

Tese de Mestrado

Propriedades Elásticas e Flutuações
Térmicas na Rede de Vórtices

Silvana Maria Weinschütz

Departamento de Campos e Partículas
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, dezembro de 1999

Aos meus pais

Zinilda Weinschütz e

Werner Weinschütz (in memoriam).

*“Se clamares por conhecimento, e por inteligência alçares
a tua voz,*

*Se como a prata a buscares e como tesouros escondidos
a procurares,*

*Então entenderás o temor do Senhor, e acharás o
conhecimento de Deus.*

*Porque o Senhor dá sabedoria; da sua boca é que vem o
conhecimento e o entendimento.” (Provérbios 2-3,6)*

Resumo

Nesta dissertação de mestrado estudamos as propriedades da rede de linhas de fluxo, para um material supercondutor isotrópico usando a teoria de London para pequenos deslocamentos do seu equilíbrio. O estudo das propriedades elásticas de rede de vórtices requer não somente o conhecimento de sua posição de equilíbrio mas também a expressão do potencial de interação entre as linhas de vórtices. Dentro da abordagem de Lawrence-Doniach são discutidas as flutuações térmicas em supercondutores em camadas na presença de um campo aplicado perpendicularmente as camadas. A contribuição das distorções térmicas para a energia livre causa mudanças significativas na dependência da magnetização com a temperatura e com o campo abaixo de T_c .

Abstract

In this thesis we study the properties of flux-line lattice for isotropic superconductors using the London theory in presence of small displacements from equilibrium. The study of the elastic properties of the vortex lattice requires not only knowledge of its equilibrium configuration but also the expression of the interaction potential between the vortex lines. Within the Lawrence-Doniach approach we discuss the thermal fluctuations in layered superconductors for a magnetic fields applied perpendicular to the layers. The contribution of thermal distortions to the free energy cause significant changes in the temperature and field dependences of magnetization below T_s .

Agradecimentos

A minha mãe Zinilda pelo seu carinho e pela ajuda nas horas mais difíceis.

Ao meu noivo Flávio M. R. d'Almeida por seu imenso carinho, sua compreensão, sua dedicação, por seus conselhos valorosos, e por sua incontável ajuda técnica.

A minha irmã Regina Weinschütz por ter me presenteado com um computador e por seu incentivo.

Ao meu irmão Luiz Carlos Weinschütz por seu carinho.

Ao professor Mauro Melchiades Doria por seu trabalho de orientação desta tese.

Ao professor José Abdalla Helayél-Neto por ter me recebido tão bem no departamento de campos e partículas e pela sua maneira carinhosa e incansável de apoiar os alunos.

Ao professor Walter Baltensperger pelos ensinamentos de eletromagnetismo.

Ao professor Edson Sardella pela ajuda nos cálculos sobre constantes elásticas.

Ao professor Said Salen Sugui Junior pelos gráficos de magnetização.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas e ao Cnpq por haver provido todos os meios para que eu pudesse desenvolver meu trabalho.

À Miriam Simões Coutinho do CFC e aos funcionários da biblioteca a sua atenção e paciência.

Índice

1	Introdução à Supercondutibilidade	1
1.1	Introdução	1
1.2	O Modelo de London	3
1.3	Energia de Excitação dos Pares de Elétrons	8
1.4	Efeito Meissner	10
1.5	Supercondutores do Tipo I e do Tipo II	14
1.6	A Teoria de Ginzburg-Landau	19
1.7	Estado Misto. Rede de Abrikosov	21
2	Constantes Elásticas de um Supercondutor Isotrópico	24
2.1	Introdução	24
2.2	Teoria de London	24
2.3	Propriedades de Uma Linha de Vórtice Isolada	28
2.3.1	Propriedades das Linhas de Vórtices de Forma Arbitrária	31
2.4	Cálculo do Potencial de Interação entre as Linhas de Vórtices	33
2.5	Energia Livre das Linhas de Vórtices	35
2.6	Reticulado de Vórtices Distorcidos	36
2.7	Densidade de Energia Livre Devido ao Deslocamento dos Vórtices	38
2.8	Teoria Elástica	44
3	Supercondutores de Temperatura Crítica Alta	48
3.1	Introdução	48
3.2	Efeito Josephson	48
3.2.1	Arranjo e Junções Josephson	50
3.3	Características dos Materiais	51
3.3.1	Modelo Simples para os Óxidos Supercondutores	53
3.4	Modelo de Lawrence-Doniach	53

3.4.1	Propriedades da Rede de Vórtice	56
3.5	Transições em Sistemas Bidimensionais	59
3.5.1	Transição de Kosterlitz e Thouless em um Gás de Coulomb Bidimensional	60
3.5.2	Transição de Fase em Supercondutores em Camadas	61
4	Flutuações de Vórtices em Supercondutores de T_c Alta	68
4.1	Introdução	68
4.2	Cálculo da Função Partição para uma Rede de Vórtices Bidimensionais	69
4.3	Criação Espontânea de Linhas de Vórtices	75
4.4	Cálculo da Magnetização Renormalizada por Flutuações Térmicas	78
4.5	Função das Flutuações Térmicas na Determinação dos Parâmetros Supercondutores dos Dados da Magnetização	80
5	Conclusão	88
	Referências	90

Lista de Figuras

1.1	Geometria experimental para o cálculo do campo crítico. A amostra é um cilindro longo (de comprimento L e raio r_0). Ela é colocada em um solenóide de raio r_1	12
1.2	Diagrama de fase (H,T) para um supercondutor do tipo I.	14
1.3	Diagrama de fase (H,T) para um supercondutor do tipo II.	15
1.4	Distribuição microscópica do campo em uma parede separando a região normal e a supercondutora. No domínio normal, $h - H_c$; h cai para zero dentro de uma profundidade de penetração no lado supercondutor.	17
1.5	A seção transversal de um vórtice isolado em um supercondutor do tipo II. .	19
1.6	Reticulado hexagonal de linhas de vórtices.	22
1.7	A geometria do reticulado de fluxo para supercondutor isotrópico.....	23
2.1	Linha de vórtice paralela ao eixo z	28
2.2	Núcleo do vórtice, $d\vec{l} = dl\hat{\varphi} = \xi d\varphi\hat{\varphi}$	30
2.3	Linha de vórtice paralela ao eixo \hat{S} formando um ângulo θ com o eixo \hat{z} , $\vec{S} = S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}$	32
2.4	Linhas de vórtices distorcidas.....	33
3.1	Diagrama esquemático do:(a) $YBa_2Cu_3O_6$ um isolante e (b) $YBa_2Cu_3O_7$ um óxido supercondutor.	51
3.2	Estrutura de uma linha de fluxo de um supercondutor em camadas. A linha de vórtice pode ser vista como um arranjo de vórtices panquecas interconectadas por cordas Josephson.	57
3.3	Diagrama de fase de um material altamente anisotrópico, ex.BSCCO.	67
4.1	A magnetização $M(T)$ calculada para diferentes campos e os dados experimentais para o Bi-2:2:1:2.	80
4.2	Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 50,8K$	81

- 4.3 Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 61,5K$ 82
- 4.4 Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 41K$ 83
- 4.5 Magnetização M vs $\ln B$ (B é o campo aplicado), isotermas para um único cristal de $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$; as temperaturas estão indicadas. 85
- 4.6 (a) A profundidade de penetração no plano λ_{ab} vs temperatura T obtida dos dados de $M(T, H)$ no texto (círculo). Os resultados ajustam-se melhor no limite limpo da BCS do que no limite sujo. Os quadrados representam $\lambda_{ab}(T)$ que é obtido dos mesmos dados desprezando as flutuações. O parâmetro $s = 23 \text{ \AA}$ é obtido dos dados usando a eq.(4.52); supõem-se a amostra 100% supercondutora. As barras de erros representativas são mostradas. (b) O mesmo que (a) exceto que $s = 15 \text{ \AA}$ e a amostra é assumida 65% supercondutora. 86

Capítulo 1

Introdução à Supercondutibilidade

1.1 Introdução

Em 1911 o físico, Heike Kamerling Onnes, observou em seu laboratório em Leiden que a resistência elétrica do mercúrio sólido caía rapidamente para zero quando a amostra era esfriada abaixo de 4.2K, o ponto de ebulição do hélio líquido. Este fenômeno foi nomeado de supercondutibilidade, e a temperatura na qual a resistência desaparece é chamada de **temperatura crítica** T_c , que é característica do material. Um ano mais tarde, Onnes descobriu que um campo magnético suficientemente forte restabelece a resistividade na amostra. O campo para o qual a supercondutibilidade desaparece é chamado de **campo crítico**, H_c , ele decresce com o aumento da temperatura.

Duas décadas após o descobrimento de Kamerling Onnes, Meissner e Ochsenfeld encontraram que quando uma substância supercondutora é esfriada abaixo de sua temperatura crítica na presença de um campo magnético aplicado, ela expulsa todo o fluxo magnético de seu interior. Se o campo é aplicado após a substância ter sido esfriada abaixo de T_c , o fluxo magnético é também expelido do interior do supercondutor. Este é o chamado **efeito Meissner**.

Em 1934 Gorter e Casimir introduziram o modelo de dois fluidos no qual os elétrons são divididos em um **fluido normal**, sujeito a espalhamento, e um **superfluido** não sofrendo espalhamento.

Em 1935 F. e H. London propuseram uma teoria fenomenológica das propriedades eletromagnéticas dos supercondutores. Esta teoria prevê que o campo magnético não

desaparece abruptamente na superfície do supercondutor, mas cai exponencialmente com a distância no metal, com um **comprimento característico** λ_L , chamado **comprimento de penetração de London**.

Em 1950 Vitaly Ginzburg e Lev Landau propuseram uma teoria fenomenológica, freqüentemente chamada teoria macroscópica da supercondutibilidade, fundamentada na teoria das transições de fase de segunda ordem de Landau.

Em 1957, Alexei Abrikosov estudou o comportamento dos supercondutores na presença de um campo magnético externo e descobriu que podemos distinguir dois tipos de materiais: supercondutores do tipo I e do tipo II. Enquanto o primeiro expulsa o fluxo magnético completamente de seu interior, o último o faz completamente somente em campos pequenos, mas parcialmente em campos externos mais altos, onde existe a formação do estado misto, estes materiais podem manter a supercondutibilidade mesmo em campos maiores do que 10 teslas.

Também em 1957 John Bardeen, Leon Cooper e Robert Schrieffer propuseram uma teoria microscópica completa da supercondutibilidade, a qual não será do nosso interesse neste trabalho.

Em 1962 Brian Josephson postulou um efeito de tunelamento quântico que pode ocorrer quando uma supercorrente tunela através de uma camada extremamente fina ($\sim 10\text{\AA}$) de um isolante.

Em 1986, Georg Bernorz e Klauss Müller descobriram a supercondutibilidade em materiais cerâmicos [*LaBaCu0*] em 30K. Em 1988, óxidos cupratos de *Bi* e *Tl* foram descobertos com $T_c = 110$ e 125K respectivamente.

O objetivo deste trabalho é uma compreensão fenomenológica do comportamento desses materiais supercondutores de T_c alta, na presença de correntes e campos magnéticos aplicados. Tal tratamento está baseado na aproximação de Ginzburg e Landau (GL) para supercondutores do tipo II, o qual assume que macroscopicamente a supercondutibilidade é descrita adequadamente por um parâmetro de ordem complexo, nos quais os efeitos das flutuações são geralmente pequenos, por tanto, o comportamento como uma função do campo, da temperatura, da corrente, etc, é

determinado usando a teoria de campo médio.

Nos supercondutores óxidos-cupratos (T_c alta) nós enfatizaremos vários pontos que originam uma tendência a estender os efeitos das flutuações térmicas. Esses fatores são: temperatura crítica maior que nos supercondutores clássicos, comprimento de coerência ξ menor, profundidade de penetração magnética λ grande, e a quase-bidimensionalidade. A descrição macroscópica destes materiais requer uma generalização das equações anisotrópicas de GL, tal generalização é dada pelo modelo de Lawrence-Doniach (LD).

Esta dissertação de mestrado compreende os seguintes capítulos: No capítulo 1, apresentaremos as propriedades magnéticas dos supercondutores do tipo II no modelo de London e na teoria de Ginzburg-Landau.

No capítulo 2, estudaremos detalhes da obtenção das constantes elásticas para um material supercondutor isotrópico sob baixa indução magnética, usando a teoria de London.

No capítulo 3, falaremos do efeito Josephson, dos materiais supercondutores em camadas e da transição de Kosterlitz-Thouless em sistemas planares degenerados.

No capítulo 4, apresentaremos detalhes do trabalho feito por *Bulaevskii et al.* para a obtenção de uma temperatura T_s de criação espontânea de vórtices em supercondutores em camadas com acoplamento Josephson. E por último apresentaremos as conclusões.

1.2 O Modelo de London

Uma das idéias mais simples que foi apresentada em 1934 para descrever a supercondutibilidade foi o modelo de dois fluidos. É suposto que uma amostra supercondutora abaixo de T_c está permeada por dois fluidos elétricos; um de elétrons normais e outro de superelétrons. A densidade relativa dos dois fluidos depende da temperatura.

Abaixo de T_c , a medida que abaixamos a temperatura, o gás de elétrons do estado

normal vai se transformando em um fluido quântico de pares de elétrons. Um elétron de condução de dado momento e de spin fracamente acopla-se com outro elétron de momento e spin oposto, são os chamados **pares de Cooper**. Podemos visualizar esta atração pela seguinte representação: Como a rede consiste de íons positivos, o movimento dos elétrons cria uma distorção na rede, devido ao peso da massa dos íons da rede esta distorção relaxa suavemente e é capaz de atrair outro elétron.

A distância entre os dois elétrons do par de Cooper é chamado de **comprimento de coerência** ξ_0 . O par de Cooper tem momento zero, pela relação de de Broglie ($p = \hbar k = 2\pi/\lambda'$) a onda associada tem comprimento de onda (λ') infinito. Os superelétrons (pares de Cooper) fluem sem qualquer dissipação, não existe nenhum espalhamento de pares individuais do fluido e portanto nenhuma resistividade.

F. e H. London começaram com a idéia de modificar as equações eletrodinâmicas usuais e manter as equações de Maxwell para descrever o efeito Meissner. A lei de Ohm foi modificada, usando para isto o modelo de dois fluidos. Da densidade total n de elétrons, existe uma fração n_s de superelétrons. Estes não são espalhados por impurezas ou por fônons da rede, portanto não contribuem para a resistividade. Eles são acelerados livremente com velocidade \vec{v}_s por um campo elétrico \vec{E} , a equação do movimento pode ser escrita como

$$m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = e\vec{E}. \quad (1.1)$$

Podemos definir a densidade supercondutora \vec{J} como segue: a corrente dI através de um elemento de área da , é obtida do deslocamento dos elétrons através do plano da no tempo δt . Durante o tempo δt cada elétron percorre uma distância $\vec{v}\delta t$, a carga dQ que atravessa da durante o tempo δt é, e vezes o número de superelétrons n_s no volume $\vec{v}\hat{n}\delta t da$, onde \hat{n} é o vetor normal a área da ,

$$dI = \frac{\delta Q}{\delta t} = [en_s\vec{v}] \cdot \hat{n} da.$$

A quantidade entre colchetes é o vetor que define a densidade de corrente $\vec{J} = n_s e \vec{v}_s$ que submete-se a seguinte equação:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \vec{E}. \quad (1.2)$$

Usando a equação de Maxwell, $\nabla \times \vec{E} = \partial \vec{h}/c \partial t$ na qual recolocamos a indução magnética \vec{B} , que varia na escala macroscópica, por um campo microscópico local \vec{h} (\vec{B} é a média do microscópico \vec{h}) obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{J} + \frac{n_s e^2}{cm} \vec{h}) = 0. \quad (1.3)$$

F. e H. London notaram que com a lei de Ohm ($\vec{E} = \rho \vec{J}$, ρ é a resistividade) e uma condutividade infinita, $\partial \vec{h}/\partial t = 0$. Então, eles integraram a eq.(1.3) e consideraram a seguinte equação particular:

$$\boxed{\nabla \times \vec{J} + \frac{n_s e^2}{cm} \vec{h} = 0.} \quad (1.4)$$

Esta é a equação de London que descreve a eletrodinâmica do supercondutor. Tomamos a equação de Maxwell $4\pi \vec{J}/c = \nabla \times \vec{h}$, onde o termo $1/c(\partial \vec{D}/\partial t)$, [$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$] é nulo, pois uma resistividade zero implica um campo elétrico zero. Aplicando o operador rotacional em ambos os lados e combinando com a eq.(1.4), obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{h} + \frac{4\pi n_s e^2}{c^2 m} \vec{h} = -\nabla^2 \vec{h} + \frac{4\pi n_s e^2}{c^2 m} \vec{h} = 0 \quad \text{onde} \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0. \quad (1.5)$$

Esta equação ajuda-nos a calcular o campo local dentro do supercondutor. Escrevendo a eq.(1.5) para um problema unidimensional obtemos,

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{h}{\lambda_L^2}, \quad (1.6)$$

onde λ_L é definido por:

$$\lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (1.7)$$

λ_L é a profundidade de penetração de London que mede a extensão do campo magnético dentro do supercondutor. Para obter uma estimativa da ordem de magnitude de λ_L tomamos um elétron por sítio, então a densidade de superelétrons é $n_s \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$, substituindo na eq.(1.7) obtemos λ_L da ordem de 150 Å.

Se considerarmos um supercondutor uniforme finito na região $x > 0$ e aplicarmos o campo magnético H paralelo a superfície, o campo dentro do supercondutor é dado por:

$$h(x) = H \exp(-x/\lambda_L), \quad (1.8)$$

o campo desaparece no interior do supercondutor. A eq.(1.8) mostra que para se ter campo zero no volume do material, deve-se ter uma supercorrente laminar que flui dentro das dimensões de λ_L e que cria um campo oposto dentro do supercondutor e cancela o campo magnético externo.

É mais apropriado variar o potencial vetor \vec{A} em vez do campo \vec{h} , assim usamos a relação $\vec{h} = \nabla \times \vec{A}$. Esta equação não define \vec{A} completamente, é conveniente especificá-la adicionando condições complementares: $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $A_n = 0$ (na superfície da amostra). Quando estas equações são satisfeitas dizemos que \vec{A} foi escolhido no gauge de London. No gauge de London a eq.(1.4) pode ser escrita como:

$$\vec{J} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{A}(\vec{r}). \quad (1.9)$$

A eq.(1.9) é a lei de Ohm reescrita para supercondutores, ela mostra que a eletrodinâmica de London é local; significa que a corrente em algum ponto é dada pelo vetor potencial no mesmo ponto r . A eletrodinâmica local é válida somente para supercondutores do tipo II. No capítulo 2 descreveremos a energia livre no modelo de London.

Existem situações onde o campo microscópico $\vec{h}(\vec{r})$ na amostra tem variações fortes no espaço em uma escala Δx muito menor que as dimensões da amostra. Então é conveniente introduzir um vetor $\vec{B}(\vec{r})$ que é a média de \vec{h} na região em torno do ponto r de dimensões pequenas comparada com a amostra, mas grande quando comparada com Δx . Fora da amostra tomamos por definição $\vec{B} = \vec{h}$. Em uma escala microscópica, \vec{h} satisfaz as equações:

$$\nabla \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{h} = 0$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente local. Então a indução \vec{B} satisfaz:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{\bar{J}} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

onde $\vec{\bar{J}}$ é a densidade de corrente macroscópica.

A eq.(1.9) aplica-se somente quando \vec{J} e \vec{A} variam suavemente no espaço na escala ξ_o . Podemos supor que a corrente $\vec{J}(\vec{r})$ num ponto dependerá do vetor potencial $\vec{A}(\vec{r}')$ em todos pontos vizinhos \vec{r}' tal que $|\vec{r} - \vec{r}'| < \xi_o$. Uma generalização fenomenológica para descrever este efeito foi proposta por Pippard e no gauge de London tem a forma,

$$\vec{J} = C \int \frac{\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}'))}{R^4} e^{-R/\xi_o} d\vec{r}', \quad (1.10)$$

onde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. O coeficiente C é determinado notando que \vec{A} varia suavemente no espaço, pode então sair da integral, e devemos obter o valor de London eq.(1.9). Isto dá,

$$C = \frac{-3ne^2}{4\pi\xi_o mc}. \quad (1.11)$$

Para estimar o valor do comprimento de coerência ξ_o definimos um importante domínio no espaço dos momentos [sec.(1.3)],

$$E_F - \Delta < \frac{p^2}{2m} < E_F + \Delta \quad (1.12)$$

onde E_F é a energia de Fermi e $\Delta \simeq k_B T_c$. A espessura da camada no espaço p , definida pela eq.(1.12) é $\delta p \cong (2\Delta/v_F)$ (onde $v_F = p_F/m$ é a velocidade no nível de Fermi). Um pacote de onda formado de ondas planas cujo momento tem uma incerteza δp tem um comprimento mínimo $\delta x \sim (\hbar/\delta p)$. Isto leva a:

$$\xi_o = b \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}, \quad (1.13)$$

onde b é uma constante de ordem unitária.

Quando a temperatura T é finita a eq.(1.10) permanece válida com um valor de ξ_o quase independente da temperatura. O coeficiente de normalização C depende da temperatura, e desaparece no ponto de transição T_c . Muito próximo de T_c , C é uma função linear de $T_c - T$. Uma vez que C é conhecido, obtemos o valor da profundidade de penetração $\lambda(T)$, os experimentalistas freqüentemente referem-se a uma lei empírica²⁰,

$$\lambda^2(T) = \lambda^2(0) \frac{T_c^4}{T_c^4 - T^4}. \quad (1.14)$$

A equação de London não é aplicável nos casos em que ocorre variação no número de superelétrons n_s . Portanto precisamos de uma teoria mais geral, por exemplo a teoria de Ginzburg-Landau que descreveremos mais adiante na sec.(1.6).

1.3 Energia de Excitação dos Pares de Elétrons

O gás de Fermi é definido como um gás de elétrons livres que satisfazem o princípio da exclusão de Pauli. O estado fundamental de um sistema de N elétrons é formado pelo preenchimento dos níveis eletrônicos de menor energia permitidos pelo princípio de Pauli. O princípio da exclusão de Pauli, afirma que somente podemos colocar um elétron em cada nível eletrônico, os níveis eletrônicos são especificados pelo vetor de onda \vec{k} e pela projeção do spin do elétron ao longo de um eixo arbitrário, que pode assumir os valores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$.

Começamos colocando dois elétrons no nível eletrônico $\vec{k} = 0$, que tem a energia mais baixa possível $E = 0$ ($E = \hbar^2 k^2 / 2m$). Como a energia de um nível eletrônico é proporcional ao quadrado do vetor de onda, quando N for grande a região ocupada pode ser aproximada por uma esfera (esfera de Fermi). O raio da esfera é $|\vec{k}_F|$ (módulo do vetor de Fermi) e seu volume é dado por $4\pi k_F^3 / 3$.

A superfície da esfera de Fermi, que separa os níveis ocupados dos não ocupados é chamada de superfície de Fermi. O momento e a energia dos níveis de Fermi são dados respectivamente por, $\vec{p}_F = \hbar \vec{k}_F$ e $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.

Para calcular a energia do estado fundamental de N elétrons num volume V devemos somar a energia de todos os níveis eletrônicos da esfera de Fermi,

$$E = 2 \sum_{k < k_F} \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad \sum_k k^2 = \sum \frac{V^2}{8\pi^3} \Delta k k^2,$$

no limite quando $\Delta k \rightarrow 0$, o somatório $\sum k \Delta k$ aproxima-se da integral $\int k^2 d^3k$

$$\frac{E}{V} = \frac{\hbar^2}{\pi} \frac{k_F^5}{10m}.$$

A energia por elétron no estado fundamental é $E/N = 3/5(E_F) = 3/2(k_B T_F)$, onde T_F é a temperatura de Fermi e k_B é a constante de Boltzmann.

Os níveis eletrônicos com energia maiores que a energia de Fermi não são ocupados. Para se obter um estado excitado do gás a partir do estado fundamental, é suficiente tomar um elétron de momento \vec{p} de um estado inicialmente ocupado ($\vec{p} \leq \vec{p}_F$) e colocá-lo dentro de um estado \vec{p}' inicialmente vazio ($\vec{p}' > \vec{p}_F$). A energia de excitação deste par elétron-buraco é dada por:

$$E_{pp'} = \frac{(p')^2 - p^2}{2m} \geq 0. \quad (1.15)$$

$E_{pp'}$ é muito pequena se p e p' estão dentro do momento de Fermi.

Foi Leon Cooper quem observou que o gás de elétrons descrito acima, é estável na presença de repulsão entre os elétrons, mas é completamente instável no caso de uma atração entre eles.

Em um gás de elétrons, a única interação que ocorre é a repulsão Coulombiana, logo o fenômeno Cooper não é favorável. Para se obter um elemento atrativo, os elétrons devem estar acoplados a outros sistemas de partículas, ou excitações no sólido. Existem muitas variedades de tais excitações, mas o acoplamento mais importante é a interação elétron-fônon. Como o nosso objetivo é um estudo fenomenológico macroscópico dos supercondutores, não nos preocuparemos em demonstrar a interação elétron-fônon.

Nos supercondutores, a energia $E_{pp'}$ necessária para criar um par de excitações, não é maior do que a dada pela eq.(1.15)¹⁵, é necessário pelo menos fornecer uma certa “energia de emparelhamento” 2Δ :

$$E_{pp'} \geq 2\Delta.$$

Este “hiato” 2Δ é relatado em função da temperatura de transição T_c por, $2\Delta = 3,5k_B T_c$.

1.4 Efeito Meissner

Os condutores são materiais, como os metais, que contêm um grande número de portadores de carga (elétrons ou íons). Estes portadores de carga movem-se livremente por todo o material condutor, respondem a campos elétricos quase infinitesimais e continuam a se mover enquanto estão sob a ação de um campo.

Consideraremos agora o comportamento de um condutor perfeito em dois casos. No primeiro caso uma amostra é esfriada abaixo de T_c na ausência de campo magnético, e não apresenta resistência elétrica. Subseqüentemente um campo magnético é aplicado, e como a densidade de fluxo no metal não pode variar (Lei de Lenz), o campo magnético no interior da amostra permanece nulo. O campo aplicado induz uma corrente sem resistência elétrica que circula na superfície da amostra de tal maneira a criar uma densidade de fluxo magnético dentro do metal que é igual e oposta a densidade de fluxo magnético aplicado. Portanto, a densidade de fluxo líquido dentro da amostra é zero. Uma amostra que não apresenta densidade de fluxo líquido quando um campo magnético é aplicado exhibe **diamagnetismo perfeito**. Se reduzirmos o campo magnético aplicado a zero a amostra volta a condição normal não magnetizada.

No segundo caso a amostra é esfriada abaixo de T_c após um campo magnético ter sido aplicado, da mesma forma que no primeiro caso a resistência cai a zero. Quando reduzimos o campo magnético aplicado para zero, a densidade de fluxo dentro do condutor não pode mudar e correntes permanentes são induzidas para manter o fluxo, e a amostra fica **permanentemente magnetizada**.

Vinte e dois anos após o descobrimento da superconductibilidade achava-se que o efeito de um campo magnético aplicado a um supercondutor seria igual ao de um condutor perfeito.

