

TESE DE  
DOUTORADO

**Propriedades Quânticas da  
Eletrodinâmica Bidimensional  
Renormalizada**

RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

*A Gliseida.*  
*A mis padres Ambrocio y Graciela,*  
*a mis hermanos Carlos, Eduardo, Nancy y Jesús.*

# Agradecimentos

Ao Professor e amigo Sebastião Alves Dias pelas discussões e pelo apoio, em todos estes anos sob a sua orientação.

A meus amigos de sempre Guillermo, German, Gino, Marco. Aos amigos que sempre estiveram presentes, Onofre, Peche, Gabriel, não somente para curtir um bom metal. E a todos aqueles amigos que sempre estiveram por perto nestes anos no CBPF.

A toda a galera do DCP/CBPF pelo ambiente de camaradagem nestes anos, que fazem do nosso departamento o lugar mais agradável para estudar e desenvolver as nossas pesquisas.

Ao povo brasileiro, pela bolsa a mim concedida e por não deixar que eu me sentisse longe de casa, MUITO OBRIGADO.

# Resumo

Regularizamos e renormalizamos, através do método de integração funcional, o modelo de Schwinger anômalo (MSA) e o quiral (MSQ). A renormalização é feita tanto semi-perturbativamente (em termos de uma expansão envolvendo o propagador exato do fóton) quanto exatamente. Estudamos a blindagem e confinamento de cargas de prova (usando as teorias regularizadas), confirmando os resultados pela análise do loop de Wilson. Encontramos a solução operatorial do MSA, usando a técnica de bosonização, e revelamos a estrutura do espaço de Hilbert e dos observáveis físicos. Analisamos o comportamento de funções de correlação de condensados quirais e correntes físicas no MSA, no que diz respeito à propriedade de *cluster* e comportamento infravermelho, e mostramos a preservação da simetria de calibre quântica (para qualquer valor de  $a_v \geq 1$ ), de modo similar ao que ocorre no MSQ. O conjunto dos nossos resultados mostra a consistência de teorias de calibre anômalas em duas dimensões, no mínimo para algumas classes de regularizações.

# Abstract

We regularize and renormalize, by functional integral techniques, the anomalous (ASM) and the chiral Schwinger model (CSM). The renormalization is done both semi-perturbatively (in terms of an expansion involving the exact photon propagator) and exactly. We study the screening and confinement of test charges (using the regularized theories), confirming our results by a Wilson loop analysis. We find the operator solution of the ASM, using the bosonization method, and we reveal the structure of the Hilbert space and the physical observables. We analyze the behaviour of the chiral condensates and physical currents in the ASM, in what concerns cluster properties and infrared behaviour, and we show that gauge symmetry is preserved at the quantum level (for  $a_v \geq 1$ ), in a similar way to what happens in the CSM. All our results show the consistency of anomalous gauge theories in two dimensions, at least for some classes of regularizations.

# Conteúdo

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Conteúdo . . . . .	v
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Eletrodinâmica Quântica sem massa em (1+1) dimensões: análise semi-perturbativa</b>	<b>4</b>
1.1 O modelo de Schwinger anômalo . . . . .	4
1.1.1 Funções de Green divergentes . . . . .	4
1.1.2 Regularização . . . . .	8
1.1.3 Identidades de Ward . . . . .	12
1.1.4 Renormalização . . . . .	13
1.1.4.1 Análise semi-perturbativa . . . . .	15
1.1.4.2 Renormalização na ordem de <i>1-loop</i> . . . . .	18
1.2 O Modelo de Schwinger quirral . . . . .	20
1.2.1 Funções de Green divergentes . . . . .	20
1.2.2 Regularização . . . . .	22
1.2.3 Identidades de Ward . . . . .	26
1.2.4 Renormalização . . . . .	27
1.2.4.1 Análise semi-perturbativa . . . . .	28
1.2.4.2 Renormalização na ordem de <i>1-loop</i> . . . . .	29

<b>2</b>	<b>Renormalização exata da Eletrodinâmica Quântica sem massa em (1+1) dimensões</b>	<b>31</b>
2.1	O modelo de Schwinger anômalo . . . . .	31
2.2	O modelo de Schwinger quirral . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Blindagem e confinamento</b>	<b>42</b>
3.1	O modelo de Schwinger anômalo . . . . .	42
3.1.1	Análise do <i>loop</i> de Wilson . . . . .	44
3.2	O modelo de Schwinger quirral . . . . .	46
3.2.1	Análise do <i>loop</i> de Wilson . . . . .	48
<b>4</b>	<b>A estrutura do espaço de Hilbert do modelo de Schwinger anômalo</b>	<b>49</b>
4.1	O espaço de Hilbert . . . . .	49
4.1.1	Caso $a_v > 1$ . . . . .	51
4.1.1.1	Os campos fermiônicos: renormalização da função de onda	53
4.1.1.2	Propagador do fóton . . . . .	55
4.1.1.3	Renormalização do vértice . . . . .	55
4.1.1.4	Operadores físicos . . . . .	56
4.1.2	Caso $-1 \leq a_v < 1$ . . . . .	59
4.1.2.1	Os campos fermiônicos: renormalização da função de onda	60
4.1.2.2	Os operadores físicos . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Densidades quirais no modelo de Schwinger anômalo</b>	<b>64</b>
5.1	Densidades quirais . . . . .	64
5.1.1	Funções de correlação das densidades quirais . . . . .	66
5.2	Uma descrição “física” do modelo de Schwinger anômalo . . . . .	68
5.2.1	A reação $e^+e^- \rightarrow hadrons$ . . . . .	68
5.2.2	O propagador corrente-corrente EM . . . . .	70
5.3	Densidades quirais no espaço de Hilbert físico . . . . .	71
5.3.1	Análise no espaço de Hilbert físico para $a_v > 1$ . . . . .	71
5.3.2	Análise no espaço de Hilbert físico para $a_v = 1$ . . . . .	72

<b>Apêndices</b>	<b>79</b>
<b>A Convenções e identidades úteis</b>	<b>79</b>
A.1 $d = 1 + 1$ . . . . .	79
A.2 Algumas integrais úteis . . . . .	80
A.3 Relações úteis . . . . .	81
<b>B Modelo de Schwinger anômalo renormalizado</b>	<b>82</b>
B.1 Funções de Green renormalizadas . . . . .	82
B.2 Identidades de Ward . . . . .	83
<b>C Bosonização de férmions livres em (1+1)-dimensões</b>	<b>85</b>
C.1 Campo bosônico massivo livre . . . . .	85
C.2 Campo bosônico livre sem massa . . . . .	86
C.3 Campo fermiônico . . . . .	88
C.4 Bosonização de férmions . . . . .	89
C.5 Nota . . . . .	90
<b>Bibliografia</b>	<b>92</b>

# Introdução

As teorias de calibre são os principais instrumentos utilizados atualmente para uma descrição da natureza no seu nível mais fundamental. Três das quatro interações são descritas por teorias de calibre perturbativamente renormalizáveis, com um sucesso impressionante. Um dos requerimentos fundamentais para que estas teorias sejam perturbativamente renormalizáveis é o de que a simetria de calibre seja preservada no nível quântico (em todas as etapas de cálculo intermediárias, desde a regularização, e no resultado final). A preservação desta simetria implica no estabelecimento das identidades de Ward, as quais relacionam constantes de renormalização e ajudam a cancelar divergências. O descobrimento do *quark top*, e o conseqüente cancelamento da anomalia de calibre do modelo padrão, é interpretado por muitos físicos como uma forte evidência de que a preservação da simetria de calibre deva ser tomada quase como um postulado adicional, no mesmo nível ou levemente abaixo da preservação da simetria de Poincaré ou do requerimento de unitariedade para a matriz  $S$ .

Contudo, dentro de um ponto de vista teórico, apareceram fortes evidências, desde meados dos anos 80, de que eventualmente poderia ser possível uma convivência pacífica com as anomalias de calibre. O trabalho pioneiro foi o de Jackiw e Rajaraman [1] que analisaram a Eletrodinâmica sem massa em duas dimensões com acoplamento mínimo entre férmions quirais e o campo de calibre, para concluir que poder-se-ia obter uma teoria unitária e consistente, a despeito do fato da simetria de calibre ser violada (ao menos em passos intermediários, posteriores à quantização dos graus de liberdade fermiônicos, mas anteriores à quantização completa do campo de calibre). Em seguida, Faddeev e Shatashvili [2] observaram que a anomalia de calibre podia ser cancelada pela introdução de graus de liberdade quânticos, os campos de Wess-Zumino. Fechando o círculo, Babelon, Schaposnik e Viallet [3] e Harada e Tsutsui [4] observaram que estes campos já estavam

presentes, implicitamente, na teoria, podendo ser revelados por meio de uma adaptação, para teorias anômalas, do procedimento de Faddeev-Popov. O contexto onde tais idéias foram explicitamente comprovadas continuou sendo o de duas dimensões, dada a ausência de métodos poderosos o suficiente para investigar teorias de campo não perturbativamente em dimensões superiores a dois.

Entretanto, mesmo em duas dimensões, certas questões importantes fugiram do foco principal. Chamamos a atenção para duas destas questões nesta tese. A primeira aparece inicialmente no contexto da Eletrodinâmica Quiral (o modelo foi proposto e analisado em [1] e é conhecido como *modelo de Schwinger quiral* (MSQ)). O modelo exhibe divergências ultravioletas em suas funções de correlação fermiônicas, observadas desde as suas primeiras análises [5, 6]. Sua renormalização foi considerada em [7], mas, embora os autores tenham achado fortes evidências de que a teoria podia ser renormalizada, nenhum esquema sistemático para fazer isto foi proposto. Como veremos mais adiante (nesta tese), esta é uma questão sutil, pois a natureza das divergências apresentadas pelo modelo é inacessível por meio de métodos perturbativos. É preciso que se mostre, na prática, de que maneira a regularização e a renormalização podem ser feitas. Se isto não acontecer, o modelo tem que ser tomado apenas como exatamente solúvel *em potencial* (qualquer função de correlação parece poder ser calculada exatamente, mas ninguém sabe como!).

A segunda questão é menos prática, mas envolve considerações profundas em relação à interpretação física do procedimento de renormalização. A Eletrodinâmica Vetorial em duas dimensões (proposta em [8] e conhecida como *modelo de Schwinger* (MS)) foi um dos primeiros exemplos do mecanismo de geração dinâmica de massa para bósons vetoriais. Este modelo é totalmente livre de divergências ultravioletas, contanto que seja utilizado um procedimento de regularização *invariante de calibre* para a função de Green de dois pontos da teoria. O modelo é famoso, também, por permitir a visualização explícita do confinamento de férmions, quebra de simetria quiral global pela anomalia  $U(1)$  e existência de vácuos  $\theta$ , entre outras características (veja [9]-[18]). No entanto, se empregamos um método de regularização *não invariante de calibre* [19, 20], o modelo aparentemente passa a exibir um comportamento desconfiante para os férmions. A interpretação corrente é a de que o procedimento de regularização deve ser fornecido junto com a Lagrangeana, para definir completamente o modelo. Diferentes procedimentos de

regularização levariam a diferentes modelos, com propriedades quânticas completamente diferentes. O modelo, estudado desde este ponto de vista, ficou conhecido como “modelo de Schwinger não confinante”. Preferimos, no entanto, chamá-lo de *modelo de Schwinger anômalo* (MSA), por razões que ficarão mais claras adiante.

As divergências ultravioletas, que compareciam no MSQ, também se fazem presentes no MSA. Na verdade, como veremos na tese, a estrutura é praticamente idêntica. No entanto, o MSA é bem menos estudado que o MSQ. Na nossa interpretação, isto deve-se à acomodação natural ao ponto de vista de que a simetria de calibre é uma simetria fundamental da natureza. O raciocínio seria o seguinte: já que, no caso vetorial, existe uma classe de regularizações invariantes de calibre, isto torna desnecessário considerar os outros tipos de regularização. A nosso ver, para que este ponto de vista faça sentido, dever-se-ia provar que todas as regularizações conduzem aos mesmos resultados físicos, o que está longe de se conseguir. Por outro lado, se as outras regularizações são rejeitadas por serem não invariantes de calibre (e, portanto, *não físicas*), o MSQ não deveria sequer ser considerado, já que, para este modelo, não existem regularizações invariantes de calibre! Esta situação é suficientemente intrigante para justificar uma análise cautelosa do MSA.

Colocamos, nesta tese, os dois modelos dentro do mesmo panorama: o das teorias de calibre *anômalas*. Inicialmente (capítulos 1 e 2) enfrentamos a questão da renormalização, semi-perturbativa e não perturbativa, das duas teorias, sem a resposta da qual estaríamos impedidos de seguir em frente, na análise das propriedades não perturbativas das teorias. Em seguida (capítulo 3), investigamos as propriedades de blindagem e confinamento dentro do ponto de vista do potencial estático entre *quarks* e do *loop* de Wilson. A estrutura do espaço de Hilbert do MSA é extensivamente discutida no capítulo 4 (para o MSQ esta discussão já foi feita anteriormente [6]). Finalmente, no capítulo 5, analisamos algumas funções de correlação específicas (de condensados quirais e de outros operadores compostos) tentando nos aproximar das amplitudes “físicas” (as aspas referem-se ao fato de estarmos em duas dimensões). Apresentamos nossas conclusões em seguida e, posteriormente, incluímos três apêndices, com nossas convenções e identidades úteis (apêndice A), uma discussão das identidades de Ward para as teorias renormalizadas (apêndice B) e uma revisão do procedimento padrão de bosonização em duas dimensões (apêndice C).

# Capítulo 1

## A Eletrodinâmica Quântica sem massa em (1+1) dimensões: análise semi-perturbativa

Neste primeiro capítulo, começaremos o estudo da Eletrodinâmica sem massa em (1+1) dimensões, quantizando-a através de prescrições não invariantes de calibre. Como se conhece na literatura, o modelo vetorial quase sempre foi estudado desde o ponto de vista da preservação da invariância de calibre local no nível quântico. Por outro lado, no modelo quiral não existe nenhuma prescrição que mantenha esta invariância. O fato de apresentar os dois modelos quantizados de modo não invariante de calibre (local), ilustra um método desenvolvido por nós que permite renormalizar, ao menos em (1+1) dimensões, teorias com anomalia de calibre local.

### 1.1 O modelo de Schwinger anômalo

#### 1.1.1 Funções de Green divergentes

O modelo de Schwinger é definido pela seguinte densidade de Lagrangeana<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\cancel{A})\psi. \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Em todo o trabalho  $dx$  significa  $d^2x$ . As nossas convenções são dadas no Apêndice A

A ação efetiva  $W[A_\mu]$  é definida por

$$e^{iW[A_\mu]} = \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \bar{\psi} (i\partial + eA) \psi \right] = \det i(i\partial + eA).$$

Calculamos o determinante fermiônico usando uma prescrição não invariante de calibre [21, 22]. Esta prescrição será responsável pelo aparecimento de um parâmetro  $a$  (no caso do modelo de Schwinger quiral [1], o parâmetro de Jackiw-Rajaraman) o qual será uma manifestação da ambigüidade no processo de regularização das divergências ultravioletas, ou de curtas distâncias, que aparecem durante o cálculo do determinante fermiônico. O cálculo de  $W[A_\mu]$  fornece

$$W[A_\mu] = \int dx \frac{1}{2} A_\mu(x) \left[ m_v^2 g^{\mu\nu} - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x), \quad (1.2)$$

onde  $m_v^2$  é

$$m_v^2 = \frac{e^2}{2\pi} (a_v + 1). \quad (1.3)$$

Podemos verificar que a ação efetiva  $W[A_\mu]$  não é invariante sob uma transformação de calibre;  $m_v^2$  é uma massa gerada dinamicamente depois que os campos fermiônicos são quantizados e  $a_v$  é um parâmetro arbitrário que surge devido à necessidade de regularizar as divergências de curta distância que aparecem no cálculo do determinante fermiônico. Existe um valor específico do parâmetro,  $a_v = 1$ , que faz a ação efetiva  $W[A_\mu]$  invariante de calibre. É este o valor geralmente considerado na literatura. Um cálculo explícito da ação bosonizada, com uma prescrição de regularização arbitrária produz o parâmetro indeterminado. A teoria é aparentemente consistente [20] para  $a_v \neq 1$ .

Da equação (1.3), podemos obter um limite inferior para os possíveis valores de  $a_v$ . A exigência de que a teoria não tenha táquions implica em  $m_v^2 \geq 0$ , ou seja,  $a_v \geq -1$ .

O funcional gerador é

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx (\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J_\mu A^\mu) \right]. \quad (1.4)$$

Integrando nos campos fermiônicos obtemos

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2} A_\mu \Gamma^{\mu\nu} A_\nu + J_\mu A^\mu \right) - i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right], \quad (1.5)$$

onde  $\Gamma^{\mu\nu}$  é

$$\Gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\square + m_v^2) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}. \quad (1.6)$$

A função  $G(x, y; A)$  em (1.5), é a função de Green de dois pontos fermiônica sob ação do campo externo  $A_\mu$ , isto é,  $(i\cancel{\partial} + eA)G(x, y; A) = \delta(x - y)$ . Esta função de Green é calculada exatamente, e dada por

$$G(x, y; A) = \exp \left[ -ie \int dz A_\mu(z) j_-^\mu(z, x, y) \right] P_- G_F(x - y) + \quad (1.7)$$

$$+ \exp \left[ -ie \int dz A_\mu(z) j_+^\mu(z, x, y) \right] P_+ G_F(x - y),$$

onde  $G_F$  satisfaz  $i\cancel{\partial}_x G_F(x - y) = \delta(x - y)$ , e  $j_\epsilon^\mu$  é

$$j_\epsilon^\mu(z, x, y) = (\partial_z^\mu - \epsilon \tilde{\partial}_z^\mu) [D_F(z - x) - D_F(z - y)], \quad (1.8)$$

com  $\epsilon = \pm$ , e  $\square D_F(x - y) = \delta(x - y)$ .  $P_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$  são os operadores de projeção nas quiralidades direita e esquerda e  $\tilde{\partial}_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu$ .

Todas as funções de correlação da teoria podem, em princípio, ser calculadas exatamente no espaço de configuração, embora o mesmo não possa ser feito no espaço de momenta, onde não se sabe como bosonizar diretamente a teoria.

O propagador fotônico,  $G_{\mu\nu}(x - y) = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle$ , é diretamente calculado desde (1.5) e, no espaço de momenta, é

$$i\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 - m_v^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a_v - 1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (1.9)$$

Observamos que o propagador fotônico têm um pólo simples em  $m_v^2$ , o que indica que o fóton ganha massa depois que a teoria é quantizada. Podemos também ver uma dependência explícita no parâmetro  $a_v$  da massa do fóton, que a deixa indefinida. No entanto, o propagador fotônico é livre de divergências. O seu comportamento em altas energias é similar ao da teoria de Proca.

Agora calculamos o propagador fermiônico,  $G(x - y) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ , que é dado pela seguinte expressão

$$G(x - y) = i \exp \left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F(x - y), \quad (1.10)$$

com  $f(k)$  dado por

$$f(k) = -\frac{2\pi}{e^2(a_v - 1)} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2(k^2 - m_v^2)}. \quad (1.11)$$

O propagador fermiônico (1.10), tem divergências ultravioletas, e é livre de divergências infravermelhas. Esta divergência é melhor entendida no espaço de momenta. Embora

ainda não podemos calcular exatamente a transformada de Fourier, podemos escrever a equação de Schwinger-Dyson satisfeita pelo propagador fermiônico

$$\left( \not{\partial}_x + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \not{k} e^{-ik \cdot (x-y)} \right) G(x-y) = \delta(x-y). \quad (1.12)$$

A equação (1.12) pode facilmente ser expressa no espaço de momenta, onde permite que se encontre uma equação integral para o propagador do férmion  $\tilde{G}(p)$

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{\not{p}} - i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \tilde{G}(p-k). \quad (1.13)$$

Podemos expandir a equação acima para  $\tilde{G}(p)$  em potências da função  $f$ , e mostrar que obtemos uma expansão em *loops* usando o propagador exato do fóton, com a  $n$ -ésima ordem de *loops* associada a  $\hbar^n$  [23], como no caso usual. Escrevendo  $\hbar$  explicitamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \tilde{G}(p) &= \frac{i}{\not{p}} + \hbar e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p}-\not{k}} + \\ &- i \hbar^2 e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f(k) f(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p}-\not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p}-\not{k}-\not{s}} + \dots \end{aligned} \quad (1.14)$$

Uma análise por contagem de potências da expansão (1.14), mostra a presença de uma divergência logarítmica ultravioleta no propagador do férmion. Esta divergência é similar àquela presente em uma teoria de Proca com férmions, devido ao mau comportamento em altas energias do propagador exato do fóton. Entretanto, é possível renormalizar a teoria neste contexto, porque o setor bosônico é apenas quadrático no campo  $A_\mu$  após a integração dos férmions. Até onde podemos ver, a renormalização do setor fermiônico pode ser feita sem problemas, uma vez que reconhecemos que temos que usar o propagador exato do fóton, em vez do mesmo calculado em nível de árvore (devido a ser ele indefinido neste setor). Isto é o que chamaremos de uma *aproximação semi-perturbativa*.

Vale lembrar que, para  $a_v = 1$ , não aparecem divergências ultravioletas no propagador fermiônico. Isto aparentemente contribuiu para que a questão da renormalização do modelo vetorial tenha sido praticamente esquecida na literatura. Como veremos, ao considerar valores gerais para  $a_v$ , nos deparamos com um problema de renormalização completamente similar ao do caso quiral. O fato de que a anomalia, neste caso, possa ser removida pela adição de contratermos, não influi em nada na construção do procedimento de renormalização

A função de Green de três-pontos  $G^\mu(x, y, z) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)A^\mu(z)|0\rangle$ , é

$$G^\mu(x, y, z) = i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} g^\mu(k) [e^{-ik\cdot(z-x)} - e^{-ik\cdot(z-y)}] G(x-y), \quad (1.15)$$

com  $g^\mu$  dado por

$$g^\mu(k) = \frac{2\pi k^\mu}{e^2(a_v - 1)k^2} + \frac{\gamma_5 \tilde{k}^\mu}{k^2(k^2 - m_v^2)}. \quad (1.16)$$

No espaço de momenta  $\tilde{G}^\mu(p, -p - q, q) \equiv \tilde{G}^\mu(p, q)$ , então

$$\tilde{G}^\mu(p, q) = i e g^\mu(q) [\tilde{G}(p+q) - \tilde{G}(p)]. \quad (1.17)$$

Observamos que a divergência nesta função é devida somente ao propagador fermiônico. Pode-se facilmente ver que somente as funções de Green com pernas fermiônicas terão divergências ultravioletas. Uma análise cuidadosa conduz à conclusão de que estas divergências não têm uma origem perturbativa [24].

Damos atenção ao fato de que podemos escrever a função de 3-pontos quase inteiramente em termos da função de 2-pontos. Isto, certamente, não é um simples acidente. Recentemente Adam [25] e Radozycki [26] mostraram, no contexto da quantização invariante de calibre do modelo de Schwinger convencional, que esta propriedade está ligada à redução de um conjunto infinito de equações de Schwinger-Dyson, de modo tal que podemos expressar cada função de Green de  $n$ -pontos em termos de funções de Green com número de pernas menores que  $n$ . Em [26] usa-se crucialmente o fato de que a invariância de calibre foi preservada (identidade de Ward não anômala para a função de 2-pontos fotônica). O fato de que as mesmas equações são ainda válidas para modelos anômalos sugere que este fato não depende tanto da preservação da invariância de calibre local intermediária, como poderia parecer à primeira vista. Esta “fatorização” é, de fato, uma consequência da preservação das outras identidades de Ward, e será muito importante para a renormalização do modelo

### 1.1.2 Regularização

Na presente seção estudamos como regularizar as divergências UV que existem no setor fermiônico da teoria. Para isso, usaremos o ponto de vista do *formalismo não invariante de calibre* [27] onde não introduzimos um campo de Wess-Zumino para restaurar a simetria de calibre [2, 4]. Entretanto, ao menos para o caso deste modelo, os resultados

são coincidentes [23]. No formalismo não invariante de calibre, o campo vetorial  $A_\mu$  é decomposto em suas partes longitudinal e transversal,

$$eA_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi. \quad (1.18)$$

Substituindo a decomposição (1.18) na ação notamos que, devido à invariância de calibre clássica, não há termo cinético para o campo  $\rho$  (a parte longitudinal do campo  $A_\mu$ ). Fazemos uma mudança de variáveis fermiônicas, com a finalidade de desacoplar a parte longitudinal do campo  $A_\mu$  dos campos fermiônicos,

$$\psi = e^{i\rho} \psi', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-i\rho}. \quad (1.19)$$

No entanto, a medida fermiônica não é invariante sob (1.19),

$$d\psi d\bar{\psi} = d\psi' d\bar{\psi}' \exp \left[ \frac{i(a_v - 1)}{4\pi} \int dx \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \right], \quad (1.20)$$

o que gera um termo cinético para o campo  $\rho$ . Inserindo no gerador funcional (1.4), obtemos

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \tilde{\phi}) \psi - \frac{1}{e} J_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi + \right. \right. \quad (1.21) \\ \left. \left. + \frac{(a_v - 1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} J_\mu \partial^\mu \rho \right) \right].$$

Notamos que a tentativa de desacoplar os férmions não foi bem sucedida, mas gerou um termo cinético para o campo  $\rho$ . Este campo é ainda acoplado aos campos fermiônicos, de modo mais complicado, através das fontes fermiônicas. Este detalhe, em geral, não é notado, pois costuma-se trabalhar com as amplitudes vácuo-vácuo, onde as fontes são igualadas a zero. Este acoplamento induz o aparecimento das divergências ultravioletas nas funções de Green envolvendo férmions. Para calcular a função de 2-pontos fermiônica, temos que tomar duas derivadas funcionais sobre  $Z$ , em (1.21), com respeito às fontes fermiônicas  $\eta$  e  $\bar{\eta}$ . Fazendo isto e, em seguida pondo as fontes a zero, chegamos à seguinte expressão para o propagador fermiônico,

$$G(x - y) = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi}(y) \quad (1.22) \\ \exp \left( i \int dz \left[ \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \tilde{\phi}) \psi + \frac{(a_v - 1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho j(z, x, y) \right] \right),$$

onde  $j(z, x, y) = \delta(z - x) - \delta(z - y)$ . Notamos a dependência quadrática desta expressão em  $\rho$ , o que nos permite realizar exatamente a sua integração. Ao fazer isto, encontramos o fator

$$\exp \left\{ -\frac{2\pi i}{a_v - 1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \right\}, \quad (1.23)$$

que vem antes do propagador livre do férmion, e é logaritmicamente divergente. Esta divergência tem uma natureza essencialmente não perturbativa, o que pode ser visto pelo cálculo perturbativo da função de 2-pontos fermiônica (não há nenhum gráfico de Feynman induzindo o aparecimento desta divergência) e tem o seu paralelo no assim chamado *formalismo invariante de calibre*, onde pode-se ver que a mesma divergência surge depois da integração exata sobre os campos de Wess-Zumino [24].

