ernst no contexto da relatividade geral. A equação de sine-Gordon pode ser considerada como proveniente de uma redução do sistema de Bianchi correspondente a superfícies de curvatura constante negativa chamadas superfícies pseudo-esféricas.

A importância do modelo quântico de Liouville para a Física é motivado por sua relação com a Teoria de Cordas, Teoria do Campo Conforme em duas dimensões e em Gravitação bidimensional [55]. A equação clássica de movimento de uma corda em um espaço bersalho plano descreve uma superfície de curvatura média constante. Em contraste às equações clássicas de movimento, dentro da teoria quântica, a ação de Liouville aparece como uma anomalia (Weyl) da integral de caminho de Polyakov após integrar sobre a métrica da “world sheet” no gauge conforme.

A equação sine-Gordon, e as relacionadas a ela (tais como sinh-Gordon, sine-Gordon elíptica, sinh-Gordon elíptica) têm uma enorme variedade de usos em áreas muito diversas. Exemplos disso são: o estudo de superfícies de curvatura constante negativa, também chamadas de superfícies integráveis [50], que se remonta ao século 19; a Física de Partículas Elementares [42]; Ótica Quântica [42]; uniões de Josephson [42]; excitações não lineares em Física da Matéria Condensada [43]; estruturas de vórtices em fluidos e plasmas [44] e em conexão com procesos de redução de integrais Abelianas sobre curvas hiperelípticas a funções elípticas [45]. Em particular, ela representa um bom exemplo de sistemas Hamiltonianos infinito dimensionais completamente integráveis com variáveis associadas de ângulo ação no caso de dispersão [6]. Além disso temos a redução dimensional das equações de YM auto-duais à equação (elíptica) de sine-Gordon [46].

Uma propriedade de todas as equações não lineares integráveis é que elas têm transformada de Bäcklund (TB). Historicamente, a origem das TB reside na tentativa de estender o trabalho pioneiro de Lie sobre transformações de contato. Lie salientou a questão da existência de transformações para as quais a condição de tangência de ordem superior é uma condição invariante. Bäcklund estudou este problema independentemente, fazendo contribuições importantes à teoria de transformações tangentes, mas além disso ele introduziu uma segunda classe de transformações de superfície, as quais, junto com suas

modernas extensões, são conhecidas como TB. As TB são muito usadas na construção de soluções de sistemas de equações não lineares. Por exemplo, uma TB pode ser utilizada para relacionar um sistema de equações não lineares a uma equação não linear mais simples, cuja solução pode ser usada para construir soluções do sistema mais complicado mediante uma TB. Ou uma TB pode relacionar diferentes soluções de um mesmo sistema. Quando isto acontece, então é chamada de auto-transformada de Bäcklund (auto-TB) para este sistema e pode ser usada para construir soluções complicadas do sistema a partir de soluções simples. Assim pois, as TB nos dão um princípio de superposição para equações não lineares. Em particular, soluções multisolitônicas podem ser geradas com procedimentos puramente algébricos baseados no teorema de permutabilidade, que tem sua origem no fato que as auto-TB dependem de um parâmetro. A transformação de Bäcklund para a equação de sine-Gordon é associada com uma construção geométrica simples que pode ser visto em [53].

Foi notado por muitos autores a interrelação entre as TB e a Representação de Curvatura Nula (RCN) para os modelos integráveis. Esta relação é estabelecida mediante uma transformação de calibre que relaciona diferentes TB's e representa o grupo de calibre (o chamado grupo de vestimento [68]) que está dentro da estrutura da RCN e em geral expressa a não linearidade sobre um espaço funcional infinito dimensional.

Na realidade pode-se mostrar que o MEI, as transformações de Bäcklund, e a existência de um número infinito de leis de conservação, estão intimamente relacionados. Em [47] se mostra que as TB podem ser reduzidas às equações fundamentais do método de espalhamento inverso. Também se mostra que as leis de conservação são obtidas de um jeito simples partindo das equações do MEI escritas na forma de Riccati. Além disso, Lamb e Scott, Chu e Mclaughlin [49] propoem um esquema para escrever as leis de conservação partindo das transformadas de Bäcklund.

Nesta tese consideramos a geometria Riemanniana interna de superfícies de curvatura escalar constante negativa $R = -2$. É conhecido que fixando coordenadas conformes sobre a superfície podemos derivar a equação de Liouville, enquanto que nas coordenadas generalizadas de Tschebysheff aparece a equação de sine-Gordon. Esta simples observação nos leva à conclusão de que deve existir (localmente) uma transformação inversível que

relaciona a equação de Liouville com a equação de sine-Gordon. Esta relação pode ser, em princípio, derivada solucionando a equação de Laplace-Beltrami associada à métrica de Tscheytscheff. Para dar expressões explícitas consideraremos imersões isométricas no plano de Lobachevski (existe um teorema padrão que garante que tais imersões sempre existem localmente e são fixados a menos de uma transformação de isometria no plano de Lobachevski). Estas imersões produzem naturalmente soluções das equações de Liouville e sine-Gordon. Em coordenadas conformes recuperamos a famosa fórmula de Liouville [62, 63]. Usando a RCN, mostramos que a imersão isométrica mencionada anteriormente é expressa em termos de uma solução especial do problema linear subjacente. Posteriormente estudamos as transformações isométricas no plano de Lobachevski fixando coordenadas conformes e de Tscheytscheff sobre uma superfície de curvatura escalar negativa. Isto nos fornece uma mudança local de coordenadas dependentes do campo não localmente (isto é dependendo das derivadas do campo numa ordem arbitrária), a qual produz uma transformação de Lie-Bäcklund entre as equações de Liouville e sine-Gordon. Em seguida fazemos um estudo da imagem dos sólitons de sine-Gordon no plano de Lobachevski.

Finalmente mostramos que existe uma auto-TB para a equação de Liouville que leva uma solução dela numa outra solução da mesma equação. Encontramos esta transformação mediante um procedimento simples, usando para isto a simetria de vestimento que atúa sobre a conexão de Lax.

A tese esta dividida em duas partes, a primeira trata dos aspectos algébricos dos sólitons nos modelos $A_n^{(1)}$ Toda, e inclui os três primeiros capítulos. Na segunda parte se estuda os aspectos geométricos das equações de Liouville e sine-Gordon, e inclui os capítulos restantes. A tese contém dois apêndices, o apêndice A se refere a um resumo dos fatos básicos da teoria de álgebras de Lie, e o apêndice B é dedicado à realização das álgebras de Lie em termos de osciladores harmônicos.

Parte I

Aspectos Algébricos

Capítulo 1

Sólitons no modelo $A_n^{(1)}$ Toda e as transformações de vestimento relacionadas

Sólitons nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda foram encontrados por Hollowood [14] usando as equações de Hirota. As soluções fisicamente relevantes aparecem para valores imaginários da constante do acoplamento, não obstante os componentes do campo de Toda são complexos. Teorias de campo de Toda afins e suas soluções solitônicas são estudadas também do ponto de vista do MEI [22]. As soluções subjacentes de Jost [6] assim como os elementos da matriz da transição, perdem em general, suas propriedades de analiticidade. Um fenômeno similar acontece quando se consideram os dados de dispersão relacionados a um operador diferencial linear de ordem $n \geq 3$ [23]. Em [21] se desenvolve um método elegante para calcular sólitons no modelo $A_n^{(1)}$ de Toda. Nesse trabalho se explora fortemente o fato de que a conexão de Lax pertence à álgebra de Lie $A_n^{(1)}$ na gradação *principal* (para um sumário das álgebras de Lie, veja o apêndice A). As variáveis dinâmicas que usamos para descrever a dinâmica do sóliton, aparecem previamente no estudo das soluções periódicas da equação KdV e as cadeias periódicas de Toda [24]. O mesmo procedimento aplicado aos sóliton de sine-Gordon, foi recentemente usado para calcular os fatores de forma na teoria quântica [25].

Para obter as equações $A_n^{(1)}$ de Toda, impomos a condição de curvatura zero

$$\partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] = 0 \quad (1.1a)$$

sobre a conexão de Lax

$$\begin{aligned} A_{\pm} &= \pm \partial_{\pm} \Phi + m e^{\pm a d \Phi} \mathcal{E}_{\pm} \\ \partial_{\pm} &= \frac{\partial}{\partial x^{\pm}} \end{aligned} \quad (1.1b)$$

a qual pertence à álgebra de laços de Lie $\tilde{\mathcal{G}} = \widetilde{SL}(n+1)$; onde $x^{\pm} = x \pm t$ são as coordenadas do cone de luz do espaço de Minkowski bidimensional (as notações e os fatos básicos da teoria de álgebras de Lie são resumidos no apêndice A). Os elementos $\mathcal{E}_{\pm} = \mathcal{E}_{\pm 1}$ são geradores de grau ± 1 da subálgebra principal de Heisenberg (A.7), (A.23)

$$\mathcal{E}_k = \lambda^k \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} |p\rangle \langle p+k| \quad (1.1c)$$

e Φ é uma matriz diagonal

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_{n+1}} \varphi_i E^{ii} \quad (1.1d)$$

Os modelos $A_n^{(1)}$ de Toda tem uma extensão conformalmente invariante [26] conhecida como modelo Conforme de Toda Afim A_n . Este admite também uma representação de curvatura zero (1.1a) para uma conexão da forma (1.1b) na álgebra de Lie *afim* $\hat{\mathcal{G}} = \hat{sl}(n+1) = A_n^{(1)}$ [10]. A álgebra de Lie afim análoga a (1.1d) é

$$\Phi \rightarrow \Phi + \eta \hat{d} + \frac{\hat{c}}{2(n+1)} \zeta \quad (1.2)$$

onde (ver o apêndice) \hat{d} e \hat{c} são a derivação e o elemento central respectivamente. As equações do modelo A_n CAT são

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- \varphi_i &= m^2 e^{2\eta} (e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}} - e^{\varphi_{i-1} - \varphi_i}) \\ \partial_+ \partial_- \eta &= 0 \\ \partial_+ \partial_- \zeta &= m^2 e^{2\eta} \sum_{i \in \mathbb{Z}_{n+1}} e^{\varphi_i - \varphi_{i+1}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

A primeira das equações acima coincide com as equações $A_n^{(1)}$ de Toda contanto que $\eta = 0$. Como foi notado em [20], os sólitons do modelo de Toda afim aparecem após ter imposto a última restrição. Em tal caso (1.3) admite uma representação bilinear de Hirota [14]

$$\partial_+ \tau_k \partial_- \tau_k - \tau_k \partial_+ \partial_- \tau_k = m^2 (\tau_{k+1} \tau_{k-1} - \tau_k^2) \quad (1.4a)$$

$$e^{-\varphi_k} = \frac{\tau_k}{\tau_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{Z}_{n+1} \quad (1.4b)$$

$$e^{\zeta_0 - \zeta} = \prod_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \tau_k \quad (1.4c)$$

onde

$$\zeta_0 = (n+1)m^2 x^+ x^- \quad (1.4d)$$

O valor anterior do campo ζ junto com $\varphi_k = 0, k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ corresponde à solução do vácuo do modelo CAT. O vácuo $A_n^{(1)}$ de Toda é obtido ignorando o campo adicional ζ . Em [21] se usa um procedimento alternativo para calcular os sólitons $A_n^{(1)}$ de Toda. O procedimento usado por nós usa os resultados do trabalho [27] onde diversas equações solitônicas, incluindo a equação sine-Gordon, foram estudadas. A dinâmica dos sólitons $A_n^{(1)}$ de Toda é governada pelas seguintes equações *algebricas*

$$\prod_{l=1}^N \frac{\epsilon_{kl} + \omega^{r_j} \mu_j}{\epsilon_{kl} + \mu_j} = c_j \omega^{r_j(1-k)} \frac{e(\omega^{r_j} \mu_j)}{e(\mu_j)}$$

$$e(\lambda) = \exp\left\{m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)\right\} \quad (1.5a)$$

$$e^{-\varphi_k} = (-)^N \prod_{j=1}^N \frac{\epsilon_{kj}}{\mu_j}, \quad k \in \mathbb{Z}_{n+1} \quad (1.5b)$$

onde o inteiro N indica o número dos sólitons; $\mu_j, j = 1, \dots, N$ são parâmetros (complexos) relacionados às velocidades do sóliton e r_j são parâmetros discretos que tomam valores não nulos no grupo cíclico \mathbb{Z}_{n+1} . Estes últimos são conhecidos na literatura [14, 15, 16] como “*sóliton species*”. [28, 29]. A relação entre os sólitons e os sistemas relativísticos integráveis de N corpos foram estudados em detalhe [28, 29]. A fim de simplificar nossa análise, somente sólitons com $|\mu_i| \neq |\mu_j|$ ($i \neq j$) serão considerados. Determinadas soluções particulares que violam esta restrição também são conhecidas [30]. Notemos que em contraste com [14, 15, 16], nós estamos trabalhando com um valor real da constante

de acoplamento. Isto quer dizer que as soluções (1.5a), (1.5b) são os sólitons no sentido *algébrico*.

Os grupos de transformações para equações solitônicas foram introduzidos em [17]. Aqui foram estudados com relação ao problema subjacente de Riemann [31] e são conhecidos também como grupos de transformações de vestimento. Nesta tese não comentaremos as propriedades de Poisson–Lie [18, 19] dos grupos de vestimento. Para elementos do grupo de vestimento que criam soluções monossolitônicas do vácuo no modelo sine–Gordon este problema foi discutido em [32]. Acredita-se que os sólitons formam um conjunto denso no espaço das soluções. Então, demonstrando que os sólitons estão na órbita do vácuo com respeito ao grupo de vestimento, a solução da teoria clássica, assim como a quântica seria reduzida a um problema da teoria de representação.

Para introduzir o grupo de transformações de vestimento nós recordamos primeiramente que a condição de curvatura zero (1.1a) pode ser escrita equivalentemente como a condição de compatibilidade do sistema linear

$$(\partial_{\pm} + A_{\pm})T = 0 \quad (1.6)$$

Impomos também a condição de normalização $T|_{x^+=x^-=0} = 1$. Um elemento do grupo de vestimento é representado por um par de elementos triangulares $(g_+(x), g_-(x))$ do grupo de laços (ou afim) de Lie correspondente. Isto quer dizer que $g_{\pm}(x) = e^{\mathcal{H}}e^{\mathcal{N}_{\pm}}$ onde \mathcal{H} é a subálgebra de Cartan e \mathcal{N}_{\pm} contêm todos os elementos de grau positivo (negativo). A gradação é introduzida pela derivação \hat{d} da álgebra de Lie afim (ou álgebra dos laços) (A.18), (A.19). O grupo de vestimento age nas componentes da conexão Lax por transformações do calibre

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}^g = -\partial_{\mu}g_{\pm}g_{\pm}^{-1} + g_{\pm}A_{\mu}g_{\pm}^{-1} \quad (1.7a)$$

ou equivalentemente

$$T(x) \rightarrow T(x)^g = g_{\pm}(x)T(x)g_{\pm}^{-1}(0) \quad (1.7b)$$

Os fatores independentes das coordenadas espaço–temporais $g_{\pm}^{-1}(0)$ são adicionados para assegurar a condição de normalização $T|_{x^+=x^-=0} = 1$. As transformações de calibre

são requeridas também para preservar a forma da conexão Lax (1.1b). Conseqüentemente, as transformações vestimento formam um grupo da simetria das equações do campo correspondentes (1.3). Desde que os elementos do grupo g_+ e g_- produzem o mesmo resultado (1.7a), resulta que eles são soluções do problema de fatorização (ou problema de Riemann–Hilbert)

$$g_-^{-1}(x)g_+(x) = T(x)g_-^{-1}(0)g_+(0)T^{-1}(x) \quad (1.8)$$

Comparando (1.1b) com (1.7a), observamos que g_+ e g_- tem componentes opostas no toro de Cartan $e^{\mathcal{H}}$. Conseqüentemente, a solução de (1.8) é única. A multiplicação no grupo vestimento é a mesma que no grupo dos laços [18, 19]. Em particular, o mapa $(g_+, g_-) \rightarrow g_-^{-1}g_+$ não é um isomorfismo dos grupos de Lie.

Nos modelos CAT baseados em álgebras de Lie simples arbitrárias, se associa uma função grupo-álgebraica tau a cada vetor de peso maximal $|\Lambda \rangle$

$$\tau_\Lambda(\Phi) = \langle \Lambda | e^{-2\Phi} | \Lambda \rangle \quad (1.9)$$

Suponhamos que uma solução ϕ (1.2), (1.3) com $\eta = 0$ está relacionada à solução de vácuo $\phi_0 = \frac{m^2}{2}x^+x^- \hat{c}$ pela transformação de vestimento (g_+, g_-) . A seguinte relação [19, 20]

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\phi_0)} = \langle \Lambda | g_-^{-1}(x)g_+(x) | \Lambda \rangle \quad (1.10)$$

entre as funções tau das duas soluções é válida. Em [20] observou-se que, após fatorizar a contribuição que pertence ao centro do grupo afim, podemos executar o cálculo do elemento g_\pm no grupo dos laços correspondente:

$$g_\pm(x) = e^{\pm \frac{\xi_0 - \xi}{2(n+1)} \hat{c}} \tilde{g}_\pm(x) \quad (1.11)$$

onde \tilde{g}_\pm , considerado como elemento do grupo dos laços, gera as soluções $A_n^{(1)}$ de Toda $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}_{n+1}} \varphi_i |i \rangle \langle i|$ do vácuo $\Phi_0 = 0$. Recordamos que a identidade acima foi estabelecida em [20] para a álgebra de Lie afim $A_1^{(1)} = \hat{sl}(2)$. Entretanto, é fácil certificar-se de que a prova pode facilmente ser generalizada para uma álgebra de Lie afim arbitrária.

A representação (1.5a), (1.5b) das soluções N -solitônicas foram usadas em [21] para calcular os elementos \tilde{g}_\pm (1.7a) que geram estas soluções do vácuo. Resulta que os elementos do grupo de vestimento \tilde{g}_\pm fatoram-se em um produto de fatores monossolitônicos

$$\tilde{g}_\pm = \tilde{g}_\pm(N) \tilde{g}_\pm(N-1) \dots \tilde{g}_\pm(1) \quad (1.12)$$

onde

$$\tilde{g}_{\pm}(i) = e^{K(F_i)+P_i} e^{W_{\pm}(i)} \quad (1.13a)$$

Na expressão anterior, F_i , $K(F_i)$ e P_i são matrizes diagonais de traço nulo

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} f_{ki} |k\rangle \langle k| & P_i &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} p_{ki} |k\rangle \langle k| \\ K(F_i) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} K_k(F_i) |k\rangle \langle k| \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} f_{ki} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} p_{ki} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} K_k(F_i) = 0 \end{aligned} \quad (1.13b)$$

As quantidades $K_k(F_i)$ obedecem as relações

$$K_k(F_i) - K_{k+1}(F_i) = \frac{f_{ki} + f_{k+1,i}}{2} \quad (1.13c)$$

as quais concordam com a propriedade de periodicidade $K_k(F_i) = K_{k+n+1}(F_i)$ desde que F_i tem traço nulo. Os elementos da álgebra dos laços $W_{\pm}(i)$ são dados por:

$$\begin{aligned} W_{\pm}(i) &= -K(F_i) + \sum_{k=1}^n f_{ki} S_{\pm}^k(\mu_i) \\ S_{\pm}^k(\mu_i) &= \mathcal{B}_{\pm}^k(\mu_i) - \mathcal{B}_{\pm}^{n+1}(\mu_i) \\ \mathcal{B}_{\pm}^k(\mu_i) &= \mp \left(\frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{\pm(n+1)}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{\pm(n+1)}} \right) E^{kk} \mp \sum_{l \geq k} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{l-k \pm(n+1)}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{\pm(n+1)}} E^{kl} \\ &\quad \mp \sum_{l \geq k} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{l-k}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu_i}\right)^{\pm(n+1)}} E^{kl} \end{aligned} \quad (1.13d)$$

Nas expressões anteriores λ é o parâmetro dos laços (ou parâmetro espectral) (veja o apêndice A). Note que os elementos $\mathcal{B}_{\pm}^k(\mu_i)$, em contraste a $S_{\pm}^k(\mu_i)$, não estão na álgebra de laços $\tilde{sl}(n+1)$. Devido à contribuição da diagonal (λ -dependente) com traço não nulo, $\mathcal{B}_{\pm}^k(\mu_i)$ esta na álgebra dos laços $\tilde{gl}(n+1)$. Tendo em conta o análogo da álgebra dos laços (A.13) junto com (A.23) temos que

$$S_{\pm}^k(\mu_i) = \mp \sum_{r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^r (\omega^{-rk} - 1) \left(\frac{F_0^r}{2} + \sum_{p \geq 0} \frac{F_p^r}{\mu_i^p} \right) \quad (1.14)$$

Os elementos da subálgebra de Cartan $K(F_i)$ (1.13b), (1.13c) podem também ser expandidos na base alternativa (A.13). Conseqüentemente, de (1.13d) e as expansões anteriores, obtemos

$$W_{\pm}(i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} f_{ki} W_{\pm}^k(\mu_i) \quad (1.15a)$$

onde

$$W_+^k(\mu_i) = - \sum_{r=1}^n \left(\frac{1 - \omega^{-rk}}{1 - \omega^{-r}} F_0^r + \omega^{r(1-k)} \sum_{p \geq 1} \frac{F_p^r}{\mu_i^p} \right) \quad (1.15b)$$

$$W_-^k(\mu_i) = \sum_{r=1}^n \left(- \frac{1 - \omega^{r(1-k)}}{1 - \omega^{-r}} F_0^r + \omega^{r(1-k)} \sum_{p \leq -1} \frac{F_p^r}{\mu_i^p} \right) \quad (1.15c)$$

Note que nem $W_+^k(\mu_i)$ nem $W_-^k(\mu_i)$ contém contribuições que pertencem à subálgebra principal de Heisenberg. Além disso, as identidades

$$W_+^k(\mu_i) - W_-^k(\mu_i) = - \sum_{r=1}^n \omega^{r(1-k)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{F_p^r}{\mu_i^p} \quad (1.16)$$

são válidas. A expressão acima junto com (1.15a)–(1.15c) fornece uma sugestão de como relacionar o formalismo do grupo de vestimento aos métodos grupo-algébricos, desenvolvida em [15, 16]. Esta relação foi conjecturada para as hierarquias integráveis gerais que admitem uma solução de vácuo [13].