Em 1933, Meissner e Ochsenfeld mediram a distribuição de fluxo numa amostra de estanho e numa amostra de chumbo que foram esfriadas abaixo de T_c na presença de um campo magnético não muito forte. Eles observaram que as amostras tornavam-

se perfeitamente diamagnéticas espontaneamente, cancelando todo o fluxo em seu interior.

O efeito de um supercondutor não apresentar uma densidade de fluxo interior mesmo quando na presença de um campo magnético aplicado é chamado **efeito Meissner**.

O estado de magnetização de um “condutor perfeito” depende da ordem na qual as condições finais do campo aplicado e da temperatura foram obtidos, mas a magnetização de um supercondutor depende somente dos valores do campo e da temperatura e não da maneira como eles foram gerados.

A reversibilidade da expulsão do campo magnético num supercondutor ideal implica que a transição entre o estado normal e o supercondutor é reversível, as duas fases estão separadas por uma curva limite $H = H_c$. Foi encontrado empiricamente que $H = H_c$ é bem aproximado por uma lei parabólica,

$$H_c(T) \approx H_{co}[1 - (T/T_c)^2],$$

aqui H_{co} é o campo crítico na temperatura zero. Uma consequência da existência de $H_c(T)$ é uma densidade de corrente $J_c(T)$ fluindo através do supercondutor, que o levará para o estado normal.

O campo magnético $H_c(T)$, é descrito termodinamicamente pela energia livre entre os estados normal e supercondutor em campo zero, chamada de energia de condensação do estado supercondutor. Este campo $H_c(T)$ é chamado campo termodinâmico crítico.

Para obtermos a equação de $H_c(T)$ em termos da energia livre, começamos por definir a energia livre para um sistema que consiste de uma amostra mais objetos externos (solenóide). A energia dos elétrons na amostra é dada por:

$$U = \sum_i \left[\frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{eA}{c} \right)^2 + V_i \right] + \sum_{i>j} V_{ij}, \quad (1.16)$$

aqui \vec{A} é o vetor potencial ($\nabla \times \vec{A} = \vec{h}$), V_{ij} representa as interações elétron-elétron e V_i é o potencial de um elétron.

A energia em todo volume da amostra é dada por:

$$U - TS = \int_{V_a} F_a d^3r, \quad (1.17)$$

onde S é a entropia do sistema. A energia do campo magnético, [sec(2.2)], deve ser adicionada a eq.(1.17), então a energia livre \mathcal{F} de um sistema é definida por:

$$\mathcal{F} = \int_{V_a} F_a d^3r + \int_V \frac{\hbar^2}{8\pi} d^3r. \quad (1.18)$$

Nosso próximo passo é calcular a diferença entre a energia livre da fase normal e da fase supercondutora. Considere um cilindro supercondutor longo de raio r_o dentro de um solenóide de raio $r_1 > r_o$, fig.(1.1).

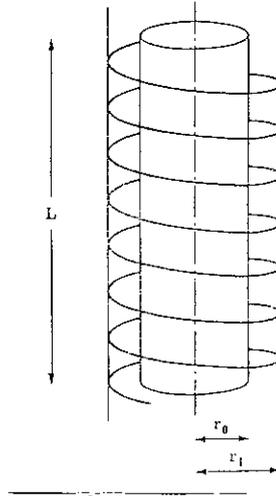


Figura 1.1: Geometria experimental para o cálculo do campo crítico. A amostra é um cilindro longo (de comprimento L e raio r_o). Ela é colocada em um solenóide de raio r_1 .

Uma corrente I flui no solenóide, fora da amostra a distribuição do campo resultante $\vec{h}(\vec{r}) = \vec{H}$ é constante, e dentro da amostra cai rapidamente (profundidade $\lambda \sim 500\text{\AA}$), para zero, na escala r_o , onde $r_o \gg \lambda$, o campo não penetra a mostra.

Quando o cilindro está no estado normal o campo é uniforme através do solenóide. Para mostrar está propriedade escrevemos a eq. de Maxwell $\nabla \times \vec{h} = 4\pi\vec{J}/c$ e aplicamos o teorema de Stokes:

$$\oint_c \vec{h} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}, \quad (1.19)$$

e tomamos como contorno uma linha de força passando através do solenóide (na região $r_o < r < r_1$). A contribuição para $\oint \vec{h} \cdot d\vec{l}$ das linhas de força contornando a corrente magnética no exterior do solenóide são desprezíveis se o solenóide é longo, e obtemos:

$$h = \frac{4\pi NI}{cL}, \quad (1.20)$$

onde N é o número de espiras no solenóide e L é o comprimento, que é também o comprimento da amostra.

A energia livre do sistema no estado normal, é dada por,

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{an} + E_{mag}.$$

Aqui $\mathcal{F}_{an} = F_n \pi r_o^2 L$ é a energia livre para a amostra no estado normal, F_n é a densidade de energia livre para a amostra no estado normal e E_{mag} é a energia magnética armazenada nas espiras,

$$\mathcal{F}_n = \pi r_o^2 L F_n + \pi r_1^2 L \frac{h^2}{8\pi}. \quad (1.21)$$

Se o cilindro torna-se supercondutor, e a corrente for mantida constante no solenóide, o campo é zero na amostra, mas mantém o mesmo valor da eq.(1.20) na região $r_o < r < r_1$. A energia livre do estado supercondutor pode ser escrita como:

$$\mathcal{F}_s = \pi r_o^2 L F_s + \pi(r_1^2 - r_o^2)L \frac{h^2}{8\pi}, \quad (1.22)$$

onde F_s é a densidade de energia livre da amostra supercondutora.

Note que $\mathcal{F}_s < \mathcal{F}_n$, pois $F_s < F_n$ e o termo magnético é menor no estado supercondutor. Existe uma diferença na energia livre quando ocorre a transição do estado normal para o supercondutor, esta diferença induz uma voltagem \mathcal{V} no solenóide. O trabalho realizado por esta voltagem no circuito externo é dado por:

$$dW = \mathcal{V}dq = \mathcal{V}Idt,$$

cada espira é considerada um circuito, da lei de Faraday $\mathcal{V} = -d\phi/cdt$, obtemos

$$W = \int \mathcal{V}Idt = \int_n^s -\frac{NI}{c}d\phi.$$

A corrente I é mantida constante durante a transição e portanto,

$$\int \mathcal{V} I dt = \frac{N}{c} I (\phi_n - \phi_s) = \pi r_o^2 L \frac{h^2}{4\pi}. \quad (1.23)$$

Quando $h(T) = H_c$, devemos ter $\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_s = \int \mathcal{V} I dt$. Usando as eqs.(1.21), (1.22) e (1.23), obtemos

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2(T)}{8\pi}, \quad (1.24)$$

onde F_n e F_s são as densidades de energia livre de Helmholtz nas fases normais e supercondutoras em campo zero respectivamente. A eq.(1.24) descreve o campo termodinâmico crítico em termos das densidades de energia livre de Helmholtz.

1.5 Supercondutores do Tipo I e do Tipo II

Os materiais supercondutores são classificados em supercondutores do tipo I e supercondutores do tipo II. Os do tipo I expulsam o fluxo magnético até o campo magnético alcançar $H_c(T)$. Uma vez que o campo magnético excede seu campo crítico, o supercondutor retorna ao seu estado normal, fig.(1.2).

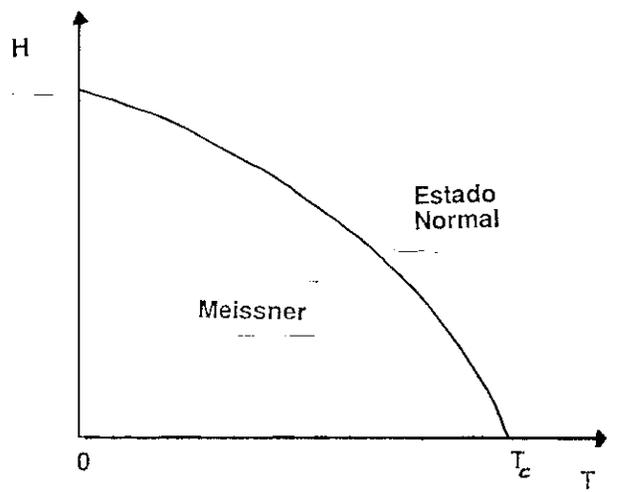


Figura 1.2: Diagrama de fase (H,T) para um supercondutor do tipo I.

Em um supercondutor do tipo II, existe um segundo campo crítico $H_{c2}(T)$ com valor maior que o primeiro campo $H_{c1}(T)$. Abaixo do campo crítico inferior $H_{c1}(T)$ o supercondutor está na fase Meissner. Quando o campo aplicado excede $H_{c1}(T)$ o supercondutor não expulsa o campo inteiramente, mas ainda continua a conduzir sem resistência elétrica até o campo magnético exceder o campo crítico superior $H_{c2}(T)$. Quando a intensidade do campo aplicado está entre $H_{c1}(T)$ e $H_{c2}(T)$, existe uma penetração parcial do fluxo, e a amostra apresenta uma estrutura microscópica mais complicada consistindo de regiões normais e supercondutoras conhecida como **estado misto** fig.(1.3). Uma amostra está no estado misto, quando uma fração ρ de um ele-

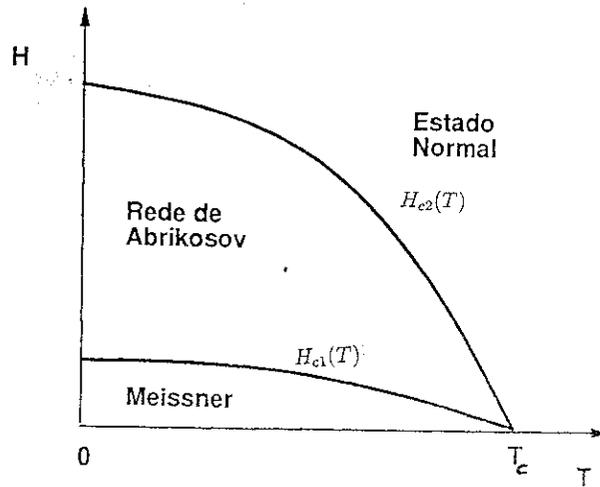


Figura 1.3: Diagrama de fase (H, T) para um supercondutor do tipo II.

mento de volume dV é supercondutor (s) e uma fração $(1 - \rho)$ é normal (n). Na fração normal o campo microscópico toma um certo valor \vec{h}_n , na fração supercondutora é zero. Em termos de ρ obtemos para a indução magnética, $\vec{B} = (1 - \rho)\vec{h}_n$. A energia livre para uma amostra no estado misto é obtida das eqs.(1.18) e (1.24):

$$\mathcal{F} = \int_{V_a} (\mathcal{F}_n - \frac{H_c^2}{8\pi}) dV_a + \int_V \frac{h^2}{8\pi} dV.$$

A densidade de energia livre pode ser escrita como segue:

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{(1 - \rho)h_n^2}{8\pi}. \quad (1.25)$$

O segundo termo do lado direito da eq.(1.25) é a energia de condensação nas regiões supercondutoras e o terceiro termo é a energia magnética. Os termos de superfície foram desprezados, pois estamos considerando uma escala macroscópica. Expressando F em termos das variáveis ρ e \vec{B} , obtemos:

$$F = F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)} \quad (1.26)$$

Esta energia livre é apropriada para situações na qual \vec{B} é constante, pois neste caso não existe força eletromotriz induzida. O potencial termodinâmico apropriado para o caso de \vec{H} constante é a energia livre de Gibbs G . Esta difere de F pelo termo $BH/4\pi$. A densidade de energia de Gibbs é dada por:

$$\begin{aligned} G &= F - \frac{BH}{4\pi} \\ &= F_n - \frac{\rho H_c^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi(1-\rho)} - \frac{BH}{4\pi}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Se minimizarmos G [eq.(1.27)] com relação a ρ , obtemos, $|B| = H_c(1-\rho)$ e vemos que o campo h_n nas regiões normais é igual a H_c . E se minimizarmos com relação a \vec{B} , obtemos $\vec{B} = \vec{H}(1-\rho)$. As conclusões obtidas são: o campo \vec{H} é paralelo a \vec{B} , $\vec{H} = (\vec{B}/B)H_c$ e a intensidade de \vec{H} deve ser constante e igual por toda a amostra.

As regiões normais e supercondutoras estão separadas por uma nítida fronteira. Esta fronteira tem características diferentes em dois casos extremos:

(1) $\xi_o \gg \lambda$ - Considere a fronteira entre a região normal n e supercondutora s no plano yz, os campos estão ao longo do eixo z e a região normal corresponde a $x < 0$. No lado n o potencial termodinâmico é dado pela eq.(1.27). Com isto observamos que no lado n, o potencial termodinâmico é reduzido pelos termos $H_c^2/8\pi$ e $H_c^2/4\pi$. No lado s, G foi reduzido pela energia de condensação ($H_c^2/8\pi$). Para λ muito pequeno é ainda correto assumir que o campo cai abruptamente no plano limite $x = 0$. No lado s ($x > 0$), a supercondutibilidade é "prejudicada" na região de espessura $\sim \xi_o$ próximo da fronteira. A energia de condensação $H_c^2/8\pi$ perdida no intervalo ξ_o é utilizada na criação de uma parede entre a região s e n, a energia superficial γ por cm^2 de parede é dado por $\gamma \sim (H_c^2/8\pi)\xi_o$, esses materiais são chamados de supercondutores do tipo I ou supercondutor de Pippard.

(2) $\xi_0 \ll \lambda$ - Podemos calcular a distribuição do campo usando a eq.(1.8), fig.(1.4). Seja a parede no plano xz , e os campos ao longo do eixo z . Na região normal ($x < 0$), $h = H_c$, na região supercondutora ($x > 0$), $h = H_c e^{-x/\lambda}$. O potencial termodinâmico pode ser escrito como:

$$\mathcal{G} = \int_{x>0} dV \left(F_N - \frac{H_c^2}{8\pi} + \frac{h^2}{8\pi} - \frac{Hh}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{8\pi} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right), \quad (1.28)$$

$$\mathcal{G} = \int_{x<0} dV \left(F_N - \frac{H_c^2}{8\pi} - \frac{H_c^2}{4\pi} \right).$$

O primeiro termo da eq.(1.28) é a energia livre da fase normal em campo zero; o segundo termo é a energia de condensação ($\rho = 0$ para $x < 0$ e $\rho = 1$ para $x > 0$); o terceiro termo é a energia do campo magnético; o quarto é o equivalente microscópico de $-BH/4\pi$ e o último termo é a energia cinética das correntes.

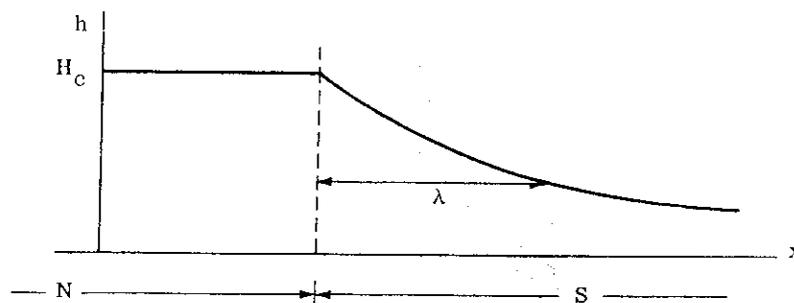


Figura 1.4: Distribuição microscópica do campo em uma parede separando a região normal e a supercondutora. No domínio normal, $h = H_c$; h cai para zero dentro de uma profundidade de penetração no lado supercondutor.

Observamos que longe da parede, a densidade da função de Gibbs é a mesma nas duas fases (condição de equilíbrio) e \mathcal{G} pode ser reescrito como:

$$\mathcal{G} = \int dV \left(F_N - \frac{H_c^2}{8\pi} \right) - \gamma S,$$

onde S é a área da superfície e γ é a tensão superficial dada por:

$$\gamma = \int_0^\infty dV \left[\frac{h^2 + \lambda^2 \left(\frac{dh}{dx} \right)^2}{8\pi} - \frac{hH_c}{4\pi} \right] = -\frac{H_c^2}{8\pi} \lambda.$$

Neste limite verificamos que a tensão superficial é negativa, e a energia do sistema diminui quando novas paredes são criadas. Os materiais tendo $\xi_o < \lambda$ são chamados de supercondutores do tipo II ou supercondutores de London. Para os supercondutores de London a energia superficial associada com a interface entre uma região normal e uma supercondutora é negativa. Portanto, é energeticamente favorável para um supercondutor na presença de um campo dividir-se em um grande número de regiões normais e supercondutoras (estado misto).

No supercondutor do tipo I, ao contrário, a divisão da amostra em regiões normal e supercondutora é menos favorável, porque a energia superficial é positiva.

Consideramos, por exemplo, o limite onde B é pequeno (poucas linhas penetram a amostra). Duas configurações geométricas distintas foram examinadas: um arranjo laminar consistindo de camadas normais e supercondutoras alternadas, e um arranjo filamentar consistindo de regiões normais cilíndricas de diâmetro pequeno ($\sim \xi$), rodeadas por uma região supercondutora. Os cálculos para ambos os modelos mostraram que a geometria filamentar tem uma energia livre de Gibbs mais baixa do que a geometria laminar¹⁵, portanto representa a situação de equilíbrio sempre que a penetração do fluxo parcial é possível.

Se um campo magnético de baixa intensidade é aplicado em um amostra supercondutora do tipo II, esta exhibe o efeito Meissner, e B desaparece. Como H está crescendo para um valor H_{c1} , a penetração do fluxo torna-se favorável, e linhas de fluxo quantizadas (vórtices) são formadas paralelas ao campo $\vec{H} = h\hat{z}$. Se estes filamentos tem um núcleo de raio ξ , no qual a supercondutibilidade desaparece, a densidade de superelétrons n_s neste núcleo cai como mostra a fig.(1.5). O campo é máximo no centro do filamento e estende-se até a distância λ . Esta região de raio $\xi \leq r \leq \lambda$ é a chamada região eletromagnética, contendo os campos e as correntes. Será mostrado no capítulo 2 que o menor campo crítico H_{c1} é dado por $H_{c1} = (\phi_o/2\pi)^2 \ln(\lambda/\xi_o)$, onde $\phi_o = hc/2e$ é o quantum de fluxo magnético de cada linha.

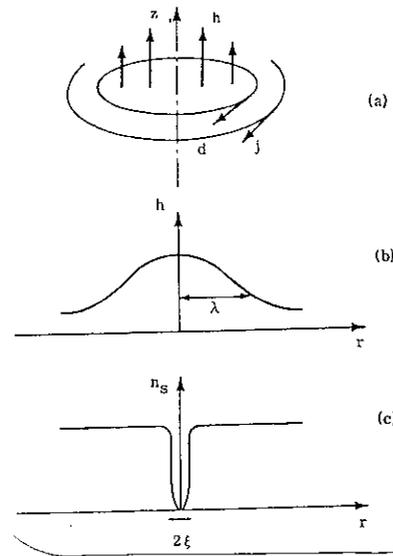


Figura 1.5: A seção transversal de um vórtice isolado em um supercondutor do tipo II.

Como o campo está crescendo além de H_{c1} , a densidade n_s de linhas e a indução $B = n_s \phi_0$ crescem também. Para $H - H_{c1} \ll H_{c1}$, a separação $a \approx n_s^{-1/2}$ entre as linhas é muito maior do que a profundidade de penetração λ , e as linhas são independentes. Quando indução chega rapidamente acima de H_{c1} , a torna-se comparável com λ , e as regiões eletromagnéticas de linhas de fluxos adjacentes começam a sobrepor-se, e B cresce mais lentamente. No domínio $\xi \ll a \ll \lambda$, o campo $\vec{h}(\vec{r})$ é diferente de zero e rapidamente varia por toda a amostra. Com o crescimento de H_{c1} os núcleos das linhas adjacentes eventualmente se justapõem ($a \approx \xi_0$), e o volume da região supercondutora cai para zero. Isto define um segundo campo crítico $H_{c2} > H_{c1}$, no qual a supercondutibilidade desaparece. Neste trabalho nos preocuparemos somente com os supercondutores do tipo II.

1.6 A Teoria de Ginzburg-Landau

Os supercondutores do tipo II são descritos pela teoria fenomenológica proposta por Ginzburg-Landau. A base para esta descrição é a idéia intuitiva de que um supercondutor contém superelétrons com densidade n_s , e elétrons normais com

densidade $n - n_s$ onde n é a densidade total de elétrons no metal. Uma possibilidade era usar n_s no lugar da magnetização M na teoria de Landau, então GL introduziram uma quantidade para caracterizar o grau de supercondutibilidade em vários pontos no material, chamada de **parâmetro de ordem** $\psi(\vec{r})$ que é uma função complexa com variação espacial. Eles assumiram uma expansão da energia livre de Helmholtz em potências de ψ e $\nabla\psi$. A minimização da energia livre com relação ao parâmetro de ordem leva a uma equação diferencial para ψ que é análoga a equação de Schrödinger para uma partícula livre mas com um termo não linear. Para incluir variações do campo magnético por meio do vetor potencial \vec{A} , eles substituíram $\hbar^2|\nabla\psi|^2/4m$ por $|(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A}/c)\psi|^2/4m$: onde $2e$ e $2m$ são a carga e a massa do par de Cooper respectivamente. A energia livre então envolve duas quantidades, o parâmetro de ordem e o campo magnético na amostra, e pode ser escrita como:

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\frac{1}{4m} |(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A})\psi|^2 - \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{8\pi}\hbar^2 \right], \quad (1.29)$$

onde α e β são duas constantes fenomenológicas; α varia com a temperatura como $(1 - T/T_c)$ para $T < T_c$ e β é uma constante positiva, independente de T ; $\vec{A}(\vec{r})$ é o potencial vetor em um ponto \vec{r} e $\vec{h}(\vec{r})$ é o campo microscópico no mesmo ponto, $\vec{h} = \nabla \times \vec{A}$.

A minimização da energia livre com relação a ψ e \vec{A} leva a duas equações diferenciais acopladas para o parâmetro de ordem e o campo magnético, são as equações de Ginzburg-Landau:

$$\frac{1}{4m} (-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A})^2\psi - \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{c}{4\pi}\nabla \times \vec{h} = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\vec{A}. \quad (1.31)$$

Da primeira equação obtemos o parâmetro de ordem enquanto que a segunda ajuda-nos a descrever as supercorrentes que fluem no supercondutor ($\vec{J} = (c/4\pi)\nabla \times \vec{h}$). Estas equações envolvem dois comprimentos fundamentais: o primeiro é obtido da eq.(1.30) sem nenhum campo aplicado. No caso homogêneo temos $|\psi_\infty|^2 = -\alpha/\beta$, esta solução existe e é a mais baixa em

energia quando $\alpha < 0$, ou seja, quando $T < T_c$; é a densidade de superelétrons no caso de campo magnético zero. Se agora aplicarmos um campo magnético e desprezarmos as variações de ψ , a eq.(1.31) pode ser descrita como:

$$\vec{J} = -\frac{8\pi}{mc^2}e^2\vec{A}|\psi_\infty|^2, \quad (1.32)$$

aqui $\lambda = \sqrt{mc^2/8\pi|\psi_\infty|^2e^2}$ é a **profundidade de penetração** que caracteriza a distância sobre o qual o campo magnético pode variar. Com a identificação de $n_s = |\psi_\infty|^2$, este λ está de acordo com a definição usual da profundidade de penetração de London eq.(1.7) exceto pela presença do número dois, devido a carga e a massa do par de Cooper. O segundo parâmetro é obtido da eq.(1.31) em uma dimensão sem campo magnético externo, que define um outro **comprimento de coerência** $\xi(T) = \sqrt{\hbar^2/4m|\alpha(T)|}$ que caracteriza a distância sobre o qual o parâmetro de ordem varia. Note que este $\xi(T)$ não é o mesmo comprimento de coerência ξ_0 definido por Pippard. Este comprimento diverge quando $T \rightarrow T_c$, enquanto que ξ_0 é essencialmente constante. A razão entre a profundidade de penetração e o comprimento de coerência define o parâmetro de GL $\kappa = \lambda/\xi$ que é independente da temperatura.

Para os novos supercondutores de T_c alta, a teoria de GL pode ainda ser usada para descrever estes materiais, embora, sejam materiais fortemente anisotrópicos. Esta anisotropia é convenientemente introduzida na energia livre substituindo $|(-i\hbar\nabla - 2e\vec{A}/c)\psi|^2/4m$ por $\sum_i |(-i\hbar\nabla_i - 2e\vec{A}_i/c)\psi|^2/4m_i$; onde $m_i = (m_x, m_y, m_z)$ são os valores principais do tensor massa m_{ij} . Nesta tese consideraremos somente o caso de supercondutores uniaxiais, $m_x = m_y = m_{ab} \neq m_z = m_c$, onde usamos o termo plano-ab para definir o plano-xy, e o eixo-c para definir o eixo-z.

1.7 Estado Misto. Rede de Abrikosov

Foi proposto por Abrikosov, e subsequenteemente confirmado experimentalmente fig.(1.6)²², que no estado misto o campo penetra parcialmente a amostra na forma de filamentos finos de fluxo de raio ξ , chamados vórtices. O núcleo destes filamentos

não é supercondutor, e fora do núcleo o material permanece supercondutor em uma região de raio λ , contendo supercorrentes e campos. Ele demonstrou que os fluxos penetram em um arranjo regular de vórtices cada um carregando um fluxo quântico ($\phi_0 = hc/2e = 2 \times 10^{-7} Gcm^2$)²¹. Esta equação para o fluxo quântico pode ser obtida da eq.(1.31), sabendo que $\vec{J} = 0$ dentro do vórtice e $\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| \exp(i\varphi(\vec{r}))$, onde $\varphi(\vec{r})$ é a fase da função de onda $\psi(\vec{r})$.

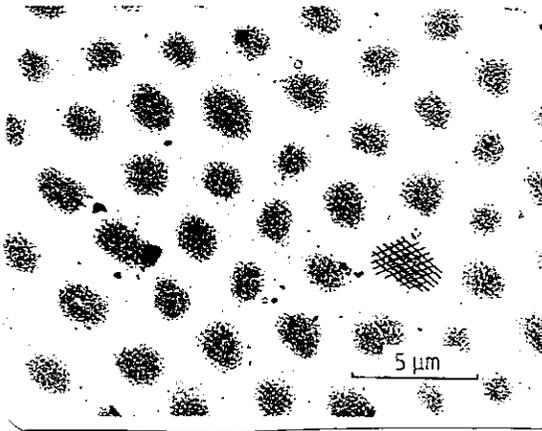


Figura 1.6: Reticulado hexagonal de linhas de vórtices.

A configuração deste arranjo que minimiza a energia livre é um rede hexagonal. a distância entre dois vórtices é dado por $a = 1,072\sqrt{\phi_0/B}$. O parâmetro a do reticulado de vórtices decresce com o crescimento do campo magnético. As posições das linhas de fluxo preditas por Abrikosov são dadas por $\vec{R} = \vec{R}_{mn} = n\vec{R}_1 + m\vec{R}_2$, as bases são $\vec{R}_1 = (1, a)$ e $\vec{R}_2 = (1, \sqrt{3})a/2$, fig.(1.7).