Tendo identificado a origem da divergência, o próximo passo é, naturalmente, a sua regularização. A observação fundamental aqui é que tudo poderia ser finito se tivéssemos um comportamento ultravioleta melhor do propagador do campo  $\rho$ . Podemos obter este comportamento por meio da regularização de Pauli-Villars. Adicionamos ao gerador funcional um novo campo  $\beta$  que tenha uma massa grande  $\Lambda^2$  [28] ( $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$ ), seguindo a receita usual: a) adicionar o termo

$$-\frac{(a_v - 1)}{4\pi} \beta(\square + \Lambda^2)\beta \quad (1.24)$$

à ação; b) modificar os termos de interação de  $\rho$  mediante a substituição  $\rho \rightarrow \rho + \beta$ ; c) realizar a integração funcional no campo  $\beta$  (imediatamente antes deste passo, realizamos a mudança de variáveis,  $\rho \rightarrow \rho - \beta$ ). Isto define o gerador funcional regularizado  $Z^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J]$ , o qual se reduz a  $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$  no limite de  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Após manipulações no gerador funcional (1.21), obtemos a seguinte expressão,

$$Z^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi}(i\partial - \tilde{\phi})\psi - \frac{1}{e} J \cdot \tilde{\partial} \phi + \right. \right. \quad (1.25) \\ \left. \left. - \frac{(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2} \rho \square(\square + \Lambda^2)\rho + \bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} J \cdot \partial \rho \right) \right].$$

Agora, o propagador do campo  $\rho$  tem um melhor comportamento ultravioleta ( $\approx k^{-4}$ , para  $\Lambda^2$  finito). Contudo, estamos interessados na maneira pela qual a ação original muda depois do processo de regularização feito acima. Então, voltamos aos campos originais da teoria, mediante as seguintes transformações inversas,

$$\psi = e^{-i\rho} \psi', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{i\rho}.$$

O Jacobiano desta transformação é o inverso do Jacobiano aparecendo em (1.20)

$$d\psi d\bar{\psi} = d\psi' d\bar{\psi}' \exp \left[ -\frac{i(a_v - 1)}{4\pi} \int dx \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \right],$$

e, realizando as transformações inversas,

$$\rho = e \frac{\partial_\mu}{\square} A^\mu, \quad \phi = e \frac{\tilde{\partial}_\mu}{\square} A^\mu,$$

e, introduzindo tudo isso em (1.25), obtemos o gerador funcional regularizado em termos dos campos originais da teoria (1.1),

$$Z^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left( i \int dx \mathcal{L}^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right), \quad (1.26)$$

onde  $\mathcal{L}^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$  é a densidade de Lagrangeana para a teoria regularizada

$$\mathcal{L}^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} + e \not{A}) \psi - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2. \quad (1.27)$$

Observamos a presença de um termo novo na densidade de Lagrangeana, equivalente a uma condição de “fixação de calibre” do tipo Lorentz com um parâmetro de calibre que é dependente de  $a_v$  e proporcional a  $\Lambda^{-2}$ . Este termo novo permite que regularizemos completamente a teoria.

É preciso, neste ponto, recordar que não temos o direito de fixar um calibre, porque a teoria é anômala. Isto não é o que está sendo feito. É, de fato, bastante curioso e inesperado que a regularização possa ser feita de uma maneira que seja similar a uma condição de fixação de calibre.

De (1.26), podemos agora calcular as funções de Green regularizadas. O propagador regularizado do fóton é dado por

$$i \tilde{G}_{\mu\nu}^\Lambda(k) = \frac{1}{k^2 - m_v^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_v - 1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - \Lambda^2)}, \quad (1.28)$$

o propagador regularizado é finito quando  $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$ , como na teoria não regularizada. O comportamento em altas energias do propagador regularizado ( $\approx k^{-2}$ ) é melhor do que no caso não regularizado. Isso permite a regularização do propagador fermiônico e das outras funções de Green envolvendo férmions, como veremos a seguir.

O propagador regularizado do férmion é dado por

$$G^\Lambda(x - y) = i \exp \left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F(x - y), \quad (1.29)$$

onde definimos a função  $f^\Lambda$  como

$$f^\Lambda(k) = \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_v - 1)} \frac{1}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} - \frac{1}{k^2(k^2 - m_v^2)}. \quad (1.30)$$

O propagador (1.29) qual também satisfaz a equação de Schwinger-Dyson (1.12). No espaço de momenta, o propagador regularizado do férmion  $\tilde{G}^\Lambda(p)$  também satisfaz a equação (1.13) e, portanto, tem uma expansão análoga a (1.14). Uma análise por contagem de potências da equação para  $\tilde{G}^\Lambda(p)$  mostra que agora temos controle sobre as divergências logarítmicas. Definimos a função IIP de 2-pontos fermiônica  $\tilde{\Gamma}^\Lambda(p)$ , que satisfaz a equação,

$$\tilde{G}^\Lambda(p)\tilde{\Gamma}^\Lambda(p) = i. \quad (1.31)$$

Assim, a função IIP de 2-pontos fermiônica pode ser expressa por

$$\tilde{\Gamma}^\Lambda(p) = \not{p} \left[ 1 + i\hbar e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \right]. \quad (1.32)$$

Em seguida, calculamos a função de 3-pontos regularizada,

$$G_\mu^\Lambda(x, y, z) = i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} g_\mu^\Lambda(k) [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] G^\Lambda(x - y), \quad (1.33)$$

com  $g_\mu^\Lambda$  dado pela seguinte expressão

$$g_\mu^\Lambda(k) = -\frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_v - 1)} \frac{k_\mu}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} + \frac{\gamma_5 \bar{k}_\mu}{k^2(k^2 - m_v^2)}. \quad (1.34)$$

No espaço de momenta  $\tilde{G}_\mu^\Lambda(p, -p - q, q) \equiv \tilde{G}_\mu^\Lambda(p, q)$  também satisfaz (1.17). A função IIP de 3-pontos regularizada  $\tilde{\Gamma}_\mu^\Lambda(p, q)$  é

$$\tilde{\Gamma}_\mu^\Lambda(p, q) = e \frac{\gamma_\mu \not{q}}{q^2} [\tilde{\Gamma}^\Lambda(p + q) - \tilde{\Gamma}^\Lambda(p)]. \quad (1.35)$$

Assim, mostramos que a função IIP de 3-pontos é regularizada se a função de 2-pontos IIP fermiônica é regularizada, como esperado. É fácil mostrar, de maneira similar, que todas as funções de Green com pernas fermiônicas também são regularizadas. Assim, necessitamos somente renormalizar a função de 2-pontos fermiônica, como veremos nas próximas seções.

### 1.1.3 Identidades de Ward

Nesta seção, obtemos as identidades de Ward usando a densidade de Lagrangeana regularizada  $\mathcal{L}^\Lambda$  (1.27). Como é usual, no gerador funcional regularizado, fazemos a transformação

de calibre para o campo  $A_\mu$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x), \quad (1.36)$$

e a transformação de variáveis fermiônicas

$$\psi \rightarrow \psi + i\lambda(x)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - i\lambda(x)\bar{\psi}, \quad (1.37)$$

onde a função  $\lambda(x)$  é infinitesimal e somente consideramos termos de ordem  $\lambda(x)$ . Lembremos que a medida fermiônica não é invariante de calibre, mudando como  $d\psi d\bar{\psi} \rightarrow J[A_\mu] d\psi d\bar{\psi}$ .  $J$  é o Jacobiano da transformação (1.37), e é dado pela seguinte expressão

$$\ln J = -\frac{i(a_v - 1)}{2\pi} \int dx e\lambda \partial \cdot A + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (1.38)$$

Fazendo isto, é fácil obter a identidade de Ward fundamental satisfeita pelo gerador funcional das funções I1P,  $\Gamma^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$ , a qual é

$$i \frac{\delta \Gamma^\Lambda}{\delta \psi} \psi - i \frac{\delta \Gamma^\Lambda}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi} + \frac{1}{e} \partial^\mu \frac{\delta \Gamma^\Lambda}{\delta A^\mu} = \frac{e}{2\pi} (a_v - 1) \left( 1 + \frac{\square}{\Lambda^2} \right) \partial^\mu A_\mu. \quad (1.39)$$

Assim, a função I1P de 2-pontos fotônica satisfaz (no espaço de momenta),

$$k_\mu \tilde{\Gamma}^{\Lambda \mu\nu}(k) = \frac{e^2}{2\pi} (a_v - 1) \left( 1 - \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) k^\nu. \quad (1.40)$$

Vemos a não transversalidade do propagador fotônico, a qual é o sinal da existência da anomalia de calibre local (exceto para  $a_v = 1$ , o que indica que a anomalia não é um cociclo não trivial, podendo ser removida pela adição de contratermos de renormalização adequadamente escolhidos). A seguir, obtemos uma outra importante identidade de Ward, envolvendo a função I1P de 2-pontos fermiônica e a de 3-pontos,

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^\Lambda(p, q) = \tilde{\Gamma}^\Lambda(p + q) - \tilde{\Gamma}^\Lambda(p). \quad (1.41)$$

Esta identidade pode ser obtida pela manipulação direta da equação (1.35). Por outro lado, ela só repete o resultado encontrado pelo cálculo explícito da função I1P de 3-pontos, estabelecendo, assim, a origem do resultado mencionado previamente. Esta identidade de Ward será importante para a análise da renormalizabilidade da teoria.

#### 1.1.4 Renormalização

Na maneira usual, expressamos a densidade de Lagrangeana regularizada (1.27) em termos de quantidades renormalizadas e suas respectivas constantes de renormalização,

$$\mathcal{L}^\Lambda = -\frac{1}{4} Z_A F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{Z_e^2}{Z_\psi^2} \frac{e^2 (a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + e Z_e \bar{\psi} A_\mu \psi. \quad (1.42)$$

Definimos os campos não renormalizados  $A_o^\mu$  e  $\psi_o$ , e a constante de acoplamento não renormalizada  $e_o$  como

$$A_o^\mu = \sqrt{Z_A} A^\mu \quad , \quad \psi_o = \sqrt{Z_\psi} \psi \quad , \quad e_o = \frac{Z_e}{Z_\psi Z_A^{1/2}} e . \quad (1.43)$$

O procedimento de renormalização visa determinar as constantes  $Z_\psi$ ,  $Z_A$  e  $Z_e$  que tornam todas as funções de Green da teoria finitas. As possíveis ambigüidades na escolha destas constantes, são parametrizadas com a imposição de condições de renormalização.

As funções de Green fotônicas puras não têm divergências ultravioletas. Então não necessitamos de contratermos para renormalizá-las, o que significa

$$Z_A = 1. \quad (1.44)$$

Lembramos a identidade de Ward (1.41) satisfeita pelas funções IIP não renormalizadas

$$\frac{1}{e_o} q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^\Lambda(p, q) = \tilde{\Gamma}^\Lambda(p + q) - \tilde{\Gamma}^\Lambda(p) . \quad (1.45)$$

Substituindo nesta equação a relação entre as funções IIP renormalizadas e não renormalizadas,

$$\tilde{\Gamma}^R(p) = Z_\psi \tilde{\Gamma}^\Lambda(p) \quad (1.46)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu^R(p, q) = Z_e \tilde{\Gamma}_\mu^\Lambda(p, q) , \quad (1.47)$$

obtemos

$$q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^R(p, q) = e (Z_e Z_\psi^{-1})^2 \left[ \tilde{\Gamma}^R(p + q) - \tilde{\Gamma}^R(p) \right] . \quad (1.48)$$

Por outro lado, podemos *verificar* que as funções renormalizadas satisfazem também a identidade de Ward

$$q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^R(p, q) = e Z_e Z_\psi^{-1} \left[ \tilde{\Gamma}^R(p + q) - \tilde{\Gamma}^R(p) \right] . \quad (1.49)$$

Das equações (1.48) e (1.49), obtemos que

$$Z_e = Z_\psi , \quad (1.50)$$

Voltando à equação (1.43), vemos que

$$e_o = e . \quad (1.51)$$

Vemos que a constante de acoplamento da teoria não é renormalizada, mesmo quando a teoria é quantizada de maneira não invariante de calibre. Isto mostra que a universalidade da interação eletromagnética, expressa geralmente por  $eA^\mu = e_o A_o^\mu$ , pode ser preservada num esquema de renormalização não invariante de calibre. Em particular, vemos que a constante de acoplamento não dependerá da escala  $\mu$  de energia selecionada para impor as condições de renormalização. Temos, então, uma função beta de Callan-Symanzik nula,

$$\beta = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} e(\mu) \Rightarrow \beta = 0. \quad (1.52)$$

#### 1.1.4.1 Análise semi-perturbativa

Iniciamos nossa análise com a densidade de Lagrangeana  $\mathcal{L}^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$  (1.27),

$$\mathcal{L}^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + eA)\psi. \quad (1.53)$$

Tendo em mente um cálculo perturbativo, podemos calcular o propagador livre do fóton a partir do Lagrangeano regularizado mostrado na equação acima. Temos, assim,

$$i\tilde{G}_{\mu\nu}^0(k) = \frac{1}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_v - 1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (1.54)$$

O propagador (1.54) diverge quadraticamente no limite  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Se o introduzirmos no cálculo perturbativo das funções de correlação, faremos com que o comportamento ultravioleta dos gráficos individuais fique pior a cada ordem perturbativa consecutiva, implicando numa aparente não renormalizabilidade da teoria.

Notamos, contudo, que escrevendo explicitamente a expansão (1.14) para o propagador fermiônico regularizado, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar} \tilde{G}^\Lambda(p) &= \frac{i}{\not{p}} + \hbar e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \\ &\quad - i \hbar^2 e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p}} + \hbar \tilde{G}_1(p; \Lambda) + \hbar^2 \tilde{G}_2(p; \Lambda) + \dots \end{aligned} \quad (1.55)$$

Mostraremos que as expressões (1.55) e (1.32) são equivalentes à expansão em *loops* usando o propagador exato (regularizado) do fóton e, como mencionamos anteriormente, uma potência  $(f^\Lambda)^n$  corresponde a  $\hbar^n$ , ou *n-loops*.

Tomamos o segundo termo na expressão (1.55) e definimos

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}}. \quad (1.56)$$

Vamos mostrar que

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \quad (1.57)$$

onde



denota o propagador regularizado exato do fóton. O gráfico em (1.57) é expresso, no espaço de momenta, como

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{\not{p}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma^\nu \left( \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m_\nu^2(a_\nu)} + f^\Lambda(k) k_\mu k_\nu \right) \frac{1}{\not{p}} \quad (1.58)$$

O primeiro termo, proporcional ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , é cancelado devido à identidade em 2-dimensões,  $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = 0$ . Assim, temos

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p}}.$$

Usando a identidade,

$$\frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} = \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \quad (1.59)$$

e o fato que  $\not{a}\not{b}\not{c} = \not{c}\not{b}\not{a}$ , obtemos

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) \left( \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \right).$$

A integral do primeiro termo entre parênteses é nula, devido ao integrando ser uma função ímpar de  $k$ . Mudando de  $k$  para  $-k$  chegamos à expressão (1.56).

Continuando com a ordem seguinte na expansão (1.55), definimos

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} \quad (1.60)$$

Mostraremos que,

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_2(p; \Lambda) = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 & \text{Diagram 1: } \text{---}(p) \text{---}(p+k) \text{---}(p) \text{---}(p+k) \text{---}(p) \text{---} \\
 & \text{Diagram 2: } \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---} \\
 & \text{Diagram 3: } \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---} \\
 & \text{Diagram 4: } \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}(p) \text{---}
 \end{aligned}
 \tag{1.61}$$

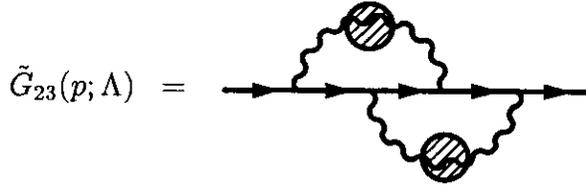
Computando o primeiro gráfico em (1.61), obtemos

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{21}(p; \Lambda) &= \text{Diagram 1} \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \frac{1}{\not{p}\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} \frac{1}{\not{s}\not{p}} \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \left( \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \frac{1}{\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.62}$$

O segundo gráfico é,

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{22}(p; \Lambda) &= \text{Diagram 1} \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \frac{1}{\not{s}\not{p}} \frac{1}{\not{k}\not{p}} \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \left( \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} + \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \frac{1}{\not{k}\not{p}} \right),
 \end{aligned}
 \tag{1.63}$$

e o terceiro gráfico é,



$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{23}(p; \Lambda) &= \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \frac{1}{\not{k}\not{p}+\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} \frac{1}{\not{p}} \\
 &= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \left( -\frac{1}{\not{p}} + \frac{1}{\not{p}+\not{k}} - \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \frac{1}{\not{k}\not{p}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\not{p}+\not{k}\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} - \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \right). \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

Somando as equações (1.62), (1.63) e (1.64), obtemos

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f^\Lambda(k) f^\Lambda(s) \left( \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} - \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}+\not{s}} \right). \tag{1.65}$$

Finalmente, aplicando duas vezes a identidade (1.59), obtemos o que queríamos mostrar.

O teorema é facilmente estabelecido por indução finita para todas as ordens. Esta expansão do propagador exato do férmion em termos do propagador exato do fóton foi considerada anteriormente na literatura [7, 25, 29]. No entanto, o papel fundamental que ela desempenha na renormalização de teorias de calibre em 2-dimensões não foi previamente notado ou utilizado. A análise de contagem de potências da expansão (1.55), mostra a presença de uma divergência UV logarítmica (por exemplo, tente computar o mesmo gráfico usando  $f$  em vez de  $f^\Lambda$ ) em cada *loop* que apareça na expansão do propagador fermiônico. Como veremos a seguir, a renormalização do setor fermiônico pode ser feita sem problemas, uma vez que reconhecemos que devemos usar o propagador exato do fóton, em vez daquele no nível de árvore.

O propagador exato do fóton não exibe a divergência do propagador em nível de árvore, que é cancelada quando somamos os termos da série geométrica que o define. Isto mostra que, numa teoria anômala, o propagador exato ou completo do fóton tem que ser considerado em vez daquele no nível de árvore. O nível de árvore do setor bosônico é, portanto, indefinido. Chamaremos este tipo de aproximação de *semi-perturbativa*.

### 1.1.4.2 Renormalização na ordem de 1-loop

Agora, podemos calcular as funções IIP na ordem de 1-loop (no sentido semi-perturbativo) e impor condições de renormalização, para determinar a parte finita das constantes de renormalização.

A função IIP de dois-pontos fermiônica (1.32)  $\tilde{\Gamma}^\Lambda$  em 1-loop é

$$\tilde{\Gamma}^\Lambda(p) = \not{p} \left[ 1 + \frac{\hbar}{2(a_v - 1)} \ln \left( -\frac{\Lambda^2}{p^2} \right) - \frac{\hbar}{2(a_v + 1)} \ln \left( 1 - \frac{m_v^2}{p^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right] \quad (1.66)$$

A função  $\tilde{\Gamma}^R$  renormalizada é dada por

$$\tilde{\Gamma}^R = Z_\psi \tilde{\Gamma}^\Lambda, \quad (1.67)$$

onde  $Z_\psi$  é a constante de renormalização do campo fermiônico. A etapa seguinte é a imposição de condições de renormalização que fixem a parte finita das constantes de renormalização. Isto pode ser feito requerendo que

$$\tilde{\Gamma}^R(p) \Big|_{\not{p}=\not{\mu}} = \not{\mu}, \quad (1.68)$$

onde  $\mu^2$  é a escala de energia escolhida para impor as condições de renormalização. Usando (1.68), encontramos  $Z_\psi$  na ordem de 1-loop,

$$Z_\psi = 1 - \frac{\hbar}{2(a_v - 1)} \ln \left( -\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) + \frac{\hbar}{2(a_v + 1)} \ln \left( 1 - \frac{m_v^2}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (1.69)$$

Nesta ordem, obtemos  $\tilde{\Gamma}^R$  como

$$\tilde{\Gamma}^R(p) = \not{p} \left[ 1 + \frac{\hbar}{a_v^2 - 1} \ln \left( \frac{\mu^2}{p^2} \right) + \frac{\hbar}{2(a_v + 1)} \ln \left( \frac{\mu^2 - m_v^2}{p^2 - m_v^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right]. \quad (1.70)$$

Todas as demais funções de Green renormalizadas podem ser calculadas nesta ordem, uma vez que a função de dois pontos já o foi.

## 1.2 O Modelo de Schwinger quiral

### 1.2.1 Funções de Green divergentes

O modelo de Schwinger quiral é definido pela seguinte densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_c[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}P_+)\psi. \quad (1.71)$$

onde  $\psi$  é um férmion bidimensional de Dirac. A ação efetiva  $W_c[A_\mu]$  é definida por

$$e^{iW_c[A_\mu]} = \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + e\cancel{A}P_+) \psi \right] = \det i (i\cancel{\partial} + e\cancel{A}P_+).$$

Como já sabemos, a invariância de calibre local é quebrada devido a não existir nenhuma prescrição que preserve a simetria de calibre no nível quântico. O cálculo do determinante fermiônico, mostrado na equação acima, nos leva, então, à ação efetiva  $W_c[A_\mu]$ ,

$$W_c[A] = \frac{e^2}{8\pi} \int dx A_\mu \left[ a_c g^{\mu\nu} - (\partial_x^\mu - \tilde{\partial}_x^\mu) \frac{1}{\square} (\partial_x^\nu - \tilde{\partial}_x^\nu) \right] A_\nu(x). \quad (1.72)$$

Novamente, o parâmetro  $a_c$  aparece como consequência da ambigüidade na regularização das divergências ultravioletas, durante o cálculo do determinante fermiônico.

O gerador funcional do modelo é definido como em (1.4) e, depois da integração fermiônica, torna-se

$$Z_c[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2} A_\mu \Gamma_c^{\mu\nu} A_\nu + J_\mu A^\mu \right) - i \int dx dy \bar{\eta}(x) G_c(x, y; A) \eta(y) \right], \quad (1.73)$$

onde  $\Gamma_c^{\mu\nu}$  é a função IIP de 2-pontos do campo de calibre, dada pela expressão

$$\Gamma_c^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left( \square + \frac{e^2 a_c}{4\pi} \right) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{4\pi} \left( \partial^\mu - \tilde{\partial}^\mu \right) \frac{1}{\square} \left( \partial^\nu - \tilde{\partial}^\nu \right). \quad (1.74)$$

A função  $G_c(x, y; A)$  em (1.5), é a função de Green de dois pontos fermiônica sob ação do campo externo  $A_\mu$ , isto é,  $(i\cancel{\partial} + e\cancel{A}P_+)G_c(x, y; A) = \delta(x - y)$ . Esta função de Green pode ser calculada exatamente,

$$G_c(x, y; A) = \exp \left[ -ie \int dz A_\mu(z) j_+^\mu(z, x, y) \right] P_+ G_F(x - y) + P_- G_F(x - y).$$

Como no caso vetorial, podemos calcular os propagadores exatos do fóton e do férmion. O mesmo ocorre com todas as funções de correlação no espaço de configuração.

O propagador fotônico  $G_{\mu\nu}^c(x-y) = \langle 0|T A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$  é facilmente calculado desde (1.73), e é dado por (no espaço de momenta)

$$i\tilde{G}_{\mu\nu}^c(k) = \frac{1}{k^2 - m_c^2} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{a_c - 1} \left( \frac{4\pi}{e^2} - \frac{2}{k^2} \right) - \frac{k_\mu \tilde{k}_\nu + \tilde{k}_\mu k_\nu}{(a_c - 1) k^2} \right], \quad (1.75)$$

onde a massa  $m_c^2$  é definida como

$$m_c^2 = \frac{e^2 a_c^2}{4\pi(a_c - 1)}. \quad (1.76)$$

Observamos que este propagador tem um pólo em  $m_c^2$ , o que indica que o fóton adquire uma massa depois da quantização da teoria. Notamos, novamente, que há dependência explícita da massa do fóton no parâmetro  $a_c$ . O propagador acima é livre de divergências e seu comportamento em altas energias é similar àquele da teoria de Proca, como no caso vetorial. Calculamos, agora, o propagador fermiônico completo,  $G_c(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle$ ,

$$G_c(x-y) = i \exp \left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} P_+ G_F(x-y) + i P_- G_F(x-y). \quad (1.77)$$

Notamos que o férmion esquerdo permanece livre. A função  $f_c$  é dada pela equação

$$f_c(k) = -\frac{4\pi}{e^2(a_c - 1)} \frac{1}{k^2 - m_c^2}. \quad (1.78)$$

De (1.77) vemos que o propagador do férmion direito tem divergências ultravioletas, porém é livre de divergências infravermelhas. Como no caso vetorial, visando trabalhar no espaço de momenta, vamos escrever a equação de Schwinger-Dyson que ele satisfaz. A equação de Schwinger-Dyson neste caso pode ser escrita separadamente para os férmions direito e esquerdo, pois eles têm propagadores diferentes. A parte direita do propagador,  $P_+ G_c = G_c^+$ , satisfaz

$$\left( \not{\partial}_x + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c(k) \not{k} e^{-ik \cdot (x-y)} \right) G_c^+(x-y) = P_- \delta(x-y). \quad (1.79)$$

A equação acima, no espaço de momenta, é escrita como,

$$\tilde{G}_c^+(p) = P_+ \frac{i}{\not{p}} - i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \tilde{G}_c^+(p-k). \quad (1.80)$$

De maneira similar ao caso vetorial, a equação (1.80) define uma expansão em potências de  $f_c$ . Assim, temos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^+(p) = & P_+ \frac{i}{\not{p}} + \hbar e^2 P_+ \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \\ & - i \hbar^2 e^4 P_+ \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_c(k) f_c(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} + \dots \end{aligned} \quad (1.81)$$

A parte esquerda,  $P_- G_c = G_c^-$ , satisfaz a equação livre

$$\partial_x G_c^-(x-y) = P_+ \delta(x-y). \quad (1.82)$$

A função de 3-pontos,  $G^\mu(x, y, z) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z) | 0 \rangle$ , é facilmente computada,

$$G_c^\mu(x, y, z) = i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} g_c^\mu(k) [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] G_c^+(x-y), \quad (1.83)$$

com  $g_c^\mu$  sendo

$$g_c^\mu(k) = \frac{4\pi}{e^2(a_c - 1)} \frac{k^\mu}{k^2 - m_c^2} - \frac{a_c}{a_c - 1} \frac{k^\mu - \tilde{k}^\mu}{k^2 (k^2 - m_c^2)}. \quad (1.84)$$

No espaço de momenta, a equação acima é expressa de modo mais elegante. Definindo  $\tilde{G}_c^\mu(p, -p-q, q) \equiv \tilde{G}_c^\mu(p, q)$ , temos

$$\tilde{G}_c^\mu(p, q) = i e g_c^\mu(q) [\tilde{G}_c^+(p+q) - \tilde{G}_c^+(p)]. \quad (1.85)$$

Novamente, vemos que a divergência da função acima é somente devida às divergências presentes no propagador fermiônico. Podemos ver, também, que todas as funções de correlação com pernas fermiônicas terão as mesmas divergências ultravioletas [7]. Uma análise detalhada leva-nos à conclusão de que essas divergências UV não têm um caráter perturbativo [24].

### 1.2.2 Regularização

Novamente, trabalhamos no contexto do *formalismo não invariante de calibre* [27]. Decompomos o campo  $A_\mu$  em suas partes longitudinal e transversal,

$$eA_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi, \quad (1.86)$$

e, como antes, efetuamos a transformação

$$\psi = e^{i\rho P_+} \psi', \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-i\rho P_-}, \quad (1.87)$$

visando desacoplar os férmions. Neste caso, a medida fermiônica *nunca* é invariante sob (1.87), e muda como

$$d\psi d\bar{\psi} = d\psi' d\bar{\psi}' \exp \left[ \frac{i}{4\pi} \int dx \left( \frac{a_c - 1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \partial_\mu \rho \partial^\mu \phi \right) \right], \quad (1.88)$$

gerando, assim, um termo cinético para o campo  $\rho$ . Pondo tudo isso no gerador funcional (1.4), temos

$$Z_c[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi} P_+) \psi - \frac{1}{e} J_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi + \right. \right. \quad (1.89)$$

$$\left. \left. + \frac{(a_c - 1)}{8\pi} \partial_{\mu\rho} \partial^\mu \rho + \frac{1}{4\pi} \partial_{\mu\rho} \partial^\mu \phi + \bar{\eta} e^{i\rho P_+} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho P_-} \eta + \frac{1}{e} J_\mu \partial^\mu \rho \right) \right].$$

Notamos o acoplamento de  $\rho$  aos férmions, por meio das fontes fermiônicas. Como já mencionamos no modelo vetorial, este acoplamento induz a existência de divergências ultravioletas, nas funções de Green envolvendo férmions. Mostraremos explicitamente isto neste modelo. Para calcular o propagador fermiônico, devemos tomar duas derivadas funcionais com respeito às fontes fermiônicas  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  no gerador funcional  $Z_c$  em (1.89). Fazendo isto, e pondo as fontes a zero, obtemos a expressão para o propagador fermiônico da teoria

$$G_c(x - y) = G_c^+(x - y) + i P_- G_F(x - y) \quad (1.90)$$

onde vemos que, como era esperado, os férmions esquerdos permanecem livres, e os férmions direitos carregam os efeitos da interação

$$G_c^+(x - y) = N' \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \psi_+(x) \bar{\psi}_+(y) \quad (1.91)$$

$$\exp \left( i \int dz \left[ \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi} P_+) \psi + \frac{(a_c - 1)}{8\pi} \partial_{\mu\rho} \partial^\mu \rho + \frac{1}{4\pi} \partial_{\mu\rho} \partial^\mu \phi + \rho j(z, x, y) \right] \right),$$

onde  $\psi_+ = P_+ \psi$  e definimos a corrente de contato  $j(z, x, y) = \delta(z - x) - \delta(z - y)$ . Como podemos ver em (1.91) a dependência somente quadrática no campo  $\rho$  permite a sua integração exata. Fazendo isso, ficamos com a seguinte expressão para o propagador dos férmions direitos,

$$G_c^+(x - y) = \exp \left\{ -\frac{4\pi i}{a_c - 1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \right\} \bar{G}_c^+(x - y). \quad (1.92)$$

Vemos novamente o aparecimento do fator (1.23) logaritmicamente divergente no UV, multiplicando a integração funcional restante,  $\bar{G}_c^+(x - y)$ , a qual dá um resultado finito, como se pode ver de modo explícito, na expressão mostrada a seguir

$$\bar{G}_c^+(x - y) = N'' \int d\phi d\psi d\bar{\psi} \psi_+(x) \bar{\psi}_+(y) \exp \left[ i \int dz \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi} P_+) \psi \right] \quad (1.93)$$

$$\exp \left\{ i \int dz \left[ \frac{1}{2e^2} \phi \square (\square + \frac{e^2}{4\pi(a_c - 1)}) \phi + \frac{1}{a_c - 1} \phi(z) j(z, x, y) \right] \right\}.$$

Na integral funcional acima, na ação efetiva que rege o cálculo do propagador do férmion direito, o campo  $\phi$  (a parte transversal do campo  $A_\mu$ ) tem um propagador muito bem comportado no regime de altas energias ( $k^{-4}$ ), o que elimina toda possibilidade de que existam divergências UV em quaisquer ordens perturbativas ou de *loops*. Portanto, vemos mais uma vez que as divergências UV que aparecem no propagador fermiônico são devidas somente ao mau comportamento em altas energias do propagador do campo  $\rho$  (a parte longitudinal do campo  $A_\mu$ ). Neste contexto, a divergência UV encontrada acima tem um caráter não perturbativo, pois ela não aparece quando tratamos a teoria no sentido usual da teoria de perturbações.

