

09/00

TESE DE
MESTRADO

**A EVOLUÇÃO DE
PERTURBAÇÕES ESCALARES
QUÂNTICAS EM UM MODELO
DE UNIVERSO ETERNO**

Gustavo Dourado Barbosa

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 2000

Resumo

Aplicamos a teoria de perturbações cosmológicas quânticas na formulação de Mukhanov et al [25] para analisar um modelo de universo não singular. O espectro de potência encontrado para a variável Φ de Bardeen [26] para o caso particular do presente trabalho é estável durante toda a história do universo, partindo de zero no infinito passado, atingindo um máximo e posteriormente decrescendo rapidamente para zero. A evolução das perturbações não fornece nenhuma marca do passado do universo nas fases mais recentes que possa revelar o seu caráter eterno. O modelo não pode ser aplicado para toda a história do universo porque o seu espectro de potência não possui amplitude suficiente para descrever as anisotropias observadas na radiação cósmica de fundo.

Summary

We applied the theory of cosmological perturbations in the formulation of Mukhanov et al [25] to analyse a model of non singular universe. The power spectrum found for the Bardeen's variable Φ [26] in the particular case of the present work is stable during the whole history of the universe, starting from zero in the past infinity, growing up to a maximum, and eventually decreasing very fast to zero. The evolution of the perturbations does not give any trace of the past of the universe that could reveal its eternal character. The model can not be applied to the whole history of the universe because its power spectrum does not have sufficiently amplitude to describe the observed anisotropies of the cosmic microwave background.

Índice

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
Summary.....	iii
Índice.....	iv
Notação e Convenções.....	v
Introdução.....	1
1 Um Universo Eterno.....	5
2 Perturbações Cosmológicas Escalares.....	11
3 O Método da Equivalência Conforme.....	24
4 Teoria Quântica das Perturbações Escalares.....	32
5 Conclusão.....	49
Apêndice A – Redução da Ação.....	51
Apêndice B – Discussão sobre a Singularidade em Φ.....	55
Referências.....	59

Notação e Convenções

1. As convenções aqui adotadas são as mesmas de Landau e Lifshitz e do Phys. Rep. de Mukhanov et al, referência [25] desta dissertação.
2. Assinatura adotada para a métrica é $(+, -, -, -)$.
3. Índices gregos $(\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3)$ e latinos $(a, b \dots = 1, 2, 3)$.
4. Tensor de curvatura : $R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta}$.
5. Escalar de curvatura : $R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$.
6. Derivadas são denotadas da seguinte forma
 - (a) parcial : “ , ”.
 - (b) covariante relativa à métrica de fundo tridimensional γ_{ij} : “ | ”.
 - (c) covariante relativa à métrica tridimensional perturbada h_{ij} : “ || ”.
 - (d) covariante relativa à métrica quadridimensional perturbada: $g_{\alpha\beta}$: “ ; ”.
7. Utilizamos um sistema de unidades onde $8\pi G = 3l^2$ e $\hbar = c = 1$.

Introdução

A teoria de perturbações cosmológicas, que consiste em analisar perturbações gravitacionais linearizadas sob um fundo correspondente ao de um universo em expansão, tornou-se um dos pilares da cosmologia moderna. Desde o primeiro trabalho de Lifshitz e Khalatnikov [1] em 1963, a teoria de perturbações cosmológicas tem evoluído muito. Há uma grande evidência observacional de que o universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, e que também era assim em épocas anteriores. Muitos modelos cosmológicos se baseiam portanto na hipótese de que a métrica de fundo do espaço-tempo é homogênea e isotrópica em sua seção espacial, exceto por pequenas flutuações, cuja evolução pode ser entendida por meio da teoria de perturbações. Há modelos em que as flutuações na temperatura da radiação de fundo são atribuídas a perturbações de densidade no tempo de recombinação [2]. Porém, para explicar a origem das estruturas que observamos hoje do tamanho de galáxias e aglomerados de galáxias, é necessário que as perturbações iniciais tenham origem em um tempo bastante anterior ao da recombinação, e que evoluam gradualmente aumentando em amplitude até formar as estruturas que conhecemos. Uma das principais razões para o crescimento de interesse pela teoria de perturbações foi o seu sucesso quando aplicado às teorias de universo inflacionário, que começaram no ano de 1981 [3] (para uma revisão atual sobre os modelos inflacionários veja [4]). Os modelos de universo inflacionário foram os primeiros a fornecer uma explicação causal de como as perturbações iniciais da métrica e da matéria podem gerar as estruturas que conhecemos hoje. Outro impulso para a valorização da teoria de perturbações foi o surgimento de dados observacionais do satélite COBE [5] e do telescópio de Saskatoon [6], que permitem a rejeição de alguns modelos cosmológicos e a imposição de restrições sobre outros. Tais dados

têm possibilitado o surgimento de novas classes de modelos em recentes trabalhos empregando a teoria de perturbações quânticas; veja, por exemplo, [7]. Novos projetos, como o de PLANCK [8] e o MAP [9] estão previstos para fornecer mais dados observacionais, que nos permitirão restringir mais a ainda abundante classe de modelos existentes, vários deles baseados em teorias de grande unificação de altas energias.

Embora não tenhamos uma teoria consistente de gravitação quântica, é possível quantizar perturbações de densidade e perturbações métricas de uma maneira consistente ([10], [11], [12], [13]). Da teoria de perturbações cosmológicas quânticas é possível calcular o espectro de potência, que é relacionado a diversas grandezas observáveis, como $\frac{\delta T}{T}$, $\frac{\delta \rho}{\rho}$, etc, onde ρ é a densidade de matéria e T é a temperatura da radiação cósmica de fundo.

Mais ousados que os modelos baseados na aproximação semi-clássica da gravitação, são os modelos de universo baseados na cosmologia quântica. Esses modelos quantizam o espaço-tempo como um todo, ao invés de apenas as pequenas perturbações deste. A cosmologia quântica visa, sobretudo, estudar o comportamento do universo perto da época de Planck, onde a Relatividade Geral não é aplicável. Um resultado interessante é que em certos modelos de cosmologia quântica ([14],[15]) o efeito da quantização do espaço-tempo remove a singularidade inicial dos modelos clássicos, gerando um universo eterno.

A proposta deste trabalho é analisar a evolução de perturbações cosmológicas quânticas escalares em um modelo de universo eterno clássico. É possível que a evolução de perturbações em estágios do universo anteriores ao big bang deixe marcas que tenham consequências observáveis no presente. A motivação para esse estudo é, além dos resultados da cosmologia quântica, o fato de que modelos de universo não singular podem ocorrer também em teorias de grande unificação de altas energias, teorias de supercordas ([16]) e teorias generalizadas

de gravitação ([17] ,[18] ,[19] , [20] e [21]). No desenvolvimento do trabalho apresentaremos a formulação invariante de calibre da teoria de perturbações cosmológicas quânticas escalares para universos do tipo FRW com matéria de campo escalar. A curvatura das seções espaciais será considerada arbitrária ($\varepsilon = -1, 0, 1$) na formulação geral da teoria das perturbações, sendo particularizada para o caso do nosso modelo de universo eterno, em que $\varepsilon = -1$, somente quando necessário. O caso em que $\varepsilon = -1$ é também de particular interesse para os modelos de inflação aberta e de pré big bang (PBB), e tem sido estudado em trabalhos recentes ([22] ,[23] ,[24]). Tais trabalhos, no entanto, não apresentam a mesma abordagem que será desenvolvida nesta dissertação, que generaliza alguns resultados apresentados antes em [25] somente para o caso em que $\varepsilon = 0$ utilizando as variáveis invariantes de calibre de Bardeen [26] .

A organização do trabalho é a seguinte:

Capítulo 1-Um Universo Eterno- Apresenta um modelo de universo tipo Friedmann-Robertson-Walker que é eterno devido a um acoplamento conforme de um campo escalar com a gravitação.

Capítulo 2-Perturbações Cosmológicas Escalares- Apresenta a teoria de perturbações escalares em uma abordagem invariante de calibre.

Capítulo 3-O Método da Equivalência Conforme- Descreve o método que permite transformar uma lagrangeana de teorias generalizadas de gravitação na lagrangeana de Einstein. Aplica o método em questão para o modelo de universo do capítulo 1 .

Capítulo 4-Teoria Quântica das Perturbações Escalares- Quantiza as perturbações. Utiliza os resultados dos capítulos 2 e 3 para calcular o espectro de potência das perturbações.

Capítulo 5-Conclusão- Analisa o trabalho como um todo, comenta os resultados obtidos e apresenta novas perspectivas de investigação.

Apêndice A-Redução da Ação- Reduz a ação das perturbações estabelecendo a equivalência da ação destas com outra ação já reduzida na literatura.

Apêndice B-Discussão sobre a Singularidade em Φ - Apresenta uma discussão sobre a possível existência de uma singularidade na variável de perturbação Φ .

Capítulo 1

Um Universo Eterno

Um dos problemas mais importantes e não resolvidos da cosmologia moderna pode ser colocado da seguinte forma [19] : Será que o universo é eterno ou ele teve um início? Em outras palavras, será que o conceito de espaço-tempo é suficiente para a física ou, ao estudar o big bang, devemos substituir esse conceito por um outro mais fundamental ?

A discussão na comunidade física sobre essas questões vem se estendendo já há várias décadas. Inicialmente alguns físicos acreditavam que a singularidade que aparece nos modelos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) era uma consequência do alto grau de simetria de um modelo homogêneo e isotrópico. Argumentava-se que esse tipo de métrica não era mais que uma aproximação idealizada do espaço-tempo, e que um modelo mais realista com menos simetrias poderia ser não singular. Este ponto de vista era defendido principalmente por Lifshitz, Khalatnikov e seus colaboradores [1] . Outros físicos, entretanto, acreditavam que a singularidade presente nos modelos de Friedmann era na verdade um propriedade intrínseca da Relatividade Geral, e que portanto nenhum modelo, mesmo os mais realísticos, poderia ser não singular.

A contribuição decisiva para esclarecer essa questão foi dada no final dos anos 60 por Penrose e Hawking com os teoremas de singularidade [27] , que foram o centro das atenções dos cosmólogos na década seguinte. Tais teoremas garantem que sob certas condições razoáveis (como, por exemplo, a positividade da energia) o fato de a gravitação ser sempre atrativa determina que o espaço-tempo não pode ser geodesicamente completo, ou seja, que certas

geodésicas tipo nulo ou temporal possuem pontos terminais, além dos quais estas não podem ser extendidas. A existência de tais pontos é comumente associada à presença de uma singularidade, que representa o big bang. O impacto dos teoremas de singularidade foi grande, incentivando vários físicos a começarem a se interessar seriamente em encontrar modelos cosmológicos alternativos que violassem suas hipóteses. Esses modelos ganharam muita atenção nos anos 80 (veja por exemplo [21]). Recentemente, com a popularidade das teorias de supercordas, há uma série de trabalhos sobre cosmologia não singular pré big bang (PBB) [16]. Há varias maneiras de se produzir um modelo de universo não singular. Algumas delas são: a presença de efeitos de gravitação quântica, a existência de uma constante cosmológica variável no tempo, a adição de termos quadráticos de curvatura na lagrangeana de Einstein, o acoplamento não mínimo de campos de matéria com a gravitação, etc. Para um apanhado geral sobre o assunto e uma lista mais detalhada de diversas formas de produzir um universo não singular veja [19] e [20].

Para construir nosso modelo de universo eterno partiremos da gravitação conformalmente acoplada a um campo escalar e do princípio cosmológico. A escolha do acoplamento conforme é feita também em muitas teorias de grande unificação [28]. Em outros trabalhos, entretanto, é permitido que a constante de acoplamento assuma um valor arbitrário ξ , que é determinado posteriormente através de, por exemplo, restrições impostas pelas observações astronômicas ([29], [30]).

A densidade lagrangeana do nosso modelo é portanto dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \varphi^2 - \frac{1}{3l^2} \right) R - \frac{1}{2} \varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} \right], \quad (1.1)$$

onde R é o escalar de curvatura, φ é um campo escalar e g é o determinante de métrica $g_{\mu\nu}$.

Escolhemos as unidades de tal forma que $\frac{8\pi G}{c^4} = 3l^2$ e $\hbar = c = 1$. Nessas unidades l coincide com o comprimento de Planck.

O princípio cosmológico afirma que o universo é homogêneo e isotrópico em todas as épocas, exceto por irregularidades locais. Temos então o seguinte *ansatz* de minisuperespaço:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde N e a são funções arbitrárias do tempo e

$$\gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon r^2\right)^2} \quad (1.3)$$

é a métrica das seções espaciais com curvatura constante ε ($\varepsilon = -1, 0, 1$).

A partir do *ansatz* (1.2) podemos calcular

$$\begin{cases} \varphi_{;\mu}\varphi^{;\mu} = \frac{\dot{\varphi}^2}{N^2} \\ -R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{N^2 a} - \frac{N\dot{a}}{N^3 a} + \frac{\varepsilon}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} \right) \\ \sqrt{-g} = \frac{Na^3}{\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon r^2\right)^3}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Portanto

$$\begin{aligned} -\sqrt{-g}R \left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon r^2\right)^3 &= 6 \left(\frac{\ddot{a}a^2}{N} - \frac{N\dot{a}a^2}{N^2} + N\varepsilon a + \frac{\dot{a}^2 a}{N} \right) = \\ &= 6 \left(N\varepsilon a - \frac{\dot{a}^2 a}{N} \right) + \left(\frac{\ddot{a}a^2}{N} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Substituindo (1.4) e (1.5) em (1.1) podemos escrever

$$S = \int \left[-\frac{1}{2} \frac{\dot{\varphi}^2 a^3}{N} + \left(N\varepsilon a - \frac{\dot{a}^2 a}{N} \right) \left(\frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{l^3} \right) - \frac{\varphi \dot{\varphi} \dot{a} a^2}{N} \right] d^4x, \quad (1.6)$$

onde descartamos derivadas totais no tempo e a parte puramente espacial por não contribuírem para as equações do movimento.

Definindo $\xi = \frac{la\varphi}{\sqrt{2}}$ podemos reescrever a ação como

$$S = \int \left(-\varepsilon N a + \frac{\dot{a}^2 a}{N} - \frac{\dot{\xi}^2 a}{N} + \frac{\varepsilon \xi^2 N}{a} \right) dt . \quad (1.7)$$

Os momentos canônicos são

$$\begin{cases} p_a = \frac{2a\dot{a}}{N} \\ p_\xi = -\frac{2a\dot{\xi}}{N} . \end{cases} \quad (1.8)$$

Variando a ação com relação a N obtemos o vínculo

$$\varepsilon a + \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} - \frac{\dot{\xi}^2 a}{N^2} - \frac{\varepsilon \xi^2}{a} = 0 . \quad (1.9)$$

O hamiltoniano é

$$H = N \left[\frac{p_a^2}{4a} - \frac{p_\xi^2}{4a} + \varepsilon a - \frac{\varepsilon \xi^2}{a} \right] = N\mathcal{H} , \quad (1.10)$$

sendo $\mathcal{H} \approx 0$ o vínculo na forma hamiltoniana. As equações do movimento são

$$\begin{cases} \dot{p}_a = -2N\varepsilon \\ \dot{p}_\xi = \frac{2\xi N\varepsilon}{a} \\ \dot{a} = \frac{Np_a}{2a} \\ \dot{\xi} = -\frac{Np_\xi}{2a} . \end{cases} \quad (1.11)$$

De agora em diante fixaremos, por conveniência, o calibre $N = a$, que corresponde à escolha do tempo conforme. Consideraremos somente o caso em que $\varepsilon = -1$, visto que este é que

corresponde ao do universo eterno.