A equação de GL não pode ser resolvida exatamente para o intervalo de campos magnéticos $H_{c1} < H < H_{c2}$, onde H é o campo externo aplicado. Existem basicamente dois regimes de campos magnéticos onde as equações de GL podem ser resolvidas analiticamente¹⁵.

1) $H - H_{c2} \ll H_{c2}$. Suponha um material supercondutor no estado normal, se diminuirmos o campo até $H = H_{c2}$ as regiões supercondutoras começam a nuclear. O campo magnético é quase uniforme e o tamanho dos núcleos é da mesma ordem de magnitude do espaçamento entre eles. O parâmetro de ordem pode ser considerado muito pequeno, isto permite-nos omitir o termo não linear para o parâmetro de ordem

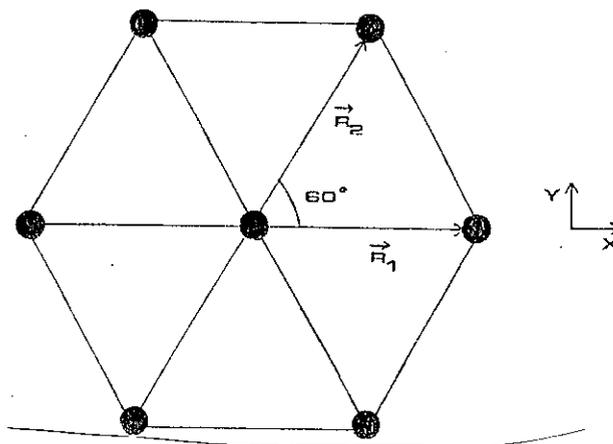


Figura 1.7: A geometria do reticulado de fluxo para supercondutor isotrópico.

nas equações de GL. A equação para o parâmetro de ordem é então a equação de Schrödinger para uma partícula de carga $2e$ e massa $2m$ na presença de um campo magnético uniforme. A não-linearidade é explicada introduzindo a solução desta equação dentro da energia livre que implicará na chamada constante de Abrikosov $\beta_A = \langle |\psi|^4 \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle^2$, onde $\langle \dots \rangle$ representa a média espacial. O valor desta constante que minimiza a energia livre é $\beta_A = 1,16$ para uma rede hexagonal.

2) $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$. Neste alcance de campo magnético a distância entre as linhas de fluxo é da ordem da profundidade de penetração. Os vórtices começam a sobrepor-se mas não os núcleos. O campo é ainda diferente de zero e varia muito suavemente através da amostra. O parâmetro de ordem é quase constante por toda a parte e os núcleos podem ser considerados como singularidades da função delta. Esta simplificação leva-nos a uma equação linear para o campo magnético, a equação de London, que pôde ser resolvida facilmente. Isto resulta em uma energia livre que é dada por um somatório do potencial de interação de todos os possíveis pares de linhas de fluxo, como veremos no capítulo 2, e esta interação é repulsiva. Embora a energia livre não apresente nenhum parâmetro variacional, o arranjo das linhas de fluxo que também corresponde ao mínimo absoluto é também uma rede hexagonal.

Capítulo 2

Constantes Elásticas de um Supercondutor Isotrópico

Sob Baixa Indução Magnética

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é a derivação da energia livre elástica devido ao movimento das linhas de fluxo de sua posição de equilíbrio para o caso de uma amostra supercondutora isotrópica. A energia livre elástica envolve três módulos elásticos fundamentais: a compressão, o cisalhamento, e a inclinação do rede de fluxo.

O estudo das propriedades elásticas da rede de vórtice requer, além do conhecimento de sua configuração de equilíbrio, a expressão do potencial de interação tridimensional (3D) entre as linhas de fluxo. Para obter este potencial de interação aplicaremos a teoria de London já que estamos considerando uma amostra supercondutora do tipo II isotrópica sob baixa indução magnética, para campos no intervalo $H_{c1} < H < H_{c2}$.

2.2 Teoria de London

Nesta seção mostraremos como a equação de London [eq.(1.4)] pode ser obtida da minimização do funcional energia livre. Consideremos uma amostra supercondutora isotrópica, onde estão associados uma densidade de corrente $\vec{J}(\vec{r})$ e um campo magnético local $\vec{h}(\vec{r})$. No limite de campos e correntes fracos, e variações espaciais suaves, a condição de energia livre mínima conduz a uma relação simples entre

campos e correntes. No estado condensado as velocidades de dois elétrons estão correlacionadas se a distância R_{12} entre eles for menor que o comprimento de coerência ξ_o , como mostrado na eq.(1.13). A derivação da equação de London é feita somente quando $\vec{v}(\vec{r})$ tem uma variação desprezível quando comparada com as distâncias $\sim \xi_o$. A energia livre é a soma da energia livre dos elétrons no estado supercondutor sem corrente F_s (estado condensado), da energia cinética E_{cin} da supercorrente, e da energia magnética E_{mag} . Então podemos escrever:

$$\mathcal{F} = \int F_s d^3r + E_{cin} + E_{mag}, \quad (2.1)$$

aqui definimos $\mathcal{F}_o = \int F_s d^3r$.

A energia cinética para os N_s superelétrons de massa m e velocidade de arraste $\vec{v}(\vec{r})$ no ponto \vec{r} é:

$$E_{cin} = \int_V d^3r \frac{1}{2} m v^2(\vec{r}) n_s \quad \text{onde} \quad N_s = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^M n_{si} \Delta V_i \equiv \int_V n_s d^3r. \quad (2.2)$$

A integral se estende sobre todo o volume da amostra, n_s é a densidade dos superelétrons e a densidade de supercorrente é $\vec{J} = n_s e \vec{v}(\vec{r})$, onde e é a carga eletrônica. Substituindo \vec{v} na eq.(2.2) obtemos,

$$E_{cin} = \int d^3r \left(\frac{m}{2e^2 n_s} \right) J^2. \quad (2.3)$$

A energia magnética é obtida considerando N linhas de fluxo magnético (vórtices), e em torno de cada linha circula uma corrente constante I_i . Para cada par de vórtices a corrente circulando em uma linha cria um fluxo magnético na outra, então a força magnética $d\vec{F}_m = I_i d\vec{r}_i \times \vec{B}_i$ provoca um deslocamento virtual $\delta\vec{l}$ da linha de fluxo. O trabalho realizado por esta força magnética é então:

$$dw = d\vec{F}_m \cdot \delta\vec{l} = I_i \vec{B}_i \cdot d\vec{a}. \quad (2.4)$$

A energia magnética considerando todas as linhas de fluxo numa distribuição contínua é escrita como:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \sum_i \int_s I_i \vec{B}_i \cdot d\vec{a}, \quad (2.5)$$

onde o fator $1/2$ é devido aos pares que estamos considerando e

$\phi_i = \int_s \vec{B}_i \cdot d\vec{a} = \oint_{c_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{l}_i$ é o fluxo magnético, então:

$$E_{mag} = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{c_i} I_i \vec{A}_i \cdot d\vec{l}_i \quad \text{onde} \quad I_i = J_i \Delta \sigma_i = cte, \quad (2.6)$$

aqui $\Delta \sigma$ é a área de um circuito. Se $d\vec{l}$ é paralelo a \vec{J} , $[\vec{J} \cdot (\Delta \sigma d\vec{l})]$ é igual a $[\vec{J} d^3 r]$, assim o somatório sobre todos os elementos é a integral sobre o volume, e a energia magnética pode ser reescrita como:

$$E_{mag} = \frac{1}{2c} \int_V d^3 r \vec{J} \cdot \vec{A} \quad \text{onde} \quad \vec{J} = cte, \quad (2.7)$$

aqui c é a velocidade da luz e \vec{A} é o vetor potencial magnético.

A eq.(2.1) é reescrita substituindo os valores dados pelas eqs.(2.3) e (2.7),

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{1}{2} \int_V d^3 r \left(\frac{mJ^2}{n_s e^2} \right) + \frac{1}{2c} \int_V d^3 r \vec{J} \cdot \vec{A}. \quad (2.8)$$

Na eq.(2.8) substituímos a relação de Ampère $\nabla \times \vec{h} = (4\pi/c)\vec{J}$ e a identidade $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{h}) = \vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{h})$, o que leva a:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \int_V d^3 r \left[\frac{1}{2} \frac{mc^2}{16\pi^2 e n_s} |\nabla \times \vec{h}|^2 \right] + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3 r [\vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{h})]. \quad (2.9)$$

Do teorema do divergente,

$$\int_V d^3 r \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{h}) = \oint_s (\nabla \times \vec{h}) \cdot \hat{n} da, \quad (2.10)$$

observamos que se a superfície S for deslocada até o infinito esta contribuição será nula, pois $\nabla \times \vec{h} \propto 1/R^3$ e $d\vec{a} \propto R$, logo quando $R \rightarrow \infty$ a integral é nula,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{1}{8\pi} \int d^3 r \left[\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} |\nabla \times \vec{h}|^2 + \vec{h} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \right]. \quad (2.11)$$

Esta é a equação para a energia livre do sistema em função do campo magnético e da profundidade de penetração de London λ_L [eq.(1.7)],

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + \frac{1}{8\pi} \int d^3 r [h^2 + \lambda_L^2 |\nabla \times \vec{h}|^2].} \quad (2.12)$$

Na minimização da energia livre com relação à distribuição do campo $\vec{h}(\vec{r})$, nota-se que se $\vec{h}(\vec{r})$ muda por $\delta\vec{h}(\vec{r})$, \mathcal{F} muda por $\delta\mathcal{F}(\delta\vec{h})$, e assim obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} + \delta\mathcal{F} &= \mathcal{F}_o + \frac{1}{8\pi} \int [(\vec{h} + \delta\vec{h})^2 + \lambda_L^2 |\nabla \times (\vec{h} + \delta\vec{h})|^2] d^3r \\
 &= \mathcal{F}_o + \frac{1}{8\pi} \int d^3r [h^2 + \lambda_L^2 |\nabla \times \vec{h}|^2] + \frac{1}{8\pi} \int d^3r [2\vec{h} \cdot \delta\vec{h} \\
 &\quad + 2(\nabla \times \vec{h}) \cdot (\nabla \times \delta\vec{h}) + (\delta\vec{h})^2],
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde os termos semelhantes são cancelados e o termo $(\delta\vec{h})^2$ foi omitido,

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r [\vec{h} \cdot \delta\vec{h} + \lambda_L^2 (\nabla \times \vec{h}) \cdot (\nabla \times \delta\vec{h})]. \tag{2.14}$$

A integral do segundo termo do lado direito da eq.(2.14) é obtida através da identidade mostrada anteriormente e do teorema do divergente no qual a superfície S é deslocada para o infinito;

$$\begin{aligned}
 \int_V d^3r (\nabla \times \vec{h}) \cdot (\nabla \times \delta\vec{h}) &= \int_V \nabla \cdot (\delta\vec{h} \times (\nabla \times \vec{h})) d^3r \\
 &\quad + \int_V d^3r [\delta\vec{h} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{h})]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

com isto o primeiro termo do lado direito da equação acima $\rightarrow 0$ quando $S \rightarrow \infty$, e a eq.(2.14) pode ser reescrita como:

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r [\vec{h} \cdot \delta\vec{h} + \lambda_L^2 \delta\vec{h} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{h})]. \tag{2.16}$$

A distribuição do campo $\vec{h}(\vec{r})$ que minimiza a energia livre é então dada por:

$$\vec{h} + \lambda_L^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{h}) = 0, \tag{2.17}$$

e quando combinada com as equações de Maxwell permite-nos determinar a distribuição de campos e correntes no supercondutor, a eq. de London[eq.(1.4)]. A equação de London relaciona a distribuição do campo que minimiza o somatório da energia cinética da supercorrente e a energia magnética se o número de elétrons supercondutores não variar dentro do material.

2.3 Propriedades de Uma Linha de Vórtice Isolada

Como vimos na sec.(1.4), quando um campo magnético de baixa intensidade é aplicado a uma amostra supercondutora do tipo II, ele penetra parcialmente formando os vórtices. Nesta seção discutiremos a estrutura de uma linha de vórtice no limite em que $\lambda \gg \xi$. Um campo $\vec{h} = h\hat{z}$ é aplicado, e uma única linha de vórtice paralela ao eixo z é considerada, fig.(2.1). O núcleo rígido de raio ξ é muito pequeno, então sua contribuição para a energia é desprezada e a energia de uma linha é dada pela fórmula,

$$\mathcal{I} = \int_{r>\xi} d^3r \frac{1}{8\pi} [h^2 + \lambda^2(\nabla \times \vec{h})^2]. \quad (2.18)$$

Para um supercondutor puro, a profundidade de penetração λ tem o valor da profundidade de penetração de London, eq.(1.7). Para uma liga supercondutora com $\lambda \gg \xi$, a eq.(2.18) ainda se aplica, mas com um valor de λ modificado,[sec.(1.2)]. A integração da eq.(2.18) é feita em todo o espaço fora do centro “rígido” ($r > \xi$). Supondo que \mathcal{I} seja mínimo obtemos a expressão de London usual,

$$\vec{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{h} = 0, \quad |r| > \xi. \quad (2.19)$$

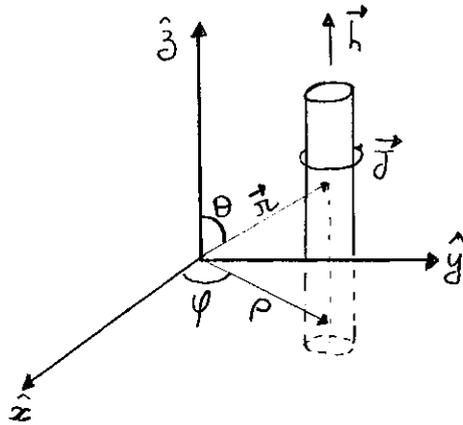


Figura 2.1: Linha de vórtice paralela ao eixo z.

Para $|\vec{r}| > \xi$ na fig.(2.1), substituímos $\vec{h} = \nabla \times \vec{A}$ na eq.(2.19), e verificamos que $[\vec{A} + (4\pi/c)\lambda^2 \vec{J} = (\phi_o/2\pi)\nabla\Theta]^*$ pois, $\nabla \times \nabla\Theta = 0$. Aplicando o divergente nos dois lados da igualdade (*) obtemos:

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \frac{4\pi}{c} \lambda^2 \vec{J}) = \frac{\phi_o}{2\pi} \nabla \cdot (\nabla \Theta), \quad (2.20)$$

onde $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ [sec.(1.2)]. Do teorema do divergente obtemos:

$$\oint_S \frac{4\pi}{c} \lambda^2 \vec{J} \cdot \hat{n} da = \oint_S \frac{\phi_o}{2\pi} \nabla \Theta \cdot \hat{n} da. \quad (2.21)$$

Em coordenadas cilíndricas a corrente circula no plano xy e tem direção $\hat{\varphi}$, \hat{z} é constante, mas $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}$ são funções de φ : $\hat{y} = \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi$ e $\hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi$. Observamos que a densidade de corrente é função da coordenada φ e tem direção $\hat{\varphi}$. Calculando o rotacional do $\nabla \Theta$ em coordenadas cilíndricas obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \Theta &= \hat{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\nabla \Theta)_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\nabla \Theta)_\varphi}{\partial z} \right] + \hat{\varphi} \left[\frac{\partial(\nabla \Theta)_\rho}{\partial z} - \frac{\partial(\nabla \Theta)_z}{\partial \rho} \right] \\ &\quad + \hat{z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho(\nabla \Theta))_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial(\nabla \Theta)_\rho}{\partial \varphi} \right] \\ &= 0, \quad \text{para } |\vec{r}| > \xi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

O resultado da eq.(2.22) implica numa vorticidade $\nu(\vec{r})$ nula em todo o espaço $|\vec{r}| > \xi$.

O cálculo do $\nabla \times \nabla \Theta$ para o interior do núcleo rígido, quando o raio $r = \xi \rightarrow 0$, [fig.(2.2)], é feito usando o teorema de Stockes:

$$\int_S (\nabla \times \nabla \Theta) \cdot d\vec{a} = \oint_c \nabla \Theta \cdot d\vec{l}, \quad (2.23)$$

aqui, $\nabla \Theta = (0, 1/r) = \hat{\varphi}/r$ e $d\vec{l} = \xi d\varphi \hat{\varphi}$. Se c é um contorno fechado em torno de um ponto O , então:

$$\oint_c \nabla \Theta \cdot d\vec{l} = 2\pi. \quad (2.24)$$

Da definição do rotacional obtemos,

$$\nabla \times (\nabla \Theta) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_c \nabla \Theta \cdot d\vec{l} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\pi^2 \xi} \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

portanto, no núcleo do vórtice o rotacional do gradiente não é nulo, pois existe um pequeno raio ξ . A correspondente singularidade é recolocada por uma função delta bidimensional $\delta_2(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)$ na localização do núcleo do vórtice. Na eq.(2.25) escrevemos, $\nabla \times \nabla \Theta = 2\pi \delta_2(\vec{r}) \hat{z}$. Portanto uma linha de vórtice reta e paralela ao eixo z tem uma vorticidade $\vec{\nu}(\vec{r}) = \delta_2(\vec{r}) \hat{z}$.

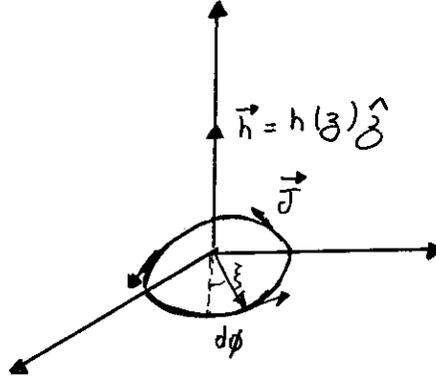


Figura 2.2: Núcleo do vórtice, $d\vec{l} = dl\hat{\varphi} = \xi d\varphi\hat{\varphi}$.

Considerando a singularidade do núcleo do vórtice, a equação de London [eq.(2.14)] tem a seguinte forma:

$$\vec{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{h} = \phi_o \delta_2(\vec{r}) \hat{z} = \phi_o \vec{v}(\vec{r}), \quad (2.26)$$

aqui ϕ_o é um vetor ao longo da linha. Integrando a eq.(2.26) sobre uma superfície circular de raio $r \gg \lambda$, observamos que as correntes $\vec{J}(\vec{r})$ são desprezíveis e a integral ao longo do perímetro do círculo desaparece. Então o fluxo total conduzido pelo filamento tem o valor ϕ_o dado na sec.(1.7).

Resolvendo a eq.(2.26) achamos como o campo decresce do centro do vórtice,

$$\int_S \vec{h} \cdot d\vec{a} + \lambda^2 \oint_c (\nabla \times \vec{h}) \cdot d\vec{l} = \phi_o. \quad (2.27)$$

Se considerarmos um círculo c cujo raio está no domínio $\xi \ll r \ll \lambda$, o termo $\int_S \vec{h} \cdot d\vec{a}$ é desprezível, e como \vec{h} tem a direção do eixo z , temos que $|\nabla \times \vec{h}| = -dh/dr$ e portanto:

$$h = \frac{\phi_o}{2\pi\lambda} \left[\ln\left(\frac{\lambda}{r}\right) + cte \right], \quad (\xi \ll r \ll \lambda) \quad (2.28)$$

Agora voltamos a eq.(2.18) para calcular a energia de uma única linha de vórtice paralela ao eixo z . Da identidade $\nabla \cdot ((\nabla \times \vec{h}) \times \vec{h}) = (\nabla \times \nabla \times \vec{h}) \cdot (\vec{h}) - (\nabla \times \vec{h}) \cdot (\nabla \times \vec{h})$, obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r [\vec{h} + \lambda^2(\nabla \times \nabla \times \vec{h})] \cdot \vec{h} - \frac{\lambda^2}{8\pi} \int d^3r [\nabla \cdot (\nabla \times \vec{h})] \times \vec{h} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r h\phi_o\delta(\vec{r}) + \frac{\lambda^2}{8\pi} \int_S (\nabla \times \vec{h} \times \vec{h}) \cdot d\vec{a}.\end{aligned}$$

Se a integração exclui o núcleo, o primeiro termo não contribui. A integral sobre $d\vec{a}$ é feita em toda a superfície do núcleo rígido ($r \sim \xi$), então a energia por comprimento ao longo do filamento é:

$$\mathcal{I} = \left(\frac{\phi_o}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda}{\xi}\right). \quad (2.29)$$

As eqs.(2.28) e (2.29) nos mostram as propriedades de uma única linha de vórtice paralela ao eixo z . Como \mathcal{I} é uma função quadrática do fluxo, para uma situação onde o fluxo é $2\phi_o$ é preferível ter dois filamentos de fluxo ϕ_o ($2\mathcal{I}$) do que um filamento de fluxo duplo ($4\mathcal{I}$).

A densidade de corrente para uma linha é obtida da eq.(2.26):

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \left(-\vec{A} + \phi_o \frac{\nabla\Theta}{2\pi}\right). \quad (2.30)$$

Para o caso de N linhas de vórtices paralelas ao eixo z , a vorticidade é $\vec{v}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta_2(\vec{r} - \vec{r}_i)\hat{z}$, e a equação de London torna-se:

$$\vec{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{h} = \phi_o \sum_1^N \delta_2(\vec{r} - \vec{r}_i)\hat{z}; \quad |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \gg \xi(T). \quad (2.31)$$

onde r_i é a posição do núcleo da linha i .

2.3.1 Propriedades das Linhas de Vórtices de Forma Arbitrária

Agora vamos analisar o caso de linhas de vórtices com forma arbitrária. Mostraremos que a eq.(2.31) generaliza-se para:

$$\boxed{\vec{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{h} = \phi_o \sum_{i=1}^N \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i(z)) \frac{d\vec{r}_i(z)}{dz}}. \quad (2.32)$$

Primeiro consideremos uma linha de vórtice (i) reta e paralela ao eixo \hat{S} que forma um ângulo θ com o eixo \hat{z} , fig(2.3). Podemos observar que: $S_z = z$, $S_y = y$ e $S_x = x$,

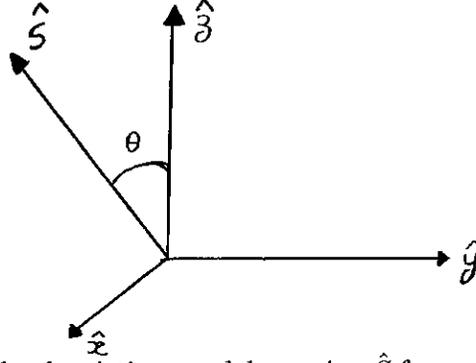


Figura 2.3: Linha de vórtice paralela ao eixo \hat{S} formando um ângulo θ com o eixo \hat{z} , $\vec{S} = S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z}$.

e o vetor $\vec{r}_i(z)$ pode ser reescrito da seguinte forma: $\vec{r}_i(z) = (S_x \hat{x} + S_y \hat{y} + S_z \hat{z}) \frac{z}{S_z}$ e,

$$\frac{d\vec{r}_i(z)}{dz} = \left(\frac{S_x}{S_z} \hat{x} + \frac{S_y}{S_z} \hat{y} + \hat{z} \right). \quad (2.33)$$

A vorticidade é dada por:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \alpha(\hat{S}) \frac{d\vec{r}_i(z)}{dz} \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i(z)), \quad (2.34)$$

onde $\int \vec{v}_z(\vec{r}) \cdot \hat{z} da = \int \delta(x) \delta(y) dx dy = 1$, e o parâmetro $\alpha(\hat{S})$ é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \int \vec{v}_S(\vec{r}) \cdot \hat{z} da &= \int \alpha(\hat{S}) \delta(x - x_i(0)) \delta(y - y_i(0)) dx dy \\ &= 1 \quad \rightarrow \quad \alpha(\hat{S}) = 1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

pois o fluxo deve permanecer constante. Para N linhas retas e paralelas, mas inclinadas em relação ao eixo z a vorticidade é dada por:

$$\vec{v}_s(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i(z)) \left[\frac{S_x}{S_z} \hat{x} + \frac{S_y}{S_z} \hat{y} + \hat{z} \right]. \quad (2.36)$$

Se as linhas de vórtices forem curvas, fig.(2.4), a vorticidade é dada por:

$$\vec{v}_s(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \delta^2(\vec{r} - \vec{r}_i(z)) \frac{d\vec{r}_i(z)}{dz}. \quad (2.37)$$

Assim obtemos a eq. de London [eq.(2.32)] para N linhas de fluxo distorcidas.

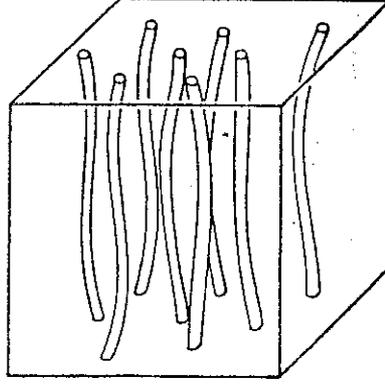


Figura 2.4: Linhas de vórtices distorcidas.