Passamos, como antes, à regularização da divergência encontrada. Isto pode ser feito, novamente, por meio do método de Pauli-Villars. Seguindo os mesmos passos do caso vetorial obtemos o gerador funcional regularizado  $Z_c^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J]$ , o qual se reduz a  $Z_c[\eta, \bar{\eta}, J]$  no limite de  $\Lambda \rightarrow +\infty$ ,

$$Z_c^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \left( \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \tilde{\cancel{\partial}} \phi P_+) \psi - \frac{1}{e} J \cdot \tilde{\partial} \phi + \right. \right. \quad (1.94) \\ \left. \left. - \frac{(a_c - 1)}{8\pi\Lambda^2} \rho \square (\square + \Lambda^2) \rho + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \phi + \bar{\eta} e^{i\rho P_+} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho P_-} \eta + \frac{1}{e} J \cdot \partial \rho \right) \right].$$

O propagador do campo  $\rho$  tem agora um melhor comportamento ultravioleta ( $k^{-4}$ , para  $\Lambda^2$  finito). Novamente, vamos observar a maneira pela qual a ação original muda depois do processo de regularização feito acima. Voltamos, então aos campos originais da teoria, mediante as transformações inversas,

$$\psi = e^{-i\rho P_+} \psi' \quad , \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{i\rho P_-} \quad , \\ \rho = e \frac{\partial \cdot A}{\square} \quad , \quad \phi = e \frac{\tilde{\partial} \cdot A}{\square} \quad .$$

Introduzindo as equações acima no gerador funcional regularizado (1.94), obtemos a sua expressão em função dos campos originais da teoria, tais como aparecem na Lagrangeana (1.71),

$$Z_c^\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left( i \int dx \mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \quad , \quad (1.95)$$

onde  $\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$  é a densidade de Lagrangeana para a teoria regularizada

$$\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + eA P_+) \psi - \frac{e^2(a_c - 1)}{8\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2. \quad (1.96)$$

Observamos, mais uma vez, um novo termo na densidade Lagrangeana, equivalente a uma condição de “fixação de calibre” do tipo Lorentz, com um parâmetro de calibre que é dependente de  $a$  e proporcional a  $\Lambda^{-2}$ . Este novo termo também permite a completa regularização da teoria sob análise, tal como acontece no caso vetorial já analisado.

De (1.95), podemos agora calcular as funções de Green regularizadas. O propagador regularizado do fóton é

$$i\tilde{G}_c^\Lambda{}_{\mu\nu}(k) = \frac{g_{\mu\nu}(k^2 - \Lambda^2)}{(k^2 - \omega_m^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} + \frac{1}{a_c - 1} \frac{\Lambda^2(k_\mu \tilde{k}_\nu + \tilde{k}_\mu k_\nu)}{k^2(k^2 - \omega_m^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} +$$

$$+ \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} \left[ \frac{4\pi\Lambda^2}{e^2(a_c - 1)} - \frac{(k^2 - \Lambda^2)^2}{(k^2 - \omega_m^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} - \frac{\Lambda^4/(a_c - 1)^2}{(k^2 - \omega_m^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} \right]. \quad (1.97)$$

O propagador acima é finito quando  $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$ , reduzindo-se a (1.75). Também vemos que o comportamento em altas energias do propagador regularizado (para  $\Lambda$  finito) agora é do tipo  $k^{-2}$ , muito melhor do que no caso não regularizado. Isto permite a regularização do propagador fermiônico e das outras funções de Green envolvendo férmions, como veremos a seguir.

As constantes  $\omega_m^2$  e  $\omega_\Lambda^2$  satisfazem as seguintes equações

$$\omega_\Lambda^2 + \omega_m^2 = \Lambda^2 + \frac{e^2(a_c + 1)}{4\pi},$$

$$\omega_\Lambda^2 \omega_m^2 = \Lambda^2 m_c^2. \quad (1.98)$$

Resolvendo estas equações para  $\Lambda \rightarrow +\infty$ , temos

$$\omega_\Lambda^2 \approx \Lambda^2 - \frac{e^2}{4\pi(a_c - 1)} + \mathcal{O}(\Lambda^{-2})$$

$$\omega_m^2 \approx m_c^2 + \mathcal{O}(\Lambda^{-2}). \quad (1.99)$$

O propagador regularizado do férmion direito é dado por

$$G_c^{\Lambda+}(x - y) = i \exp \left( i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c^\Lambda(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right) P_+ G_F(x - y), \quad (1.100)$$

onde a função  $f_c^\Lambda$  é expressada por

$$f_c^\Lambda(k) = - \frac{\left( \Lambda^2 \frac{a_c}{a_c - 1} - \omega_\Lambda^2 \right)^2}{\omega_\Lambda^2 (\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2)} \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} + \frac{\left( \Lambda^2 \frac{a_c}{a_c - 1} - \omega_m^2 \right)^2}{\omega_m^2 (\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2)} \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)(k^2 - \omega_m^2)}. \quad (1.101)$$

O propagador regularizado do férmion direito (1.100), satisfaz as equações de Schwinger-Dyson (1.79) e (1.80), e a expansão (1.81).

Como esperado, o propagador do férmion esquerdo permanece o mesmo, não sendo afetado pelo processo de regularização,  $G_c^{\Lambda-}(x-y) = iP_- G_F(x-y)$ . A função de 3-pontos regularizada é

$$G_c^{\Lambda\mu}(x, y, z) = ie \int \frac{dk}{(2\pi)^2} g_c^{\Lambda\mu}(k) [e^{-ik\cdot(z-x)} - e^{-ik\cdot(z-y)}] G_c^{\Lambda+}(x-y), \quad (1.102)$$

com  $g_c^{\Lambda\mu}$  dado por

$$g_c^{\Lambda\mu}(k) = -k^\mu f_c^\Lambda(k) - \frac{(k^\mu - \tilde{k}^\mu) [k^2 - a_c \Lambda^2 / (a_c - 1)]}{k^2(k^2 - \omega_m^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)}. \quad (1.103)$$

No espaço dos momenta a equação acima é expressa de modo mais esclarecedor. Primeiro definimos  $\tilde{G}_c^{\Lambda\mu}(p, -p-q, q) \equiv \tilde{G}_c^{\Lambda\mu}(p, q)$  e podemos, então, escrever

$$\tilde{G}_c^{\Lambda\mu}(p, q) = ie g_c^{\Lambda\mu}(q) [\tilde{G}_c^{\Lambda+}(p+q) - \tilde{G}_c^{\Lambda+}(p)]. \quad (1.104)$$

Em seguida, computamos a função IIP de 3-pontos regularizada, a qual é dada pela expressão

$$\tilde{\Gamma}_c^{\Lambda\mu}(p, q) = e \frac{(q^\mu - \tilde{q}^\mu)}{q^2} [P_- \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p+q) - \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p) P_+]. \quad (1.105)$$

Assim, encontramos mais uma vez, neste modelo, uma relação similar às achadas no modelo vetorial anômalo. Ou seja, basta regularizar a função IIP de 2-pontos fermiônica para ter a função IIP de 3 pontos completamente regularizada. É fácil generalizar isto para todas as funções de correlação contendo férmions.

### 1.2.3 Identidades de Ward

Nesta seção, computamos as identidades de Ward usando a densidade de Lagrangeana regularizada  $\mathcal{L}_c^\Lambda$ , (1.96). Como é usual, fazemos a transformação de calibre no gerador funcional regularizado (1.95) para o campo  $A_\mu$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda(x), \quad (1.106)$$

e a transformação fermiônica seguinte

$$\psi \rightarrow \psi + i\lambda(x) P_+ \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - i\lambda(x) \bar{\psi} P_-, \quad (1.107)$$

com  $\lambda(x)$  infinitesimal, o que implica em somente tomarmos os termos lineares em  $\lambda(x)$ . Levando em conta o Jacobiano da transformação (1.107),

$$\ln J_c = -\frac{i}{4\pi} \int dx e\lambda \left[ (a_c - 1)\partial \cdot A + \tilde{\partial} \cdot A \right] + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (1.108)$$

obtemos a identidade de Ward fundamental satisfeita pelo gerador funcional das funções IIP,  $\Gamma_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$ , a qual é

$$i \frac{\delta \Gamma_c^\Lambda}{\delta \psi} P_+ \psi - i P_- \frac{\delta \Gamma_c^\Lambda}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi} + \frac{1}{e} \partial^\mu \frac{\delta \Gamma_c^\Lambda}{\delta A^\mu} = \frac{e}{4\pi} \left[ (a_c - 1) \left( 1 + \frac{\square}{\Lambda^2} \right) \partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu \right] A_\mu. \quad (1.109)$$

Assim, a função IIP de 2-pontos fotônica satisfaz (no espaço de momenta),

$$k_\mu \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda \mu\nu}(k) = \frac{e^2}{4\pi} \left[ (a_c - 1) \left( 1 - \frac{k^2}{\Lambda^2} \right) k^\nu + \tilde{k}^\nu \right]. \quad (1.110)$$

Como era esperado, neste modelo, a identidade acima mostra a não transversalidade do propagador fotônico para qualquer valor de  $a_c$ , o que indica a anomalia de calibre local (e a sua não trivialidade como cociclo, o que revela a impossibilidade da sua remoção pela adição de contratermos locais). Para a função IIP de 3-pontos e a IIP de 2-pontos fermiônica obtemos, de modo análogo ao caso vetorial,

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_{c\mu}^\Lambda(p, q) = P_- \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p + q) - \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p) P_+. \quad (1.111)$$

## 1.2.4 Renormalização

Novamente, expressamos a densidade de Lagrangeana regularizada (1.96) em termos de quantidades renormalizadas e suas respectivas constantes de renormalização,

$$\mathcal{L}_c^\Lambda = -\frac{1}{4} Z_A^c F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{Z_e^{c2} e^2 (a_c - 1)}{Z_\psi^{c2} 8\pi\Lambda^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + Z_\psi^c \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + e Z_e^c \bar{\psi} A_\mu P_+ \psi. \quad (1.112)$$

Definimos os campos não renormalizados  $A_o^\mu$  e  $\psi_o$ , e a constante de acoplamento não renormalizada  $e_o$  como

$$A_o^\mu = \sqrt{Z_A^c} A^\mu, \quad \psi_o = \sqrt{Z_\psi^c} \psi, \quad e_o = \frac{Z_e^c}{Z_\psi^c Z_A^{c1/2}} e. \quad (1.113)$$

As funções de Green fotônicas puras não têm divergências ultravioletas, como antes. Isto implica em

$$Z_A^c = 1. \quad (1.114)$$

Recordamos a identidade de Ward (1.111) satisfeita pelas funções IIP não renormalizadas

$$\frac{1}{e_o} q^\mu \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p, q) = \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p+q) - \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p) . \quad (1.115)$$

Pode-se mostrar que o propagador fermiônico e a sua respectiva função IIP, podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^\Lambda(p) &= P_- \frac{i}{\not{p}} + \mathbf{G}_c^\Lambda(p) P_+ \frac{i}{\not{p}} = \tilde{G}_c^{\Lambda-}(p) + \tilde{G}_c^{\Lambda+}(p) , \\ \tilde{\Gamma}_c^\Lambda(p) &= \not{p} P_- + \frac{1}{\mathbf{G}_c^\Lambda(p)} \not{p} P_+ = \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda-}(p) + \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p) , \end{aligned} \quad (1.116)$$

onde  $\mathbf{G}_c^\Lambda(p)$  é uma função escalar. Usando as relações acima chegamos, da equação (1.111), à (1.115).

Substituindo, na equação (1.115), a relação entre as funções IIP renormalizadas e não renormalizadas

$$\tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) = Z_\psi^c \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p) \quad , \quad \tilde{\Gamma}_c^{R\mu}(p, q) = Z_e^c \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda\mu}(p, q) , \quad (1.117)$$

obtemos

$$q^\mu \tilde{\Gamma}_c^{R\mu}(p, q) = e \frac{Z_e^{c2}}{Z_\psi^{c2}} \left[ \tilde{\Gamma}_c^{R+}(p+q) - \tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) \right] . \quad (1.118)$$

Por outro lado, podemos *verificar* que as funções renormalizadas satisfazem também a identidade de Ward

$$q^\mu \tilde{\Gamma}_c^{R\mu}(p, q) = e \frac{Z_e^c}{Z_\psi^c} \left[ \tilde{\Gamma}_c^{R+}(p+q) - \tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) \right] . \quad (1.119)$$

Das equações (1.118) e (1.119), obtemos novamente

$$Z_e^c = Z_\psi^c , \quad (1.120)$$

O que, mais uma vez, implica em

$$e_o = e . \quad (1.121)$$

Isto mostra que a universalidade da interação eletromagnética é preservada mesmo na presença de uma anomalia “autêntica” (uma que não pode ser removida pela adição de contratermos, considerando  $A_\mu$  clássico). Isto já tinha sido encontrado antes no contexto do modelo vetorial, mas poderia ter sido atribuído a um “acidente”, devido ao fato da teoria não ser genuinamente anômala. Como antes, obtemos uma função  $\beta$  nula,

$$\beta_c = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} e(\mu) \quad \Rightarrow \quad \beta_c = 0 . \quad (1.122)$$

### 1.2.4.1 Análise Semi-perturbativa

Considerando a densidade de Lagrangeana  $\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$  (1.96),

$$\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_c - 1)}{8\pi\Lambda^2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} + e\not{A}P_+)\psi, \quad (1.123)$$

podemos calcular o propagador livre do fóton,

$$i\tilde{G}_{\mu\nu}^0(k) = \frac{1}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{4\pi\Lambda^2}{e^2(a - 1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (1.124)$$

Este propagador (1.124) diverge quadraticamente no limite  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Se o introduzirmos no cálculo perturbativo das funções de correlação, faremos com que o comportamento ultravioleta dos gráficos individuais fique pior ainda em cada ordem perturbativa consecutiva, da mesma forma que no caso vetorial. Entretanto, podemos mostrar [23] que a expansão (1.81) para o propagador regularizado do férmion direito é equivalente a uma expansão em *loops* usando o propagador exato (regularizado) do fóton e, neste caso, uma potência  $(f_c^\Lambda)^n$  corresponde a  $\hbar^n$ , ou *n-loops*, tal como sucede no caso vetorial. A análise semi-perturbativa dá exatamente o mesmo resultado que a já feita para o caso vetorial (vide subseção 1.1.4.1), os gráficos a serem analisados são os mesmos e usa-se as mesmas identidades. As duas diferenças são o uso de  $f_c^\Lambda$  e o fato de que cada gráfico é multiplicado por um projetor  $P_+$ , tal como aparece na equação (1.81). Fazendo as considerações acima mencionadas, passamos a renormalizar a teoria na ordem de 1-*loop*.

### 1.2.4.2 Renormalização na ordem de 1-*loop*

Podemos agora calcular as funções IIP na ordem de 1-*loop* (no sentido semi-perturbativo) e impor condições de renormalização, para determinar a parte finita das constantes de renormalização.

Definindo a função IIP de 2-pontos para o férmion direito como  $\tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+} = \tilde{\Gamma}_c^\Lambda P_+$  (ver equação (1.116)) e restringindo-nos a 1-*loop*, temos

$$\tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p) = \not{p}P_+ \left[ 1 + i\hbar e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_c^\Lambda(k) \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \right]. \quad (1.125)$$

Recordamos que  $f_c^\Lambda$  é dada pela equação (1.101),

$$f_c^\Lambda(k) = -\frac{\left(\Lambda^2 \frac{a_c}{a_c - 1} - \omega_\Lambda^2\right)^2}{\omega_\Lambda^2(\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2)} \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)(k^2 - \omega_\Lambda^2)} + \frac{\left(\Lambda^2 \frac{a_c}{a_c - 1} - \omega_m^2\right)^2}{\omega_m^2(\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2)} \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2)(k^2 - \omega_m^2)}.$$

O modo como a função acima é expressa, ou seja, mostrando a fatorização em polinômios de  $k^2$  do tipo  $k^2 + cte$ , facilita muito o cálculo das integrais em (1.125). Com isto, conseguimos o seguinte resultado na ordem de 1-loop

$$\tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}(p) = \not{p}P_+ \left[ 1 - \frac{\hbar}{a-1} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_c^2} \right) + \frac{\hbar}{a-1} \ln \left( 1 - \frac{p^2}{m_c^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right]. \quad (1.126)$$

A função IIP de 2-pontos renormalizada para o férmion direito pode ser expressa como  $\tilde{\Gamma}_c^{R+} = Z_\psi^c \tilde{\Gamma}_c^{\Lambda+}$ . Usando uma condição de renormalização similar à do caso vetorial (1.68) mas, neste caso, restrita ao setor direito da função IIP de 2-pontos renormalizada do férmion,

$$\tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) \Big|_{\not{p}=\not{\mu}} = \not{\mu}P_+, \quad (1.127)$$

obtemos, na ordem de 1-loop, a constante de renormalização de função de onda do férmion direito,

$$Z_\psi^c = 1 + \frac{\hbar}{a-1} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_c^2} \right) - \frac{\hbar}{a-1} \ln \left( 1 - \frac{\mu^2}{m_c^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (1.128)$$

E a função IIP de 2-pontos renormalizada do férmion direito, é então

$$\tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) = \not{p}P_+ \left[ 1 + \frac{\hbar}{a_c-1} \ln \left( \frac{1-p^2/m_c^2}{1-\mu^2/m_c^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right]. \quad (1.129)$$

# Capítulo 2

## Renormalização exata da Eletrodinâmica Quântica sem massa em (1+1) dimensões

No capítulo 1, conseguimos regularizar os modelos de Schwinger anômalo e quiral e, assim, efetuar a sua renormalização numa abordagem semi-perturbativa. Isto era o que se podia fazer sem um cálculo explícito da transformada de Fourier da função de dois pontos fermiônica. Neste capítulo, nós mostraremos como calcular exatamente esta transformada, o que vai propiciar a renormalização exata de ambos os modelos.

### 2.1 O modelo de Schwinger anômalo

A densidade de Lagrangeana regularizada (1.27) do modelo é <sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_v^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + eA)\psi. \quad (2.1)$$

Como já vimos, no capítulo 1, o propagador do férmion é calculado exatamente (1.29) no espaço de configuração

$$G_v^\Lambda(x - y) = i \exp\left(ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) [1 - e^{ik \cdot (x-y)}]\right) G_F(x - y), \quad (2.2)$$

onde a função  $f_v^\Lambda$  é dada pela equação (1.30),

$$f_v^\Lambda(k) = \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_v - 1)} \frac{1}{k^2(k^2 - \Lambda^2)} - \frac{1}{k^2(k^2 - m_v^2)}, \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>O subíndice  $v$  será usado para denotar o modelo vetorial e o subíndice  $c$  para o modelo quiral.

e  $G_F(x - y)$  é o propagador livre do férmion,  $i\cancel{\partial} G_F(x - y) = \delta(x - y)$ . O propagador fermiônico satisfaz a equação de Schwinger-Dyson (1.12),

$$\left( i\cancel{\partial} + ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \cancel{k} e^{ik \cdot (x-y)} \right) G_v^\Lambda(x - y) = i\delta(x - y), \quad (2.4)$$

ou (1.13) no espaço de momenta. Escrevendo explicitamente a dependência em  $\hbar$ , temos

$$\tilde{G}_v^\Lambda(p) = \frac{i}{\cancel{p}} - i\hbar e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} \tilde{G}_v^\Lambda(p - k). \quad (2.5)$$

Isto nos permitiu expressar o propagador fermiônico como uma série em  $f_v^\Lambda$  ou em  $\hbar$ ,

$$\tilde{G}_v^\Lambda(p) = \frac{i}{\cancel{p}} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p), \quad (2.6)$$

onde consideramos o propagador do férmion livre como

$$\tilde{G}_v^{(0)}(p) = \frac{i}{\cancel{p}}, \quad (2.7)$$

e onde  $\tilde{G}_v^{\Lambda(n)}$  é a contribuição em nível de  $n$ -loops ao propagador do férmion e lembramos que usamos o propagador exato do fóton para calcular estas contribuições no espaço de momenta, no sentido semi-perturbativo.

Inserindo a equação (2.6) em (2.5), e igualando os coeficientes das potências de  $\hbar$  em ambos os lados da equação (2.5), temos

$$\tilde{G}_v^{\Lambda(n+1)}(p) = -ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} \tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p - k). \quad (2.8)$$

Da equação (2.8), e usando a forma explícita do propagador livre do férmion e a identidade (1.59), obtemos, termo a termo, os elementos da série em (2.6). O primeiro termo será,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^{\Lambda(1)}(p) &= -ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} G_v^{\Lambda(0)}(p - k) \\ &= -i^2 e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} \frac{1}{\cancel{p} - \cancel{k}} \\ &= ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \left[ \frac{i}{\cancel{p}} - \frac{i}{\cancel{p} - \cancel{k}} \right], \\ \tilde{G}_v^{\Lambda(1)}(p) &= ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \left[ G_v^{\Lambda(0)}(p) - G_v^{\Lambda(0)}(p - k) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Seguindo a mesma estratégia mostrada acima, obtemos o segundo termo da série

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^{\Lambda(2)}(p) &= -ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} G_v^{\Lambda(1)}(p - k) \\ &= -(ie^2)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d^2s}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) f_v^\Lambda(s) \frac{1}{\cancel{p}} \cancel{k} \left[ G_v^{\Lambda(0)}(p - k) - G_v^{\Lambda(0)}(p - k - s) \right], \\ \tilde{G}_v^{\Lambda(2)}(p) &= ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \left[ G_v^{\Lambda(1)}(p) - G_v^{\Lambda(1)}(p - k) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos provar facilmente, por indução, que os termos  $\tilde{G}_v^{\Lambda(n)}$  satisfazem a seguinte equação de recorrência [29]<sup>2</sup>

$$\tilde{G}_v^{\Lambda(n+1)}(p) = \frac{ie^2}{n+1} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) \left[ \tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p) - \tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p-k) \right]. \quad (2.11)$$

No primeiro termo acima, a integral em  $k$  pode ser feita sem problemas. Definindo-a como  $I_v^\Lambda$ , ela é

$$I_v^\Lambda = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) = \frac{i}{2e^2(a_v - 1)} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-i\epsilon} \right) - \frac{i}{2e^2(a_v + 1)} \ln \left( \frac{m_v^2}{-i\epsilon} \right) \quad (2.12)$$

onde  $\epsilon \rightarrow 0$  é um cut-off infravermelho, o qual vem da prescrição  $i\epsilon$ . Podemos agora escrever cada termo  $\tilde{G}_v^{\Lambda(n)}$  somente em termos do propagador livre fermiônico, tendo assim,

$$\tilde{G}_v^{\Lambda(1)}(p) = ie^2 \left[ I_v^\Lambda G_v^{\Lambda(0)}(p) - \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k) G_v^{\Lambda(0)}(p-k) \right], \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^{\Lambda(2)}(p) = \frac{(ie^2)^2}{2!} & \left[ \left( I_v^\Lambda \right)^2 G_v^{\Lambda(0)}(p) - 2 I_v^\Lambda \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) G_v^{\Lambda(0)}(p-k_1) + \right. \\ & \left. + \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) f_v^\Lambda(k_2) G_v^{\Lambda(0)}(p-k_1-k_2) \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} G_v^{\Lambda(3)}(p) = \frac{(ie^2)^3}{3!} & \left[ \left( I_v^\Lambda \right)^3 G_v^{\Lambda(0)}(p) - 3 \left( I_v^\Lambda \right)^2 \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) G_v^{\Lambda(0)}(p-k_1) + \right. \\ & + 3 I_v^\Lambda \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) f_v^\Lambda(k_2) G_v^{\Lambda(0)}(p-k_1-k_2) + \\ & \left. - \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} \frac{d^2k_3}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) f_v^\Lambda(k_2) f_v^\Lambda(k_3) G_v^{\Lambda(0)}(p-k_1-k_2-k_3) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Desde as equações (2.13)-(2.15), podemos generalizar indutivamente a expressão para o termo geral  $\tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p)$  em função do propagador livre do férmion,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^{\Lambda(n)}(p) = (ie^2)^n \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j \left( I_v^\Lambda \right)^{n-j}}{j! (n-j)!} & \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) \int \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_2) \dots \\ & \dots \int \frac{d^2k_j}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_j) \tilde{G}_v^{(0)}(p-k_1-k_2-\dots-k_j). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Tendo conhecimento do termo geral da série (2.6), podemos somá-la. Obtemos, assim,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^\Lambda(p) = \exp \left( ie^2 I_v^\Lambda \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie^2)^n}{n!} & \int \frac{d^2k_1}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_1) \int \frac{d^2k_2}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_2) \dots \\ & \dots \int \frac{d^2k_n}{(2\pi)^2} f_v^\Lambda(k_n) \tilde{G}_v^{(0)}(p-k_1-k_2-\dots-k_n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

<sup>2</sup>Em [29], o autor chega a uma equação similar no caso vetorial não anômalo, supondo que as identidades de Ward são satisfeitas ordem a ordem na série que define o propagador fermiônico.

