Tese de Doutorado

Generalização do Formalismo de Teoria de Campo para a Relatividade Geral e Quantidades Conservadas em Espaços Assintoticamente Anti-de-Sitter

Ronaldo Rodrigues da Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Dezembro de 1999

Dedico esta tese à memória de meu pai Manoel Ribeiro da Silva,

A minha mãe Arlette Rodrigues da Silva e

Aos meus irmãos Rogério e Renato

Agradecimentos

- Ao professor Nelson Pinto Neto, por seu apoio, estímulo e disponibilidade como orientador e amigo durante todo o percurso desta jornada.
- À minha esposa Claudia Mara de Mello Tavares, pelo carinho, pelo afeto e pelos momentos compartilhados.
- Ao professor Mario Novello, pelo entusiasmo e pela liderança científica no *"pequeno seminário"*.
- Ao colega Renato Klippert, pela colaboração profissional.
- Aos professores José Martins Salim e Luiz Alberto Oliveira, pela convivência científica no *"pequeno seminário"*.
- A Renato Portugal, pelo software Riemann.
- Ao professor Antonio Teixeira, pela amizade e pelo apoio nos momentos difíceis.
- Ao professor José Duarte, pelos ensinamentos filosóficos.
- Ao colega Guilherme de Berredo Peixoto, pela amizade e pela disponibilidade.
- Aos colegas Marcelo Lima e Vitório de Lorenci, pelas conversas relativísticas.
- Às colegas Martha Christina e Carla Fonseca, pelo sempre disponível conhecimento da língua inglesa.

- Aos colegas do DCP Winder, André, Humberto, Álvaro e Manoel, pela convivência diária no CBPF.

- A Myriam Simões Coutinho, pelo zelo dos meus direitos e de minhas obrigações no CBPF.

- A Valéria e Socorro, pela paciente e dedicada preparação da versão latex do manuscrito original.

- Ao CNPq, pelo apoio financeiro na execução deste trabalho.

Resumo

Uma nova prescrição para calcular a energia total e o momento angular total de espaços assintoticamente anti-de-Sitter em dimensão $(d+1)$ é proposta. O método é baseado no formalismo de teoria de campo generalizado para a relatividade geral, o qual é uma extensão do formalismo de campo desenvolvido por Deser, Grishchuk e outros. O termo com constante cosmológica é introduzido na densidade lagrangeana, a condição Ricci plana para a geometria de fundo é relaxada para a condição mais geral característica dos espaços de Einstein, e a dimensão do espaço-tempo é tornada arbitrária. Uma $(d-1)$-forma exterior $\mathbf{\Omega}$ é exibida, a qual, quando integrada na fronteira assintótica $(d-1)$-dimensional, produz os valores daquelas quantidades conservadas. Os resultados independem de calibre desde que condições assintóticas não sejam violadas. A energia total e o momento angular total de algumas soluções conhecidas em dimensões quatro e cinco são calculadas, e os resultados concordam com a literatura. Finalmente, o problema da métrica inversa em Relatividade Geral, o qual é característico do formalismo de teoria de campo, é resolvido.

Abstract

A new prescription to calculate the total energies and angular momenta of asymptotically $(d+1)$-dimensional anti-de-Sitter spacetimes is proposed. The method is based on the generalized field theoretical approach to General Relativity, which is an extension of the field formalism developed by Deser, Grishchuk et al. The cosmological constant is introduced in the lagrangian density, the Ricci flat condition on the background geometry is weakened towards the Einstein space condition, and the spacetime dimension is assumed to be arbitrary. A $(d-1)$-form $\mathbf{\Omega}$ is exhibited which, when integrated on asymptotic $(d-1)$-dimensional boundary surfaces, yields the values of those conserved quantities. The calculations are gauge independent once asymptotic conditions are not violated. Total energies and angular momenta of some known solutions in four and five dimensions are calculated agreeing with standard results. Finally, the inverse metric problem in General Relativity, which is characteristic of the field theoretical approach, is solved.