De (1.11) segue que

$$\begin{cases} a = A \cosh \eta + B \sinh \eta \\ \xi = C \cosh \eta + D \sinh \eta . \end{cases} \quad (1.12)$$

Faremos a escolha $B = 0$, pois assim teremos um universo eterno simétrico em relação à origem do tempo, conforme ocorre na cosmologia quântica [14]. Substituindo a solução (1.12) já com a escolha $B = 0$ no vínculo (1.9) obtemos a seguinte relação entre as constantes A, C e D :

$$A^2 - C^2 + D^2 = 0 ,$$

que permite reescrever (1.12) como

$$\begin{cases} a = a_0 \cosh \eta \\ \xi = \xi_0 \cosh \eta \pm \sqrt{\xi_0^2 - a_0^2} \sinh \eta . \end{cases} \quad (1.13)$$

Lembrando que $\xi = \frac{la\varphi}{\sqrt{2}}$, encontramos

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{l} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1} \tanh \eta \right) , \quad (1.14)$$

onde $\sigma = \frac{\xi_0}{a_0}$. Reescrevendo a e φ no tempo cósmico, dado por $t = \int a d\eta$, temos

$$\begin{cases} a = \sqrt{t^2 + a_0^2} \\ \varphi = \frac{\sqrt{2}}{l} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 1} \frac{t}{\sqrt{t^2 + a_0^2}} \right) . \end{cases} \quad (1.15)$$

A forma particular encontrada para o fator de escala corresponde à mesma já encontrada em 1979 por Novello e Salim [17] e, independentemente, por Melnikov e Orlov [18]. O universo eterno de Novello e Salim é originado por fótons não minimamente acoplados e o de Melnikov e

Orlov por um campo escalar auto-interagente e não minimamente acoplado. É possível encontrar ainda essa forma do fator de escala em modelos com constante cosmológica que varia com o tempo [19]. De (1.13) vemos que universo parte do limite assintótico de universo de Milne em $\eta \rightarrow -\infty$, contraindo-se posteriormente até o instante de máxima compressão (big bang), que ocorre em $\eta = 0$. Após este instante o universo se expande de maneira assintótica para o limite de universo de Milne novamente. A aproximação do universo de Milne para o limite em que $\eta \rightarrow -\infty$ ocorre também em modelos de cosmologia PBB ([16], [22]). A escolha $\sigma^2 = 1$ corresponde ao caso de um universo eterno porém sem dinâmica para o campo escalar. Por estarmos interessados na evolução de perturbações de um campo escalar dinâmico, excluiremos esse caso de nossas considerações.

É fácil verificar que o universo que estamos considerando não possui horizonte de eventos e tampouco horizonte de partículas. É também um modelo de universo constantemente inflacionário, o que pode ser constatado calculando-se

$$\ddot{a} = \frac{a_0^2}{(t^2 + a_0^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad \forall t. \quad (1.16)$$

Será que o modelo que apresentamos é de interesse puramente acadêmico? É possível que não. Provavelmente ele não pode ser considerado como realista para estágios do universo que datam da época da nucleossíntese até o presente. Isso porque devemos levar em conta a transição do campo escalar para o regime de radiação e posteriormente para o de poeira, o que altera a forma do fator de escala. O modelo em questão pode, entretanto, ser aplicável para fases do universo anteriores à da nucleossíntese ou da inflação.

Capítulo 2

Perturbações Cosmológicas Escalares

Neste capítulo apresentaremos em detalhe a teoria de perturbações cosmológicas escalares, tendo a métrica de FRW como métrica de fundo e a Relatividade Geral minimamente acoplada como teoria de gravitação. Mais tarde, no capítulo 3, mostraremos como aproveitar os resultados obtidos para o caso de a teoria ser a gravitação generalizada, que inclui o caso do acoplamento conforme do universo eterno apresentado no capítulo 1.

Estudar perturbações cosmológicas é o mesmo que resolver as equações de gravitação linearizadas sobre um fundo que é um universo em expansão. Embora pareça uma tarefa simples, há uma certa complicação devido à liberdade de calibre (para uma discussão mais detalhada veja [25]). Na análise das perturbações consideramos a métrica física como sendo a métrica perturbada [1]. Para descrevermos a evolução das perturbações, entretanto, é necessária a introdução de um fundo fictício sob o qual estas estão aplicadas. Como o fundo é fictício, a sua correspondência com as perturbações é arbitrária e depende do sistema de coordenadas escolhido. Assim, uma simples mudança de coordenadas pode alterar a correspondência entre as perturbações e o fundo, e pela análise do tensor métrico não é possível distinguir as verdadeiras perturbações de perturbações ilusórias, puro artefato de calibre, devidas à escolha de coordenadas.

Uma das maneiras de resolver o problema de calibre das perturbações é através da formulação Quasi-Maxwellina da Relatividade Geral, introduzida no estudo das perturbações cosmológicas por Hawking [31], e posteriormente empregada em diversos trabalhos, entre eles os de Olson,

Hwang, Salim e Novello et al ([32] ,[33] ,[34] ,[35]). Essa formulação lida diretamente com objetos observáveis do fluido cosmológico, cuja interpretação física é imediata. Outra maneira de contornar o problema é através da utilização da formulação invariante de calibre para perturbações gravitacionais, introduzida pioneiramente por Bardeen [36] e Gerlach e Sengupta [37]. A aplicação da formulação invariante de calibre no contexto das perturbações cosmológicas foi feita primeiramente por Bardeen [26]. Neste trabalho adotaremos a formulação invariante de calibre baseada nas variáveis de Bardeen. Além de serem imensamente populares nos trabalhos sobre perturbações cosmológicas, as variáveis de Bardeen são importantes por estarem diretamente relacionadas com o efeito Sachs-Wolfe ([2] ,[38]), que tem sido de imenso valor para fornecer informações sobre o passado do universo [7]. As variáveis de Bardeen são de fácil interpretação física, conforme veremos mais tarde. Recentemente há uma vasta gama de conjuntos de variáveis invariantes de calibre diferentes ([39] , [40] , [41] , [42]), cada qual com as suas vantagens.

Há mais de uma maneira de se derivar as equações de movimento para as perturbações cosmológicas. Tendo em vista que nosso objetivo é estudar a evolução de perturbações quânticas, obteremos as equações de movimento a partir de uma ação, que no capítulo 4 será reduzida para quantização. Para isso seguiremos o roteiro estabelecido em [25] para o caso particular de universos com seção espacial plana ($\varepsilon = 0$), generalizando para o caso onde há curvatura nas seções espaciais ($\varepsilon \neq 0$).

Antes de desenvolver a teoria de perturbações vamos primeiramente fazer a separação da métrica em duas partes: o fundo de FRW e as perturbações. Pode-se mostrar [43] que, para universos do tipo FRW, as soluções das equações de gravitação linearizada coincidem com a linearização das soluções exatas das equações não lineares, o que garante a consistência da

teoria de perturbações. O elemento de linha da métrica de fundo é dado por

$$ds^2 = (g_{\mu\nu})_0 dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)(d\eta^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (2.1)$$

onde η é o tempo conforme e γ_{ij} é o mesmo de (1.3). As equações de movimento do fundo são

$$\left\{ \begin{array}{l} (G^0_0)_0 = \frac{3}{a^2} (\mathcal{H}^2 + \varepsilon) = 3l^2 (T^0_0)_0 \\ (G^0_i)_0 = (T^0_i)_0 = 0 \\ (G^i_j)_0 = \frac{1}{a^2} (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \varepsilon) \delta^i_j = 3l^2 (T^i_j)_0, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$.

O tensor de Einstein e o tensor energia-momento podem ser escritos como

$$\left\{ \begin{array}{l} G^\mu_\nu = (G^\mu_\nu)_0 + \delta G^\mu_\nu \\ T^\mu_\nu = (T^\mu_\nu)_0 + \delta T^\mu_\nu. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

onde o δ designa perturbação linear. As equações das perturbações são portanto

$$\delta G^\mu_\nu = \delta T^\mu_\nu. \quad (2.4)$$

A classificação das perturbações métricas se refere à maneira como os campos com os quais $\delta g_{\mu\nu}$ é construída se transformam na hipersuperfície de tempo constante, e divide estas em três classes: escalar, vetorial e tensorial (para uma definição precisa veja [44]). As três classes se desacoplam completamente em universos homogêneos [45], como o FRW. Neste trabalho nos restringiremos ao estudo das perturbações escalares, pois são apenas estas que se acoplam com a matéria, sendo responsáveis pelo crescimento de inhomogeneidades [25]. As perturbações métricas escalares podem ser escritas como [10]

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 2\phi & -B_{|i} \\ -B_{|j} & 2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde ϕ, B, ψ e E são funções das coordenadas espaciais e temporais. Portanto o elemento de linha total incluindo o fundo é dado por

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\phi) d\eta^2 - 2B_{|i} dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}] dx^i dx^j \right\} . \quad (2.6)$$

Assumiremos que a matéria do universo é descrita por um campo escalar. A ação da matéria é portanto

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \varphi_{; \mu} \varphi^{; \mu} - V(\varphi) \right] d^4x , \quad (2.7)$$

e o tensor energia-momento correspondente é

$$T^\mu_\nu = \varphi_{; \nu} \varphi^{; \mu} - \left[\frac{1}{2} \varphi_{; \alpha} \varphi^{; \alpha} - V(\varphi) \right] \delta^\mu_\nu . \quad (2.8)$$

Por consistência com o tratamento perturbativo da métrica, o campo escalar deve ser aproximadamente homogêneo. Assim podemos escrever

$$\varphi(\vec{x}, \eta) = \varphi(\eta) + \delta\varphi(\vec{x}, \eta) . \quad (2.9)$$

Substituindo (2.9) e (2.6) em (2.8) obtemos

$$(T^0_0)_0 = \frac{\varphi'^2}{2a^2} + V(\varphi) \quad (T^0_j)_0 = 0 \quad (T^i_j)_0 = \left(-\frac{\varphi'^2}{2a^2} + V(\varphi) \right) \delta^i_j , \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T^0_0 = \frac{1}{a^2} \left[-\varphi'^2 \phi + \varphi' \delta\varphi' + V_{, \varphi} a^2 \delta\varphi \right] \\ \delta T^0_j = \frac{\varphi' \delta\varphi_{, j}}{a^2} \\ \delta T^i_j = \frac{1}{a^2} \left[\varphi'^2 \phi - \varphi' \delta\varphi' + V_{, \varphi} a^2 \delta\varphi \right] \delta^i_j . \end{array} \right. \quad (2.11)$$

De (2.2) e (2.10) podemos reescrever as equações de movimento do fundo como

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \varepsilon = \frac{3l^2}{2}\varphi'^2 \quad (2.12)$$

$$\mathcal{H}^2 + \varepsilon = \frac{l^2}{2}\varphi'^2 + l^2 a^2 V . \quad (2.13)$$

Das equações acima podemos derivar a seguinte equação para $\varphi(\eta)$:

$$\varphi'' + 2\mathcal{H}\varphi' + V_{,\varphi}a^2 = 0 . \quad (2.14)$$

O passo seguinte é considerarmos transformações de coordenadas e ver sua ação sobre os elementos de $\delta g_{\mu\nu}$. Como as perturbações são lineares, consideraremos apenas transformações de coordenadas em primeira ordem de aproximação

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad \xi^\alpha = (\xi^0, \xi^i) . \quad (2.15)$$

Ao fazermos uma transformação de coordenadas do tipo acima, uma função Q , do tipo escalar, vetorial ou tensorial se transforma como [25]

$$\bar{Q} = Q + \mathcal{L}_\xi Q , \quad (2.16)$$

onde $\mathcal{L}_\xi Q$ é a derivada de Lie de Q com relação ao campo ξ^α . As transformações (2.15) e (2.16) formam o grupo das transformações lineares de coordenadas e das perturbações, que é o grupo de calibre da gravitação linearizada. Um tri-vetor arbitrário ξ^i pode ser escrito da forma

$$\xi^i = \xi_{tr}^i + \gamma^{ij}\xi_{|j} , \quad (2.17)$$

onde

$$\xi_{|i}^i = \xi^i_{|i} , \quad (2.18)$$

e o vetor transverso satisfaz

$$\xi_{tr|i}^i = 0 . \quad (2.19)$$

De (2.19) podemos ver que vetor ξ_{tr}^i não contribui para perturbações escalares. Há portanto apenas duas funções ξ^0 e ξ que preservam a natureza escalar das perturbações. A partir dessas

duas funções podemos construir as transformações de coordenadas mais gerais do tipo (2.15) que preservam a natureza escalar das perturbações (2.5), que são:

$$\begin{cases} \bar{\eta} = \eta + \xi^0(\vec{x}, \eta) \\ \bar{x}^i = x^i + \gamma^{ij} \xi_j(\vec{x}, \eta) . \end{cases} \quad (2.20)$$

De (2.16) podemos ver que sob essa mudança de coordenadas os elementos de $\delta g_{\mu\nu}$ se transformam como

$$\bar{\delta g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} - g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha - g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha , \quad (2.21)$$

o que permite escrever

$$\begin{cases} \bar{\phi} = \phi - \mathcal{H} \xi^0 - \xi^{0'} \\ \bar{\psi} = \psi + \mathcal{H} \xi^0 \\ \bar{B} = B + \xi^0 - \xi' \\ \bar{E} = E - \xi . \end{cases} \quad (2.22)$$

Do mesmo modo, podemos ver que a perturbação $\delta\varphi$ se transforma como $\bar{\delta\varphi} = \delta\varphi - \xi^\alpha \partial_\alpha \varphi$, e portanto

$$\bar{\delta\varphi} = \delta\varphi - \varphi' \xi^0 . \quad (2.23)$$

É fácil ver que as seguintes combinações de variáveis introduzidas por Bardeen [26] são invariantes de calibre.

$$\begin{cases} \Phi = \phi + \frac{1}{a} [(B - E') a]' \\ \Psi = \psi - \mathcal{H} (B - E') . \end{cases} \quad (2.24)$$

Para a perturbação do campo escalar podemos também construir a seguinte combinação invariante de calibre.

$$\delta\varphi^{(g^i)} = \delta\varphi + \varphi' (B - E') . \quad (2.25)$$

As equações (2.4) podem ser derivadas de uma ação $\delta_2 S$, que deve ser quadrática nas perturbações, pois (2.4) é linear nestas. Para derivar $\delta_2 S$ partimos da ação inicial

$$S = -\frac{1}{6l^2} \int R \sqrt{-g} d^4x + \int \left(\frac{1}{2} \varphi_{;\mu} \varphi^{;\mu} - V(\varphi) \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.26)$$

Expandiremos a ação em até segunda ordem de aproximação para as variáveis de perturbação. Os termos lineares nas perturbações que aparecerem na ação serão descartados por não contribuírem para as equações de movimento destas, anulando-se por aparecerem multiplicando as equações de movimento do fundo.