Até agora nós discutimos as propriedades dos fatores $\tilde{g}_{\pm}(k)$ (1.12) que produzem monossólitons sem especificar sua relação à solução N -solitônica (1.5a), (1.5b). Esta relação foi discutida detalhadamente em [21]. Aqui mencionamos somente os resultados. Primeiramente de tudo, mostrou-se que as matrizes diagonais F_l , $l = 1, \dots, N$ (1.13b) satisfazem as identidades

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{r(1-k)} \left(\frac{\rho_{kl}(\omega^r \mu_{l+1})}{\rho_{kl}(\mu_{l+1})} - \omega^{-r} \frac{\rho_{k+1l}(\omega^r \mu_{l+1})}{\rho_{k+1l}(\mu_{l+1})} \right) \beta_k(F_{l+1}) = \delta_{r,r_{l+1}} (1 - \omega^r) \times \\ & \times \prod_{a \neq l+1} \frac{\omega^r \mu_{l+1} - \mu_a}{\mu_{l+1} - \mu_a} \prod_{a=1}^N \frac{\mu_{l+1} + \epsilon_{1a}}{\omega^r \mu_{l+1} + \epsilon_{1a}} \times \\ & \times \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \left(1 + \mu_{l+1} \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\rho_{kl}}{\rho_{k+1l}}(\mu_{l+1}) \right) \beta_k(F_{l+1}) \end{aligned} \quad (1.17a)$$

No sistema acima r é um parâmetro discreto que pertence a \mathbb{Z}_{n+1} ; $r_i = 1, \dots, n$ indicam a espécie do sóliton (1.5a), (1.5b) relacionado ao sóliton com parâmetro de rapides μ_i para $i = 1, \dots, N$. Foi notado em [21] que (1.17a) é um sistema de equações algébricas que determinan as variáveis

$$\beta_k(F_i) = e^{K_k(F_i) - \frac{f_{kl}}{2}} \quad (1.17b)$$

As quantidades $K_k(F_i)$ e f_{kl} que aparecem na definição acima são introduzidas por (1.13a) e (1.13c). As funções ρ_{al} (1.17a) em λ , $a \in \mathbb{Z}_{n+1}$, $l = 1, \dots, N$ podem ser consideradas como componentes de um vetor coluna $n+1$ -dimensional $\rho_l(\lambda)$. As seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} \rho_l(\lambda) &= \mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda) \rho_{l-1}(\lambda) \\ \rho_{l-1}(\lambda) &= \mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda) \rho_l(\lambda) \end{aligned} \quad (1.17c)$$

onde $\mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda)$ e $\mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda)$ são matrizes de ordem $(n+1) \times (n+1)$

$$\mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda) \mathcal{D}^{(l-1)}(\lambda) = 1.$$

Cujos elementos são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ab}^{(l-1)}(\lambda) &= \frac{\gamma_l \beta_b(F_l)}{(n+1) \rho_{bl-1}(\mu_l)} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{q(a-b)} \frac{\lambda - \omega^q e^{f_{bl}} \mu_l}{\lambda - \omega^q \mu_l} \\ \mathcal{D}_{ab}^{(l-1)}(\lambda) &= \frac{\rho_{al-1}(\mu_l)}{(n+1) \gamma_l \beta_b(F_l)} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{q(a-b)} \frac{\lambda - \omega^q e^{-f_{bl}} \mu_l}{\lambda - \omega^q \mu_l} \\ \gamma_l &= \left(\prod_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \rho_{pl-1}(\mu_l) \right)^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned} \quad (1.17d)$$

A primeira relação (1.17c) junto com

$$\rho_{j0}(\lambda) = \frac{1}{n+1} \quad (1.17e)$$

determina univocamente os vetores $\rho_l(\lambda)$. As componentes diagonais das matrizes são fixadas pelas equações [21]

$$e^{K_a(F_{l-1}) + \frac{\rho_{al-1}}{2}} = \frac{\rho_{al-1}(\mu_l)}{\gamma_l} \quad (1.17f)$$

Conseqüentemente, as equações (1.17a)–(1.17f) fornecem um método recursivo para obter a expressão fatorizada (1.12) para um elemento do grupo de vestimento no grupo dos laços, os quais geram soluções N -solitônicas (1.5a), (1.5b) do vácuo. Em vista da relação (1.11) entre os elementos do grupo de vestimento no grupo afim e no grupo dos laços, a decomposição (1.12) junto com as relações de recorrência (1.17a)–(1.17f), terá um papel crucial na obtenção da representação de operador de vértice para a função tau solitônica. Notemos também que em vista de (1.13c), as quantidades $\beta_k(F_i)$ (1.17b) satisfazem a relação

$$e^{-fk_l} = \frac{\beta_k(F_i)}{\beta_{k-1}(F_i)} \quad (1.18)$$

a qual se assemelha com (1.4b). Porém β_k , como se pode ver de (1.17a) e (1.17c), (1.17d), em geral não satisfaz às equações bilineares de Hirota (1.4a). Isto quer dizer que os campos F_i (1.13b) *não satisfazem* as equações $A_n^{(1)}$ de Toda para valores arbitrários de l .

As componentes $\rho_{al}(\lambda)$ dos vetores $\rho_l(\lambda)$ (1.17a), (1.17c), (1.17d) satisfem às equações diferenciais e algébricas que serão importantes no que segue. Primeiramente de tudo, combinando (1.17c) com (1.17d), temos

$$\sum_{a,r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{r(a'-a)}}{\lambda - \omega^r \mu_l} \left(\frac{\lambda - \omega^r e^{-fa_l} \mu_l}{\lambda - \omega^r \mu_l} \frac{\rho_{al}(\lambda)}{\gamma_l \beta_a(F_l)} - \frac{\rho_{al-1}(\lambda)}{\rho_{al-1}(\mu_l)} \right) = 0 \quad (1.19)$$

para qualquer $a' \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Da identidade anterior e da equação (1.17d) deduzimos as relações

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{d \mathcal{D}_{a'a}^{(l-1)}}{d\lambda}(\lambda) \rho_{al}(\lambda) = \frac{\rho_{a'l-1}(\mu_l)}{n+1} \sum_{a,r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{r(a'-a)}}{\lambda - \omega^r \mu_l} \left(\frac{\rho_{al}(\lambda)}{\gamma_l \beta_a(F_l)} - \frac{\rho_{al-1}(\lambda)}{\rho_{al-1}(\mu_l)} \right) \quad (1.20)$$

Em vista de (1.17c), a seguinte representação

$$\rho_j(\lambda) = \mathcal{D}^{(jj-1)} \dots \mathcal{D}^{(10)} \rho_0(\lambda) \quad (1.21a)$$

tem lugar. Diferenciando a identidade anterior com respeito a λ e levando em conta que $\rho_0(\lambda)$ (1.17e) não depende do parâmetro spectral, obtemos que

$$\frac{d \rho_j}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{l=1}^j \mathcal{D}^{(jl)}(\lambda) \frac{d \mathcal{D}^{(l-1)}}{d\lambda}(\lambda) \rho_{l-1}(\lambda) \quad (1.21b)$$

onde as matrizes $\mathcal{D}^{(j,l)}(\lambda)$ para $j \geq l$ são dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{(j,l)}(\lambda) &= \mathcal{D}^{(j,j-1)}(\lambda) \dots \mathcal{D}^{(l+1,l)}(\lambda) \\ \rho_j(\lambda) &= \mathcal{D}^{(j,l)}(\lambda) \rho_l(\lambda) \\ \mathcal{D}^{(j,j)}(\lambda) &= 1\end{aligned}\tag{1.21c}$$

Desde que $\mathcal{D}^{(l-1,l)}$ é o inverso de $\mathcal{D}^{(l,l-1)}$, podemos reescrever (1.21b) como segue

$$\frac{d\rho_j}{d\lambda}(\lambda) = - \sum_{l=1}^j \mathcal{D}^{(j,l-1)}(\lambda) \frac{d\mathcal{D}^{(l-1,l)}}{d\lambda}(\lambda) \rho_l(\lambda)\tag{1.21d}$$

introduzindo (1.20) na identidade acima obtemos

$$\frac{d\rho_{kj}}{d\lambda}(\lambda) = -\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^j \sum_{a,a',r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{r(a'-a)}}{\lambda - \omega^r \mu_l} \mathcal{D}_{ka'}^{(j,l-1)}(\lambda) \left(\frac{\rho_{al}(\lambda)}{\gamma_l \beta_a(F_l)} - \frac{\rho_{al-1}(\lambda)}{\rho_{al-1}(\mu_l)} \right)\tag{1.22}$$

Este resultado será usado num capítulo posterior para demonstrar a equivalência entre as expressões (1) e (2) para as funções tau N -solitônicas.

Capítulo 2

Representação através de operadores de vértice da solução monossolitônica

Neste capítulo focalizaremos a atenção na equivalência entre as representações (1) e (2) para a solução monossolitônica das equações A_n CAT. A existência de monossólitons, isto é, ondas solitárias que propagam sem mudar sua forma, não é uma propriedade exclusiva das equações de evolução integráveis. Como um contra exemplo, podemos citar a existência da solução chamada kink no modelo de φ^4 em 1+1 dimensões [1]. As soluções monossolitônicas das equações de Toda afim baseadas na álgebra de Lie arbitrária simples também são conhecidas [26, 36].

De acordo com (1.5a), (1.5b) a evolução de um único sóliton é ditada pelas equações

$$\begin{aligned} e^{-\varphi_k} &= \frac{1 + X_k}{1 + X_{k-1}} \\ X_k &= -\frac{\omega^{rk}}{c} \frac{e(\mu)}{e(\omega^r \mu)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde μ é um parâmetro relacionado à rapidez, $r = 1, \dots, n$ é a “sóliton species” e c é a constante que aparece no lado direito de (1.5a). Das identidades acima segue que as funções tau correspondentes (1.4a), (1.4b) estão dadas por

$$\tau_k = 1 + X_k \quad (2.2)$$

Neste capítulo demonstraremos que as representações (1) e (2) para as funções tau do

monossóliton associadas às representações fundamentais da álgebra de Lie $A_n^{(1)}$ são equivalentes. Denotemos por $\tilde{g}_\pm(\mu)$ os elementos do grupo de vestimento que geram a solução monossolitônica (2.1) do modelo $A_n^{(1)}$ de Toda a partir vácuo. Levando em conta (1.12) e (1.13a) chegamos à expressão

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\mu) &= \tilde{g}_-^{-1}(\mu)\tilde{g}_+(\mu) = e^{-W_-(\Phi)}.e^{W_+(\Phi)} \\ \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \varphi_k E^{kk}\end{aligned}\quad (2.3)$$

onde φ_k são os componentes do campo $A_n^{(1)}$ de Toda e

$$W_\pm(\Phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \varphi_k W_\pm^k(\mu),$$

conforme (1.15a). As expresões $W_\pm(\mu)$ foram introduzidos em (1.15b), (1.15c). No que segue usaremos as representações

$$\begin{aligned}W_\pm(\Phi) &= \sum_{k=1}^n \varphi_k \widetilde{W}_\pm^{(k)}(\mu) \\ \widetilde{W}_\pm^{(k)}(\mu) &= W_\pm^{(k)}(\mu) - W_\pm^{n+1}(\mu)\end{aligned}\quad (2.4a)$$

$$\widetilde{W}_\pm^{(k)}(\mu) = - \sum_{k=1}^n \frac{1 - \omega^{-rk}}{1 - \omega^{-r}} \oint_{|\lambda| \leq |\mu|} \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda} \frac{\omega^r \lambda - \mu}{\lambda - \mu} F^r(\lambda)\quad (2.4b)$$

onde

$$F^r(\lambda) = \sum_p \frac{F_p^r}{\lambda^p}, \quad F_p^r = \oint \frac{\lambda^p d\lambda}{2\pi i \lambda} F^r(\lambda)\quad (2.4c)$$

Para calcular o elemento (2.3) na representação fundamental (B.11), (B.13) da álgebra de Lie afim $A_n^{(1)}$ introduzimos primeiramente a notação

$$\begin{aligned}h(\alpha) &= e^{-\alpha W_-(\Phi)}.e^{\alpha W_+(\Phi)} \\ h(\alpha) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^l}{l!} \frac{d^l}{d\alpha^l} h(0)\end{aligned}\quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^l}{d\alpha^l} h(0) &= -W_-(\Phi) \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}} h(0) + \frac{d^{l-1}}{d\alpha^{l-1}} h(0).W_+(0) = \\ &= \sum_{k=0}^l (-)^k \binom{l}{k} W_-^k(\Phi) W_+^{l-k}(\Phi)\end{aligned}\quad (2.5b)$$

Usando-se (2.4a), (2.4b) e desde que a matriz (1.1d) é de traço nulo, podemos escrever também

$$W_{\pm}(\Phi) = \sum_{r=1}^n \frac{\widehat{\varphi}_r}{1 - \omega^{-r}} \oint_{|\lambda| \leq |\mu|} \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda} \frac{\omega^r \lambda - \mu}{\lambda - \mu} F^r(\lambda) \quad (2.6)$$

onde introduzimos a transformada de Fourier discreta φ_k ($\varphi_k = \varphi_{k+n+1}$) de acordo com as expressões

$$\widehat{\varphi}_r = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{-kr} \varphi_k; \quad \varphi_k = \frac{1}{n+1} \sum_{r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{kr} \widehat{\varphi}_r \quad (2.7a)$$

Lembremos também a identidade

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{k(i-j)} = (n+1) \delta_{i,j}^{(n+1)} \quad (2.7b)$$

onde $\delta_{i,j}^{(n+1)}$ é o símbolo de Kronecker no grupo cíclico: este se anula para $i - j \neq 0 \pmod{n+1}$ e $\delta_{i,j}^{(n+1)} = 1$ se $i - j = 0 \pmod{n+1}$.

Prosseguimos calculando explicitamente a expansão de Taylor (2.5a). Primeiramente de tudo, notamos que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\alpha}(0) &= W_+(\Phi) - W_-(\Phi) = \\ &= - \sum_{r=1}^n \frac{\widehat{\varphi}_r}{1 - \omega^{-r}} \oint_{C_\mu} \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda} \frac{\omega^r \lambda - \mu}{\lambda - \mu} F^r(\lambda) = \\ &= - \sum_{r=1}^n \widehat{\varphi}_r \omega^r F^r(\mu) \end{aligned} \quad (2.8)$$

As identidades acima estão de acordo com (1.15a), (1.16). Para calcular as derivadas superiores de $h(\alpha)$ (2.5a) observamos que devido a (B.6) temos

$$\begin{aligned} W_-(\Phi) V^r(\mu) - V^r(\mu) W_+(\Phi) &= \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^n \frac{\omega^{s(k+1)} \widehat{\varphi}_s}{(\omega^s - 1)^2} \left(\oint_{|\lambda| > |\mu|} - \oint_{|\lambda| < |\mu|} \right) \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda} \frac{\omega^s \lambda - \mu}{\lambda - \mu} V^s(\lambda) V^r(\mu) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^n \frac{\omega^{s(k+2)} \widehat{\varphi}_s}{(\omega^s - 1)^2} \left(\oint_{|\lambda| > |\mu|} - \oint_{|\lambda| < |\mu|} \right) \frac{d\lambda}{2\pi i \lambda} \frac{\lambda - \omega^{r-s} \mu}{\lambda - \omega^r \mu} : e^{i(\theta_s(\lambda) + \theta_r(\mu))} := \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^n \frac{\omega^{s(k+1)}}{\omega^s - 1} \widehat{\varphi}_s V^{r+s}(\mu), \quad k \in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

na representação fundamental de $A_n^{(1)}$ com peso maximal $|\Lambda_k\rangle$ (B.11)–(B.13). Usando a identidade acima junto com (2.5b), é fácil provar indutivamente que

$$\frac{d^l h}{d\alpha^l}(0) = (-1)^l \sum_{s_1, \dots, s_l=1}^n \prod_{j=1}^l \Psi_{s_j}(\Phi) \cdot V^{s_1+\dots+s_l}(\mu) \quad (2.10a)$$

$$\Psi_s(\Phi) = \frac{1}{n+1} \frac{\omega^{s(k+1)} \widehat{\varphi}_s}{\omega^s - 1} \quad (2.10b)$$

onde a dependência no parâmetro $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ que etiqueta as diferentes representações fundamentais da álgebra de Lie afim, foi omitido. Substituindo o último resultado na expansão de Taylor (2.5a), resulta que (2.3) é dada pela seguinte expressão intermediária

$$\tilde{g}(\mu) = h(1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{s_1, \dots, s_l=1}^n \prod_{j=1}^l \Psi_{s_j}(\Phi) \cdot V^{s_1+\dots+s_l}(\mu) \quad (2.11)$$

A fim de escrever a parte direita da identidade acima numa forma mais conveniente, recordemos que em vista de (B.3b) e (B.5), os operadores de vértice são periódicos,

$$V^s(\mu) = V^{s+n+1}(\mu), \quad V^0(\mu) = 1.$$

Esta observação sugere-nos introduzir a álgebra comutativa associativa \mathcal{F} de dimensão (complexa) $n+1$. Esta é gerada pelos elementos V^s , $s \in \mathbb{Z}_{n+1}$. A multiplicação \star em \mathcal{F} é definida por

$$V^r \star V^s = V^{r+s} \quad (2.12)$$

Devido à condição de periodicidade, o elemento $V^0 = V^{n+1}$ é a unidade de \mathcal{F} . É importante notar que (2.12) descreve os “*fusion rules*” de uma classe de teorias do campo conforme racional [37]. Estas correspondem a uma teoria de um campo escalar sem massa livre em duas dimensões o qual é compactificado no círculo com um valor racional do quadrado do raio. A álgebra \mathcal{F} pode ser dotada com uma forma simétrica bilinear invariante

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_{\mathcal{F}} &= \langle b, a \rangle_{\mathcal{F}} \\ \langle a, b \star c \rangle_{\mathcal{F}} &= \langle a \star b, c \rangle_{\mathcal{F}} \\ a, b, c &\in \mathcal{F} \end{aligned} \quad (2.13a)$$

a qual é fixada univocamente por

$$\langle V^r, V^s \rangle_{\mathcal{F}} = \delta_{r+s, 0}^{(n+1)} \quad (2.13b)$$

A álgebra \mathcal{F} junto com a forma bilinear acima é um exemplo de uma álgebra de Fröbenius. As álgebras de Fröbenius e suas deformações aparecem no estudo da teoria topológica do campo [38]. Vamos voltar para o problema de simplificar a expressão (2.11). Usando as regras da multiplicação (2.12) podemos reescrever (2.11) na seguinte forma

$$\tilde{g} = \mathcal{F} \exp\left\{-\sum_{s=1}^n \Psi_s(\Phi) V^s\right\} \quad (2.14)$$

onde o símbolo \mathcal{F} indica que o exponencial é feito na álgebra de Fröbenius (2.12)–(2.13b). Na expressão acima a dependência em μ dos elementos V^s , $s = 1, \dots, n$ foi omitida. Notemos que a transformação de Fourier (2.7a) diagonaliza os “fusion rules” (2.12)

$$\begin{aligned} V^r \star \hat{V}^s &= \omega^{pr} \hat{V}^p \\ \hat{V}^p \star \hat{V}^q &= (n+1) \delta_{p,q}^{(n+1)} \hat{V}^p \end{aligned} \quad (2.15)$$

Substituindo a expressão acima em (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= \frac{1}{n+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} e^{-\sum_{s=1}^n \omega^{ps} \Psi_s(\Phi)} \hat{V}^p = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{p,r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{-pr} e^{\chi_p(\Phi)} V^r \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\chi_p(\Phi) = -\sum_{s=1}^n \omega^{ps} \Psi_s(\Phi), \quad p \in \mathbb{Z}_{n+1} \quad (2.16b)$$

devido à identidade (2.7b), as quantidades acima satisfem a restrição

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \chi_p(\Phi) = 0 \quad (2.17a)$$

Além disso, levando em conta (2.10b), obtemos as relações de recorrência

$$\chi_p(\Phi) - \chi_{p+1}(\Phi) = \varphi_{p+k+1} \quad (2.17b)$$

onde $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$ é o parâmetro de que etiqueta as $n+1$ representações fundamentais inequivalentes de $A_n^{(1)}$ (B.11), (B.13). Comparando (2.17a) e (2.17b) com a definição (1.4a)–(1.4c) da função tau de Hirota, temos que

$$e^{\chi_p(\Phi)} = \frac{\tau_{p+k}(\Phi)}{\left(\prod_{l \in \mathbb{Z}_{n+1}} \tau_l(\Phi)\right)^{\frac{1}{n+1}}}, \quad p \in \mathbb{Z}_{n+1} \quad (2.18)$$

Substituindo a expressão acima em (2.16a) e levando em conta (2.1) assim como a realização do operador de vértice da álgebra de Lie afim $A_n^{(1)}$ (B.5), (B.11), (B.8), concluímos que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\mu) &= \frac{1}{n+1} \sum_{p,r' \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{-pr'} e^{\chi_p(\Phi)} V^{r'}(\mu) = \\
&= \frac{1}{(n+1) \prod_{l \in \mathbb{Z}_{(n+1)}} \tau_l^{\frac{1}{n+1}}(\Phi)} \sum_{p,r' \in \mathbb{Z}_{n+1}} \left(\omega^{-pr'} + \omega^{p(r-r')+rk} X_0 F^r(\mu) \right) = \\
&= \frac{1}{\prod_{l \in \mathbb{Z}_{(n+1)}} \tau_l^{\frac{1}{n+1}}(\Phi)} (1 + (n+1)(\omega^r - 1) X_0 F^r(\mu)) \tag{2.19a}
\end{aligned}$$

Da identidade acima, (1.10), (1.11) e (1.4c) derivamos a relação

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{\Lambda_k}(\Phi)}{\tau_{\Lambda_k}(\Phi_0)} &= e^{\frac{\zeta_0 - \zeta}{n+1}} \langle \Lambda_k | \tilde{g}_-(\mu) \tilde{g}_+(\mu) | \Lambda_k \rangle = \\
&= \frac{e^{\frac{\zeta_0 - \zeta}{n+1}}}{\prod_{l \in \mathbb{Z}_{(n+1)}} \tau_l^{\frac{1}{n+1}}(\Phi)} \langle \Lambda_k | (1 + (n+1)(\omega^r - 1) X_0 F^r(\mu)) | \Lambda_k \rangle = \\
&= \langle \Lambda_k | (1 + (n+1)(\omega^r - 1) X_0 F^r(\mu)) | \Lambda_k \rangle \tag{2.19b}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, as representações (1) e (2) são equivalentes no caso monossolitônico.

Capítulo 3

A função tau N -solitônica e os operadores de vértice

A existência de soluções N -solitônicas é uma propriedade peculiar das teorias de campo integráveis. De um outro ponto de vista [29], as soluções solitônicas fornecem uma relação entre classes de soluções de equações diferenciais parciais, não-lineares, integráveis com determinados sistemas dinâmicos com um número finito de graus de liberdade. Estes últimos são conhecidos como sistemas integráveis de N -corpos (para uma revisão, veja [28]). As soluções N -solitônicas, nos limites “in” e “out”, resultam ser assintoticamente uma superposição dos monosólitons separados no espaço. Além disso, a transformação das variáveis “in” para as variáveis “out” é canônica. A função subjacente geradora desta transformação é conhecida como a matriz S clássica [6]. Uma propriedade intrigante da matriz S clássica, é que ela é representada como uma soma de termos, cada um deles representando a colisão de duas partículas. Sabe-se bem que a última propriedade admite uma generalização válida dentro da teoria quântica: a matriz S quântica, que descreve a colisão dos sólitons em um modelo quântico integrável, é dada por um produto de fatores que descrevem a interação de duas partículas [7]. As soluções N -solitônicas das teorias de campo de Toda foram obtidas usando tanto o MEI [22], como o método de Hirota [39].