Agora, usamos a parametrização de Schwinger (A.16) nas funções  $f_v^\Lambda(k_n)$ ,

$$f_v^\Lambda(k) = \frac{i 2\pi}{e^2} \int_0^\infty d\alpha \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha) e^{i\alpha k^2 - \epsilon\alpha}, \quad (2.18)$$

onde a função  $\tilde{f}_v^\Lambda$  é

$$\tilde{f}_v^\Lambda(\alpha) = \frac{1 - e^{-i\alpha\Lambda^2}}{a_v - 1} - \frac{1 - e^{-iam_v^2}}{a_v + 1}. \quad (2.19)$$

Usando a seguinte representação do propagador do férmion livre

$$\tilde{G}^{(0)}(p - k) = \frac{i}{\not{p} - \not{k}} = \frac{1}{2i} \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} e^{i\beta(p-k)^2 - \epsilon\beta}, \quad (2.20)$$

pondo as equações (2.18) e (2.20) em (2.17), e realizando a integração nas variáveis  $k_n$ , chegamos à seguinte expressão

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^\Lambda(p) &= \not{p} \exp\left(ie^2 I_v^\Lambda\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_1) \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_2) \dots \\ &\dots \int_0^\infty \frac{d\alpha_n}{\alpha_n} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_n) \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j}\right)^{-2} \exp\left\{\frac{ip^2}{\frac{1}{\beta} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j}} - \epsilon\beta - \epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_j\right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

A integração na variável  $\beta$  pode ser feita exatamente

$$\int_0^\infty d\beta \frac{\exp\left(\frac{ip^2}{\frac{1}{\beta} + \Sigma}\right)}{\beta^2 \left(\frac{1}{\beta} + \Sigma\right)^2} = \frac{i}{p^2} \left(1 - e^{ip^2/\Sigma}\right). \quad (2.22)$$

Usando o resultado da integral acima na equação (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{G}_v^\Lambda(p) &= \frac{i}{\not{p}} \exp\left(ie^2 I_v^\Lambda\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_1) \int_0^\infty \frac{d\alpha_2}{\alpha_2} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_2) \dots \\ &\dots \int_0^\infty \frac{d\alpha_n}{\alpha_n} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha_n) \left[1 - \exp\left(\frac{ip^2}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j}}\right)\right] \exp\left(-\epsilon \sum_{j=1}^n \alpha_j\right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Neste ponto, usamos a seguinte identidade, que é válida para  $z > 0$  [30]

$$1 - e^{-1/4z} = \int_0^\infty d\eta J_1(\eta) e^{-z\eta^2}, \quad (2.24)$$

onde a função  $J_1(\eta)$  é uma função de Bessel de primeira classe. Com ajuda desta identidade em (2.23), chegamos à seguinte expressão

$$\tilde{G}_v^\Lambda(p) = \frac{i}{\not{p}} \exp\left(ie^2 I_v^\Lambda\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[ \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha) \exp\left(-\epsilon\alpha - \frac{i\eta^2}{4p^2\alpha}\right) \right]^n,$$

ou,

$$\tilde{G}_v^\Lambda(p) = \frac{i}{\not{p}} \exp\left(i e^2 I_v^\Lambda\right) \int_0^\infty d\eta J_1(\eta) \exp\left[\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \tilde{f}_v^\Lambda(\alpha) e^{-\epsilon\alpha - i\eta^2/4p^2\alpha}\right]. \quad (2.25)$$

A seguinte integral ajudará a fazer as integrações que aparecem na exponencial acima,

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \left(1 - e^{-i\alpha m^2}\right) e^{-\epsilon\alpha - i\eta^2/4\alpha} = 2K_0\left(\sqrt{i\epsilon\eta^2}\right) - 2K_0\left(\sqrt{-m^2\eta^2}\right), \quad (2.26)$$

onde a função  $K_0(x)$  é a função de Bessel modificada de segunda classe. Recordamos o comportamento da função  $K_0$ , para vários limites do seu argumento,

$$\begin{aligned} K_0(\eta) &\approx -\ln(\eta/2) - \gamma_E, \quad \text{quando } \eta \rightarrow 0, \\ K_0(\eta) &\rightarrow 0, \quad \text{quando } \eta \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

onde  $\gamma_E$  é a constante de Euler. Com isto, podemos escrever o propagador fermiônico como sendo

$$\tilde{G}_v^\Lambda(p) = \frac{i}{\not{p}} \left(\frac{\Lambda^2}{m_v^2}\right)^{1/2(1-a_v)} \tilde{G}_v(p^2), \quad (2.27)$$

onde a função  $\tilde{G}_v$  é independente do cut-off  $\Lambda$ ,

$$\tilde{G}_v(p^2) = \int_0^\infty d\eta J_1(\eta) \left[-\frac{\tilde{m}_v^2 \eta^2}{p^2}\right]^{1/(1-a_v^2)} \exp\left\{\frac{1}{1+a_v} K_0\left(\sqrt{-\frac{m_v^2 \eta^2}{p^2}}\right)\right\}. \quad (2.28)$$

Definimos  $\tilde{m}^2 = m^2 e^{2\gamma_E}/4$ . O propagador renormalizado é definido como  $\tilde{G}_v^R = Z_\psi^v{}^{-1} \tilde{G}_v^\Lambda$ . Podemos, então, calcular  $Z_\psi^v{}^{-1}$  impondo uma condição de renormalização na função IIP renormalizada  $\tilde{\Gamma}_v^R = Z_\psi^v \tilde{\Gamma}_v^\Lambda$ . A condição imposta é a já utilizada em 1-loop (1.68)

$$\tilde{\Gamma}_v^R(p) \Big|_{\not{p}=\not{\mu}} = \not{\mu} \quad (2.29)$$

onde  $\mu^2$  é a escala de energia escolhida para impor a condição de renormalização. A constante de renormalização de função de onda fermiônica  $Z_\psi^v$  é, então,

$$Z_\psi^v = \left(\frac{\Lambda^2}{m_v^2}\right)^{1/2(1-a_v)} \tilde{G}_v(\mu^2). \quad (2.30)$$

As funções fermiônicas de dois pontos renormalizadas são expressas, de modo compacto, como

$$\tilde{G}_v^R(p) = \frac{i}{\not{p}} \frac{\tilde{G}_v(p^2)}{\tilde{G}_v(\mu^2)}, \quad \text{ou} \quad \tilde{\Gamma}_v^R(p) = \not{p} \frac{\tilde{G}_v(\mu^2)}{\tilde{G}_v(p^2)}. \quad (2.31)$$

O comportamento assintótico do propagador fermiônico renormalizado na região infravermelha é

$$\tilde{G}_v^R(p) \approx \frac{i}{\not{p}} \left[ \frac{p^2}{m_v^2} \right]^{1/(a_v^2-1)}. \quad (2.32)$$

O propagador do férmion, para  $a_v > 1$ , tem no máximo um pólo de resíduo nulo em  $p^2 = 0$ , indicando a não existência de estados de uma partícula, como acontece no modelo de Thirring [31, 32]. Este fato ocorre também no modelo de Schwinger invariante de calibre [33] e também no modelo de Schroer [34]. Como veremos no capítulo 4, o campo fermiônico é um operador físico. Isto, então, implica que o campo fermiônico não gera estados fermiônicos assintóticos de uma partícula.

No intervalo  $a > 1$  o comportamento infravermelho da teoria é similar ao do modelo de Thirring sem massa, definido pela seguinte densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{Th} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - \frac{g}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2, \quad (2.33)$$

onde a constante de acoplamento  $g > 0$  não tem dimensão. Usando o método desenvolvido nesta seção, encontramos o propagador fermiônico renormalizado (exato) deste modelo,

$$\tilde{G}_v^R(p) = \frac{i}{\not{p}} \left[ \frac{p^2}{\mu^2} \right]^{\bar{g}^2/(1+2\bar{g})}, \quad \bar{g} = g/2\pi. \quad (2.34)$$

Podemos relacionar os comportamentos infravermelhos do modelo de Schwinger anômalo e do modelo de Thirring se mapearmos  $a_v$  e  $\bar{g}$  através de satisfazem a seguinte relação

$$a_v = 1 + \frac{1}{\bar{g}}. \quad (2.35)$$

Neste intervalo de valores de  $a_v$ , o limite infravermelho do setor fermiônico do modelo de Schwinger anômalo corresponde ao modelo de Thirring sem massa. Também neste setor a estrutura infravermelha lembra a análise feita para a QCD<sub>2</sub> por Harada [35].

No intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ , o propagador fermiônico renormalizado também não tem um pólo simples, implicando na não existência de estados assintóticos de uma partícula. Porém, ele tem pólos de ordem maior que 1 em  $p^2 = 0$ , apresentando divergências infravermelhas [36]. Este fenômeno é conhecido como *escravidão infravermelha*, e é um forte indicio de que, possivelmente, os férmions sejam confinados neste setor.

No caso  $a_v = 1$ , o propagador fermiônico tem a seguinte estrutura infravermelha [33, 37, 29]

$$\tilde{G}_{a_v=1}(p) \approx \frac{i}{\not{p}} \left[ \frac{\tilde{e}^2/\pi}{p^2} \right]^{1/4}, \quad (2.36)$$

É fácil ver que, em  $p^2 = 0$ , o resíduo é zero, indicando o resultado conhecido de que neste modelo não existem estados assintóticos fermiônicos. Uma observação: neste caso, os operadores fermiônicos não são observáveis físicos.

Queremos, agora, conhecer a expressão do propagador fermiônico renormalizado, no espaço de configuração. Para isso, é melhor passar ao espaço Euclidiano,  $p_0 = ip_2$ ,  $\gamma_0 = i\gamma_2$ . O propagador fermiônico renormalizado Euclidiano é, então,

$$\tilde{G}_{\nu E}^R(p) = -\frac{i}{\not{p}} \frac{1}{\tilde{G}_{\nu}(\mu^2)} \int_0^{\infty} d\eta J_1(\eta) \left[ \frac{\tilde{m}_{\nu}^2 \eta^2}{p^2} \right]^{1/(1-a_{\nu}^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_{\nu}} K_0 \left( \sqrt{\frac{m_{\nu}^2 \eta^2}{p^2}} \right) \right\}. \quad (2.37)$$

Fazemos a seguinte mudança de variáveis:  $\eta = xp$ ,  $p = \sqrt{p_{\mu} p_{\mu}} = \sqrt{p^2}$ . Daí

$$\tilde{G}_{\nu E}^R(p) = -\frac{i\not{p}}{p} \frac{1}{\tilde{G}_{\nu}(\mu^2)} \int_0^{\infty} dx J_1(xp) \left[ \tilde{m}_{\nu}^2 x^2 \right]^{1/(1-a_{\nu}^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_{\nu}} K_0 \left( \sqrt{m_{\nu}^2 x^2} \right) \right\}. \quad (2.38)$$

Usando a seguinte identidade

$$\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} J_0(xp) = -x \frac{\not{p}}{p} J_1(xp), \quad (2.39)$$

temos

$$\tilde{G}_{\nu E}^R(p) = \frac{i}{\tilde{G}_{\nu}(\mu^2)} \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \int_0^{\infty} dx \frac{J_0(xp)}{x} \left[ \tilde{m}_{\nu}^2 x^2 \right]^{1/(1-a_{\nu}^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_{\nu}} K_0 \left( \sqrt{m_{\nu}^2 x^2} \right) \right\}. \quad (2.40)$$

A seguinte representação da função  $J_0$  será muito útil

$$J_0(xp) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-ixp \cos(\theta-\alpha)}. \quad (2.41)$$

Escrevendo  $x_1 = x \cos \theta$ ,  $x_2 = x \sin \theta$  e  $p_1 = p \cos \alpha$ ,  $p_2 = p \sin \alpha$ , obtemos  $xp \cos(\theta - \alpha) = x \cdot p$ . Assim,

$$\tilde{G}_{\nu E}^R(p) = \frac{i/2\pi}{\tilde{G}_{\nu}(\mu^2)} \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial p_{\mu}} \int_0^{\infty} dx \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{-ixp}}{x} \left[ \tilde{m}_{\nu}^2 x^2 \right]^{1/(1-a_{\nu}^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_{\nu}} K_0 \left( \sqrt{m_{\nu}^2 x^2} \right) \right\}. \quad (2.42)$$

Mudamos, agora, de coordenadas  $(x, \theta) \rightarrow (x_1, x_2)$ . O Jacobiano da transformação é  $1/x$ ,  $x = \sqrt{x_{\mu} x_{\mu}}$ . Realizando a derivada, temos

$$\tilde{G}_{\nu E}^R(p) = \frac{1/2\pi}{\tilde{G}_{\nu}(\mu^2)} \int d^2x \frac{\not{x}}{x^2} \left[ \tilde{m}_{\nu}^2 x^2 \right]^{1/(1-a_{\nu}^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_{\nu}} K_0 \left( \sqrt{m_{\nu}^2 x^2} \right) \right\} e^{-ixp}. \quad (2.43)$$

Voltando ao espaço de Minkowski,

$$\tilde{G}_v^R(p) = -\frac{i/2\pi}{\tilde{G}_v(\mu^2)} \int d^2x \frac{\not{x}}{x^2} \left[-\tilde{m}_v^2 x^2\right]^{1/(1-a_v^2)} \exp\left\{\frac{1}{1+a_v} K_0\left(\sqrt{-m_v^2 x^2}\right)\right\} e^{i x \cdot p}. \quad (2.44)$$

Podemos, então, ver claramente a forma do propagador renormalizado no espaço de configuração

$$G_v^R(x) = \frac{i}{\tilde{G}_v(\mu^2)} \exp\left\{\frac{1}{1-a_v^2} \ln\left(-\tilde{m}_v^2 x^2\right) + \frac{1}{1+a_v} K_0\left(\sqrt{-m_v^2 x^2}\right)\right\} G_F(x), \quad (2.45)$$

onde  $x^\mu$  é um vetor tipo-espaço. Para o caso em que  $x^\mu$  é um vetor de tipo-tempo, fazemos a continuação analítica [38] do logaritmo e da função  $K_0$ ,

$$K_0\left(\sqrt{-m_v^2 x^2}\right) \rightarrow \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}\left(\sqrt{m_v^2 x^2}\right), \quad x^2 > 0 \quad (2.46)$$

$$\ln\left(-\tilde{m}_v^2 x^2\right) \rightarrow -i\pi + \ln\left(\tilde{m}_v^2 x^2\right), \quad x^2 > 0 \quad (2.47)$$

onde  $H_0^{(1)}$  é a função de Hankel de primeira classe, cujo comportamento, para alguns limites do seu argumento é

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &\approx \frac{2i}{\pi} \left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma_E\right] + 1, \quad z \rightarrow 0, \\ H_0^{(1)}(z) &\rightarrow 0, \quad z \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (2.48)$$

O comportamento similar de ambas as funções nos limites acima garantem que podemos fazer a análise do propagador sem nos importarmos se  $x^\mu$  é do tipo-espaço ou do tipo-tempo<sup>3</sup>.

De (2.45) segue que  $G_v^R$  não tende assintoticamente a  $G_F$ , sendo reescalado com uma dimensão anômala, como pode ser observado do comportamento em curtas distâncias do propagador renormalizado  $G_v^R$ :

$$G_v^R(x) \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \left[-\tilde{m}_v^2 x^2\right]^{1/2(1-a_v)} G_F(x) \approx |x|^{a_v/(1-a_v)}. \quad (2.49)$$

No limite  $a_v \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{1}{2(1-a_v)} \rightarrow 0; \quad G_v^R \rightarrow G_F. \quad (2.50)$$

Por outro lado, o comportamento em longas distâncias é

$$G_v^R(x) \xrightarrow{x^2 \rightarrow -\infty} \left[-\tilde{m}_v^2 x^2\right]^{1/(1-a_v^2)} G_F(x) \approx |x|^{(1+a_v^2)/(1-a_v^2)}. \quad (2.51)$$

Neste limite, para  $-1 \leq a_v < 1$  o propagador diverge em relação a  $G_F(x)$ . Isto, possivelmente, indique confinamento dos férmions neste intervalo de valores de  $a_v$  [39]<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>O mesmo será válido na análise do modelo de Schwinger quiral, na seção seguinte.

<sup>4</sup>Vide equação (2.53).

Para  $a_v > 1$  (a outra faixa de valores permitida, pois  $a_v < -1$  implica na presença de táquions) o propagador decresce muito mais rápido que  $G_F(x)$ , de modo consistente com (2.32).

Vamos verificar a manutenção ou não da propriedade de *cluster*. Para isto, escrevemos o propagador fermiônico renormalizado como

$$G_v^R(x, y) = \frac{i}{\tilde{G}_v(\mu^2)} \left[ -\tilde{m}_v^2(x-y)^2 \right]^{1/(1-a_v^2)} \exp \left\{ \frac{1}{1+a_v} K_0 \left( \sqrt{-m_v^2(x-y)^2} \right) \right\} G_F(x-y). \quad (2.52)$$

Fazemos, então,  $x \rightarrow x + \lambda\eta$ , mantendo  $y$  fixo ( $\eta$  é um vetor tipo-espaço), e  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Usando o fato de que a função  $K_0(\xi) \rightarrow 0$  quando  $\xi \rightarrow \infty$  temos

$$G_v^R(x + \lambda\eta, y) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{i}{\tilde{G}_v(\mu^2)} \lambda^{(1+a^2)/(1-a^2)} \left[ -\tilde{m}_v^2\eta^2 \right]^{1/(1-a_v^2)} G_F(\eta),$$

ou seja,

$$G_v^R(x + \lambda\eta, y) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \begin{cases} \infty & , \quad -1 \leq a < 1 \\ 0 & , \quad a > 1 \end{cases}. \quad (2.53)$$

Logo, no intervalo  $-1 \leq a < 1$  a propriedade de *cluster* é perdida [39, 40], enquanto para  $a > 1$  ela é mantida. Este resultado seria impossível de ser obtido sem a renormalização exata da teoria, que abriu a possibilidade de consideração detalhada destes limites, especificando com clareza a dependência em  $a_v$ .

## 2.2 O modelo de Schwinger quiral

A densidade de Lagrangeana regularizada foi obtida no capítulo anterior (eq.(1.96)),

$$\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a-1)}{8\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\not{A}P_+) \psi. \quad (2.54)$$

Como vimos, neste modelo também podemos calcular exatamente todas as funções de Green, ao menos no espaço de configuração. Estamos interessados no propagador regularizado do férmion, devido à necessidade de renormalizar as divergências apresentadas no seu setor direito (1.100),

$$G_c^\Lambda(x-y) = i \exp \left\{ ie^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f_c^\Lambda(k) [1 - e^{ik \cdot (x-y)}] \right\} P_+ G_F(x-y) + iP_- G_F(x-y).$$

a constante de renormalização  $Z_\psi^c$  impomos, novamente, uma condição de renormalização similar a (2.29),

$$\tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) \Big|_{\not{p}=\not{\mu}} = \not{p} P_+ . \quad (2.60)$$

Desta equação conseguimos calcular  $Z_\psi^c$ ,

$$Z_\psi^c = \left( \frac{\Lambda^2}{m_c^2} \right)^{1/(1-a_c)} \tilde{\mathbf{G}}_c(\mu^2) . \quad (2.61)$$

As funções fermiônicas de dois pontos renormalizadas são, então,

$$\tilde{\mathbf{G}}_c^{R+}(p) = P_+ \frac{i}{\not{p}} \frac{\tilde{\mathbf{G}}_c(p^2)}{\tilde{\mathbf{G}}_c(\mu^2)}, \quad \text{ou} \quad \tilde{\Gamma}_c^{R+}(p) = \not{p} P_+ \frac{\tilde{\mathbf{G}}_c(\mu^2)}{\tilde{\mathbf{G}}_c(p^2)} . \quad (2.62)$$

Novamente, neste ponto, voltamos ao espaço de configuração. Fazer isso é relativamente simples se observamos o que já foi feito na seção anterior para o modelo de Schwinger anômalo, ou seja, os passos percorridos entre as equações (2.37) e (2.44). Seguindo isso, temos o propagador renormalizado do férmion direito no espaço de configuração,

$$G_c^{R+}(x) = \frac{i}{\tilde{\mathbf{G}}_c(\mu^2)} \exp \left\{ \frac{2}{a_c - 1} K_0 \left( \sqrt{-m_c^2 x^2} \right) \right\} P_+ G_F(x) \quad (2.63)$$

onde o vetor  $x^\mu$  é do tipo-espaço.

Novamente, vemos que o propagador renormalizado não tende assintoticamente a  $P_+ G_F$ , reescalando com dimensão anômala, como pode ser visto do seu comportamento em curtas distâncias [5]:

$$G_c^{R+}(x) \xrightarrow{x^2 \rightarrow 0} \left[ -\tilde{m}_c^2 x^2 \right]^{1/(1-a_c)} P_+ G_F(x) . \quad (2.64)$$

Por outro lado, o comportamento em longas distâncias é

$$G_c^{R+}(x) \xrightarrow{x^2 \rightarrow -\infty} P_+ G_F(x) \quad (2.65)$$

o que mostra que o férmion existe assintoticamente. Além disso, de (2.65) podemos ver que a função  $G_c^{R+}(x)$  mantém a propriedade de *cluster* [5]. Portanto, no modelo quiral, o parâmetro  $a_c$  não interpola entre dois regimes diferentes, representando apenas uma ambigüidade na massa do fóton.

# Capítulo 3

## Blindagem e confinamento

O propósito do presente capítulo é estudar as propriedades de blindagem e confinamento de cargas de teste, devidas à interação com o campo eletromagnético em (1+1) dimensões. Faremos este estudo para os dois modelos já vistos nos capítulos anteriores.

### 3.1 O modelo de Schwinger anômalo

Vamos considerar a densidade de Lagrangeana regularizada (1.27)

$$\mathcal{L}_v^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2}(\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\partial + eA)\psi. \quad (3.1)$$

O segundo termo surge como consequência da regularização não perturbativa das divergências ultravioletas que aparecem nas funções de Green fermiônicas (ver capítulo 1). Como já vimos, a integração fermiônica pode ser feita exatamente e fornece

$$W_v[A_\mu] = \int dx \frac{1}{2}A_\mu(x) \left[ m_v^2 g^{\mu\nu} - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x), \quad (3.2)$$

com  $m_v^2$  dado pela equação (1.3). Juntando as equações (3.1) e (3.2), definimos o Lagrangeano efetivo  $\mathcal{L}_{eff}[A_\mu]$  para o campo de calibre  $A_\mu$ ,

$$\mathcal{L}_{eff}[A_\mu] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2}(\partial \cdot A)^2 + \frac{m_v^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{e^2}{2\pi}A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu. \quad (3.3)$$

O terceiro termo pode ser interpretado como uma versão bidimensional do fenômeno de Higgs: a força de Coulomb é substituída por uma força de alcance finito, com uma escala de massa dada por  $m_v = e\sqrt{(a_v + 1)/2\pi}$ . As consequências deste fenômeno podem ser sondadas introduzindo uma distribuição de carga estática externa  $J^0(x^1)$  e uma corrente

estática  $J^1(x^1)$ . Isto adiciona o termo  $J_\mu A^\mu$  ao Lagrangeano efetivo  $\mathcal{L}_{eff}[A_\mu]$ . A equação de movimento é

$$\Gamma_\nu^{\Lambda\mu\nu} A_\nu + J^\mu = 0 \quad , \quad A_\mu(x) = \int dy \, i G_{\nu\mu\nu}^\Lambda(x-y) J^\nu(y) . \quad (3.4)$$

onde  $\Gamma_\nu^{\Lambda\mu\nu}$  é a função IIP de 2-pontos regularizada do fóton,

$$\Gamma_\nu^{\Lambda\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\square + m_\nu^2) + \frac{e^2(a_\nu - 1)}{4\pi\Lambda^2} \partial^\mu \partial^\nu - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} ,$$

sendo a sua inversa, no espaço de momenta, dada por  $\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\nu}^{\Lambda-1}(k) = -i \tilde{G}_{\nu\mu\nu}^\Lambda(k)$  com  $\tilde{G}_{\nu\mu\nu}^\Lambda(k)$  sendo o propagador regularizado do fóton (1.28). Usando o fato de que a fonte  $J^\mu$  só depende da coordenada espacial  $x^1$ , realizamos algumas integrações em (3.4), o que nos leva às seguintes equações

$$A^0(x^1) = - \int dy^1 \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{e^{ik^1(x^1-y^1)}}{(k^1)^2 + m_\nu^2} J^0(x^1) , \quad (3.5)$$

$$A^1(x^1) = - \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_\nu - 1)} \int dy^1 \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{e^{ik^1(x^1-y^1)}}{(k^1)^2 + \Lambda^2} J^1(x^1) . \quad (3.6)$$

Realizando a integração em  $k^1$  nas equações acima, temos os campos expressos em função da corrente estática arbitrária  $J^\mu(x^1)$ ,

$$A_0(x^1) = - \int dy^1 \frac{e^{-m_\nu|x^1-y^1|}}{2m_\nu} J_0(y^1) , \quad (3.7)$$

$$A_1(x^1) = - \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a_\nu - 1)} \int dy^1 \frac{e^{-\Lambda|x^1-y^1|}}{2\Lambda} J_1(y^1) . \quad (3.8)$$

Vamos estudar a natureza da força mediada pelo campo de calibre entre dois quarks. Primeiro, na presença de dois quarks estáticos externos (um par  $q\bar{q}$ ) de carga  $Q$ , uma carga  $-Q$  no ponto  $x^1 = 0$ , e outra  $+Q$  em  $x^1 = L$ . A densidade de carga adicionada é

$$J^0(x^1) = -Q\delta(x^1) + Q\delta(x^1 - L) \quad , \quad J^1(x^1) = 0 . \quad (3.9)$$

Resolvendo a equação (3.7), com  $J^0$  dado acima, obtemos o potencial estático  $A_0$ ,

$$A_0(x^1) = \frac{Q}{2m_\nu} \left( e^{-m_\nu|x^1|} - e^{-m_\nu|x^1-L|} \right) . \quad (3.10)$$

Substituindo o potencial  $A_\mu$  calculado acima no  $\mathcal{L}_{eff}$  e integrando em  $x^1$ , encontramos que a energia potencial de duas cargas de prova separadas por uma distância  $L$  é

$$V_\nu(L) = \frac{Q^2}{2m_\nu} (1 - e^{-m_\nu L}) . \quad (3.11)$$

Embora  $V_\nu(L)$  cresça linearmente para pequenas distâncias  $L$ , ele satura-se no valor  $Q^2/2m_\nu$  para longas distâncias. Isto indica a presença de um fenômeno notável: toda carga  $Q$  é blindada por cargas elementares (*cargas dinâmicas*) [41], tal como acontece na versão usual do modelo de Schwinger

Se escolhermos  $\alpha_\nu = -1$ , a massa do fóton será zero e a simetria quiral será preservada no nível quântico. Computando o limite quando  $m_\nu \rightarrow 0$  para o potencial (3.11), obtemos

$$V_\nu(L) = \frac{Q^2}{2} L. \quad (3.12)$$

O resultado acima mostra um fenômeno mais notável ainda: qualquer carga  $Q$  é confinada quando o fóton é não massivo.

### 3.1.1 Análise do *loop* de Wilson

Retornamos à determinação das propriedades de blindagem no modelo. A maneira usual de estudar isto é o cálculo do *loop* de Wilson. O *loop* de Wilson para uma partícula de prova com carga arbitrária  $Q$  é definido por [27, 41]

$$\mu[\mathcal{C}_W] = \exp \left[ iQ \oint_{\mathcal{C}_W} A_\nu(z) dz^\nu \right], \quad (3.13)$$

onde  $\mathcal{C}_W$  é um caminho fechado que inclui o ponto onde  $Q$  está localizada. O valor esperado no vácuo do *loop* de Wilson é calculado considerando a ação efetiva (3.3) para o campo de calibre  $A_\mu$

$$\langle 0 | \mu[\mathcal{C}_W] | 0 \rangle = \int dA_\nu \mu[\mathcal{C}_W] \exp \left( i \int dx \mathcal{L}_{eff}[A_\nu] \right). \quad (3.14)$$

Reescrevemos a integral de linha (3.13) como [27]

$$\oint_{\mathcal{C}_W} A_\nu(z) dz^\nu = \int dz I^\mu(z) A_\mu(z), \quad (3.15)$$

onde

$$I_\mu(z) = \oint_{\mathcal{C}_W} d\zeta_\mu \delta(z - \zeta). \quad (3.16)$$

Pomos (3.15) na integral funcional (3.14), e obtemos

$$\langle 0 | \mu[\mathcal{C}_W] | 0 \rangle = \exp \left[ \frac{-Q^2}{2} \int dx dy I^\mu(x) G_{\mu\nu}^\Lambda(x-y) I^\nu(y) \right] \quad (3.17)$$

$$= \exp \left[ \frac{-Q^2}{2} \oint dx^\mu \oint dy^\nu G_{\mu\nu}^\Lambda(x-y) \right], \quad (3.18)$$

onde  $G_{\mu\nu}^\Lambda(x-y)$  é o propagador fotônico (1.28), calculado a partir de  $\mathcal{L}_{eff}[A_\mu]$

$$G_{\mu\nu}^\Lambda(x-y) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{G}_{\mu\nu}^\Lambda(k) e^{-ik \cdot (x-y)}. \quad (3.19)$$

Restringir-nos-emos ao caso em que a carga total é nula e a corrente é conservada. Consideramos o *loop* de Wilson como uma trajetória retangular de largura (do tipo espaço)  $R$  e de comprimento (do tipo temporal)  $T$ ,  $T \gg R$ . Neste caso, a corrente  $I_\mu$  pode ser escrita como

$$I_\mu = \tilde{\partial}_\mu \Phi, \quad \Phi(z) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } z \text{ está dentro de } \mathcal{C}_W \\ 0 & , \text{ se } z \text{ está fora de } \mathcal{C}_W \end{cases}. \quad (3.20)$$

Calculamos o expoente na equação (3.17) no espaço de momenta. Usando (3.20), expressamos (3.17) como

$$\langle 0 | \mu[\mathcal{C}_W] | 0 \rangle = e^{i\epsilon[\mathcal{C}_W]} \quad (3.21)$$

onde  $\epsilon[\mathcal{C}_W]$  é

$$\begin{aligned} \epsilon[\mathcal{C}_W] &= \frac{Q^2}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{\Phi}(-k) \tilde{k}^\mu i \tilde{G}_{\mu\nu}^\Lambda(k) \tilde{k}^\nu \tilde{\Phi}(k) \\ &= -\frac{Q^2}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{\Phi}(-k) \frac{k^2}{k^2 - m_v^2} \tilde{\Phi}(k), \end{aligned} \quad (3.22)$$

e  $\tilde{\Phi}(k)$  é a transformada de Fourier da função  $\Phi(z)$ ,

$$\tilde{\Phi}(k) = \int_{-T/2}^{T/2} dx^0 \int_{-L/2}^{L/2} dx^1 e^{ik \cdot x} = -2i \frac{\sin(k_1 L/2)}{k_1} \frac{[e^{ik_0 T/2} - e^{-ik_0 T/2}]}{k_0}. \quad (3.23)$$

Agora, realizando a integral na equação (3.22), obtemos

$$\epsilon[\mathcal{C}_W] = -\frac{Q^2}{2m_v} T (1 - e^{-m_v L}) + i \frac{Q^2}{\pi} m_v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{\sin^2(k_1 L/2)}{k_1^2} \frac{[1 - e^{-i\omega_1 T - \epsilon T}]}{\omega_1^3}, \quad (3.24)$$

onde  $\omega_1 = \sqrt{k_1^2 + m_v^2}$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ . Fazemos, agora, o limite  $T \rightarrow +\infty$ , com  $L$  fixo, obtendo a expressão seguinte

$$\epsilon[\mathcal{C}_W] \approx -TV_v(L) + i \frac{Q^2}{\pi} m_v^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{\sin^2(k_1 L/2)}{k_1^2} \frac{1}{\omega_1^3} \quad (3.25)$$

onde  $V_v(L)$  é o potencial mostrado na equação (3.11).