Para derivar a parte puramente gravitacional da ação usaremos a formulação ADM da Relatividade Geral [46]. Nessa formulação a métrica é escrita da forma

$$ds^2 = (N^2 - N_i N^i) d\eta^2 - 2N_i dx^i d\eta - h_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.27)$$

onde N é a função lapso, N_i é o vetor deslocamento e h_{ij} é a métrica na superfície de tempo constante. Em termos da métrica ADM a ação gravitacional tem a forma

$$S_g = \frac{1}{6l^2} \int \left[N \sqrt{h} (K^i_j K^j_i - K^2 + {}^{(3)}R) - 2 (\sqrt{h} K)' + 2 (\sqrt{h} K N^i - \sqrt{h} h^{ij} N_{;j})_{;i} \right] d^4x, \quad (2.28)$$

onde $K_{ij} = \frac{1}{2N} (N_{i||j} + N_{j||i} - h'_{ij})$ é a curvatura extrínseca da hipersuperfície de tempo constante, ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura da métrica h_{ij} , $K = K^i_i$ e h é o determinante de h_{ij} . Usamos h_{ij} e sua inversa h^{ij} para subir e baixar os índices espaciais relativos à métrica tridimensional perturbada. Conforme mostrou Fock [47], o escalar de curvatura ${}^{(3)}R$ pode ser escrito em termos de h_{ij} e suas derivadas. Portanto a ação (2.28) pode ser reescrita, exceto por uma divergência total, na forma [25]

$$S_g = \frac{1}{6l^2} \int \left[N\sqrt{h} (K_j^i K_i^j - K^2) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{h} h^{ij} N \right)_{,i} (\log h)_{,j} + \right. \\ \left. + N_{,i} \left(\sqrt{h} h^{ij} \right)_{,j} - \frac{1}{2} N\sqrt{h} {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l h^{ij}_{,l} \right] d^4x, \quad (2.29)$$

onde ${}^{(3)}\Gamma_{ij}^l$ é o símbolo de Christoffel da métrica h_{ij} das superfícies de tempo constante.

Comparando as métricas (2.6) e (2.27) encontramos

$$\begin{cases} N_i = a^2 B_{|i} \\ h_{ij} = a^2 (1 - 2\psi) \gamma_{ij} + 2a^2 E_{|ij} \\ N = a \left(1 + \phi - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}B^{|i} B_{|i} \right). \end{cases} \quad (2.30)$$

Em todas as expressões consideramos as variáveis de perturbação em até segunda ordem de aproximação. A métrica inversa é

$$h^{ij} = \frac{1}{a^2} \left(\gamma^{ij} + 2\psi\gamma^{ij} + 4\psi^2\gamma^{ij} - 2E^{|ij} + 4E^{|il} E_{|l}{}^j - 8E^{|ij} \psi \right). \quad (2.31)$$

Das equações anteriores podemos obter

$$\sqrt{h} = a^3 \sqrt{\gamma} \left[1 - 3\psi + \frac{3}{2}\psi^2 + \Delta E - \psi\Delta E + \frac{1}{2} (\Delta E)^2 - E^{|ij} E_{|ij} \right], \quad (2.32)$$

onde $\Delta = \gamma^{ij} \nabla_i \nabla_j$.

O símbolo de Christoffel das superfícies de tempo constante é dado por

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\Gamma_{ij}^l &= \frac{h^{la}}{2} (h_{ai,j} + h_{aj,i} - h_{ij,a}) = \\ &= {}^{(0)}\Gamma_{ij}^l - \psi_{,j} \delta_i^l - \psi_{,i} \delta_j^l + \psi^{|l} \gamma_{ij} + \gamma^{la} (E_{|aij} + E_{|aji} - E_{|ija}) \\ &\quad + 2\psi \left(-\psi_{,j} \delta_i^l - \psi_{,i} \delta_j^l + \psi^{|l} \gamma_{ij} \right) + 2\psi\gamma^{la} (E_{|aij} + E_{|aji} - E_{|ia}) + \\ &\quad - 2E^{|la} \left(-\psi_{,i} \gamma_{aj} - \psi_{,j} \gamma_{ai} + \psi_{,a} \gamma_{ij} \right) - 2E^{|la} (E_{|aij} + E_{|aji} - E_{|ija}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde ${}^{(0)}\Gamma_{ij}^l = \frac{\gamma^{al}}{2} (\gamma_{ia,j} + \gamma_{aj,i} - \gamma_{ij,a})$. A curvatura extrínseca é dada por

$$\begin{aligned}
K_j^i &= -\frac{1}{a} \left[\delta_j^i \left(\mathcal{H} - \mathcal{H}\phi - \psi' + \frac{3}{2}\mathcal{H}\phi^2 + \phi\psi' - 2\psi\psi' - \frac{1}{2}\mathcal{H}B^{ld}B_{ld} \right) + \right. \\
&\quad - (B - E')^{ij} + 2 \left(E^{ij}\psi \right)' + \phi (B - E')^{ij} - 2\psi B^{ij} + 2E^{ia}B_{aj} + \\
&\quad \left. - 2E'_{aj}E^{ai} - B^{ij}\psi_{|j} - \psi^{ij}B_{|j} + \psi^{il}B_{|l}\delta_j^i + \gamma^{ai}B^{lc} \left(E_{|caj} + E_{|cja} - E_{|ajc} \right) \right]. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.30)-(2.34) em (2.29) e usando as equações de fundo (2.12), (2.13) e (2.14), temos

$$\begin{aligned}
\delta_2 S_g &= \frac{1}{6l^2} \int d^4x a^2 \sqrt{\gamma} \{ -12\mathcal{H}\phi\psi' - 12\mathcal{H}\psi\psi' - 9\mathcal{H}^2 (\phi + \psi)^2 + \\
&\quad - 6\psi'^2 2\Delta\psi (2\phi - \psi) - 4\mathcal{H} (\phi + \psi) \Delta (B - E') + 4\mathcal{H}\psi' \Delta E + \\
&\quad - 4\psi' \Delta (B - E') + 6\mathcal{H}^2 (\phi + \psi) \Delta E + -4\mathcal{H}\Delta E \Delta (B - E') + \\
&\quad + 3\mathcal{H}^2 (\Delta E)^2 + 3\mathcal{H}^2 B^{ij} B_{ij} + 4\mathcal{H}\Delta E \Delta B - 4\mathcal{H}\psi^i B_{ij} + \\
&\quad + \varepsilon [2 (B - E') \Delta (B - E') - 3\psi^2 - 6\psi\phi - 2\psi\Delta E - 2E'^{ij} E_{ij} + \\
&\quad + (\Delta E)^2 + 3B^{ij} B_{ij} + 6\phi\Delta E - 3\phi^2 + 4(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) E \Delta E] \}, \quad (2.35)
\end{aligned}$$

exceto por uma divergência total.

Vamos agora calcular a ação das perturbações de matéria. Escrevendo a ação da matéria da forma

$$S_m = \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.36)$$

podemos escrever a sua parte quadrática como

$$\delta_2 S_m = \int (\delta_2(\sqrt{-g})\mathcal{L}_0 + \delta_1(\sqrt{-g})\delta_1\mathcal{L} + (\sqrt{-g})_0\delta_2\mathcal{L}) d^4x, \quad (2.37)$$

onde os índices 0, 1, 2 indicam a ordem de aproximação. $\delta_2\mathcal{L}$ e $\delta_1\mathcal{L}$ podem ser obtidos da expansão de (2.7) em série de Taylor em torno de $\varphi(t)$. Efetuando a referida expansão e utilizando as equações de fundo (2.12), (2.13) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta_2 S_m = & \frac{1}{6l^2} \int d^4 x a^2 \sqrt{\gamma} \{ (-3\psi^2 + 2\psi\Delta E + 2E^{ij} E_{ij} - (\Delta E)^2 - B^i B_i) \quad (2.38) \\
& + 6\psi\phi - 2\phi\Delta E + \phi^2)(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \varepsilon) - 6l^2 a^2 V_{,\varphi} \phi \delta\varphi + \\
& + 6l^2 \phi^2 \varphi'^2 + 18l^2 \psi \phi \varphi'^2 - 18l^2 \psi \varphi' \delta\varphi' + 18l^2 a^2 V_{,\varphi} \psi \delta\varphi + \\
& - 6l^2 \varphi'^2 \phi \Delta E + 6l^2 \varphi' \delta\varphi' \Delta E - 6l^2 a^2 V_{,\varphi} \Delta E \delta\varphi - 3l^2 \varphi'^2 B^i B_i + \\
& - 6l^2 \phi \varphi' \delta\varphi' + 3l^2 (\delta\varphi'^2 + \delta\varphi \Delta \delta\varphi - V_{,\varphi\varphi} a^2 \delta\varphi^2) - 6l^2 \varphi' \delta\varphi_{;i} B^i \} ,
\end{aligned}$$

exceto por uma divergência total.

Combinando $\delta_2 S_g + \delta_2 S_m$ e usando novamente (2.12), (2.13) e (2.14), encontramos

$$\begin{aligned}
\delta_2 S_t = & \frac{1}{6l^2} \int d^4 x a^2 \sqrt{\gamma} \{ -6\psi'^2 - 12\mathcal{H}\phi\psi' + 2\Delta\psi(2\phi - \psi) + \quad (2.39) \\
& - 2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi^2 + 3l^2 [\delta\varphi'^2 + \delta\varphi \Delta \delta\varphi - V_{,\varphi\varphi} a^2 \delta\varphi^2] + \\
& + 6l^2 (3\varphi' \psi' \delta\varphi - \varphi' \delta\varphi' \phi - a^2 V_{,\varphi} \phi \delta\varphi) + \varepsilon [2(B - E') \Delta(B - E') + \\
& - 6\psi^2 + 2\phi^2 + 12\psi\phi] + 4\Delta(B - E') \left(\frac{3l^2}{2} \varphi' \delta\varphi - \psi' - \mathcal{H}\phi \right) \} ,
\end{aligned}$$

exceto por uma divergência total. A ação (2.39) foi encontrada primeiramente por Garriga et al como sendo a extensão analítica de uma outra ação, obtida no contexto das teorias de inflação aberta [23] .

Tendo calculado a ação total para as perturbações, obteremos a partir do cálculo das variações as equações de movimento destas. Mais tarde veremos que, ao quantizar as perturbações, as equações dos modos de Fourier de suas expansões em operadores de criação e destruição serão as mesmas equações das correspondentes perturbações clássicas, o que estabelece uma ligação entre os tratamentos clássico e quântico.

Observemos que nem B nem E aparecem isoladamente na ação $\delta_2 S_t$, mas somente a combinação $(B - E')$. Variando $\delta_2 S_t$ com relação a E obteremos portanto a derivada temporal

da equação obtida variando-se $\delta_2 S_t$ com relação a B . Para obter a referida equação basta portanto variar $\delta_2 S_t$ com relação a $(B - E')$.

Variando $\delta_2 S_t$ com relação a $\phi, \psi, (B - E')$ e $\delta\varphi$ obtemos, respectivamente, as seguintes equações:

$$\Delta\psi - 3\mathcal{H}\psi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi - \mathcal{H}\Delta(B - E') + \varepsilon(\phi + 3\psi) = \frac{3l^2}{2}(\varphi'\delta\varphi' + V_{,\varphi}\alpha^2\delta\varphi) \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \psi'' + \frac{1}{3}\Delta(\phi - \psi) + \mathcal{H}\phi' + 2\mathcal{H}\psi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi + \varepsilon(\phi - \psi) + \frac{1}{3}\Delta(B - E')' + \\ + \frac{2}{3}\mathcal{H}\Delta(B - E') = \frac{3l^2}{2}(\varphi'\delta\varphi' - V_{,\varphi}\alpha^2\delta\varphi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\psi' + \mathcal{H}\phi - \varepsilon(B - E') = \frac{3l^2}{2}\varphi'\delta\varphi \quad (2.42)$$

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \Delta\delta\varphi + V_{,\varphi\varphi}\alpha^2\delta\varphi - 3\varphi'\psi' + 2V_{,\varphi}\alpha^2\phi - \varphi'\phi' + \varphi'\Delta(B - E') = 0, \quad (2.43)$$

onde usamos em (2.43) a equação de fundo (2.14).

Até o presente momento não fizemos qualquer fixação de calibre. Por conveniência faremos a escolha do calibre em que $B = E = 0$ (newtoniano ou longitudinal). Essa escolha não acarreta nenhuma perda de informação, pois conhecendo uma certa solução em um determinado calibre, desde que este fixe completamente a parte temporal, é possível colocar a solução na forma livre de calibre, e a partir desta expressar a solução em qualquer calibre desejado. Além disso, as variáveis expressas em um calibre que não deixe modo residual podem ser consideradas como sendo as variáveis invariantes de calibre [39].

Reescrevendo as equações das perturbações no calibre newtoniano, ou, equivalentemente, em função das variáveis (2.24) e (2.25), obtemos

$$\Delta\Psi - 3\mathcal{H}\Psi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + \varepsilon(\Phi + 3\Psi) = \frac{3l^2}{2}(\varphi'\delta\varphi^{(gi)'} + V_{,\varphi}a^2\delta\varphi^{(gi)}) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \Psi'' + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + \varepsilon(\Phi - \Psi) = \\ = \frac{3l^2}{2}(\varphi'\delta\varphi^{(gi)'} - V_{,\varphi}a^2\delta\varphi^{(gi)}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = \frac{3l^2}{2}\varphi'\delta\varphi^{(gi)} \quad (2.46)$$

$$\delta\varphi^{(gi)''} + 2\mathcal{H}\delta\varphi^{(gi)'} - \Delta\delta\varphi^{(gi)} + V_{,\varphi\varphi}a^2\delta\varphi^{(gi)} - 3\varphi'\Psi' + 2V_{,\varphi}a^2\Phi - \varphi'\Phi' = 0. \quad (2.47)$$

Substituindo (2.46) em (2.45), e usando a equação de fundo (2.14) obtemos

$$\Phi = \Psi. \quad (2.48)$$

As perturbações métricas possuem portanto apenas um grau de liberdade. Da equação de vínculo (2.46) podemos ver que o único grau de liberdade $\delta\varphi^{(gi)}$ das perturbações de matéria está amarrado a Φ , donde podemos concluir que as perturbações de matéria e da métrica possuem em conjunto apenas um grau de liberdade. Mais adiante, no capítulo 4, identificaremos a variável dinâmica correspondente a esse único grau de liberdade das perturbações. Podemos agora reescrever o elemento de linha (2.6) em função apenas de Φ :

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j \right\}. \quad (2.49)$$

A interpretação física da variável Φ agora é clara, esta representa um potencial newtoniano generalizado. Por isso o calibre em que $B = E = 0$ e $\phi = \Phi$ é denominado calibre newtoniano.

Substituindo agora (2.48) em (2.44), utilizando (2.46) para eliminar $\delta\varphi^{(gi)}$ e a equação de fundo (2.14) obtemos

$$\Phi'' + 2\left(\frac{a}{\varphi'}\right)' \left(\frac{\varphi'}{a}\right)\Phi' - \Delta\Phi + 2\left[\varphi' \left(\frac{\mathcal{H}}{\varphi'}\right)' - 2\varepsilon\right]\Phi = 0. \quad (2.50)$$

Fazendo a substituição

$$\Phi = \left(\frac{\varphi'}{a}\right) u, \quad (2.51)$$

e usando a equação de fundo (2.12), podemos escrever

$$u'' - \Delta u - \left[\left(\frac{1}{z}\right)^{-1} \left(\frac{1}{z}\right)'' + \frac{2\varepsilon(a^2\varphi')'}{\mathcal{H}a^2\varphi'} \right] u = 0, \quad (2.52)$$

onde $z = \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}}$. A equação (2.52) foi encontrada por Hwang em [49], porém aplicando uma mudança de variável nas equações das perturbações para teorias de gravitação generalizada.

Essa equação desempenhará um papel importante no estudo das perturbações.