Recordemos que as soluções algébricas N -solitônicas, (1.5a) e (1.5b), nos modelos $A_n^{(1)}$ de Toda são geradas a partir do vácuo pelos elementos do grupo de vestimento, (1.12)–

(1.15c). Devido à expressão fatorizada (1.12), podemos também escrever:

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= \tilde{g}_-^{-1} \tilde{g}_+ = \tilde{g}_-^{-1}(1) \dots \tilde{g}_-^{-1}(N) \cdot \tilde{g}_+(N) \dots \tilde{g}_+(1) = \\
&= \tilde{g}(1) \cdot \text{Ad } \tilde{g}_+^{-1}(1)(\tilde{g}(2)) \dots \text{Ad}(\tilde{g}_+^{-1}(1)) \dots \tilde{g}_+^{-1}(N-1)(\tilde{g}(N)), \\
\tilde{g}(i) &= \tilde{g}_-^{-1}(i) \tilde{g}_+(i).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Na expressão acima, e no que segue, suporemos que os parâmetros μ_i , $i = 1, \dots, N$ correspondentes aos fatores (1.13a)-(1.13d), são radialmente ordenados, $|\mu_1| > |\mu_2| > \dots > |\mu_N|$. Em vista de (2.16a) e (2.16b), a construção para o operador de vértice da álgebra de Lie afim, $A_n^{(1)}$ (B.5), (B.8), (B.11), para calcular (3.1) nas representações fundamentais, primeiro temos que obter uma expressão para a ação adjunta de $\tilde{g}_+(i)$ sobre os elementos da base alternativa (A.22). Para fazer isto, primeiramente notamos que as matrizes diagonais $(n+1) \times (n+1)$ de traço nulo $D = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} d_k |k\rangle \langle k|$ são escritos na base alternativa (A.13), (A.15) como segue,

$$D = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^s \hat{d}_s F_0^s, \tag{3.2}$$

onde \hat{d}_s , $s \in \mathbb{Z}_{n+1}$, é a transformação discreta de Fourier, (2.7a), dos elementos (diagonais) de D . Notemos que F_0^0 não é um elemento da álgebra de Lie A_n . Entretanto, desde que D é de traço nulo, é claro que o coeficiente \hat{d}_0 que multiplica F_0^0 desaparece. A expressão acima pode ser considerada como um elemento da álgebra de Lie clássica A_n , ou da álgebra afim $A_n^{(1)}$. Levando em conta as relações de comutação (A.21), junto com (A.23), é fácil mostrar que:

$$[F^r(\mu), D] = \frac{1}{n+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^s (\omega^{sk} - 1) \hat{d}_s}{\mu^k} F_k^{r+s}, \tag{3.3a}$$

de onde chegamos a:

$$\begin{aligned}
e^{-D} F^r(\mu) e^D &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \text{ad}^l D \cdot F^r(\mu) = \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\mu^k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{s_1, \dots, s_l \in \mathbb{Z}_{n+1}} \prod_{j=1}^l \omega^{s_j} \frac{\omega^{s_j k} - 1}{n+1} \hat{d}_{s_j} F_k^{r+s_1+\dots+s_l}.
\end{aligned} \tag{3.3b}$$

O lado direito da equação anterior tem a mesma forma que (2.11). Isto sugere usar o procedimento desenvolvido no Apêndice B para escrever explicitamente (3.3b) como

uma combinação linear dos elementos da álgebra afim. Com o intuito de fazermos isto, primeiramente introduzimos a seguinte representação (reduzível) da álgebra \mathcal{F} (2.12):

$$\begin{aligned} V^s(F_k^r) &= F_k^{r+s}, \\ r, s &\in \mathbb{Z}_{n+1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em completa analogia com a derivação da expressão (2.14), concluímos que:

$$e^{-D} F^r(\mu) e^D = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{1}{\mu^k} \mathcal{F} \exp\left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^s(\omega^{sk} - 1)}{n+1} \hat{d}_s V^s \right) (F_k^r). \quad (3.5)$$

Como no Apêndice B, diagonalizamos os operadores V^s (3.4);

$$\begin{aligned} V^s(\hat{F}_k^p) &= \omega^{ps} \hat{F}_k^p \\ \hat{F}_k^p &= \sum_r \omega^{-pr} F_k^r & F_k^r &= \frac{1}{n+1} \sum_p \omega^{pr} \hat{F}_k^p \end{aligned} \quad (3.6)$$

Combinando (3.5) com (3.6) obtemos:

$$\begin{aligned} e^{-D} F^r(\mu) e^D &= \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ p \in \mathbb{Z}_{n+1}}} \frac{\omega^{pr}}{\mu^k} e^{d_{k+p+1} - d_{p+1}} \hat{F}_k^p = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ p, s \in \mathbb{Z}_{n+1}}} \frac{\omega^{p(r-s)}}{\mu^k} e^{d_{k+p+1} - d_{p+1}} F_k^s = \frac{1}{n+1} \sum_{l, p, s \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(r-s)} \frac{e^{d_{l+p+1}}}{e^{d_{p+1}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{F_k^s}{\mu^{k(n+1)+l}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l, p, q, s \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(r-s)+lq} \frac{e^{d_{l+p+1}}}{e^{d_{p+1}}} F^s(\omega^q \mu). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como consequência da identidade acima e (1.17f), obtemos:

$$e^{-\text{ad}(K(F_i)+P_i)} F^r(\omega^a \lambda) = \sum_{s, q \in \mathbb{Z}_{n+1}} U_{sq}^{ra}(i) F^s(\omega^q \lambda) \quad (3.8a)$$

onde $K(F_i)$ e P_i são matrizes diagonais de traço nulo (1.13b), e

$$\begin{aligned} U_{sq}^{ra}(i) &= M_{s+q}^{r+a}(i) N_q^a(i), \\ M_s^r(i) &= \frac{\omega^{s-r}}{n+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{p(r-s)}}{\rho_{pi}(\mu_{i+1})}, \\ N_q^a(i) &= \frac{\omega^{a-q}}{n+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(q-a)} \rho_{pi}(\mu_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.8b)$$

No que segue necessitaremos também os comutadores $[W_+^k(\mu_i), F^s(\lambda)]$, onde os elementos da álgebra afim $W_+^k(\mu_i)$ e $F^s(\lambda)$ são dados por (1.15b) e (2.4c) respectivamente. Usando (A.21) com $\hat{c} = 1$ temos que:

$$\begin{aligned} [W_+^k(\mu_i), F^s(\lambda)] &= -\frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n \frac{(1-\omega^{-rk})\mu_i - \omega^s(1-\omega^{r(1-k)})\lambda}{(1-\omega^{-r})(\mu_i - \omega^s\lambda)} F^{r+s}(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n \frac{(1-\omega^{-rk})\mu_i - \omega^{-r}(1-\omega^{r(1-k)})\lambda}{(1-\omega^{-r})(\mu_i - \omega^{-r}\lambda)} F^{r+s}(\omega^{-r}\lambda) - \\ &- \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^n \frac{\omega^{-rk}\lambda\mu_i}{(\mu_i - \omega^{-r}\lambda)^2} \delta_{r+s,0}^{(n+1)}, \quad |\mu_i| > |\lambda|. \end{aligned} \quad (3.9a)$$

Da expressão acima, (1.13b) e (1.15a) derivamos também o comutador

$$\begin{aligned} [W_+(i), F^s(\lambda)] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} f_{ki} [W_+^k(\mu_i), F^s(\lambda)] = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{r=1}^n \frac{\hat{f}_{ri}}{1-\omega^{-r}} \left(\frac{\mu_i - \omega^{r+s}\lambda}{\mu_i - \omega^s\lambda} F^{r+s}(\lambda) - \frac{\mu_i - \lambda}{\mu_i - \omega^{-r}\lambda} F^{r+s}(\omega^{-r}\lambda) \right) - \\ &- \frac{\hat{f}_{-si}}{(n+1)^2} \frac{\lambda\mu_i}{(\mu_i - \omega^{-s}\lambda)^2}, \quad |\mu_i| > |\lambda|, \quad s \in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.9b)$$

onde \hat{f}_{ri} é entendido como a transformação discreta de Fourier (2.7a) de f_{ki} , $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$.

Usando (3.9b) provamos indutivamente:

$$\begin{aligned} \text{ad}^l W_+(i) F^s(\lambda) &= \frac{\mu_i - \lambda}{\mu_i - \omega^s\lambda} \sum_{k=0}^l (-)^{l-k} \binom{l}{k} \times \\ &\times \sum_{r_1, \dots, r_l=1}^n \frac{\mu_i - \omega^{r_1+\dots+r_k+s}\lambda}{\mu_i - \omega^{-r_{k+1}-\dots-r_l}\lambda} \prod_{p=1}^l \psi_{r_p i} F^{r_1+\dots+r_l+s}(\omega^{-r_{k+1}-\dots-r_l}\lambda) + \\ &+ \frac{\mu_i(\mu_i - \lambda)}{(n+1)^2(\mu_i - \omega^s\lambda)} \sum_{k=0}^{l-1} (-)^{l-k} \binom{l-1}{k} \times \\ &\sum_{r_1, \dots, r_{l-1}=1}^n \frac{\lambda\omega^{-r_{k+1}-\dots-r_{l-1}}}{(\mu_i - \omega^{-r_{k+1}-\dots-r_{l-1}}\lambda)(\mu_i - \omega^{r_1+\dots+r_k+s}\lambda)} \cdot \hat{f}_{-r_1 \dots -r_{l-1}-s i} \\ &\times \prod_{p=1}^l \psi_{r_p i}, \quad l \geq 1, \\ \psi_{ri} &= \frac{\hat{f}_{ri}}{(n+1)(1-\omega^{-r})}, \quad r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Notemos que após a mudança $\hat{f}_{r_i} \rightarrow \hat{\varphi}_i$, as quantidades ψ_{r_i} coincidem acima de uma fase com (2.10b). Para escrever o lado direito da identidade acima numa forma compacta, consideramos a álgebra comutativa associativa $\mathcal{A} = \mathcal{F} \times \mathcal{T}$. Recordemos que \mathcal{F} é a álgebra de Fröbenius (2.12)–(2.13b), enquanto \mathcal{T} é gerado pelos elementos \mathbb{T}^r , $r \in \mathbb{Z}_{n+1}$. A multiplicação em \mathcal{A} é introduzida por:

$$\begin{aligned} V^r * V^s &= V^{r+s}, & \mathbb{T}^r * \mathbb{T}^s &= \mathbb{T}^{r+s} \\ V^r * \mathbb{T}^s &= \mathbb{T}^s * V^r. \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Necessitaremos também das representações específicas de \mathcal{A} . Estas são definidas pelas relações :

$$\begin{aligned} V^r(g(\lambda)F^s(\lambda)) &= g(\lambda)V^r(F^s(\lambda)) = g(\lambda)F^{r+s}(\lambda), \\ \mathbb{T}^r(g(\lambda)F^s(\lambda)) &= g(\omega^{-r}\lambda)\mathbb{T}^r(F^s(\lambda)) = g(\omega^{-r}\lambda)F^s(\omega^{-r}\lambda), \end{aligned} \quad (3.11b)$$

onde g é uma função na variável complexa λ . Supõem-se também, que a álgebra \mathcal{A} , atua trivialmente em μ_i (3.10). Usando-se (3.11a) e (3.11b), é fácil certificar-se que (3.10) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} &(-)^l \text{ad}^l W_+(i)F^s(\lambda) = \\ &= \frac{\mu_i - \lambda}{\mu_i - \omega^s \lambda} \left(\left(\sum_{r=1}^n \psi_{r_i} V^r (\mathbb{T}^r - 1) \right)_*^l \frac{\mu_i F^s(\lambda)}{\mu_i - \lambda} - \omega^s \left(\sum_{r=1}^n \omega^r \psi_{r_i} V^r (\mathbb{T}^r - 1) \right)_*^l \frac{\lambda F^s(\lambda)}{\mu_i - \lambda} \right) + \\ &+ \frac{\mu_i(\mu_i - \lambda)}{(n+1)^2(\mu_i - \omega^s \lambda)} \left\langle \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \hat{f}_{p_i} V^p, \left(\sum_{r=1}^n \psi_{r_i} V^r (1 \otimes_{\mathcal{T}} \mathbb{T}^r - \mathbb{T}^r \otimes_{\mathcal{T}} 1) \right)_*^{l-1} V^s \right\rangle_{\mathcal{F}} \\ &\times \frac{1}{\mu_i - \omega^s \lambda} \otimes \frac{\lambda}{\mu_i - \lambda}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\langle , \rangle_{\mathcal{F}}$ é a forma bilinear invariante na álgebra \mathcal{F} , de Fröbenius, (2.12)–(2.13b). Usamos também a notação :

$$(\mathcal{P})_*^l = \underbrace{\mathcal{P} * \dots * \mathcal{P}}_l, \quad (3.13a)$$

para indicar que a potência l -ésima de $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ é tomada com respeito à multiplicação (3.11a). No que segue usaremos os operadores:

$$\mathcal{T} \exp(\mathcal{P}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{P})_*^l}{l!},$$

$$\mathcal{T} \frac{\exp(\mathcal{P}) - 1}{\mathcal{P}} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mathcal{P})_*^{l-1}}{l!}. \quad (3.13b)$$

Notemos que o segundo operador tem autovalor um quando aplicado nos modos zero de \mathcal{P} . Levando em conta (3.12) junto com (3.13a) e (3.13b) obtemos:

$$\begin{aligned} & e^{-\text{ad}W_+(i)}.F^s(\lambda) = \\ &= \frac{\mu_i - \lambda}{\mu_i - \omega^s \lambda} \left(\mathcal{T} e^{(\sum_{r=1}^n \psi_{ri} V^r (\mathbb{T}^r - 1))} \frac{\mu_i F^s(\lambda)}{\mu_i - \lambda} - \omega^s \mathcal{T} e^{(\sum_{r=1}^n \omega^r \psi_{ri} V^r (\mathbb{T}^r - 1))} \frac{\lambda F^s(\lambda)}{\mu_i - \lambda} \right) + \\ & \frac{\mu_i(\mu_i - \lambda)}{(n+1)^2(\mu_i - \omega^s \lambda)} \left\langle \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \hat{f}_{p_i} V^p, \mathcal{T} \frac{\exp(\sum_{r=1}^n \psi_{ri} V^r (1 \otimes_{\mathcal{T}} \mathbb{T}^r - \mathbb{T}^{-r} \otimes_{\mathcal{T}} 1)) - 1}{\sum_{r=1}^n \psi_{ri} V^r (1 \otimes_{\mathcal{T}} \mathbb{T}^r - \mathbb{T}^{-r} \otimes_{\mathcal{T}} 1)} - 1 V^s \right\rangle_{\mathcal{F}} \times \\ & \times \frac{1}{\mu_i - \omega^s \lambda} \otimes \frac{\lambda}{\mu_i - \lambda}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Em vista da equação acima, necessitaremos das representações (redutíveis) (3.11b) de \mathcal{T} (3.11a), geradas pelos vetores $g(\omega^r \lambda) F^s(\omega^r \lambda)$, $r, s \in \mathbb{Z}_{n+1}$, sendo g uma função meromórfica arbitrária em λ . É fácil verificar que:

$$G^{pq}(\lambda) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{-ps+rq} g(\omega^r \lambda) F^s(\omega^r \lambda), \quad (3.15a)$$

são os autovetores de \mathcal{T} ,

$$V^k G^{pq}(\lambda) = \omega^{pk} G^{pq}(\lambda), \quad \mathbb{T}^k G^{pq}(\lambda) = \omega^{kq} G^{pq}(\lambda). \quad (3.15b)$$

Devido à identidade (2.7b), a inversa de (3.15a) é dada por:

$$g(\omega^r \lambda) F^s(\omega^r \lambda) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{ps-rq} G^{pq}(\lambda). \quad (3.15c)$$

Notemos também que,

$$\sum_{r=1}^n \omega^{rp} \psi_{ri} = \frac{f_{pi}}{2} - K_p(F_i), \quad (3.16a)$$

onde as matrizes diagonais de traço nulo, F_i e $K(F_i)$, foram definidas por (1.13b). Para obter a identidade acima usamos as relações (1.13c). Levando em conta (1.17b) podemos escrever,

$$e^{-\sum_{r=1}^n \omega^{rp} \psi_{ri}} = \beta_p(F_i), \quad (3.16b)$$

substituindo (3.15a)–(3.16b) em (3.14) temos que:

$$\begin{aligned}
e^{-adW_+(i)} F^s(\lambda) &= \frac{\mu_i - \lambda}{(n+1)^2(\mu_i - \omega^s \lambda)} \times \\
&\times \sum_{p,q,r',s' \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(s-s')+r'q} \frac{\mu_i - \omega^{r'+s'} \lambda}{\mu_i - \omega^{r'} \lambda} \frac{\beta_p(F_i)}{\beta_{p+q}(F_i)} F^{s'}(\omega^{r'} \lambda) + \\
&+ \frac{\lambda \mu_i (\mu_i - \lambda)}{(n+1)^4 (\mu_i - \omega^s \lambda)} \sum_{a,q,q',p,p' \in \mathbb{Z}_{n+1}} f_{ai} \frac{\omega^{as+pq+p'(q'+1)}}{(\mu_i - \omega^{p+s} \lambda)(\mu_i - \omega^{p'} \lambda)} \times \\
&\times \frac{\beta_{a-q}(F_i) - \beta_{a+q'}(F_i)}{\beta_{a+q'}(F_i)(\ln \beta_{a-q}(F_i) - \ln \beta_{a+q'}(F_i))}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Em conseqüência, a ação adjunta do elemento do grupo afim $e^{-W_+(i)}$, na álgebra afim, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
e^{-adW_+(i)} F^s(\omega^c \lambda) &= \sum_{q,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} W_{qv}^{sc}[F_i](i; \lambda) F^q(\omega^v \lambda) + Z^{sc}[F_i](i, \lambda), \\
\text{para} \quad |\mu_i| &> |\lambda|. \tag{3.18a}
\end{aligned}$$

Devido a (1.15a), $W_+(i)$ é linear nas componentes f_{ki} das matrizes diagonais F_i (1.13b). Isto quer dizer que as relações,

$$\begin{aligned}
\sum_{q,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} W_{qv}^{sc}[F_i](i; \lambda) W_{kl}^{qv}[-F_i](i; \lambda) &= \delta_{s,k}^{(n+1)} \delta_{c,l}^{(n+1)} \\
\sum_{q,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} W_{qv}^{sc}[F_i](i; \lambda) Z^{qv}[-F_i](i; \lambda) + Z^{sc}[F_i](i; \lambda) &= 0, \tag{3.18b}
\end{aligned}$$

são válidas. Comparando (3.17) com (3.18a) obtemos:

$$\begin{aligned}
W_{qv}^{sc}[F_i](i; \lambda) &= K_{q+v}^{s+c}[F_i](i; \lambda) L_v^c[F_i](i; \lambda) \\
K_q^s[F_i](i; \lambda) &= \frac{1}{n+1} \frac{\mu_i - \omega^q \lambda}{\mu_i - \omega^s \lambda} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(s-q)} \beta_p(F_i) \\
L_v^c[F_i](i; \lambda) &= \frac{1}{n+1} \frac{\mu_i - \omega^c \lambda}{\mu_i - \omega^v \lambda} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(v-c)} \beta_p(-F_i) \tag{3.18c}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Z^{sc}[F_i](i, \lambda) &= \frac{\omega^c \lambda \mu_i (\mu_i - \omega^c \lambda)}{(n+1)^4 (\mu_i - \omega^{s+c} \lambda)} \sum_{\substack{a,b,p \\ v,v'}} f_{pi} \frac{\omega^{sa+(p-a)v+(b+1-p)v'+c(a-b-1)}}{(\mu_i - \omega^v \lambda)(\mu_i - \omega^{v'} \lambda)} \times \\
&\times \frac{\beta_a(F_i) - \beta_b(F_i)}{\beta_b(F_i)(\ln \beta_a(F_i) - \ln \beta_b(F_i))}. \tag{3.18d}
\end{aligned}$$

Levando em conta que as matrizes F_i (1.13b) são de traço nulo e a identidade

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}_{n+1} \\ 1 \leq r \leq n}} \frac{\omega^{(p-a)r}}{1 - \omega^r} f_{pi} = -(n+1) \ln \beta_a(F_i),$$

concluimos que (3.18d) pode alternativamente ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} Z^{sc}[F_i](i, \lambda) &= \frac{\lambda(\mu_i - \omega^c \lambda)}{(n+1)^3(\mu_i - \omega^{s+c} \lambda)} \sum_{a,b,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{a(s+c+v)-b(v+c)} \beta_a(F_i)}{\lambda - \omega^v \mu_i \beta_b(F_i)} + \\ &+ \frac{\lambda \omega^c \delta_{s,0}^{(n+1)}}{(n+1)(\mu_i - \omega^{s+c} \lambda)}. \end{aligned} \quad (3.19a)$$

Após algumas manipulações algébricas triviais que envolvem o primeiro termo da expressão acima, e usando (1.18) e (1.17d), chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned} Z^{sc}[-F_i](i, \lambda) &= \frac{\lambda}{\gamma_i(n+1)^2(\omega^{s+c} - \mu_i)} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(s+c)a-bc} \mathcal{D}_{ab}^{(i,i-1)}(\lambda) \frac{\rho_{bi-1}(\mu_i)}{\beta_a(F_i)} + \\ &+ \frac{\lambda \omega^c \delta_{s,0}^{(n+1)}}{(n+1)(\mu_i - \omega^{s+c} \lambda)}, \end{aligned} \quad (3.19b)$$

onde γ_i são as constantes definidas por (1.17d).

As equações (3.8a), (3.8b) e (3.18a) fornecem uma expressão para a ação adjunta do elemento (1.13a) na álgebra de Lie afim,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_+^{-1}(i) F^s(\omega^c \lambda) \tilde{g}_+(i) &= \sum_{r,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} (R_{rv}^{sc}(i; \lambda) F^r(\omega^v \lambda) + U_{rv}^{sc}(i) Z^{rv}[F_i](i; \lambda)) = \\ &= \sum_{r,v \in \mathbb{Z}_{n+1}} R_{rv}^{sc}(i; \lambda) (F^r(\omega^v \lambda) - Z^{rv}[-F_i](i; \lambda)) \\ |\mu_i| &> |\lambda|, \end{aligned} \quad (3.20a)$$

onde $R_{rv}^{sc}(i; \lambda)$ são os elementos da matriz $R(j; \mu_i) = U(j)W(j; \mu_i)$ que atua no produto tensorial $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} R_{rv}^{sc}(i; \lambda) &= \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_{n+1}} U_{pq}^{sc}(i) W_{rv}^{pq}(i; \lambda) = P_v^c(i; \lambda) Q_{r+v}^{s+c}(i; \lambda), \\ P_v^c(i; \lambda) &= \frac{1}{n+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(p-1)(v-c)} \frac{\lambda - \omega^{-v} e^{-f_{pi}} \mu_i \rho_{pi}(\mu_{i+1})}{\lambda - \omega^{-v} \mu_i \beta_p(F_i)}, \\ Q_r^s(i; \lambda) &= \frac{\mu_i - \omega^r \lambda}{(n+1)^2} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)s-br} \frac{\beta_b(F_i)}{\rho_{ai}(\mu_{i+1})} \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \frac{\omega^{(b+1-a)p}}{\mu_i - \omega^p \lambda}. \end{aligned} \quad (3.20b)$$

Notemos que a segunda identidade (3.20a) é uma consequência de (3.18b). Comparando as equações acima com (1.17d), e levando em conta (1.18), obtemos as seguintes expressões alternativas:

$$\begin{aligned} P_v^c(i; \lambda) &= \frac{\gamma_i}{n+1} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)v-(b-1)c} \frac{1}{\rho_{ai-1}(\mu_i)} \mathcal{D}_{ab}^{(i-1i)}(\lambda) \rho_{bi}(\mu_{i+1}), \\ Q_r^s(i; \lambda) &= \frac{1}{(n+1)\gamma_i} \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)s-(b-1)r} \frac{1}{\rho_{ai}(\mu_{i+1})} \mathcal{D}_{ab}^{(ii-1)}(\lambda) \rho_{bi-1}(\mu_i), \end{aligned} \quad (3.21)$$

a qual junto com (2.7b), (1.21c) dão:

$$\begin{aligned} (P(j; \lambda) \dots P(k; \lambda))_v^c &= \frac{\gamma_j \dots \gamma_k}{n+1} \times \\ &\times \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)v-(b-1)c} \frac{1}{\rho_{ak-1}(\mu_k)} \mathcal{D}_{ab}^{(k-1j)}(\lambda) \rho_{bj}(\mu_{j+1}) \\ (Q(j; \lambda) \dots Q(k; \lambda))_r^s &= \frac{1}{(n+1)\gamma_j \dots \gamma_k} \times \\ &\times \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)s-(b-1)r} \frac{1}{\rho_{aj}(\mu_{j+1})} \mathcal{D}_{ab}^{(j k-1)}(\lambda) \rho_{bk-1}(\mu_k) \\ &\text{para } k \leq j. \end{aligned} \quad (3.22a)$$

Então, como consequência de (3.20b), (1.21c), (3.18c), e as identidades acima, obtemos:

$$\begin{aligned} (R(j; \mu_{j+1}) \dots R(k; \mu_{j+1}))_{rv}^{p0} &= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{a,a',b' \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)v+(a'-1)p-(b'-1)(r+v)} \times \\ &\times \frac{\rho_{ak-1}(\mu_{j+1})}{\rho_{ak-1}(\mu_k)} \mathcal{D}_{a'b'}^{(j k-1)}(\mu_{j+1}) \frac{\rho_{b'k-1}(\mu_k)}{\rho_{a'j}(\mu_{j+1})}, \end{aligned} \quad (3.22b)$$

por outro lado, usando (1.17d) e (1.21c), não é difícil mostrar que:

$$\mathcal{D}_{ab}^{(jk)}(\omega^r \lambda) = \omega^{r(a-b)} \mathcal{D}_{ab}^{(jk)}(\lambda).$$

Introduzindo esta identidade em (3.22b) e levando em conta (1.17e) obtemos:

$$(R(j; \mu_{j+1}) \dots R(1; \mu_{j+1}))_{rv}^{p0} = \frac{\delta_{v,0}^{(n+1)}}{n+1} \sum_{a \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{(a-1)(p-r)} \frac{\rho_{aj}(\omega^r \mu_{j+1})}{\rho_{aj}(\mu_{j+1})},$$

e portanto

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} \omega^{p(1-k)} (R(j; \mu_{j+1}) \dots R(1; \mu_{j+1}))_{rv}^{p0} = \omega^{r(1-k)} \delta_{v,0}^{(n+1)} \frac{\rho_{kj}(\omega^r \mu_{j+1})}{\rho_{kj}(\mu_{j+1})}. \quad (3.23a)$$

Usando argumentos similares, e (1.17b)–(1.22), provamos também a identidade

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq j \\ p \in \mathbb{Z}_{n+1}}} \omega^{p(1-k)} (R(j; \mu_{j+1}) \dots R(i; \mu_{j+1}) Z[-F_i](i; \mu_{j+1}))^{p0} = -\frac{\mu_{j+1}}{n+1} \frac{d \ln \rho_{kj}}{d\lambda}(\mu_{j+1}), \quad (3.23b)$$

onde as funções $Z^{sc}[\pm F_i]$ foram definidas por (3.18a), (3.18b).