Também podemos calcular explicitamente o *loop* de Wilson (3.18) sem nenhuma hipótese sobre a corrente, usando a mesma trajetória mencionada acima. Em  $(1+1)$

dimensões, as contribuições vindas do propagador fotônico  $G_{\mu\nu}^\Lambda$  (1.28) proporcionais a  $k_\mu k_\nu$  são canceladas, e só contribui a parte proporcional ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Temos, assim,

$$\oint dx^\mu \oint dy^\nu G_{\mu\nu}(x-y) = i \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{\Phi}(-k) \frac{k^2}{k^2 - m_\nu^2} \tilde{\Phi}(k) \quad (3.26)$$

onde a função  $\tilde{\Phi}(k)$  é dada por (3.23).

Este é um resultado importante: a conservação da carga é implícita no operador do *loop* de Wilson, o que é uma consequência da invariância de calibre global da teoria.

Mostramos que, no modelo de Schwinger anômalo, existe também o fenômeno da blindagem de cargas de prova, induzida pela polarização do vácuo quando o fóton é massivo  $a > -1$ . Entretanto, quando a massa do fóton se anula,  $a = -1$ , o potencial entre as cargas de teste torna-se confinante. Ambos os resultados são confirmados pelo cálculo do *loop* de Wilson.

A equação (3.25), mostra o potencial estático entre cargas de prova. No caso, em que o potencial cresce linearmente em grandes distâncias,  $V(L) \approx cte L$ , corresponde ao famoso comportamento da lei de área do *loop* de Wilson. O outro termo em (3.25) é completamente finito.

## 3.2 O modelo de Schwinger quiral

Nesta seção estudamos o potencial estático produzido por duas cargas de teste. Novamente partimos da Lagrangeana regularizada (2.54) do modelo,

$$\mathcal{L}_c^\Lambda[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_c - 1)}{8\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} + eA P_+) \psi. \quad (3.27)$$

O segundo termo, que é do tipo de fixação de calibre, na verdade é a regularização introduzida para ter controle sobre as divergências ultravioletas que surgem nas funções de correlação fermiônicas. Realizando a integração fermiônica, encontramos a ação efetiva dada pela equação (1.72),

$$W_c[A_\mu] = \frac{e^2}{8\pi} \int dx A_\mu \left[ a_c g^{\mu\nu} - (\partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu) \frac{1}{\square} (\partial^\nu + \tilde{\partial}^\nu) \right] A_\nu. \quad (3.28)$$

Pondo, a equação (3.28) em (3.27) obtemos a Lagrangeana efetiva  $\mathcal{L}_{eff}$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_c - 1)}{8\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \frac{e^2 a_c}{8\pi} A_\mu A^\mu - \frac{e^2}{8\pi} A_\mu (\partial^\mu + \tilde{\partial}^\mu) \frac{1}{\square} (\partial^\nu + \tilde{\partial}^\nu) A_\nu. \quad (3.29)$$

A presença de um termo de massa para o campo de calibre, sugere que a interação entre cargas seja de alcance finito. Seguiremos a mesma estratégia de análise da seção anterior. Adicionando à Lagrangeana (3.29) o termo  $J_\mu A^\mu$  (onde  $J_\mu$  é uma corrente arbitrária estática), obtemos as seguintes equações de movimento para o campo de calibre,

$$[\partial_1^2 - \frac{e^2}{4\pi}(a_c + 1)]A_0(x^1) + \frac{e^2}{4\pi} A_1(x^1) = J_0(x^1) \quad (3.30)$$

$$(\partial_1^2 - \Lambda^2)A_1(x^1) - \frac{\Lambda^2}{a_c - 1} A_0(x^1) = \frac{4\pi \Lambda^2}{e^2(a_c - 1)} J_1(x^1) \quad (3.31)$$

As soluções para correntes estáticas arbitrárias  $J_0$  e  $J_1$ , são

$$A_0(x^1) = - \int dy^1 \left( \frac{\Lambda^2 - \omega_m^2}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \frac{e^{-\omega_m|x^1-y^1|}}{2\omega_m} - \frac{\Lambda^2 - \omega_\Lambda^2}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \frac{e^{-\omega_\Lambda|x^1-y^1|}}{2\omega_\Lambda} \right) J_0(y^1) + \quad (3.32)$$

$$- \frac{\Lambda^2/(a_c - 1)}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \int dy^1 \left( \frac{e^{-\omega_m|x^1-y^1|}}{2\omega_m} - \frac{e^{-\omega_\Lambda|x^1-y^1|}}{2\omega_\Lambda} \right) J_1(y^1),$$

$$A_1(x^1) = \frac{\Lambda^2/(a_c - 1)}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \int dy^1 \left( \frac{e^{-\omega_m|x^1-y^1|}}{2\omega_m^2} - \frac{e^{-\omega_\Lambda|x^1-y^1|}}{2\omega_\Lambda^2} \right) J_0(y^1) + \frac{4\pi\Lambda^2}{e^2(a_c - 1)} \times \quad (3.33)$$

$$\times \int dy^1 \left( \frac{\omega_m^2 - e^2(a_c + 1)/4\pi}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \frac{e^{-\omega_m|x^1-y^1|}}{2\omega_m} - \frac{\omega_\Lambda^2 - e^2(a_c + 1)/4\pi}{\omega_\Lambda^2 - \omega_m^2} \frac{e^{-\omega_\Lambda|x^1-y^1|}}{2\omega_\Lambda} \right) J_1(y^1),$$

onde  $\omega_\Lambda$  e  $\omega_m$  são dadas em (1.98) e (1.99).

Fixamos, agora, uma carga externa  $-Q$  no ponto  $x^1 = 0$ , e outra carga  $+Q$  em  $x^1 = L$ . Resolvendo as equações acima com  $J_0(x^1) = -Q\delta(x^1) + Q\delta(x^1 - L)$  e  $J_1(x^1) = 0$ , obtemos (previamente tomando o limite  $\Lambda \rightarrow +\infty$ ),

$$A_0(x^1) = \frac{Q}{2m_c} \left( e^{-m_c|x^1|} - e^{-m_c|x^1-L|} \right), \quad (3.34)$$

$$A_1(x^1) = -\frac{A_0(x^1)}{a_c - 1}. \quad (3.35)$$

De maneira similar ao caso vetorial, substituindo os valores do campo estático  $A_\mu$  achados acima no Lagrangeano efetivo (3.29), e integrando em  $x^1$ , calculamos a energia potencial entre duas cargas de prova  $-Q$  e  $+Q$  separadas por uma distância  $L$ , e obtemos

$$V_c(L) = \frac{Q^2}{2m_c} (1 - e^{-m_c L}). \quad (3.36)$$

Podemos observar claramente o fenômeno de blindagem da carga de prova produzida pela polarização do vácuo para todo valor de  $a_c > 1$ , quando a distância  $L \rightarrow +\infty$ .

Notamos que, para  $a_c = 1$ , o potencial entre as cargas de prova é nulo,  $V_c(L) = 0$  e, portanto, as cargas não experimentam a interação eletromagnética, e aparecem como cargas livres. Este resultado está de acordo com o que se encontra na literatura [42, 5].

### 3.2.1 Análise do *loop* de Wilson

Como já vimos na seção 3.1.1, a contribuição ao cálculo do valor esperado do *loop* de Wilson do propagador fotônico vem somente do termo proporcional ao tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ . No modelo que estamos considerando nesta seção a situação se repete. Por conseguinte, o cálculo direto do valor esperado do *loop* de Wilson é feito usando a equação (3.18)

$$\langle 0 | \mu[C_W] | 0 \rangle_c = \exp \left[ \frac{-Q^2}{2} \oint dx^\mu \oint dy^\nu G_{c\mu\nu}^\Lambda(x-y) \right], \quad (3.37)$$

onde  $G_{c\mu\nu}^\Lambda(x-y)$  é o propagador fotônico exato regularizado dado na equação (1.97). Realizando a integração na trajetória retangular de largura (do tipo espaço)  $R$  e de comprimento (do tipo temporal)  $T$ , onde  $T \gg R$ , exatamente como no caso da subseção 3.1.1, chegamos a uma expressão similar à equação (3.26) (neste ponto o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$  já foi tomado),

$$\langle 0 | \mu[C_W] | 0 \rangle_c = \exp \left( -\frac{iQ^2}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{\Phi}(-k) \frac{k^2}{k^2 - m_c^2} \tilde{\Phi}(k) \right) = \exp(i\epsilon[C_W]_c) \quad (3.38)$$

onde a função  $\tilde{\Phi}(k)$  é dada por (3.23). Realizando a integração que aparece no expoente de (3.38), obtemos

$$\epsilon[C_W]_c = -\frac{Q^2}{2m_c} T (1 - e^{-m_c L}) + i \frac{Q^2}{\pi} m_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{\sin^2(k_1 L/2)}{k_1^2} \frac{[1 - e^{-i\omega_1 T - \epsilon T}]}{\omega_1^3}, \quad (3.39)$$

onde  $\omega_1 = \sqrt{k_1^2 + m_c^2}$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ . Agora, fazendo o limite  $T \rightarrow +\infty$ , com  $L$  fixo, obtemos a expressão seguinte

$$\epsilon[C_W] \approx -TV_c(L) + i \frac{Q^2}{\pi} m_c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{\sin^2(k_1 L/2)}{k_1^2} \frac{1}{\omega_1^3}, \quad (3.40)$$

onde  $V_c(L)$  é o potencial mostrado na equação (3.36). Assim, os resultados obtidos na subseção anterior para a energia potencial entre duas cargas de teste, são reobtidos pelo método de *loop* de Wilson.

Observamos um contraste entre os modelos: no modelo vetorial anômalo, existe a possibilidade de confinamento para um valor específico (e finito) do parâmetro,  $a_v = -1$ ; no caso quiral, esta possibilidade não existe. Em contrapartida, a possibilidade de ter uma teoria com cargas livres, é latente no caso quiral quando a massa do fóton é infinita, para um valor finito do parâmetro  $a_c = 1$ ; no entanto, isto não é praticável no caso vetorial.

# Capítulo 4

## A estrutura do espaço de Hilbert do modelo de Schwinger anômalo

Vamos, agora, analisar a solução operatorial do modelo de Schwinger anômalo, determinando as excitações físicas, os observáveis e as condições de definição de estados físicos. Tal análise é bem conhecida para o caso quiral e para o modelo de Schwinger convencional, mas não havia sido feita para o caso anômalo. Como vamos ver, definições cuidadosas do espaço de Hilbert devem ser dadas, dependendo do intervalo de valores que o parâmetro  $a_v$  possa tomar.

### 4.1 O espaço de Hilbert

Após a integração sobre os férmions, obtemos uma Lagrangeana efetiva não local (eq. (3.3)). Podemos obter uma expressão local se introduzirmos um campo auxiliar  $\chi$ . Usando este campo, obtemos a expressão bosonizada,

$$\mathcal{L}_{bos} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2}(\partial \cdot A)^2 + \frac{e^2}{4\pi}(a_v - 1)A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \frac{e}{\sqrt{\pi}}A_\mu\tilde{\partial}^\mu\chi. \quad (4.1)$$

As equações de movimento obtidas da Lagrangeana em (4.1) são

$$\square\chi + \frac{e}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}^\mu A_\mu = 0, \quad (4.2)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{e^2(a_v - 1)}{2\pi\Lambda^2}\partial^\nu\partial \cdot A + eJ^\nu = 0 \quad (4.3)$$

onde  $J^\mu$  é a corrente eletromagnética bosonizada

$$J^\nu =: \bar{\psi}\gamma^\nu\psi := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}^\nu\chi + \frac{e}{2\pi}(a_\nu - 1)A^\nu. \quad (4.4)$$

Desde que esperamos que a invariância de calibre seja perdida (ao menos em estágios intermediários), a parte longitudinal do campo de calibre pode adquirir dinâmica. Para compreender isto, exploramos o fato de que, em 1 + 1 dimensões, podemos escrever o campo  $A_\mu$  como

$$e A_\mu = \partial_\mu\rho - \tilde{\partial}_\mu\phi, \quad F^{\mu\nu} = \frac{1}{e}\epsilon^{\mu\nu}\square\phi. \quad (4.5)$$

Sob uma transformação de calibre

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, \\ \rho &\rightarrow \rho + \alpha, \\ \phi &\rightarrow \phi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Em termos dos campos  $\rho$  e  $\phi$  a Lagrangeana (4.1) é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bos} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2e^2}(\square\phi)^2 - \frac{(a_\nu - 1)}{4\pi}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_\mu\chi\partial^\mu\phi + \\ & - \frac{(a_\nu - 1)}{4\pi\Lambda^2}(\square\rho)^2 + \frac{(a_\nu - 1)}{4\pi}(\partial_\mu\rho)^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para obter a Lagrangeana acima diversos termos de superfície foram eliminados. A Lagrangeana (4.7) pode ser expressa em termos de campos livres, por meio da diagonalização dos termos mistos, usando as seguintes transformações

$$\chi = \chi' - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\phi, \quad (4.8)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{em_\nu}\square\phi, \quad \phi_2 = \frac{1}{em_\nu}(\square + m_\nu^2)\phi, \quad \phi = \sqrt{\frac{2\pi}{a+1}}(\phi_2 - \phi_1), \quad (4.9)$$

$$\rho_1 = \frac{1}{\Lambda^2}\square\rho, \quad \rho_2 = \frac{1}{\Lambda^2}(\square + \Lambda^2)\rho, \quad \rho = \rho_2 - \rho_1, \quad (4.10)$$

com  $m_\nu$  dado pela equação (1.3). As transformações (4.9) e (4.10) são típicas de teorias com derivadas superiores [43].

A densidade de Lagrangeana escrita em termos de  $\chi'$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bos} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}m_v^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + \\ & - \frac{(a_v - 1)}{4\pi} [(\partial_\mu \rho_1)^2 - \Lambda^2 (\rho_1)^2] + \frac{(a_v - 1)}{4\pi} (\partial_\mu \rho_2)^2 . \end{aligned} \quad (4.11)$$

A Lagrangeana em (4.11) exprime várias características quânticas do modelo. Primeiramente, lembrando que  $\rho$  é o campo que muda sob transformações do calibre, voltamos a observar que somente para  $a_v = 1$  a teoria torna-se invariante de calibre local, sendo neste caso o usual modelo de Schwinger (invariante de calibre). Para  $a_v < -1$  já vimos que a teoria tem excitações taquiônicas e  $\rho_2$  é quantizado com métrica negativa. Para  $-1 \leq a_v < 1$  o campo  $\rho_2$  ainda é quantizado com métrica negativa mas a teoria tem excitações físicas. Para  $a_v > 1$ , o campo  $\rho_2$  é quantizado com métrica positiva e, o campo  $\rho_1$  passa a ser quantizado com métrica negativa. Independente do valor de  $a_v$ , observamos que o campo  $\phi_2$  tem que ser quantizado com métrica negativa e, conseqüentemente, o espaço de estados terá métrica indefinida. O campo  $\phi_2$  está também presente na solução operatorial covariante do modelo de Schwinger invariante de calibre, encontrada por Lowenstein e Swieca [9]. O campo  $\rho$  também está presente no espaço de Hilbert do modelo de Schwinger quiral, como obtido por Boyanovsky [6].

Devido ao fato da métrica dos campos  $\rho_2$  e  $\rho_1$  depender dos valores do parâmetro  $a_v$ , separamos a análise do espaço de estados do modelo nos casos  $a_v > 1$  e  $-1 \leq a_v < 1$ .

#### 4.1.1 Caso $a_v > 1$

Começamos da Lagrangeana (4.11),

$$\mathcal{L}_{bos} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 - \frac{1}{2}m_v^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta_1)^2 - \Lambda^2 (\eta_1)^2] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta_2)^2 , \quad (4.12)$$

onde fizemos uma redefinição adicional

$$\eta_i = \sqrt{\frac{a_v - 1}{2\pi}} \rho_i \quad , \quad \rho = \sqrt{\frac{2\pi}{a_v - 1}} (\eta_2 - \eta_1). \quad (4.13)$$

Todos os campos aparecendo em (4.12) são canônicos. Neste caso, o conteúdo da teoria original é de três campos bosônicos livres sem massa ( $\chi'$  que é um singlete de calibre quantizado com métrica positiva;  $\phi_2$ , um singlete de calibre quantizado com métrica

negativa; e  $\eta_2$ , que transforma-se sob transformações de calibre e é quantizado com métrica positiva), o campo  $\phi_1$ , um campo bosônico massivo, quantizado com métrica positiva e o campo  $\eta_1$ , massivo, quantizado com métrica negativa (sua grande massa é nada mais que o cut-off necessário que regulariza as divergências UV presentes no setor fermiônico; ele desaparece da teoria).

O espaço de estados da teoria é de métrica indefinida e é dado pelo produto tensorial dos espaços de Fock individuais dos campos  $\chi'$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\eta_2$ ,

$$\mathcal{H}^{a>1} = \mathcal{H}(\chi') \otimes \mathcal{H}(\phi_1) \otimes \mathcal{H}(\phi_2) \otimes \mathcal{H}(\eta_2). \quad (4.14)$$

Entretanto, como no caso da solução covariante do modelo de Schwinger invariante de calibre, esperamos que o espaço de estados  $\mathcal{H}$ , dado por (4.14), seja grande demais [9], admitindo, então, estados não-físicos. Assim, como veremos depois, o subespaço de Hilbert *físico* será

$$\mathcal{H}_{phys}^{a>1} = \mathcal{H}(\phi_1) \otimes \mathcal{H}^{a>1}(\eta_2, \chi', \phi_2). \quad (4.15)$$

Primeiro, expressamos a corrente eletromagnética (4.4) em termos dos campos livres,

$$J^\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{\partial}^\nu \chi' + \sqrt{\frac{a_\nu + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\nu (\phi_1 - \phi_2) + \sqrt{\frac{a_\nu - 1}{2\pi}} \partial^\nu (\eta_2 - \eta_1). \quad (4.16)$$

Reescrevemos a equação de movimento (4.3) em termos dos campos livres, obtendo

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{e^2(a_\nu - 1)}{2\pi\Lambda^2} \partial^\nu \partial \cdot A + eJ^\nu &= \frac{e}{\sqrt{\pi}} \tilde{\partial}^\nu \chi' - e\sqrt{\frac{a_\nu + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\nu \phi_2 + e\sqrt{\frac{a_\nu - 1}{2\pi}} \partial^\nu \eta_2 + \\ &\quad - \frac{1}{m_\nu} \tilde{\partial}^\nu \square \phi_2 + \frac{1}{m_\nu} \tilde{\partial}^\nu (\square + m_\nu^2) \phi_1. \\ &\equiv eJ_F^\nu - \frac{1}{m_\nu} \tilde{\partial}^\nu \square \phi_2 + \frac{1}{m_\nu} \tilde{\partial}^\nu (\square + m_\nu^2) \phi_1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde a corrente  $J_F^\nu$  é

$$J_F^\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{\partial}^\nu \chi' - \sqrt{\frac{a_\nu + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\nu \phi_2 + \sqrt{\frac{a_\nu - 1}{2\pi}} \partial^\nu \eta_2. \quad (4.18)$$

Usando em (4.17) as equações de movimento tanto para o campo  $\phi_1$  como para  $\phi_2$ , encontramos que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + eJ^\nu = eJ_F^\nu \quad (4.19)$$

Conseqüentemente, para que as equações de movimento (4.3) que definem a teoria física sejam satisfeitas, a imposição de um vínculo aparece naturalmente na representação de

campos livres. Esta situação é muito parecida com a que ocorre no modelo de Schwinger invariante de calibre, como mostrado por Lowenstein e Swieca [9]. Se tentarmos ajustar  $J_F^\nu = 0$ , para definir o subespaço físico, isto poderia impedir a existência do estado de vácuo da teoria, ao estabelecer uma identidade operatorial forte. Contudo, observando que  $J_F^\nu$  é uma combinação linear das derivadas dos campos livres, o vínculo a ser imposto pode ser do tipo de Gupta-Bleuler. Seleccionamos, assim, os estados físicos da teoria impondo a seguinte condição

$$J_F^{\nu(+)} |P\rangle \equiv 0, \quad (4.20)$$

onde  $|P\rangle$  é um estado físico arbitrário e  $J_F^{\nu(+)}$  é a parte de frequência positiva (aniquilação) de  $J_F^\nu$ . A condição quântica (4.20) define o *subespaço físico*  $\mathcal{H}_{phys}$  dentro do espaço de estados total dado pela equação (4.14).

Por um cálculo direto mostramos que

$$[J_F^{\mu(+)}(x), J_F^{\nu(-)}(y)] = 0 \quad \forall \mu, \nu, x, y. \quad (4.21)$$

Portanto, a corrente  $J_F^\nu$  cria estados de norma zero quando aplicada ao estado de vácuo. A componente temporal de  $J_F^\nu$  é identificada como a lei de Gauss da teoria. Conseqüentemente, a equação (4.21) implica que o operador da lei de Gauss comuta consigo mesmo em todos os pontos do espaço-tempo, embora seja um vínculo de segunda classe, no sentido de Dirac,

$$[\Pi^0(x), J_F^0(y)] = -\frac{i e^2 (a-1)}{2\pi} \delta(x^1 - y^1).$$

Como conseqüência, os operadores físicos são aqueles que comutam com  $J_F^{\nu(+)}$ , criando excitações físicas quando aplicados ao vácuo.

#### 4.1.1.1 Os campos fermiônicos: renormalização de função de onda

Para encontrar os campos fermiônicos em função dos campos livres achados acima, resolvemos a sua equação de movimento,

$$i\cancel{\partial}\psi + eA\psi = 0, \quad (4.22)$$

usando a expressão (4.5) para o campo de calibre  $A_\mu$ . Assim, o férmion pode ser expresso formalmente como

$$\psi_\alpha = \exp[-i\varepsilon_\alpha\phi + i\rho] \psi_\alpha^{(0)}, \quad (4.23)$$

com  $\alpha = R, L$  denotando a componente direita ou esquerda,  $\varepsilon_R = 1$ ,  $\varepsilon_L = -1$ ,  $\psi_\alpha^{(0)}$  representando as componentes direita e esquerda do férmion livre, que satisfazem  $i\bar{\phi}\psi^{(0)} = 0$ .

Se substituimos a equação acima na equação de movimento (4.22), ela é satisfeita. O campo fermiônico livre pode ser expresso em forma bosonizada, usando o campo bosônico sem massa  $\chi'$  (vide apêndice 3 para uma discussão geral e a definição de  $\chi'_R$  e  $\chi'_L$ ), como

$$\psi^{(0)} = \begin{pmatrix} \psi_R^{(0)} \\ \psi_L^{(0)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{4\pi}\chi'_R} \\ e^{-i\sqrt{4\pi}\chi'_L} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Passando, agora, à descrição quântica, precisamos introduzir o ordenamento normal com respeito aos quanta dos campos bosônicos na equação (4.23). Definimos os campos fermiônicos quânticos não renormalizados como

$$\psi_\alpha = \left(\frac{\tilde{\tau}^2}{\tilde{m}_v^2}\right)^{1/2(\alpha_v^2-1)} \left(\frac{\Lambda^2}{\tilde{m}_v^2}\right)^{1/4(1-\alpha_v)} : \exp[-i\varepsilon_\alpha\phi + i\rho] : \psi_\alpha^{(0)}, \quad (4.25)$$

onde na equação acima,  $\tau$  é um regulador infravermelho e  $\Lambda$  é o regulador ultravioleta de Pauli-Villars (que aparece na regularização feita no setor fermiônico no capítulo 1). O símbolo  $::$  define o ordenamento normal com respeito aos quanta dos campos bosônicos livres em função dos quais os campos da teoria  $\psi$  e  $A_\mu$  são expressos. O campo  $\psi_\alpha^{(0)}$  em (4.25) é o campo fermiônico livre quantizado,

$$\psi^{(0)} = \begin{pmatrix} \psi_R^{(0)} \\ \psi_L^{(0)} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{2\pi}} \begin{pmatrix} : e^{i\sqrt{4\pi}\chi'_R} : \\ : e^{-i\sqrt{4\pi}\chi'_L} : \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Nas expressões acima a seguinte fórmula foi usada,

$$e^{b\phi(x)} = e^{b\phi^-(x)+b\phi^+(x)} = e^{b\phi^-(x)} e^{b\phi^+(x)} e^{\frac{b^2}{2}[\phi^+(x),\phi^-(x)]}, \quad (4.27)$$

$$: e^{b\phi(x)} : = e^{b\phi^-(x)} e^{b\phi^+(x)}.$$

É importante lembrar a métrica de cada campo envolvido em (4.25), porque definirá o comutador que aparece em (4.27).

Retornando à equação (4.25) que define o campo fermiônico, podemos expressá-lo em termos dos campos bosônicos livres,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = C(\tau, \Lambda, m_v) \begin{pmatrix} : e^{i\sqrt{4\pi}\chi_R} : \\ : e^{-i\sqrt{4\pi}\chi_L} : \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

com a constante  $C(\tau, \Lambda, m_\nu)$  dada por

$$C(\tau, \Lambda, m_\nu) = \sqrt{\frac{\bar{\tau}}{2\pi}} \left(\frac{\tau^2}{m_\nu^2}\right)^{1/2(a_\nu^2-1)} \left(\frac{\Lambda^2}{m_\nu^2}\right)^{1/4(1-a_\nu)}, \quad (4.29)$$

e com as funções  $\chi_\alpha$  sendo definidas como as componentes direita e esquerda para o campo  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} \chi_R &= \chi'_R - \frac{\phi - \rho}{2\sqrt{\pi}} = \chi'_R + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{2(a_\nu + 1)}} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\sqrt{2(a_\nu - 1)}}, \\ \chi_L &= \chi'_L - \frac{\phi + \rho}{2\sqrt{\pi}} = \chi'_L + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{2(a_\nu + 1)}} - \frac{\eta_2 - \eta_1}{\sqrt{2(a_\nu - 1)}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De (4.25) definimos os férmions renormalizados  $\psi_\alpha^r$ ,

$$\psi_\alpha = \sqrt{Z_\psi^\nu} \psi_\alpha^r, \quad (4.31)$$

onde  $Z_\psi^\nu$  é a constante de renormalização de função de onda fermiônica dada por (2.30).