Capítulo 3

O Método da Equivalência Conforme

Neste capítulo apresentaremos o método da equivalência conforme das teorias de gravitação generalizadas com a Relatividade Geral. A aplicação desse método permite estabelecermos uma correspondência entre as equações de gravitação generalizada (referencial de Jordan) e as equações da Relatividade Geral (referencial de Einstein) e, por conseguinte, entre as suas soluções. Com a aplicação do método da equivalência conforme podemos aproveitar diversas soluções conhecidas das equações de campo de Relatividade Geral e da teoria de perturbações cosmológicas apresentada no capítulo 2 para encontrar as soluções correspondentes no contexto da gravitação generalizada.

Estudos de formas generalizadas da gravitação de Einstein foram feitos por diversos autores. Algumas das teorias generalizadas mais estudadas incluem as teorias de Brans-Dicke, gravitação de matéria induzida, acoplamento com dilação, acoplamento não linear com o escalar de curvatura e termos não lineares deste, etc. Há diversos motivos para se estudar teorias generalizadas de gravitação, entre os quais estão as teorias de unificação de altas energias, correções quânticas à gravitação de Einstein, o desenvolvimento de modelos de universo inflacionário onde não é necessário o ajuste fino das condições iniciais, etc. Diante das teorias generalizadas de gravitação, a Relatividade Geral é apenas um caso limite.

Entre diversos trabalhos importantes (veja por exemplo [50] e [51]) sobre a análise de teorias generalizadas de gravitação via equivalência conforme com a Relatividade Geral, destaca-se o trabalho de Maeda [50] , por tratar o caso mais geral. A aplicação do método ao estudo das

perturbações cosmológicas para o caso mais geral foi feita por Hwang em [52] no contexto da formulação Quasi-Maxwelliana da gravitação e em [53] , que é a principal referência para o presente capítulo, no contexto do método da equivalência conforme.

É importante salientar que a equivalência conforme entre as teorias de gravitação generalizada e a Relatividade Geral está sendo considerada neste trabalho apenas como um artifício matemático. Assumiremos aqui que o referencial físico é o referencial de Jordan, sendo o referencial de Einstein um referencial fictício, útil apenas para facilitar nossos cálculos. Alguns autores consideram o referencial físico como sendo o referencial de Einstein, enquanto outros consideram que o referencial físico é o de Jordan. Em algumas teorias de gravitação generalizada ambos os referenciais são fisicamente equivalentes. Para uma discussão sobre esse aspecto veja ([54] ,[55]), e principalmente [28] , que fornece uma lista dos autores que seguem cada uma das duas correntes ou que ignoram o assunto.

Na exposição feita a seguir procuramos dar sempre o tratamento mais geral possível, particularizando as equações para o caso do acoplamento conforme somente quando necessário.

Inicialmente partimos da métrica total (2.6)

$$ds^2 = a^2(\eta) \left\{ (1 + 2\phi)d\eta^2 - 2B_{|i}dx^i d\eta - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{|ij}] dx^i dx^j \right\} .$$

Aplicando uma transformação conforme de fator Ω^2 podemos escrever

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = \tilde{a}^2(\eta) \left\{ (1 + 2\tilde{\phi})d\eta^2 - 2\tilde{B}_{|i}dx^i d\eta - [(1 - 2\tilde{\psi})\tilde{\gamma}_{ij} + 2\tilde{E}_{|ij}] dx^i dx^j \right\} , \quad (3.1)$$

onde $\Omega(\vec{x}, \eta) = \Omega(\eta) + \delta\Omega(\vec{x}, \eta)$. O til denota as variáveis conformalmente transformadas (referencial de Einstein) e $\delta\Omega(\vec{x}, \eta)$ é uma perturbação. Considerando apenas os termos lineares nas perturbações temos

$$\Omega^2 = \Omega^2 \left(1 + 2\frac{\delta\Omega}{\Omega} \right) , \quad (3.2)$$

e portanto podemos reescrever (3.1) como

$$d\tilde{s}^2 = a^2\Omega^2 \left\{ \left[1 + 2 \left(\phi + \frac{\delta\Omega}{\Omega} \right) \right] d\eta^2 - 2B_{|i} dx^i d\eta + \right. \\ \left. - \left[1 - 2 \left(\psi - \frac{\delta\Omega}{\Omega} \right) \gamma_{ij} + 2E_{|ij} \right] dx^i dx^j \right\} \quad (3.3)$$

Comparando (3.1) e (3.3) podemos concluir que

$$\begin{cases} \tilde{a} = \Omega a \\ \tilde{\phi} = \phi + \frac{\delta\Omega}{\Omega} \\ \tilde{\psi} = \psi - \frac{\delta\Omega}{\Omega} \\ \tilde{B} = B \\ \tilde{E} = E \end{cases} \quad (3.4)$$

Agora consideremos a densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}f(\varphi, R) - \frac{1}{2}\omega(\varphi)\varphi^{i\alpha}\varphi_{i\alpha} + V(\varphi) . \quad (3.5)$$

Mostraremos, a seguir, que com a escolha adequada do fator conforme podemos transformar a densidade lagrangeana (3.5) na densidade lagrangeana de Einstein. Para isso escolhemos

$$\Omega = l\sqrt{3F} = l\sqrt{3}e^{\frac{1}{\sqrt{6}}\zeta} , \quad (3.6)$$

onde $F = \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right|$. De (3.6) temos

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega} = \frac{\delta F}{2F} = \frac{1}{\sqrt{6}}\delta\zeta . \quad (3.7)$$

Para ver como (3.5) se transforma sob uma transformação conforme lembremos que $\sqrt{-\tilde{g}} = 9l^4 F^2 \sqrt{-g}$, donde temos

$$\int \tilde{\mathcal{L}}\sqrt{-\tilde{g}}d^4x = \int \tilde{\mathcal{L}} 9l^4 F^2 \sqrt{-g} = \int \mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x , \quad (3.8)$$

o que permite escrever

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}}{9l^4 F^2} . \quad (3.9)$$

Diante de uma transformação de fator conforme $l\sqrt{3F}$ o escalar de curvatura se transforma como [27]

$$\tilde{R} = \frac{1}{3l^2 F} \left(R - \frac{6}{\sqrt{F}} \left(\sqrt{F} \right)_{;\alpha}^{\alpha} \right) = \frac{1}{3l^2 F} \left(R - \zeta^{;\alpha} \zeta_{;\alpha} - \sqrt{6} \zeta^{;\alpha} \right) . \quad (3.10)$$

Assim podemos escrever

$$\frac{1}{6l^2} \tilde{R} \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{1}{2} F \sqrt{-g} \left(R - \zeta^{;\alpha} \zeta_{;\alpha} - \sqrt{6} \zeta^{;\alpha} \right) . \quad (3.11)$$

Integrando por partes a expressão anterior e usando (3.6) temos

$$\frac{1}{6l^2} \tilde{R} \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{1}{18l^4 F} \sqrt{-\tilde{g}} \left(R + \zeta^{;\alpha} \zeta_{;\alpha} \right) . \quad (3.12)$$

Usando (3.12) e (3.9) podemos reescrever a ação (3.8) como

$$S = \int \tilde{\mathcal{L}} \sqrt{-\tilde{g}} d^4 x = \int \left\{ \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{9l^4 F^2} \left[-\frac{1}{2} f(\varphi, R) - \frac{3l^2 F}{2} \omega(\varphi) \varphi^{;\alpha} \varphi_{;\alpha} + V(\varphi) \right] - \frac{1}{6l^2} \tilde{R} \sqrt{-\tilde{g}} + \frac{1}{18l^4 F} \sqrt{-\tilde{g}} \left(R + \zeta^{;\alpha} \zeta_{;\alpha} \right) \right\} d^4 x , \quad (3.13)$$

onde $\varphi^{;\alpha} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \varphi_{;\beta}$. De (3.13) temos a seguinte densidade lagrangeana

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{6l^2} \tilde{R} - \frac{\omega}{6l^2 F} \varphi^{;\alpha} \varphi_{;\alpha} + \frac{1}{6l^2} \zeta^{;\alpha} \zeta_{;\alpha} - \tilde{V}(\varphi, \psi) , \quad (3.14)$$

sendo $\tilde{V}(\varphi, \zeta)$ dado por

$$\tilde{V}(\varphi, \zeta) = \frac{-RF + f - 2V}{18l^4 F^2} , \quad (3.15)$$

onde, de (3.6), temos $R = R(\varphi, \zeta)$. A densidade lagrangeana (3.14) é a densidade lagrangeana de Einstein com um campo escalar extra ζ . Em muitas situações, como no caso do nosso modelo, $\zeta = \zeta(\varphi)$. Nesse caso podemos introduzir um novo campo escalar $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\varphi)$ que satisfaz

$$d\tilde{\varphi}^2 = -\frac{\omega}{3l^2 F} d\varphi^2 + \frac{1}{3l^2} d\zeta^2 . \quad (3.16)$$

Assim podemos escrever

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{6l^2} \tilde{R} + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}^{\tilde{\alpha}} \tilde{\varphi}_{;\tilde{\alpha}} - \tilde{V}(\tilde{\varphi}) , \quad (3.17)$$

que é a densidade lagrangeana da Relatividade Geral.

Vamos agora voltar nossa atenção para o caso particular de interesse, que é o do acoplamento conforme. Para esse caso temos

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} \right) \\ \omega = 1 \\ V = 0 \end{array} \right. , \quad (3.18)$$

e portanto podemos, usando (3.6) e (3.4), reescrever (3.16), (3.15) e \tilde{a} como

$$d\tilde{\varphi} = \frac{d\varphi}{3l^2 \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} \right)} \quad (3.19)$$

$$\tilde{V} = -\frac{V}{9l^4 \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} \right)^2} = 0 \quad (3.20)$$

$$\tilde{a} = \sqrt{3l \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} \right)} a . \quad (3.21)$$

A expressão (3.7) pode ser reescrita como

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega} = \frac{\delta F}{2F} = \frac{1}{6\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)} \varphi \delta\varphi. \quad (3.22)$$

As variáveis invariantes de calibre dos referenciais de Jordan e de Einstein se relacionam da seguinte forma

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} + \frac{1}{\tilde{a}} \left[(\tilde{B} - \tilde{E}') \tilde{a} \right]' = \Phi + \frac{1}{6\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)} \varphi \delta\varphi^{(gi)} \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\psi} - \left(\frac{\tilde{a}'}{\tilde{a}} \right) (\tilde{B} - \tilde{E}') = \Psi - \frac{1}{6\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)} \varphi \delta\varphi^{(gi)}, \quad (3.24)$$

onde $\delta\varphi^{(gi)} = \delta\varphi + \varphi' (B - E')$. De (3.19) podemos escrever

$$\delta\tilde{\varphi}^{(gi)} = \frac{\delta\varphi^{(gi)}}{3l^2\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)}. \quad (3.25)$$

Como as variáveis de perturbação conformalmente transformadas estão no referencial de Einstein, as equações satisfeitas por essas variáveis são as mesmas do capítulo 2. Então podemos escrever

$$\tilde{\Psi}' + \tilde{\mathcal{H}}\tilde{\Phi} = \frac{3l^2}{2} \tilde{\varphi}' \delta\tilde{\varphi}^{(gi)} \quad (3.26)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi} \quad (3.27)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{\tilde{\varphi}' \tilde{u}}{\tilde{a}} \quad (3.28)$$

$$\tilde{u}'' - \Delta\tilde{u} - \left[\left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' + \frac{2\varepsilon(\tilde{a}^2 \tilde{\varphi}')'}{\tilde{\mathcal{H}} \tilde{a}^2 \tilde{\varphi}'} \right] \tilde{u} = 0, \quad (3.29)$$

onde $\tilde{z} = \frac{\tilde{a}\tilde{\varphi}'}{\tilde{\mathcal{H}}}$. De (3.23), (3.24) e (3.27) temos

$$2\tilde{\Phi} = \Phi + \Psi . \quad (3.30)$$

Usando (3.25) para expressar $\delta\varphi^{(gi)}$ em função de $\delta\tilde{\varphi}^{(gi)}$ em (3.23) , e posteriormante empregando (3.26) para eliminar $\delta\tilde{\varphi}^{(gi)}$, podemos obter, com o auxílio de (3.21) , (3.28) e (3.19), a expressão

$$\Phi = \frac{\varphi'}{\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{u}}{3\sqrt{3}l^3a} - \frac{\varphi}{3\sqrt{3}l\varphi'a} \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi'\tilde{u}}{\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}}\right)' . \quad (3.31)$$

A partir de (3.30) e (3.31) encontramos Ψ , que é dada por

$$\Psi = \frac{\varphi'}{\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{u}}{3\sqrt{3}l^3a} + \frac{\varphi}{3\sqrt{3}l\varphi'a} \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\varphi'\tilde{u}}{\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}}\right)' . \quad (3.32)$$

Conforme podemos observar, ao contrário do que acontece no caso do acoplamento mínimo, temos $\Phi \neq \Psi$. Isso é devido à presença de termos de pressão anisotrópica [52] .

De (3.21) podemos obter

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\varphi\varphi'}{6\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)} . \quad (3.33)$$

Resta ainda determinar $\delta\varphi^{(gi)}$. Para tal, usamos (3.26) em (3.25) , expressando $\delta\tilde{\varphi}^{(gi)}$ em função de $\delta\varphi^{(gi)}$. Após isso, empregamos (3.28), (3.21) , (3.33) e (3.19) para eliminar todas as demais variáveis com til, com excessão de \tilde{u} . O resultado obtido é

$$\delta\varphi^{(gi)} = \frac{2\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^2}{\sqrt{3}l\varphi'} \left[\left(\frac{\varphi'\tilde{u}}{a\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right)' + \frac{\mathcal{H}\varphi'\tilde{u}}{a\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varphi\varphi'^2\tilde{u}}{6a\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{5}{2}}}\right] . \quad (3.34)$$

As equações (3.31), (3.32) e (3.34) expressam as variáveis de perturbação Φ , Ψ e $\delta\varphi^{(gi)}$ em função de φ e a , que são fornecidos pelo modelo de fundo do capítulo 1, e \tilde{u} , que pode ser encontrado resolvendo-se a equação (3.29).

Observando as equações obtidas para Φ , Ψ e $\delta\varphi^{(gi)}$ somos tentados, em uma primeira análise, a supor que estas variáveis possuem singularidades no tempo em que $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} = 0$. Todavia tal conclusão pode ser precipitada, sendo necessária uma análise mais cuidadosa da questão. Apresentamos no apêndice B uma discussão sobre a existência de singularidade na variável Φ , mostrando que existe uma solução não singular para esta. O mesmo método empregado no apêndice pode ser aplicado às variáveis Ψ e $\delta\varphi^{(gi)}$. No capítulo que segue mostraremos também que, para o caso do nosso modelo de universo, temos $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}$ sempre maior que zero na região de interesse.

Capítulo 4

Teoria Quântica das Perturbações Escalares

Apresentaremos neste capítulo uma teoria de perturbações quânticas para universos do tipo FRW. Essa teoria será baseada na aproximação semi-clássica da gravitação, que consiste na quantização simultânea das flutuações da matéria e da métrica. Quantizar campos em um espaço de fundo não trivial em geral implica em produção de partículas. Esse é um processo básico para a formação de estruturas, além de fornecer as condições iniciais para a posterior evolução clássica das perturbações.

A idéia original de que flutuações quânticas em um universo em expansão evoluíam para mais tarde formar as perturbações clássicas de densidade é devida a Sakharov em 1965 [56]. A concretização dessas idéias através da formulação de uma teoria de perturbações quânticas foi feita posteriormente por Chibisov e Mukhanov [57] e independentemente por Lukash [58] em 1980. Um ano após, Chibisov e Mukhanov fizeram o primeiro cálculo do espectro de potência das perturbações [59], considerando um modelo onde correções quânticas à Relatividade Geral produziam uma teoria de gravitação generalizada com derivadas superiores; esta, por sua vez, gerava inflação. Desde então o espectro de potência das perturbações de densidade foi estimado em diversos trabalhos no contexto dos modelos de novo universo inflacionário [60].