Agora estamos prontos para calcular o produto (3.1). Inserindo (3.18a) e (3.18b) em (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\tilde{g}_+^{-1}(1) \dots \tilde{g}_+^{-1}(i-1)) F^p(\mu_i) &= \sum_{r, v \in \mathbb{Z}_{n+1}} (R(i-1; \mu_i) \dots R(1; \mu_i))_{rv}^{p0} F^r(\omega^v \mu_i) - \\ &- \sum_{j=1}^{i-1} (R(i-1; \mu_i) \dots R(j; \mu_i) Z[-F_j](j; \mu_i))^{p0}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por outro lado, podemos repetir o procedimento desenvolvido no Capítulo 2, e obtemos um resultado análogo a (2.16a), (2.16b):

$$\tilde{g}(i) = \tilde{g}_-^{-1}(i) \tilde{g}_+(i) = \frac{\hat{\beta}_0(F_i)}{n+1} + \sum_{p \in \mathbb{Z}_{n+1}} (\omega^p - 1) \hat{\beta}_p(F_i) F^p(\mu_i), \quad (3.25)$$

onde $\hat{\beta}_k(F_i)$, $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$, é a transformada discreta de Fourier, (2.7a), de $\beta_k(F_i)$ (1.17b). Substituindo a expressão acima em (3.24) e levando em conta (3.23a), (3.23b) e (1.17a) concluímos que:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\tilde{g}_+^{-1}(1) \dots \tilde{g}_+^{-1}(i-1)) \tilde{g}(i) &= Y_i (1 + X_i F^{r_i}(\mu_i)), \\ X_i &= (n+1)(1 - \omega^{r_i}) \prod_{a \neq i} \frac{\omega^{r_i} \mu_i - \mu_a}{\mu_{i+1} - \mu_a} \prod_{a=1}^N \frac{\mu_i + \epsilon_{1a}}{\omega^{r_i} \mu_i + \epsilon_{1a}} \\ Y_i &= \frac{1}{n+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \left(1 + \mu_i \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{\rho_{ki-1}}{\rho_{k+i-1}}(\mu_i) \right) \beta_k(F_i). \end{aligned} \quad (3.26a)$$

Notemos que devido a (1.5a), as quantidades X_i dependem exponencialmente das variáveis do cone de luz x^+ e x^- . Combinando (3.26a), (1.10) e (1.11), deduzimos a relação:

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\Phi_0)} = e^{\frac{\zeta_0 - \zeta}{n+1}} \prod_{i=1}^N Y_i \cdot \langle \Lambda | (1 + X_1 F^{r_1}(\mu_1)) \dots (1 + X_N F^{r_N}(\mu_N)) | \Lambda \rangle, \quad (3.26b)$$

para qualquer representação fundamental com vetor de peso maximal $|\Lambda\rangle$, da álgebra de Lie do afm $A_n^{(1)}$. Conseqüentemente, as respresentações (1) e (2) coincidem desde que

$$e^{\frac{\zeta - \zeta_0}{n+1}} = \prod_{i=1}^N Y_i. \quad (3.27)$$

Parte II

Aspectos Geométricos

Capítulo 4

Superfícies pseudoesféricas em \mathbb{R}^3 , e origem geométrica das equações de Liouville e sine-Gordon

O objetivo desta seção é revisar a interpretação geométrica das equações de Liouville e sine-Gordon. É bem conhecido que ambas equações aparecem no estudo da geometria Riemanniana de superfícies de curvatura escalar constante negativa. Estas últimas são conhecidas também como *superfícies pseudoesféricas*. Dentro da geometria diferencial clássica, superfícies de curvatura escalar constante são consideradas habitualmente como variedades imersas (com métrica Riemanniana induzida) no espaço euclideo tridimensional \mathbb{R}^3 . A estrutura Riemanniana subjacente da subvariedade (neste caso a superfície) é determinada pelas equações de Gauss, Codazzi e Ricci [54, 58]. Aqui, em contraste ao tratamento clássico, vamos centralizar nossa atenção na geometria Riemanniana *interna* das superfícies pseudoesféricas. Estas últimas admitem (localmente) uma imersão isométrica no plano de Lobachevski \mathbb{H} . O estudo dessas imersões, nos permite construir explicitamente soluções das equações de Liouville e sine-Gordon.

Nesta seção faremos uso do escalar de curvatura, que é dado pela seguinte expressão:

$$R = g^{ik}g^{jl}R_{ijkl}, \quad (4.1)$$

onde g^{ij} é o inverso do tensor métrico $g^{ij}g_{ji} = \delta_i^i$ e é invariante sob mudanças locais de coordenadas.

Agora estamos em posição de estudar superfícies de curvatura escalar negativa. Na presente análise, estamos interessados em estruturas Riemannianas induzidas por uma métrica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1 dx^2 + g_{22}(dx^2)^2, \\ \partial_i g_{jj} &= 0, \quad i, j = 1, 2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde as coordenadas locais x^i não são necessariamente reais. Em vista de que estamos trabalhando com conexões sem torção

$$T(X, Y) = 0, \tag{4.3}$$

temos a seguinte identidade

$$\nabla_1 \partial_2 = \nabla_2 \partial_1, \quad \nabla_i = \nabla_{\partial_i}. \tag{4.4a}$$

De outro lado, as componentes diagonais da métrica (4.2) $g_{ii} = \langle \partial_i, \partial_i \rangle$ são constantes. Desta maneira, se a conexão é de *Levi-Civita*, podemos concluir que:

$$\nabla_i \partial_j = \nabla_j \partial_i = 0 \quad i \neq j. \tag{4.4b}$$

As identidades anteriores admitem uma interpretação geométrica clara: o campo vetorial coordenado ∂_2 (∂_1) é *paralelamente transportado* ao longo do campo vetorial ∂_1 (∂_2) com respeito à conexão de *Levi-Civita* ∇ . Também levando em conta (4.2) e as identidades anteriores, não é difícil chegar à seguinte expressão [38]

$$\begin{aligned} \nabla_1 \partial_1 &= \frac{1}{g} (-g_{12} \partial_1 g_{12} \partial_1 + g_{11} \partial_1 g_{12} \partial_2), \\ \nabla_2 \partial_2 &= \frac{1}{g} (g_{22} \partial_2 g_{12} \partial_1 - g_{12} \partial_2 g_{12} \partial_2), \\ g &= \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \end{aligned} \tag{4.4c}$$

Além disso, usando as definições dos tensores de curvatura, torção e as identidades anteriores, temos

$$R_{1212} = \partial_1 \partial_2 g_{12} + \frac{g_{12}}{g} \partial_1 g_{12} \partial_2 g_{12}. \tag{4.5}$$

Devido às simetrias do tensor de curvatura associado à conexão de Levi-Civita: $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$, $R_{ijkl} = R_{klij}$ [38, 58], em duas dimensões, o tensor de Riemann tem só uma componente independente: R_{1212} . Em particular, o escalar de curvatura pode ser escrito como

$$R = \frac{2}{g} R_{1212}. \quad (4.6)$$

Fixemos agora coordenadas conformes na superfície \mathcal{S} . Inserindo $x^1 = z$, $x^2 = \bar{z}$ onde z e \bar{z} são coordenadas complexas, a métrica é a seguinte:

$$ds^2 = e^{\varphi(z, \bar{z})} dz d\bar{z}. \quad (4.7)$$

É um fato bem conhecido na teoria de superfícies [50, 38] que qualquer métrica Riemanniana em \mathcal{S} é conformalmente plana. Isto quer dizer que mediante uma adequada mudança local de coordenadas, esta se reduz à expressão anterior. Já que a métrica conformalmente plana é um caso particular de (4.2), podemos usar (4.5) para calcular o escalar de curvatura (4.6). O resultado é [38]:

$$\begin{aligned} R &= -4e^{-\varphi(z, \bar{z})} \partial \bar{\partial} \varphi(z, \bar{z}), \\ \partial &= \frac{\partial}{\partial z}, \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Outra escolha possível é considerar as coordenadas *generalizadas* de Tschebyscheff em \mathcal{S}

$$ds^2 = \lambda^2 (dx^+)^2 + \lambda^{-2} (dx^-)^2 + 2 \cos \psi dx^+ dx^-, \quad (4.9)$$

onde x^\pm são coordenadas locais, $\psi = \psi(x^+, x^-)$ é uma função real e λ é uma constante real. Substituindo novamente as expressões gerais (4.5) e (4.6) em (4.9) concluimos que o escalar de curvatura da métrica generalizada de Tschebyscheff é:

$$R = -2 \frac{\partial_+ \partial_- \psi}{\sin \psi}, \quad \partial_\pm = \frac{\partial}{\partial x^\pm}. \quad (4.10)$$

Impondo a condição que \mathcal{S} é uma superfície de curvatura escalar constante negativa $R = -2$ deduzimos de (4.8) a equação de Liouville

$$\partial \bar{\partial} \varphi = \frac{1}{2} e^\varphi, \quad (4.11)$$

enquanto que (4.10) nos dá a equação sine-Gordon

$$\partial_+ \partial_- \psi = \sin \psi. \quad (4.12)$$

Assim concluímos que as duas equações anteriores admitem uma interpretação geométrica clara. Mais precisamente, elas aparecem quando fixamos sistemas de coordenadas locais especiais sobre superfícies pseudoesféricas.

Nesta altura, a questão da existência de uma superfície “privilegiada” \mathbb{H} de curvatura escalar constante negativa $R = -2$ ainda permanece. Por “privilegiado” entendemos que qualquer outra superfície \mathcal{S} de mesma curvatura escalar admite, ao menos localmente, uma imersão isométrica $\mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathbb{H}$. Em particular, a métrica sobre \mathcal{S} é um “pull-back” da métrica em \mathbb{H} . A resposta à pergunta anterior é positiva e é dada pelo seguinte teorema [38]:

Teorema. Uma superfície num espaço \mathbb{R}^3 e com métrica $ds^2 = g(z, \bar{z})dzd\bar{z}$ e com curvatura escalar constante R é localmente isométrica a:

- (i) a esfera se $R > 0$;
- (ii) ao plano Euclideano se $R = 0$;
- (iii) ao plano de Lobachevski se $R < 0$.

Prova. De (4.8), assumindo R constante, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{R}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) = e^{-\varphi} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2 \partial \bar{z}} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \\ &= e^{-\varphi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

assim a função

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \psi(z),$$

é analítica e é proporcional à parte quiral do tensor de energia momentum do modelo de Liouville. Sob uma mudança de coordenadas $z = f(w)$, a métrica toma a forma

$$ds^2 = g(z, \bar{z}) \left| \frac{df}{dw} \right|^2 dw d\bar{w} = \tilde{g}(w, \bar{w}) dw d\bar{w}.$$

se definirmos $\tilde{\varphi}(w, \tilde{w})$ por $\tilde{g}(w, \tilde{w}) = e^{\tilde{\varphi}}$, segue-se que:

$$\tilde{\varphi}(w, \tilde{w}) = \varphi(z, \bar{z}) + \ln \frac{df}{dw} + \ln \frac{d\bar{f}}{d\bar{w}}, \quad (4.13)$$

já que $\tilde{\varphi}$ é definida completamente análoga a φ , a função $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial w^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial w} \right)^2 = \tilde{\psi}(w)$, também é analítica (como função de w). Disto e da equação (4.13), obtemos

$$\tilde{\psi}(w) = \psi(z)(f')^2 + \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2,$$

onde $f' = \frac{df}{dw}$. Podemos escolher f de tal maneira que $\tilde{\psi}(w)$ se anule identicamente, isto é f é uma função analítica que satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 = -\psi(z)(f')^2. \quad (4.14)$$

Mostra-se dentro do contexto das equações diferenciais que a equação (4.14) tem solução analítica.

Escolhendo f tal que satisfaça a equação (4.14), temos que $\tilde{\psi}(w) \equiv 0$ de onde

$$\frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}{\partial w^2} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial w^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial w} \right)^2 = 0. \quad (4.15)$$

Se colocarmos $w = u + iv$, então a equação (4.15) escreve-se:

$$\frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}}}{\partial v^2},$$

pode-se ver facilmente destas equações que

$$e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}} = a(u^2 + v^2) + \text{funções lineares de } u \text{ e } v, \quad (4.16)$$

a qual na notação complexa toma a forma

$$e^{-\frac{\tilde{\varphi}}{2}} = aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c,$$

onde a e c são reais. Em termos de nossas novas coordenadas w e \bar{w} , nossa métrica é dada por:

$$ds^2 = \frac{dw d\bar{w}}{(aw\bar{w} + bw + \bar{b}\bar{w} + c)^2}. \quad (4.17)$$

Daqui e da expressão (4.8) (com φ substituído por $\bar{\varphi}$), e (4.16), segue que a curvatura escalar é $R = 4(ac - b\bar{b})$. Mediante transformações de Möbius, a expressão (4.17) pode ser escrita nas formas seguintes:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \frac{4R^4 dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} & \text{se } R = 4(ac - b\bar{b}) > 0; \\
 (ii) \quad & dzd\bar{z} & \text{se } R = 4(ac - b\bar{b}) = 0; \\
 (iii) \quad & \frac{4R^4 dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} & \text{se } R = 4(ac - b\bar{b}) < 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

as quais são as formas familiares da métrica da esfera, plano Euclideano, e o plano hiperbólico respectivamente.

Por \mathbb{H} podemos escolher o plano de Lobachevski

$$\mathbb{H} = \{u \in \mathbb{C} \mid \text{Im}u > 0\}$$

munido da métrica

$$ds^2 = -4 \frac{du d\bar{u}}{(u - \bar{u})^2} \tag{4.19}$$

Em vista de (4.8), \mathbb{H} é uma variedade de curvatura escalar constante negativa $R = -2$. Mais ainda, a expressão

$$e^{\varphi(u, \bar{u})} = -\frac{4}{(u - \bar{u})^2}, \tag{4.20}$$

satisfaz a equação de Liouville (4.11) com respeito às variáveis complexas u e \bar{u} ($\text{Im}u > 0$). Vamos supor agora que \mathcal{S} é uma superfície pseudoesférica e que (z, \bar{z}) são coordenadas conformes nesta. De (4.19), notamos que u tem que ser uma função holomorfa ou antiholomorfa em z . Desde que a métrica Lobachevskiana é invariante mediante a mudança $u \leftrightarrow \bar{u}$, podemos assumir $u = u(z)$, $\bar{u} = \bar{u}(\bar{z})$. Portanto, de (4.19) segue-se que a métrica induzida em \mathcal{S} é dada por:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= e^{\varphi(z, \bar{z})} dzd\bar{z}, \\
 e^{\varphi(z, \bar{z})} &= -4 \frac{\partial u \partial \bar{u}}{(u - \bar{u})^2}, \quad \bar{\partial}u = \partial\bar{u} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

A expressão anterior para o campo de Liouville é a famosa fórmula de Liouville [62]. Ela implica em particular que e^φ é uma $(1, 1)$ forma com respeito a mudanças holomórficas (ou conformes) de coordenadas locais. Como consequência, recuperamos a invariância conforme da equação de Liouville

$$\begin{aligned} z \rightarrow z' = z'(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{z}' = \bar{z}'(\bar{z}), \\ \varphi(z, \bar{z}) \rightarrow \varphi'(z', \bar{z}') = \varphi(z, \bar{z}) + \ln \frac{dz}{dz'} + \ln \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Consideremos agora o caso de sine–Gordon. Vamos supor que a métrica generalizada de Tschebyscheff (4.9) na superfície \mathcal{S} de curvatura escalar constante negativa é um “pull-back” da métrica de Lobachevski em \mathbb{H} (4.19). Em particular, isto quer dizer que a aplicação $\mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathbb{H}$ satisfaz as equações

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi} &= -4 \frac{\partial_{\pm} u \partial_{\mp} \bar{u}}{(u - \bar{u})^2}, \\ \partial_{\pm} u \partial_{\pm} \bar{u} &= -\frac{\lambda^{\pm 2}}{4} (u - \bar{u})^2, \quad u = u(x^+, x^-, \lambda), \quad \bar{u} = \bar{u}(x^+, x^-, \lambda), \end{aligned} \quad (4.23)$$

as quais são a contraparte sine–Gordon da fórmula de Liouville (4.21). É instrutivo verificar diretamente que as expressões anteriores nos dão uma solução da equação sine–Gordon. Para isto, observemos que as equações

$$\nabla_+ \partial_- = \nabla_- \partial_+ = \left(\partial_+ \partial_- u - 2 \frac{\partial_+ u \partial_- u}{u - \bar{u}} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\partial_+ \partial_- \bar{u} + 2 \frac{\partial_+ \bar{u} \partial_- \bar{u}}{u - \bar{u}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad (4.24)$$

$$\nabla_{\pm} \partial_{\pm} = \left(\partial_{\pm}^2 u - 2 \frac{(\partial_{\pm} u)^2}{u - \bar{u}} \right) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\partial_{\pm}^2 \bar{u} + 2 \frac{(\partial_{\pm} \bar{u})^2}{u - \bar{u}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \quad (4.25)$$

são válidas. Para derivar estas identidades usamos (4.23), assim como as derivadas covariantes

$$\begin{aligned} \nabla_u \frac{\partial}{\partial u} &= -\frac{2}{u - \bar{u}} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \nabla_{\bar{u}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} = \frac{2}{u - \bar{u}} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}, \\ \nabla_u \frac{\partial}{\partial \bar{u}} &= 0, \quad \nabla_{\bar{u}} \frac{\partial}{\partial u} = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

as quais de acordo com (4.4c) definem a conexão de Levi–Civita no plano de Lobachevski. Devido a (4.4b), a derivada covariante (4.24) se anula identicamente. Levando em conta esta observação e usando (4.23) temos que:

$$i\partial_+ \psi = \frac{\partial_+^2 u}{\partial_+ u} - 2 \frac{\partial_+ u}{u - \bar{u}},$$

$$i\partial_- \psi = \frac{\partial_-^2 \bar{u}}{\partial_- \bar{u}} + 2 \frac{\partial_- \bar{u}}{u - \bar{u}}. \quad (4.27)$$

Usando novamente (4.23) e o fato que (4.24) se anula, concluímos que o sistema anterior é integrável e ψ satisfaz a equação sine-Gordon (4.12).

Para fechar esta seção vamos remarcar o seguinte: como vimos de (4.21) e (4.23), uma imersão isométrica de uma determinada superfície pseudoesférica (com curvatura escalar $R = -2$) nos proporciona soluções das equações de Liouville e sine-Gordon. Por outro lado, uma imersão isométrica $\mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathbb{H}$ é fixada acima de uma transformação isométrica de \mathbb{H} . É bem conhecido que o grupo de isometrias da métrica (4.19) coincide com $PSL(2, \mathbb{R})$. Este atua no semiplano complexo superior mediante transformações projetivas (ou de Möbius)

$$u \rightarrow \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (4.28)$$

Fazendo um cálculo simples mostra-se que as equações (4.21) e (4.23) são invariantes com respeito às transformações acima.

Capítulo 5

Soluções gerais das equações de Liouville e sine–Gordon

Este capítulo é dedicado ao estudo das soluções gerais das equações de Liouville (4.11) e sine–Gordon (4.12). Nosso objetivo é mostrar que as expressões (4.21) e (4.23) preenchem, ao menos *localmente*, o espaço de soluções de (4.11) e (4.12) respectivamente. Em vista da análise apresentada anteriormente, pode-se concluir que qualquer solução das equações de Liouville e sine–Gordon pode ser descrita como imersão isométrica de uma superfície de curvatura escalar constante negativa no plano de Lobachevski \mathbb{H} . Neste capítulo adotaremos uma terminologia emprestada da teoria das cordas: chamaremos u e \bar{u} ($\text{Im}u > 0$) de variáveis de “espaço bersalho”; as coordenadas locais (z, \bar{z}) as quais aparecem na equação de Liouville (4.11), assim como x^\pm relacionadas à equação sine–Gordon serão chamadas de variáveis da “world-sheet”.

Para mostrar que (4.21) e (4.23) nos fornecem (ao menos localmente) soluções gerais das equações diferenciais correspondentes, usaremos a representação de curvatura zero.