2.4 Cálculo do Potencial de Interação entre as Linhas de Vórtices

Para densidade de fluxo no alcance intermediário $\phi_o/\lambda^2 \leq B \ll \phi_o/\xi^2$, que corresponde a $H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$, nós continuamos a usar a equação de London modificada para tratar a eletrodinâmica, mas devemos cuidadosamente incluir a interação com muitos vizinhos. O potencial de interação entre as linhas de vórtices pode ser calculado considerando que o campo $\vec{h}(\vec{r})$ dirigido ao longo do eixo z é a solução da eq.(2.26):

$$\vec{h} - \lambda^2 \nabla^2 \vec{h} = \phi_o \vec{v}(\vec{r}), \quad (2.38)$$

onde $\vec{r} = (x, y)$ representa a posição do vórtice. A interação entre muitos vizinhos é feita pela análise de fourier da densidade do fluxo local $\vec{h}(\vec{r})$ em um plano perpendicular ao campo. Se o arranjo de vórtices é periódico, definimos a transformada de Fourier de \vec{h} e \vec{v} como:

$$\vec{h}(\vec{r}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{h}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k, \quad (2.39)$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \tilde{v}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k. \quad (2.40)$$

Se $\vec{h}(x, y)$ é periódica, $\tilde{h}(\vec{k}) = 0$ ao menos que \vec{k} seja um vetor da rede recíproca (\vec{Q}). Substituindo as eqs.(2.39) e (2.40) na eq.(2.38) obtemos:

$$\int \tilde{h} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k + \lambda^2 k^2 \int \tilde{h} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k = \phi_o \int \tilde{v} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3 k. \quad (2.41)$$

Para obter o lado direito, nós tomamos a origem de coordenadas no centro do vórtice e usamos o fato que a área da célula unitária é ϕ_o/B . Resolvendo para $\tilde{\vec{h}}(\vec{k})$, achamos:

$$\tilde{\vec{h}}(\vec{k}) = \frac{\phi_o \tilde{\vec{\nu}}(\vec{k})}{1 + \lambda^2 k^2}. \quad (2.42)$$

Agora definimos o inverso da transformada de Fourier por $F^{-1}\{\tilde{\vec{h}}\} = \vec{h}$ e $F^{-1}\{\tilde{\vec{\nu}}\} = \vec{\nu}$, e aplicamos na eq.(2.42) obtendo a densidade do fluxo local $\vec{h}(\vec{r})$:

$$F^{-1}\{\tilde{\vec{h}}\} = \frac{\phi_o}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{\vec{\nu}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\frac{1}{1 + \lambda^2 k^2} \right), \quad (2.43)$$

$$\vec{h}(\vec{r}) = \phi_o \int d^3r' \vec{\nu}(\vec{r}') \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{k}}}{1 + \lambda^2 k^2} \right]. \quad (2.44)$$

Portanto o potencial de interação $V(\vec{r} - \vec{r}')$ para um supercondutor isotrópico sob baixa indução magnética é dado por:

$$V(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{k}}}{1 + \lambda^2 k^2}. \quad (2.45)$$

Calculamos a integral da eq.(2.45) em coordenadas esféricas, $d\vec{k} = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi$,

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{1 + \lambda^2 k^2} \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta, \quad (2.46)$$

a terceira integral é obtida por integração por partes:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{1 + \lambda^2 k^2} \left(\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk k \sin kr}{1 + \lambda^2 k^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{r \partial r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk k \cos kr}{1 + \lambda^2 k^2} \\ &= -\frac{Re}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk e^{ikr}}{1 + \lambda^2 k^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Esta integral é resolvida através do teorema dos resíduos, onde os pólos da função são $k = \pm i/\lambda$, para a integral não divergir o caminho de integração deve ser no plano positivo:

$$\int_0^\infty dk \frac{e^{ikr}}{\lambda^2(k + i/\lambda)(k - i/\lambda)} \quad ; \quad g(k) = \frac{e^{ikr}}{\lambda^2(k + i/\lambda)(k - i/\lambda)}. \quad (2.48)$$

Do teorema dos resíduos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz g(z) = 2\pi i \sum \text{Resíduos},$$

onde $\text{resíduo}(i/\lambda) = e^{-r/\lambda}/2i\lambda$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr}}{\lambda^2(k + i/\lambda_L)(k - i/\lambda)} = \frac{\pi e^{-r/\lambda_L}}{\lambda_L}.$$

Voltando a eq.(2.46) obtemos o potencial de interação:

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{-(\vec{r}-\vec{r}')}}{4\pi\lambda^2|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.49)$$

Substituindo a eq.(2.49) na eq.(2.44) obtemos a densidade de fluxo local $\vec{h}(\vec{r})$ em termos do potencial de interação das linhas de vórtice:

$$\boxed{\vec{h}(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{4\pi\lambda^2} \int d^3r' \frac{e^{-(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{v}(\vec{r}')} \quad (2.50)$$

2.5 Energia Livre das Linhas de Vórtices

Se desprezarmos o núcleo da linha de vórtice, as energias que contribuem para a energia livre são a energia cinética das supercorrentes e a energia do campo magnético \vec{h} ,

$$\mathcal{F} = \int d^3r \frac{1}{8\pi^3} [h^2 + \lambda^2(\nabla \times \vec{h})^2]. \quad (2.51)$$

Esta equação pode ser transformada usando a identidade: $(\nabla \times \vec{h})^2 = (\nabla \times \vec{h}) \cdot (\nabla \times \vec{h}) = \nabla \cdot (\vec{h} \times (\nabla \times \vec{h})) + \vec{h} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{h})$,

$$\begin{aligned} \int d^3r \frac{\lambda^2}{8\pi} [\nabla \cdot (\vec{h} \times (\nabla \times \vec{h})) + \vec{h} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{h})] &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \oint_S d\vec{\sigma} (\vec{h} \times \nabla \times \vec{h}) \\ &+ \frac{\lambda^2}{8\pi} \int d^3r \vec{h} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \vec{h}) - \nabla^2 \vec{h}] \\ &= -\frac{\lambda^2}{8\pi} \int d^3r \vec{h} \cdot \nabla^2 \vec{h}, \end{aligned}$$

onde a integral de superfície é nula e $\nabla \cdot \vec{h} = 0$, a energia livre [eq.(2.51)] é dada por:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r [\vec{h} - \lambda^2 \nabla^2] \cdot \vec{h},$$

da eq.(2.38) observamos que a energia livre considerando a vorticidade do núcleo da linha de vórtice é reescrita como:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_o}{8\pi} \int d^3r \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{h} \quad (2.52)$$

e substituindo a densidade de fluxo local obtemos a energia livre para o rede de vórtices:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \int d^3r \int d^3r' \vec{v}(\vec{r}) V(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}(\vec{r}'). \quad (2.53)$$

Em geral a rede de vórtices não está em sua configuração de equilíbrio, mas em algum estado distorcido, então substituímos $\vec{v}(\vec{r})$ e $\vec{v}(\vec{r}')$ pelas vorticidades de linhas de vórtices curvas dadas pela eq.(2.37) e obtemos:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int d\vec{r}_i(z) \int d\vec{r}'_j(z') V(\vec{r}_i(z) - \vec{r}'_j(z')). \quad (2.54)$$

Observamos que a energia elástica armazenada em uma rede de vórtice distorcida pode ser então encontrada por uma integração do potencial de interação $V(\vec{r} - \vec{r}')$ sobre todos os pares de segmento de vórtices $d\vec{r}_i$.

2.6 Reticulado de Vórtices Distorcidos

Nesta seção vamos determinar uma expressão para a energia de um sistema de vórtices que sofre um pequeno deslocamento da sua posição original. Seja $\vec{R}_i(z) = (x_i, y_i, z)$ a posição original de um vórtice e $\vec{u}_i(z) = (u_i^x, u_i^y, z)$ o seu deslocamento no plano-xy. Denotaremos as posições no estado distorcido por \vec{r}_i ,

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i(z) + \vec{u}_i(z), \quad (2.55)$$

e as derivadas em relação a z por:

$$\frac{d\vec{r}_i(z)}{dz} = \hat{z} + \frac{d\vec{u}_i(z)}{dz}. \quad (2.56)$$

Substituindo as eqs.(2.55) e (2.56) na eq.(2.54) obtemos:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' \left(\hat{z} + \frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \right) \cdot \left(\hat{z} + \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right) \times V(\vec{R}_i(z) + \vec{u}_i(z) - \vec{R}_j(z) - \vec{u}_j(z')),$$

o cálculo do produto interno nos dá:

$$\left(\hat{z} + \frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \right) \cdot \left(\hat{z} + \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right) = 1 + \left(\frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right),$$

e então a energia livre pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \left[\int dz \int dz' [V(\vec{R}_i(z) + \vec{u}_i(z) - \vec{R}_j(z) - \vec{u}_j(z')) + \left[\frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} [V(\vec{R}_i(z) + \vec{u}_i(z) - \vec{R}_j(z') - \vec{u}_j(z'))] \right] \right]. \quad (2.57)$$

Recorremos a uma aproximação baseada na esperança de que os vórtices não se desviem muito de suas posições de equilíbrio. Se todos os $\vec{u}(z)$ são pequenos, então podemos expandir o potencial de interação $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ sobre seus valores de equilíbrio e usando a série de Taylor obtemos:

$$\begin{aligned} V(\vec{R}_i(z) + \vec{u}_i(z) - \vec{R}_j(z) - \vec{u}_j(z')) &= V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')) \\ &+ [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla V]_{r \equiv \vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')} \\ &+ \frac{1}{2!} [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla]^2 V|_{r \equiv \vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')} + \dots \end{aligned} \quad (2.58)$$

O coeficiente de $\vec{u}_i(z)$ no termo linear é justamente $\nabla V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z))$. Isto, portanto, é menos a força exercida no vórtice \vec{R} pelos outros vórtices, quando cada um é colocado em sua posição de equilíbrio. Ele portanto deve desaparecer, uma vez que não existe força líquida em vórtices em equilíbrio.

$$[(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla V]_{r \equiv \vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')} = 0$$

A principal correção não nula para o potencial de interação é dado pelo termo quadrático,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} = & \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' \{V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')) \\
 & + \frac{1}{2} [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla]^2 V|_{r \equiv \vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')} \} \\
 & + \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' \left(\frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right) [V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z'))]. \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

Esta é a expressão da energia livre de um sistema de vórtices deslocado de sua posição de equilíbrio. O primeiro termo é a energia de interação do sistema de vórtices em equilíbrio, o segundo e o terceiro termos são devidos ao deslocamento dos vórtices.

2.7 Densidade de Energia Livre Devido ao Deslocamento dos Vórtices

Um dos objetivos deste trabalho é mostrar todos os passos intermediários que partem da eq.(2.59) ao resultado final eq.(2.82), queremos saber de quanto a energia muda quando o rede de vórtices sofre uma distorção. Para isto estamos interessados em escrever a densidade de energia livre $\Delta F = F - f_o$ para uma rede distorcida, aqui f_o é dado pelo primeiro termo da eq.(2.59),

$$f_o \equiv \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' (V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z'))), \quad (2.60)$$

e ΔF é a soma dos termos que correspondem a distorção da eq.(2.59):

$$\begin{aligned}
 \Delta F = & \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' \left\{ \left(\frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right) [V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z'))] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla]^2 V|_{r \equiv \vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z')} \right\}. \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

Veremos mais adiante que a densidade de energia livre de um corpo deformado na aproximação harmônica, isto é, até segunda ordem é dada por:

$$\Delta F = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} u^\alpha(-\vec{k}) \tilde{\phi}_{\alpha\beta} u^\beta(\vec{k}), \quad (2.62)$$

onde $\tilde{\phi}_{\alpha\beta}$ é uma matriz elástica. A nossa meta agora é reescrever a eq.(2.61) na forma da eq.(2.62). Separamos a eq.(2.61) em dois termos para facilitar os cálculos, $\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$ onde:

$$\Delta F_1 = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' \left\{ \left(\frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} \right) [V(\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z'))] \right\}, \quad (2.63)$$

e

$$\Delta F_2 = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int dz \int dz' [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla]^2 V|_{\vec{r}=\vec{R}_i(z)-\vec{R}_j(z')}. \quad (2.64)$$

O produto interno da eqs.(2.63) e (2.64) é dado respectivamente por:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d\vec{u}_j(z')}{dz'} &= \frac{d(u_i^\alpha \hat{e}_\alpha)}{dz} \cdot \frac{d(u_j^\beta \hat{e}_\beta)}{dz'} \\ &= \delta_{\alpha\beta} \frac{du_i^\alpha}{dz} \frac{du_j^\beta}{dz'}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

e

$$\begin{aligned} [(\vec{u}_i(z) - \vec{u}_j(z')) \cdot \nabla]^2 V(\vec{r}) &= [(u_i^\alpha - u_j^\alpha) \hat{e}_\alpha \cdot \hat{e}_\beta \partial_\beta] [(u_i^\beta - u_j^\beta) \hat{e}_\beta \cdot \hat{e}_\alpha \partial_\alpha] V(\vec{r}) \\ &= (u_i - u_j)^\alpha (u_i - u_j)^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta V(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Definimos a transformada de Fourier dos vetores $\vec{u}_i(\vec{R}_i(z)) = \vec{u}_i(z)$ e $\vec{u}_j(\vec{R}_j(z)) = \vec{u}_j(z)$ como:

$$\vec{u}_i(z) = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i(z)} \quad e \quad \vec{u}_j(z) = \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_j(z)}, \quad (2.67)$$

aqui $\vec{R}(z) = \vec{R}_\perp(z) + R_z \hat{z}$. Substituindo as eqs.(2.49), (2.65) (2.67) e suas derivadas na eq.(2.63) otemos:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{\alpha\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_{1z}) k_{1z} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) k_{2z} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i(z) - \vec{R}_j(z'))} e^{i\vec{k}_{1\perp} \cdot \vec{R}_{i\perp}(z)} e^{i\vec{k}_{2\perp} \cdot \vec{R}_{j\perp}(z')} e^{i(k_{1z} z + k_{2z} z')}. \end{aligned}$$

Para simplificação foram usadas as seguintes notações: $\vec{k}_{3\perp} = \vec{k}_3$, $\vec{k}_{2\perp} = \vec{k}_2$, $\vec{k}_{1\perp} = \vec{k}_1$, $\vec{R}_{i\perp} = \vec{R}_i$ e $\vec{R}_{j\perp} = \vec{R}_j$, e a definição da função delta de Dirac: $\delta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dz$:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} k_{3z}^2 \frac{\delta_{\alpha\beta} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \int_{zB} \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_{1z}) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i} \\ &\quad \times \int_{zB} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_j} \times (2\pi)^2 \int dk_z k_{1z} \delta(k_{1z} + k_{3z}) \\ &\quad \times \int dk_{z'} k_{2z'} \delta(k_{2z'} - k_{3z'}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Aqui a integração sobre \vec{k}_\perp é restrita a primeira zona de Brillouim, enquanto $k_z \in (-\infty, \infty)$. A energia na primeira zona de Brillouim é igual a energia em todas as outras, por isto nos restringimos somente a primeira. A eq.(2.68) é simplificada usando as propriedades da função delta de Dirac:

$$\int dk_z k_{1z} \delta(k_{1z} + k_{3z}) = -k_{3z},$$

assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Delta F_1 &= \frac{\phi_o^2}{8\pi} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{k_{3z}^2 \delta_{\alpha\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \sum_{i \neq j} \int_{zB} \frac{d^2 k_1}{(2\pi)^2} \\ &\times \int_{zB} \frac{d^2 k_2}{(2\pi)^2} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)} e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i} e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_j} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para calcular a integral usamos a seguinte identidade para o somatório:

$$\sum_{i \neq j} (e^{i(\vec{k}_3 + \vec{k}_1) \cdot \vec{R}_i} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_j}) = \sum_i e^{i(\vec{k}_3 + \vec{k}_1) \cdot \vec{R}_i} \sum_j e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_j}.$$

Como sabemos \vec{k}_1 e \vec{k}_2 pertencem a primeira zona de Brillouim, e \vec{R}_i e \vec{R}_j são vetores da rede primitiva ou rede de Bravais. Definimos \vec{Q}_1 e \vec{Q}_2 como vetores da rede recíproca, ela é caracterizada como um conjunto de vetores \vec{Q} satisfazendo a identidade $e^{i\vec{Q} \cdot \vec{R}} = 1$ para todo \vec{R} da rede de Bravais. A análise de Fourier de sistemas periódicos mostra que existe um conjunto \vec{Q} de pontos da rede recíproca ou espaço de Fourier tais que, $\sum_{\vec{R}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} = N \delta_{\vec{k},0}$, onde \vec{R} percorre os N sítios da rede de Bravais, e \vec{k} é qualquer vetor na primeira zona de Brillouim¹⁹

$$\sum_{\vec{Q}_1} \sum_i e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_3 + \vec{Q}_1) \cdot \vec{R}_i} = \sum_{\vec{Q}_1} N \delta_2(\vec{k}_1 + \vec{k}_3 - \vec{Q}_1). \quad (2.70)$$

$$\sum_{\vec{Q}_2} \sum_j e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_3 + \vec{Q}_2) \cdot \vec{R}_j} = \sum_{\vec{Q}_2} N \delta_2(\vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{Q}_2). \quad (2.71)$$

O número de fluxóides é $N = (2\pi)^2 n$, onde $n = B/\phi_o$ é a densidade de fluxóides. Substituindo as eqs.(2.70) e (2.71) na eq.(2.69) obtemos:

$$\Delta F_1 = \frac{B^2}{8\pi} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{k_{3z}^2 \delta_{\alpha\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \sum_{\vec{Q}_1} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}_3 + \vec{Q}_1) \sum_{\vec{Q}_2} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_3 - \vec{Q}_2), \quad (2.72)$$

onde,

$$\int_{zB} d^2 k_1 \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_1) \delta_2(\vec{k}_1 + \vec{k}_3 + \vec{Q}_1) = \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}_3 - \vec{Q}_1), \quad (2.73)$$

e

$$\int_{zB} d^2 k_2 \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) \delta_2(\vec{k}_2 - \vec{k}_3 + \vec{Q}_2) = \tilde{u}^\beta(\vec{k}_3 - \vec{Q}_2). \quad (2.74)$$

Reescrevemos a eq.(2.72) fazendo as seguintes mudanças de variáveis: $\vec{k}_3 - \vec{Q}_2 = \vec{k}$, $-\vec{k}_3 - \vec{Q}_1 = -\vec{k}$, $k_{3z} = k_z$, $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}$ e $\vec{Q}_2 = \vec{Q}$, e então obtemos:

$$\Delta F_1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{4\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{\delta_{\alpha\beta} k_z}{(1 + \lambda^2)(\vec{k} + \vec{Q})^2} \right) \tilde{u}^\beta(\vec{k}). \quad (2.75)$$

Agora precisamos reescrever a eq.(2.64) substituindo as eqs.(2.49) e (2.66),

$$\begin{aligned} \Delta F_2 &= \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \int dz \int dz' [u_i(z) - u_j(z')]^\alpha [u_i(z) - u_j(z')]^\beta \\ &\quad \times \nabla_\alpha \nabla_\beta V(\vec{r})|_{\vec{r} \equiv |\vec{R}_i - \vec{R}_j|}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

onde

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V(\vec{r})|_{\vec{r} \equiv |\vec{R}_i - \vec{R}_j|} = \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{(-k_{3\alpha} k_{3\beta})}{1 + \lambda^2 k_3^2} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}.$$

Separamos a eq.(2.76) em quatro termos dados por:

$$\Delta F_2 = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \int dz \int dz' (F_\alpha + F_\beta + F_\gamma + F_\delta), \quad (2.77)$$

onde

$$\begin{aligned} F_\alpha &\equiv - \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i(z)} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_j(z')} \\ &\quad \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{(-k_{3\alpha} k_{3\beta})}{1 + \lambda^2 k_3^2} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\beta &\equiv - \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i(z)} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_j(z')} \\ &\quad \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{(-k_{3\alpha} k_{3\beta})}{1 + \lambda^2 k_3^2} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}, \end{aligned}$$

$$F_\gamma \equiv \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}_i(z)} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_i(z)} \\ \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{(-k_{3\alpha} k_{3\beta})}{1 + \lambda^2 k_3^2} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)},$$

e

$$F_\delta \equiv \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_i(z')} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}_i(z')} \\ \times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{(-k_{3\alpha} k_{3\beta})}{1 + \lambda^2 k_3^2} e^{i\vec{k}_3 \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j)}.$$

Discutiremos cada um dos cálculos na integral da eq.(2.77). Como $\vec{R}_i(z) = \vec{R}_{i\perp} + z\hat{z}$, a primeira integral pode ser escrita como:

$$I = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \int dz \int dz' F_\alpha \\ = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{k_{3\alpha} k_{3\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\beta(\vec{k}_2) \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_i(z)} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_j(z')},$$

onde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' e^{i(\vec{k}_1 + \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_i(z)} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_3) \cdot \vec{R}_j(z')} = e^{i(\vec{k}_{1\perp} + \vec{k}_{2\perp}) \cdot \vec{R}_{i\perp}(z)} e^{i(\vec{k}_{2\perp} - \vec{k}_{3\perp}) \cdot \vec{R}_{j\perp}(z')} \\ \times (2\pi)^2 \delta(k_{1z} + k_{3z}) \delta(k_{2z} - k_{3z}).$$

A integração em k_1 está restrita a primeira zona de Brillouin e das propriedades da rede recíproca, eqs.(2.70) e (2.71) obtemos:

$$I = \frac{\phi_o^2}{8\pi} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{k_{3\alpha} k_{3\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \sum_{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}_3 + \vec{Q}_1) \tilde{u}^\beta(\vec{k}_3 + \vec{Q}_2) \\ = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{8\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{(\vec{Q} + \vec{k})_\alpha + (\vec{Q} + \vec{k})_\beta}{1 + \lambda^2 (\vec{k} + \vec{Q})^2} \right) \tilde{u}^\beta(\vec{k}), \quad (2.78)$$

onde usamos as mesmas mudanças de variáveis feitas anteriormente.

A segunda integral da eq.(2.77) é semelhante a primeira integral, apenas com k_1 e k_2 trocados, a solução da segunda integral é dada por:

$$\begin{aligned}
 II &= \frac{\phi_o^2}{8\pi} \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3} \frac{k_{3\alpha} k_{3\beta}}{1 + \lambda^2 k_3^2} \sum_{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}_3 + \vec{Q}_1) \tilde{u}^\beta(\vec{k}_3 + \vec{Q}_2) \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{8\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{(\vec{Q} + \vec{k})_\alpha + (\vec{Q} + \vec{k})_\beta}{1 + \lambda^2 (\vec{k} + \vec{Q})^2} \right) \tilde{u}^\beta(\vec{k}). \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

A terceira integral na eq.(2.77) é semelhante a quarta integral, e o cálculo é feito usando a definição da função delta de Kronecker e suas propriedades e as identidades (2.70) e (2.71):

$$III = IV = -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{8\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{Q_\alpha Q_\beta}{1 + \lambda^2 Q^2} \right) \tilde{u}^\beta(\vec{k}). \quad (2.80)$$

Substituímos o cálculo das quatro integrais na eq.(2.77) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta F_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{4\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{(\vec{Q} + \vec{k})_\alpha + (\vec{Q} + \vec{k})_\beta}{1 + \lambda^2 (\vec{k} + \vec{Q})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{1 + \lambda^2 Q^2} \right) \tilde{u}^\beta. \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

Portanto, a densidade de energia livre devido ao deslocamento dos vórtices de sua posição de equilíbrio tem a forma:

$$\begin{aligned}
 \Delta F &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{u}^\alpha(-\vec{k}) \left(\frac{B^2}{4\pi} \sum_{\vec{Q}} \frac{\delta_{\alpha\beta} k_z^2 + (\vec{Q} + \vec{k})_\alpha + (\vec{Q} + \vec{k})_\beta}{1 + \lambda^2 (\vec{k} + \vec{Q})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{1 + \lambda^2 Q^2} \right) \tilde{u}^\beta, \quad (2.82)
 \end{aligned}$$

que pode ser escrita em termos da matriz elástica $\phi_{\alpha\beta}$, como a [eq.(2.62)], onde definimos $\phi_{\alpha\beta}$ como:

$$\phi_{\alpha\beta} = \frac{B^2}{4\pi} \sum_{\vec{Q}} [f_{\alpha\beta}(\vec{k} + \vec{Q}) - f_{\alpha\beta}(\vec{Q})], \quad (2.83)$$

e

$$f_{\alpha\beta} = \frac{k_z^2 \delta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta}{1 + \lambda^2 k^2}. \quad (2.84)$$

2.8 Teoria Elástica

A densidade de energia livre de um corpo deformado na aproximação harmônica, isto é, até segunda ordem é dada por:

$$\Delta F = F - f_o = \frac{1}{2} c_{ijkl} u_{ij} u_{kl}, \quad (2.85)$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Onde u_{ij} é o tensor de deformação e c_{ijkl} é o tensor módulo elástico ou constante elástica do material. Nesta aproximação supomos que os gradientes do campo de deformação \vec{u} sejam pequenos.

Inicialmente o tensor c_{ijkl} pode ter até 81 componentes independentes, mas devido a simetria do tensor de deformação $u_{ij} = u_{ji}$, este número cai para 21 no caso de menor simetria da rede cristalina. Estes coeficientes podem ser expressos em uma matriz 6×6 simétrica:

$$\begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ & & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ & & & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ & & & & c_{1313} & c_{1312} \\ & & & & & c_{1212} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

Podemos simplificar ainda mais este tensor, notando que $a = 1 \cdots 6$ denota os pares 11, 22, 33, 23, 13, 12. Ficando com:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \quad (2.87)$$

Devido as simetrias extras das estruturas cristalinas pode-se reduzir ainda mais este número de constantes. No caso totalmente isotrópico restam apenas duas constantes c_{11} e c_{66} . No caso de simetria uniaxial de um material isotrópico com campo aplicado na direção z , temos três constantes elásticas: c_{11} (módulo de compressão), c_{44} (módulo de inclinação) e c_{66} (módulo de cisalhamento); pois temos as simetrias: reflexão em relação ao plano xz $y \rightarrow -y$, reflexão em relação ao plano xy $z \rightarrow -z$, reflexão em torno do plano yz $x \rightarrow -x$ e qualquer rotação em torno do eixo z . Estas simetrias eliminam todas as constantes elásticas em que x , y , e z aparecem apenas uma vez.

Para o caso de linhas de vórtices, tomaremos um campo de deformação bidimensional: $\vec{u}(\vec{r}) = (u_x, u_y, 0)$, as constantes elásticas relevantes são: c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{44} , c_{55} e c_{66} . Devido as operações de simetria referidas acima, obtemos que: $c_{55} = c_{66}$, $c_{11} = c_{22}$ e $c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$. Para este caso de simetria uniaxial a energia livre toma a seguinte forma¹⁹:

$$\begin{aligned} \Delta F_{el} &= \frac{1}{2} \int d^3r [(c_{11} - c_{66})(u_{xx} - u_{yy})^2 + c_{66}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}u_{xy}) \\ &\quad + c_{44}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2)] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r [(c_{11} - c_{66})(\nabla \cdot \vec{u})^2 + c_{66}(\nabla_{\perp} u)^2 + c_{44}(\partial \vec{u} / \partial z)^2] \end{aligned} \quad (2.88)$$

Fazendo as seguintes substituições: $\lambda = c_{12} = c_{11} - 2c_{66}$, $\mu = c_{66}$ e $\kappa = c_{44}$, obtemos:

$$\Delta F_{el} = \frac{1}{2} \int d^3r [\lambda u_{\delta\delta}^2 + 2\mu u_{\alpha\beta}^2 + \kappa (\frac{\partial \vec{u}}{\partial z})^2] \quad (2.89)$$

onde λ e μ são os coeficientes de Lamé.

Além desta equação ser uma aproximação contínua, que não leva em conta a estrutura discreta da rede, ela é também uma aproximação local, que não considera que o alcance da interação possa exceder o espaçamento da rede de vórtice a . A energia elástica se torna não local quando os segmentos de vórtices em posições $\vec{R}(z)$ e $\vec{R}'(z)$ interagem para distâncias $|\vec{R}(z) - \vec{R}'(z')|$ maiores que o espaçamento da rede.

Pode-se estudar a energia elástica de uma forma mais conveniente na representação de Fourier, então o vetor de deformação pode ser escrito como

$$\vec{u}(\vec{r}) = \int \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \tilde{u}(\vec{K}) \exp(i\vec{K} \cdot \vec{R}),$$

e então obtemos:

$$(u_{\delta\delta})^2 = \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) i k_{1\alpha} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}) \\ \times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\beta(\vec{k}_2) i k_{2\beta} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}),$$

$$(u_{\alpha\beta})^2 = -\frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) \vec{k}_{1\perp} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}) \\ \times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\beta(\vec{k}_2) \vec{k}_{2\perp} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}),$$

e

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right)^2 = -\delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) k_{1z} \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{R}) \\ \times \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\beta(\vec{k}_2) k_{2z} \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{R}),$$

e substituindo na eq.(2.81) obtemos:

$$\Delta F_{el} = \frac{1}{2} \left[-\lambda \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) k_{1\alpha} (-k_{1\beta}) \tilde{u}_\beta(-\vec{k}_1) \right. \\ \left. -\mu \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) k_{1\perp} (-k_{1\perp}) \tilde{u}_\beta(-\vec{k}_1) \right. \\ \left. -\kappa \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(\vec{k}_1) k_{1z} (-k_{1z}) \tilde{u}_\beta(-\vec{k}_1) \right].$$

Definindo $\vec{k}_1 \equiv -\vec{k}$, $k_{1z} \equiv k_z$ e $\vec{k}_{1\perp} \equiv \vec{k}_\perp$, na equação da energia elástica:

$$\Delta F_{el} = \frac{1}{2} \int_{zB} \frac{d^3 K}{(2\pi)^3} \tilde{u}_\alpha(-\vec{k}) [\lambda k_\alpha k_\beta + \mu \delta_{\alpha\beta} k_\perp^2 + \kappa \delta_{\alpha\beta} k_z^2] \tilde{u}_\beta(\vec{k}), \quad (2.90)$$

e obtemos que a matriz elástica é dada por:

$$\phi_{\alpha\beta} = (c_{11} - c_{66}) k_\alpha k_\beta + \delta_{\alpha\beta} [c_{66} k_\perp^2 + c_{44} k_z^2], \quad (2.91)$$

onde $c_{11}(\vec{k})$ é o módulo de compressão dispersivo, $c_{44}(\vec{k})$ é o módulo de inclinação e $c_{66}(\vec{k})$ é o módulo de cisalhamento dispersivo.