Para desenvolver nosso modelo partiremos, por simplicidade, da hipótese de que as pequenas flutuações seguem uma distribuição gaussiana. Partindo desse pressuposto o cálculo das perturbações de densidade se reduz à determinação da função de correlação de dois pontos [61], da qual é extraído o espectro de potência ([25], [62]). A partir do espectro de potência é possível

obter diversas quantidades observáveis ([7] , [25] , [63]), como $\frac{\delta\rho}{\rho}$, $\frac{\delta T}{T}$, etc, onde ρ é a densidade de matéria e T é a temperatura da radiação de fundo.

No contexto da aproximação semi-clássica da gravitação, a função correlação de dois pontos de uma variável O é definida (assumiremos a representação de Heisenberg) por [25]

$$O(\vec{r}) = \langle 0 | \widehat{O}(\eta, \vec{x}) \widehat{O}(\eta, \vec{x} + \vec{r}) | 0 \rangle = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\text{sen } kr}{k^2 f(r)} dk | \delta_o |^2, & \varepsilon = 0, -1 \\ \sum_{k=1}^\infty \frac{\text{sen } kr}{k^2 f(r)} | \delta_o |^2, & \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde

$$f(r) = \begin{cases} \text{senh } r, & \varepsilon = -1 \\ r, & \varepsilon = 0 \\ \text{sen } r, & \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

A função $| \delta_o(\eta, k) |$ é denominada espectro de potência. O termo $\frac{\text{sen } kr}{k^2 f(r)} | \delta_o(\eta, k) |^2$, pode ser interpretado como uma medida associada à contribuição para a função de correlação de dois pontos da grandeza O devido a ondas de número de onda k . A definição do espectro de potência não é única. Em grande parte da literatura o espectro de potência é definido como $k^{-\frac{3}{2}} | \delta_o(\eta, k) |$ ou $k^{-3} | \delta_o(\eta, k) |^2$. Há ainda uma ambiguidade por um fator $(2\pi)^3$ ou $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ na definição do espectro de potência.

A seguir faremos a quantização das perturbações cosmológicas, calculando o espectro de potência para as grandezas relevantes. Faremos nossos cálculos utilizando o método da equivalência conforme, estabelecido no capítulo 3, para aproveitar os resultados obtidos no capítulo 2. Desenvolveremos portanto todo o raciocínio no referencial fictício (referencial de Einstein) desfazendo, no momento oportuno, a transformação conforme para obter os resultados correspondentes no referencial físico original (referencial de Jordan). É importante salientar que

a razão pela qual obtemos a correspondência correta entre os resultados dos dois referenciais é que estamos considerando apenas perturbações lineares [63] . Em geral, o procedimento de quantização e a transformação conforme não comutam [55] , o que torna necessário fazer a quantização das perturbações no referencial de Jordan. Para saber mais detalhes sobre o uso de transformações conformes no contexto da aproximação semi-clássica veja [64] .

O roteiro para nossos cálculos é semelhante ao de ([10] ,[25]), porém aqui generalizaremos os resultados antes obtidos somente para espaço-tempos com seção espacial plana ($\varepsilon = 0$) para o caso de curvatura constante positiva ou negativa ($\varepsilon \neq 0$).

Partiremos inicialmente da ação (2.39), a qual será reduzida para quantização. Estamos supondo portanto que estamos no referencial de Einstein, que foi obtido mediante uma transformação conforme. Por economia omitiremos o til das equações. Consideraremos, por simplicidade, apenas o caso de interesse $V = 0$. De (2.39) podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta_2 S_t = & \frac{1}{6l^2} \int d^4 x a^2 \sqrt{\gamma} \{ -6\psi'^2 - 12\mathcal{H}\phi\psi' + 2\Delta\psi(2\phi - \psi) + \\ & -2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi^2 + 3l^2[\delta\varphi'^2 + \delta\varphi\Delta\delta\varphi] + 6l^2(3\varphi'\psi'\delta\varphi - \varphi'\delta\varphi'\phi) + \\ & + \varepsilon[2\chi\Delta\chi - 6\psi^2 + 2\phi^2 + 12\psi\phi] + 4\Delta\chi(\frac{3l^2}{2}\varphi'\delta\varphi - \psi' - \mathcal{H}\phi) \} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Conforme foi discutido na capítulo 2 , as perturbações cosmológicas da matéria e da métrica possuem em conjunto apenas um grau de liberdade. Para fazermos a quantização das perturbações devemos portanto fazer a redução da ação (4.3). Quantizar diretamente as variáveis de perturbação Φ , Ψ , etc, sem reduzir a ação não conduz à normalização correta dos modos de expansão dessas variáveis [25] . No apêndice A demonstraremos que a única variável dinâmica do sistema é

$$v = -a \left[\delta\varphi^{(g^i)} + \frac{\varphi'\Psi}{\mathcal{H}} - \frac{2\varepsilon\Psi}{3l^2\varphi'\mathcal{H}} \right], \quad (4.4)$$

e que ação para as perturbações pode ser reescrita então como

$$\delta_2 S_t = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 - v_{|i} v^{|i} + \frac{z''}{z} v^2 \right) \sqrt{\gamma} d^3 x d\eta, \quad z = \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}}. \quad (4.5)$$

Este resultado já era de certa forma esperado. Conforme vimos no capítulo 2, as perturbações métricas e de matéria possuem como um todo apenas um grau de liberdade. Como estamos considerando apenas uma teoria linear nas perturbações, não há acoplamento entre os modos de Fourier destas, e a ação deve ser portanto a de um campo escalar livre. O termo $-\frac{z''}{z}$ pode ser entendido como a massa desse campo escalar, sendo seu valor variável devido ao fato de a métrica de fundo não ser trivial.

Agora que temos a ação reduzida podemos fazer a quantização canônica do sistema. Faremos aqui uma discussão resumida da quantização. Para maiores detalhes sobre a quantização em fundos não triviais veja ([25] , [11] , [13])

Calculemos primeiramente o momento π canonicamente conjugado a v

$$\pi(\eta, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v'(\eta, \vec{x}). \quad (4.6)$$

Agora podemos escrever o hamiltoniano, que é dado por

$$H = \int (v'\pi - \mathcal{L}) \sqrt{\gamma} d^3 x = \frac{1}{2} \int \left(\pi^2 + v_{|i} v^{|i} - \frac{z''}{z} v^2 \right) \sqrt{\gamma} d^3 x. \quad (4.7)$$

Na representação de Heisenberg as variáveis v e π são substituídas pelos operadores \hat{v} e $\hat{\pi}$, que devem satisfazer as seguintes relações de comutação nas hipersuperfícies de tempo constante:

$$[\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{v}(\eta, \vec{x}')] = [\hat{\pi}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{x}')] = 0, \quad [\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (4.8)$$

A distribuição delta segue a normalização

$$\int \delta(\vec{x} - \vec{x}') \sqrt{\gamma} d^3x = 1. \quad (4.9)$$

A dinâmica dos operadores \hat{v} e $\hat{\pi}$ é dada pelas equações de Heisenberg

$$i\hat{v}' = [\hat{v}, \hat{H}] \quad \text{e} \quad i\hat{\pi}' = [\hat{\pi}, \hat{H}], \quad (4.10)$$

que são equivalentes à equação

$$\hat{v}'' - \Delta\hat{v} - \left(\frac{z''}{z}\right)\hat{v} = 0. \quad (4.11)$$

O operador \hat{v} pode ser expandido em uma base ortonormal completa de soluções da equação clássica correspondente a (4.11) [11]. Denotando essas soluções por $F_J(\vec{x})v_J^*(\eta)$ e introduzindo-as na equação (4.11) podemos, separando as variáveis, encontrar as seguintes equações:

$$(\Delta + k_J^2) F_J(\vec{x}) = 0 \quad (4.12)$$

$$v_J'' + E_J^2 v_J = 0, \quad E_J^2 = k_J^2 - \frac{z''}{z}, \quad (4.13)$$

onde

$$k_J^2 = k^2 - \varepsilon.$$

As soluções da equação de Laplace-Beltrami (4.12) para o universo de FRW podem ser encontradas em sua forma explícita na literatura ([11], [65]). Para nossos propósitos não será necessário exibir a forma explícita das soluções. Conforme foi dito, podemos fazer a expansão:

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dJ \left(F_J(\vec{x}) v_J^*(\eta) \hat{a}_J + F_J^*(\vec{x}) v_J(\eta) \hat{a}_J^\dagger \right) \quad (4.14)$$

onde

$$\int dJ = \begin{cases} \int d^3k, & \varepsilon = 0 \\ \int dk \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l, & \varepsilon = -1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l, & \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Os operadores de criação e destruição \hat{a}_J^\dagger e \hat{a}_J devem satisfazer as relações de comutação

$$[\hat{a}_J, \hat{a}_{J'}] = [\hat{a}_J^\dagger, \hat{a}_{J'}^\dagger] = 0 \quad e \quad [\hat{a}_J, \hat{a}_{J'}^\dagger] = \delta_{JJ'} \quad (4.16)$$

A consistência das relações de comutação (4.16) dos operadores de criação e destruição com as relações (4.8) impõe que

$$v'_J(\eta)v_J^*(\eta) - v_J^*(\eta)v'_J(\eta) = 2i \quad (4.17)$$

É um resultado conhecido da literatura [11] que o estado de vácuo definido a partir da quantização sobre um fundo não trivial não é único, possuindo uma dependência temporal. Os modos de frequência positiva e negativa em tempos diferentes não são os mesmos, mas há uma transformação linear que os relaciona dada pelos coeficientes de Bogoliubov, que definiremos a seguir. O estado de vácuo no instante η_i é definido por

$$\hat{a}_J | 0_{\eta_i} \rangle = 0, \quad \forall J, \quad (4.18)$$

onde os operadores \hat{a}_J possuem como modos as funções de frequência positiva no tempo η_i .

$$v_k^*(\eta) \sim e^{-iE_k\eta}, \quad E_k^2 = k^2 - \varepsilon - \frac{z''}{z}. \quad (4.19)$$

Em um instante posterior, entretanto, o estado de vácuo não é mais definido por (4.18), e é dado por

$$\hat{b}_J | 0_{\eta_f} \rangle = 0, \quad \forall J, \quad (4.20)$$

onde os operadores \widehat{b}_J possuem como modos as funções de frequência positiva no tempo η_f . Denotando os modos de frequência positiva e negativa no tempo η_a ($a = i, f$) por $v_J^{*(a)}$ e $v_J^{(a)}$ podemos, devido à linearidade da equação (4.11), escrever

$$v_J^{*(f)} = \int \left(\alpha_{JJ'} v_{J'}^{*(i)} + \beta_{JJ'} v_{J'}^{(i)} \right) dJ', \quad v_J^{(f)} = \int \left(\beta_{JJ'}^* v_{J'}^{*(i)} + \alpha_{JJ'}^* v_{J'}^{(i)} \right) dJ', \quad (4.21)$$

e

$$\int (\alpha_{AJ'} \alpha_{BJ'}^* - \beta_{AJ'} \beta_{BJ'}^*) dJ' = \delta(A - B), \quad (4.22)$$

A transformação linear (4.21) é denominada transformação de Bogoliubov. A relação (4.22) foi obtida de (4.21) e (4.17). De (4.21) e (4.22) podemos obter a transformação que relaciona os operadores de criação e aniquilação

$$\widehat{a}_J = \int \left(\alpha_{JJ'} \widehat{b}_{J'} + \beta_{JJ'}^* \widehat{b}_{J'}^\dagger \right) dJ', \quad \widehat{a}_J^\dagger = \int \left(\beta_{JJ'} \widehat{b}_{J'} + \alpha_{JJ'}^* \widehat{b}_{J'}^\dagger \right) dJ', \quad (4.23)$$

e sua inversa

$$\widehat{b}_J = \int \left(\alpha_{J'J}^* \widehat{a}_{J'} - \beta_{J'J}^* \widehat{a}_{J'}^\dagger \right) dJ', \quad \widehat{b}_J^\dagger = \int \left(\alpha_{J'J} \widehat{a}_{J'}^\dagger - \beta_{J'J} \widehat{a}_{J'} \right) dJ'. \quad (4.24)$$

Um observador no tempo η_i define o operador número de partículas no J-ésimo modo como sendo $\widehat{N}_J = \widehat{a}_J^\dagger \widehat{a}_J$. No tempo η_f , o mesmo observador define o número de partículas no J-ésimo modo como $\widehat{N}_J = \widehat{b}_J^\dagger \widehat{b}_J$. Portanto, se no tempo η_i o observador vê um número nulo de partículas no estado $|0_{\eta_i}\rangle$, no tempo η_f ele verá um número de partículas não nulo nesse estado, dado por

$$\langle 0_{\eta_i} | \widehat{b}_J^\dagger \widehat{b}_J | 0_{\eta_i} \rangle = \int |\beta_{J'J}|^2 dJ'. \quad (4.25)$$

Assim podemos ver qual é o mecanismo responsável pela produção de partículas a partir de um estado inicial de vácuo em um fundo não trivial como, por exemplo, um universo em expansão.

O crescimento de inhomogeneidades tem sua origem em pequenas flutuações quânticas que são amplificadas pela ação do campo gravitacional durante o processo de expansão do universo.