Índice

Introdução

A Relatividade Geral concedeu à física teórica duas consideráveis aquisições conceituais, as quais caracterizam a sua essência bem como o alcance dos princípios que a motivaram: identificou a natureza geometrodinâmica do espaço-tempo, retirando-lhe o status absoluto que ocupava no cenário Newtoniano; incorporou o fenômeno gravitacional ao programa geometrodinâmico, estabelecendo a equivalência entre gravitação e curvatura do espaço-tempo.

O conteúdo do princípio da geometrização do espaço-tempo é a afirmação do caráter de universalidade da interação do campo gravitacional com as fontes materiais, a qual é implementada na Relatividade Geral através do tensor momento-energia da matéria. O propósito de legitimar o campo gravitacional como um campo físico sugere a necessidade de localização da energia gravitacional; esta impõe necessariamente a propriedade de covariância com respeito às transformações gerais de coordenadas. No entanto, para o campo gravitacional, distintamente a todos os outros campos físicos, a energia gravitacional carece de uma definição tensorial, e assume expressões diversas, as quais se constituem de fato em pseudo-tensores. Como exemplos, podemos citar os pseudo-tensores de Einstein-Tolman [1], de Landau-Lifshitz [2], e de Møller [3], os quais apresentam ambiguidades com respeito ao sistema de coordenadas utilizado, o que muito bem reflete e caracteriza a natureza pseudo-tensorial destes objetos.

Deste modo, a localização da energia gravitacional permaneceu um desafio conceitual no âmbito da Relatividade Geral e abriu perspectivas para formulações alternativas [4].

O formalismo de teoria de campo para a Relatividade Geral, apresentado primeiramente por Feynman [5] e desenvolvido posteriormente por Deser [6], Grishchuk et al. [7, 8], se caracteriza pela introdução de um espaço-tempo de fundo, ou de referência, com geometria de Riemann, a qual é suposta ser Ricci plana. O campo gravitacional é tratado como um campo de spin dois se propagando dinamicamente via auto-interação e interação com os campos materiais, de tal modo que a geometria de fundo não é fisicamente percebida. A equivalência dinâmica com a Relatividade Geral pode então ser estabelecida através da adequada identificação da geometria efetiva, cujo tensor métrico é definido em termos do tensor métrico do espaço-tempo de fundo e dos potenciais gravitacionais. O caráter absoluto do tensor métrico do espaço-tempo de fundo, com respeito ao formalismo variacional, permite definir o tensor momento-energia gravitacional, o qual resulta possuir divergência covariante "on shell" nula. Entretanto, a teoria, em termos dos potenciais gravitacionais, adquire liberdades de calibre, as quais não são absorvidas de modo invariante pelo tensor momento-energia gravitacional. Em decorrência, a impossibilidade de localização da energia gravitacional persiste. No entanto, fixadas condições de compatibilidade assintótica entre as geometrias efetiva e de fundo, quantidades globais tais como energia total e momento angular total não sofrem ambiguidades de calibre, e podem ser calculadas para espaços assintoticamente planos.

É nossa tarefa neste trabalho generalizar o procedimento de cálculo destas quantidades globais para espaços assintoticamente Anti-de-Sitter (AdS), os quais apresentam como característica essencial a presença de uma constante cosmológica efetiva. O formalismo de campo mencionado anteriormente e desenvolvido nas referências [6, 7, 8] é aplicável a quaisquer campos de matéria, e uma constante cosmológica efetiva pode ser configurada, por exemplo, como resultado da densidade de energia de um campo escalar em seu estado fundamental. Deste modo, poder-se-ia supor a inexistência de dificuldades na realização desta tarefa. No entanto, a energia total de espaços-tempo assintoticamente AdS, considerando a geometria de fundo ainda Ricci plana, é divergente. Ademais, a tentativa de remover a energia do puro AdS resulta em insucesso, já que o limite plano, caracterizado por uma constante cosmológica nula, não recupera o valor usual para a energia.