A eq.(2.91) é válida para $\vec{k}_\perp \ll \vec{k}_{zB}$ e é frequentemente uma aproximação para \vec{k} dentro de primeira zona de Brillouim. A energia elástica toma a seguinte forma:

$$\Delta F_{el} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [c_{11}(\vec{k})[\vec{k}_\perp \cdot \vec{u}(\vec{k})]^2 + c_{66}[\vec{k}_\perp \cdot \vec{u}(\vec{k})]^2 + c_{44}(\vec{k})[k_z u(\vec{k})]^2]. \quad (2.92)$$

Dentro da aproximação contínua, restringimos o somatório sobre os vetores da rede recíproca [eq.(2.83)] para o termo $\vec{Q} = 0$ e obtemos a matriz elástica:

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{B^2}{4\pi} f_{\alpha\beta}(\vec{k}) = \frac{B^2}{4\pi} \left[\frac{\delta_{\alpha\beta} k_z^2}{1 + \lambda^2 k^2} + \frac{k_\alpha k_\beta}{1 + \lambda^2 k^2} \right]. \quad (2.93)$$

e comparando as eqs.(2.83) e (2.92) obtemos os módulos elásticos de compressão e de inclinação respectivamente:

$$\boxed{c_{11}(\vec{k}) \simeq \frac{B^2}{4\pi(1 + \lambda^2 k^2)}} \quad (2.94)$$

$$\boxed{c_{44}(\vec{k}) \simeq \frac{B^2}{4\pi(1 + \lambda^2 k^2)}} \quad (2.95)$$

Dentro desta aproximação ($\vec{Q} = 0$) o módulo de cisalhamento é zero tal que esta descrição aplica-se a fase de vórtice líquida.

Capítulo 3

Supercondutores de Temperatura Crítica Alta

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os supercondutores em camadas de temperatura crítica alta. Um modelo conveniente para a análise das conseqüências de uma estrutura em camadas num material supercondutor foi proposto por Lawrence e Doniach (LD)²⁶. Neste modelo, os supercondutores em camadas são vistos como um arranjo de supercondutores bidimensionais empilhados. As camadas adjacentes estão acopladas por tunelamento Josephson.

Antes de começarmos a descrever a abordagem de Lawrence e Doniach (sec.3.4), introduziremos os conceitos relacionados com o acoplamento Josephson (sec.3.2) que nos ajudarão a compreender as características físicas destes materiais (sec.3.3). Como as propriedades termodinâmicas destes supercondutores são fortemente influenciadas pela quase-bidimensionalidade do sistema, descreveremos a transição de Kosterlitz e Thouless¹(KT) (sec.3.5) para sistemas bidimensionais.

3.2 Efeito Josephson

Josephson observou que uma supercorrente pode fluir de um supercondutor para outro através de uma barreira fina e isolante, sem que qualquer voltagem seja aplicada. A corrente crítica I_c , é a supercorrente máxima que a junção pode suportar.

Quando uma diferença de potencial é mantida através da junção, uma supercorrente pode fluir como descrito acima. Entretanto, neste caso uma corrente alternada (ca) sobrepõem-se a corrente contínua (cc). A freqüência desta corrente alternada é dada pela relação,

$$\omega = 2eV/\hbar. \quad (3.1)$$

Josephson mostrou que a corrente que flui entre dois eletrodos supercondutores através de uma barreira fina e isolante relaciona-se com a diferença de fase do parâmetro de ordem entre os dois supercondutores. A relação Josephson é:

$$I = I_c \sin \Delta\varphi, \quad (3.2)$$

onde $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ é a diferença de fase, φ_i representa a fase do parâmetro de ordem correspondente, $\psi_i = |\psi_i|e^{i\varphi_i}$ no supercondutor i , com $i=1$ ou 2 .

Agora mostraremos como podemos obter de maneira simples a eq.(3.2) das eqs.(1.30) e (1.31) de GL. Considere uma junção óxida perpendicular a direção x . A corrente ao longo desta direção é dada pela segunda relação de GL, eq.(1.31). Se não passa corrente para fora do supercondutor, podemos escrever que na superfície,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial z} - 2eA_z \psi = 0,$$

passam pares supercondutores para fora, então fenomenologicamente podemos escrever que,

$$(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - 2eA_z)\psi(\text{lado1}) = -\frac{i\hbar}{b}\psi(\text{lado2}), \quad (3.3)$$

onde introduzimos um parâmetro b que tem dimensão de comprimento. Sendo,

$$J_z = \frac{2e}{m}[\psi_1^*(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - 2eA_z)\psi_1 + c.c.]. \quad (3.4)$$

a corrente no lado 1 e na superfície torna-se:

$$\begin{aligned} J_z &= -\frac{i\hbar e}{mb}(\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1) \\ &= \frac{2e\hbar}{mb}|\psi_1||\psi_2|\sin(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

que é exatamente a relação Josephson, eq.(3.2).

A eq.(1.31) relaciona a corrente a uma quantidade invariante de gauge ($\nabla\varphi - 2e/\hbar A$). Então a diferença de fase com invariância de gauge é dada por,

$$\theta = \varphi_1 - \varphi_2 - \frac{2e}{\hbar} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (3.5)$$

Em termos de θ , a expressão geral para a densidade de supercorrente em uma junção Josephson ideal é:

$$J(x) = J_c \sin \theta(x).$$

Com as relações (3.1) e (3.2) podemos derivar a energia de acoplamento Josephson armazenada na junção integrando o trabalho elétrico $\int JV dt = \int I_c (\hbar/2e) d(\Delta\varphi)$, desta maneira obtemos,

$$E_J = -\frac{\hbar I_c}{2e} \cos \Delta\varphi. \quad (3.6)$$

O valor deste acoplamento é um importante parâmetro da junção Josephson.

3.2.1 Arranjo e Junções Josephson

Considere um arranjo quadrado com pequenos sítios supercondutores separados um dos outros pela distância a . Cada sítio está acoplado com 4 vizinhos mais próximos através da energia de acoplamento Josephson E_J . Neste caso a energia do arranjo pode ser escrita como um somatório sobre todas as junções, onde cada junção tem uma energia de acoplamento E_J ²⁸:

$$E = E_J \sum_{\text{arranjo}} (1 - \cos \varphi_i - \varphi_j). \quad (3.7)$$

Examinaremos as condições nas quais a aproximação de desprezar a blindagem é justificável para um supercondutor bidimensional. A blindagem para campos perpendiculares ocorre em uma profundidade característica λ_{\perp} . Para um filme fino, Pearl⁷ obteve $\lambda_{\perp} = \lambda_{ef}^2/d$, onde λ_{ef} descreve a profundidade de penetração característica no volume do supercondutor. Quando o filme é muito fino, λ_{\perp} diverge com $1/d$. Para $\lambda_{\perp} \gg R$, onde R é o raio efetivo de blindagem podem ser desprezados, no entanto eles são muito importantes se $\lambda_{\perp} \leq a$.

No caso de haver vorticidade na rede de junções Josephson, temos que, tomando um contorno suficientemente grande, vale $\sum_{\text{cont}} \nabla\varphi = 2\pi$, $\nabla\varphi = \varphi_i - \varphi_j$. Supondo $\nabla\varphi \approx a/r$, onde r é o raio do contorno escolhido e portanto $\nabla\varphi$ é muito pequeno,

temos que a energia é $E_J \theta_i^2 / 2 \approx E_J a^2 / 2r^2$. A energia total é obtida aproximando o somatório discreto das contribuições dos anéis concêntricos por uma integral,

$$E = \pi E_J \ln(R/a), \tag{3.8}$$

onde R é o limite superior da integração, o raio do arranjo.

A eq.(3.8) tende logicamente para o infinito com o tamanho da amostra. Discutiremos mais o problema de vórtices bidimensionais na apresentação da transição de Kosterlitz-Thouless.

3.3 Características dos Materiais

A maioria dos supercondutores de T_c alta são compostos óxidos que apresentam planos de cobre-oxigênio(CuO_2). Se olharmos a estrutura esquemática do $YBa_2Cu_3O_2$ apresentado na fig.(3.1), imediatamente notamos que ela é altamente **anisotrópica**.

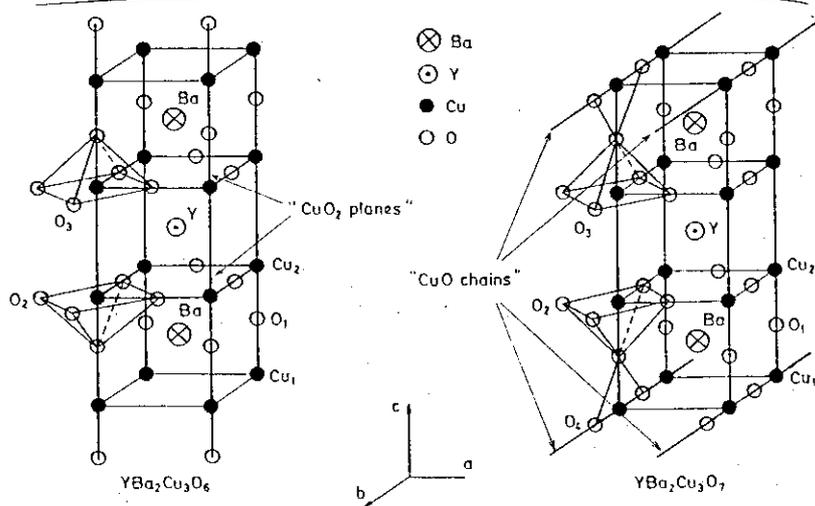


Figura 3.1: Diagrama esquemático do:(a) $YBa_2Cu_3O_6$ um isolante e (b) $YBa_2Cu_3O_7$ um óxido supercondutor.

As dimensões da célula unitária são aproximadamente $\sim 12\text{\AA}$ e $\sim 4\text{\AA}$ nas direções do eixo-c e a-ou-b respectivamente. Um íon de ítrio(Y) no centro e íons de bário(Ba) acima e abaixo dos planos de cobre-oxigênio proporcionam a

“espinha” vertical desta estrutura em camadas. O fato desta célula unitária conter camadas de cobre-oxigênio será de grande importância para o nosso entendimento das propriedades físicas destas estruturas e será discutida com mais detalhes nas próximas seções.

A maioria dos óxidos são materiais isolantes, mas os de T_c alta apresentam um comportamento metálico. A condutibilidade é metálica principalmente nos planos de CuO_2 ; perpendicularmente a estes a condutibilidade é bem menor.

Os supercondutores em camadas apresentam as seguintes propriedades físicas:

- Supercondutores com $T_c \sim 100K$.
- Estruturas quase-bidimensionais. A estrutura do $YBa_2Cu_3O_6$ é mostrada na fig.(3.1a), representa um isolante. Ele foi dopado para tornar-se gradualmente um supercondutor abaixo de alguma temperatura T_c . A dopagem é completada adicionando oxigênios extras que formam “cadeias” de CuO . Estes íons de oxigênio atraem os elétrons dos planos de CuO_2 que portanto tornam-se metálicos. A fórmula correta para o $YBCO$ é portanto: $YBa_2Cu_3O_{6+x}$, onde x corresponde ao oxigênio parcial:

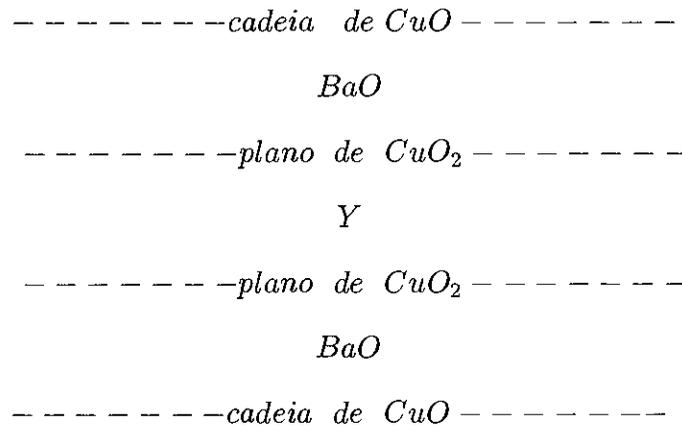
para $0,0 < x < 0,4$ $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ isolante,
 para $0,4 < x < 1,0$ $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ supercondutor.

- Comprimento de coerência muito pequeno. O comprimento de coerência derivado da teoria BCS é $\xi_o \sim v_F/k_B T_c$ [sec.(1.2)]. Podemos imediatamente esperar que ξ_o seja pequeno nestes supercondutores devido as temperaturas críticas altas. Entretanto, devido a baixa densidade dos portadores, a velocidade de Fermi nestes metais iônicos é também menor do que nos metais normais. Disto resulta um comprimento de coerência muito pequeno, $\xi_o \sim 10\text{\AA}^{25}$, que é comparável a “célula unitária”. O comprimento de coerência é diferente para diferentes direções cristalográficas e foi experimentalmente encontrado para o $YBa_2Cu_3O_7$ que ξ_{ab} e ξ_c são $\sim 15\text{\AA}$ e $\sim 4\text{\AA}$ respectivamente. O comprimento

de coerência pequeno também implica que os supercondutores óxidos de T_c alta são supercondutores do tipo II com campo crítico superior H_{c2} muito mais alto.

3.3.1 Modelo Simples para os Óxidos Supercondutores

A estrutura do YBCO pode ser esquematicamente representada como uma estrutura em camadas que consiste de dois planos de CuO_2 separados por um sítio de Y. Entre estas bicamadas existem regiões intercamadas, no caso do $YBa_2Cu_3O_7$ corresponde as cadeias de CuO .



A superconductibilidade essencialmente ocorre dentro dos planos quase-bidimensionais de CuO_2 .

3.4 Modelo de Lawrence-Doniach

Como enfatizamos na seção anterior, os supercondutores de T_c alta consistem de camadas de CuO_2 que se alternam com outras camadas. As camadas de CuO_2 são responsáveis pela condutibilidade e supercondutibilidade, enquanto as outras camadas, que doam portadores para os planos CuO_2 , atuam ou como isolantes ou como camadas fracamente metálicas. A densidade de estados nos níveis com energia de Fermi é muito baixa nestas camadas. Elas aumentam efetivamente a distância

entre os planos condutores de CuO_2 e portanto introduzem a observada anisotropia no metal.

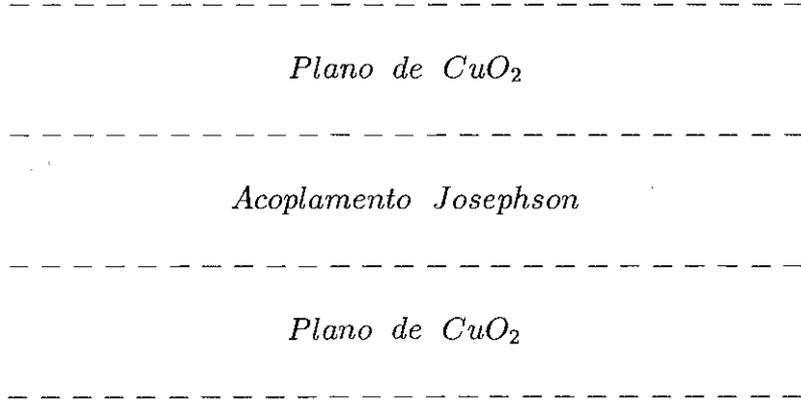
Nós vimos na sec.(1.6) que a descrição da supercondutibilidade em um material anisotrópico pode ser dada por uma simples generalização das equações de GL com uma massa efetiva anisotrópica: Uma grande massa ao longo do eixo-c e uma pequena no plano-ab. Entretanto, é apropriada somente em compostos com pequena anisotropia e torna-se inválida no limite de grande anisotropia. A abordagem de GL é válida somente se o comprimento de coerência for maior do que a periodicidade da rede, a : $\xi_o > a$.

Quando o comprimento de coerência a temperatura zero é menor que o parâmetro da rede, ou, mais precisamente, menor do que a distância s entre os planos de CuO_2 : $\xi_o = \hbar v_F / (k_o T) < s$, a aproximação anisotrópica de GL é válida somente se $\xi(T) > s$ ou $\xi_o (T_c / (T - T_c))^{1/2} > s$, isto é,

$$\frac{(T_c - T)}{T} < \left(\frac{\xi_o}{s}\right)^2 \quad (3.9)$$

Se a razão anisotrópica ξ_o/s é pequena, a desigualdade pode ser violada para temperaturas não tão baixas. Neste caso a aproximação de GL não é boa e deve-se usar um modelo mais geral descrito por Lawrence-Doniach.

Nos supercondutores em camadas o parâmetro de ordem supercondutor está variando na direção perpendicular as camadas. Se ξ é pequeno o parâmetro de ordem torna-se inhomogêneo, pois é grande dentro das camadas de CuO_2 e pequeno entre elas. Aqui discutiremos a aproximação onde o parâmetro de ordem nas regiões entre os planos é ignorado, existindo um acoplamento Josephson entre essas regiões (veja esquema abaixo). Então, nesta aproximação o supercondutor em camadas pode ser considerado como um arranjo de camadas supercondutoras acopladas por interação Josephson.



Tal modelo com camadas de espessura atômica, acopladas por junções Josephson, é conhecido como modelo de Lawrence-Doniach²⁶. O funcional energia livre é escrito como o somatório da energia livre de GL para as camadas e a energia de acoplamento Josephson entre as camadas.

O funcional energia livre descreve um conjunto discreto de camadas supercondutoras com parâmetro de ordem ψ_n separados por uma distância s e acopladas por um termo de energia de acoplamento Josephson,

$$\mathcal{F}\{\psi_n(\vec{r}_\perp), \vec{A}(r)\} = s \sum_n \int d^2r_\perp \left[-\alpha |\psi_n|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi_n|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} |(-i\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A})\psi_n|^2 + \frac{\hbar^2}{2m_c s^2} |\psi_{n+1} - \psi_n \exp(iI_n)|^2 \right] + \int d^3r \frac{H^2}{8\pi}. \quad (3.10)$$

$$I_n(\vec{r}) = \frac{2e}{\hbar} \int_{ns}^{ns+s} A_z(\vec{r}_\perp, z) dz \quad (3.11)$$

Seguindo a nomenclatura cristalográfica convencional, vemos que as camadas definem os planos ab e o eixo c é normal a elas. A coordenada z é tomada ao longo do eixo c, sendo s a distância interplanar, e x, y as coordenadas no plano. Aqui o somatório percorre todas as camadas e a integral é sobre a área de cada camada, $\vec{r}_\perp = (x, y)$, m_{ab} e m_c são as massas efetivas dos pares de Cooper movendo-se no plano a-b ou ao longo do eixo c, $A_z = \vec{A} \cdot \hat{z}$, e a integral da eq.(3.11) é ao longo de uma linha reta. Os parâmetros de GL são: $\xi_{ab}^2 = \hbar^2/2m_{ab}\alpha$, $\xi_c^2 = \hbar^2/2m_c\alpha$,

$\lambda_{ab}^2 = m_{ab}\beta/4\pi e^2\alpha$ e $\lambda_c^2 = m_c\beta/4\pi e^2\alpha$. Então $\lambda_c^2/\lambda_{ab}^2 = \xi_{ab}^2/\xi_c^2 = m_c/m_{ab} = \gamma^2 \gg 1$ para os supercondutores de T_c alta, γ é definido como um **parâmetro anisotrópico**.

Na ausência de campo magnético podemos escrever a energia livre, eq.(3.10) como:

$$\mathcal{F}\{\psi_n(\vec{r}_\perp), \vec{A}(r)\} = s \sum_n \int d^2r_\perp \left[-\alpha |\psi_n|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi_n|^4 + \frac{\hbar^2}{2m_{ab}} \left(\left| \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right|^2 \right) + \frac{\hbar^2}{2m_c s^2} |\psi_{n+1} - \psi_n|^2 \right]. \quad (3.12)$$

Se escrevermos $\psi_n = |\psi_n|e^{i\varphi_n}$, e assumirmos que todos o $|\psi_n|$ são iguais, o último termo da eq.(3.12) pode ser escrito como:

$$\frac{\hbar^2}{m_c s^2} |\psi_n|^2 [1 - \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n)], \quad (3.13)$$

que torna claro a equivalência deste termo com a energia de acoplamento Josephson eq.(3.7) ($\sim 1/m_c$) entre planos adjacentes.

3.4.1 Propriedades da Rede de Vórtice

Agora consideraremos a diferença entre o estado misto de um supercondutor convencional e um supercondutor óxido de T_c alta, extremamente anisotrópico como os compostos de Bi(Bismuto) e Tl(Tálio). Suponha que um campo externo H é aplicado paralelamente ao eixo-c do cristal. Para $H > H_{c1}$ a rede de vórtices de Abrikosov é formada por supercorrentes contornando os núcleos predominantemente localizados nos plano de CuO_2 . Como vimos no capítulo 1, o parâmetro de ordem supercondutor ψ desaparece no centro do vórtice; isto significa que ψ torna-se zero dentro dos planos de CuO_2 . Entretanto, como entre os planos existe uma região com junções Josephson, não se pode usar a descrição feita no capítulo 1.

O composto YBCO apresentado na sec.3.3 é um material supercondutor anisotrópico tridimensional, de tal forma que podemos assumir a continuidade das linhas de fluxo. Para um composto mais anisotrópico como o BSCO($Bi_2Ca_2Sr_2Cu_3O_{10}$), o acoplamento interplanar é tão fraco que devemos considerar os planos supercondutores discretos. Então os vórtices são entidades que

existem individualmente em cada um dos planos supercondutores, chamados vórtices panquecas.

Consideramos a configuração na qual \vec{H} está ao longo do eixo c , perpendicular aos planos, de tal forma que cada linha de vórtice pode ser considerada como uma corda de vórtices panquecas nos plano por meio dos quais eles atravessam. Neste caso, o sistema é considerado tridimensional se as posições (x,y) dos vórtices panquecas em planos sucessivos estão fortemente correlacionados, como uma linha de vórtice contínua; ou eles podem ser bidimensionais se os vórtices panquecas em planos sucessivos moverem-se independentemente.

Então podemos dizer que a estrutura em camadas proporciona dois novos fenômenos: vórtices panquecas e cordas Josephson, fig.(3.2).

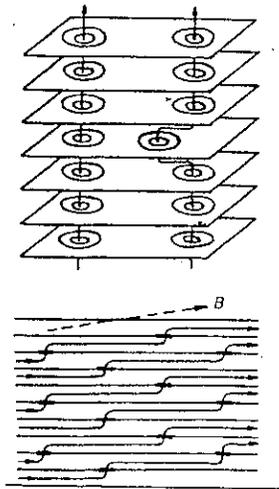


Figura 3.2: Estrutura de uma linha de fluxo de um supercondutor em camadas. A linha de vórtice pode ser vista como um arranjo de vórtices panquecas interconectadas por cordas Josephson.

Quando o campo aplicado é quase paralelo ao eixo- c as linhas de fluxo consistem de pilhas de vórtices bidimensionais 2D, ou vórtices panquecas²⁹. O campo de um único vórtice bidimensional com centro em $\vec{r}_i = 0$ está confinado a uma camada de espessura $\approx 2\lambda_{ab}$. Vórtices panquecas na mesma camada repelem-se, mas aqueles em diferentes camadas atraem-se. Esta é a razão porque um rede regular de linhas tem

a energia mais baixa.

Quando o campo aplicado é quase paralelo ao plano-ab o núcleo do vórtice prefere circular entre os planos de CuO_2 ³⁰. Quando o acoplamento entre as camadas é fraco, as linhas de vórtice ao longo do plano-ab são chamadas vórtices Josephson ou cordas Josephson. Este não tem núcleo no sentido usual de um desaparecimento do parâmetro de ordem ψ pois ψ é supostamente zero no espaço entre as camadas. A corrente circulando ao redor do vórtice atravessa o espaço isolante entre as camadas. A largura do núcleo do vórtice Josephson é $\lambda_J = \gamma s$ (a profundidade de penetração Josephson)³¹ e sua espessura é s . A razão $\lambda_J/s = \gamma = \xi_{ab}/\xi_c$ é a mesma de um núcleo de vórtice de London no plano-ab com largura ξ_{ab} e espessura ξ_c .

Agora discutiremos a intensidade relativa das forças restauradoras exercidas em um dado vórtice panqueca por vórtices panquecas adjacentes no mesmo plano e por vórtices panquecas nos planos adjacentes superior e inferior. Existem duas fontes de forças entre vórtices em planos adjacentes: o acoplamento Josephson e o acoplamento magnético.

Mostramos no capítulo 2 que a força entre duas linha de fluxo paralelas orientadas ao longo do eixo z é repulsiva e sua componente x pode ser escrita com $f_{2x} = (\phi_o/4\pi)[\partial h_1(\vec{r}_2)/\partial x_2]$, onde $h_1(\vec{r}_2)$ é o campo do vórtice 1 na posição do vórtice 2. Em um arranjo regular de vórtices, todas estas forças se cancelam. Se a linha de vórtice de interesse é deslocada por δx com relação ao resto do arranjo, existirá uma força líquida proporcional a δx , esta deve ser uma força restauradora se a rede de linhas de fluxo é estável. A força restauradora constante por unidade de comprimento foi estimada²⁸ como,

$$\mathcal{K} \approx \frac{\sqrt{3}\phi_o}{4\pi^2\lambda^2}B \approx H_{c1}B \quad (3.14)$$

Podemos estimar a força constante para um movimento relativo no plano tomando a força constante \mathcal{K} por unidade de comprimento eq.(3.14) entre duas linhas, multiplicada pela distância interplanar s por comprimento L_z . Aparte dos fatores numéricos, obtemos uma força interplanos constante de $\mathcal{K}s \sim B\phi_o s/\lambda_{ab}^2$. Para achar o termo interplanos Josephson, notamos que a eq.(3.13) implica que E_J por unidade

de área é dada por:

$$E_J = \frac{\phi_o^2}{16\pi^3 \lambda_c^2 s^2}. \quad (3.15)$$

Colocando a como a distância intervórtice, a energia de acoplamento por vórtice será $\sim a^2 E_J$.