Analisamos a consistência da solução, computando, em particular,  $G_{\nu\alpha}^r(x-y) = \langle 0 | T \psi_\alpha^r(x) \psi_\alpha^{r\dagger}(y) | 0 \rangle$ , o propagador fermiônico renormalizado que é

$$G_{\nu\alpha}^r(x-y) = \frac{i}{\bar{G}_\nu(\mu^2)} \left[ -\tilde{m}_\nu^2(x-y)^2 \right]^{1/(1-a_\nu^2)} \exp \left[ \frac{i 2\pi}{a_\nu + 1} \Delta_F(x-y; m_\nu^2) \right] G_{F\alpha}(x-y), \quad (4.32)$$

onde  $G_F(x)$  é o propagador livre do férmion sem massa e  $i\Delta_F(x; m_\nu^2)$  (C.9) é o propagador livre do bóson massivo. Este resultado está de acordo com o obtido usando o método de integração funcional (2.45). O propagador será formado das partes direita e esquerda, dadas em (4.32), isto é

$$G_\nu^r(x-y) = \begin{pmatrix} 0 & G_{\nu R}^r(x-y) \\ G_{\nu L}^r(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

#### 4.1.1.2 Propagador do fóton

O propagador do fóton,  $G_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle$  é expresso no espaço de momentos, como

$$i\tilde{G}_{\mu\nu}^\nu(k) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m_\nu^2} - \frac{2\pi k_\mu k_\nu}{e^2(a_\nu - 1)k^2} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - m_\nu^2)}. \quad (4.34)$$

Podemos ver que o propagador do fóton é livre de divergências ultravioletas, o que implica na trivialidade de sua constante de renormalização de função de onda,  $Z_A^\nu = 1$ .

### 4.1.1.3 Renormalização de vértice

Calculamos também, a função de 3-pontos  $G_v^\mu(x, y; z) = \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) A^\mu(z) | 0 \rangle$  não renormalizada,

$$G_v^\mu(x, y; z) = i e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} g^\mu(k) [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] \left( \frac{\Lambda^2}{m_v^2} \right)^{1/2(1-a_v)} \tilde{G}_v(\mu^2) G_v^r(x-y), \quad (4.35)$$

onde

$$g_\mu(k) = \frac{2\pi k_\mu}{e^2(a_v - 1) k^2} + \gamma_5 \frac{\tilde{k}_\mu}{k^2(k^2 - m_v^2)} \quad (4.36)$$

Podemos, também, calcular diretamente a função de 3-pontos  $G_v^{\prime\mu}(x, y; z)$  renormalizada, fazendo uso dos campos fermiônicos renormalizados dados em (4.31). O campo de calibre, como já vimos, não precisa renormalização. Temos, então,

$$G_v^{\prime\mu}(x, y; z) = i e^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} g^\mu(k) [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] G_v^r(x-y). \quad (4.37)$$

Sabendo que a relação entre as funções renormalizadas e não-renormalizadas é  $G_v^\mu = Z_e^v G_v^{\prime\mu}$ , onde  $Z_e^v$  é a constante de renormalização do vértice, e comparando as equações (4.35) e (4.37), obtemos

$$Z_e^v = \left( \frac{\Lambda^2}{m_v^2} \right)^{1/2(1-a_v)} \tilde{G}_v(\mu^2), \quad (4.38)$$

com  $\tilde{G}_v(\mu^2)$  dada pela equação (2.28), e  $\mu^2$  sendo a escala de energia onde impomos a condição de renormalização (2.29) para o propagador fermiônico renormalizado. Neste nível podemos confirmar que a constante de renormalização de onda fermiônica e a constante de renormalização do vértice são exatamente iguais:

$$Z_\psi^v = Z_e^v. \quad (4.39)$$

Concluimos, uma vez mais, que a carga elétrica não é renormalizada (função  $\beta$  nula). A carga não-renormalizada é a carga física e tem caráter universal.

### 4.1.1.4 Operadores físicos

Observamos, na subseção 4.1.1, que o espaço de estados da teoria é de métrica indefinida, mas que existe um vínculo quântico que define um subespaço físico, no qual as equações de movimento (4.22) e (4.3) são satisfeitas.

O vínculo que define o subespaço físico é dado por (4.20). Define-se [9, 6] um *operador físico*  $\hat{O}(y)$  como sendo um operador local que comute com  $J_F^{\nu(+)}$ , dado pela equação (4.18),

$$[J_F^{\nu(+)}(x), \hat{O}(y)] = 0 \quad \forall x, y, \quad \nu = 0, 1. \quad (4.40)$$

A condição (4.40) assegura que os estados físicos obtidos ao atuar  $\hat{O}$  sob o vácuo são aniquilados por  $J_F^{\nu(+)}$  e, conseqüentemente, satisfazem o vínculo (4.20).

Podemos verificar que o campo bosônico massivo  $\phi_1$  é um operador físico, o que implica que o campo  $F^{\mu\nu}$  também é. As componentes do campo  $\chi$ ,  $\chi_R$  e  $\chi_L$  são operadores físicos. Daí os férmions diretos e esquerdos  $\psi_R$  e  $\psi_L$  são operadores físicos também. O campo de calibre  $A_\mu$  é um operador físico, mas não representa graus de liberdade independentes, devido à equação (4.5). A corrente eletromagnética  $J^\mu =: \bar{\psi}\gamma^\mu\psi :$  e a corrente axial  $J_5^\mu =: \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi :$  são operadores físicos.

Podemos obter a Hamiltoniana restrita ao espaço físico gerado pela imposição do vínculo (4.20). Partimos da Lagrangeana bosonizada (4.12), obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \int dx^1 : & \frac{1}{2}\pi_{\chi'}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \chi')^2 + \frac{1}{2}\pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2}m_v^2(\phi_1)^2 - \frac{1}{2}\pi_{\phi_2}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi_2)^2 + \\ & -\frac{1}{2}\pi_{\eta_1}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta_1)^2 - \frac{1}{2}\Lambda^2(\eta_1)^2 + \frac{1}{2}\pi_{\eta_2}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \eta_2)^2 : . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Usando, agora, o vínculo (4.20), temos o campo  $\eta_2$  e o seu momentum canônico  $\pi_{\eta_2}$ , expressos em termos dos respectivos  $\chi'$  e  $\phi_2$

$$\begin{aligned} \pi_{\eta_2} &= -\sqrt{\frac{2}{a_v - 1}} \partial_x \chi' + \sqrt{\frac{a_v + 1}{a_v - 1}} \partial_x \phi_2 , \\ \partial_x \eta_2 &= -\sqrt{\frac{2}{a_v - 1}} \pi_{\chi'} - \sqrt{\frac{a_v + 1}{a_v - 1}} \pi_{\phi_2} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Substituindo as equações (4.42) em (4.41), obtemos

$$\mathbf{H}_{J_F} = \int dx^1 : \frac{1}{2}\pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2}m_v^2(\phi_1)^2 + \frac{1}{2}\pi_h^2 + \frac{1}{2}(\partial_x h)^2 - \frac{1}{2}\pi_{\eta_1}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \eta_1)^2 - \frac{1}{2}\Lambda^2(\eta_1)^2 : , \quad (4.43)$$

onde definimos o campo bosônico sem massa,  $h$ ,

$$h = \sqrt{\frac{a_v + 1}{a_v - 1}} \chi' - \sqrt{\frac{2}{a_v - 1}} \phi_2 , \quad (4.44)$$

$$\pi_h = \sqrt{\frac{a_v + 1}{a_v - 1}} \pi_{\chi'} + \sqrt{\frac{2}{a_v - 1}} \pi_{\phi_2} , \quad (4.45)$$

e o campo  $h$  é canônico e quantizado com métrica positiva, pois satisfaz

$$[h(t, x^1), \pi_h(t, y^1)] = i \delta(x^1 - y^1) \quad , \quad [h^{(+)}(x), h^{(-)}(y)] = \Delta^{(+)}(x - y; \tau^2) . \quad (4.46)$$

Mostramos facilmente que  $[J_F^{\nu(+)}(x), h(y)] = 0$ , o que implica que  $h$  é um operador físico.

Vemos, então, que há somente dois graus de liberdade físicos associados com os campos  $\phi_1$  e  $h$  (pois o campo  $\eta_1$ , no limite de  $\Lambda \rightarrow +\infty$ , desaparece do espaço de estados físicos). A Hamiltoniana restrita ao subespaço físico é

$$\mathbf{H}_{phys} = \int dx^1 : \frac{1}{2} \pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \pi_h^2 + \frac{1}{2} (\partial_x h)^2 : . \quad (4.47)$$

Observamos que, no subespaço físico, o campo que depende do calibre  $\eta_2$  (ou equivalentemente  $\rho$ ) desaparece. O espaço físico é definido, então, pelos campos  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\chi'$  que são singletos de calibre, sendo composto totalmente por estados invariantes de calibre.

O espaço de estados é gerado a partir do vácuo definido pelos operadores  $\phi_1$  e  $h$ , com as condições

$$\phi_1^{(+)} | 0 \rangle = 0 \quad , \quad h^{(+)} | 0 \rangle = 0 . \quad (4.48)$$

O espaço de Hilbert físico será, então,

$$\mathcal{H}_{phys}^{a>1} = \mathcal{H}(\phi_1) \otimes \mathcal{H}(h) \quad (4.49)$$

A corrente eletromagnética,  $J^\mu =: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi :$ , restrita ao espaço físico é

$$J_{phys}^\mu = \sqrt{\frac{a_v + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\mu \phi_1 . \quad (4.50)$$

Como é esperado, a corrente eletromagnética é conservada. Confirmamos, assim, a ausência de anomalia (mesmo aparente) ao efetuarmos a quantização da teoria de modo não invariante de calibre.

A corrente axial  $J_5^\mu =: \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi :$ , restrita ao espaço físico é

$$J_{5phys}^\mu = \sqrt{\frac{a_v + 1}{2\pi}} \partial^\mu \phi_1 . \quad (4.51)$$

A corrente axial não é conservada, portanto a sua divergência proporciona a anomalia quiral,

$$\partial_\mu J_{5phys}^\mu = \frac{e(a_v + 1)}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \quad (4.52)$$

Podemos observar que, quando  $a_v = 1$ , obtemos o resultado conhecido na literatura para a anomalia quiral do modelo de Schwinger invariante de calibre.

De (4.63) definimos os férmions renormalizados  $\psi_\alpha^r$ ,

$$\psi_{R(L)} = \sqrt{Z_\psi^v} \psi_{R(L)}^r, \quad (4.65)$$

onde  $Z_\psi^v$  é a constante de renormalização de função de onda fermiônica dada por (2.30), tal como no caso  $a_v > 1$ .

Pode ser mostrado facilmente que as funções de Green são as mesmas que as encontradas no caso  $a > 1$ , isto é, as funções de Green calculadas em (4.32), (4.35), e (4.34). As constantes de renormalização de função de onda fermiônica e a constante de renormalização do vertice são iguais,  $Z_e^v = Z_\psi^v$  e também  $Z_A^v = 1$ . Tudo de acordo com os resultados encontrados nos capítulos 1 e 2 usando o método de integração funcional.

#### 4.1.2.2 Os operadores físicos

Como já sabemos, o espaço de estados completo é de métrica indefinida. Porém, existe um vínculo quântico que restringe o espaço total a um subespaço físico no qual as equações de movimento (4.22) e (4.3) são satisfeitas. Este vínculo é dado pela equação (4.61). Novamente, definimos um operador físico  $\hat{O}(y)$  como aquele que satisfaz a relação de comutação

$$[J_F^{\nu(+)}(x), \hat{O}(y)] = 0 \quad \forall x, y, \quad \nu = 0, 1. \quad (4.66)$$

Pode-se mostrar facilmente que alguns dos operadores que satisfazem a condição (4.66) são o campo massivo  $\phi_1$ , o tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$ , os campos  $\chi_R$  e  $\chi_L$  e, portanto, os campos fermiônicos  $\psi_R$  e  $\psi_L$ . O campo de calibre  $A_\mu$  também é um operador físico mas ele não representa graus de liberdade independentes devido a (4.5). As correntes eletromagnética :  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  : e a corrente axial :  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$  : também são operadores físicos no modelo.

Podemos calcular o Hamiltoniano no subespaço físico gerado pelo vínculo (4.61). A Hamiltoniana completa é obtida desde a Lagrangeana bosonizada (4.53),

$$\begin{aligned} H' = \int dx^1 : & \frac{1}{2}\pi_{\chi'}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \chi')^2 + \frac{1}{2}\pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2}m_v^2(\phi_1)^2 - \frac{1}{2}\pi_{\phi_2}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}\pi_{\xi_1}^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \xi_1)^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2(\xi_1)^2 + -\frac{1}{2}\pi_{\xi_2}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \xi_2)^2 : . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Usando, agora, o vínculo (4.61), temos o campo  $\xi_2$  e o seu momentum canônico  $\pi_{\xi_2}$ ,

expressos em termos dos respectivos  $\chi'$  e  $\phi_2$

$$\begin{aligned}\pi_{\xi_2} &= -\sqrt{\frac{2}{1-a_v}} \partial_x \chi' + \sqrt{\frac{1+a_v}{1-a_v}} \partial_x \phi_2, \\ \partial_x \xi_2 &= \sqrt{\frac{2}{1-a_v}} \pi_{\chi'} + \sqrt{\frac{1+a_v}{1-a_v}} \pi_{\phi_2}.\end{aligned}\quad (4.68)$$

Substituindo as equações (4.68) em (4.67), obtemos

$$\mathbf{H}'_{J_F} = \int dx^1 : \frac{1}{2} \pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 (\phi_1)^2 - \frac{1}{2} \pi_{h'}^2 - \frac{1}{2} (\partial_x h')^2 + \frac{1}{2} \pi_{\xi_1}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \xi_1)^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 (\xi_1)^2 : , \quad (4.69)$$

onde definimos o campo bosônico sem massa,  $h'$ ,

$$h' = \sqrt{\frac{1+a_v}{1-a_v}} \chi' - \sqrt{\frac{2}{1-a_v}} \phi_2, \quad (4.70)$$

$$\pi_{h'} = -\sqrt{\frac{1+a_v}{1-a_v}} \pi_{\chi'} - \sqrt{\frac{2}{1-a_v}} \pi_{\phi_2}. \quad (4.71)$$

O campo  $h'$  é canônico e quantizado com métrica negativa, pois satisfaz

$$[h'(t, x^1), \pi_{h'}(t, y^1)] = i \delta(x^1 - y^1) \quad , \quad [h'^{(+)}(x), h'^{(-)}(y)] = -\Delta^{(+)}(x - y; \tau^2). \quad (4.72)$$

Mostramos facilmente que  $[J_F^{\nu(+)}(x), h'(y)] = 0$ , o que implica que  $h'$  é um operador físico. Portanto, embora este campo apareça na Hamiltoniana (4.69) como um grau de liberdade, ele cria estados de norma negativa quando atua no vácuo. Eliminado o grau de liberdade  $\xi_1$ , o Hamiltoniano torna-se

$$\mathbf{H}'_{phys} = \int dx^1 : \frac{1}{2} \pi_{\phi_1}^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \phi_1)^2 + \frac{1}{2} m_v^2 \phi_1^2 - \frac{1}{2} \pi_{h'}^2 - \frac{1}{2} (\partial_x h')^2 : . \quad (4.73)$$

A Hamiltoniana não é positiva definida. Porém, isto não implica em que a teoria neste setor seja descartada. A introdução da métrica negativa leva à existência de operadores com singularidades infravermelhas, os quais são fundamentais na descrição do confinamento de férmions [44]. Como veremos no capítulo seguinte, mesmo que os valores esperados destes operadores entre estados físicos possuam divergências infravermelhas, existirão funções de correlação relevantes que serão livres delas (vide (5.21) ou (5.28)). Em [45] Carey e Wright abandonam a positividade da Hamiltoniana no espaço de Hilbert que fornece uma representação da álgebra completa dos campos, mantendo, no entanto, a positividade no

espaço onde os observáveis estão representados. Recentes estudos na quantização em espaços com métrica indefinida [46, 47] e a construção de representações não limitadas de  $*$ -álgebras num espaço de métrica indefinida (ou álgebras de operadores lineares ilimitados no espaço de Hilbert) tem sido investigados em conexão com teoria quântica de campos e álgebras envolventes de uma álgebra de Lie, em particular, as associadas com as relações de comutação de Heisenberg e as suas representações num espaço de Krein [48, 49]. A introdução de espaços de Krein [36], dentro de todas as possíveis estruturas de espaços de Hilbert, está intimamente relacionada a vários fenômenos importantes, em particular, à ocorrência de singularidades infravermelhas e à existência de vácuos  $\theta$ , um fenômeno que não é governado, em geral, pela propriedade de cluster, como no caso de métrica positiva. A investigação da teoria, dentro do ponto de vista dos espaços de Krein, poderia fornecer uma interpretação física para o MSA neste setor. Este estudo está sendo feito atualmente.

# Capítulo 5

## Densidades quirais no modelo de Schwinger anômalo

O estudo da preservação ou não da propriedade de cluster mostrou-se fundamental para as previsões sobre confinamento no modelo de Schwinger quantizado de modo invariante de calibre [9]. Neste contexto, funções de correlação envolvendo operadores compostos específicos (chamados de *condensados*) desempenham um papel importante, dada a relação entre os condensados e os estados físicos observados numa situação de confinamento. Neste capítulo, vamos analisar a propriedade de cluster através dos condensados, procurando, ao final, realizar previsões sobre possíveis observáveis “físicos” da teoria. Este estudo será conduzido dentro do contexto operatorial desenvolvido no capítulo 4.

### 5.1 Densidades quirais

Uma classe importante de condensados é dada por  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ . Expressos em função das componentes direita e esquerda de  $\psi$  (note-se que o campo fermiônico, a ser usado na construção dos condensados, é o não renormalizado, pois, como um tipo de operador composto, ele poderia ter a sua própria constante de renormalização) são,

$$s(x) = : \bar{\psi}(x)\psi(x) : = : \psi_L^*(x)\psi_R(x) : + : \psi_R^*(x)\psi_L(x) : , \quad (5.1)$$

$$s_5(x) = : \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) : = : \psi_L^*(x)\psi_R(x) : - : \psi_R^*(x)\psi_L(x) : . \quad (5.2)$$

Agora, definimos as *densidades quirais* como

$$\rho_{\pm} = : \bar{\psi}(x) P_{\pm} \psi(x) : , \quad (5.3)$$

onde  $P_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ . Ou, em termos das componentes direita e esquerda de  $\psi$ ,

$$\rho_+(x) = : \psi_L^*(x) \psi_R(x) : , \quad \rho_-(x) = : \psi_R^*(x) \psi_L(x) : , \quad (5.4)$$

e podemos ver que elas satisfazem a relação  $\rho_+^{\dagger} = \rho_-$ . As densidades quirais podem ser escritas usando a forma bosonizada dos férmions (4.28) ou (4.63), ou seja, em termos dos campos bosônicos livres, e são expressas como,

$$\rho_{\pm}(x) = \left( \frac{\tilde{\tau}}{2\pi} \right) \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{m}_v} \right)^{-2/(a_v+1)} : \exp \left( \pm i 2 \sqrt{\frac{2\pi}{a_v+1}} (\phi_1 - \phi_2) \pm i 2\sqrt{\pi} \chi' \right) : . \quad (5.5)$$

Calculamos o valor esperado no vácuo  $\langle 0 | \rho_{\pm}(x) | 0 \rangle$ , que depende dos valores de  $a_v$ ,

$$\langle 0 | \rho_{\pm}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \tilde{m}_v^{2/(a_v+1)} \tilde{\tau}^{(a_v-1)/(a_v+1)} \quad (5.6)$$

Lembrando que a massa  $\tau \rightarrow 0$  é um regulador infravermelho, temos,

$$\langle 0 | \rho_{\pm}(x) | 0 \rangle = +\infty , \quad \text{se } -1 \leq a_v < 1, \quad (5.7)$$

$$\langle 0 | \rho_{\pm}(x) | 0 \rangle = \frac{e^{\gamma_E}}{4\pi} \frac{e}{\sqrt{\pi}} , \quad \text{se } a_v = 1, \quad (5.8)$$

$$\langle 0 | \rho_{\pm}(x) | 0 \rangle = 0 , \quad \text{se } a_v > 1. \quad (5.9)$$

Desde (5.8), podemos ver que, para  $a_v = 1$ , o valor esperado é finito. Isto indica a possibilidade de violação da propriedade de *cluster* (o que iremos confirmar mais adiante). O oposto é esperado para o caso  $a_v > 1$ .

No caso em que os valores do parâmetro  $a_v$  estão no intervalo  $[-1, 1)$ , o valor esperado das densidades quirais é infinito, devido à presença da divergência infravermelha gerada pelo regulador  $\tau^2 \rightarrow 0$ . O mesmo acontece com o valor esperado no vácuo do campo fermiônico. Neste intervalo, as funções de correlação das densidades quirais e dos campos fermiônicos também sofrem do mesmo problema. Este fenômeno já apareceu antes, no capítulo 2 (escravidão infravermelha [53, 54, 39]).

Podemos mostrar também que as densidades quirais  $\rho_{\pm}$  satisfazem a condição

$$[J_F^{\nu(+)}(x), \rho_{\pm}(y)] = 0 , \quad (5.10)$$

a qual as define como operadores físicos.

Também computamos os comutadores das densidades quirais,

$$\rho_{\pm}(x)\rho_{\pm}(y) = \rho_{\pm}(y)\rho_{\pm}(x) \exp \left[ -\frac{8\pi}{a_v + 1} \Delta(x - y; m_v^2) - \frac{4\pi(a_v - 1)}{a_v + 1} \Delta(x - y; \tau^2) \right] \quad (5.11)$$

$$\rho_{\pm}(x)\rho_{\mp}(y) = \rho_{\mp}(y)\rho_{\pm}(x) \exp \left[ \frac{8\pi}{a_v + 1} \Delta(x - y; m_v^2) + \frac{4\pi(a_v - 1)}{a_v + 1} \Delta(x - y; \tau^2) \right]. \quad (5.12)$$

onde a função  $\Delta(x - y; m_v^2)$  é dada em (C.11). As densidades quirais comutam para separações do tipo espaço,  $(x - y)^2 < 0$ ;  $\tau^2 \rightarrow 0$  é um regulador infravermelho.

## 5.1.1 Funções de correlação das densidades quirais

### 5.1.1.1 $\langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle$

A função de correlação de  $n$ -pontos das densidades quirais iguais é calculada abaixo,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle &= \left( \frac{\tilde{m}_v}{2\pi} \right)^n \left( \frac{\tilde{\tau}^2}{\tilde{m}_v^2} \right)^{n^2(a_v - 1)/2(a_v + 1)} \\ &\exp \left[ -\frac{8\pi}{a_v + 1} \sum_{i < j} \Delta^{(+)}(x_i - x_j; m_v^2) + \frac{a_v - 1}{a_v + 1} \sum_{i < j} \ln \left[ -\tilde{m}_v^2(x_i - x_j)^2 + i\epsilon(x_i^0 - x_j^0) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Desde (5.13), vemos que, para  $a_v > 1$ ,  $\langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle_{a_v > 1} = 0$ . Isto implica em que as densidades quirais iguais comportam-se como objetos livres, sem interação, ou seja, objetos totalmente independentes uns dos outros, preservando individualmente o seu valor esperado no vácuo, tal como visto em (5.9).

Testamos a propriedade de cluster na função de correlação (5.13), antes de fazer  $\tau \rightarrow 0$ ; tomamos os primeiros  $k$  elementos e fazemos a mudança  $x_i \rightarrow x_i + \lambda\eta$ , para  $i = 1, \dots, k$ , com  $\eta^2 = -1$  e  $\lambda \rightarrow \infty$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle 0 | \rho_{\pm}(x_1 + \lambda\eta) \dots \rho_{\pm}(x_k + \lambda\eta) \rho_{\pm}(x_{k+1}) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle &= \\ \left[ \tilde{\tau}^2 \lambda^2 \right]^{k(n-k)(a_v - 1)/(a_v + 1)} \langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \dots \rho_{\pm}(x_k) | 0 \rangle \langle 0 | \rho_{\pm}(x_{k+1}) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A propriedade de *cluster* é, então, preservada trivialmente para funções de correlação deste tipo, neste setor.

Para  $a_v = 1$  a função de correlação (5.13) reduz-se a,

$$\langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_n) | 0 \rangle_{a_v = 1} = \left( \frac{\tilde{m}_v}{2\pi} \right)^n \exp \left[ -4\pi \sum_{i < j} \Delta^{(+)}(x_i - x_j; m_v^2) \right] \quad (5.15)$$

A função de correlação (5.15) não preserva a propriedade de cluster, o que está de acordo com a literatura. Este fato indica que o vácuo pode ter degenerescências [55]. Para remediar isto, Lowenstein e Swieca [9] descobriram a existência do vácuo- $\theta$  no modelo. A introdução do vácuo- $\theta$  recupera a propriedade de cluster das funções de correlação (ver também, [56, 50, 51]).

Quando  $-1 \leq a_v < 1$  estas funções de correlação sofrem de divergências infravermelhas devido ao expoente negativo do regulador  $\tau$ . As funções de correlação para densidades quirais iguais não são bem definidas. Porém, como veremos a seguir, as funções de correlação para densidades quirais mistas são bem definidas pois não têm dependência alguma no regulador, sendo finitas no limite  $\tau \rightarrow 0$ .

$$5.1.1.2 \quad \langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_m) \rho_{\mp}(y_1) \rho_{\mp}(y_2) \dots \rho_{\mp}(y_n) | 0 \rangle$$

Para  $m$  e  $n$  genéricos, o cálculo das funções de correlação fornece um fator multiplicativo do tipo,

$$\left( \frac{\tau}{m} \right)^{|n-m|(a_v-1)/(a_v+1)} \quad (5.16)$$

onde  $n$  e  $m$  representam o número de condensados do tipo  $+$  e  $-$ , respectivamente. Então, para  $a_v > 1$ , as funções se anulam, enquanto para  $-1 \leq a_v < 1$  elas são divergentes no infravermelho. Para  $a_v = 1$ , os resultados são bem conhecidos na literatura e livres de divergências infravermelhas [27]. As funções mistas, com igual número de  $\rho_+$  e  $\rho_-$ , são (para qualquer valor de  $a_v$ ),

$$\begin{aligned} \langle 0 | \rho_{\pm}(x_1) \rho_{\pm}(x_2) \dots \rho_{\pm}(x_n) \rho_{\mp}(y_1) \rho_{\mp}(y_2) \dots \rho_{\mp}(y_n) | 0 \rangle &= \left( \frac{\tilde{m}_v}{2\pi} \right)^{2n} \quad (5.17) \\ &\exp \left[ -\frac{8\pi}{a_v+1} \sum_{i<j} \Delta^{(+)}(x_i - x_j; m_v^2) + \frac{a_v-1}{a_v+1} \sum_{i<j} \ln \left[ -\tilde{m}_v^2(x_i - x_j)^2 + i\epsilon(x_i^0 - x_j^0) \right] \right] \\ &\exp \left[ -\frac{8\pi}{a_v+1} \sum_{i<j} \Delta^{(+)}(y_i - y_j; m_v^2) + \frac{a_v-1}{a_v+1} \sum_{i<j} \ln \left[ -\tilde{m}_v^2(y_i - y_j)^2 + i\epsilon(y_i^0 - y_j^0) \right] \right] \\ &\exp \left[ \frac{8\pi}{a_v+1} \sum_{i,j=1}^n \Delta^{(+)}(x_i - y_j; m_v^2) - \frac{a_v-1}{a_v+1} \sum_{i,j=1}^n \ln \left[ -\tilde{m}_v^2(x_i - y_j)^2 + i\epsilon(x_i^0 - y_j^0) \right] \right] \end{aligned}$$

Estas funções de correlação são bem definidas para todo valor do parâmetro  $a_v \geq -1$ . O regulador infravermelho  $\tau$  desaparece durante o processo de cálculo da função de correlação mista.

É fácil verificar que a propriedade de *cluster* é satisfeita para  $a_v > 1$  e quebrada para  $-1 \leq a_v \leq 1$ .

## 5.2 Uma descrição “física” do modelo de Schwinger anômalo

### 5.2.1 A reação $e^+e^- \rightarrow hadrons$

Estamos interessados nas funções de correlação do operador composto definido como  $s(x)$  dado em (5.1), o qual mistura as componentes direita e esquerda do férmion. Consideramos o processo bidimensional analogo de  $e^+e^- \rightarrow hadrons$ , no qual um “fóton escalar” externo acopla-se fracamente dentro desta teoria via o operador  $s(x)$ . Lembramos que  $s(x)$  gera um estado inicial de um quark e um antiquark separados em bifurcações opostas do cone de luz [55]. O operador  $s(x)$  é dado pela expressão

$$s(x) = \rho_+(x) + \rho_-(x) . \quad (5.18)$$

O valor esperado no vácuo deste operador,  $\langle 0 | s(x) | 0 \rangle$ , dependerá do intervalo de valores que tome o parâmetro  $a_v$  tal como se vê nas equações (5.7)-(5.9).