Em decorrência, o próposito de implementar a mencionada generalização impõe a revisão da condição Ricci plana para a geometria de fundo. Neste sentido, a propriedade característica dos espaços de Einstein, nos quais o tensor de Ricci é proporcional ao tensor métrico, é a escolha natural para a "nova" condição no tensor de Ricci da geometria de fundo.

A necessidade de implementação de definições consistentes de massa e de momento angular para espaços assintoticamente AdS em um número arbitrário de dimensões ganhou relevância devido aos recentes desenvolvimentos da teoria de supercordas, onde espaços assintoticamente anti-de-Sitter (AdS) desempenham um papel essencial. Por exemplo, a conjectura de Maldacena [10] relaciona teorias de campo conforme num espaço d-dimensional com teoria de cordas ou supergravidade em uma variedade diferenciável, produto de um espaço AdS $(d+1)$-dimensional com uma variedade compacta. Este resultado pode ser usado no estudo da termodinâmica de buracos negros assintoticamente AdS [11].

Capítulo 1

O Teorema da Divergência Covariante Nula

Quantidades tensoriais são caracterizadas por sua particular lei de transformação covariante frente a mudanças arbitrárias de coordenadas. As diferentes representações tensoriais do grupo linear geral determinam as propriedades de invariância que caracterizam os tensores como objetos geométricos com relação às transformações gerais de coordenadas. Transformações infinitesimais de coordenadas induzem, na visão ativa, variações funcionais infinitesimais locais nos campos tensoriais e em suas derivadas, as quais, por sua vez, acarretam variações infinitesimais em quantidades não locais. Investigar esta conexão é de fundamental importância para o desenvolvimento posterior deste trabalho. Cumpre observar que, do ponto de vista de nossos objetivos, a estratégia computacional adotada, via quantidades infinitesimais, evita o desnecessário envolvimento com estruturas geométricas mais sofisticadas, tais como grupos de Lie, álgebras de Lie e suas respectivas representações tensoriais e auto-adjuntas. Sem pretensão de rigor, pode-se afirmar que a utilização de quantidades infinitesimais elimina a distinção entre o grupo de Lie e sua respectiva álgebra de Lie, permitindo computar com ambos, simultaneamente, numa mesma expressão.

1.1 Variações funcionais infinitesimais

Estaremos adotando aqui a perspectiva já anunciada, a saber: o conteúdo de uma quantidade infinitesimal é de natureza computacional e será implementado a seguir tomando como identicamente nulas quantidades infinitesimais de segunda ordem, ou ordem superior. Resultam desta consideração as expressões

$$\frac{\partial \overline{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}}(x) = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \quad e \quad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\rho}}(\overline{x}) = \delta^{\nu}{}_{\rho} - \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\rho}}$$

para as matrizes jacobianas das transformações infinitesimais de coordenadas $x \rightarrow \overline{x}$ e $\overline{x} \rightarrow x$. Podemos, então, afirmar que a matriz jacobiana de uma transformação infinitesimal de coordenadas é uma deformação infinitesimal da identidade. Como consequência dos desenvolvimentos de Taylor de primeira ordem para a função determinante,

$$\det(\mathbb{1} + \mathbb{h}) = 1 + \text{traço}(\mathbb{h}) \ ,$$

e para o binômio de Newton,

$$(1+h)^{\omega} = 1 + \omega\, h,$$

resultam

$$\left(\det \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\right)^{\omega} = 1 + \omega\, \frac{\partial \delta x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} \quad e \quad \left(\det \frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right)^{\omega} = 1 - \omega\, \frac{\partial \delta x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}.$$

Concluímos, então, que o determinante jacobiano de uma transformação infinitesimal de coordenadas é uma deformação infinitesimal da unidade, isto é:

$$\det \frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = 1 + \frac{\partial \delta x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} \quad e \quad \det \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} = 1 - \frac{\partial \delta x^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} \ .$$