A força interplanos independe de B enquanto a força intraplanos é proporcional a B , estas forças serão iguais em algum campo de cruzamento característico B_{cr} .

$$B_{cr} \sim \phi_o \left(\frac{\lambda_{ab}}{s \lambda_c} \right)^2 \sim \frac{\phi_o}{s^2 \gamma^2}. \quad (3.16)$$

Esta equação mostra explicitamente a importância crítica do fator anisotrópico γ . O acoplamento magnético domina no limite $\gamma \rightarrow \infty$, onde $E_J \rightarrow 0$; o acoplamento magnético Josephson domina quando $\gamma \leq \lambda_{ab}/s \sim 100$ para parâmetros típicos.

3.5 Transições em Sistemas Bidimensionais

Para a maioria dos compostos em camadas (Bi-Sr-Ca-Cu-O ; Ta-Ba-Ca-Cu-O) a transição para a fase supercondutora é semelhante a transição de Kosterlitz e Thouless em sistemas bidimensionais. Como vimos na fig(3.2), a pilha de vórtices 2D está acoplada por meio de vórtices Josephson que enfileiram através das junções Josephson entre as camadas supercondutoras, esticando do centro de cada vórtice panqueca para o centro dos vórtices adjacentes para cima e para baixo.

A agitação térmica pode sacudir as pilhas, desacoplando os vórtices panquecas, e mesmo pode induzir a fragmentação da pilha como na transição de KT. A fig.(3.2) mostra o segmento de um vórtice deslocado mais ainda acoplado. Neste modelo pode ocorrer derretimento na direção perpendicular as camadas, com os vórtices dentro das camadas formando sólidos 2D.

3.5.1 Transição de Kosterlitz e Thouless em um Gás de Coulomb Bidimensional

O problema estudado por Kosterlitz e Thouless (KT) foi essencialmente o de um gás bidimensional de partículas com cargas $\pm q$ interagindo por meio de um potencial logarítmico. A carga elétrica total do sistema é neutra. O hamiltoniano para tal sistema é dado por;

$$\mathcal{H}(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad (3.17)$$

onde $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ é o potencial de interação e é dado por:

$$\begin{aligned} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) &= -q_i q_j \ln \left| \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{r_o} \right| + 2\mu, & r > r_o \\ &= 0 & r < r_o. \end{aligned}$$

Aqui q_i e \vec{r}_i são respectivamente a carga e a posição da i -ésima partícula, 2μ é a energia necessária para criar um par de partículas com cargas de mesma magnitude e sinais opostos separados por uma distância r_o , e r_o é algum limite conveniente de corte para evitar divergências em pequenas separações. Segundo Kosterlitz e Thouless¹ r_o é da ordem do diâmetro da partícula ou, para uma rede, o espaçamento da rede.

Para obter uma teoria tratável, KT assumiram também que o potencial químico μ é suficientemente grande de forma que existam pouquíssimas partículas no sistema. Para um gás diluído, a configuração de menor energia é aquela onde as cargas $+q$ e $-q$ estão intimamente ligadas, e os pares estão bem separados um dos outros. A hipótese de KT é que a baixas temperaturas as cargas formam dipolos que se quebram a uma certa temperatura dando origem a cargas livres. Para verificar calcularam a separação quadrática média das partículas compondo um par de dipolo (desprezando as interações presentes entre os pares),

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_{r_o}^{\infty} dr r^3 \exp(-2\beta q^2 \ln(r/r_o))}{\int_{r_o}^{\infty} dr r \exp(-\beta q^2 \ln(r/r_o))} = r_o^2 \frac{\beta q^2 - 1}{\beta q^2 - 2}, \quad (3.18)$$

onde $\beta = 1/k_B T$. Quando $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) na eq.(3.18), $\langle r^2 \rangle = r_o^2$, os pares de partículas formando um dipolo permanecem intimamente ligados mantendo uma

separação r_o . Quando $\beta q^2 = 2$ na eq.(3.18), $\langle r^2 \rangle \sim \infty$. Podemos esperar que a transição de fase para um estado condutor tomará lugar em uma temperatura T_{KT} dada por:

$$k_B T_{KT} \approx \frac{1}{2} q^2. \quad (3.19)$$

Em conclusão nessa temperatura os pares de dipolos intimamente ligados separam-se formando um plasma bidimensional uniforme de partículas com cargas opostas. A energia livre de Gibbs de um dipolo é dado por:

$$\mathcal{F} = E - TS \approx \frac{1}{2} q^2 \ln\left(\frac{R^2}{r_o^2}\right) - k_B T \ln\left(\frac{R^2}{r_o^2}\right), \quad (3.20)$$

onde R é o raio do sistema. Então vemos que cargas isoladas podem ocorrer quando a temperatura alcança T_{KT} como dado na eq.(3.19).

3.5.2 Transição de Fase em Supercondutores em Camadas

Considere um sistema de spins $S_{\alpha,i}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$, localizados nos sítios i de uma rede quadrada bidimensional, e submetidos a $\sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha,i}^2 = 1$. O estado pode ser estável somente se não existirem flutuações bastante fortes para destruí-lo. Em particular quando $T \rightarrow 0$, as flutuações devem desaparecer. Suponha que elas sejam pequenas de tal forma que podemos considerar somente aquelas no hiperplano normal a n , e ignorar o confinamento em $\sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha,i}^2$. O hamiltoniano descrevendo estas flutuações é dado por,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} (S_{\alpha,i} - S_{\alpha,j})^2 \quad (3.21)$$

onde $\sum_{\langle i,j \rangle}$ representa o somatório sobre os vizinhos mais próximos, J é a constante de acoplamento e $S_{\alpha,i} = |S_{\alpha,i}| e^{i\theta_i}$. Supondo que todos os $|S_{\alpha,i}|$ são iguais, a eq.(3.21) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} [|S_{\alpha,i}|^2 + |S_{\alpha,j}|^2 - S_{\alpha,i}^* S_{\alpha,j} - S_{\alpha,i} S_{\alpha,j}^*]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} |S_{\alpha,i}|^2 [2 - e^{-i(\theta_i - \theta_j)} + e^{i(\theta_i - \theta_j)}] \\
 &= J \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\alpha=1}^{n-1} |S_{\alpha,i}|^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]. \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

O objetivo desta seção é fazer uma representação física quantitativa das fases do modelo planar. No modelo XY as ondas de spin permanecem acopladas aos vórtices impossibilitando o cálculo completo do problema. Para isto introduzimos um modelo mais simples, o modelo de Villain³² ou modelo gaussiano periódico, neste modelo as ondas de spin estão desacopladas dos vórtices. O modelo de Villain tem a mesma característica topológica do modelo XY, então é razoável assumir que as fases dos dois modelos sejam as mesmas.

Este novo modelo foi motivado pelo caráter periódico do hamiltoniano, permitindo assim escrever uma série de Fourier para cada vínculo,

$$\exp\{-\beta[1 - \cos(\theta_i - \theta_j)]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\theta_i - \theta_j)} I_l(\beta) e^{-\beta},$$

onde $\beta = k_B T$, $I_l(\beta)$ é a função de Bessel do argumento imaginário,

$$I_l(\beta) = \int_0^{2\pi} e^{\beta \cos \theta} e^{il\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{3.23}$$

Quando $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$), $e^{-\beta} I_l(\beta)$ pode ser aproximado por $(2\pi\beta)^{-1/2} \exp(-l^2/2\beta)$, então

$$e^{-\beta(1 - \cos(\theta_i - \theta_j))} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\theta_i - \theta_j)} e^{-l^2/2\beta}. \tag{3.24}$$

Um ponto importante na eq.(3.24) é que a aproximação, mesmo embora aplicada somente para $T \rightarrow 0$, preserva contudo a natureza periódica da variável θ_i . Embora o lado direito da eq.(3.24) seja completamente fechado ao modelo planar somente para baixas temperaturas³³, pode ser considerado em todas as temperaturas e pode-se estudar as fases.

O formalismo do modelo periódico gaussiano é desenvolvido mostrando que é possível separar as ondas de spin de seus vórtices sem quaisquer aproximações

adicionais. Veremos também que o setor de vórtice do modelo é equivalente ao gás de Coulomb bidimensional. A eq.(3.24) é reescrita de uma forma mais elegante,

$$\exp[-\beta(1 - \cos(\nabla\theta(\vec{r})))] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{n_\mu(\vec{r})=-\infty}^{\infty} e^{in_\mu\theta(\vec{r})} \exp(-n_\mu^2/2\beta), \quad (3.25)$$

onde um vetor $n_\mu(\vec{r})$ tendo componentes inteiras $n_1(\vec{r})$ e $n_2(\vec{r})$, está associado com cada sítio \vec{r} da rede bidimensional. A função partição do modelo de Villain é escrita como:

$$\mathcal{Z} = \int_0^{2\pi} \prod_{\vec{r}} d\theta(\vec{r}) \prod_{\vec{r}, \mu} \sum_{n_\mu(\vec{r})=-\infty}^{\infty} e^{in_\mu\theta(\vec{r})} \exp(-n_\mu^2/2\beta), \quad (3.26)$$

onde a constante multiplicativa foi omitida e não existem somatórios sobre os índices repetidos. Para calcular a integral sobre $\theta(\vec{r})$ são considerados todos os termos no expoente:

$$\begin{aligned} & n_1(\vec{r})[\theta(\vec{r} + \vec{\mu}_1) - \theta(\vec{r})] + n_2(\vec{r})[\theta(\vec{r} + \vec{\mu}_2) - \theta(\vec{r})] \\ & + n_1(\vec{r} - \vec{\mu}_1)[\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r} - \vec{\mu}_1)] + n_2(\vec{r} - \vec{\mu}_2)[\theta(\vec{r}) - \theta(\vec{r} - \vec{\mu}_2)]. \end{aligned}$$

A integral sobre $\theta(\vec{r})$ desaparece a não ser que $[n_1(\vec{r}) - n_1(\vec{r} - \vec{\mu}_1)] + [n_2(\vec{r}) - n_2(\vec{r} - \vec{\mu}_2)] = 0$, ou seja $\nabla \cdot \vec{n}(\vec{r}) = 0$, então \vec{n} é um vetor cuja “divergência discreta” é zero. Assim podemos escrevê-lo como um rotacional:

$$n_\mu(\vec{r}) = \sum_{\nu} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu p(\vec{r}),$$

onde $p(\vec{r})$ é um campo escalar assumindo somente valores inteiros e $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. A menos de um fator constante a função partição, eq.(3.26) torna-se:

$$\mathcal{Z} = \sum_{p(\vec{r})=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\beta} \sum_{\vec{r}, \mu} (\partial_\mu p(\vec{r}))^2\right), \quad (3.27)$$

onde $n_\mu(\vec{r})n_\mu(\vec{r}) = (\partial_\mu p(\vec{r}))^2$. Com a fórmula do somatório de Poisson dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi g(\varphi) e^{2i\pi m\varphi},$$

onde g é uma função arbitrária e o somatório sobre a variável m assegura que a periodicidade do hamiltoniano original é preservada. Aplicando esta identidade a eq.(3.27) obtemos:

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\vec{r}} d\varphi(\vec{r}) \sum_{m(\vec{r})=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2\beta} \sum_{\vec{r}, \mu} (\partial_{\mu} \varphi)^2 + 2\pi i \sum_{\vec{r}} m(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \right], \quad (3.28)$$

onde $\varphi(\vec{r})$ é identificado com as ondas de spin e $m(\vec{r})$ com os vórtices. A eq.(3.28) é uma integral gaussiana com \vec{r} variáveis, onde $(1/\beta)\nabla^2$ é uma matriz simétrica e estritamente positiva, então obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}(0) \exp \left[\frac{1}{2} (2\pi i)^2 m(\vec{r}) [\beta(\nabla^2)^{-1}] m(\vec{r}') \right] \\ &= \mathcal{Z}(0) \sum_{m(\vec{r})=-\infty}^{\infty} \exp \left[-2\pi^2 \beta \sum_{\vec{r}, \vec{r}'} m(\vec{r}) G(\vec{r} - \vec{r}') m(\vec{r}') \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

O $\mathcal{Z}(0)$ é a contribuição spin-onda produzida pela integral gaussiana e $G(\vec{r} - \vec{r}')$ é o propagador para um campo sem massa. O propagador da rede satisfaz $\nabla^2 G(r) = \delta_{r,0}$, onde ∇^2 é uma forma discreta da derivada segunda. Se tomarmos $\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2$ onde $\nabla_x^2 G(r) = G(r+x) + G(r-x) - 2G(r)$, foi verificado que,³³

$$G(\vec{r}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_y}{2\pi} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(4 - 2\cos(k_x) - \cos(k_y))}. \quad (3.30)$$

Por meio do teorema de Gauss o campo elétrico correspondente é $E(\vec{r}) = \sigma/2\pi\vec{r}$, onde σ é a densidade de carga. Este campo elétrico leva a um potencial $-(\sigma/2\pi) \ln r + cte$. Então a solução para o propagador da rede é dado por;

$$\boxed{G(r) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{4}, \quad |r| \gg 1.} \quad (3.31)$$

Portanto as variáveis $m(\vec{r})$ interagem entre si através de um potencial logarítmico. As configurações de vórtices de spin experimentam a mesma lei de força: vórtices com vorticidade opostas experimentam um potencial logarítmico atrativo e os com a mesma vorticidade se repelem através do mesmo potencial.

A representação deste modelo sugere o caráter da transição de fase discutida no modelo do gás de Coulomb bidimensional. O forte potencial logarítmico entre os vórtices sugere que pares de vórtices/anti-vórtices que populacionam o estado fundamental. Com o aumento da temperatura o tamanho do estado pares de vórtice/anti-vórtice cresce até que uma determinada temperatura crítica é alcançada. Então vórtices livres aparecem e o estado fundamental é um condensado de vórtices.

Considere dois vórtices de sinais opostos separados pela distância R_{12} . A energia do par de vórtices é obtida da eq.(3.8)²⁸,

$$E_{12} = 2\pi E_J \ln\left(\frac{R_{12}}{a}\right). \quad (3.32)$$

Observamos que E_{12} cresce com o crescimento de R_{12} , implicando uma força atrativa de $\sim 2\pi E_J/R_{12}$ entre os vórtices de sinais opostos. Aplicando a lei de Gauss para um sistema bidimensional, achamos que o campo elétrico de uma carga q é dado por $\mathcal{E} = 4\pi q/2\pi r = 2q/r$, então a força atrativa entre as cargas de sinais opostos separadas pela distância R_{12} será $f = 2q^2/R_{12}$. A energia correspondente é $E_{12} = 2q^2 \ln(R_{12}/a)$, onde a é o espaçamento da rede. Comparando com a energia entre os vórtices, podemos dizer que temos um gás de Coulomb bidimensional de carga com magnitude $q = (\pi E_J)^{1/2}$, logo da eq.(3.19) obtemos:

$$k_B T_{KT} = \frac{\pi}{2} E_J(T_{KT}). \quad (3.33)$$

*Beasley et al.*³⁴ aplicaram a eq.(3.33) para um filme fino supercondutor obtendo:

$$k_B T_{KT} = \frac{\pi \hbar^2 n_s^*(T_{KT}) d}{2m^*} = \frac{\phi_o^2}{32\pi^2 \lambda_{ef}^2(T_{KT})} \frac{d}{32\pi^2 \lambda_{\perp}(T_{KT})}, \quad (3.34)$$

onde n_s^* é a densidade volumétrica do par superfluido.

Como vimos na sec.(3.4) o supercondutor em camadas pode ser considerado um arranjo de camadas supercondutoras acopladas por interação Josephson. A hamiltoniana descrevendo este tipo de interação entre as camadas é obtida da eq.(3.12), onde omitimos o vetor potencial por simplicidade:

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{m_c s^2} |\psi_n|^2 [1 - \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n)]. \quad (3.35)$$

Comparando as eqs.(3.22) e (3.35) observamos que $J = \hbar^2/m_c s^2$ e a interação no primeiro caso é entre spins vizinhos mais próximos no plano, e no segundo caso a interação é entre vórtices panquecas de uma mesma linha. Da mesma forma que no modelo planar periódico ocorre uma transição de fase acima da temperatura de KT, também no caso dos supercondutores em camadas ocorre uma transição de fase acima de alguma temperatura crítica.

Vamos considerar supercondutores de T_c alta no limite de camadas desacopladas, que portanto tornan-se equivalentes a vários filmes supercondutores de espessura nula, todos eles tendo uma transição KT a mesma temperatura. As flutuações térmicas nestes supercondutores são muito mais forte do que nos convencionais devido aos seguintes fatores: comprimento de coerência pequeno, temperatura de transição alta e a estrutura em camadas destes compostos. Então para a maioria dos compostos em camadas a transição de fase é semelhante a transição de KT para sistemas bidimensionais.

A temperatura de derretimento 2D pode ser estimada através do deslocamento quadrático médio dos vórtices panquecas em um plano e usando o critério de Lindeman foi obtido¹¹:

$$k_B T_m^{2D} = \frac{C c_L^2 \phi_0^2 s}{\lambda_{ab}^2}. \quad (3.36)$$

A temperatura de derretimento T_m é consideravelmente menor que a temperatura de transição supercondutora T_c . Então a rede de linhas de vórtices panquecas induzidas por campos magnéticos externos ao longo do eixo c transforma-se em um líquido de vórtices por meio de uma transição de fase de primeira ordem. A instabilidade dos vórtices panquecas é provocada pelas flutuações térmicas. Na ausência de flutuações vórtices 2D em diferentes camadas são posicionados exatamente um embaixo do outro. Então, a modulação periódica no plano do campo magnético tem a mesma fase e o campo \vec{B} tem somente a componente z . As flutuações produzem uma defasagem relativa desta modulação em diferentes planos.

Esta expressão concorda com o resultado de KT para a transição de vórtices livres em um sistema 2D se o fator de escala numérico for $C c_L = 1/(128\pi^3\sqrt{3})$. Note que nesta aproximação, a temperatura de derretimento independe de B . Um diagrama de fase para um material altamente anisotrópico é mostrado na fig.(3.3).

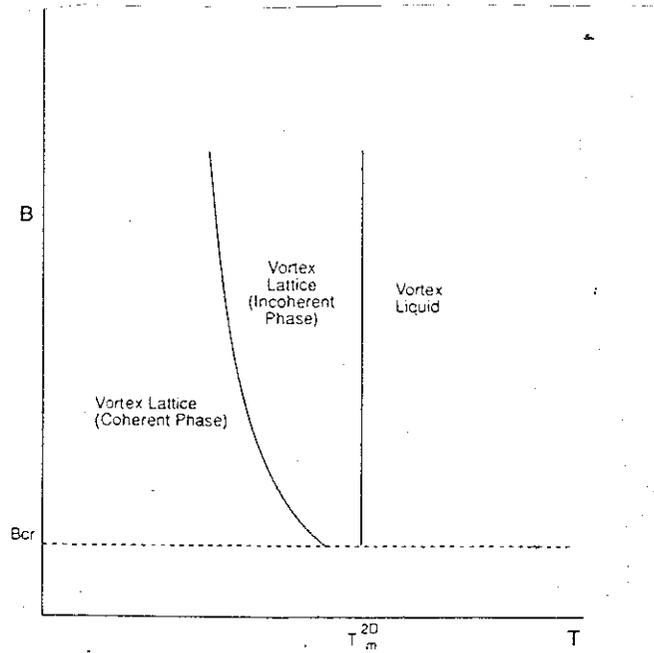


Figura 3.3: Diagrama de fase de um material altamente anisotrópico, ex.BSCCO.

Capítulo 4

Flutuações de Vórtices em Supercondutores de T_c Alta

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é obter uma equação para a magnetização em função do campo e da temperatura, e verificar que existe uma temperatura T_s de criação espontânea de linhas de vórtices em supercondutores em camadas com acoplamento Josephson.

Este estudo baseia-se no trabalho de *Bulaevskii et al*¹⁰, no qual eles mostraram que a criação espontânea termicamente induzida de linhas de vórtices pode ocorrer em materiais supercondutores em camadas com acoplamento Josephson, acima de uma temperatura $T_s < T_{co}$.

Acima de T_{KT} , que encontra-se abaixo da temperatura do campo médio T_{co} , vórtices termicamente induzidos estão presentes, em supercondutores 2D. A criação espontânea de vórtices livres acima de T_{KT} [3.34] ocorre devido a contribuição da entropia $S = \ln(R^2/\xi^2)$ na energia livre $\mathcal{F} = \mathcal{I} - TS$, onde $\mathcal{I} = (\phi_0^2 d / 16\pi^2 \lambda_L^2) \ln(R/\xi)$ é a energia de uma linha de vórtice, πR^2 é a área do sistema e d é a espessura.

A energia livre $\mathcal{F}(B, T)$ para um rede de vórtices é obtida da equação,

$$\mathcal{F}(B, T) = -T \ln Z, \quad (4.1)$$

aqui T ($k_B = 1$) tem unidade de energia e Z é a função partição.

Neste capítulo também descreveremos o procedimento feito por *Kogan et al.*¹⁴ para obter λ dos dados da magnetização $M(B, T)$ considerando as flutuações térmicas.

4.2 Cálculo da Função Partição para uma Rede de Vórtices Bidimensionais

A função partição Z pode ser escrita como uma integral funcional sobre o deslocamento dos vórtices bidimensionais $\vec{u}(n, \vec{r}_\nu) = (u_x, u_y)$, onde $\vec{r}_\nu = (x, y)$ representa o vórtice panqueca ν na camada n .

$$Z = \int \mathcal{D}[\vec{u}(n, \vec{r}_\nu)] \exp\left(-\frac{F\{\vec{u}(n, \vec{r}_\nu)\}}{T}\right). \quad (4.2)$$

Esta integral pode ser calculada usando a descontinuidade do deslocamento do campo \vec{u} , que é definido somente nas posições das camadas. A integral então torna-se um produto de integrais duplas sobre os deslocamentos u_{xn} e u_{yn} de $-\infty$ a $+\infty$.

O sistema estudado por *Bulaevskii et al*¹⁰ consiste de um rede de vórtices na presença de um campo magnético $H \ll H_{c2}(T)$ aplicado perpendicularmente as camadas. Como vimos no capítulo 2, a rede de vórtices não está em sua configuração de equilíbrio, mas em algum estado distorcido, estes deslocamentos dos vórtices bidimensionais são representados por $\vec{u}(n, \vec{r})$.

Na abordagem de Lawrence-Doniach [sec.3.4] as linhas de vórtices contínuas são descritas por pilhas de vórtices 2D correlacionadas. O significado de pilhas de panquecas correlacionadas supõem que as distorções de uma linha não excedam a distância entre as linhas,

$$\langle [\vec{u}(n, \vec{r}_\nu) - \vec{u}(n+1, \vec{r}_\nu)]^2 \rangle \leq \phi_o/B \quad (4.3)$$

onde $B = 2\phi_o/\sqrt{3}a^2$ (rede hexagonal) é a indução magnética como visto no capítulo 1, e $\langle \dots \rangle$ é a média termodinâmica.

Neste problema é suposto que o acoplamento Josephson [sec.3.2] entre as panquecas de diferentes camadas é mais forte que a interação eletromagnética das correntes, $\lambda_J \ll \lambda_{ab}$, onde $\lambda_J = \gamma s$ é o comprimento Josephson, $\gamma = \lambda_c/\lambda_{ab}$ é a anisotropia, λ_{ab} e λ_c são as profundidades de penetração.

O funcional energia F do estado misto é obtido da eq.(3.10), usando a aproximação harmônica nas distorções dos vórtices. Esta aproximação é válida contanto que

$\langle [\bar{u}(n, \vec{r}_\nu) - \bar{u}(n+1, \vec{r}_\nu)]^2 \rangle \ll \lambda_J^2$. Escrevemos o funcional densidade de energia como a soma de dois termos,

$$F\{\bar{u}(n, \vec{r}_\nu)\} = F_o(B) + F_{el}\{B, \bar{u}(n, \vec{r}_\nu)\}. \quad (4.4)$$

Aqui $F_o(B)$ é a densidade de energia da rede não distorcida, e $F_{el}\{B, \bar{u}(n, \vec{r}_\nu)\}$ é a densidade de energia elástica da rede.

A densidade de energia da rede não distorcida para $B \rightarrow 0$, pode ser obtida da energia de um único vórtice, eq.(2.29), obtida no capítulo 2,

$$\begin{aligned} F_o(B) &= N \frac{\mathcal{I}}{V} = \frac{N}{A} \left(\frac{\phi_o^2}{16\pi^2 \lambda_{ab}^2} \right) \ln(\kappa + 0,5) \\ &= \left(\frac{\phi_o B}{16\pi^2 \lambda_{ab}^2} \right) \ln(\kappa + 0,5) \quad , \quad B \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $n = N/A = B/\phi_o$ e $\kappa = \lambda_{ab}/\xi_{ab}$ é o termo de GL para um supercondutor anisotrópico.

Para o caso de uma densidade de fluxo que corresponde a um alcance do campo $H_{c1} \ll B \ll H_{c2}^{15}$, devemos incluir a interação com muitos vizinhos. Então a densidade de energia para o rede não distorcido é,

$$F_o(B) = \frac{B\phi_o}{32\pi^2 \lambda_{ab}^2} \ln \frac{\eta\phi_o}{2\pi\xi_{ab}B} \quad , \quad \frac{\phi_o}{4\pi\lambda_{ab}^2} \ll B \ll H_{c2}. \quad (4.6)$$

Aqui η é um parâmetro de ordem unitário, e o termo $(B^2/8\pi)$ da eq.(4.6) foi omitido.

A densidade de energia elástica F_{el} foi calculada por *Glazmam e Koshelev*¹¹, através da transformada de Fourier dos vetores $\vec{u}_i(n, \vec{r}_\nu)$ como mostrado no capítulo 2,

$$F_{el} = \frac{1}{2s} \int_{zB} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \sum_{ij} u_i(q, \vec{k}) \phi_{ij}(q, \vec{k}) u_j^*(q, \vec{k}). \quad (4.7)$$

Onde,

$$\phi_{ij} = c_L k^2 P_{L,ij} + c_{66} k^2 P_{T,ij} + \delta_{ij} c_{44} Q^2, \quad (4.8)$$

é a matriz elástica, $Q^2 = 2(1 + \cos q)/s^2$ e s é a distância entre as camadas. A componente de Fourier das distorções é representado pelo vetor $\tilde{u}(q, \vec{k})$, aqui

$\vec{k} = (k_x, k_y)$; $i, j = x, y$ e $q = k_z$. Os módulos elásticos são representados por c_{66} (módulo de cisalhamento), $c_L = c_{11} - c_{66}$ (onde c_{11} é o módulo de compressão) e c_{44} (módulo de inclinação).

Os operadores de projeção longitudinal e transversal são dados respectivamente por:

$$P_{L,ij} = \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad P_{T,ij} = \delta_{ij} - P_{L,ij} \quad (4.9)$$

A integração sobre \vec{k} é feita na região $k^2 < k_o^2$, onde k_o é o raio da zona de Brillouin. Por simplicidade a zona de Brillouin é aproximada por um círculo de raio $k_o = (4\pi B/\phi_o)^{1/2} \sim 1/a$. A principal contribuição das flutuações térmicas para a energia livre vem do fato que $Q \sim 1/s$ e $k \sim k_o$.