A equação de Liouville admite uma representação de curvatura zero

$$F_{z\bar{z}} = [\mathcal{D}_z, \mathcal{D}_{\bar{z}}] = 0$$

para uma conexão que pertence à álgebra de Lie $sl(2)$

$$\mathcal{D}_z = \partial + A_z, \quad \mathcal{D}_{\bar{z}} = \bar{\partial} + A_{\bar{z}},$$

$$A_z = \partial\Phi + \frac{1}{2}e^{\text{ad}\Phi}E^+, \quad A_{\bar{z}} = -\bar{\partial}\Phi + \frac{1}{2}e^{-\text{ad}\Phi}E^-, \quad \Phi = \frac{1}{4}\varphi H. \quad (5.1)$$

Nas expressões anteriores H e E^\pm são os geradores de $sl(2)$

$$[H, E^\pm] = \pm 2E^\pm, \quad [E^+, E^-] = H. \quad (5.2)$$

Uma representação similar é válida para a equação sine-Gordon

$$F_{+-} = [\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-] = 0.$$

As derivadas covariantes \mathcal{D}_\pm neste caso estão dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\pm &= \partial_\pm + A_\pm, \quad A_\pm = \pm i\partial_\pm\Psi + \frac{1}{2}e^{\pm i\text{ad}\Psi}\mathcal{E}_\pm, \\ \Psi &= \frac{1}{4}\psi H, \quad \mathcal{E}_\pm = \lambda^{\pm 1}(E^+ + E^-). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Devido à condição de curvatura zero, existe uma solução das equações de transporte paralelo

$$D_\alpha\theta = (\partial_\alpha + A_\alpha)\theta = 0, \quad (5.4)$$

onde $\alpha = z, \bar{z}$ para (5.1) e $\alpha = \pm$ para (5.3). No contexto do método do espalhamento inverso (MEI) [6], as equações acima são conhecidas como o problema linear auxiliar. Podemos também referir-nos a elas como o sistema linear relacionado à correspondente equação diferencial integrável. Trataremos aqui com a seguinte representação de $sl(2)$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Então, a solução do sistema linear (5.4) θ é uma matriz de 2×2 cujas componentes dependem do parâmetro espectral λ no caso de sine-Gordon (5.3). Desde que A_α (5.1), (5.3) são matrizes de traço nulo, é claro que o determinante de θ não depende das coordenadas do “world-sheet”

$$\partial_\mu \det\theta = 0. \quad (5.6)$$

No que se segue vamos precisar das seguintes notações:

$$A(\theta) = \frac{\theta_{12}}{\theta_{11}}, \quad B(\theta) = \frac{\theta_{22}}{\theta_{21}}, \quad (5.7)$$

onde θ_{ij} , $i, j = 1, 2$ são as componentes da matriz θ .

Vamos considerar primeramente a conexão de Lax

$$A_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{2} & e^{\frac{\varphi}{2}} \\ 0 & -\frac{\partial\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\partial}\varphi}{2} & 0 \\ e^{\frac{\varphi}{2}} & \frac{\bar{\partial}\varphi}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Inserindo-as em (5.4) e levando em conta as notações (5.7), temos o sistema:

$$\begin{aligned} \partial A &= -\frac{e^{\frac{\varphi}{2}} \det\theta}{2\theta_{11}^2} & \partial B &= 0 \\ \bar{\partial} A &= 0 & \bar{\partial} B &= \frac{e^{\frac{\varphi}{2}} \det\theta}{2\theta_{21}^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Das expressões anteriores, vemos que o campo de Liouville pode ser expresso como:

$$e^{\varphi(z, \bar{z})} = -4 \frac{\partial A(z) \bar{\partial} B(\bar{z})}{(A(z) - B(\bar{z}))^2}, \quad (5.10)$$

que é semelhante à fórmula de Liouville (4.21).

Para tratar a equação sine-Gordon, vamos escrever a respectiva conexão (5.3) na representação fundamental de $sl(2)$,

$$A_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\frac{\partial_+\psi}{2} & \lambda e^{i\frac{\psi}{2}} \\ \lambda e^{-i\frac{\psi}{2}} & -i\frac{\partial_+\psi}{2} \end{pmatrix}, \quad A_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\frac{\partial_-\psi}{2} & \lambda^{-1} e^{-i\frac{\psi}{2}} \\ \lambda^{-1} e^{i\frac{\psi}{2}} & i\frac{\partial_-\psi}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Usando (5.4) e (5.11) concluimos que as quantidades (5.7) satisfazem as equações

$$\partial_{\pm} A = -\lambda^{\pm 1} \frac{e^{\pm i\frac{\psi}{2}} \det\theta}{2\theta_{11}^2}, \quad \partial_{\pm} B = \lambda^{\pm 1} \frac{e^{\mp i\frac{\psi}{2}} \det\theta}{2\theta_{21}^2}. \quad (5.12)$$

Usando estas equações (5.12) é fácil reconstruir o campo de sine-Gordon

$$\begin{aligned} e^{\pm i\psi} &= -4 \frac{\partial_{\pm} A \partial_{\mp} B}{(A - B)^2}, \\ \partial_{\pm} A \partial_{\pm} B &= -\frac{\lambda^{\pm 2}}{4} (A - B)^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

As expressões anteriores aparecem como uma generalização da solução geométrica (4.23).

Comparando (5.10) com (5.13), vemos que existe uma expressão uniforme para as soluções gerais das equações de Liouville e sine-Gordon. Em particular, ambas equações

são solucionadas em termos das funções A e B (5.7). No entanto, estas últimas são restritas por diferentes condições. No caso de Liouville A , é uma função holomorfa de z , enquanto B é anti-holomorfa. Quando consideramos o modelo sine-Gordon, estas condições devem ser mudadas por (5.13). Notemos também que começando das equações (5.9) e (5.12) e levando em conta (5.7), assim como a relação algébrica

$$A - B = -\frac{\det\theta}{\theta_{11}\theta_{21}}, \quad (5.14)$$

temos que a matriz quadrada de ordem 2 θ é uma solução do correspondente problema linear. É fácil verificar que as expressões de (5.13) são suficientes para mostrar que ψ é uma solução da equação sine-Gordon. Para provar isto, primeiro temos que observar que as identidades

$$\partial_+\partial_-A = 2\frac{\partial_+A\partial_-A}{A-B}, \quad \partial_+\partial_-B = -2\frac{\partial_+B\partial_-B}{A-B}, \quad (5.15)$$

seguem de (5.13). Aqui salientamos que as identidades anteriores são análogas a (4.24). Ao derivar a expressão (5.15) usamos unicamente a representação de curvatura zero. A solução da equação sine-Gordon subjacente depende de uma variável adicional λ . Esta variável não deve ser confundida com o parâmetro espectral o qual aparece na conexão (5.3), (5.11). De fato (5.13) não é suficiente para provar que ψ não depende de λ .

Agora iremos a discutir as simetrias das equações (5.9) e (5.12). É claro que as translações a esquerda

$$\theta \rightarrow \theta^g = g\theta$$

atuando nas soluções de (5.4) induzem uma transformação de calibre

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^g = -\partial_\mu g g^{-1} + g A_\mu g^{-1}.$$

As funções A e B (5.7) permanecem invariantes por ações a esquerda dos elementos diagonais $g \in SL(2)$. Por outro lado, é óbvio que uma multiplicação a direita $\theta \rightarrow \theta g$ por um elemento g o qual não depende das variáveis do “world-sheet”, onde $g \in GL(2)$ para o modelo de Liouville e g está no correspondente grupo de laços $\widetilde{GL}(2)$ para o caso sine-Gordon, mantém o sistema linear (5.4) invariante. Fazendo

$$g = \begin{pmatrix} \delta & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (5.16)$$

podemos ver que aplicações a direita induzem transformações de Möbius

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \frac{\alpha A + \beta}{\gamma A + \delta}, & B &\rightarrow \frac{\alpha B + \beta}{\gamma B + \delta}, \\ \det\theta &\rightarrow \det\theta \det g, \end{aligned} \quad (5.17)$$

a qual obviamente preserva as equações (5.9) e (5.12).

Até agora não impomos a condição de realidade dos campos φ e ψ . Para implementar isto primeiro observemos que a álgebra de Lie $sl(2)$ tem um automorfismo involutivo (reflexão de Weyl)

$$\Pi H = -H, \quad \Pi E^\pm = E^\mp, \quad (5.18)$$

a qual na representação fundamental é implementada pelo elemento σ

$$\Pi X = \sigma X \sigma, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in sl(2). \quad (5.19)$$

Portanto, de (5.1) e (5.8) segue-se que o campo de Liouville φ é real se as seguintes equações são satisfeitas:

$$\bar{A}_z = \Pi A_{\bar{z}}, \quad \bar{A}_{\bar{z}} = \Pi A_z, \quad (5.20)$$

onde a barra significa conjugação complexa. Assumimos que os geradores da álgebra $sl(2)$ são reais: $\bar{H} = H$, $\bar{E}^\pm = E^\pm$. Em vista de (5.19) e (5.20), temos as seguintes regras de conjugação complexa na representação fundamental:

$$\bar{A}_z = \sigma A_{\bar{z}} \sigma, \quad \bar{A}_{\bar{z}} = \sigma A_z \sigma. \quad (5.21)$$

Relações de involução similares acontecem com a conexão sine-Gordon (5.3) para valores reais de ψ

$$\bar{A}_\pm(\lambda) = \Pi A_\pm(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.22)$$

Na representação fundamental, temos que

$$\bar{A}_\pm(\lambda) = \sigma A_\pm(\lambda) \sigma. \quad (5.23)$$

Levando em conta (5.20) e as equações anteriores, observamos que sempre que a matriz θ cumpre (5.4) com A_μ dada por (5.8) ou (5.11), o elemento $\bar{\theta} \sigma$ é sempre uma solução do

mesmo sistema linear. Em vista desta observação, temos as seguintes regras de conjugação complexa:

$$\bar{\theta} = \sigma \theta C, \quad C \bar{C} = 1, \quad (5.24)$$

onde C é independente das coordenadas da “world-sheet”. É claro que o elemento C é fixado unicamente pela condição inicial imposta sobre θ . Por exemplo, vamos supor primeiro que em certo ponto da “world-sheet” $\theta(P) = 1$. Portanto, de (5.24) segue-se que $C = \sigma$ e assim

$$\bar{A} = \frac{1}{B}. \quad (5.25)$$

Devido a (5.6) e a condição inicial imposta sobre θ , concluímos que $\det \theta = 1$. Mais ainda, levando em conta (5.14) e a equação anterior, vemos que A pertence ao disco unitário

$$\mathbb{D} = \{A \in \mathbb{C}; A\bar{A} < 1\}.$$

Notemos também que substituindo (5.25) na solução geral da equação de Liouville (5.10), recuperamos a métrica de Poincaré em \mathbb{D} [38]

$$ds^2 = e^{\varphi(z, \bar{z})} dz d\bar{z} = 4 \frac{dA d\bar{A}}{(1 - A\bar{A})^2}, \quad |A|^2 < 1. \quad (5.26)$$

Outra possível escolha da condição inicial é $\hat{\theta}(P) = \Gamma$ onde

$$\Gamma = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Levando em conta (5.19), verificamos facilmente que a matriz Γ satisfaz a relação de comutação

$$\Gamma^{-1} \sigma \bar{\Gamma} = 1 \quad (5.28)$$

e daqui

$$\bar{\hat{\theta}} = \sigma \hat{\theta}. \quad (5.29)$$

Portanto, as quantidades \hat{A} e \hat{B} são conjugadas complexas uma da outra

$$\bar{\hat{A}} = \hat{B}. \quad (5.30)$$

Combinando a identidade anterior com (5.17), (5.25) e fazendo $u = \hat{A}$, $\bar{u} = \hat{B}$ chegamos a seguinte relação:

$$u = -i \frac{A+1}{A-1}, \quad |A|^2 < 1, \quad (5.31)$$

o qual nos proporciona um isomorfismo analítico entre o disco unitário \mathbb{D} e o semi-plano complexo superior \mathbb{H} [66]. Em particular de (5.10) e (5.13) segue que as expressões (4.21) e (4.23) nos dão soluções (locais) das equações de Liouville e sine-Gordon respectivamente.

Capítulo 6

As Transformações de Lie–Bäcklund

Transformações que envolvem coordenadas locais, campos e suas derivadas, tem sido extensivamente estudadas na literatura [53, 6, 54] em relação ao formalismo de Lie para equações diferenciais. Como um exemplo simples, podemos pegar as transformações tangenciais de Lie de ordem finita (aqui seguimos a definição adotada em [53]). Sob a suposição de inversibilidade, um resultado clássico devido a Bäcklund, estabelece que qualquer transformação tangencial de ordem k é uma prolongação de uma transformação tangencial de Lie (de primeira ordem). Portanto, as transformações tangenciais de Lie podem ser usadas unicamente no estudo das *equações diferenciais de primeira ordem*. Existem duas alternativas que estão relacionadas, elas podem ser usadas para estudar transformações entre equações diferenciais de ordem superior. A primeira está relacionada com a teoria de grupos das transformações de Lie–Bäcklund, os quais são generalizações infinito dimensionais (são incluídas derivadas de ordem arbitraria) das transformações tangenciais de Lie. De outro lado, é possível considerar transformações multivaloradas. As transformações de Bianchi-Lie e suas generalizações devidas a Bäcklund e Darboux [50, 52, 53, 54] são um exemplo particular das transformações (de superfícies) multivaloradas. A aplicação considerada por Bäcklund tem interpretação geométrica: ela transforma uma superfície dada \mathcal{S} em \mathbb{R}^3 numa outra superfície \mathcal{S}' em \mathbb{R}^3 . Uma propriedade importante da transformação mencionada anteriormente $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ é que para assegurar a integrabilidade, ambas superfícies \mathcal{S} e \mathcal{S}' devem ter a mesma curvatura constante negativa. Este procedimento

permite que, começando por uma dada solução de uma equação diferencial parcial fixa, (a qual no nosso caso particular é a equação sine-Gordon) possamos construir uma família de soluções da mesma equação diferencial parcial. A generalização desta prévia construção geométrica nos leva à noção geral de transformação de Bäcklund.

6.1 A transformada de Lie–Bäcklund entre as equações de Liouville e sine–Gordon

O objetivo deste capítulo é construir uma transformação de Bäcklund que relacione a equação de Liouville com a equação sine-Gordon. Para introduzir a noção de uma transformação de Lie-Bäcklund neste caso especial, consideremos dois conjuntos infinitos de variáveis $\mathbf{L} = \{z, \bar{z}, \varphi, \partial\varphi, \bar{\partial}\varphi, \dots\}$ e $\mathbf{S} = \{x^+, x^-, \psi, \partial_+\psi, \partial_-\psi, \dots\}$, (os pontos significam que são levadas em conta derivadas de ordem arbitrária). \mathbf{L} e \mathbf{S} estão relacionados às equações de Liouville e sine-Gordon respectivamente. Então de acordo com [53] uma transformação de Lie-Bäcklund é uma aplicação inversível $\mathbf{L} \leftrightarrow \mathbf{S}$, que preserva a condição de tangência de ordem arbitrária, e tal que ψ (φ) satisfaz a equação sine-Gordon (Liouville) se e somente se φ (ψ) é uma solução da equação de Liouville (sine-Gordon).

Começaremos introduzindo algumas notações. Denotemos por $\theta(z, \bar{z})$ e $T(x^+, x^-, \lambda)$ as soluções dos sistemas lineares (5.4) de Liouville e sine-Gordon respectivamente. As componentes das correspondentes conexões de Lax são dadas por (5.8) e (5.11). Vamos assumir que ambos os campos, tanto de Liouville quanto de sine-Gordon são reais. As matrizes quadradas de ordem 2, θ e T , são fixadas impondo a condição inicial

$$\theta(0, 0) = T(0, 0, \lambda) = \Gamma \quad (6.1)$$

onde a matriz Γ é dada por (5.27). Da expressão (5.30) pode-se ver que as quantidades A e B (5.7) são complexas conjugadas uma da outra. Também, foi mostrado na secção prévia que a expressão (6.1) implica que $u(\theta) = A(\theta)$ ($\bar{u}(\theta) = B(\theta)$), assim como $u(T) = A(T)$ ($\bar{u}(T) = B(T)$) estão no semiplano superior complexo \mathbb{H} . Podemos posteriormente supor que φ e ψ são tais que

$$u(\theta) = u(T) \quad (6.2)$$

A restrição anterior pode ser removida pelo requerimento mais fraco de que $u(\theta)$ e $u(T)$ estão relacionados através de uma transformação $PSL(2, \mathbb{R})$ (ou transformação de Möbius)

$$u(\theta) = \frac{\alpha u(T) + \beta}{\gamma u(T) + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (6.3)$$

A razão desta liberdade é que as soluções θ e T (sem fixar as condições iniciais (6.1)) são determinadas a menos de uma multiplicação a direita por um elemento do grupo $SL(2, \mathbb{R})$. Em vista de (5.17), que atua mediante transformações de Möbius sobre as variáveis u e \bar{u} . Como foi comentado anteriormente, a interpretação geométrica da ambiguidade (6.3), é baseado no fato que uma imersão isométrica é determinada a menos de uma isometria do “espaço bersalho”, o qual em nosso caso é o plano de Lobachevski \mathbb{H} . Devido à invariância de (5.9) e (5.12) sob uma transformação de Möbius (5.17), podemos restringir nossa atenção unicamente a (6.2).

Comparando (5.7) e (5.30) com (6.2) junto com as identidades $\det\theta = \det T = -\frac{i}{2}$, as quais são uma consequência da condição inicial (6.1) imposta sobre θ e T , temos as seguintes relações

$$\theta_{11}\theta_{21} = t_{11}t_{21} = \frac{i}{2(u - \bar{u})} \quad (6.4)$$

estas são compatíveis com as identidades $\bar{\theta}_{1i} = \theta_{2i}$; $\bar{t}_{1i} = t_{2i}$, $i = 1, 2$. Tais identidades se seguem de (5.27)–(5.30). Como um resultado das relações anteriores deduzimos que as frações $\frac{\theta_{11}}{t_{11}}$ e $\frac{\theta_{21}}{t_{21}}$ são fases puras conjugadas complexas uma da outra,

$$e^{i\omega} = \frac{\theta_{11}}{t_{11}}, \quad e^{-i\omega} = \frac{\theta_{21}}{t_{21}}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (6.5)$$

Substituindo (6.2) em (5.9) e (5.12) temos como resultado

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}(z, \bar{z})}{\mathcal{D}(x^+, x^-)} &= e^{-\frac{\psi}{2}} \begin{pmatrix} \lambda e^{i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} & \lambda^{-1} e^{-i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} \\ \lambda e^{-i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} & \lambda^{-1} e^{i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} \end{pmatrix} \\ \frac{\mathcal{D}(x^+, x^-)}{\mathcal{D}(z, \bar{z})} &= \frac{e^{\frac{\psi}{2}}}{2i \sin \psi} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} e^{i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} & -\lambda^{-1} e^{-i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} \\ \lambda e^{-i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} & \lambda e^{i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde a quantidade ω foi introduzida através de (6.5) e usamos também a noção clássica de matriz Jacobiana: consideremos, digamos uma aplicação C^∞ , $y^i = y^i(x^1, x^2)$, $i = 1, 2$. Então a matriz Jacobiana é definida pela expressão

$$\frac{\mathcal{D}(y^1, y^2)}{\mathcal{D}(x^1, x^2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Esta obviamente obedece a relação $\frac{\mathcal{D}(z^1, z^2)}{\mathcal{D}(y^1, y^2)} \frac{\mathcal{D}(y^1, y^2)}{\mathcal{D}(x^1, x^2)} = \frac{\mathcal{D}(z^1, z^2)}{\mathcal{D}(x^1, x^2)}$. A mudança $(x^1, x^2) \rightarrow (y^1, y^2)$ é localmente inversível se e somente se o Jacobiano associado $J = \det \frac{\mathcal{D}(y^1, y^2)}{\mathcal{D}(x^1, x^2)}$ não se anula. Então as matrizes (6.6) não são degeneradas desde que

$$J = \det \frac{\mathcal{D}(z, \bar{z})}{\mathcal{D}(x^+, x^-)} = 2ie^{-\varphi} \sin \psi \quad (6.7)$$

é diferente de zero: $\psi \neq 0(\text{mod}\pi)$. É conveniente discutir o significado geométrico da transformação $(z, \bar{z}) \leftrightarrow (x^+, x^-)$. Uma conta imediata baseada em (6.6) nos mostra que (z, \bar{z}) são coordenadas conformes locais sobre a superfície \mathcal{S} (4.7) se e somente se (x^+, x^-) são coordenadas de tipo Tchebyscheff (4.9) sobre a mesma superfície. Foi demonstrado em [38] que as coordenadas complexas z e \bar{z} , consideradas como funções de x^\pm , satisfazem a equação de Laplace-Beltrami associada à métrica de Tchebyscheff. Vejamos um pequeno esboço do que acabamos de estabelecer. Primeiro, temos a nosso favor que os fatores de fase (6.5) podem ser eliminados. Em particular, começando de (6.6), temos que:

$$\partial_+ z = \lambda^2 e^{i\psi} \partial_- z \quad (6.8)$$

o qual com a ajuda das identidades

$$1 \mp i \cotg \psi = \mp i \frac{e^{\pm i\psi}}{\sin \psi} \quad (6.9)$$

pode ser reescrito alternativamente como

$$\partial_\pm z = \mp i \left(\cotg \psi \partial_\pm - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin \psi} \partial_\mp \right) z \quad (6.10)$$

Da integrabilidade deste sistema resulta a equação

$$\begin{aligned} \mathbb{L}z = \mathbb{L}\bar{z} &= 0 \\ \mathbb{L} &= \lambda^{-2} \partial_+ \frac{1}{\sin \psi} \partial_+ + \lambda^2 \partial_- \frac{1}{\sin \psi} \partial_- - \partial_+ \cotg \psi \partial_- - \partial_- + \cotg \psi \partial_+ \end{aligned} \quad (6.11)$$

O operador \mathbb{L} é proporcional ao operador de Laplace–Beltrami Δ , associado à métrica de Tchebyscheff generalizada (4.9):

$$\Delta = -\frac{1}{\sin \psi} \mathbb{L}.$$

Portanto, z e \bar{z} são os modos zero de Δ . Em particular, impondo a condição que a curvatura escalar de \mathcal{S} é $R = -2$, resulta que φ é solução da equação de Liouville e ψ satisfaz a equação sine-Gordon. Contudo, dentro da geometria diferencial, a relação entre estas duas equações é completamente implícita. A razão é que para estabelecer coordenadas conformes em \mathcal{S} partindo das coordenadas de Tchebyscheff, temos que resolver (6.11); a qual é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. De outro lado, é possível trabalhar com as matrizes Jacobianas (6.6) para obter uma aplicação de Lie–Bäcklund entre os modelos de Liouville e sine-Gordon. Para isto primeiro introduzimos os vetores

$$v = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

cujas componentes estão restritas por (6.4) e (6.5). O nosso primeiro enunciado é o seguinte:

Vamos supor que v é uma solução do sistema linear

$$\partial v + A_z v = 0 \quad \bar{\partial} v + A_{\bar{z}} v = 0 \quad (6.13)$$

onde A_z e $A_{\bar{z}}$ foram introduzidas por (5.8). Em particular, a condição de integrabilidade da equação anterior é equivalente à equação de Liouville. Consideremos a mudança de variáveis $(z, \bar{z}) \leftrightarrow (x^+, x^-)$ definido por (6.6). Então o vetor (6.12) é uma solução do sistema

$$\partial_{\pm} w + A_{\pm} w = 0 \quad (6.14)$$

onde A_{\pm} são dados por (5.11). Então concluímos que ψ (6.6) é uma solução da equação sine-Gordon.