Os elementos de matriz relevantes serão,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, y) &= \langle 0 | T s(x) s(y) | 0 \rangle \\ &= \left\langle 0 \left| T \left[ \rho_+(x) \rho_+(y) + \rho_+(x) \rho_-(y) + \rho_-(x) \rho_+(y) + \rho_-(x) \rho_-(y) \right] \right| 0 \right\rangle . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Computamos cada termo da equação (5.19). Os termos  $\langle \pm\pm \rangle$  são dados por

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \rho_{\pm}(x) \rho_{\pm}(y) | 0 \rangle &= \left( \frac{\tilde{m}}{2\pi} \right)^2 \left( \frac{\tilde{\tau}^2}{\tilde{m}_v} \right)^{2(a_v-1)/(a_v+1)} \left[ -\tilde{m}_v^2 (x-y)^2 \right]^{(a_v-1)/(a_v+1)} \\ &\quad \exp \left[ -\frac{8\pi i}{a_v+1} \Delta_F(x-y; m_v^2) \right] . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Desta equação podemos ver que, no intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ , as funções de correlação do tipo  $\langle \pm\pm \rangle$  são divergentes no infravermelho. Já no caso  $a_v = 1$  as funções são finitas no infravermelho e são as mesmas que aquelas encontradas na literatura tratando o modelo de Schwinger invariante de calibre [27]. No intervalo  $a_v > 1$ , as funções de correlação

$\langle \pm\pm \rangle$  são zero. Seguimos agora com os termos  $\langle \pm\mp \rangle$ , que são expressos por

$$\langle 0 | T \rho_{\pm}(x) \rho_{\mp}(y) | 0 \rangle = \frac{[-\tilde{m}_v^2(x-y)^2]^{2/(a_v+1)}}{(2\pi)^2(x-y)^2} \exp \left[ \frac{8\pi i}{a_v+1} \Delta_F(x-y; m_v^2) \right]. \quad (5.21)$$

Eles são bem definidos, para todo valor de  $a_v \geq -1$ . O valor desta função de correlação em  $a_v = 1$  é o mesmo que o encontrado no modelo de Schwinger invariante de calibre (observamos a quebra da propriedade de cluster). O comportamento em curtas distâncias e no cone de luz de  $\langle 0 | T \rho_{\pm}(x) \rho_{\mp}(y) | 0 \rangle$  é idêntico ao de uma teoria de férmions livres, tal como acontece no modelo de Schwinger invariante de calibre [57, 55]. No intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ , ela quebra a propriedade de cluster.

Vamos estudar a estrutura dos pólos desta função, visando identificar possíveis estados assintóticos. Os únicos pólos possíveis, por inspeção direta, só podem ocorrer em  $p^2 = 0$ . Observando o comportamento da função (5.21) no limite  $|x-y| \rightarrow \infty$ , obtemos,

$$\langle 0 | T \rho_{\pm}(x) \rho_{\mp}(y) | 0 \rangle \approx \left( \frac{\tilde{m}_v}{2\pi} \right)^2 [-\tilde{m}_v^2(x-y)^2]^{(1-a_v)/(a_v+1)}. \quad (5.22)$$

No espaço de momenta,

$$\langle 0 | T \rho_{\pm}(p) \rho_{\mp}(-p) | 0 \rangle \approx \left( \frac{\tilde{m}_v^2}{p^2} \right)^{2/(a_v+1)}. \quad (5.23)$$

Se tomarmos o resíduo do propagador acima, em  $p^2 = 0$ , teremos zero (para  $a_v > 1$ ). Não há um pólo simples em  $p^2 = 0$ . Isto indica que não existem estados assintóticos de condensados criados pelas densidades quirais. Como as densidades quirais são portadoras de quiralidade isto implica em não vermos condensados fermiônicos. Porém poderiam existir outros estados assintóticos de partículas compostas.

Por outro lado, no intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ , o propagador das densidades quirais mistas apresenta divergências infravermelhas, o que indicaria que não existem estados assintóticos de nenhum tipo. Ocorreria, assim, o confinamento das densidades quirais.

Temos, então, que a função de correlação (5.19) é definida somente em  $a_v \geq 1$ , ou seja, os férmions existem como observáveis físicos e os seus condensados apresentam liberdade assintótica.

### 5.2.2 O propagador corrente-corrente EM

Um outro operador composto de interesse é a corrente electromagnética,  $J^\mu =: \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  :, que, em sua versão bosonizada é, quando  $a_\nu > 1$ ,

$$J^\nu = \sqrt{\frac{a_\nu + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\nu \phi_1 + J_{F^{<1,+\infty>}}^\nu - \sqrt{\frac{a_\nu - 1}{2\pi}} \partial^\nu \eta_1, \quad (5.24)$$

onde  $J_{F^{<1,+\infty>}}^\nu$  definida em (4.18) e, no caso  $-1 \leq a_\nu < 1$ ,

$$J^\nu = \sqrt{\frac{a_\nu + 1}{2\pi}} \tilde{\partial}^\nu \phi_1 + J_{F^{[-1,1>}}^\nu + \sqrt{\frac{1 - a_\nu}{2\pi}} \partial^\nu \xi_1. \quad (5.25)$$

onde  $J_{F^{[-1,1>}}^\nu$  dada em (4.59).

Podemos facilmente mostrar  $\forall a > -1$  que

$$\left[ J^\mu(x), J^\nu(y) \right] = -\frac{a_\nu + 1}{2\pi} \tilde{\partial}_x^\mu \tilde{\partial}_x^\nu \Delta(x - y; m_\nu^2) = \frac{a_\nu + 1}{2\pi} \left( g^{\mu\nu} \square_x - \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right) \Delta(x - y; m_\nu^2) \quad (5.26)$$

onde as contribuições vindas dos campo  $\eta_1$  e  $\xi_1$  são canceladas pois eles tem uma grande massa.  $\Delta(x - y; m_\nu^2)$  é a função dada em (C.11), e usamos a identidade 2-dimensional,  $\partial^\mu \partial^\nu - \tilde{\partial}^\mu \tilde{\partial}^\nu = g^{\mu\nu} \square$ .

Estamos interessados nas funções de correlação de duas correntes,

$$\langle 0 | T J^\mu(x) J^\nu(y) | 0 \rangle = -\frac{i(a_\nu + 1)}{2\pi} \tilde{\partial}_x^\mu \tilde{\partial}_x^\nu \Delta_F(x - y; m_\nu^2). \quad (5.27)$$

Reescrevemos a função de correlação das correntes acima num modo mais conveniente

$$\langle 0 | T J^\mu(x) J^\nu(y) | 0 \rangle = \frac{i(a_\nu + 1)}{2\pi} \left( g^{\mu\nu} \square_x - \partial_x^\mu \partial_x^\nu \right) \Delta_F(x - y; m_\nu^2). \quad (5.28)$$

Podemos ver que o comportamento em curtas distâncias e no cone de luz do propagador das correntes é o mesmo que numa teoria de férmions livres. Este resultado é confirmado pelo uso do método de integração funcional, como veremos no seguinte parágrafo.

Definimos o gerador funcional  $Z_{J_\mu}[B_\mu]$

$$Z_{J_\mu}[B_\mu] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left( i \int dx \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + B_\mu J^\mu \right) \quad (5.29)$$

onde  $\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A]$  é a Lagrangeana dada em (1.1). Como sabemos, a integração fermiônica fornece o determinante fermiônico, o qual é computado numa prescrição que não preserva a invariância de calibre local no nível quântico [21]. Temos assim,

$$\det i[\not{\partial} + e\mathcal{A}] = \exp \left[ \frac{i}{2} \int dx \mathcal{A}_\mu \left( m_\nu^2 g^{\mu\nu} - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \mathcal{A}_\nu \right] \quad (5.30)$$

onde  $\mathcal{A}_\mu = A_\mu + B_\mu/e$ . A integração no campo  $A_\mu$  é facilmente efetuada posto que ela envolve somente termos quadráticos no campo de calibre; feito isto, obtemos o gerador funcional para as funções de correlação de correntes,

$$Z_{J_\mu}[B_\mu] = \exp \left[ \frac{i(a_\nu + 1)}{4\pi} \int dx B_\mu(x) \frac{g^{\mu\nu} \square_x - \partial_x^\mu \partial_x^\nu}{\square_x + m_\nu^2} B_\nu(x) \right] \quad (5.31)$$

Então, obtemos  $\langle 0 | J^\mu(x) | 0 \rangle = 0$ , em acordo com o método operatorial, quando calculamos o valor esperado da corrente no vácuo. O propagador das correntes,  $\langle 0 | T J^\mu(x) J^\nu(y) | 0 \rangle$  dado em (5.28), é facilmente calculado, tomando duas derivadas funcionais sobre  $Z_{J_\mu}$  com respeito às fontes  $B_\mu$ .

A observação importante a fazer aqui, é que a função de correlação (5.28) é invariante de calibre local, mesmo que ela dependa explicitamente de  $a_\nu$ .

## 5.3 Densidades quirais no espaço de Hilbert físico

Nesta seção, estudamos a estrutura do vácuo que gera o espaço de Hilbert nos setores  $a_\nu > 1$ . O setor  $-1 \leq a_\nu < 1$  não será estudado aqui. Faremos também um resumo das características do vácuo para  $a_\nu = 1$ .

### 5.3.1 Análise no espaço de Hilbert físico para $a_\nu > 1$

As densidades quirais, neste setor, expressas em função dos graus de liberdade físicos  $\phi_1$  e  $h$  são

$$\rho_\epsilon = \left( \frac{\tilde{m}_\nu}{2\pi} \right) \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{m}_\nu} \right)^{(a_\nu - 1)/(a_\nu + 1)} : \exp \left[ \epsilon 2i \sqrt{\frac{2\pi}{a_\nu + 1}} \phi_1 + \epsilon 2i \sqrt{\frac{(a_\nu - 1)\pi}{a_\nu + 1}} h \right] : , \quad (5.32)$$

onde  $\epsilon = \pm$ . Definimos os operadores

$$\sigma_\epsilon = : \exp \left[ \epsilon i \sqrt{\frac{(a_\nu - 1)\pi}{a_\nu + 1}} h + i \sqrt{\frac{(a_\nu - 1)\pi}{a_\nu + 1}} \tilde{h} \right] : . \quad (5.33)$$

Eles pertencem à classe de operadores observáveis, posto que

$$\left[ J_F^{\nu(+)}(x), \sigma_\epsilon(y) \right] = 0 . \quad (5.34)$$

As densidades quirais em termos de (5.33), são expressas como

$$\rho_+ = \left( \frac{\tilde{m}_\nu}{2\pi} \right) \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{m}_\nu} \right)^{(a_\nu - 1)/(a_\nu + 1)} : \exp \left[ 2i \sqrt{\frac{2\pi}{a_\nu + 1}} \phi_1 \right] : \sigma_-^\dagger \sigma_+ , \quad (5.35)$$

$$\rho_- = \left( \frac{\tilde{m}_v}{2\pi} \right) \left( \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{m}_v} \right)^{(a_v-1)/(a_v+1)} : \exp \left[ -2i \sqrt{\frac{2\pi}{a_v+1}} \phi_1 \right] : \sigma_+^\dagger \sigma_- . \quad (5.36)$$

O comutador de dois operadores  $\sigma_\epsilon$  é

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(x)\sigma_\beta(y) &= \sigma_\beta(y)\sigma_\alpha(x) \exp \left[ -\frac{\pi(a_v-1)}{a_v+1} (1+\alpha\beta)\Delta(x-y; \tau^2) \right] \\ &\exp \left[ -\frac{\pi(a_v-1)}{a_v+1} (\alpha+\beta) \left[ \tilde{\Delta}^{(+)}(x-y; \tau^2) - \tilde{\Delta}^{(+)}(y-x; \tau^2) \right] \right] . \end{aligned} \quad (5.37)$$

Logo, se  $\alpha \neq \beta$  comutam, caso contrário não. Para o valor limite  $a_v \rightarrow 1$  eles comutam para quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$ .

A Hamiltoniana física (4.47) não comuta com os operadores  $\sigma_\epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{H}_{phys}, \sigma_\epsilon(y) \right] &= \sqrt{\frac{\pi(a_v-1)}{a_v+1}} \sigma_\epsilon(y) \left[ \epsilon \pi_h^{(+)}(y) - \partial^1 h^{(+)}(y) \right] + \\ &+ \sqrt{\frac{\pi(a_v-1)}{a_v+1}} \left[ \epsilon \pi_h^{(-)}(y) - \partial^1 h^{(-)}(y) \right] \sigma_\epsilon(y) . \end{aligned} \quad (5.38)$$

(isto somente acontecerá para o caso limite  $a_v \rightarrow 1^+$ ).

As funções de correlação das densidades quirais neste intervalo de valores de  $a$  preservam a propriedade de cluster, como visto nas subseções 5.1.1.1 e 5.1.1.2. Isto leva a concluir que o vácuo neste setor é único e definido pelas condições dadas em (4.48). O que acontece aqui é similar ao que ocorre no modelo de Schwinger quiral.

### 5.3.2 Análise no espaço de Hilbert físico para $a_v = 1$

Neste caso, o valor esperado no vácuo das densidades quirais é diferente de zero [9, 50, 51]. Também, como vimos na equação (5.21), o propagador de duas densidades quirais mistas quebra a propriedade de cluster [56]. Os operadores  $\sigma_\alpha$  são operadores constantes no espaço de estados físico. A Hamiltoniana é igual à de um campo escalar livre de massa  $e^2/\pi$ . Assim temos

$$\left[ \mathbf{H}_{phys}, \sigma_\epsilon(y) \right] = 0 . \quad (5.39)$$

Isto leva à seguinte relação

$$\mathbf{H}_{phys} \sigma_\alpha^n |0\rangle = 0 . \quad (5.40)$$

A relação acima implica que existem infinitos estados de energia zero mutuamente ortogonais. Estes estados fundamentais são gerados pela aplicação repetida de  $\sigma_\alpha$  no vácuo do espaço de Fock,

$$|n_+n_-\rangle = \sigma_+^{n_+} \sigma_-^{n_-} |0\rangle \quad , \quad \langle m_+m_- | n_+n_- \rangle = \delta_{m_+n_+} \delta_{m_-n_-} . \quad (5.41)$$

Como  $\sigma_\alpha$  comuta com todos os observáveis para todos os pontos do espaço-tempo, podemos definir um novo conjunto irredutível de estados fundamentais, em relação ao qual os  $\sigma_\alpha$  são diagonais,

$$|\theta_+\theta_-\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{n_+n_-} e^{in_+\theta_+ + in_-\theta_-} |n_+n_-\rangle . \quad (5.42)$$

Esta decomposição indica a quebra da simetria quirais [9, 50, 51]. No entanto, a introdução dos vácuos  $\theta$  recupera a propriedade de cluster [56]. Em cada um dos setores irreduzíveis os operadores  $\sigma_\alpha$  são constantes (números complexos em geral). Nesta base irreduzível a Hamiltoniana e as densidades quirais são diagonais.

# Conclusões e Perspectivas

Nesta tese, estudamos as propriedades de teorias anômalas *renormalizadas*. Nosso estudo inclui o modelo de Schwinger anômalo (MSA), onde a anomalia não é autêntica (do ponto de vista de uma análise BRST) e o modelo de Schwinger quiral (MSQ), onde ela é. Uma observação geral interessante é a de que, mesmo sendo as propriedades quânticas das teorias renormalizadas completamente distintas, o método que propicia a renormalização de ambas é o mesmo. Nos dois casos, a renormalização pode ser feita exatamente, a partir de uma expansão envolvendo o propagador fotônico completo. As teorias possuem regiões (parametrizadas por diferentes valores de  $a$ ) onde o seu espaço de estados se define de maneira mais simples ou menos simples, mas isto é *posterior* à sua renormalização. Em particular, podemos afirmar que, para o MSA, a região  $a_v > 1$  é completamente bem definida, no que diz respeito ao comportamento dos observáveis e estados físicos da teoria em relação a transformações de calibre, de maneira bastante análoga (no que se refere aos processos físicos) ao que já se sabe que ocorre no MSQ. Mesmo tendo sido perdida a simetria de calibre em passos intermediários, ela é resgatada no final. O único argumento que resta para que se escolha  $a_v = 1$  é o da simplicidade dos cálculos, que tem contra si o fato de singularizar um valor específico para  $a_v$  sem nenhuma motivação física bem definida. A manutenção da invariância de calibre em passos *intermediários* também não se sustenta. O que fazer, então, com o MSQ, onde isto não pode ser obtido? Será que a teoria quiral é menos física que a vetorial por isto? Definitivamente, não.

O ponto de partida de todo o estudo, no capítulo 1, foi a regularização das divergências ultravioletas de ambos os modelos, que já sabíamos terem origem não perturbativa [23]. Isto foi revisto no capítulo 1, e estendido para o MSQ. A partir disto, propusemos um método consistente para renormalizar uma teoria com anomalia de calibre, ao menos em duas dimensões. A característica principal é que a teoria é renormalizável, no sentido

usual, se o propagador exato (ou completo) puder ser computado. Este poderia ser um bom ponto para começar e atacar a mesma pergunta em três ou quatro dimensões, se pudéssemos estimar ou ter conhecimento das principais características do propagador exato do fóton.

Um resultado curioso foi o de que, na versão regularizada da teoria, toda a dependência em  $a$  está completamente contida no parâmetro de “fixação de calibre”, dependente do *cut-off*. Se estivéssemos tratando com uma teoria de calibre “normal” (preservação da simetria de calibre em passos intermediários), isto poderia sugerir que a teoria completa (aquela onde o campo de calibre é também quantizado) seria independente do parâmetro  $a$ , o que nos permitiria manter ou não a invariância de calibre em qualquer um dos passos intermediários da quantização. Contudo, devemos ser cuidadosos nesta análise. Recordamos que não estamos fixando o calibre (não temos o direito de fazer isto, porque estamos lidando com uma teoria anômala), porém somente regularizando divergências de natureza não perturbativa.

Ainda no que se refere à renormalização dos modelos, chama atenção o fato de que, desde um ponto de vista semi-perturbativo, não podemos distinguir entre uma verdadeira anomalia de calibre e uma aparente. Isto somente pode ser esclarecido quando o campo de calibre é totalmente quantizado, coisa que, em geral, não é feita. Muitos trabalhos limitam-se a integrar nos campos fermiônicos e esquecem as fontes, manipulando somente a teoria bosonizada. Como mostramos, muitos aspectos interessantes da teoria são revelados somente quando a quantização é completa (por exemplo, a natureza não perturbativa das divergências ou a inexistência do nível de árvore usual, na expansão em *loops* das funções de correlação fermiônicas).

No capítulo 2, estabelecemos (até onde sabemos, pela primeira vez) a renormalização *exata*, não perturbativa, de uma teoria de calibre, novamente através dos exemplos do MSA e do MSQ. Este resultado permite que, pela primeira vez, possam ser analisadas, sem ambigüidade, as funções de correlação fermiônicas da teoria (e as funções de correlação de condensados). Obtemos, logo de saída, que o MSA não possui estados assintóticos de férmions para nenhum valor válido do parâmetro  $a_v$ . Isto contradiz frontalmente o que se afirma na literatura anterior à versão completamente renormalizada do MSA [20]. No entanto, há diferentes razões para a falta de férmions assintóticos. Para  $a_v > 1$ , isto

é devido ao fenômeno de blindagem da carga. Para  $-1 \leq a_v < 1$ , o fenômeno parece ser induzido pela existência de divergências infravermelhas específicas [41], do tipo confinante (escravidão infravermelha). No caso do MSQ, os resultados confirmam análises anteriores. Em todos os dois casos, contudo, temos agora o grau de rigor necessário para permitir as análises acima. E, pelo menos no caso do MSA, observamos que as conclusões podem mudar radicalmente após a renormalização exata da teoria. Podemos ver, dos exemplos considerados, que os fenômenos de confinamento, blindagem ou desconfinamento de férmions podem se apresentar simultaneamente numa mesma teoria de calibre, dependendo da maneira particular pela qual é feita a renormalização.

No capítulo 3, estudamos a interação entre duas cargas de prova estáticas, tanto pelo método usual quanto pelo cálculo do *loop* de Wilson, para ambos os modelos. No MSA, o cálculo do potencial estático entre duas cargas de prova confirma a existência da blindagem para todo o setor  $a_v > -1$ . Para  $a_v = -1$ , existe a possibilidade de confinamento, e tudo parece indicar que o mesmo acontece em todo o intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ , o que não ocorre no MSQ. A análise correta deste setor ainda está sendo feita e envolve crucialmente a definição correta do espaço de Hilbert, que suspeitamos ser altamente não trivial e compartilhar diversas características com o caso  $a_v = 1$ . No setor  $a > 1$ , a blindagem dos férmions acontece claramente, como no MSQ. Contudo, a possibilidade de termos férmions assintóticos é latente no MSQ (quando a massa do fóton é infinita, para  $a_c = 1$ ), enquanto ela não é praticável para o MSA. Os resultados acima são confirmados pela análise do *loop* de Wilson, embora este cálculo não possa dar informação adicional sobre o que acontece no intervalo  $-1 \leq a_v < 1$ .

No capítulo 4, utilizamos métodos operatoriais, para ter acesso à estrutura do espaço de Hilbert do MSA para as diversas faixas de valores de  $a_v$ . Entretanto, partimos da expressão bosonizada, que incorpora a regularização não perturbativa, obtida no capítulo 1. Verificamos, como bônus, a compatibilidade com a formulação funcional, mostrando claramente, por exemplo, a igualdade entre a constante de renormalização fermiônica e a constante de renormalização de vértice (que já tinha sido obtida anteriormente, como consequência das identidades de Ward fermiônicas).

A teoria bosonizada permite ver nitidamente o comportamento infravermelho (através do regulador  $\tau$ ) dos operadores de campo fermiônico que a definem: são finitos, no setor

$a_v > 1$ , e sofrem de singularidades no setor  $-1 \leq a_v < 1$ . A construção do espaço de estados físicos (com métrica positiva definida) é feita naturalmente, usando um vínculo do tipo Gupta-Bleuler no setor  $a_v > 1$ , o que define dois graus de liberdade físicos, um massivo e o outro sem massa.

Pelo contrário, no setor  $-1 \leq a_v < 1$ , o uso ingênuo do mesmo tipo de vínculos nos leva a uma teoria com dois graus de liberdade: um físico (massivo) e um *ghost* (sem massa), o que implica num espaço de estados com métrica indefinida. Porém, isto não é o suficiente para que descartemos a teoria ainda, pois existem observáveis físicos bem definidos. O estudo detalhado da definição de um espaço de Hilbert neste caso está sendo feito atualmente.

Finalmente, no capítulo 5, completamos nossa análise, observando o comportamento das funções de correlação dos condensados quirais e de outros observáveis do MSA. Verificamos que o propagador dos condensados quirais mistos não sugere estados assintóticos destes condensados. No setor  $a > 1$ , ele tem resíduo zero em  $p^2 = 0$ . Isto parece indicar uma espécie de blindagem da carga quiral. O fato da propriedade de *cluster* ser mantida neste setor, junto com a anulação do valor esperado no vácuo do condensado, indica a preservação da simetria de fase global (que, por sua vez, vem da simetria de calibre global, preservada no nível quântico), de modo similar ao que ocorre no MSQ. Por outro lado, para  $-1 \leq a_v < 1$ , o resíduo não é finito, devido ao mau comportamento infravermelho do propagador, sugerindo que o fenômeno de escravidão infravermelha aconteça com as densidades quirais (o que também é sugerido pela violação da propriedade de *cluster* para as funções de correlação dos condensados neste setor). As densidades quirais seriam confinadas, então, neste regime. Os únicos observáveis que apresentam estados assintóticos são a componente transversal do campo de calibre e a corrente eletromagnética. Ambos são invariantes de calibre, para todo valor de  $a_v$ . A corrente eletromagnética comporta-se como um campo vetorial massivo.

Uma característica inesperada das expressões que obtivemos neste capítulo é a sua analiticidade em  $a_v$ . Embora, em diversos estágios intermediários, as expressões revelem singularidades (às vezes em  $a = 1$ , em  $a = -1$ , ou em ambos os valores), as expressões finais para funções de correlação são livres de singularidades e coincidem com as calculadas nos valores “críticos” (isto foi verificado através de cálculos explícitos, que não incluímos

na tese).

Para conclusões completas, é necessário o estudo do espaço de Hilbert para o setor  $-1 \leq a_v < 1$ , como mencionamos acima. Existe a possibilidade de que, neste setor, exista confinamento e vácuos -  $\theta$ . O que já obtivemos, no entanto, permite estabelecer um amplo panorama da situação. Em particular, o MSA aparece como uma teoria riquíssima, onde o procedimento de renormalização parece ser crucial para definir o conteúdo físico da teoria. Uma hipótese ousada insinua-se neste ponto: a de que o grupo de renormalização possa relacionar os dois regimes da teoria ( $-1 \leq a_v < 1$  e  $a > 1$ ). Este estudo poderia ser conduzido a partir do estabelecimento de uma equação de Callan-Simanzik envolvendo  $a$ . Se conseguíssemos estabelecer uma relação como esta, poderíamos estar frente a um novo tipo de dualidade, que relacionaria fenômenos que acontecem em altas e baixas energias, por exemplo. Estas idéias serão investigadas no futuro, e os resultados relatados oportunamente.

# Apêndice A

## Convenções e identidades úteis

### A.1 $d = 1 + 1$

A métrica  $g_{\mu\nu}$  e o tensor de Levi-Civita  $\epsilon^{\mu\nu}$  são

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon^{\mu\alpha}\epsilon_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} \quad , \quad g_{\mu\alpha}\epsilon^{\alpha\nu} = \epsilon_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon^{\mu}_{\nu} = -g^{\mu\alpha}\epsilon_{\alpha\nu} \quad . \quad (\text{A.2})$$

As matrizes  $\gamma$  satisfazem

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \quad , \quad \gamma^{1\dagger} = -\gamma^1 \quad . \quad (\text{A.3})$$

Usaremos um conjunto específico de matrizes  $\gamma$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.4})$$

Também definimos a matriz  $\gamma_5$  tal que

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0 \quad , \quad \gamma_5 = \gamma^0\gamma^1 \quad , \quad \gamma_5^{\dagger} = \gamma_5 \quad . \quad (\text{A.5})$$

Os projetores  $P_+$  e  $P_-$  são

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad , \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad , \quad (\text{A.6})$$

O comutador das matrizes  $\gamma$  é (apenas em  $d = 2$ )

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\epsilon^{\mu\nu}\gamma_5, \quad (\text{A.7})$$

e, portanto,

$$\gamma^\mu \gamma_5 = -\epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (\text{A.8})$$

Definimos

$$\tilde{\partial}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu, \quad \tilde{k}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} k_\nu. \quad (\text{A.9})$$

Os traços úteis e produtos de matrizes  $\gamma$  são

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{tr } \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2n-1}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{A.11})$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta = 2g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + 2g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 = 2\epsilon^{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\not{x} \not{y} \not{z} = \not{z} \not{y} \not{x}. \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Algumas integrais úteis

$$\frac{i}{k^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\epsilon\alpha + i\alpha k^2}. \quad (\text{A.16})$$

Para  $n > 0$ , temos

$$\frac{n! i^{n+1}}{(k^2 + i\epsilon)^{n+1}} = \int_0^\infty d\alpha \alpha^n e^{-\epsilon\alpha + i\alpha k^2}, \quad (\text{A.17})$$

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-\epsilon x}}{x} (e^{ixp^2} - e^{ixq^2}) = \ln \left| \frac{q^2 + i\epsilon}{p^2 + i\epsilon} \right|. \quad (\text{A.18})$$

Para  $\text{Re}(s) > 0$ , temos

$$\int_0^\infty dt t \exp\left(-\frac{a}{t} - st\right) = \frac{2a}{s} K_0(2\sqrt{as}) + \frac{2\sqrt{a}}{s\sqrt{s}} K_1(2\sqrt{as}), \quad (\text{A.19})$$

$$\int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{a}{t} - st\right) = 2 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{s}} K_1(2\sqrt{as}), \quad (\text{A.20})$$

$$\int_0^\infty dt \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{a}{t} - st\right) = 2 K_0(2\sqrt{as}), \quad (\text{A.21})$$

onde  $K_0(x)$  e  $K_1(x)$  são funções modificadas de Bessel de segunda classe.

$$\int dk e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.22})$$

$$\int dk k_\mu e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^2} (-p_\mu) e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.23})$$

$$\int dk k_\mu k_\nu e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{2\alpha^2} \left[ ig_{\mu\nu} + \frac{2}{\alpha} p_\mu p_\nu \right] e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.24})$$

$$\int dk k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^2} \left[ i + \frac{1}{\alpha} p^2 \right] e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.25})$$

$$\int dk k_\mu k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[ -2i - \frac{1}{\alpha} p^2 \right] p_\mu e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.26})$$

$$\int dk k^4 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[ -2 + \frac{4i}{\alpha} p^2 + \frac{1}{\alpha^2} p^4 \right] e^{-ip^2/\alpha}, \quad (\text{A.27})$$

$$\int dk k_\mu k_\nu k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[ -g_{\mu\nu} \left( 1 - \frac{i}{2\alpha} p^2 \right) + p_\mu p_\nu \left( \frac{1}{\alpha^2} p^2 + \frac{3i}{\alpha} \right) \right] e^{-ip^2/\alpha}. \quad (\text{A.28})$$

### A.3 Relações úteis

$$\frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x), \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{d}{dx} K_1(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x} K_1(x). \quad (\text{A.30})$$

Uma representação da  $\delta$ -Dirac,

$$\delta(x) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{x + i\epsilon} + \frac{1}{-x + i\epsilon} \right), \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (\text{A.31})$$

A função de Heaviside,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon}. \quad (\text{A.32})$$

onde  $G_R(x, y; A)$  é a função de Green da equação de Dirac num campo externo  $A_\mu$ , ( $Z_\psi i \not{\partial} + eZ_e \not{A}_x$ )  $G_R(x, y; A) = \delta(x - y)$ , e é dada pela seguinte expressão:

$$G_R(x, y; A) = Z_\psi^{-1} \exp \left[ -i\bar{e} \int dz A_\mu(z) j_-^\mu(z, x, y) \right] P_- G_F(x - y) + \quad (B.6)$$

$$+ Z_\psi^{-1} \exp \left[ -i\bar{e} \int dz A_\mu(z) j_+^\mu(z, x, y) \right] P_+ G_F(x - y),$$

com a função  $j_\pm^\mu(z, x, y)$  dada pela equação (1.8). Por comodidade, definimos  $\bar{e} = eZ_e/Z_\psi$ .