Os módulos elásticos para este sistema com acoplamento Josephson ($\xi_c \ll s$) e uma anisotropia moderada ($\xi_{ab} \ll \lambda_L \ll \lambda_{ab}$) foram calculados por *Glazman e Koshelev*¹¹.

$$c_{66} = \frac{\phi_o B}{(8\pi \lambda_{ab})^2}, \quad c_{44} = \frac{B \phi_o}{2(4\pi \lambda_c)^2} \ln \frac{\xi_{ab}^{-2}}{k_o^2 + \lambda_J^{-2}},$$

$$c_{11} = c_L + c_{66} = \frac{B^2 \gamma^2}{4\pi(1 + \lambda_c^2 k^2 + \lambda_{ab}^2 Q^2)}. \quad (4.10)$$

Para calcular a função partição [eq.(4.2)] do sistema foi usado uma abordagem semelhante a de KT, onde os vórtices panquecas são considerados partículas clássicas de área $\alpha\pi\xi_{ab}^2$ (área de núcleo normal). O número de diferentes configurações de uma panqueca em uma determinada camada é dado por,

$$\int \frac{d\tilde{u}_x \tilde{u}_y}{\alpha\pi\xi_{ab}^2},$$

onde α é um parâmetro de ordem unitário. Assim a eq.(4.2) pode ser reescrita como:

$$Z = \prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_o^2 d^2 \tilde{u}(\vec{k}, q)}{4\pi^2 \alpha s \xi_{ab}^2} \exp\left(\frac{-F}{T}\right), \quad (4.11)$$

definimos,

$$w \equiv \frac{k_o^2}{4\pi^2 \alpha s \xi_{ab}^2} = \frac{B}{\pi \alpha \xi_{ab}^2 s \phi_o}. \quad (4.12)$$

Para cada sítio da rede corresponde um valor do “campo” $\tilde{u}(\vec{k}, q)$ então podemos escrever,

$$\prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{u}(\vec{k}, q) \psi(\vec{k}, q) = \int w \psi(k_1, q_1) d^2 \tilde{u}(k_1, q_1) \cdots \int w \psi(k_n, q_n) d^2 \tilde{u}(k_n, q_n) .$$

Substituímos a eq.(4.4) na eq.(4.11) obtemos,

$$Z = \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \left\{ \prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{u}(\vec{k}, q) \right\} \exp\left[-\frac{F_{el}}{T} \{\vec{B}, \vec{u}(n, \vec{r}_\nu)\}\right] \quad (4.13)$$

onde o termo $F_o(B)$ independe de \vec{k} e de q . Dentro da integral da eq.(4.13) substituímos o termo da densidade de energia elástica dada pela eq.(4.7),

$$Z = \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{u}(\vec{k}, q) \exp\left\{-\frac{1}{2sT} \left[\int_{zB} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \sum_{ij} \tilde{u}_i(\vec{k}, q) \phi_{ij}(\vec{k}, q) \tilde{u}_j(\vec{k}, q) \right]\right\} \quad (4.14)$$

Para calcular esta integral funcional precisamos escrever as integrais de \vec{k} e q em somatórios de \vec{k} e q . Como no caso de linhas de vórtices contínuas estamos assumindo condições de contorno periódicas, que significa que o primeiro e o último vórtice tem exatamente a mesma oscilação, então os únicos valores permitidos de \vec{k} e q no espaço dos momentos são da forma³⁵:

$$\begin{aligned} |k_{ab}|^2 &= \frac{(2\pi)^2 n^2}{L_{ab}^2}, & L_{ab} &= L_x = L_y, & k_x &= k_y = k_{ab} \\ q &= \frac{2\pi n}{L_c}, & L_c &= L_z, & k_z &= q. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aqui $n = 0, \pm 1, \pm 2$, etc.

O número de vetores permitidos em uma célula primitiva da rede recíproca é igual ao número de sítios da rede. O volume da primeira zona de Brillouin é igual ao volume de uma célula primitiva na rede recíproca $(2\pi)^3/v$, onde $v = V/N$ é o volume de uma célula primitiva da rede direta, então o volume do espaço- k por valor permitido \vec{k} é,

$$\Delta k = \Delta k_{ab} \Delta q = \frac{(2\pi)^3}{V}, \quad (4.16)$$

então podemos escrever a seguinte igualdade

$$\sum_{\vec{k}, q} f(\vec{k}, q) = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\vec{k}, q} f(\vec{k}, q) \Delta k_{ab} \Delta q. \quad (4.17)$$

Para o limite quando $\Delta \vec{k} \rightarrow 0$ na eq.(4.17), o somatório $\sum f(\vec{k}) \Delta k$ aproxima-se da integral $\int d(\vec{k}, q) f(\vec{k}, q)$. Usando as eq.(4.15) obtemos,

$$\frac{1}{L_{ab}^2 L_c} \sum_{\vec{k}, q} f(\vec{k}, q) = \int_{zB} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} f(\vec{k}, q). \quad (4.18)$$

Agora podemos reescrever a eq.(4.14) em termos de somatórios em \vec{k} e q usando a eq.(4.18).

$$Z = \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \left\{ \prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{u}(\vec{k}, q) \right\} \exp\left[-\frac{1}{2s L_{ab}^2 L_c T} \sum_{\vec{k}, q} \sum_{ij} \tilde{u}_i(\vec{k}, q) \phi_{ij}(\vec{k}, q) \tilde{u}_j^*(\vec{k}, q)\right]. \quad (4.19)$$

Da álgebra linear sabemos que formas quadráticas são recolocadas por formas “hermiteanas”,

$$\sum_{ij} \tilde{u}_i(\vec{k}, q) \phi_{ij}(\vec{k}, q) \tilde{u}_j^*(\vec{k}, q) = \tilde{U}(\vec{k}, q) \Phi(\vec{k}, q) \tilde{U}^\dagger(\vec{k}, q) \quad (4.20)$$

onde $\Phi(\vec{k}, q)$ é uma matriz simétrica, hermiteana, 2×2 com elementos de matriz $\phi_{ij}(\vec{k}, q)$ reais.

$$\Phi(\vec{k}, q) = \begin{pmatrix} (c_L - c_{66})k_x^2 + (c_{66}k^2 + c_{44}Q^2) & (c_L - c_{66})k_x k_y \\ (c_L - c_{66})k_x k_y & (c_L - c_{66})k_y^2 + (c_{66}k^2 + c_{44})Q^2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Existe um teorema da álgebra linear que diz que qualquer forma hermiteana $\tilde{U} \Phi \tilde{U}^\dagger$ pode ser reduzida a uma forma diagonal real $\tilde{V}^\dagger D \tilde{V}$ por uma transformação unitária $\tilde{V} = M \tilde{U}$, onde M é a matriz diagonal arbitária, $M^\dagger M = 1$. Com esta transformação podemos escrever

$$\tilde{U}^\dagger(\vec{k}, q)\Phi(\vec{k}, q)\tilde{U}(\vec{k}, q) = \tilde{V}^\dagger D \tilde{V},$$

com $\tilde{v} = M_{ij}\tilde{u}_j$, $\tilde{V} = M\tilde{U}$, $\tilde{V}^\dagger = \tilde{U}^\dagger M^\dagger$ e $D = M\Phi M^\dagger$ é a matriz diagonal. A eq.(4.20) torna-se,

$$\sum_{ij} \tilde{u}_j^*(\vec{k}, q)\phi_{ij}(\vec{k}, q)\tilde{u}_i(\vec{k}, q) = \tilde{V}^\dagger D \tilde{V}. \quad (4.22)$$

Agora fazemos uma mudança de variável usando a transformação de Jacob,

$$d\tilde{v}_1 \cdots d\tilde{v}_n = d\tilde{u}_1 \cdots d\tilde{u}_n \det \left| \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{u}_j} \right|, \quad \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{u}_j} = 1 \quad (4.23)$$

$$d\tilde{v}_1 \cdots d\tilde{v}_n = d\tilde{u}_1 \cdots d\tilde{u}_n \quad (4.24)$$

Substituindo as eqs.(4.22), (4.23) na eq.(4.19) obtemos,

$$Z = \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \prod_{\vec{k}, q} \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{v}(\vec{k}, q) \prod_{\vec{k}, q} \exp[-\theta |\tilde{v}_i(\vec{k}, q)|^2 d_{ii}(\vec{k}, q)] \quad (4.25)$$

onde $\theta = 1/2sTL_{ab}^2 L_c$ e $\tilde{V}^\dagger(\vec{k}, q)D(\vec{k}, q)\tilde{V}(\vec{k}, q) = |\tilde{v}_i(\vec{k}, q)|^2 d_{ii}(\vec{k}, q)$.

A eq.(4.25) pode ser reescrita como um produto de integrais Gaussianas, $G(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.

$$\begin{aligned} Z &= \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{v}(\vec{k}_1, q_1) \cdots \int_{-\infty}^{\infty} w d^2 \tilde{v}(\vec{k}_n, q_n) \\ &\quad [\exp(-\theta |\tilde{v}_i(\vec{k}_1, q_1)|^2 d_{ii}(\vec{k}_1, q_1)) \cdots \exp(-\theta |\tilde{v}_i(\vec{k}_n, q_n)|^2 d_{ii}(\vec{k}_n, q_n))] \\ &= \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \prod_{\vec{k}, q} w \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\theta \tilde{v}_1^2(\vec{k}, q) d_{11}(\vec{k}, q)] d\tilde{v}_1(\vec{k}, q) \cdots \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\theta \tilde{v}_2^2(\vec{k}, q) d_{22}(\vec{k}, q)] d\tilde{v}_2(\vec{k}, q) \\ &= \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \prod_{\vec{k}, q} \left[\frac{w\pi}{\theta \sqrt{d_{11}d_{22}}} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde $\det D = \det \Phi = d_{11}d_{22}$. O determinante da matriz, eq.(4.21), é dado por,

$$\det(\Phi(\vec{k}, q)) = c_{LC}c_{66}k^4 + c_{44}^2Q^4 + c_{LC}c_{44}k^2Q^2 + c_{66}c_{44}k^2Q^2 \quad (4.27)$$

Substituindo a eq.(4.27) na eq.(4.26) obtemos a função partição da rede de vórtices bidimensionais em termos dos módulos elásticos,

$$Z = \exp\left(-\frac{F_o(\vec{B})}{T}\right) \prod_{\vec{k}, q} \frac{w\pi}{\theta [c_{LC}c_{66}k^4 + c_{44}^2Q^4 + c_{LC}c_{44}k^2Q^2 + c_{66}c_{44}k^2Q^2]^{1/2}}. \quad (4.28)$$

4.3 Criação Espontânea de Linhas de Vórtices

Para determinarmos a temperatura acima da qual ocorre a criação espontânea de vórtices devemos calcular a energia livre de um único vórtice considerando as flutuações térmicas no limite $B \rightarrow 0$.

A densidade de energia livre $F(B, T)$, para o arranjo de vórtices descrito na sec.(4.2) é obtida das eqs.(4.1) e (4.28),

$$F(B, T) = F_o(B, T) + F_{th}(B, T). \quad (4.29)$$

Aqui $F_o(B, T) = F_o(B)$ é a densidade de energia livre da rede não distorcida e $F_{th}(B, T)$ é a densidade de energia livre devido as flutuações térmicas e é dada por,

$$F_{th}(B, T) = -T \ln \prod_{\vec{k}, q} \frac{w\pi}{\theta [c_L c_{66} k^4 + c_{44}^2 Q^4 + c_L c_{44} k^2 Q^2 + c_{66} c_{44} k^2 Q^2]^{1/2}}. \quad (4.30)$$

Agora vamos discutir a dependência de cada um dos termos do denominador da eq.(4.30) com o campo B ,

$$\begin{aligned} c_L c_{66} k^4 &= \frac{B^2 \gamma^2}{4\pi(1 + \lambda_c^2 k^2 + \lambda_{ab}^2/s^2)} \cdot \frac{\phi_o B k^4}{(8\pi \lambda_{ab})^2} - \left(\frac{\phi_o B}{(8\pi \lambda_{ab})^2}\right)^2 k^4 \\ &= \frac{B^3 \phi_o k^2}{256\pi^3 \lambda_{ab}^4} - \left(\frac{\phi_o B}{(8\pi \lambda_{ab})^2}\right)^2 k^4 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$c_{44}^2 Q^4 = \frac{B^2 \phi_o^2}{(16\pi^2 \lambda_c^2)^2 s^4} \left[\ln\left(\frac{\lambda_J}{\xi_{ab}}\right) \right]^2 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} c_L c_{44} k^2 Q^2 + c_{66} c_{44} k^2 Q^2 &= c_{11} c_{44} k^2 Q^2 \\ &= \frac{B^3 \phi_o}{64\pi^3 \lambda_{ab}^2 \lambda_c^2 s^2} \ln\left(\frac{\lambda_J}{\xi_{ab}}\right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nas eqs.(4.31), (4.32) e (4.33) usamos as seguintes suposições: $\gamma \gg 1$, $\gamma > \lambda_{ab}/s$, $k^2 < k_o^2 \sim 1/a^2$ e $a \ll \lambda_{ab}$, que levam as seguintes desigualdades : $\lambda_c^2 k^2 \gg 1$ e $\lambda_c^2 k^2 \gg \lambda_{ab}^2/s^2$.

Para o limite de B pequeno a estrutura de vórtices é semelhante a uma rede de cordas, então supomos $k \sim k_o = [(4\pi B)/\phi_o]^{1/2}$ e o termo mais importante a ser

considerado é $c_{44}^2 Q^4$, pois é o termo com o menor expoente em B . A densidade de energia livre para o limite de B pequeno torna-se,

$$\begin{aligned}
 F_{th}(B, T) &= -T \ln \left\{ \prod_{\vec{k}, q} \frac{w\pi}{\theta c_{44} Q^2} \right\} \\
 &= -T \sum_{\vec{k}, q} \ln \left[\frac{32\pi^2 T \kappa^2 \lambda_J^2 L_{ab}^2 L_c^2}{\alpha \phi_o^2 \ln(\lambda_J / \xi_{ab})} \right] \\
 &= -\frac{T}{s} \int_0^{k_o} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{32\pi^2 \kappa^2 \lambda_J^2}{\alpha \phi_o s \ln(\lambda_J / \xi_{ab})} \right) \right] \\
 &= -\frac{TB}{\phi_o s} \ln \left[\frac{32\pi^2 \kappa^2 \lambda_J^2}{\alpha \phi_o s \ln(\lambda_J / \xi_{ab})} \right]. \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

Aqui usamos a eq.(4.12), a definição de θ sec.(4.2), a eq.(4.18) e assumimos que $L_{ab} = 1$ e $L_c = 1/s$.

Para o limite de B grande a interação entre os vórtices panquecas de uma mesma camada é mais importante que a interação entre os vórtices 2D pertencendo a uma mesma pilha de panquecas. Temos um comportamento quase bidimensional das flutuações, então os módulos c_{66} e c_{11} são finitos e $c_{44} = 0$, portanto o único termo a ser considerado na eq.(4.30) é $c_{66} c_L k^4$. Para o limite de B grande não podemos tomar a aproximação $k \sim k_o$, assim a densidade de energia livre torna-se,

$$\begin{aligned}
 F_{th}(B, T) &= -T \ln \left\{ \prod_{\vec{k}, q} \left[\frac{w\pi}{\theta (c_L c_{66} k^4)^{1/2}} \right] \right\} \\
 &= -T \ln \left[\prod_{\vec{k}, q} \frac{32\pi^{3/2} \kappa_{ab}^2 T}{\alpha \phi_o^{3/2} \sqrt{B} k} \right] \\
 &= -\frac{T}{s} \int_0^{k_o} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[\frac{32\pi^{3/2} \kappa_{ab}^2 T}{\alpha \phi_o^{3/2} B^{1/2} k} \right] \\
 &= -\frac{T}{2\pi s} \int_0^{k_o} dk \left[k \ln \left(\frac{32\pi^{3/2} \kappa_{ab}^2 T}{\alpha \phi_o^{3/2} B^{1/2}} \right) - k \ln k \right] \\
 &= -\frac{TB}{s\phi_o} \ln \left(\frac{16\pi \kappa_{ab} \sqrt{e} T}{\alpha \phi_o s B} \right). \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

No cálculo da eq.(4.35) usamos as eqs.(4.31), (4.12), (4.18) e a definição de θ na sec.(4.2).

Definimos um campo de transição B_{cr} igualando as eqs.(4.34) e (4.35),

$$B_{cr} = \frac{\phi_o}{\pi \lambda_J^2} \ln \frac{\lambda_J / \xi_{ab}}{4 \sqrt{\ln(\lambda_J / \xi_{ab})}}. \tag{4.36}$$

Este campo magnético característico B_{cr} separa o comportamento das flutuações térmicas em duas regiões distintas. Na região onde $B \ll B_{cr}$ a densidade de energia livre térmica é dada pela eq.(4.34), e na região onde $B \gg B_{cr}$ a densidade de energia livre térmica é descrita pela eq.(4.35).

Agora podemos escrever a densidade de energia livre para uma rede de vórtices renormalizada por flutuações térmicas no limite $B \rightarrow 0$, substituindo na eq.(4.29) as eqs.(4.5) e (4.34),

$$F(B, T) = \frac{B\phi_o}{16\pi^2\lambda_{ab}^2} \ln(\kappa + 0,5) - \frac{TB}{\phi_o s} \ln\left(\frac{32\pi^2 T \kappa \lambda_J^2}{\alpha \phi_o s \ln(\lambda_J/\xi_{ab})}\right). \quad (4.37)$$

A energia de uma única linha de vórtice $\mathcal{I}(T)$ considerando as flutuações térmicas é obtida da eq.(4.37), onde

$$\mathcal{I}(T) = \frac{F(B, T)V}{N} = \frac{\phi_o^2}{16\pi^2\lambda_{ab}^2(T)} \ln(\kappa + 0,5) - \frac{T}{s} \ln\left(\frac{32\pi^2 T \kappa \lambda_J^2}{\alpha \phi_o s \ln(\lambda_J/\xi_{ab})}\right), \quad (4.38)$$

onde N é o número de vórtices e V é o volume ocupado. Se cada vórtice ocupa uma área A , então $n = 1/A = N/V = B/\phi_o$.

Para uma dada temperatura $T = T_s$ a energia livre definida por $\mathcal{I}(T_s)$ é nula, e acima desta temperatura torna-se possível a criação espontânea de linhas vórtices.

$$\frac{\phi_o^2}{16\pi^2\lambda_{ab}^2(T_s)} \ln(\kappa + 0,5) = \frac{T_s}{s} \ln\left(\frac{32\pi^2 T_s \kappa \lambda_J^2}{\alpha \phi_o^2 s \ln(\lambda_J/\xi_{ab})}\right). \quad (4.39)$$

Definimos uma função temperatura dada por:

$$\mathfrak{S}(T) = \frac{\phi_o^2 s}{32\pi^2 T \lambda_{ab}^2(T)} = \frac{T_{KT}}{T} s, \quad (4.40)$$

que quando substituída na eq.(4.39), obtém-se uma função temperatura acima da qual ocorre a criação espontânea de linhas de vórtices.

$$\mathfrak{S}(T_s) = \frac{1}{2 \ln(\kappa + 0,5)} \ln\left[\frac{(\lambda_J/\xi_{ab})^2}{\mathfrak{S}(T_s) \alpha \ln(\lambda_J/\xi_{ab})}\right]. \quad (4.41)$$

Analisando o lado direito da eq.(4.41) com as suposições feitas por *Bulaevskii et al*, $\xi_{ab} \ll \lambda_J \ll \lambda_{ab}(0)$ (anisotropia moderada), verificamos que é menor do que a unidade. Portanto T_s permanece acima da temperatura T^* dada pela igualdade $\mathfrak{S}(T^*) = 1$.

Assumindo $T_{co} - T_s \ll T_{co}$ e considerando, $\lambda_{ab}(T) = 0,7\lambda_{ab}(0)\sqrt{t}$ e $t = 1 - T/T_{co}$ nas eqs.(4.40), (4.41) e utilizando a igualdade $\Im(T^*) = 1$, temos:

$$t_s = \frac{t^*}{2 \ln(\kappa + 0,5)} \ln \left[\frac{t^* (\lambda_J / \xi_{ab})^2}{\alpha \ln(\lambda_J / \xi_{ab})} \right], \quad (4.42)$$

onde

$$t^* = \frac{16\pi^2 T_{co} \lambda_{ab}^2(0)}{\phi_0^2 s}. \quad (4.43)$$

Então em supercondutores em camadas com anisotropia moderada a criação espontânea de linhas de vórtices/antivórtices pode ocorrer acima de T_s , que difere consideravelmente de T_{co} . Se $B = 0$ e $T_s < T < T_{co}$, uma fase líquida de linhas de vórtices/antivórtices pode ocorrer de forma semelhante ao que acontece em supercondutores 2D acima de T_{KT} . A diferença fundamental que ocorre entre esta fase líquida e a fase de KT de vórtices 2D é que nos materiais em camadas com acoplamento Josephson, as excitações topológicas termicamente ativadas são as linhas de vórtices.

4.4 Cálculo da Magnetização Renormalizada por Flutuações Térmicas

Abaixo de T_s , na presença de um campo aplicado podemos calcular a magnetização renormalizada por flutuações térmicas através da definição,

$$M = -\frac{\partial F}{\partial B}. \quad (4.44)$$

A magnetização devido as flutuações térmicas para $B \ll B_{cr}$ é obtida das eqs.(4.34) e (4.44),

$$M_{th}(T) = -\frac{\partial F_{th}}{\partial B} = \frac{T}{\phi_0 s} \ln \left(\frac{32\pi^2 T \kappa^2 \lambda_J^2}{\alpha \phi_0 s \ln(\lambda_J / \xi_{ab})} \right) \quad (4.45)$$

A magnetização para $B \ll B_{cr}$ independe de B .

A magnetização devido as flutuações térmicas para $B \gg B_{cr}$, é obtida das eqs.(4.35) e (4.44),

$$M_{th}(B, T) = \frac{T}{\phi_0 s} \ln\left(\frac{16\pi T \kappa^2 \sqrt{e}}{\alpha \phi_0 B s}\right) - \frac{T}{\phi_0 s}. \quad (4.46)$$

é linear em $\ln B$. Por esta razão a inclinação da curva M vs $\ln B$ muda na vizinhança de B_{cr} ;

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \ln B}\right)_{B \ll B_{cr}} - \left(\frac{\partial M}{\partial \ln B}\right)_{B \gg B_{cr}} = \frac{T}{\phi_0 s} \quad (4.47)$$

Portanto é possível determinar s da dependência da magnetização com o campo, o comprimento Josephson é obtido do valor de B_{cr} , eq.(4.23), e com estes dois dados temos informações sobre o parâmetro anisotrópico (λ_J).

Agora nos resta escrever a densidade de energia livre renormalizada por flutuações térmicas no limite de campo $B_{cr} \ll B < H_{c2}$, substituindo na eq.(4.29) as eqs.(4.6) e (4.35),

$$F(B, T) = \frac{TB}{\phi_0 s} \left[\frac{\phi_0^2 s}{32\pi^2 \lambda_{ab}^2 T} \ln\left(\frac{\eta \phi_0}{2\pi \xi_{ab}^2 B}\right) - \ln\left(\frac{16\pi \sqrt{e} T \kappa^2}{\alpha \phi_0 s B}\right) \right]. \quad (4.48)$$

A magnetização para este limite de campo torna-se,

$$-M = \frac{T}{\phi_0 s} \left[\mathfrak{S}(T) \ln\left(\frac{\eta \phi_0}{2\pi \xi_{ab}^2 B}\right) - \ln\left(\frac{16\pi \sqrt{e} T \kappa^2}{\alpha \phi_0 s B}\right) \right] \quad (4.49)$$

e usamos a eq.(4.40) para calcular a inclinação da curva da magnetização,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \ln B} &= \frac{T}{\phi_0 s} [\mathfrak{S}(T) - 1] \\ &\simeq \frac{T}{\phi_0 s} \left[\frac{\phi_0^2 s t}{16\pi^2 T \lambda_{ab}(0)} - 1 \right] \\ &\approx \left[1 - \frac{T}{T^*} \right] \frac{\phi_0}{16\pi^2 \lambda_{ab}^2(0)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde usamos a definição de T^* dada por $\mathfrak{S}(T^*) = 1$.

Substituímos $T = T^*$ na eq.(4.49) e observamos que a magnetização independe do campo,

$$-M(T^*) = \frac{T^*}{\phi_0 s} \ln \frac{\eta \alpha}{\sqrt{e}}, \quad (4.51)$$

significando que todas as curvas teóricas $M(T)$ se cruzam para diferentes $B \gg B_{cr}$ em $T = T^*$.

4.5 Função das Flutuações Térmicas na Determinação dos Parâmetros Supercondutores dos Dados da Magnetização

As curvas teóricas $M(T)$ para diferentes campos juntamente com dados experimentais do $[Bi_2Sr_2CaCu_2O_4]^9$ são mostradas na fig.(4.1). Acima de T^* o valor da magnetização, $-M$, para campos $B \gg B_{cr}$ cresce logaritmicamente com o campo. Abaixo de T^* decresce logaritmicamente com B . Os dados experimentais para a dependência de $\partial M/\partial \ln B$ com T em campos $B_{cr} \ll B \ll H_{c2}(T)$ estão de acordo com a eq.(4.50), que torna possível a determinação dos parâmetros dos sistema.

Para o $Bi - 2 : 2 : 1 : 2$ com $T^* = 88.3K$ é obtido: $\lambda_{ab}(0) = 1500 \text{ \AA}$, $\xi_{ab}(0)/\sqrt{e} = 1700 \text{ \AA}$, e $T_{co} = 95K$. Avaliando estes parâmetros *Bulaevskii et al.* encontraram $\ln \eta\alpha/\sqrt{e} = 1$ e $s = 15 \text{ \AA}$, com isto $T_s = 92K$. Os parâmetros obtidos foram usados para calcular as curvas teóricas da fig.(4.1).

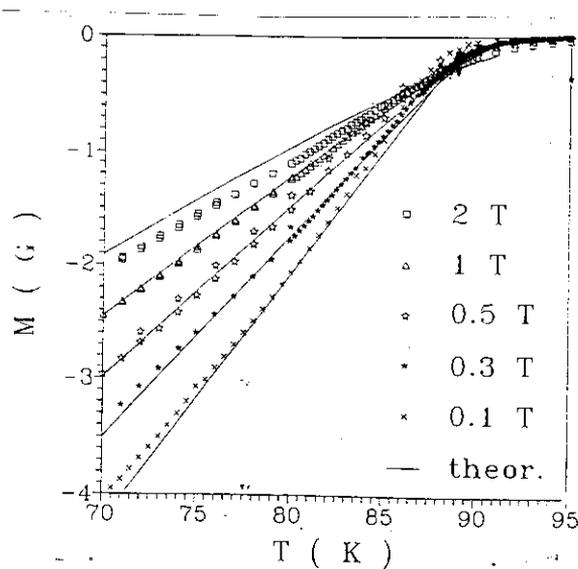


Figura 4.1: A magnetização $M(T)$ calculada para diferentes campos e os dados experimentais para o $Bi-2:2:1:2$.

Curvas de magnetização $M(H, T)$ com \vec{H} aplicado ortogonalmente as camadas

em um cristal de $YBa_2Cu_3O_{6,5}$ bidimensional foi obtido por *Said et al.* O peso do cristal e as dimensões são respectivamente 1mg e $1 \times 1 \times 0,2\text{mm}^3$, os parâmetros da rede são: $a = 3,8 \times 10^{-10}\text{m}$, $b = 3,9 \times 10^{-10}\text{m}$ e $c = 12 \times 10^{-10}\text{m}$. As curvas M vs T em campos de 1 a 5T são plotados nas figs(4.2), (4.3) e (4.4). Todas as curvas para diferentes campos se cruzam em $T = T^*$ correspondendo a uma magnetização M^* independente do campo.