Para provar a afirmação anterior, devemos notar que as identidades

$$\partial_+ z \partial_+ \bar{z} = \lambda^2 e^{-\varphi} \quad \partial_- z \partial_- \bar{z} = \lambda^{-2} e^{-\varphi} \quad (6.15)$$

são consequência de (6.6). Diferenciando a primeira das equações anteriores com respeito a x^- e a segunda com respeito a x^+ , e assumindo que $\partial_+ \partial_- z = \partial_- \partial_+ z$ chegamos ao

seguinte sistema linear algébrico,

$$(\partial_+ \partial_- \bar{z}, \partial_+ \partial_- z) \cdot \frac{\mathcal{D}(z, \bar{z})}{\mathcal{D}(x^+, x^-)} = e^{-\varphi} \begin{pmatrix} \lambda^2 \partial_- \varphi \\ \lambda^{-2} \partial_+ \varphi \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

o qual tem uma única solução dada por:

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- z &= \frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} - i\frac{\psi}{2} + 2i\omega}}{2\lambda \sin \psi} (e^{i\psi} \partial_+ \varphi - \lambda^2 \partial_- \varphi) \\ \partial_+ \partial_- \bar{z} &= -\frac{ie^{-\frac{\varphi}{2} + i\frac{\psi}{2} - 2i\omega}}{2\lambda \sin \psi} (e^{-i\psi} \partial_+ \varphi - \lambda^2 \partial_- \varphi) \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde o jacobiano (6.7) em nenhum momento se anula. Notemos que a expressão anterior tem sido derivada sem impor nenhuma restrição sobre os fatores de fase (6.5), ou equivalentemente, sobre os vetores (6.12).

As derivadas $\partial_{\pm} \partial_{\mp} z$ e $\partial_{\pm} \partial_{\mp} \bar{z}$ podem ser calculadas alternativamente usando as matrizes jacobianas (6.6), o sistema linear (6.13) e as relações algébricas (6.4) e (6.5). Para isto primeiro temos que observar que as expressões:

$$\partial_{\pm} \ln \theta_{11} = \pm \frac{i}{4} \left(\cot g \psi \partial_{\pm} \varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin \psi} \partial_{\mp} \varphi \right) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i\frac{\psi}{2}} t_{21}}{2t_{11}} \quad (6.18)$$

se verificam. Em vista da identidade $\theta_{21} = \bar{\theta}_{11}$, as derivadas $\partial_{\pm} \ln \theta_{21}$ são obtidas da equação anterior por conjugação complexa. Levando em conta (6.18) e derivando as componentes da matriz jacobiana $\frac{\mathcal{D}(z, \bar{z})}{\mathcal{D}(x^+, x^-)}$ (6.6) com respeito a x^{\pm} obtemos as equações:

$$\begin{aligned} \partial_{\pm} \partial_{\mp} z &= \lambda^{\mp 1} e^{-\frac{\varphi}{2} \mp i\frac{\psi}{2} + 2i\omega} \left(\pm i \frac{e^{\pm i\psi}}{2 \sin \psi} \partial_{\pm} \varphi \mp i \frac{\lambda^{\pm 2}}{2 \sin \psi} \partial_{\mp} \varphi - 2 \frac{\mathcal{D}_{\pm} t_{11}}{t_{11}} \right) \\ \partial_{\pm} \partial_{\mp} \bar{z} &= \lambda^{\mp 1} e^{-\frac{\varphi}{2} \pm i\frac{\psi}{2} - 2i\omega} \left(\mp i \frac{e^{\mp i\psi}}{2 \sin \psi} \partial_{\pm} \varphi \pm i \frac{\lambda^{\pm 2}}{2 \sin \psi} \partial_{\mp} \varphi - 2 \frac{\mathcal{D}_{\pm} t_{21}}{t_{21}} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

onde \mathcal{D}_{\pm} são as derivadas covariantes associadas ao modelo sine-Gordon (5.3), (5.11); $\mathcal{D}_{\pm} t_{ij} = (\mathcal{D}_{\pm} T)_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Devido à identidade $\bar{\mathcal{D}}_{\pm} t_{11} = \mathcal{D}_{\pm} t_{21}$ a qual se segue de (5.29) pode-se ver que as duas equações anteriores são consistentes com a conjugação complexa. Comparando (6.17) com (6.19) concluímos que $\mathcal{D}_+ t_{11} = \mathcal{D}_- t_{21} = 0$. Portanto o vetor w satisfaz a equação (6.14). Isto quer dizer que ψ definido por (6.6) e (6.7) é uma solução da equação sine-Gordon.

O oposto é também verdadeiro:

Suponhamos que a mudança das coordenadas locais $(z, \bar{z}) \leftrightarrow (x^+, x^-)$ é dado pelas matrizes Jacobianas (6.6). Então, impondo as equações (6.14) sobre as componentes t_{i1} , $i = 1, 2$ do vetor w (6.12), temos que $v = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}$ é uma solução do sistema (6.13). Portanto, φ satisfaz a equação de Liouville.

Façamos um esboço da prova. Primeiro, como ja foi mencionado anteriormente, as equações (6.17) são derivadas diretamente de (6.6) sem ter usado (6.13) e (6.14). Por outro lado, as derivadas $\partial_{\pm} \partial_{\mp} z$ e suas complexas conjugadas podem ser calculadas a partir de (6.6) usando o sistema linear (6.14). Como resultado recuperamos a expressão (6.18) e seus complexos conjugados. Usando uma vez mais (6.6) obtemos as seguintes identidades

$$\cotg \psi \partial_{\pm} \varphi - \frac{\lambda^{\pm 2}}{\sin \psi} \partial_{\mp} \varphi = \pm i \lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}} \left(e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi \right) \quad (6.20)$$

as quais quando substituidas em (6.18) levam às expressões

$$\begin{aligned} \partial_{\pm} \ln \theta_{11} &= -\frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} \left(e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi \right) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\pm i \frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{21}}{t_{11}} \\ \partial_{\pm} \ln \theta_{21} &= \frac{\lambda^{\pm 1} e^{-\frac{\varphi}{2}}}{4} \left(e^{\pm i \frac{\psi}{2} + 2i\omega} \partial \varphi - e^{\mp i \frac{\psi}{2} - 2i\omega} \bar{\partial} \varphi \right) - \frac{\lambda^{\pm 1} e^{\mp i \frac{\psi}{2}}}{2} \frac{t_{11}}{t_{21}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

A equação anterior nos permite calcular $D_z v$ e $D_{\bar{z}} v$ onde D_z e $D_{\bar{z}}$ são as derivadas covariantes associadas à conexão de Liouville (5.1) (5.8). Em vista de (6.6), podemos ver que $D_z v = D_{\bar{z}} v = 0$. Portanto o sistema (6.13) assim como a equação de Liouville se verifica. Então concluímos que uma mudança de coordenadas em \mathcal{S} induzida por (6.6) nos leva a uma transformação de Lie–Backlund; a qual relaciona as equações de Liouville e sine–Gordon. Vamos lembrar que as transformações de Lie–Bäcklund formam um grupo de Lie \mathcal{G} . Neste capítulo temos construído um elemento especial $\gamma \in \mathcal{G}$ o qual é induzido por (6.6). De qualquer maneira nossa análise não dá resposta à seguinte questão: *estão γ e o elemento identidade na mesma componente conexa de \mathcal{G} ?* É óbvio que a existência de uma deformação contínua que relaciona a equação de Liouville à equação sine–Gordon é reduzida a uma resposta afirmativa para a questão anterior.

Notemos que a observação que (6.6) gera uma transformação de Lie–Bäcklund entre (4.11) e (4.12) pode ser derivada também da condição de integrabilidade do sistema

$$i \partial_{\pm} \omega = \pm \frac{i}{4} \partial_{\pm} \psi - \frac{1}{4} (\partial_{\pm} z \partial \varphi - \partial_{\pm} \bar{z} \bar{\partial} \varphi) \quad (6.22)$$

A equação anterior se segue da matriz Jacobiana (6.6) e (6.17) as quais podem ser escritas na forma

$$\partial_+ \partial_- z = -\partial_+ z \partial_- z \partial \varphi \quad (6.23)$$

Como resultado de um cálculo imediato, pode-se deduzir que a integrabilidade da equação (6.22) é equivalente à relação

$$\frac{\partial_+ \partial_- \psi}{\sin \psi} = 2e^{-\varphi} \partial \bar{\partial} \varphi \quad (6.24)$$

a qual por (4.8) e (4.10) está de acordo com a invariância da curvatura escalar sob uma mudança de coordenadas locais $(z, \bar{z}) \leftrightarrow (x^+, x^-)$.

É interessante notar que existe um caminho alternativo para obter as transformações de Lie–Bäcklund, as quais construímos nesta secção. Para fixar a idéia, vamos começar com a conexão de Liouville (5.1). Sob a ação de um difeomorfismo arbitrário $(z, \bar{z}) \rightarrow (x^+, x^-)$, onde x^\pm são variáveis reais, esta se transforma como uma 1-forma $\mathbb{D}_\pm = \partial_\pm + U_\pm$ onde $U_\pm = \partial_\pm z A_z + \partial_\pm \bar{z} A_{\bar{z}}$. A curvatura é uma 2-forma e portanto $\mathbb{F}_{+-} = [\mathbb{D}_+, \mathbb{D}_-]$ e $F_{z\bar{z}} = [D_z, D_{\bar{z}}]$ são relacionadas pela equação $F_{z\bar{z}} = \det \frac{D(z, \bar{z})}{D(x^+, x^-)} \mathbb{F}_{+-}$. Denotemos por g o elemento $g = e^{i\omega H}$, $\omega \in \mathbb{R}$, e consideremos a transformação de calibre $\mathbb{D}_\pm \rightarrow \mathbb{D}_\pm^g = g^{-1} \mathbb{D}_\pm g$. Então \mathbb{D}_\pm^g coincide com a conexão de sine–Gordon (5.3), usando o fato que a matriz Jacobiana da mudança $(z, \bar{z}) \rightarrow (x^+, x^-)$ é dada por (6.6) e ω satisfaz (6.22). O dito anteriormente, nos sugere que uma transformação de Lie–Bäcklund entre equações diferenciais parciais integráveis, são induzidas por uma composição de uma mudança das variáveis independentes, e uma transformação de calibre especial que atua sobre a conexão de Lax subjacente.

6.2 Auto-transformada de Bäcklund para a equação de Liouville

Agora vamos construir uma transformada de Bäcklund que relaciona uma solução da equação de Liouville com uma outra solução da mesma equação. Para isso partimos da conexão de Liouville (5.8) e dos elementos do grupo de vestimento θ_\pm dados pelas seguintes

expressões:

$$\theta_-(\mu) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi-\hat{\varphi}}{4}} & 0 \\ \bar{\mu}e^{\frac{\hat{\varphi}+\varphi}{4}} & e^{\frac{\varphi-\hat{\varphi}}{4}} \end{pmatrix}, \quad \theta_+(\mu) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi-\hat{\varphi}}{4}} & \mu e^{\frac{\hat{\varphi}+\varphi}{4}} \\ 0 & e^{\frac{\varphi-\hat{\varphi}}{4}} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

onde $\mu = \mu(z, \bar{z})$ e $\bar{\mu} = \bar{\mu}(z, \bar{z})$; φ e $\hat{\varphi}$ são duas soluções da equação de Liouville. Sabemos que a conexão de Liouville

$$A = A_z dz + A_{\bar{z}} d\bar{z}$$

satisfaz a involução

$$\bar{A} = \sigma A \sigma,$$

como consequência disto θ_+ e θ_- estão relacionados pela seguinte expressão

$$\theta_+ = \sigma \bar{\theta}_- \sigma,$$

onde σ é dada pela equação (5.19). Como é conhecido os elementos do grupo de vestimento atuam sobre a conexão de Lax mediante uma transformação de calibre da seguinte maneira

$$\hat{A}(\hat{\varphi}) = -d\theta_{\pm} \cdot \theta_{\pm}^{-1} + \theta_{\pm} A(\varphi) \theta_{\pm}^{-1} \quad (6.26)$$

substituindo nesta expressão a matriz θ_- dada por (6.25), temos após alguns calculos, para que não mude a forma da conexão de Lax, devem ser cumpridas as seguintes equações

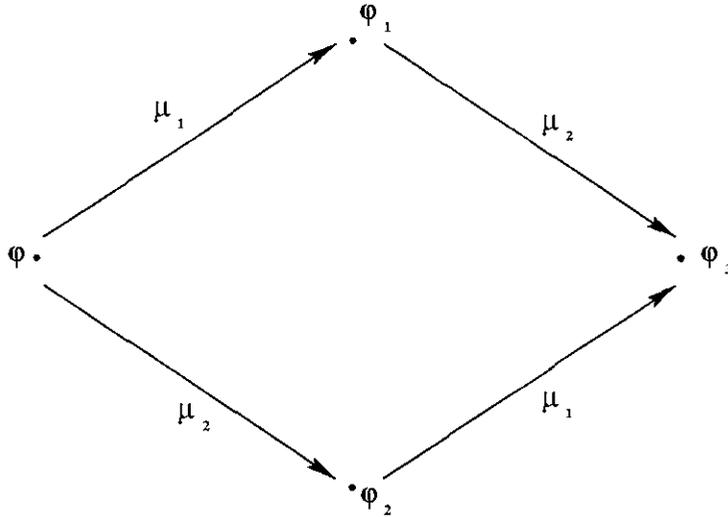
$$\partial\varphi - \partial\hat{\varphi} = \bar{\mu}e^{\frac{\varphi+\hat{\varphi}}{2}}, \quad (6.27)$$

$$\bar{\partial}\varphi + \bar{\partial}\hat{\varphi} = \frac{2}{\bar{\mu}} \sinh\left(\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2}\right) - 2\frac{\bar{\partial}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}, \quad (6.28)$$

$$\bar{\partial}\mu = \partial\bar{\mu} = 0.$$

Estas são as equações de transformação de Bäcklund para o modelo de Liouville. Os elementos θ_{\pm} são elementos do grupo de vestimento só e só quando se cumprem as equações (6.27) e (6.28). Cabe aqui fazer uma observação muito importante: *a dependência de μ em z e $\bar{\mu}$ em \bar{z} pode ser removida mediante uma transformação conforme, após a qual o parâmetro μ vira uma constante.*

Pode-se mostrar que analogamente ao caso sine-Gordon, existe para o modelo de Liouville, um princípio de superposição não linear (chamado também teorema de permutabilidade). Esta permutabilidade é expressada no seguinte diagrama:



Começando de uma solução φ geramos as soluções φ_1 e φ_2 através de μ_1 e μ_2 (aqui μ_1 e μ_2 são independentes de z) em (6.27-6.28) respectivamente; então existe uma solução φ_3 que é gerada de φ_1 através de μ_2 e também de φ_2 através de μ_1 . Das equações (6.27) e (6.28) podem ser escritas expressões analíticas para estas soluções, e pode-se demonstrar que estas são relacionadas por a expressão

$$\tanh\left(\frac{\varphi_3 - \varphi}{2}\right) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \tanh\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad (6.29)$$

que é o *teorema clássico de permutabilidade*. O conhecimento de três soluções, φ , φ_1 , φ_2 , nos permite gerar recursivamente uma seqüência infinita de soluções particulares da equação de Liouville.

De outro lado o objeto fundamental do problema de Riemann–Hilbert é:

$$g = \theta_-^{-1} \theta_+ = \begin{pmatrix} e^{\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2}} & \mu e^{\frac{\varphi}{2}} \\ -\bar{\mu} e^{\frac{\varphi}{2}} & e^{\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2}} - |\mu|^2 e^{\frac{\varphi + \hat{\varphi}}{2}} \end{pmatrix}$$

g satisfaz a seguinte expressão $g(z, \bar{z}) = T(z, \bar{z})g(0, 0)T^{-1}(z, \bar{z})$ daqui usando as equações de compatibilidade chegamos a $dg = -[A, g]$, de onde é fácil ver que $d_\mu \text{tr} g = 0$, onde $\mu = z, \bar{z}$, assim temos que $\text{tr} g = 2\alpha$ onde α é uma constante.

$$\text{tr} g = 2 \cosh\left(\frac{\varphi - \hat{\varphi}}{2}\right) - |\mu|^2 e^{\frac{\varphi + \hat{\varphi}}{2}} = 2\alpha \quad (6.30)$$

as soluções desta equação são:

$$e^{\frac{\varphi-\hat{\varphi}}{2}} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^\varphi} \quad (6.31)$$

$$e^{\frac{\hat{\varphi}-\varphi}{2}} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^{\hat{\varphi}}} \quad (6.32)$$

substituindo estas expressões em (6.27) e (6.28) obtemos:

$$\mu(\partial\varphi + \partial \ln \mu) = \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^\varphi} \quad (6.33)$$

$$\bar{\mu}(\bar{\partial}\varphi + \bar{\partial} \ln \bar{\mu}) = \pm \sqrt{\alpha^2 - 1 + |\mu|^2 e^\varphi} \quad (6.34)$$

resolvendo estas equações obtemos:

$$e^\varphi = \frac{\alpha^2 - 1}{\mu(z)\bar{\mu}(\bar{z}) \sinh^2 \sqrt{\alpha^2 - 1} \left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\mu(\zeta)} + \frac{1}{2} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \frac{d\zeta}{\bar{\mu}(\zeta)} \right)} \quad (6.35)$$

definindo $X(z) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{2} \int_{z_0}^z \frac{d\zeta}{\mu(\zeta)}$ temos que:

$$e^\varphi = 4 \frac{\alpha^2 - 1}{\mu\bar{\mu}} \cdot \frac{e^{-2X} e^{-2\bar{X}}}{(1 - e^{-2X} e^{-2\bar{X}})^2} \quad (6.36)$$

se além disso definimos:

$$w = e^{-2X}, \quad \bar{w} = e^{-2\bar{X}} \quad (6.37)$$

podemos escrever

$$e^\varphi = 4 \frac{\partial w \bar{\partial} \bar{w}}{(1 - w\bar{w})^2} \quad (6.38)$$

Substituindo a expressão (6.35) em (6.31), e fazendo $\sinh \theta = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, temos que:

$$e^{\hat{\varphi}} = \frac{\alpha^2 - 1}{\mu\bar{\mu} \sinh(X + \bar{X} \pm \theta)} = 4 \frac{\alpha^2 - 1}{\mu\bar{\mu}} \cdot \frac{e^{-2X - 2\bar{X} \mp \theta}}{(1 - e^{-2X - 2\bar{X} \mp \theta})^2} \quad (6.39)$$

lembrando das expressões (6.37), podemos ver que uma Transformação de Bäcklund atua no disco \mathbb{D} da seguinte maneira:

$$\hat{w}_\pm = e^{\mp\theta} w, \quad \hat{\bar{w}}_\pm = e^{\mp\theta} \bar{w}. \quad (6.40)$$

Observemos aqui que esta Transformada de Bäcklund preserva as componentes do tensor de energia momento

$$T = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \partial^2\varphi = \frac{1}{2}(\partial\hat{\varphi})^2 - \partial^2\hat{\varphi} = \hat{T}.$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(\bar{\partial}\varphi)^2 - \bar{\partial}^2\varphi = \frac{1}{2}(\bar{\partial}\hat{\varphi})^2 - \bar{\partial}^2\hat{\varphi} = \hat{\bar{T}}$$

Em particular, a Transformação de Bäcklund para a equação de Liouville, preserva a densidade de energia, coisa que não acontece por exemplo com o modelo sine-Gordon.

Capítulo 7

Superfícies Solitônicas

O objetivo deste capítulo é estudar uma subclasse de superfícies pseudoesféricas, que estão relacionadas a soluções N -solitônicas da equação sine-Gordon. Geralmente se consideram superfícies solitônicas como variedades imersas em \mathbb{R}^3 . Na literatura são conhecidos poucos exemplos explícitos de superfícies solitônicas. Entre elas podemos citar as pseudoesferas de Beltrami e de Dini [38, 52, 69]. Estas últimas são realizações geométricas das soluções estática e móvel do monossóliton respectivamente. Superfícies N -solitônicas genéricas foram calculadas em [69] usando transformações apropriadas de Bianchi-Lie [52, 53, 54]. Neste capítulo *consideraremos as superfícies solitônicas como superfícies imersas no plano de Lobachevski* $\mathbb{H} \simeq \mathbb{D}$ *em vez de superfícies imersas em* \mathbb{R}^3 . De acordo com a análise apresentada no capítulo 5, para realizar um mapeamento no semiplano complexo superior, temos que construir soluções especiais do problema linear subjacente, que obedeçam a regra de conjugação complexa (5.29). Para obter soluções matriciais do sistema linear (5.4) relacionadas às soluções N -solitônicas do modelo sine-Gordon, usaremos o procedimento proposto em [70]. A vantagem deste é que pode ser generalizado para tratar soluções quasi-periódicas. No que segue, por brevidade usaremos as notações $f(x) = f(x^+, x^-)$ e $f(0) = f(0, 0)$ para qualquer função nas coordenadas x^\pm .

Primeiramente observemos que dentro do propósito de obter soluções *matriciais* do problema linear (5.4), (5.11), é suficiente conhecer somente uma solução vetorial do problema linear correspondente. Para provar esta proposição, observemos primeiramente que

a conexão de Lax para o modelo sine-Gordon (5.11) satisfaz às relações:

$$A_{\pm}(x, -\lambda) = H A_{\pm}(x, \lambda) H, \quad (7.1)$$

Conseqüentemente, se $w(x, \lambda)$ for uma solução do problema linear $(\partial_{\pm} + A_{\pm}(x, \lambda)) w(x, \lambda) = 0$, então $Hw(x, -\lambda)$ também é uma solução. Desta observação concluímos que

$$W(x, \lambda) = (w(x, \lambda), H \cdot w(x, -\lambda)) \quad (7.2)$$

é uma solução matricial do problema linear (5.4), (5.11) a qual é relacionada á equação sine-Gordon. Para valores genéricos complexos do parâmetro espectral λ , $w(x, \lambda)$ e $H \cdot w(x, -\lambda)$ são independentes, e portanto, podem ser escolhidos como soluções *fundamentais* do sistema linear (6.14). Seguindo [70], vamos supor que para certos valores μ_1, \dots, μ_N de λ , a matriz de 2×2 W (7.2) é degenerada. O inteiro N coincide com o número dos sólitons. As condições de degenerescência, impostas sobre $W(x, \lambda)$ significam que existem constantes c_j , $j = 1, \dots, N$ tais que as identidades

$$w(x, \mu_j) = c_j H \cdot w(x, -\mu_j) \quad (7.3a)$$

se verificam. Podemos escrever (cf. (6.12)) em componentes

$$\begin{aligned} w_k(x, \mu_j) &= (-)^{k-1} c_j w_k(x, -\mu_j), \\ k &= 1, 2, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7.3b)$$

As equações acima têm a solução única contanto que façamos

$$\begin{aligned} w_N(x, \lambda) &= e(x, -\lambda) e^{i\Psi(x)} \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^N (\lambda + \epsilon_{1j}(x)) \\ \prod_{j=1}^N (\lambda + \epsilon_{2j}(x)) \end{pmatrix} \\ e(x, \lambda) &= e^{\frac{1}{2}(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda})} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Notemos que introduzindo o “ansatz” acima em (7.3b), obtemos as relações algébricas

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^N \frac{\epsilon_{kj}(x) + \mu_j}{\epsilon_{kj}(x) - \mu_j} &= (-)^{k-1} e^2(x, \mu_j), \\ k &= 1, 2 \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7.5)$$

Provou-se em [70] que $w_N(x, \lambda)$ é uma solução do sistema linear (6.14) com A_{\pm} dado por (5.11) desde que:

$$\begin{aligned} i\partial_+\psi &= \sum_{l=1}^N (\partial_+\epsilon_{1l} - \partial_+\epsilon_{2l}) \\ e^{i\psi} &= \prod_{l=1}^N \frac{\epsilon_{2l}}{\epsilon_{1l}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

A consistência destas equações pode ser provada facilmente usando-se (7.5). Notemos que um procedimento similar se aplica igualmente bem aos sólitons A_n de Toda afim [21].