Por outro lado o operador  $\Gamma_R^{\mu\nu}$ , é

$$\Gamma_R^{\mu\nu} = Z_A (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) + \frac{\bar{e}^2}{\pi} \left( \frac{a_\nu + 1}{2} g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) + \frac{\bar{e}^2 (a_\nu - 1)}{2\pi\Lambda^2} \partial^\mu \partial^\nu. \quad (B.7)$$

Pode-se mostrar explicitamente as seguintes relações entre funções de Green não renormalizadas<sup>1</sup> e renormalizadas. Para o propagador do fóton, temos

$$\tilde{G}_{\nu\mu\nu}^R(k) = Z_A^{-1} \tilde{G}_{\nu\mu\nu}^B(k). \quad (B.8)$$

No caso do propagador fermiônico,

$$\tilde{G}_\nu^R(k) = Z_\psi^{-1} \tilde{G}_\nu^B(k), \quad (B.9)$$

e para a função de 3-pontos temos

$$\tilde{G}_{\nu\mu}^R(p, q) = Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \tilde{G}_{\nu\mu}^B(p, q), \quad (B.10)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^R(p, q) = Z_\psi Z_A^{1/2} \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^B(p, q). \quad (B.11)$$

## B.2 Identidades de Ward

Partimos desde o gerador funcional da teoria renormalizada,

$$Z^R[\bar{\eta}, \eta, J^\mu] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \mathcal{L}_\nu^R[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J \cdot A \right]. \quad (B.12)$$

Fazendo uma mudança de variáveis fermiônica,

$$\psi = e^{i\lambda} \psi' \quad , \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-i\lambda} \quad , \quad d\psi d\bar{\psi} = J d\psi' d\bar{\psi}', \quad (B.13)$$

onde o Jacobiano  $J$  é

$$J = \frac{\det[i\not{\partial} + \bar{e}\not{A}]}{\det[i\not{\partial} + \bar{e}\not{A} - \not{\partial}\lambda]} = \exp \left[ -\frac{i(a_\nu - 1)}{2\pi} \int dx \frac{1}{2} \partial_\mu \lambda \partial^\mu \lambda + \bar{e}\lambda \partial \cdot A \right]. \quad (B.14)$$

<sup>1</sup>O subíndice  $B$  indicara as funções não renormalizadas

Agora, fazemos a transformação de calibre

$$A_\mu = A'_\mu + \frac{1}{\bar{e}} \partial_\mu \lambda . \quad (\text{B.15})$$

O funcional gerador toma a seguinte forma,

$$Z^R[\bar{\eta}, \eta, J^\mu] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[ i \int dx \left( \mathcal{L}_v^R[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] + \bar{\eta} e^{i\lambda} \psi + \bar{\psi} e^{-i\lambda} \eta + J \cdot A \right) \right] \quad (\text{B.16})$$

$$\exp \left[ i \int dx \left( -\frac{1}{\bar{e}} \lambda \partial J - \frac{\bar{e}(a_v - 1)}{2\pi} \lambda \partial A - \frac{\bar{e}(a_v - 1)}{2\pi\Lambda^2} \lambda \square \partial A - \frac{(a_v - 1)}{4\pi\Lambda^2} \lambda \square (\square + \Lambda^2) \lambda \right) \right] .$$

Se somente consideramos os termos de primeira ordem em  $\lambda \rightarrow 0$ , é fácil obter a identidade de Ward fundamental satisfeita pelo gerador funcional das funções IIP renormalizadas,  $\Gamma^R[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$ , a qual é

$$i \frac{\delta \Gamma^R}{\delta \psi} \psi - i \frac{\delta \Gamma^R}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi} + \frac{1}{\bar{e}} \partial^\mu \frac{\delta \Gamma^R}{\delta A^\mu} = \frac{\bar{e}}{2\pi} (a_v - 1) \left( 1 + \frac{\square}{\Lambda^2} \right) \partial^\mu A_\mu . \quad (\text{B.17})$$

Da mesma forma obtemos uma importante identidade de Ward, envolvendo a funções IIP renormalizadas de 2-pontos fermiônica e a de 3-pontos,

$$\tilde{q}^\mu \tilde{\Gamma}_\mu^R(p, q) = \bar{e} \left[ \tilde{\Gamma}^R(p + q) - \tilde{\Gamma}^R(p) \right] . \quad (\text{B.18})$$

# Apêndice C

## Bosonização de férmions livres em (1+1)-dimensões

### C.1 Campo bosônico massivo livre

O campo bosônico massivo livre em  $(1+1)-d$  é definido pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (\text{C.1})$$

O campo  $\varphi$  satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$(\square_x + m^2)\varphi(x) = 0. \quad (\text{C.2})$$

A solução da equação acima é

$$\varphi(x) = \int \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k^0}} [a(k)e^{-ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{-ik\cdot x}] = \varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x), \quad (\text{C.3})$$

onde  $k^0 = \sqrt{(k^1)^2 + m^2}$ . A notação  $-$  e  $+$  refere-se às partes de criação e aniquilação.

O momentum conjugado a  $\varphi(x)$  é  $\Pi(x) = \partial_0\varphi(x)$ . Então, a quantização canônica implica

$$[\varphi(x), \dot{\varphi}(y)] \Big|_{x^0=y^0} = i\delta(x^1 - y^1). \quad (\text{C.4})$$

De onde obtemos que os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem

$$[a(k), a^\dagger(q)] = \delta(k^1 - q^1). \quad (\text{C.5})$$

O espaço de Fock é obtido pela aplicação do operador  $a^\dagger$  sucessivamente sobre os estados, iniciando no vácuo, que é definido por

$$a(k)|0\rangle = 0. \quad (\text{C.6})$$

A função de Wightman de 2-pontos, é

$$\begin{aligned} \Delta^{(+)}(x-y; m^2) &\equiv \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2\pi} K_0 \left( m \sqrt{-(x-y)^2 + i(x^0 - y^0)\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Ou também

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = \Delta^{(+)}(x-y; m^2). \quad (\text{C.8})$$

O propagador bosônico é  $i\Delta_F(x-y; m^2) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ ,

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y; m^2) &= \theta(x^0 - y^0)\Delta^{(+)}(x-y; m^2) + \theta(y^0 - x^0)\Delta^{(+)}(y-x; m^2), \\ &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( \sqrt{-m^2(x-y)^2 + i\epsilon} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde a função  $\Delta_F(x-y; m^2)$  é a função de Green da equação de Klein-Gordon,

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y; m^2) = -\delta(x-y). \quad (\text{C.10})$$

Também definimos a função  $\Delta(x-y; m^2)$ ,

$$\Delta(x-y; m^2) = \langle 0|[\varphi(x), \varphi(y)]|0\rangle = \Delta^{(+)}(x-y; m^2) - \Delta^{(+)}(y-x; m^2), \quad (\text{C.11})$$

a qual também satisfaz a equação de Klein-Gordon  $(\square + m^2)\Delta(x-y; m^2) = 0$ .

Se o campo  $\varphi$  é quantizado com métrica negativa, então, temos que

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = -\Delta^{(+)}(x-y; m^2), \quad (\text{C.12})$$

$$\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = -i\Delta_F(x-y; m^2). \quad (\text{C.13})$$

## C.2 Campo bosônico livre sem massa

Neste caso, o campo escalar  $\varphi$  satisfaz a equação de Klein-Gordon sem massa

$$\square_x \varphi(x) = 0, \quad (\text{C.14})$$

com solução dada por

$$\varphi(x) = \int \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k^0}} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}] = \varphi^{(-)}(x) + \varphi^{(+)}(x), \quad (\text{C.15})$$

onde  $k^0 = |k^1|$ .

O limite de massa zero da função de Wightman (C.7) não é bem definido, posto que  $\frac{1}{k^2}$  não é uma distribuição temperada em 2-dimensões [58, 59]. No entanto, podemos definir uma função de 2-pontos sem massa pelo uso de um regulador infravermelho  $\tau^2 \rightarrow 0$

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \xrightarrow{\tau^2 \rightarrow 0} -\frac{1}{4\pi} \ln [-\tilde{\tau}^2(x^2 - ix^0\epsilon)], \quad (\text{C.16})$$

onde  $\tilde{\tau} = \tau e^{\gamma_E}/2$ , e  $\gamma_E$  é a constante de Euler. Vemos que a função (C.16) diverge no caso sem massa. De fato, não há um campo escalar livre sem massa em 2-dimensões satisfazendo o axioma de positividade de Wightman. A não positividade é introduzida pela regularização. Um tratamento rigoroso e sistemático do campo escalar sem massa em duas dimensões é apresentado em [44].

É conveniente definir o campo dual  $\tilde{\varphi}$  ao campo sem massa  $\varphi$

$$\partial_\mu \tilde{\varphi} = -\tilde{\partial}_\mu \varphi. \quad (\text{C.17})$$

O campo  $\tilde{\varphi}$  satisfazendo a equação acima é

$$\tilde{\varphi}(x) = \int \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2k^0}} \frac{k^1}{k^0} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{-ik \cdot x}] = \tilde{\varphi}^{(-)}(x) + \tilde{\varphi}^{(+)}(x). \quad (\text{C.18})$$

Agora definimos os campos  $\varphi_R$  e  $\varphi_L$ , as componentes direita e esquerda do campo  $\varphi$  (soluções básicas de  $\square\varphi = \square\tilde{\varphi} = 0$ ),

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_R(x^0 - x^1) + \varphi_L(x^0 + x^1), \\ \tilde{\varphi}(x) &= \varphi_R(x^0 - x^1) - \varphi_L(x^0 + x^1), \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde definimos as coordenadas do cone de luz  $x^+$  e  $x^-$ ,

$$\begin{aligned} x^+ &= x^0 + x^1, \quad x^- = x^0 - x^1, \\ \partial_+ &= \frac{\partial}{\partial x^+}, \quad \partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Encontramos as seguintes relações de comutação, [44],

$$[\varphi^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y)] = \Delta^{(+)}(x - y; \tau^2),$$

$$\begin{aligned}
\left[ \tilde{\varphi}^{(+)}(x), \tilde{\varphi}^{(-)}(y) \right] &= \Delta^{(+)}(x-y; \tau^2), \\
\left[ \varphi^{(+)}(x), \tilde{\varphi}^{(-)}(y) \right] &= \tilde{\Delta}^{(+)}(x-y; \tau^2), \\
\left[ \tilde{\varphi}^{(+)}(x), \varphi^{(-)}(y) \right] &= \tilde{\Delta}^{(+)}(x-y; \tau^2), \\
\left[ \varphi_R^{(+)}(x), \varphi_R^{(-)}(y) \right] &= \frac{1}{2} \Delta^{(+)}(x-y; \tau^2) + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^{(+)}(x-y; \tau^2), \\
\left[ \varphi_L^{(+)}(x), \varphi_L^{(-)}(y) \right] &= \frac{1}{2} \Delta^{(+)}(x-y; \tau^2) - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^{(+)}(x-y; \tau^2), \\
\left[ \varphi_R^{(+)}(x), \varphi_L^{(-)}(y) \right] &= 0,
\end{aligned} \tag{C.21}$$

onde temos

$$\Delta^{(+)}(z; \tau^2) = \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{e^{-ik \cdot z}}{2k^0} = -\frac{1}{4\pi} \ln(-\tilde{\tau}^2 z^2 + ix^0 \epsilon), \tag{C.22}$$

$$\tilde{\Delta}^{(+)}(z; \tau^2) = \int \frac{dk^1}{2\pi} \frac{e^{-ik \cdot z}}{2k^1} = \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{iz^+ + \epsilon}{iz^- + \epsilon} \right). \tag{C.23}$$

Além disso, temos a seguinte identidade,

$$\partial_\nu \tilde{\Delta}^{(+)}(z; \tau^2) = -\tilde{\partial}_\nu \Delta^{(+)}(z; \tau^2). \tag{C.24}$$

### C.3 Campo fermiônico

O campo fermiônico massivo livre em (1+1) dimensões é definido pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{-}\partial - m)\psi. \tag{C.25}$$

De onde se obtém a equação de Dirac,

$$(i\rlap{-}\partial - m)\psi = 0. \tag{C.26}$$

A decomposição de Fourier do campo fermiônico é dada por

$$\psi(x) = \int \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi} 2k^0} [b(k)u(k)e^{-ik \cdot x} + d^\dagger(k)v(k)e^{ik \cdot x}], \tag{C.27}$$

com

$$\{b(k), b^\dagger(p)\} = \{d(k), d^\dagger(p)\} = \delta(k^1 - p^1), \tag{C.28}$$

onde

$$u(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^+} \\ \sqrt{k^-} \end{pmatrix}, \quad v(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{k^+} \\ -\sqrt{k^-} \end{pmatrix}. \tag{C.29}$$

Os espinores satisfazem

$$u_\alpha \bar{u}_\beta = (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \quad , \quad v_\alpha \bar{v}_\beta = (\not{k} - m)_{\alpha\beta} . \quad (\text{C.30})$$

No limite de massa zero temos

$$u(k) = \sqrt{2k^0} \begin{pmatrix} \theta(k^1) \\ \theta(-k^1) \end{pmatrix} \quad , \quad v(k) = \sqrt{2k^0} \begin{pmatrix} \theta(k^1) \\ -\theta(-k^1) \end{pmatrix} . \quad (\text{C.31})$$

Na realidade, no caso sem massa, devido à separação em móveis direitos e esquerdos, pode-se rescrever (C.27) somente em termos do espinor  $u(k)$ , definindo o seguinte operador  $\tilde{d}(k^1)$

$$\tilde{d}(k^1) = \begin{cases} d(k^1) & \text{se } k^1 > 0 , \\ -d(k^1) & \text{se } k^1 < 0 . \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

Assim, reescrevemos (C.27) no caso sem massa como

$$\psi(x) = \int \frac{dk^1}{\sqrt{2\pi} 2k^0} u(k) \left[ b(k) e^{-ik \cdot x} + \tilde{d}^\dagger(k) e^{-ik \cdot x} \right] . \quad (\text{C.33})$$

O anticomutador canônico, para os campos  $\psi(x)$  (C.27), para dois pontos quaisquer do espaço-tempo é

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \Delta(x-y; m^2) . \quad (\text{C.34})$$

Também definimos as funções de dois pontos

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-y; m^2) = S_{\alpha\beta}^{(+)}(x-y) , \quad (\text{C.35})$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x) \psi_\alpha(y) | 0 \rangle = (i\partial_x - m)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x-y; m^2) , \quad (\text{C.36})$$

$$\langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = i (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x-y; m^2) = i S_{F\alpha\beta}(x-y) . \quad (\text{C.37})$$

Estas funções são bem definidas no limite de massa zero,

$$S^{(+)}(x-y) = -\frac{i}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x^- - i\epsilon} \\ \frac{1}{x^+ - i\epsilon} & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{C.38})$$

## C.4 Bosonização de férmions

A equação de Dirac, para férmions sem massa pode ser expressa em coordenadas do cone de luz,

$$i\partial_x \psi(x) = 0 \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0 , \quad (\text{C.39})$$

de onde podemos ver que  $\psi_R = \psi_R(x^-)$  e  $\psi_L = \psi_L(x^+)$ . A abordagem usual à bosonização do férmion está baseada na observação de que as funções de correlação das exponenciais ordenadas *a la* Wick do campo escalar  $\varphi(x)$  sem massa em duas dimensões satisfazem o requerimento de positividade, se a carga total é zero. A estratégia é, então, impor a conservação de duas combinações das cargas direita e esquerda para obter as funções de correlação fermiônicas em termos das funções de correlação de  $:\exp(i\alpha_{L,R}\varphi_{L,R}(x)):$ . O campo dual  $\tilde{\varphi}$  é definido em (C.17) e as componentes direita e esquerda, satisfazendo as relações de comutação (C.21), em (C.19).

Podemos, então, escrever as componentes do férmion como

$$\psi_R = C_R : e^{i\alpha\varphi+i\beta\tilde{\varphi}} : , \quad (\text{C.40})$$

$$\psi_L = C_L : e^{i\gamma\varphi+i\delta\tilde{\varphi}} : . \quad (\text{C.41})$$

Escolhemos as constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$ , tais que as funções de dois pontos do férmion sem massa sejam obtidas,

$$\langle 0 | \psi_R(x) \psi_R^*(y) | 0 \rangle = \frac{|C_R|^2}{(\tilde{\tau}^2)^{(\alpha^2+\beta^2)/4\pi}} \left[ i(x-y)^+ + \epsilon \right]^{-(\alpha-\beta)^2/4\pi} \left[ i(x-y)^+ - \epsilon \right]^{-(\alpha+\beta)^2/4\pi} , \quad (\text{C.42})$$

$$\langle 0 | \psi_L(x) \psi_L^*(y) | 0 \rangle = \frac{|C_L|^2}{(\tilde{\tau}^2)^{(\gamma^2+\delta^2)/4\pi}} \left[ i(x-y)^+ + \epsilon \right]^{-(\delta-\gamma)^2/4\pi} \left[ i(x-y)^+ - \epsilon \right]^{-(\delta+\gamma)^2/4\pi} . \quad (\text{C.43})$$

Comparando as equações acima com a equação (C.38), temos

$$\alpha = \beta = \delta = -\gamma = \sqrt{\pi} \quad , \quad C_R = C_L = \sqrt{\frac{\tilde{\tau}}{2\pi}} . \quad (\text{C.44})$$

Os anticomutadores não nulos são,

$$\langle 0 | \{ \psi_R(x), \psi_R^*(y) \} | 0 \rangle = \delta(x^- - y^-) , \quad (\text{C.45})$$

$$\langle 0 | \{ \psi_L(x), \psi_L^*(y) \} | 0 \rangle = \delta(x^+ - y^+) . \quad (\text{C.46})$$

## C.5 Nota

A discussão da bosonização, nas linhas esboçadas acima, não é tão simples quanto possa parecer. Dependendo do modelo, não é óbvio como provar a positividade das funções de correlação obtidas através de bosonização (para o caso do modelo de Thirring, este

resultado foi provado em [63]). Além disso, os campos fermiônicos obtidos desta forma, em geral, não satisfazem as relações de comutação padrão e, dependendo do modelo, uma transformação de Klein suplementar é necessária [62].

Um tratamento geral novo da bosonização fermiônica, em duas dimensões, foi apresentada em [66]. A característica principal é que a bosonização é conseguida completamente em termos de um único campo escalar sem massa em duas dimensões, sem a introdução *ad hoc* de regras de seleção e/ou operadores espúrios. Isto é possível através do uso de operadores com singularidades infravermelhas, associados à álgebra do campo escalar sem massa. Pode-se mostrar assim que as expressões para as cargas fermiônicas, cargas quirais, simetrias fermiônicas, ângulos  $\theta$ , etc. são obtidas naturalmente de expressões similares para as cargas e simetrias do campo escalar.

# Bibliografia

- [1] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1219 (1985).
- [2] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167**, 225 (1986).
- [3] O. Babelon, F. Schaposnik e C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B177**, 385 (1986).
- [4] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B183**, 311 (1987).
- [5] H. O. Girotti, H. J. Rothe, e K. D. Rothe, *Phys. Rev.* **D34**, 592 (1986).
- [6] D. Boyanovsky, *Nucl. Phys.* **B294**, 223 (1987).
- [7] Z. Jian-Ge, D. Qing-Hai e L. Yao-Yang, *Phys. Rev.* **D43**, 613 (1991).
- [8] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425 (1962).
- [9] J. Lowenstein e J. A. Swieca, *Ann. Phys.* **68**, 172 (1971).
- [10] S. Coleman, R. Jackiw e L. Susskind, *Ann. Phys.* **93**, 267 (1975).
- [11] L. S. Brown, *Nuovo Cimento* **29**, 617 (1963).
- [12] P. Becher, *Ann. Phys.* **146**, 223 (1983).
- [13] A. K. Raina e G. Wanders, *Ann. Phys.* **132**, 404 (1981).
- [14] M. Hortacsu, K. D. Rothe e B. Schroer, *Phys. Rev.* **D20**, 3203 (1979).
- [15] N. V. Krasnikov, V. A. Matveev, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze e V. F. Tokarev, *Phys. Lett.* **B97**, 103 (1980).
- [16] C. Jayewardena, *Helv. Phys. Acta* **65**, 636 (1988).

- [17] G. Maiella, *Lett. Nuovo Cimento* **28**, 261 (1981).
- [18] N. K. Nielsen e B. Schroer, *Nucl. Phys.* **B120**, 62 (1977).
- [19] R. Jackiw e K. Johnson, *Phys. Rev.* **182**, 1459 (1969).
- [20] P. Mitra e A. Rahaman, *Ann. Phys.* **249**, 34 (1996).
- [21] R. Jackiw, *Topological investigations of quantized gauge theories, in Relativity, Groups and Topology II* (Les Houches 1983), eds. B.S. DeWitt e R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1984).
- [22] Rodolfo Casana e Sebastião A. Dias, *Int. J. Mod. Phys. A* **14**, 4603 (2000).
- [23] Rodolfo Casana Sifuentes, *Renormalização e Ambigüidades na QED<sub>2</sub>*, tese de Mestrado, fevereiro de 1997, CBPF.
- [24] R. Casana-Sifuentes e Sebastião A. Dias, submetido ao *J. Phys. G*.
- [25] C. Adam, *Czech. J. Phys.* **48**, 9 (1998).
- [26] T. Radozycki e J. M. Namyslowski, *Phys. Rev.* **D59**, 065010 (1999).
- [27] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, 1991.
- [28] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory e Critical Phenomena*, 2<sup>a</sup> edição, Oxford Science Pub., 1993.
- [29] T. Radozycki, *Eur. Phys. Journ.* **C6**, 549 (1999).
- [30] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [31] K. Johnson, *Nuovo Cim.* **20**, 773 (1961).
- [32] W. Thirring, *Ann. Phys.* **3**, 91 (1958).
- [33] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **125**, 397 (1962).
- [34] B. Schroer, *Forts. Phys.* **11**, 1 (1963).

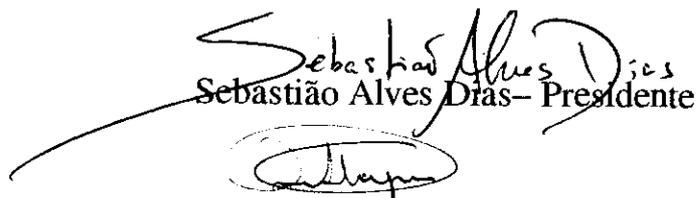
- [35] K. Harada, *Prog. Theor. Phys.* **65**, 783 (1981); *Prog. Theor. Phys.* **68**, 1324 (1982).
- [36] G. Morchio e F. Strocchi, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **33**, 251 (1980).
- [37] K. Stam, *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **9**, L229 (1983).
- [38] M. Abramowitz e I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Inc. Pub., N.Y. (1965).
- [39] F. Strocchi, *Phys. Rev.* **D17**, 2010 (1977).
- [40] M. Mintchev, *J. Phys.* **A13**, 1841 (1980).
- [41] D. J. Gross, I. R. Klebanov, A. V. Matytsin e A. V. Smilga, *Nucl. Phys.* **B461**, 109 (1996).
- [42] H. O. Girotti, H. J. Rothe e K. D. Rothe, *Phys. Rev.* **D33**, 514 (1986).
- [43] M. B. Halpern, *Phys. Rev.* **D13**, 337 (1976); **D12**, 1684 (1975).
- [44] G. Morchio, D. Pierotti e F. Strocchi, *J. Math. Phys.* **31**, 1467 (1990).
- [45] A. L. Carey e J. D. Wright, *Rev. Math. Phys.* **5**, 551 (1993).
- [46] S. Albeverio, H. Gottschalk e J. I. Wu, *Commun. Math. Phys.* **184**, 509 (1997)
- [47] M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi e Yu. Vernov, *J. Math. Phys.* **39**, 2969 (1998).
- [48] S. Ôta, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **48**, 333 (1988).
- [49] J. P. Antoine e S. Ôta, *Lett. Math. Phys.* **18**, 267 (1989).
- [50] A. Z. Capri e R. Ferrari, *Il Nuovo Cim.* **62A**, 273 (1981).
- [51] G. Morchio, D. Pierotti e F. Strocchi, *Ann. Phys.* **188**, 217 (1988).
- [52] D. Boyanovsky, I. Schmidt e M. F. L. Golterman, *Ann. Phys.* **185**, 111 (1988).
- [53] M. B. Einhorn, *Phys. Rev.* **D14**, 3451 (1976).
- [54] C. Alabiso e G. Schierholz, *Nucl. Phys.* **B110**, 81 (1976).

- [55] A. Casher, J. Kogut e L. Susskind, *Phys. Rev.* **D10**, 732 (1974).
- [56] J. Kogut e L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11**, 3594 (1975).
- [57] A. Casher, J. Kogut e L. Susskind, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 792 (1973)
- [58] S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31**, 259 (1973).  
 N. D. Mermin e H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
- [59] L. Schwarz, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann, 1951.  
 I. M. Gel'fand e N. YD. Vilenkin, *Generalized Functions*, N. Y., Academic Press, 1964.
- [60] A. S. Wightman, in *Cargèse Lectures in Theoretical Physics 1964*, edited by M. Levy (Gordon and Breach, New York, 1967).
- [61] B. Klaiber, in *Lectures in Theoretical Physics*, Boulder Lectures (New York, 1968).
- [62] J. A. Swieca, *Fortschr. Phys.* **25**, 303 (1977).
- [63] A. L. Carey, S. N. Ruijsenaars e J. D. Wright, *Commun. Math. Phys.* **99**, 347 (1985).
- [64] S. Coleman, *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975)
- [65] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **D11**, 3026 (1975).
- [66] G. Morchio, D. Pierotti e F. Strocchi, *J. Math. Phys.* **33**, 777 (1992).

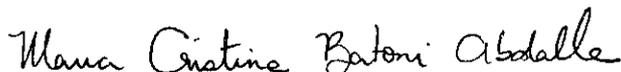
**“PROPRIEDADES QUÂNTICAS DA  
ELETRODINÂMICA BIDIMENSIONAL  
RENORMALIZADA”**

***Rodolfo Alván Casana Sifuentes***

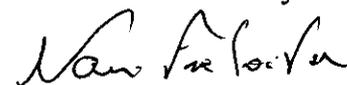
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Sebastião Alves Dias – Presidente

Juan Alberto Mignaco

  
Maria Cristina Batoni Abdalla

  
José Abdalla Helayël Neto

  
Nami Fux Svaiter

  
Marco Aurélio Cattacin Kneipp – Suplente

Rio de Janeiro, 01 de novembro de 2000