Tendo discutido o mecanismo de geração de inhomogeneidades a partir de um estado inicial de vácuo vamos agora tratar da questão de como defini-lo. A relação (4.17) não é suficiente para fixar os valores de $v_J(\eta_i)$ e $v'_J(\eta_i)$, e são necessárias para isso hipóteses físicas adicionais. Temos então diferentes possibilidades de vácuo fisicamente inequivalentes, e saber qual delas devemos escolher nem sempre é trivial. Felizmente, no modelo cosmológico que estamos considerando, a escolha do vácuo é simples, e pode ser feita baseada em um limite assintótico de partícula livre. Isso se deve ao fato de que no passado remoto, onde $\eta \rightarrow -\infty$, temos $a(\eta) \sim e^{-\eta}$, ou seja, nosso universo se aproxima assintoticamente do universo de Milne. Por conveniência faremos a escolha do sinal negativo para φ , dado por (1.14), e de $\sigma > 1$. Assim temos

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{l} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1} \tanh \eta \right). \quad (4.26)$$

No limite em que $\eta \rightarrow -\infty$ pode-se mostrar, utilizando as equações (1.13), (4.26), (3.21), (3.19) e (3.33), que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z''}{z} = 1 \\ \frac{z'}{z} = 1 \\ \left(\frac{1}{z}\right)'' \left(\frac{1}{z}\right)^{-1} = 1. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

A partir de (4.27) podemos ver que equação (4.13) admite soluções tipo onda plana para o caso em que $\varepsilon = -1$, ou seja,

$$v_k(\eta) \cong \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\eta}. \quad (4.28)$$

Portanto temos $v_k(\eta_i) \cong k^{-\frac{1}{2}} e^{ik\eta_i} \cong k^{\frac{1}{2}}$. Para nossos fins podemos então definir o vácuo

pelas condições iniciais

$$v_k(\eta_i) = k^{-\frac{1}{2}} M(k\eta_i), \quad v'_k(\eta_i) = ik^{\frac{1}{2}} N(k\eta_i), \quad (4.29)$$

onde M e N satisfazem

$$NM^* + N^*M = 2, \quad |M(k\eta_i)| \rightarrow 1, \quad |N(k\eta_i)| \rightarrow 1, \quad \text{para } |k\eta_i| \gg 1. \quad (4.30)$$

Antes de fazermos o cálculo do espectro de potência das variáveis de perturbação no referencial de Jordan, vamos derivar uma relação útil entre Φ e v . Das equações (2.46), (2.48) e (4.4) podemos escrever Φ' e $\delta\varphi^{(gi)}$ em termos de Φ e v

$$\delta\varphi^{(gi)} = \frac{v}{a} + \left(-\frac{\varphi'}{\mathcal{H}} + \frac{2}{3l^2} \frac{\varepsilon}{\varphi' \mathcal{H}} \right) \Phi \quad (4.31)$$

$$\Phi' = -\mathcal{H}\Phi + \frac{3l^2}{2} \varphi' \left(\frac{v}{a} - \frac{\varphi'\Phi}{\mathcal{H}} + \frac{2}{3l^2} \frac{\varepsilon\Phi}{\varphi' \mathcal{H}} \right). \quad (4.32)$$

De (2.44) e (2.48) podemos escrever

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 4\varepsilon\Phi = \frac{3l^2}{2} \varphi' \delta\varphi^{(gi)'} \quad (4.33)$$

Lembramos que estamos considerando $V = 0$. Substituindo (4.31) e (4.32) em (4.33) e utilizando as equações de fundo (2.12) e (2.14) podemos encontrar a relação

$$\Delta\Phi = \frac{3l^2}{2} \frac{\varphi'^2}{\mathcal{H}} \left(\frac{v\mathcal{H}}{a\varphi'} \right)' - \frac{2\varepsilon (a^2\varphi')'}{\mathcal{H}a^2\varphi'} \Phi. \quad (4.34)$$

Desde o início do capítulo estivemos sempre trabalhando no referencial de Einstein, porém, por comodidade, omitimos o til das variáveis. Daqui para a frente voltaremos a colocá-lo, lembrando sempre que o til designa o referencial fictício da Relatividade Geral. Como a quantidades observáveis são extraídas das funções de correlação das variáveis $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Psi}$ e $\delta\widehat{\varphi}^{(gi)}$, é

necessário encontrarmos a relação entre estas variáveis e a variável \widehat{v} . As equações (3.31), (3.32), (3.34) relacionam Φ , Ψ e $\delta\varphi^{(gi)}$ com \widetilde{u} . Essas equações serão satisfeitas pelos modos da expansão dos operadores $\widehat{\Phi}$, $\widehat{\Psi}$ e $\delta\widehat{\varphi}^{(gi)}$ em termos dos operadores de criação e destruição. Calcularemos a seguir o espectro de potência para a grandeza Φ . O cálculo do espectro de potência para as demais grandezas pode ser feito de maneira análoga.

O operador $\widehat{\Phi}$ pode ser expandido da forma [25]

$$\widehat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dk \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l (F_{klm}(\vec{x}) \Phi_k^*(\eta) \widehat{a}_{klm} + F_{klm}^*(\vec{x}) \Phi_k(\eta) \widehat{a}_{klm}^\dagger) , \quad (4.35)$$

onde os modos $\Phi_k(\eta)$ são relacionados com as funções \widetilde{v}_k de (4.14) através da equação (4.34) escrita em modos de Fourier. Primeiramente vamos obter as condições iniciais para Φ_k e Φ_k' a partir das condições iniciais de \widetilde{v}_k , \widetilde{v}_k' , \widetilde{v}_k'' , e \widetilde{v}_k''' , que são fornecidas pelo vácuo e a equação (4.11). Da equação (4.11) temos

$$\widetilde{v}_k'' = \left[- (k^2 - \varepsilon) + \frac{\widetilde{z}''}{\widetilde{z}} \right] \widetilde{v}_k \quad (4.36)$$

$$\widetilde{v}_k''' = \left[- (k^2 - \varepsilon) + \frac{\widetilde{z}''}{\widetilde{z}} \right] \widetilde{v}_k' + \left(\frac{\widetilde{z}'''}{\widetilde{z}} \right)' \widetilde{v}_k . \quad (4.37)$$

Das equações (4.34) e (3.28) podemos escrever

$$\widetilde{u}_k(\eta) = -\frac{3l^2}{2} \frac{\widetilde{a}\widetilde{\varphi}'}{(k^2 - \varepsilon) \widetilde{\mathcal{H}}} \left(\frac{\widetilde{v}_k \widetilde{\mathcal{H}}}{\widetilde{a}\widetilde{\varphi}'} \right)' \left[1 + \frac{2\varepsilon (\widetilde{a}^2 \widetilde{\varphi}')'}{\widetilde{\mathcal{H}} \widetilde{a}^2 \widetilde{\varphi}' (k^2 - \varepsilon)} \right]^{-1} . \quad (4.38)$$

Para o nosso modelo de universo podemos, usando (1.13), (4.26), (3.19) e (3.21), escrever

$$\widetilde{a}^2 \widetilde{\varphi}' = a^2 \varphi' = a_0 \sqrt{\sigma^2 - 1} = \text{constante} . \quad (4.39)$$

Assim podemos simplificar (4.38) para

$$\tilde{u}_k(\eta) = -\frac{3l^2}{2} \frac{\tilde{a}\tilde{\varphi}'}{(k^2 - \varepsilon)\tilde{\mathcal{H}}} \left(\frac{\tilde{v}_k\tilde{\mathcal{H}}}{\tilde{a}\tilde{\varphi}'} \right)'. \quad (4.40)$$

Vamos agora fazer o cálculo das condições iniciais para $\tilde{u}_k(\eta)$ a partir das condições iniciais do vácuo, considerando dois casos limite. O primeiro é o limite de curto comprimento de onda, ou seja, k muito grande. Consideraremos apenas os termos dominantes em k para o limite em questão.

Usando as condições iniciais dadas por (4.29), podemos calcular

$$\tilde{u}_{1k}(\eta_i) = -\frac{3l^2}{2} \frac{i}{k^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.41)$$

Derivando (4.40), usando (4.36) e (4.29) encontramos

$$\tilde{u}'_{1k}(\eta_i) = \frac{3l^2}{2} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.42)$$

Derivando duas vezes (4.40), usando (4.36), (4.37) e (4.29) obtemos

$$\tilde{u}''_{1k}(\eta_i) = \frac{3l^2}{2} ik^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

Agora podemos encontrar as condições iniciais para Φ_k . De (3.31) podemos escrever

$$\Phi_k = B_k \tilde{u}_k + E_k \tilde{u}'_k, \quad (4.44)$$

onde

$$\begin{cases} B_k(\eta) = \frac{\varphi'}{3\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\mathcal{H}\varphi}{3\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi^2\varphi'}{9\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ E_k(\eta) = -\frac{\varphi}{3\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Avaliando (4.44) em $\eta = \eta_i$ e usando (4.41) e (4.42) obtemos

$$\Phi_{1k}(\eta_i) = \frac{3l^2}{2k^{\frac{1}{2}}} E_k(\eta_i). \quad (4.46)$$

Derivando (4.44) e usando (4.41), (4.42) e (4.43) para avaliar em $\eta = \eta_i$ temos

$$\Phi'_{1k}(\eta_i) = \frac{3l^2}{2} ik^{\frac{1}{2}} E_k(\eta_i). \quad (4.47)$$

Vamos agora analisar o limite de longo comprimento de onda, onde k é muito pequeno. Todos os cálculos a seguir serão feitos considerando apenas os dois primeiros termos dominantes em k para esse limite.

Utilizando as condições iniciais dadas por (4.29) e as relações (4.27) encontramos

$$\tilde{u}_{2k}(\eta_i) = -\frac{3l^2}{2} \left(ik^{\frac{1}{2}} - k^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.48)$$

Derivando (4.40), usando (4.36), (4.27) e (4.29) obtemos

$$\tilde{u}'_{2k}(\eta_i) = \frac{3l^2}{2} ik^{\frac{1}{2}}. \quad (4.49)$$

Avaliando (4.44) em $\eta = \eta_i$, usando (4.48) e (4.49) temos

$$\Phi_{2k}(\eta_i) = -\frac{3l^2}{2} \left(ik^{\frac{1}{2}} - k^{-\frac{1}{2}} \right) B_k(\eta_i) - \frac{3l^2}{2} ik^{\frac{1}{2}} E_k(\eta_i). \quad (4.50)$$

Derivando (4.44), usando (4.48) e (4.49) para avaliar em $\eta = \eta_i$ encontramos

$$\Phi'_{2k}(\eta_i) = -\frac{3l^2}{2} \left(ik^{\frac{1}{2}} - k^{-\frac{1}{2}} \right) B'_k(\eta_i) + \frac{3l^2}{2} ik^{\frac{1}{2}} (B_k + E'_k)(\eta_i). \quad (4.51)$$

Encontradas as condições iniciais para Φ_k , resta exibir a sua forma geral. Usando (4.39) podemos reescrever a equação (3.29), que fica simplificada para

$$\tilde{u}'' - \Delta \tilde{u} - \left[\left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' \right] \tilde{u} = 0 . \quad (4.52)$$

Em componentes de Fourier temos

$$\tilde{u}_k'' + \left[k^2 - \varepsilon - \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' \right] \tilde{u}_k = 0 . \quad (4.53)$$

Conforme salientamos no final do capítulo 3, existe um tempo $\eta = \eta_s$ em que $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} = 0$. No apêndice B mostramos que em uma vizinhança suficientemente próxima de $\eta_s = \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{\sigma+1}{2}} \right)$ temos $\left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' \cong \frac{3}{4(\eta-\eta_s)^2}$. Quando nos afastamos suficientemente do tempo η_s , a equação (4.53) possui, para o caso do nosso modelo, um limite assintótico que torna o estudo da evolução das variáveis de perturbação métricas muito simples. Do mesmo modo que foi feito anteriormente, é possível mostrar, utilizando as equações (1.13), (1.14), (3.21), (3.19) e (3.33), que as relações (4.27), são também válidas no limite em que $\sigma \rightarrow \infty$ independentemente do valor de η . No limite em questão η_s fica deslocada para o infinito futuro, e $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}$ é positiva em todos os instantes de tempo. Portanto, considerando que σ é muito grande e usando (4.27) podemos ver que a equação (4.53) possui uma solução de onda plana para o caso em que $\varepsilon = -1$.

Esta é dada por

$$\tilde{u}_k = C_k e^{ik\eta} + D_k e^{-ik\eta} . \quad (4.54)$$

A determinação de C_k e D_k pode ser feita a partir das condições iniciais de $\Phi_k(\eta_i)$ e $\Phi_k'(\eta_i)$. Vamos considerar primeiro o caso em que k é muito grande. Substituindo (4.54) em (4.44) e aplicando as condições iniciais (4.46) e (4.47) encontramos

$$C_{1k} = -\frac{3l^2 i e^{-ik\eta_i}}{2 k^{\frac{3}{2}}} , \quad D_{1k} = 0 , \quad (4.55)$$

o que permite reescrever (4.44) como

$$\Phi_{1k}(\eta) = -\frac{\varphi l}{2\sqrt{3}a \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{ik(\eta-\eta_i)}}{k^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.56)$$

onde usamos (4.45) e consideramos apenas o termo dominante em k .

O caso em que k é muito pequeno é tratado de maneira análoga. Porém, para determinar C_k e D_k devemos considerar o primeiro e o segundo termo dominantes no limite de k pequeno nos cálculos intermediários, descartando este último apenas no final. Substituindo (4.54) em (4.44) e aplicando as condições iniciais (4.50) e (4.51) obtemos

$$C_{2k} = \frac{3}{2}l^2 \left(k^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}k^{\frac{1}{2}}\right) e^{-ik\eta_i}, \quad D_{2k} = \frac{3}{4}l^2 ik^{\frac{1}{2}} e^{ik\eta_i}. \quad (4.57)$$

Considerando apenas o termo dominante em k no limite em que $k \rightarrow 0$ obtemos

$$C_{2k} = \frac{3}{2}l^2 k^{-\frac{1}{2}} e^{-ik\eta_i}, \quad D_{2k} = 0. \quad (4.58)$$

Portanto, para o limite de k pequeno, podemos escrever (4.54) como

$$\Phi_{2k}(\eta) = \left[\frac{\varphi'}{2\sqrt{3}la \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathcal{H}\varphi l}{\sqrt{3}la \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi^2 \varphi' l}{6\sqrt{3}la \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} e^{ik(\eta-\eta_i)}. \quad (4.59)$$

De (1.13) temos

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \tanh \eta \quad (4.60)$$

Substituindo (4.60), (4.26) em (4.56) e (4.59) e tomando o limite em que $\sigma \rightarrow \infty$ obtemos

$$\Phi_k(\eta) = \begin{cases} \Phi_{1k} = -\frac{l\sqrt{2}}{2ak^{\frac{1}{2}}} e^{ik(\eta-\eta_i)}, & k \gg 1 \\ \Phi_{2k} = -\frac{l\sqrt{2}}{ak^{\frac{1}{2}}} e^{ik(\eta-\eta_i)}, & k \ll 1 \end{cases} \quad (4.61)$$

Da solução obtida para Φ_k podemos calcular a espectro de potência de $\widehat{\Phi}$. Para o caso em que $\varepsilon = -1$ este é definido por

$$\langle 0 | \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x}) \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x} + \vec{r}) | 0 \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\text{sen } kr}{k \text{senh } r} |\delta_\Phi|^2. \quad (4.62)$$

Inserindo (4.35) em (4.62) encontramos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x}) \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x} + \vec{r}) | 0 \rangle = \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' |\Phi_k|^2 \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l \sum_{l'=0}^\infty \sum_{m'=-l'}^l [F_{klm}^*(\vec{x}) F_{k'l'm'}(\vec{x} + \vec{r}) \langle 0 | \widehat{a}_{klm}^- \widehat{a}_{k'l'm'}^+ | 0 \rangle]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Para simplificar (4.63) podemos usar as relações (4.16) e a fórmula de adição [25]

$$\sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l F_{klm}^*(\vec{x}) F_{klm}(\vec{x} + \vec{r}) = \frac{k}{2\pi^2} \frac{\text{sen } kr}{\text{senh } r}, \quad (4.64)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned} \langle 0 | \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x}) \widehat{\Phi}(\eta, \vec{x} + \vec{r}) | 0 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk |\Phi_k|^2 \frac{k \text{sen } kr}{\text{senh } r} = \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\text{sen } kr}{k \text{senh } r} \left\{ \frac{k^3}{4\pi^2} |\Phi_k|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

De (4.65) podemos obter a expressão para o espectro de potência de $\widehat{\Phi}$

$$|\delta_\Phi(\eta, k)|^2 = \frac{k^3}{4\pi^2} |\Phi_k(\eta, k)|^2, \quad (4.66)$$

onde $\Phi_k(\eta, k)$ é dado por (4.56) ou (4.59). Como estamos interessados no limite em que $\sigma \rightarrow \infty$ podemos calcular o espectro de potência substituindo $\Phi_k(\eta)$ de (4.61) em (4.66). A expressão encontrada para $|\delta_\Phi(\eta, k)|^2$ é

$$|\delta_{\Phi}(\eta, k)| = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{l_{pl}}{\lambda_{ph}}, & k \gg 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \frac{l_{pl}}{\lambda_{ph}}, & k \ll 1 \end{cases}, \quad (4.67)$$

onde $\lambda_{ph} = \frac{a}{k}$ é comprimento de onda das perturbações em coordenadas físicas. A dependência do espectro de potência com $\frac{l_{pl}}{\lambda_{ph}}$ ocorre também em outros modelos de gravitação generalizada, como o da gravitação R^2 [25].