Das curvas de magnetização e da eq.(4.51) podemos obter o espaçamento s entre as camadas. Fazendo o cálculo para as curvas da fig.(4.2) onde $T^* = 50,8\text{K}$ obtemos $s = 20\text{\AA}$, para a fig(4.3) onde $T^* = 61,5\text{K}$ obtemos $s = 24,82\text{\AA}$ e para a fig(4.4) onde $T^* = 41\text{K}$ obtemos $s = 10\text{\AA}$. Então podemos observar que não existe um valor próprio para o espaçamento s para o $YBa_2Cu_3O_{6,5}$ quando o modelo de Lawrence-Doniach é aplicado.

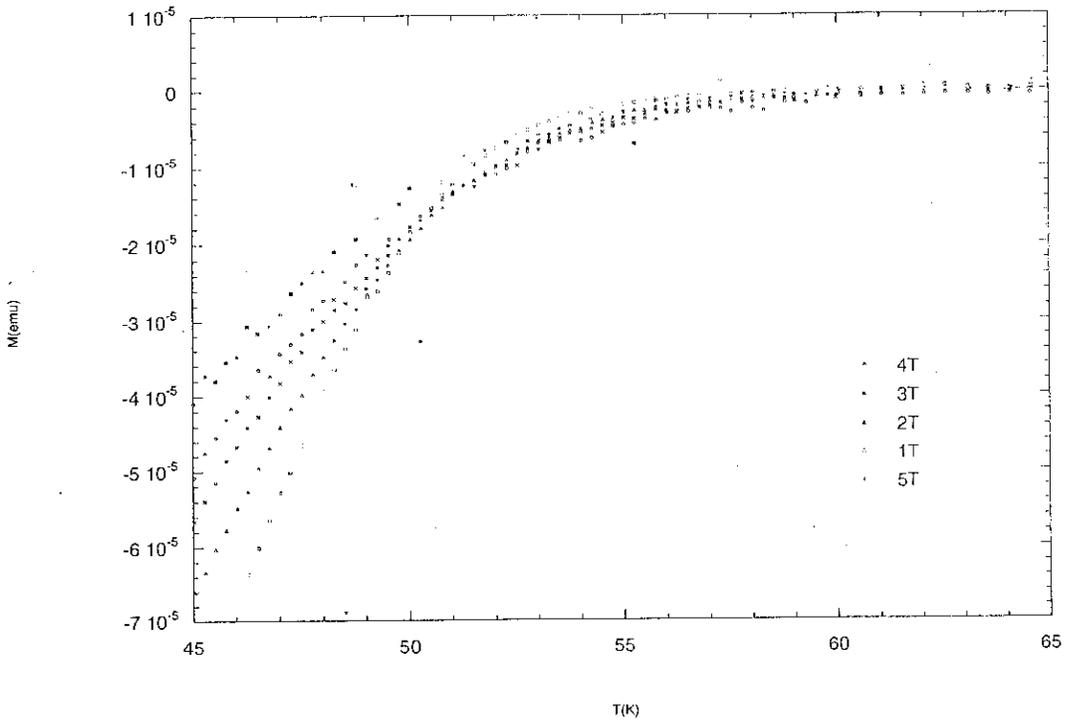


Figura 4.2: Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 50,8\text{K}$.

*Kes et al.*⁹ modelaram uma variedade de materiais reais por pilhas de camadas

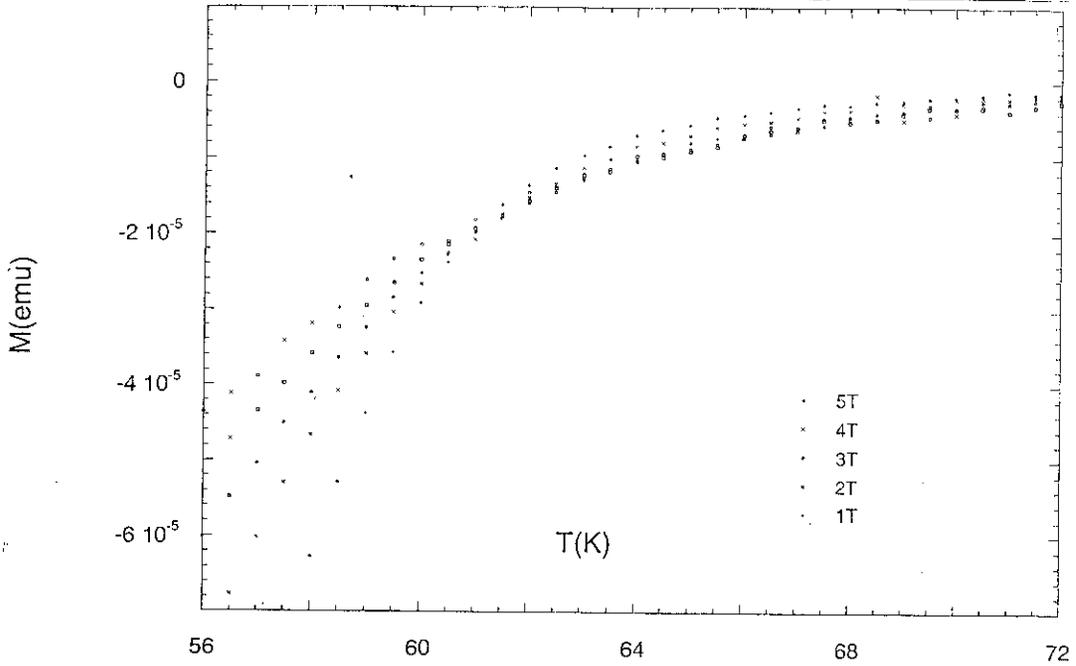


Figura 4.3: Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 61,5K$.

igualmente espaçadas, caracterizando então cada componente por um espaçamento único s entre as camadas. Eles consideraram campos aplicados na direção perpendicular as camadas (direção c) no limite de $B_{cr} \ll B \ll H_{c2}$. Então, a distância entre as camadas é muito menor do que ξ_{ab} , onde os módulos do parâmetro de ordem foram tomados como constantes no espaço. Dentro de tal esquema, um vórtice bidimensional em uma camada é caracterizado somente pela fase que muda por 2π quando circula o núcleo do vórtice. Como discutido anteriormente as linhas de vórtices contínuas de teorias tridimensionais são recolocadas por pilhas de panquecas correlacionadas.

Como vimos na sec.(4.3), para $\gamma \gg 1$ e para $B \parallel c$, as distorções térmicas das panquecas fora das pilhas alinhadas (arranjadas em uma rede hexagonal em $T = 0$), resulta em uma contribuição extra para a entropia. A magnetização obtida da energia livre foi dada pela eq.(4.49). O primeiro termo do lado direito é o resultado de London usual, para um sistema denso de pilhas de vórtices não perturbados, e o segundo termo considera as flutuações. A inclinação $\partial M / \partial \ln B$ foi obtida na eq.(4.50), reescreveremos como,

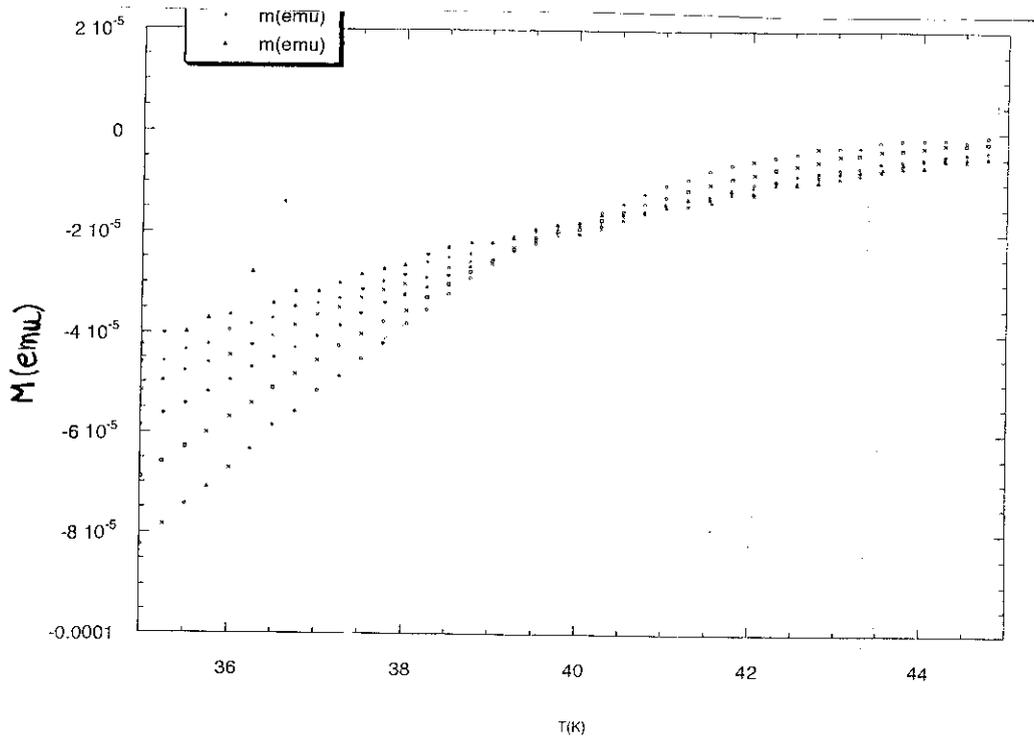


Figura 4.4: Curvas de magnetização para diferentes campos no qual $T^* = 41K$.

$$\frac{\partial M}{\partial \ln B} = \frac{\phi_o}{32\pi^2 \lambda_{ab}^2(T)} [1 - g(T)], \quad (4.52)$$

onde,

$$g(T) = \frac{1}{\mathfrak{Z}(T)} = \frac{32\pi^2 T \lambda_{ab}^2(T)}{\phi_o^2 s} \quad (4.53)$$

Para estimar a contribuição das flutuações térmicas na magnetização $M(B, T)$, deve-se comparar $g(T)$ com a unidade; $g(T) = 0$ corresponde ao resultado de London padrão. As flutuações aumentam com o crescimento da temperatura T e com o aumento da profundidade de penetração λ_{ab} .

Uma consequência notável das flutuações segue da eq.(4.52): Em uma temperatura T^* definida por $g(T^*) = 1$, M independe de B . Dentro da teoria de London não é possível avaliar as constantes η e α . O valor adotado por *Kogan et al.*¹⁴ vem da aproximação variacional de *Hao e Clem*¹² e é estimado que $\eta \approx 1,4$. A constante α entra na entropia das flutuações das panquecas através dos “áreas das partículas” necessária quando a função partição eq.(4.2) foi calculada.

A teoria das flutuações térmicas para sistemas 2D ($\gamma = \infty$) desenvolvida por *Tesanovic et al.*²⁴ para $B \sim H_{c2}$ produz a eq.(4.51) para $M(T^*)$, mas sem o fator \ln . As eqs.(4.49) e eq.(4.51) são independentes de γ então esperamos que $\ln(\alpha\eta/\sqrt{e}) = 1$ também para o caso $B \ll H_{c2}$. Em particular, isto significa que em T^* , a magnetização medida na região $B \ll H_{c2}$ é a mesma que para $B \sim H_{c2}$, uma característica vista nos dados obtidos por *Kes et al.*⁹. Então é colocado $\alpha = e^{3/2}/\eta$. Embora esta escolha de α e η afetem os valores absolutos para H_{c2} e para κ dados abaixo, a conclusão primária sobre a importância das flutuações de vórtices permanece inalterada.

Para demonstrar como as flutuações influenciam a determinação de λ , *Kes et al.*⁹ analisaram dados de $M(B, T)$ com $B \parallel c$ para um único cristal de $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$. As isotermas M vs $\ln B$ em temperaturas de 72 a 83K estão plotadas na fig.(4.5). Estes dados mostram que $|M^*| \approx 0,25G$ e $T^* = 80K$; da eq.(4.51), é obtido $s = 23\text{\AA}$. Então foi calculada a inclinação experimental $\partial M/\partial \ln B$ vs T , e determinado $\lambda_{ab}(T)$ usando as eqs.(4.40) e (4.52). Os resultados são mostrados na fig.(4.6a) com $\lambda_{ab}(T)$ obtido desprezando as flutuações [$g = 0$ na eq(4.53)]. Em temperaturas baixas ($\approx 30K$) a diferença entre os dois resultados é pequena ($\approx 10\%$), embora não desprezível. A diferença contudo, cresce rapidamente com T . Em particular desprezando as flutuações resulta em uma divergência aparente de $\lambda_{ab}(T)$ em T^* desde que nesta temperatura $\partial M/\partial \ln B = 0$. O $\lambda_{ab}(T^*)$ correto é finito.

As curvas contínuas e tracejadas na fig.(4.6) mostram o melhor ajuste de $\lambda(T)$ na teoria BCS no limite limpo e no limite sujo, respectivamente, para λ_{ab} obtido dos dados levando em consideração as flutuações. Pode-se fazer este ajuste para $\lambda_{ab}(T)$ extraído dos dados desprezando as flutuações (o conjunto superior de pontos da fig.(4.6)).

Como foi mencionado, no modelo usado por *Bulaevskii et al.*⁷ existe uma camada supercondutora extremamente fina por célula unitária. Contudo, a célula unitária do $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ contém dois pares de camadas de CuO_2 estreitamente espaçadas ($\approx 3\text{\AA}$); a distância entre os pares é $\approx 12\text{\AA}$. Para aplicar este modelo ao $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ *Kogan et al.*¹⁴ assumiram que os dois planos de CuO_2 estão acoplados tão fortemente

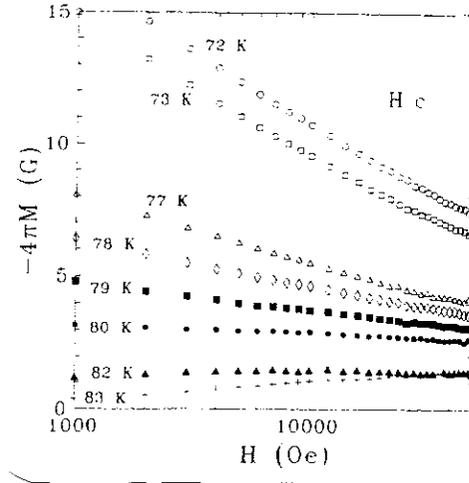


Figura 4.5: Magnetização M vs $\ln B$ (B é o campo aplicado), isothermas para um único cristal de $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$; as temperaturas estão indicadas.

que podem ser tratados como uma única camada supercondutora; a distância média entre as camadas duplas é $\approx 15 \text{ \AA}$. Estas camadas duplas estão fracamente acopladas tornando este modelo aplicável. Portanto, $s \approx 15 \text{ \AA}$ é um valor próprio para o $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ descrito por este modelo. Entretanto alguns refinamentos na teoria são necessários para incluir separações intercadas múltiplas, atualmente presentes em vários supercondutores em camadas.

Para o mesmo composto *Kes et al.*⁹ obtiveram $s = 20,6 \text{ \AA}$, enquanto *Kadowaki*¹⁶ obteve $s = 16,5 \text{ \AA}$. Uma possível causa para esta diferença pode ser variações na amostra. Da eq.(4.51), $s \propto 1/M(T^*)$, se somente uma fração da amostra é supercondutora, o valor de $M(T^*)$ associado com o volume supercondutor é subestimado. Então uma avaliação superestimada de s pode ocorrer. Para corrigir a inconsistência entre $s = 23 \text{ \AA}$ extraído dos dados puros e $s = 15 \text{ \AA}$ ditados pela estrutura, foi assumido que somente $15/23 = 65\%$ do cristal é supercondutor. Assim reescala-se as inclinações $\partial M/\partial \ln B$ por um fator de 0,65, e recalcula-se $\lambda_{ab}(T)$

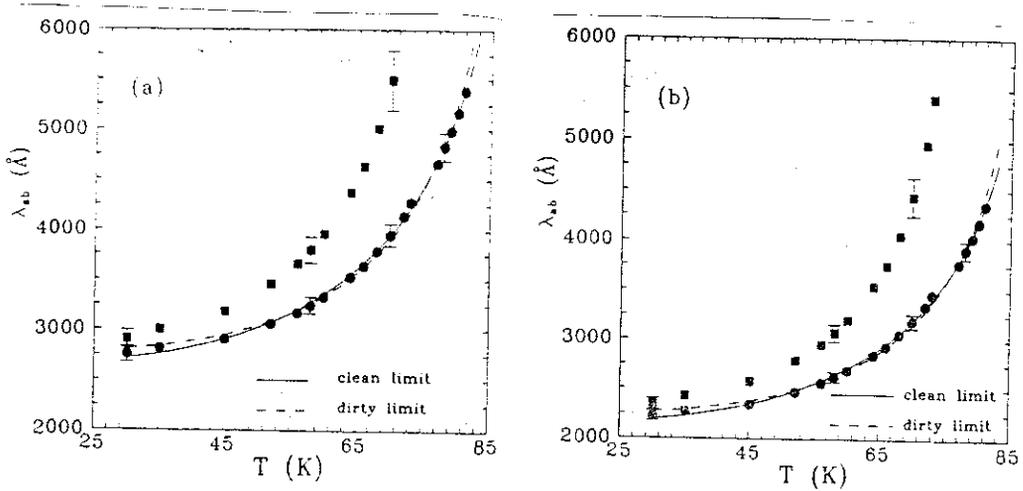


Figura 4.6: (a) A profundidade de penetração no plano λ_{ab} vs temperatura T obtida dos dados de $M(T, H)$ no texto (círculo). Os resultados ajustam-se melhor no limite limpo da BCS do que no limite sujo. Os quadrados representam $\lambda_{ab}(T)$ que é obtido dos mesmos dados desprezando as flutuações. O parâmetro $s = 23 \text{ \AA}$ é obtido dos dados usando a eq.(4.52); supõem-se a amostra 100% supercondutora. As barras de erros representativas são mostradas. (b) O mesmo que (a) exceto que $s = 15 \text{ \AA}$ e a amostra é assumida 65% supercondutora.

com $s = 15 \text{ \AA}$. O resultado é mostrado na fig.(4.6b). Então a fig.(4.6) mostra que, independente de uma escolha particular de s ou da fração real de volume supercondutor, a conclusão de que as flutuações de vórtices tem uma forte influência no $\lambda_{ab}(T)$ deduzido permanece inalterada.

*Kes et al.*⁹ observaram que a contribuição das flutuações de vórtices para a magnetização não é uma propriedade exclusiva dos supercondutores de alta- T_c . Elas devem ser consideradas sempre que a anisotropia e a profundidade de penetração são suficientemente grandes. Um exemplo disto é o supercondutor orgânico $\kappa-(BEDT-TTF)_2Cu(NCS)_2$; fontes de flutuações próximas de H_{c2} para este composto já tem

sido observado [embora T_{co} é somente cerca de $10K$, estima-se para $\lambda_{ab}(0)$ alcance de 6800 \AA à 10^4 \AA^{23}].

Os resultados obtidos são favoráveis a utilização do modelo Josephson para acoplamento intercamadas. Isto implica que ambos T_s e T^* podem estar situados no intervalo de temperatura onde $\xi_c(T) \ll s$. Da eq.(4.43) vemos que isto é totalmente válido para anisotropias suficientemente fortes: $\gamma^2 \gg \gamma^2 = \phi_o^2/8\pi\kappa^2sT_{co}$. Para materias de T_c alta é estimado $\gamma^2 \approx 100$. Então a teoria de *Bulaevskii et al.*⁷ aplica-se em compostos de Bi, Tl e super redes. Para o $YBa_2Cu_3O_7$ a condição acima não é satisfeita, pois tem uma estrutura tridimensional, também foi mostrado que para o caso de $YBa_2Cu_3O_{6,5}$ que é bidimensional a teoria de *Bulaevskii* também não se aplica.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação, nós estudamos o estado misto de um supercondutor, localizado entre H_{c1} e H_{c2} . Vimos que o campo magnético penetra nestes materiais na forma de vórtices. Cada vórtice tem quantum de fluxo ϕ_0 no qual circula uma supercorrente. O centro do vórtice é normal, contudo a região entre os vórtices permanece supercondutora.

Para um sistema no qual a temperatura e o campo magnético aplicado são mantidos constantes a função que descreve as propriedades de equilíbrio do supercondutor é a energia livre de Gibbs. No equilíbrio minimiza-se G em relação aos demais parâmetros. Quando duas fases distintas coexistem suas respectivas energias de Gibbs devem ser as mesmas. Usando as propriedades de G , achamos o campo crítico associado H_{c1} onde a formação de vórtice foi termodinamicamente favorecida.

Para calcular as propriedades dos vórtices de um material supercondutor isotrópico nós utilizamos o modelo de London, no qual definimos a magnitude da vorticidade. O estudo das propriedades elásticas da rede de vórtice requer, além do conhecimento de sua configuração de equilíbrio a expressão do potencial de interação entre as linhas de vórtices. Para os supercondutores isotrópicos essa interação é repulsiva.

Para obter os módulos elásticos da rede expandimos a energia livre considerando pequenos deslocamentos do equilíbrio resultando numa teoria elástica não local. Nos supercondutores isotrópicos existem três módulos elásticos independentes, uma compressão, um cisalhamento e uma inclinação. O módulo de cisalhamento é a constante elástica que retém as informações mais importantes da rede de vórtice, pois o módulo de cisalhamento é nulo para o estado líquido de vórtices. Já os outros módulos não são nulos dentro do estado líquido.

No estudo das propriedades de um supercondutor em camadas em um campo magnético aplicado ao longo do eixo c do cristal, observamos que as flutuações térmicas são muito mais fortes do que nos convencionais. Pelo fato de os supercondutores em camadas terem uma estrutura quase bidimensional a transição supercondutora é semelhante a transição de KT em sistemas bidimensionais. As flutuações provocam o derretimento da rede de Abrikosov em temperaturas bem abaixo da temperatura de transição supercondutora T_c . Existe um campo característico B_{cr} que separa regiões de derretimento 3D e 2D. Em $B \ll B_{cr}$, a rede de vórtice é semelhante a uma rede de cordas, e no ponto de derretimento, $c_{66} = 0$ e c_{44} permanece finito. A transição corresponde a transição de uma rede de vórtices para um líquido de vórtices. Para $B \gg B_{cr}$, a rede de vórtices torna-se quase bidimensional, com vórtices interagindo fracamente em diferentes camadas, no ponto de derretimento c_{44} e c_{66} caem para zero.

Para obter uma temperatura de criação espontânea de linhas de vórtices em supercondutores em camadas tomamos a contribuição da entropia para a energia livre. A criação espontânea de linhas de vórtice/antivórtice pode ocorrer acima de T_s que difere consideravelmente de T_{co} . Se $H = 0$ e $T_s < T < T_{co}$, existe um líquido de linhas de vórtice/antivórtice semelhante ao que ocorre acima de T_{KT} em supercondutores 2D. A diferença entre esta fase e o “plasma” de KT de vórtices 2D é que nos materiais em camadas com acoplamento Josephson, as excitações topológicas termicamente ativadas são as linhas de vórtices. A dependência da magnetização com o campo e com a temperatura são fortemente influenciada pela contribuição das distorções térmicas para a energia livre. O ponto característico é onde as as curvas $M(T)$, obtidas a diferentes campos, se interceptam todas numa mesma temperatura T^* .

Referências

- [1] Kosterlitz, J. M. and Thouless, D. J. (1972) *J. Phys. C*,5,L124.
- [2] Nabarro, F. R. (1967) *Theory of Crystal Dislocations* 688-90.
- [3] Friedel, J. (1964) *Dislocations* 40.
- [4] Berenzinskii, V. L. (1971) *Soviet Phys. JETP* 32,493-9.
- [5] Minnhagen, D. (1989) *Solid State Commum.* 71, 25.
- [6] Mermin, N. D. and Wagner, H. (1966) *Phys. Rev. Lett.* 22, 1133-6.
- [7] Pearl, J. (1965) *Low Temperatures Phys.-LT9*,566.
- [8] Nelson, D. R. e Kosterlitz, J. M., (1977) *Phys. Rev. Lett.* 59,1201.
- [9] Kes, P. H. et al. (1991) *Phys. Rev. Lett.* 67, 2383-6.
- [10] Bulaevskii, L. N. et al. (1992) *Phys. Rev. Lett.* 68,3713-6.
- [11] Glazman, L. I. e Koshelev, A. E. (1991) *Phys. Rev. B* 43, 2835.
- [12] Hao, Z. e Clem, J. R. (1991) *Phys. Rev. B*,44 4539.
- [13] Nelson, D. R. (1973) *Phys. Rev. Lett.* 60, 1973.
- [14] Kogan, V. G. et al. (1993) *Phys. Rev. Lett.* 70, 1870.
- [15] de Gennes, P.G. *Superconductivity of Metals and Alloys*.
- [16] Kadowaki, K. (1991) *Physica* 185-189c, 2249.
- [17] Fischer, D. S. (1980) *Phys. Rev. B* 22, 1190.
- [18] Eilenberg, G. (1967) *Phys. Rev.* 164, 628.

- [19] Brandt, E. H. (1977) *J. Low Temp. Phys.* 26, 709.
- [20] Pippard, A. B. (1960) *Proc. 7th Intern. Conf. Low Temp.* 320.
- [21] Abrikosov, A. (1957) *Soviet Phys. - JEPS* 5,1174.
- [22] Essmann, U. et al. (1967) *Phys. Lett.* 24A, 526.
- [23] Uemura, Y. J. (1991) *Physica* 169B, 99.
- [24] Tesanovic, Z. et al., (1992) *Phys. Rev. Lett.* 69, 3563.
- [25] Cyrot Michel, *Introduction to Superconductivity and High- T_c Materials.*
- [26] Lawrence, W. E. e Doniach, S. *Proc. 12th Int. Conf. Low Temp. Phys.*
- [27] Pierl, J. (1964) *Appl. Phys. Lett.* 5, 65.
- [28] Thinkhan, M. *Introduction to Superconductivity.*
- [29] Efetov, K. B. (1979) *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 76, 1781.
- [30] Schimmele, L. et al., (1988) *Phys. Stat. Sol. B* 147, 361.
- [31] Barone, A. e Paterno, G. (1982) *Phys. and Applications of Josephson Effect.*
- [32] Villain, J (1975) *J. Phys.* C36, 581.
- [33] Le Bellac, Michael *Quantum and Statistical Field Theory.*
- [34] Beasley, M. R. et al. (1979) *Phys. Rev. Lett.* 42.
- [35] Chaikin, P. M. e Lubensky, T. C. *Principles of Condensed Matter Physics.*

“PROPRIEDADES ELÁSTICAS E FLUTUAÇÕES TÉRMICAS NA REDE DE VÓRTICES”

SILVANA MARIA WEINSCHÜTZ

Tese apresentada no Centro Brasileiro de
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca
examinadora os seguintes Professores:

Mauro Melchiades Dória/UFRJ

Said Salem Sugui Júnior/UFRJ

Walter Baltensperger/CBPF

Rio de Janeiro, 22 de dezembro de 1999