Proseguimos impondo a condição de realidade do campo de sine-Gordon, ψ . Em vista de (5.23) e do “ansatz” (7.4) concluímos que

$$w(x, \lambda) = \sigma \cdot \bar{w}(x, \bar{\lambda}) \quad (7.7a)$$

onde o elemento σ foi definido por (5.19). Comparando a equação acima com (7.3a) e (7.4); concluímos que o campo de sine-Gordon é real se e somente se

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_j &= \mu_{\pi(j)}, \quad \bar{c}_j = -c_{\pi(j)} \\ \bar{\epsilon}_{1j} &= \epsilon_{2\pi'(j)}, \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (7.7b)$$

onde π e π' são duas permutações involutivas (provavelmente diferentes) dos números $1, \dots, N$.

Conseqüentemente, podemos escrever a matriz (7.2) como segue

$$\begin{aligned} W_N(x, \lambda) &= e^{i\psi} \begin{pmatrix} \prod_{l=1}^N (\epsilon_l(x) + \lambda)e(-\lambda) & \prod_{l=1}^N (\epsilon_l(x) - \lambda)e(\lambda) \\ \prod_{l=1}^N (\bar{\epsilon}_l(x) + \lambda)e(-\lambda) & -\prod_{l=1}^N (\bar{\epsilon}_l(x) - \lambda)e(\lambda) \end{pmatrix} \\ \epsilon_l(x) &= \epsilon_{1l}(x) \end{aligned} \quad (7.8)$$

a qual por construção satisfaz ao problema linear associado à equação sine-Gordon. Partindo da matriz acima, é fácil obter a solução normalizada

$$\begin{aligned} T_N(x, \lambda) &= W_N(x, \lambda)W_N^{-1}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi_N(x) - \psi_N(0)}{4}} X_N(\lambda) & e^{i\frac{\psi_N(x) + \psi_N(0)}{4}} Y_N(\lambda) \\ e^{-i\frac{\psi_N(x) + \psi_N(0)}{4}} \bar{Y}_N(\bar{\lambda}) & e^{-i\frac{\psi_N(x) - \psi_N(0)}{4}} \bar{X}_N(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \\ X_N(\lambda) &= \frac{\prod_{l=1}^N (\lambda + \epsilon_l(x))(\lambda - \bar{\epsilon}_l(0))e(-\lambda) + (\lambda \leftrightarrow -\lambda)}{2 \prod_{l=1}^N (\lambda^2 - \mu_l^2)} \\ Y_N(\lambda) &= \frac{\prod_{l=1}^N (\lambda + \epsilon_l(x))(\lambda - \epsilon_l(0))e(-\lambda) + (\lambda \leftrightarrow -\lambda)}{2 \prod_{l=1}^N (\lambda^2 - \mu_l^2)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

do problema linear associado à equação sine–Gordon. Em vista de (5.25) e (5.26), a quantidade $A(T)$ (5.7) está no disco unitário \mathbb{D} . Usando o isomorfismo analítico (5.31) entre \mathbb{D} e o semiplano superior \mathbb{H} obtemos:

$$u_N(x, \lambda) = i \frac{X_N(x, \lambda) + e^{i\frac{\psi_N(0)}{4}} Y_N(x, \lambda)}{X_N(x, \lambda) - e^{i\frac{\psi_N(0)}{4}} Y_N(x, \lambda)}. \quad (7.10)$$

A expressão acima dá (até uma transformação de isometria de \mathbb{H}) uma imersão isométrica de uma superfície N –solitônica \mathcal{S}_N no plano de Lobachevski.

Para terminar, vamos considerar alguns exemplos. Primeiramente, suponhamos que tratamos com a solução do vácuo $\psi = 0$ da equação sine–Gordon (4.12). Neste caso

$$X_0(\lambda) = \text{ch}\left(\frac{\lambda x^+}{2} + \frac{x^-}{2\lambda}\right), \quad Y_0(\lambda) = -\text{sh}\left(\frac{\lambda x^+}{2} + \frac{x^-}{2\lambda}\right)$$

e portanto

$$u_0(x, \lambda) = i e^{-\lambda x^+ - \frac{x^-}{\lambda}} \quad (7.11)$$

esta é uma linha geodésica no plano de Lobachevski. Recordamos que as geodésicas no espaço de Lobachevski são linhas retas paralelas ao eixo imaginário ou semicírculos que terminam no eixo real. Notemos que qualquer outra geodésica em \mathbb{H} pode ser obtida de (7.11) mediante uma transformação $PSL(2, \mathbb{R})$ apropriada (4.28).

Para obter superfícies monossolitônicas observemos primeiramente que, de acordo com a expressão geral (7.5), a dinâmica (do monossóliton) está governada pelas equações

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= -\mu \frac{1 + ce^2(\mu)}{1 - ce^2(\mu)}, \\ \bar{\mu} &= \mu, \quad \bar{c} = -c \end{aligned} \quad (7.12a)$$

Das equações acima junto com (7.6) obtemos

$$e^{-i\frac{\psi}{2}} = -\frac{\epsilon}{\mu} = \frac{1 + ce^2(\mu)}{1 - ce^2(\mu)} \quad (7.12b)$$

a qual concorda com a expressão padrão de uma solução solitônica da equação sine–Gordon [6]. Substituindo a solução acima nas fórmulas gerais (7.9) e (7.10) obtemos

$$\begin{aligned} u_1 &= i \frac{\lambda + \mu (\lambda - \mu) \text{ch}(A(\lambda) + A(\mu) + \ln \alpha) + i\kappa(\lambda + \mu) \text{sh}(A(\lambda) - A(\mu))}{\lambda - \mu (\lambda + \mu) \text{ch}(A(\lambda) - A(\mu) - \ln \alpha) - i\kappa(\lambda - \mu) \text{sh}(A(\lambda) + A(\mu))} \\ A(\lambda) &= \frac{\lambda x^+}{2} + \frac{x^-}{2\lambda} \end{aligned} \quad (7.13)$$

onde $c_1 = c = i\kappa\alpha$, $\alpha = |c|$ e $\kappa = \pm 1$. Dependendo do valor de κ , as soluções (7.12a), (7.12b) são chamados sólitons (para $\kappa = 1$) e antisólitons (para $\kappa = -1$). Conseqüentemente, concluímos que a superfície \mathcal{S}_0 que corresponde à solução de vácuo de sine-Gordon, é mapeada em uma única linha geodésica. Isto não é estranho desde que a métrica em \mathcal{S}_0 é degenerada em toda parte. De outro lado a imersão isométrica $\mathcal{S}_1 \xrightarrow{i} \mathbb{H}$ (7.13) é não degenerada exceto nos pontos em que $\sin\psi$ se anula.

Conclusões

(i) Nesta tese se mostrou que a representação mediante operadores de vértice das funções tau

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\Phi_0)} = \langle \Lambda | \prod_{i=1}^N (1 + X_i F^{\tau_i}(\mu_i)) | \Lambda \rangle$$

que correspondem às representações fundamentais da álgebra de Lie afim, é consequência da expressão do grupo de vestimento

$$\frac{\tau_\Lambda(\Phi)}{\tau_\Lambda(\Phi_0)} = \langle \Lambda | g_{-1}^{-1}(x^+, x^-) \cdot g_+(x^+, x^-) | \Lambda \rangle$$

para sólitons arbitrários $A_n^{(1)}$ Toda.

(ii) Observação técnica: apareceu a álgebra $\mathcal{F} \simeq \mathbb{Z}_N$. **Relação com a teoria conforme:** \mathcal{F} , aparece na teoria conforme de um campo gaussiano compactificado num círculo com raio $R = \sqrt{N}$ [37]. Em relação a isto seria interessante estudar a correspondência (2) para modelos afins de Toda baseados numa álgebra de Lie simples.

(iii) Como uma perspectiva possível de desenvolvimento, cabe lembrar que as álgebras de Fröbenius aparecem naturalmente na teoria Topológica de Campo [38]. Neste sentido é interessante estudar detalhadamente uma possível relação entre os sóliton nos modelos de Toda e a teoria topológica de campo. Um forte argumento para a existência desta relação é que os modelos de Toda, assim como a teoria topológica possuem estrutura integrável. Mais precisamente, a estrutura integrável das teorias topológicas é codificada nas equações de Witten-Dijgraaf-Verlinde-Verlinde [38].

(iv) A relação (2) que é válida para representações fundamentais sugere também relação com a teoria do campo conforme em duas dimensões. Mais precisamente, devido

a presença da álgebra afim, seria importante estabelecer a relação entre os sólitons nos modelos afins de Toda e os modelos de Wess–Zumino–Witten. As funções de correlação nestes modelos obedecem a equação de Knizhnik–Zamolodchikov. Em relação a isto cabe observar que a análise feita nesta tese admite generalização para soluções algebro-geométricas, e neste sentido os sólitons são relacionados com teorias conformes definidas sobre a curva espectral subjacente.

Com respeito a geometria, nossa análise permite descrever uma transformação de Lie–Bäcklund entre duas equações não lineares integráveis de notável aplicação em física e matemática: a de Liouville e a equação sine–Gordon. Embora a origem geométrica da transformada de Lie–Bäcklund seja bastante óbvia, os modelos de Liouville e sine–Gordon possuem características bastante diferentes. Em primeiro lugar, o modelo de Liouville, originalmente introduzido na matemática, em relação à teoria de uniformização, como teoria de campo possui propriedades bastante patológicas. Por exemplo Liouville é uma teoria sem um estado estável (vácuo). Por outro lado, sine–Gordon possui um número infinito de vácuos $\psi = 2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$, e soluções solitônicas que interpolam entre os vácuos da teoria. Para analisar mais profundamente as conseqüências físicas da correspondência entre Liouville e sine–Gordon, é preciso estudar a transformada de Lie–Bäcklund, obtida no capítulo 6, na vizinhança das singularidades, da troca entre as variáveis conformes e as variáveis de Tchebyscheff. Cabe lembrar que a correspondência entre Liouville e sine–Gordon foi estudada por L. Dolan [64] em relação as soluções autoduais de $SU(2)$ Yang–Mills ¹. Os resultados obtidos no capítulo 6 podem ser considerados como generalização do resultado de L. Dolan [64] onde se considera somente a relação entre uma solução específica de Liouville e a solução monossolitônica de sine–Gordon.

De outro ponto de vista, Liouville e sine–Gordon são os modelos de Toda baseados na álgebra de Lie $A_1 = sl(2)$ e na álgebra afim $A_1^{(1)} = \hat{sl}(2)$ respectivamente. É interessante estudar uma possível relação entre os modelos de Toda A_n e os correspondentes modelos de Toda afins. A geometria dos modelos de Toda A_n foi estudada por Gervais e Matsuo [60] em relação à gravidade W_n bidimensional. Conforme [60], os modelos A_n de Toda aparecem na geometria de superfícies quiralmente imersas em CP^n . Daí surge o problema

¹agradecemos R. Jackiw por ter direcionado nossa atenção ao artigo [64]

de obter uma interpretação geométrica clara dos modelos afins de Toda.

A auto-transformada de Bäcklund para o modelo de Liouville obtida na segunda seção do capítulo 6 é um resultado desconhecido na literatura ². Em particular, duas observações merecem atenção. Primeiro a lei de superposição não linear (6.29) é idêntica à lei de superposição para a equação sinh-Gordon. Observemos que (6.29) pode ser considerada como o análogo discreto da equação subjacente [71]. Por outro lado, a transformada de Bäcklund (6.27), (6.28) admite generalização para os modelos A_n de Toda. Este estudo, cuja importância é relacionada à estrutura das órbitas do grupo de vestimento esta em andamento [72]

²agradecemos a C. Rogers pelas discussões sobre o assunto

Apêndices

Apêndice A

Fatos básicos da teoria das álgebras de Lie

A finalidade deste apêndice é resumir alguns fatos básicos da teoria das álgebras de Lie. Nós focalizaremos nossa atenção nas álgebras de Lie simples A_n e nas álgebras de Lie afins sem torção $A_n^{(1)}$. Uma exposição mais detalhada pode ser encontrada em [10, 15, 16].

Nós recordamos que, a álgebra de Lie $sl(n+1)$, $n \geq 1$ é formada pelo conjunto de matrizes de $(n+1) \times (n+1)$ e com traço nulo. Dentro da classificação de Cartan são conhecidas como A_n Lie álgebras. A subálgebra de Cartan consiste em todas as combinações lineares elementares de matrizes diagonais de traço nulo $E^{ii} = |i\rangle\langle i|$ ($i = 1 \dots n+1$). O sistema da raízes pode ser encaixado no espaço euclidiano $(n+1)$ -dimensional. Fixando uma base ortonormalizada e_i , as raízes são $\alpha_{ij} = e_i - e_j$, $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, n+1$). A cada raiz se associa um operador $E^{\alpha_{ij}} = E^{ij} = |i\rangle\langle j|$ ($i \neq j$) o qual é um autovetor da ação adjunta da subálgebra de Cartan \mathcal{H} . Como raízes simples escolhemos os vetores $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$. Os operadores de passo relacionados satisfem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [H_\xi, E^{\pm\alpha_i}] &= \pm\alpha_i \cdot \xi E^{\pm\alpha_i} = \pm(\xi_i - \xi_{i+1})E^{\pm\alpha_i} \\ [E^{\alpha_i}, E^{-\alpha_j}] &= \delta_{ij}H_{\alpha_i} \\ H_\xi &= \sum_i \xi_i |i\rangle\langle i| \end{aligned} \tag{A.1}$$

Os operadores de passo genéricos são obtidos pelos comutadores sucessivos de E^{α_i} e pelo seu transpostos $E^{-\alpha_i}$

Na teoria das álgebras de Lie é importante estudar seus automorfismos internos de ordem finita. A teoria geral foi desenvolvida por Kac [10] e revista em [12]. Nesta tese nós usaremos somente um automorfismo interno especial σ da álgebra de Lie simples A_n de ordem $n+1$ ($\sigma^{n+1} = 1$). Antes de introduzi-lo, nós recordamos que os pesos fundamentais estão dados por

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \sum_{k=1}^i e_k - \frac{i}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} e_k \\ 2\frac{\alpha_i \cdot \lambda_j}{\alpha_i \cdot \alpha_i} &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{A.2}$$

Nós também fazemos $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ e definimos [10, 11]

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= SXS^{-1} \\ S &= e^{2\pi i \frac{H_\rho}{n+1}}\end{aligned}\tag{A.3}$$

para um elemento arbitrário X da álgebra de Lie A_n . Notemos que na representação definitiva, o elemento que implementa o automorfismo σ tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}S &= \omega^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{n+1} \omega^{1-k} E^{kk} \\ \omega &= e^{\frac{2\pi i}{n+1}}\end{aligned}\tag{A.4}$$

Das relações da comutação (A.1) e da identidade anterior, se conclui que σ age trivialmente nos elementos de \mathcal{H} e como uma multiplicação por uma fase nos operadores da passo:

$$\begin{aligned}\sigma(H_\xi) &= H_\xi \\ \sigma(E^{\alpha_{kl}}) &= \omega^{\alpha_{kl} \cdot \rho} E^{\alpha_{kl}} = \omega^{l-k} E^{\alpha_{kl}}\end{aligned}\tag{A.5}$$

A álgebra de Lie $\mathcal{G} = A_n$ junto com o automorfismo σ é uma álgebra graduada \mathbb{Z}_{n+1}

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \mathcal{G}_k \\ \sigma(\mathcal{G}_k) &= \omega^k \mathcal{G}_k \\ [\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_l] &\subseteq \mathcal{G}_{k+l}\end{aligned}\tag{A.6}$$

É um fato conhecido que para uma dada álgebra de Lie simples \mathcal{G} , sua subálgebra de Cartan está fixada acima de uma conjugação por elementos que pertencem ao grupo de Lie correspondente. Em particular, em vez de \mathcal{H} , podemos introduzir uma subálgebra de Cartan *alternativa* \mathcal{H}' , preenchida pelos geradores mutuamente comutantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &= \sum_{k=1}^{n+1-i} E^{kk+i} + \sum_{k=1}^i E^{n+1+k-ik} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} |k \rangle \langle k+i|\end{aligned}\tag{A.7}$$

Para mostrar que os elementos acima geram realmente uma certa subálgebra de Cartan, basta notar que a matriz com entradas

$$\begin{aligned}\Omega_{ij} &= \omega^{(i-1)(j-1)} \\ \Omega_{ij}^{-1} &= \frac{\omega^{-(i-1)(j-1)}}{n+1}\end{aligned}\tag{A.8}$$

diagonaliza \mathcal{E}_i (A.7)

$$\Omega^{-1} \mathcal{E}_i \Omega = \sum_{k=1}^{n+1} \omega^{i(k-1)} E^{kk}\tag{A.9}$$

É importante notar que os geradores da subálgebra de Cartan alternativa são autovetores do automorfismo interno σ

$$\sigma(\mathcal{E}_i) = \omega^i \mathcal{E}_i\tag{A.10}$$

Para álgebras gerais de Lie simples, é sabido [10, 15] que os autovalores do automorfismo correspondente σ , quando restritos à álgebra de Cartan alternativa, estão em correspondência com os números de Betti. Para completar a base alternativa da álgebra de Lie A_n , introduzimos os geradores

$$\begin{aligned}F^i &= \Omega E^{i+1i} \Omega^{-1}, \quad i = 1, \dots, n \\ [\mathcal{E}_i, F^j] &= (\omega^{ij} - 1) F^j\end{aligned}\tag{A.11}$$

devido à decomposição graduada (A.6) e às relações de comutação dadas acima temos que

$$F^i = \sum_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} F_k^i$$

$$\begin{aligned}\sigma(F_k^i) &= \omega^k F_k^i \\ [\mathcal{E}_i, F_k^j] &= (\omega^{ij} - 1)F_{k+i}^j\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Obtemos assim uma base que é formada pelos geradores alternativos de Cartan \mathcal{E}_i (A.7) e F_k^i , $i = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}_{n+1}$. Devido a (A.8) e (A.11) a transformação que nos faz voltar à base de Cartan–Weyl é

$$\begin{aligned}E^{il} &= \frac{\mathcal{E}_{l-i}}{n+1} + \sum_{r=1}^n \omega^{r(1-i)} F_{l-i}^r, \quad i < l \\ E^{il} &= \frac{\mathcal{E}_{n+1+l-i}}{n+1} + \sum_{r=1}^n \omega^{r(1-i)} F_{n+1+l-i}^r, \quad i > l \\ E^{ii} - E^{n+1, n+1} &= \sum_{r=1}^n \omega^r (\omega^{-ri} - 1) F_0^r\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

As relações de comutação na base alternativa são completadas, por

$$[F_i^r, F_l^s] = \frac{\omega^{sk} - \omega^{rl}}{n+1} F_{k+l}^{r+s}\quad (\text{A.14})$$

Introduzindo a notação

$$F_k^r = \begin{cases} F_k^r & r = 1, \dots, n; \quad k \in \mathbb{Z}_{n+1} \\ \frac{1}{n+1} \mathcal{E}_k & r = 0 \quad k = 1, \dots, n \end{cases}\quad (\text{A.15})$$

vemos que as relações da comutação na base alternativa assumem a expressão uniforme (A.14).

As álgebras de Lie A_n são equipadas com o produto escalar invariante não degenerado $(X, Y) = \text{tr}(X.Y)$. O traço é feito na representação definitiva. Na base alternativa (A.15) este produto escalar é dado por

$$(F_k^r, F_l^s) = \frac{\omega^{sk}}{n+1} \delta_{k+l, 0}^{(n+1)}\quad (\text{A.16})$$

onde $\delta_{k,l}^{(n+1)}$ é a função delta no grupo cíclico \mathbb{Z}_{n+1} . Para tratar equações de evolução integrais, temos que estender as álgebras de Lie clássicas introduzindo o parâmetro spectral (ou parâmetro de laço) [11]. Isto quer dizer que a conexão de Lax pertence à álgebra de

laços de Lie $\tilde{\mathcal{G}} = \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes \mathcal{G}$. Ou seja a álgebra de laços é o conjunto de séries de Laurent com coeficientes na correspondente álgebra de Lie (clássica) \mathcal{G} . Conseqüentemente $\tilde{\mathcal{G}}$ é preenchido pelos elementos $X_k = \lambda^k X$, $k \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathcal{G}$. O bracket de Lie é

$$[X_k, Y_l] = [X, Y]_{k+l} \quad (\text{A.17})$$

As álgebras de laço $\tilde{\mathcal{G}}$ possuem uma extensão central [10], conhecida como álgebras afins (ou de Kac–Moody) $\hat{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}} \oplus \mathbb{C}\hat{c} \oplus \mathbb{C}\hat{d}$

$$\begin{aligned} [X_k, Y_l] &= [X, Y]_{k+l} + \frac{k}{(n+1)} \hat{c} \delta_{k+l,0} (X, Y) \\ [\hat{d}, X_k] &= k X_k \\ [\hat{c}, \hat{\mathcal{G}}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

O fator de normalização que multiplica o elemento central \hat{c} é escolhido por conveniência. A derivação \hat{d} pode ser usada para definir uma graduação \mathbb{Z} em $\hat{\mathcal{G}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{G}}_k \\ [\hat{d}, \hat{\mathcal{G}}_k] &= k \hat{\mathcal{G}}_k \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Como σ é um automorfismo da álgebra de Lie clássica subjacente $\mathcal{G} = A_n = sl(n+1)$, está claro que os comutadores (A.18) junto com a restrição

$$X(\omega\lambda) = \sigma X(\lambda) X(\lambda) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \lambda^l X_l \sigma X(\lambda) = \sum_l \sigma(X_l) \quad (\text{A.20})$$

definem ainda uma álgebra de Lie. Na literatura [10, 12, 15] é conhecido como álgebra de Lie afim $A_n^{(1)}$ na graduação principal. Levando em conta (A.14), (A.16), (A.18), junto com as restrições acima, obtemos as relações da comutação

$$\begin{aligned} [F_k^r, F_l^s] &= \frac{\omega^{sk} - \omega^{rl}}{n+1} F_{k+l}^{r+s} + \frac{k\omega^{rl}}{n+1} \hat{c} \delta_{r+s,0}^{(n+1)} \delta_{k+l,0} \\ r, s &\in \mathbb{Z}_{n+1}; \quad k, l \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Notemos que os geradores F_k^0 com $k = 0 \pmod{n+1}$ não estão na álgebra de Lie afim $A_n^{(1)}$. Terminamos assim com a seguinte base alternativa

$$\begin{aligned} F_k^r, & \quad r = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z} \\ F_k^0, & \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0 \pmod{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

da álgebra de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal. Os geradores F_k^0 , $k \neq 0(\text{mod } n+1)$ formam uma base da subálgebra de Heisenberg na graduação *principal* [10, 11, 12, 15]. Em analogia com (A.15), nós usaremos também os seguintes geradores

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &= (n+1)F_k^0 \\ [\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_i] &= (n+1)k \delta_{k+i,0} \quad k \neq 0 \pmod{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Das relações de comutação anteriores concluímos que $\mathcal{E}_{\pm k}$, $k \geq 1$ formam um conjunto infinito de osciladores bosônicos não interagentes.

Apêndice B

Realização de campo livre das álgebras de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal.

A realização de álgebras de Lie de dimensão infinita em termos de osciladores harmônicos tem um papel crucial na teoria das representações. São também importantes nas aplicações em teoria de cordas e a modelos conformes bidimensionais (para uma revisão, veja [33]). No caso mais simples da álgebra de Lie afim $A_1^{(1)} = \hat{sl}(2)$, a construção do campo livre (ou operador do vértice) foi obtida em [34]. Este resultado foi generalizado para as álgebras de Lie afins $\hat{\mathcal{G}}$ na graduação principal [35] quando as álgebras de Lie clássicas subjacentes \mathcal{G} são “simply laced” e o nível da representação correspondente é um. A generalização da realização de operador de vértice de $\hat{\mathcal{G}}$ com \mathcal{G} que não é “simply laced”, é também conhecido [15, 16]. Neste apêndice nós limitaremos nossa atenção às álgebras de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal somente. Uma discussão bastante detalhada do caso geral é dada em [10].