Vamos agora analisar o espectro de potência encontrado. Consideraremos $a_0 > l_{pl}$ já que para $a_0 \sim l_{pl}$ os efeitos quânticos sobre o espaço-tempo de fundo passam a ser importantes no instante em que $\eta = 0$, invalidando a teoria de perturbações. Pelo mesmo motivo consideraremos $\lambda_{ph} > l_{pl}$ sempre, e portanto $\lambda > \frac{l_{pl}}{a_0}$.

Tanto para $k \gg 1$ quanto para $k \ll 1$ o espectro de potência é nulo para $\eta \rightarrow -\infty$, consequência de termos escolhido o estado de vácuo neste período. A partir de então, o espectro cresce até atingir o máximo quando o universo está no seu tamanho mínimo, e depois decresce indo para zero quando $\eta \rightarrow \infty$. O motivo disso acontecer é que a produção de partículas, e portanto a amplificação das perturbações, é proporcional ao desvio da métrica de fundo de sua forma assintótica nos limites em que $\eta \rightarrow \pm\infty$, que é a de Milne.

Para $k \ll 1$ o máximo de $|\delta_{\Phi}(\eta, k)|$ é $|\delta_{\Phi}(0, k)| = \frac{1}{\lambda} \frac{l_{pl}}{a_0} \ll 1$, não podendo portanto gerar estruturas em larga escala.

Analisemos agora o caso em que $k \gg 1$, ou seja, $\lambda \ll 1$. Conforme vimos antes, $\lambda > \frac{l_{pl}}{a_0}$. Portanto temos $\frac{l_{pl}}{a_0} < \lambda \ll 1$, e a expressão para o espectro de potência só será válida se $\frac{l_{pl}}{a_0} \ll 1$. Uma estimativa razoável para a_0 , por exemplo, seria $a_0 \sim l_{GUT}$, onde l_{GUT} representa a escala de unificação das interações não gravitacionais. Neste caso $\lambda > 10^{-7}$, e a expressão de $|\delta_{\Phi}(\eta, k)|$ para $k \gg 1$ poderia ser aplicável para $10^{-6} \lesssim \lambda \lesssim 10^{-3}$. Consideremos $\lambda \sim 10^{-6}$. Neste caso

o máximo de $|\delta_{\Phi}(\eta, k)|$ será $|\delta_{\Phi}(0, k)| = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{l_{pl}}{\lambda_{a_0}} \sim 10^{-2}$ e $|\delta_{\Phi}(\eta_{GUT}, k)| \sim 10^{-8}$.

Podemos portanto concluir que, desconsiderando efeitos quânticos do espaço-tempo de fundo, o espectro de potência de Φ é estável. Para tempos posteriores a $\eta = 0$ ele assume rapidamente valores muito inferiores ao espectro de potência observado ($\sim 10^{-5}$), mostrando que o modelo proposto neste trabalho não pode ser aplicado para toda a história do universo. Vê-se portanto que a fase pré big bang não deixa traços, já que a etapa expansiva posterior apaga rapidamente qualquer marca.

Capítulo 5

Conclusão

A teoria de perturbações cosmológicas é uma ferramenta de grande importância para a cosmologia moderna. O interesse em perturbações gravitacionais é duplo, seja pelo seu valor para o estudo da estabilidade das soluções exatas das equações de gravitação, ou pelo seu imenso valor para investigar o passado do nosso universo, fornecendo informação sobre a formação das estruturas que conhecemos hoje.

No capítulo 1 apresentamos um modelo de universo eterno oriundo do acoplamento não mínimo da gravitação com um campo escalar. A forma encontrada para o fator de escala já é bastante conhecida na literatura ([19], [20]).

No capítulo 2 foi feita a exposição da teoria de perturbações cosmológicas escalares para universos de FRW que têm como matéria um campo escalar. Os resultados obtidos generalizam para o caso em que a curvatura das seções espaciais é arbitrária ($\varepsilon = -1, 0, 1$) os apresentados antes em [25], que tratam apenas do caso em que a curvatura das seções espaciais é nula ($\varepsilon = 0$).

No capítulo 3, após a apresentação do método da equivalência conforme, aplicamos este para o modelo com acoplamento não mínimo introduzido no capítulo 1.

O capítulo 4 é a parte mais importante do trabalho. Nele foi feita a quantização das perturbações cosmológicas apresentadas no capítulo 2. Novamente generalizamos para o caso em que ($\varepsilon = -1, 0, 1$), porém com a restrição de que $V = 0$. Apresentamos, além disso, o cálculo do espectro de potência para o universo eterno do capítulo 1 em dois limites assintóticos.

Conforme salientamos no final do capítulo 1, o modelo apresentado nesta dissertação

provavelmente não pode ser considerado como realista em estágios do universo que datem da época da nucleossíntese até o presente. Para fases do universo muito anteriores à da nucleossíntese, apesar de ser simplificado, o modelo proposto não apresenta inconsistências. O espectro de potência obtido para a variável de perturbação Φ é estável. Na fase expansiva pós big bang este evolui rapidamente para zero, não deixando qualquer marca desta fase e mostrando que o modelo proposto não pode descrever toda a história do universo. Poderíamos, por exemplo, empregá-lo em estágios anteriores ao big bang e logo após substituí-lo por um modelo inflacionário que amplifique as perturbações. Outro mecanismo de amplificação das perturbações que poderia ser considerado é a transição de fase do universo entre os regimes de matéria descrita por campo escalar, radiação, poeira, etc [66] .

Resta ainda estudar o comportamento das perturbações ao passar pelo zero de $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}$ e para valores genéricos de k .

Entendemos este trabalho como o ponto partida para o estudo das perturbações cosmológicas em outros modelos de universo não singular que sejam mais realistas e que levem em conta efeitos quânticos sobre o espaço-tempo de fundo. Se for verificado que em algum destes modelos a fase pré big bang deixa marcas na radiação cósmica de fundo, então ele poderá ser testado examinando-se os dados já disponíveis do COBE, Saskatoon, etc, e de outros projetos que estão em construção, como o MAP e o PLANCK.

Apêndice A

Redução da Ação

Estabeleceremos a seguir a completa equivalência entre dois tipos de matéria: um campo escalar livre e um fluido perfeito sem variação de entropia e com a equação de estado $\varepsilon = p$.

A equivalência das equações de fundo é trivial. De (2.10) podemos ver que se $V(\varphi) = 0$ temos

$$(T^0_0)_0 = \frac{\varphi'^2}{2a} = \rho \quad (T^0_j)_0 = 0 \quad (T^i_j)_0 = -\frac{\varphi'^2}{2a} \delta^i_j = -p \delta^i_j, \quad (\text{A.1})$$

onde ρ é a densidade de energia e p é a pressão de um fluido perfeito. A parte geométrica (G^μ_ν) é a mesma para os dois fluidos, sendo dada por (2.2). Portanto, desde que $\rho = p = \frac{\varphi'^2}{2a}$, as equações de movimento do fundo de um fluido perfeito e de um campo escalar livre são completamente equivalentes.

Para estabelecer a equivalência entre as perturbações partiremos da ação a seguir, que fornecerá as equações de movimento para as variáveis de perturbação sobre o fundo de um fluido perfeito sem variação de entropia.

$$\begin{aligned} \delta S_f = & \frac{1}{6l^2} \int \sqrt{\gamma} \left\{ -6a^2 (\psi' + \mathcal{H}\phi)^2 + 2a^2 \Delta\psi (2\phi - \psi) + \frac{1}{2} \frac{(c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v)^2}{c_s^2 \beta a^2} \right. \\ & + \frac{1}{2} c_s^2 \varphi_v \Delta \varphi_v - 6c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v \psi' - 2c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v \left(\frac{\phi}{c_s^2} \right)' + a^2 \varepsilon [2(B - E') \Delta(B - E') + \\ & \left. + \frac{2\beta a^2}{c_s} \phi^2 - 6\psi^2 + 12\psi\phi] - 4a^2 \left(\psi' + \mathcal{H}\phi + \frac{c_s \beta^{\frac{1}{2}}}{2a} \varphi_v \right) \Delta(B - E') \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $\beta = (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \varepsilon)$. A variável φ_v é o potencial velocidade, definido por $\varphi_{v,i} = -\frac{2\beta^{\frac{1}{2}}}{c_s} \delta u_i$,

onde δu_i é uma perturbação de velocidade do fluido (veja [25] para maiores detalhes). $c_s = \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}$ é a velocidade do som no fluido, onde S é a entropia deste. No caso de interesse, em que $\rho = p$, temos $c_s = 1$.

Variando δS_f com relação a ϕ , ψ e $(B - E')$ e posteriormente escrevendo as equações obtidas na forma invariante de calibre obtemos, respectivamente

$$\Delta \Psi + 3\varepsilon \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{3l^2}{2} a^2 \delta \rho^{(gi)} \quad (\text{A.3})$$

$$\Psi'' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + 2\mathcal{H}\Psi' - \varepsilon\Psi + \frac{1}{3}\Delta(\Phi - \Psi) = \frac{3l^2}{2} a^2 \delta p^{(gi)} \quad (\text{A.4})$$

$$(\Psi' + \mathcal{H}\Phi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{c_s \beta^{\frac{1}{2}}}{a} \right) \varphi_v^{(gi)}, \quad (\text{A.5})$$

onde $\delta \rho^{(gi)} = \frac{1}{c_s^2} \delta p^{(gi)} = -\frac{(c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v^{(gi)})'}{3l^2 c_s^2 a^4} - \frac{2\beta}{3l^2 a^2 c_s^2} \Phi$, e $\varphi_v^{(gi)} = \varphi_v - 2\frac{a\beta^{\frac{1}{2}}}{c_s} (B - E')$.

A variável $\varphi_v^{(gi)}$ é definida por $\varphi_{v,i}^{(gi)} = -\frac{2\beta^{\frac{1}{2}}}{c_s} \delta u_i^{(gi)}$, onde $\delta u_i^{(gi)} = \delta u_i + a(B - E')|_i$. A expressão $\delta \rho^{(gi)} = \frac{1}{c_s^2} \delta p^{(gi)}$ é um caso particular de $\delta p = c_s^2 \delta \rho + \tau \delta S$, em que $\delta S = 0$. As equações (A.3), (A.4) e (A.5) e a ação (A.2), esta última para o caso particular em que $\varepsilon = 0$, também podem ser encontradas em [25]. Podemos verificar que a ação (A.2) é completamente equivalente a ação (4.3) se estabelecermos a seguinte correspondência entre as variáveis de perturbação e do fundo :

$$\begin{cases} \beta^{\frac{1}{2}} = (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} l \varphi' \\ -\frac{1}{l\sqrt{6}} \varphi_v = a \delta \varphi \\ c_s = 1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

De (A.6) podemos calcular, com auxílio das equações de fundo (2.12), (2.13) e (2.14), as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{(c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v)^2}{c_s^2 \beta a^2} = 3l^2 a^2 \delta \varphi'^2 \\ \frac{1}{2} c_s^2 \varphi_v \Delta \varphi_v = 3l^2 a^2 \delta \varphi \Delta \delta \varphi \\ -6c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v \psi' = 18l^2 a^2 \varphi' \psi' \delta \varphi \\ 2c_s \beta^{\frac{1}{2}} a \varphi_v \left(\frac{\phi}{c_s^2} \right)' = 6l^2 a^2 \varphi' \delta \varphi \phi' \\ \frac{c_s \beta^{\frac{1}{2}}}{2a} \varphi_v = -\frac{3l^2}{2} \varphi' \delta \varphi . \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.7) em (A.2), integrando por partes e utilizando novamente as equações (2.12), (2.13) e (2.14) encontramos a ação (4.3):

$$\begin{aligned} \delta_2 S_t = & \frac{1}{6l^2} \int d^4 x a^2 \sqrt{\gamma} \{ -6\psi'^2 - 12\mathcal{H}\phi\psi' + 2\Delta\psi(2\phi - \psi) + \\ & -2(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi^2 + 3l^2[\delta\varphi'^2 + \delta\varphi\Delta\delta\varphi] + 6l^2(3\varphi'\psi'\delta\varphi - \varphi'\delta\varphi\phi) + \\ & + \varepsilon[2\chi\Delta\chi - 6\psi^2 + 2\phi^2 + 12\psi\phi] + 4\Delta\chi\left(\frac{3l^2}{2}\varphi'\delta\varphi - \psi' - \mathcal{H}\phi\right) \}. \end{aligned}$$

Se as ações são equivalentes, obviamente as equações das variáveis de perturbação também são.

Empregando a correspondência (A.6), podemos encontrar a única variável dinâmica do sistema v apresentada na capítulo 4. Para isso observamos que, para o caso do fluido perfeito com $\rho = p$ e $\delta S = 0$, podemos reescrever (A.2) como

$$\delta_2 S_f = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 - v_i v^i + \frac{z''}{z} v^2 \right) \sqrt{\gamma} d^3 x d\eta, \quad z = \frac{a\beta^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{H}c_s}, \quad (\text{A.8})$$

se [25]

$$v = \frac{1}{\sqrt{6}l} \left(\varphi_v^{(g^i)} - 2z\Psi + \frac{2a\varepsilon}{\mathcal{H}\beta^{\frac{1}{2}}c_s} \Psi \right). \quad (\text{A.9})$$

Aplicando as relações (A.6) em (A.9) obtemos, para v ,

$$v = -a \left[\delta\varphi^{(gi)} + \frac{\varphi'\Psi}{\mathcal{H}} - \frac{2\varepsilon\Psi}{3l^2\varphi'\mathcal{H}} \right], \quad (\text{A.10})$$

que é a variável que permite escrever (4.3) da forma (4.5):

$$\delta_2 S_t = \frac{1}{2} \int \left(v'^2 - v_{|i}v^{|i} + \frac{z''}{z}v^2 \right) \sqrt{\gamma} d^3x d\eta, \quad z = \frac{a\varphi'}{\mathcal{H}}. \quad (\text{A.11})$$

Apêndice B

Discussão sobre a Singularidade de Φ

Mostraremos neste apêndice que existe uma solução da equação de campo para a variável de perturbação Φ que é bem comportada em toda a história do nosso modelo de universo eterno. Portanto, a singularidade que ocorre no instante em que o fator conforme $F = \left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)$ se anula provavelmente não é física, conforme discutiremos a seguir. Faremos nossa análise para as componentes de Fourier Φ_k , mostrando que nenhuma delas é necessariamente singular. Das equações (4.44) e (4.45) temos

$$\Phi_k = \frac{\varphi'}{\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{u}_k}{3\sqrt{3}la} + \frac{2\varphi}{3\sqrt{3}la} \frac{\mathcal{H}\tilde{u}_k}{\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi^2\varphi'\tilde{u}_k}{9\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\varphi\tilde{u}'_k}{3\sqrt{3}la\left(\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\text{B.1})$$

onde usamos a equação de fundo $\varphi'' = -2\mathcal{H}\varphi'$. Adotaremos no que segue a escolha de φ dada por (4.26) e $\sigma > 1$. Resolvendo a equação $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} = 0$ encontramos duas raízes:

$$\eta = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}} \quad e \quad \eta = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}}, \quad (\text{B.2})$$

a primeira real e a segunda imaginária, pois $\sigma > 1$ (veja 1.14). A raiz real $\eta = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}$ também pode ser escrita na forma

$$\eta = \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\sigma+1}{2}}. \quad (\text{B.3})$$