Como é visto de (1.10), as soluções gerais dos modelos (1.1a), (1.2), (1.3) podem ser escritas usando as representações de peso maximal das álgebras de Lie afins $\hat{\mathcal{G}}$. Os espaços da representação são gerados pela ação de produtos arbitrários dos elementos de grau negativo (A.19) sobre o estado de peso maximal $|\Lambda \rangle$. O último é aniquilado pelos

elementos de grau positivo da álgebra de Lie afim

$$\begin{aligned} F_k^r |\Lambda \rangle &= 0 \quad , \\ k \geq 1 \quad , \quad r \in \mathbb{Z}_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{B.1a})$$

onde nós usamos a notação (A.22). Nós recordamos também que $F_{p(n+1)}^0 \equiv 0$, $p \in \mathbb{Z}$ desde que estes elementos não estão na álgebra afim. O estado de peso maximal é um autovetor da subálgebra $\hat{\mathcal{G}}_0$ dos elementos \mathbb{Z} de grau zero (A.18), (A.19)

$$F_0^r |\Lambda \rangle = \Lambda(F_0^r) |\Lambda \rangle, \quad \hat{d} |\Lambda \rangle = \Lambda(\hat{d}) |\Lambda \rangle, \quad \hat{c} |\Lambda \rangle = \Lambda(\hat{c}) |\Lambda \rangle \quad (\text{B.1b})$$

Em vista de (A.23), os geradores $\mathcal{E}_k = (n+1)F_k^0$ ($k \neq 0 \pmod{n+1}$) formam uma subálgebra de Heisenberg. Esta é conhecida como subálgebra de Heisenberg *principal*. Como \mathcal{E}_k são osciladores bosônicos, eles admitem uma representação no espaço de Fock, construída sobre o vácuo de Fock

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k |0 \rangle &= 0, \quad k \leq 1 \\ \langle 0 | \mathcal{E}_k &= 0, \quad k \geq -1 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Sabe-se que quando o valor da carga central \hat{c} é 1, todas as representações irreduzíveis de peso maximal das álgebras de Lie $A_n^{(1)}$ são expressadas em termos dos elementos da subálgebra de Heisenberg (principal) unicamente [10, 34, 35]. Neste apêndice nós damos uma demonstração elementar desta indicação

Começaremos introduzindo as notações

$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \pmod{n+1}}} \frac{\mathcal{E}_k}{\mu^k} \quad (\text{B.3a})$$

$$\begin{aligned} \theta_r(\mu) &= i \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \pmod{n+1}}} \frac{\omega^{-rk} - 1}{k} \frac{\mathcal{E}_k}{\mu^k} \\ \theta_r(\mu) &= \Phi_{r+n+1}(\mu), \quad \theta_0(\mu) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3b})$$

onde i é a unidade imaginária $i^2 = -1$. As expressões acima estão relacionadas pela identidade

$$\mathcal{E}(\mu) = \frac{i}{n+1} \mu \frac{d}{d\mu} \sum_{r \in \mathbb{Z}_{n+1}} \theta_r(\mu) \quad (\text{B.3c})$$

Definimos também o produto normal bosônico : : na maneira usual: \mathcal{E}_k com $k \geq 1$ movidos para a direita, enquanto que \mathcal{E}_k com $k \leq -1$ são movidos para a esquerda em cada monômio com ordenamento normal que contém geradores da subálgebra de Heisenberg somente. Desde que a subálgebra de Heisenberg não contém elementos da grau zero, resulta que cada monômio com ordenamento normal de grau positivo (negativo) aniquila o vácuo de Fock $|0\rangle$ ($\langle 0|$) (B.2). Levando em conta (B.2) e as relações da comutação de Heisenberg (A.23) chegamos às identidades de contração

$$\begin{aligned}\theta_r(\mu_1)\theta_s(\mu_2) &= \langle \theta_r(\mu_1)\theta_s(\mu_2) \rangle + : \theta_r(\mu_1)\theta_s(\mu_2) : \\ \mathcal{E}(\mu_1)\theta_s(\mu_2) &= \langle \mathcal{E}(\mu_1)\theta_s(\mu_2) \rangle + : \mathcal{E}(\mu_1)\theta_s(\mu_2) : \\ |\mu_1| &> |\mu_2|\end{aligned}\tag{B.4a}$$

Os correspondentes valores esperados para o vácuo são dados por

$$\begin{aligned}\langle \theta_r(\mu_1)\theta_s(\mu_2) \rangle &= \ln \frac{(\mu_1 - \omega^{-r}\mu_2)(\mu_1 - \omega^s\mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \omega^{s-r}\mu_2)} \\ \langle \mathcal{E}(\mu_1)\theta_r(\mu_2) \rangle &= i \frac{(1 - \omega^r\mu_2)\mu_1\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \omega^r\mu_2)}\end{aligned}\tag{B.4b}$$

Para obter uma realização das representações básicas das álgebras de Lie afins $A_n^{(1)}$ introduzimos os operadores de *vértice*

$$\begin{aligned}V^r(\mu) &= : e^{i\theta_r(\mu)} := e^{\sum_{k \leq -1} \frac{1 - \omega^{-kr}}{k} \frac{\mathcal{E}_k}{\mu^k} e^{\sum_{k \geq 1} \frac{1 - \omega^{-kr}}{k} \frac{\mathcal{E}_k}{\mu^k}} \\ r &= 1, \dots, n\end{aligned}\tag{B.5}$$

Usando o teorema de Wick deduzimos os seguintes produtos de operadores:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mu_1)V^r(\mu_2) &= \frac{(\omega^r - 1)\mu_1\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \omega^r\mu_2)}V^r(\mu_2) + : \mathcal{E}(\mu_1)V^r(\mu_2) : \\ V^r(\mu_1)V^s(\mu_2) &= \frac{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \omega^{s-r}\mu_2)}{(\mu_1 - \omega^{-r}\mu_2)(\mu_1 - \omega^s\mu_2)} : e^{i(\theta_r(\mu_1) + \theta_s(\mu_2))} : \\ |\mu_1| &> |\mu_2|\end{aligned}\tag{B.6}$$

Em vista de (A.23) e (B.2) obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mu_1)\mathcal{E}(\mu_2) &= \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} - (n + 1) \frac{\mu_1^{n+1}\mu_2^{n+1}}{(\mu_1^{n+1} - \mu_2^{n+1})^2} + : \mathcal{E}(\mu_1)\mathcal{E}(\mu_2) : \\ |\mu_1| &> |\mu_2|\end{aligned}\tag{B.7}$$

Usando a noção de ordenamento radial [33] que é análogo ao ordenamento temporal padrão na teoria do campo, podemos estender os produtos de operadores (B.6) e (B.7) à região $|\mu_1| < |\mu_2|$ de acordo com às relações de comutatividade “locais”

$$\begin{aligned} A(\mu_1)B(\mu_2) &= B(\mu_2)A(\mu_1) \\ |\mu_1| &\neq |\mu_2| \end{aligned}$$

para $A(\mu)$, $B(\mu)$ sendo $\mathcal{E}(\mu)$ (B.3b) ou $V^r(\mu)$ (B.5). Isto permite-nos usar as expansões de Laurent

$$V^r(\mu) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{V_l^r}{\mu^l}, \quad V_l^r = \oint_{S^1} \frac{d\mu}{2\pi i \mu} \mu^l V(\mu) \quad (\text{B.8})$$

Note também que os termos com ordenamento normal que aparecem no lado direito de (B.6) e (B.7) tem elementos de matriz finitos quando são avaliados entre estados normalizados do espaço de Fock bosônico.

Para calcular a álgebra dos comutadores dos modos de Laurent \mathcal{E}_k , $k \in \mathbb{Z} \setminus (n+1)\mathbb{Z}$ e F_k^r usamos a técnica de deformação de *contornos* [33]. Vamos lembrar rapidamente: suponhamos que $A(\mu)$ e $B(\mu)$ são operadores meromórficos avaliados como funções em μ os quais comutam *localmente* $A(\mu_1)B(\mu_2) = A(\mu_2)B(\mu_1)$ para $(|\mu_1| \neq |\mu_2|)$. Então o comutador entre os coeficientes de Laurent

$$A_k = \oint_{S^1} \frac{\mu^k d\mu}{2\pi i \mu} A(\mu), \quad B_l = \oint_{S^1} \frac{\mu^l d\mu}{2\pi i \mu} B(\mu) \quad (\text{B.9a})$$

é dado por

$$[A_k, B_l] = \left(\oint_{|\mu_1| > |\mu_2|} - \oint_{|\mu_1| < |\mu_2|} \right) \mu_1^k \frac{d\mu_1}{2\pi i \mu_1} \mu_2^l \frac{d\mu_2}{2\pi i \mu_2} A(\mu_1)B(\mu_2) \quad (\text{B.9b})$$

Usando a identidade acima, o teorema de Cauchy e considerando (B.6) temos que

$$\begin{aligned} [\mathcal{E}_k, V_l^r] &= \left(\oint_{|\mu_1| > |\mu_2|} - \oint_{|\mu_1| < |\mu_2|} \right) \mu_1^k \frac{d\mu_1}{2\pi i \mu_1} \mu_2^l \frac{d\mu_2}{2\pi i \mu_2} \mathcal{E}_k(\mu_1) V^r(\mu_2) = \\ &= \oint \mu_2^{l+1} \frac{d\mu_2}{2\pi i \mu_2} \left(\oint_{C_{\mu_2}} - \oint_{C_{\omega^r \mu_2}} \right) \mu_1^{k+1} \frac{d\mu_1}{2\pi i \mu_1} (\omega^r - 1) \frac{V^r(\mu_2)}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \omega^r \mu_2)} = \\ &= (\omega^{kr} - 1) V_{k+l}^r \end{aligned} \quad (\text{B.10a})$$

onde C_μ se entende por um contorno orientado no sentido anti-horário o qual cerca o ponto μ . Similarmente da segunda equação (B.6) obtemos os comutadores

$$[V_k^r, V_l^s] = \frac{(\omega^r - 1)(\omega^s - 1)}{(\omega^{r+s} - 1)} (\omega^{sk} - \omega^{rl}) V_{k+l}^{r+s}$$

$$r + s \neq 0 \pmod{n+1} \quad (\text{B.10b})$$

$$[V_k^r, V_l^{-r}] = -\omega^r (1 - \omega^{-r})^2 ((\omega^{-rk} - \omega^{rl}) \mathcal{E}_{k+l} + k\omega^{-rk} \delta_{k+l,0}) \quad (\text{B.10c})$$

Para derivar as equações acima usamos também a identidade

$$\theta_r(\omega^p \mu) = \theta_{p+r}(\mu) - \theta_p(\mu)$$

o qual é uma consequência direta de (B.3b). Usando a técnica de deformação de contorno concluímos também que (B.7) é equivalente aos comutadores de Heisenberg (A.23). Conseqüentemente concluímos que \mathcal{E}_k , $k \in \mathbb{Z} \setminus (n+1)\mathbb{Z}$ junto com V_k^r , $r = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}$ formam uma álgebra de Lie. Este último é *isomorfo* à algebra de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal. Para ver isto é suficiente fazer

$$F_k^r = \frac{\omega^{rl} V_k^r}{(n+1)(\omega^r - 1)}$$

$$l \in \mathbb{Z}_{n+1}, r = 1, \dots, n \quad (\text{B.11})$$

e para verificar que (B.10a)–(B.10c) junto com (A.15) coincide com (A.21). Na equação anterior, $l \in \mathbb{Z}_{n+1}$ é um parametro adicional. Note que o mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_k &\longrightarrow \mathcal{E}_k \\ V_k^r &\longrightarrow \omega^r V_k^r, r = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

é um automorfismo de ordem $(n+1)$ da álgebra de Lie (B.10a)–(B.10c), (A.23). É claro que este automorfismo é *externo*, e conseqüentemente as representações de $A_n^{(1)}$ que correspondem a valores diferentes do parâmetro adicional l (B.11) são *inequivalentes*. Devido a (B.2), (B.5) e (B.11) nós obtemos as representações de peso maximal caracterizadas por

$$F_0^r |\Lambda_l \rangle = \frac{\omega^{rl}}{(n+1)(\omega^r - 1)} |\Lambda_l \rangle$$

$$\hat{c} = |\Lambda_l \rangle = |\Lambda_l \rangle, \hat{d} |\Lambda_l \rangle = 0 \quad (\text{B.13})$$

onde o estado de peso maximal coincide com o vácuo de Fock (B.2). Como $\widehat{c} = 1$, concluímos que as representações construídas por nós são as $n+1$ representações *fundamentais inequivalentes* [10] da álgebra de Lie $A_n^{(1)}$ na graduação principal

Prossequimos calculando as funções tau (1.9) em termos das componentes do campo (1.1d), (1.2) com $\eta = 0$. Considerando também a última identidade (A.13), obtemos

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ k \in \mathbb{Z}_{n+1}}} \omega^{r(1-k)} \varphi_k F_0^r + \frac{\zeta}{2(n+1)} \widehat{c} \quad (\text{B.14})$$

Combinando a expressão anterior com (B.13) derivamos

$$\langle \Lambda_l | \Phi | \Lambda_l \rangle = \frac{\zeta}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ k \in \mathbb{Z}_{n+1}}} \frac{\omega^{r(l+1-k)}}{\omega^r - 1} \varphi_k \quad (\text{B.15})$$

Conseqüentemente as funções tau grupo-algébricas (1.9) satisfem às identidades

$$\frac{\tau_{\Lambda_k}(\Phi)}{\tau_{\Lambda_{k-1}}(\Phi)} = e^{-\varphi_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_{n+1} \quad (\text{B.16a})$$

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}_{n+1}} \tau_{\Lambda_k}(\Phi) = e^{-\zeta} \quad (\text{B.16b})$$

Comparando as identidades acima com a definição (1.4a)–(1.4c) das funções tau de Hirota obtemos as relações

$$\tau_{\Lambda_k}(\Phi) = e^{-\frac{\zeta_0}{n+1}} \tau_k(\Phi) \quad (\text{B.17})$$

onde ζ_0 é o valor no vácuo (1.4d) do campo ζ (1.2).

Bibliografia

- [1] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Elsevier 1982.
- [2] L. D. Faddeev and V. E. Korepin, *Phys Rep.* **42**, 1 (1978).
- [3] C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, (Academic Press, Inc.);
M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, (Inst. Phys. Pub.);
M. Gökeler and T. Shucker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*,
Cambridge Univ. Press.
- [4] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975);
S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11**, 3026 (1975).
- [5] N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426**, 19 (1994); Erratum **B430**, 485 (1994)
Nucl. Phys. **B431**, 484 (1994).
- [6] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Method*, Siam,
Philadelphia, 1981;
S. Novikov, S. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons*,
Consultants Bureau, 1984;
L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*,
Springer, 1987.
- [7] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys.* **120**, 253 (1979).
- [8] M. Toda, *Phys. Rep.* **18**, 1 (1975).
- [9] D. I. Olive and N. Turok, *Nucl. Phys.* **B215**, 470 (1983); **220**, 491 (1983); **257**, 277
(1985), **265**, 469 (1986).

- [10] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*. Third edition. Cambridge Univ. Press. 1990.
- [11] V. G. Drinfeld and V. Sokolov, *Sov. Math. Dokl.* **23**, 457 (1981).
- [12] N. Burroghs, M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes, *Phys. Lett.* **B277**, 89 (1992); *Commun. Math. Phys.* **153**, 187 (1993);
M. de Groot, T. Hollowood and L. Miramontes, *Commun. Math. Phys.* **145**, 57 (1992).
- [13] L. A. Ferreira, L. Miramontes and J. S. Guillén, *J. Math. Phys.* **38**, 882 (1997).
- [14] T. Hollowood, *Nucl. Phys.* **B384**, 523 (1992).
- [15] D. I. Olive, M. V. Saveliev and J. W. Underwood, *Phys. Lett.* **B311**, 117 (1993)
D. I. Olive, N. Turok and J. W. Underwood, *Nucl. Phys.* **B401**, 663 (1993); **B409**, 509 (1993);
M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, *Nucl. Phys.* **B408**, 565 (1993).
- [16] M. A. C. Kneipp and D. I. Olive, *Commun. Math. Phys.* **177**, 561 (1996).
- [17] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation Groups for Soliton Equations*, in: *Non-linear integrable systems*, editado por M. Jimbo e T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983); *Publ. RIMS*, **18**, 1077 (1982).
- [18] M. Semenov-Tian-Shansky, *Publ. RIMS* **21**, 1237 (1985);
Poisson Lie Groups, Quantum Duality Principle, and the Quantum Double, hep-th/9304042.
- [19] O. Babelon and D. Bernard, *Phys. Lett.* **B260**, 81 (1991);
Commun. Math. Phys. **149**, 279 (1992).
- [20] O. Babelon and D. Bernard, *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 507 (1993).
- [21] H. Belich and R. Paunov, *J. Math. Phys.* **38**, 4108 (1997).

- [22] M. Niedermaier, Commun. Math. Phys. **160**, 391 (1994).
- [23] R. Beals, P. Deift and C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the line*, (Mathematical Surveys and Monographs, Nr 28).
- [24] H. Flaschka and D. W. McLaughlin, Prog. Theor. Phys, **55**, 438 (1976).
- [25] O. Babelon, D. Bernard and F. A. Smirnov, hep-th/9603010, and Commun. Math. Phys. **182**, 319 (1996);
Commun. Math. Phys. **186**, 601 (1997).
- [26] O. Babelon and L. Bonora, Phys. Lett. **B244**, 220 (1990);
H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, Phys. Lett. **B254**, 372 (1991)372;
C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, ibid. **B298**, 88 (1993).
- [27] E. Date, Osaka J. Math, **19**, 125 (1982).
- [28] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov, Phys Rep. **71**, 313 (1981).
- [29] O. Babelon and D. Bernard, Phys Lett. **B317**, 363 (1993)
H. Braden and A. N. W. Hone, ibid. **B380**, 296 (1996).
- [30] E. J. Beggs and P. R. Johnson, Nucl. Phys. **B484**, 653 (1997).
- [31] V. Zakharov and A. Shabat, Funct. Anal. Appl. **13**, 166 (1979).
- [32] G. Cuba and R. Paunov, Phys. Lett. **B381**, 255 (1996).
- [33] P. Goddard and D. Olive, Int J. Mod. Phys. **A1**, 303 (1986);
P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory*, Les Houches, Session XLIX, 1988, editado por E. Brézin e J. Zinn-Justin.
- [34] J. Lepowsky and R. L. Wilson, Commun. Math. Phys. **62**, 43 (1978).
- [35] V. G. Kac, D. A. Kazhdan, J. Lepowsky and R. L. Wilson, Adv. Math. **42**, 83 (1981).

- [36] N. J. Mackay and W. A. McGhee, *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 2791 (1993).
- [37] E. Verlinde, *Nucl. Phys.* **B300**[FS 22], 360 (1988).
- [38] B. Dubrovin, *Nucl. Phys.* **B379**, 627 (1992); *Commun. Math. Phys* **152**, 539 (1993).
- [39] H. Aratyn, C. P. Constantinidis, L. A. Ferreira, J. F. Gomes and A. H. Zimerman, *Nucl. Phys.* **B406**, 727 (1993).
- [40] M. Zyskin, *On gauge fields–strings duality as an integrable system.* hep–th/0004105.
- [41] V. Drinfeld, V. Sokolov, *J. Sov. Math.* **30** (1984) 1975
- [42] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J.D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London, 1982.
- [43] A. B. Borisov and V. V. Kiseliev, Inverse problem for an elliptic sine–Gordon equation with an asymptotic behaviour of the cnoidal–wave type, *Inverse Probl.* **5**, 959 – 982 (1989).
- [44] A. C. Ting, H. H. Chen and Y. C. Lee, Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: The vortices of the two–dimensional sinh–Gordon equation, *Physica* **26D**, 37–66 (1987).
- [45] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’skii, A. R. Its, and V. B. Mateev, *Algebro Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Springer, Berlin, 1984.
- [46] K. Uhlenbeck, On the connection between harmonic maps and the self–dual Yang–Mills and the sine–Gordon equations, *J. Geometry and Phys.* **8**, 283–316 (1982).
- [47] Miki Wadati, Heiji Sanuki and Kimiaki Konno, *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 53, No 2, (1975).
- [48] R. Sasaki, *Nuclear Physics B* **154** (1979) 343–357.
- [49] A. C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. Mclaughlin, *Proc. IEEE* **61** (1973), 1443.
- [50] L. P. Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, New York, 1960.

- [51] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov and A. T. Fomenko, *Modern Geometry—Methods and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [52] L. Bianchi *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. 1, Pisa, 1922;
G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. III, Paris, 1894.
- [53] R. L. Anderson and N. J. Ibragimov, *Lie–Bäcklund Transformations in Applications*, SIAM studies 1, Philadelphia.
- [54] K. Tenenblat, *Transformations of manifolds and Applications*, Int. Congress on Differential geometry, Rio de Janeiro, IMPA, July 1996.
- [55] A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Contemporary Concepts in Physics V3, Harvard Academic Publ., N. Y. 1987.
N. Seiberg, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990) 319.
- [56] M. V. Saveliev, Teor. i Mat. Fizika, **60**, 9 (1983).
- [57] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926
L. P. Eisenhart *Non–Riemannian Geometry*, vol. 8, AMS, Colloquium Publ., 1928.
- [58] T. J. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford, 1993.
- [59] G. M. Sotkov and M. S. Stanishkov, Nucl. Phys. **B356** (1991)439–468.
- [60] J. L. Gervais and Y. Matsuo, Commun. Math. Phys. **152**, 317–368 (1993); Phys. Lett **B274**(1992)309–316.
- [61] A. I. Bobenko, *Exploring Surfaces through Methods from the Theory of Integrable Systems. Lectures on Bonnet Problem*, math.DG/9909003.
- [62] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Liouville, Model on the Lattice*, Lect. Notes in Phys. **246**, 166–179.
- [63] E. Aldrovandi and L. Bonora, J. Geom. Phys, **14**(1994)65.
- [64] L. Dolan, Phys. Rev. **D15**, 2337 (1977).

- [65] E. Witten, Phys. Rev. Lett. **38**, 121 (1977)
A. N. Leznov and M. V. Saveliev, Commun. Math. Phys. **74**, 111 (1980); *ibid.* **89**, 59 (1983).
- [66] S. Lang, $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley 1975.
- [67] H. Belich, G. Cuba and R. Paunov, work in progress
- [68] O. Babelon, D. Bernard, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 507.
- [69] A. Sym, Lect. Notes in Phys. **239** 154–231.
- [70] E. Date, Osaka J. Math. **19** (1982) 125–158.
- [71] C. Rogers, W. K. Schief, Phys. Lett. A **232** (1997) 217–223.
- [72] G. Cuba, R. Paunov, Trabalho em andamento

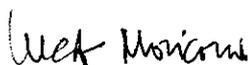
“ASPECTOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS DOS MODELOS DE TODA”

Guillermo Santiago Cuba Castillo

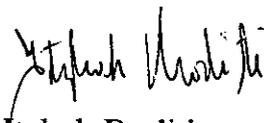
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Roman Raykov Paounov – Presidente



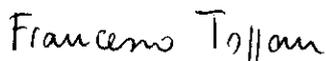
Luca Moriconi



Itzhak Roditi



José Abdalla Helayël Neto



Francesco Toppan

Rio de Janeiro, 19 de setembro de 2000