Podemos portanto observar que aparentemente $\Phi_k(\eta)$ possui uma singularidade no ponto em

que $\eta = \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\sigma+1}{2}}$. Expandindo $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2}$ em série de Taylor em torno do ponto $\eta = \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\sigma+1}{2}}$, que denotaremos por η_s , é fácil verificar que em torno do referido ponto $\frac{\varphi^2}{6} - \frac{1}{3l^2} \sim (\eta - \eta_s)$. Para verificar se essa aparente singularidade é real, devemos analisar também o comportamento de \tilde{u}_k , que satisfaz a equação (4.52)

$$\tilde{u}_k'' + \left[k^2 - \varepsilon + \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' \right] \tilde{u}_k = 0.$$

O termo $\left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)'' = \frac{m(\eta)}{n(\eta)}$ pode ser calculado para a dado por (1.13) e φ por (4.26). O Resultado encontrado após simplificação é

$$\frac{m(\eta)}{n(\eta)} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sigma^4 + \sigma^2 + 4\sigma^2 \sinh^2 2\eta + 3\sigma\sqrt{\sigma^2 - 1} \sinh 4\eta + 4 \cosh^2 \eta + \\ + 12 \cosh^4 \eta + 16 \cosh^8 \eta - 32 \cosh^6 \eta - 2 \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma^4 - 2\sigma^2 - 8\sigma^2 \cosh^4 \eta + 8\sigma^2 \cosh^2 \eta + 24 \cosh^4 \eta + \\ - 8 \cosh^2 \eta - 32 \cosh^6 \eta + 16 \cosh^8 \eta + 1 \end{array} \right\}}. \quad (\text{B.4})$$

As raízes do demoninador são

$$\begin{aligned} & \pm \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{-\sigma+1}{2}} \right), \pm \operatorname{arccosh} \left(-\sqrt{\frac{-\sigma+1}{2}} \right), \\ & \pm \operatorname{arccosh} \left(-\sqrt{\frac{\sigma+1}{2}} \right), \pm \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{\sigma+1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Levando em conta que $\sigma > 1$, apenas as raízes $\eta = \pm \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{\sigma+1}{2}} \right)$ são reais. O numerador tem como raiz $\eta = -\operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{\sigma+1}{2}} \right) = \eta_l$. Expandindo $m(\eta)$ e $n(\eta)$ em série de Taylor na vizinhança de η_l encontramos $m(\eta) \sim n(\eta) \sim (\eta - \eta_l)^2$. Portanto $\frac{m(\eta)}{n(\eta)}$ é não singular em η_l . Nos resta então estudar o comportamento de $\left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)''$ na vizinhança do ponto onde $\eta = \eta_s$. Avaliando o numerador $m(\eta)$ no ponto η_s encontramos

$$m(\eta_s) = 12\sigma^4 - 12\sigma^2. \quad (\text{B.6})$$

Expandido o denominador $n(\eta)$ em série de Taylor em torno do ponto η_s obtemos

$$n(\eta) = (16\sigma^4 - 16\sigma^2) (\eta - \eta_s)^2 . \quad (\text{B.7})$$

Então podemos, na vizinhança do ponto η_s , escrever

$$\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^{-1} \left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)'' \sim \frac{12\sigma^4 - 12\sigma^2}{(16\sigma^4 - 16\sigma^2) (\eta - \eta_s)^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{(\eta - \eta_s)^2} . \quad (\text{B.8})$$

Assim, na vizinhança do ponto η_s a equação para \tilde{u}_k pode ser simplificada para

$$\tilde{u}_k'' - \frac{3}{4} \frac{1}{(\eta - \eta_s)^2} \tilde{u}_k = 0 , \quad (\text{B.9})$$

cuja solução geral é

$$\tilde{u}_k(\eta) = C_1 (\eta - \eta_s)^{\frac{3}{2}} + C_2 (\eta - \eta_s)^{-\frac{1}{2}} . \quad (\text{B.10})$$

Substituindo (B.10) em (B.1) podemos ver que se $C_2 = 0$, então Φ_k está bem definida em toda a história do universo. No caso de $C_2 \neq 0$ os modos Φ_k crescem indefinidamente, acabando por se tornarem infinitos no ponto η_s . Uma maneira de contornar o problema é atribuir a divergência ao fato de que na vizinhança de η_s o tratamento perturbativo para Φ_k não é aplicável, e procurar outras variáveis invariantes de gauge que sejam consistentes com um tratamento perturbativo em torno do ponto η_s . Um caso semelhante pode ser encontrado na literatura em um modelo de cosmologia PBB [67], onde essa abordagem é adotada. O resultado encontrado em [67] entretanto é o mesmo já obtido antes em [68] utilizando o calibre newtoniano e descartando o modo crescente em η , o que sugere que o coeficiente do modo crescente de Φ_k é nulo para este modelo.

Neste trabalho não foi necessário levarmos adiante a análise do comportamento de Φ . Como $\eta_s(\sigma)$ é crescente, o que fizemos no capítulo 4 foi escolher σ muito grande (ou $\sigma \rightarrow \infty$),

deslocando η_s para fora do período em que estamos interessados em descrever o universo com nosso modelo.

Se a singularidade em Φ_k existe ou não é uma questão a ser resolvida impondo-se condições físicas que nos permitam determinar os valores de C_1 e C_2 a partir da junção da solução (B.10) com a solução válida para $\tilde{u}_k(\eta)$ em um período imediatamente anterior a $\eta = \eta_s$. É possível que este cálculo implique em $C_2 = 0$.

Referências

- [1] E. Lifshitz and I. Khalatnikov, *Investigations in Relativistic Cosmology*, Adv. Phys. **12** (1963) 185.
- [2] R. Sacks and A. Wolfe, *Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*, Astrophys. **147** (1967) 73.
- [3] A. Guth, *Inflationary cosmology: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys Rev D **23** (1981) 347.
- [4] R. Brandenberger, *Inflationary Cosmology: Progress and Problems*, hep-ph/9910410.
- [5] G. Smoot et al., *Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First Years Maps*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
C. Bennett et al., *Four Year COBE DMR Microwave Background Observations: Maps and Basic Results*, Astrophys. J. **464**, L1 (1996).
- [6] C. Netterfield, N. Jarosik, M. Devlin, N. Jarosik, M. Page and E. Wollack, *A Measurement of the Angular Power Spectrum of the Anisotropy in The Cosmic Microwave Background*, Astrophys. J. **474** (1997) 47.
E. Wollack, M. Devlin, N. Jarosik, C. Netterfield, M. Page and D. Wilkinson, *New Instrument for Investigation of the Cosmic Microwave Radiation at Intermediate angular Scales*, Astrophys. J. **476** (1997) 440.
- [7] J. Martin, A. Riazuelo e M. Sakellariadou, *Non Vacuum Initial States for Cosmological Perturbations of Quantum Mechanical Origin*, astro-ph/9904167.
- [8] PLANCK homepage (1998) <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck>.
- [9] MAP homepage (1998) <http://map.gsfc.nasa.gov/>.
- [10] V. Mukhanov, *Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Sov. Phys. JETP **68** (1988) 1297.

- [11] N. Birrel e P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
S. Fulling, *Aspects of Quantum Field theory in Curved Space-Time*, London Mathematical Society (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [12] R. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Chicago Lectures in Physics (The Chicago University Press, 1994).
- [13] J. Hwang, *Perturbative Semiclassical Approximation in the Uniform Curvature Gauge*, Class. Quantum Grav. **11** (1994) 2305.
- [14] J. Acacio de Barros, N. Pinto Neto and M. and A. Sagiore Leal, *The Causal Interpretation of Dust and Radiation Fluid Non.Singular Quantum Cosmologies*, Phys. Lett. **A241** (1998) 229.
- [15] J. Fabris N. Pinto Neto and A. Velasco, *Quantum Cosmology in Scalar-Tensor with Non Mimimal Coupling*, Class. Quantum Grav. **16** (1999) 3807.
- [16] E. Copeland, A. Lahiri and D. Wands, *Low Energy String Cosmology*, Phys. Rev. D **50** (1994) 4868.
M. Turner and E. Weinberg, *Pre Big Bang Inflation Requires Fine-Tuning*, Phys. Rev. D **56** (1997) 4604.
- [17] M. Novello and J. Salim, *Non Linear Photons in the Universe*, Phys. Rev. D **20** (1979) 377.
- [18] V. Melnikov and S. Orlov, *Nonsingular Cosmology as a Quantum Vacuum Effect*, Phys. Lett. **A70** (1979) 263.
- [19] M. Novello , *The Program of an Eternal Universe* , V Brazilian School of Cosmology and Gravitation, ed. Frontieres, 1989).
- [20] M. Novello, *Theoretical Cosmology* , VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation, ed. Frontieres, 1994).
- [21] B. Spokoiny, *Inflation and Generation of Perturbations in Broken-Symmetric Theory of Gravity*, Lett. **B147** (1984) 39.
D. Salopek, J. Bond and J. Bardeen, *Designing Density Fluctuation Spectra in Inflation*, Phys. Rev. D **40** (1989) 1753.

- M. Pollock, *On the Quasi- De Sitter Cosmological Model of Starobinsky*, Phys. Lett. **B192** (1987) 59.
- [22] Ghosh, G. Pollifrone and G. Veneziano, *Quantum Fluctuations in Open Pre-Big Bang Cosmology*, Phys. Lett. **B440** (1998) 20.
Ghosh, G. Pollifrone e G. Veneziano, *Pre Big Bang Cosmology and Quantum Fluctuations*, hep-th/0001176.
- [23] J. Garriga, X. Montes, M.sasaki and T. Tanaka, *Canonical Quantization of Cosmological Perturbations in the Buble Open Universe*, Nucl. Phys. B **513** (1998) 343.
- [24] J. Garriga, X. Montes, M.sasaki and T. Tanaka, *Spectrum of Cosmological Perturbations in the One- Bubble Open Universe*, astro-ph/9811257.
- [25] V. Mukhanov, H. Feldman e R. Brandenbreger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Phys Rep. **215** (1992) 203.
- [26] J. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **22** (1980) 1882.
- [27] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [28] V. Faraoni, E. Gunzig and P. Nardone, *Conformal Transformations in Classical Gravitational Theories and in Cosmology*, gr-qc/9811047.
- [29] V. Faraoni, *Nonminimal coupling of the Scalar Field and Inflation*, Phys. Rev. D **53** (1996) 6813.
- [30] J. Hwang and H. Noh, *COBE Differential Microwave Radiometer Constraints on an Inflation Model with Nonminimal Scalar Field*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5274.
J. Hwang and H. Noh, *COBE Constraints on Inflation Models with a Massive Nonminimal Scalar Field*, .Phys. Rev. D **60** (1999) 123001-1.
- [31] S. Hawking, *Perturbations of an Expanding Universe*, Astrophys. J. **145** (1966) 544.
- [32] W. Olson, *Density Perturbations in Cosmological Models*, Phys. Rev. D **14** (1976) 2.

- [33] J.Hwang and E. Vishniac, *Analyzing Cosmological Perturbations Using the Covariant Approach*, *Astrophys. J.* **353** (1990) 1.
J.Hwang, *Cosmological Perturbations in Generalised Gravity Theories: Formulation*, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 1613.
- [34] J.Salim, *Equações Quase-Maxelianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos de Friedmann*, Tese de Doutorado do CBPF (1982).
- [35] M. Novello, J. Salim M. Motta da Silva, S. Jorás and R. Klippert, *Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 450.
- [36] J. Bardeen, *Bull Am. Astron. Soc.* **73** (1968).
- [37] U. Gerlach e U. Sengupta, *Relativistic Equations for a Aspherical Gravitational Collapse*, *Phys. Rev. D* **18** (1978) 1789.
- [38] J. Hwang, *The Sachs-Wolfe Effect: Gauge Independence and a General Expression*, astro-ph/9812007.
- [39] J. Hwang and H. Noh, *Cosmological Perturbations in Generalized Gravity Theories*, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1460.
- [40] J. Hwang, *Perturbations of the Robertson Walker Space: Multicomponent Sources and Generalized Gravity*, *Astrophys. J.* **345** (1991) 443.
- [41] J. Hwang, *Evolution of Ideal Fluid Cosmological Perturbations*, *Astrophys. J.* **415** (1993) 486.
- [42] M. Bruni, P. Dunsby and G. Ellis, *Cosmological Perturbations and the Meaning of Gauge Invariant Variables*, *Astrophys. J.* **395** (1992) 34.
- [43] P. D'Earth, *On the Existence of Perturbed Robertson Walker Universes*, *Ann. Phys.* **98** (1976) 237.
- [44] J. Stewart, *Perturbations of Friedmann Robertson Walker Cosmological Models*, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) 1169.
- [45] Kodama e Sasaki, *Cosmological Perturbation Theory*, *Prog. Theo. Phys. Supp.* **78** (1978) 1.

- [58] V. Lukhash, *Pis'ma Zh. Teor. Fiz.* **31** (1980) 467.
- [59] V. Mukhanov and G. Chibisov, *Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe*, *JETP Lett.* **33** (1981) 532.
- [60] Guth and S. Y. Pi, *Fluctuations in the New Inflationary Universe*, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1110.
 S. Hawking, *The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe*, *Phys. Lett.* **B115** (1982) 295.
 J. Bardeen, P. Steinhardt and M. Turner, *Spontaneous Creation of Almost Scale-Free Density Perturbations in an Inflationary Universe*, *Phys. Rev. D* **28** (1983) 679.
- V. Mukhanov and G. Chibisov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **83** (1982) 475.
- [61] P. Coles and F. Lucchin, *The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, (John Wiley & Sons, England, 1995).
- [62] R. Brandenberger in: *Physics of the Early Universe*, eds J. Peacock, A. Heavens and A. Davies (Scottish Universities Summer School, Edinburgh, 1989).
- [63] J. Hwang, *Quantum Generations of Cosmological Perturbations in Generalized Gravity*, *Class. Quantum Grav.* **14** (1997) 3327.
- [64] M. Duff in *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*. ed Isham, Penrose and Sciama (Oxford, Oxford University Press, 1981).
- [65] L. Parker and A. Fulling, *Adiabatic Regularization of the Energy Momentum Tensor of a Quantized Field in Homogeneous Spaces*, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 341.
 Grib, S. Mamaev and V. Mostepanenko, *Quantum Effects in Strong Gravitational Fields*, (Atomizdat, Moscow, 1980).
- [66] J. Martin and D. Schwartz, *The Influence of Cosmological Transitions on the Evolution of Density Perturbations*, gr-qc/9704049.
- [67] R. Brunstein, M. Gasperini and M. Giovannini, *Metric Perturbations in Dilaton-Driven Inflation*, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 6744.
- [68] M. Gasperini and V. Veneziano, *Dilaton Production in String Cosmology*, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2519.

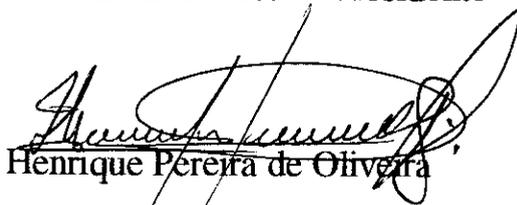
"A EVOLUÇÃO DE PERTURBAÇÕES ESCALARES QUÂNTICAS EM UM MODELO DE UNIVERSO ETERNO"

Gustavo Dourado Barbosa

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



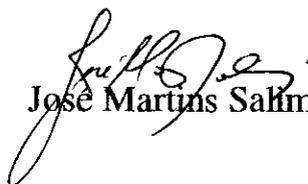
Nelson Pinto Neto - Presidente



Henrique Pereira de Oliveira



Mário Novello



José Martins Salim - Suplente

Rio de Janeiro, 28 de março de 2000