Sem mais, e considerando nesta seção todas as transformações de coordenadas como infinitesimais, vamos estudar, em primeiro lugar, o caso mais simples de um campo escalar ϕ, cuja lei de transformação local é dada por

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = \phi(x). \tag{1.1}$$

A quantidade infinitesimal de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}^{\rho}}(\overline{x}) - \frac{\partial\phi}{\partial x^{\rho}}(x)\right)\delta x^{\rho},$$

juntamente com (1.1), fornece

$$\overline{\phi}(\overline{x}) - \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}^{\mu}}(\overline{x})\,\delta x^{\mu} = \phi(x) - \frac{\partial\phi}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho},$$

$$\overline{\phi}(x) - \phi(x) = -\frac{\partial\phi}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho}, \tag{1.2}$$

já que

$$\overline{\phi}(x) = \overline{\phi}(\overline{x}) - \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\overline{x}^{\mu}}(\overline{x})\,\delta x^{\mu}$$

é o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem da função $\overline{\phi}$ no ponto $\overline{x}$. O conteúdo da expressão (1.2) pode ser guardado na afirmação: toda variação infinitesimal de coordenadas δx^{μ} induz em um campo escalar ϕ uma variação funcional infinitesimal $\delta\phi$ e vale a relação

$$\delta\phi(x) = -\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}(x)\,\delta x^{\mu}. \tag{1.3}$$

Registremos aqui a seguinte expressão que resulta de (1.1) e (1.3):

$$\overline{\phi}(\overline{x}) - \phi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu}}(x)\,\delta x^{\mu} + \delta\phi(x). \tag{1.4}$$

O próximo passo é investigar o caso de um campo vetorial contravariante J com sua lei de transformação local dada por

$$\overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) = J^{\mu}(x)\,\frac{\partial\overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}(x), \tag{1.5}$$

e cuja versão infinitesimal é

$$\overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) = J^{\mu}(x)\left(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + \frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right),$$

$$\overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) - J^{\alpha}(x) = J^{\mu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.6}$$

A quantidade infinitesimal de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial \overline{J}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}}(\overline{x}) - \frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}(x)\right)\delta x^{\beta},$$

juntamente com (1.6), fornece

$$\overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{J}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}}(\overline{x})\,\delta x^{\beta} - J^{\alpha}(x) = -\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}(x)\,\delta x^{\beta} + J^{\mu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}},$$

$$\overline{J}^{\alpha}(x) - J^{\alpha}(x) = -\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}(x)\,\delta x^{\beta} + J^{\mu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}, \tag{1.7}$$

já que

$$\overline{J}^{\alpha}(x) = \overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{J}^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{\beta}}(\overline{x})\,\delta x^{\beta}$$

é o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem da função $\overline{J}^{\alpha}$ no ponto $\overline{x}$. O conteúdo da expressão (1.7) pode ser guardado na afirmação: toda variação infinitesimal de coordenadas δx^{β} induz em um campo vetorial contravariante J^{α} uma variação funcional infinitesimal δJ^{α} e vale a relação

$$\delta J^{\alpha}(x) = -\frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}(x)\,\delta x^{\beta} + J^{\mu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}. \tag{1.8}$$

Registremos aqui a seguinte expressão que resulta de (1.6) e (1.8):

$$\overline{J}^{\alpha}(\overline{x}) - J^{\alpha}(x) = \frac{\partial J^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}(x)\,\delta x^{\beta} + \delta J^{\alpha}. \tag{1.9}$$

Consideremos, agora, o caso de um tensor ϕ do tipo $\binom{1}{1}$ cuja lei de transformação local é dada por

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) = \phi^{\mu}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial \overline{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}(x)\,\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \overline{x}^{\beta}}(\overline{x}), \tag{1.10}$$

e cuja versão infinitesimal é

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) = \phi^{\mu}{}_{\nu}(x)\left(\delta^{\alpha}{}_{\mu} + \frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\right)\left(\delta^{\nu}{}_{\beta} - \frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right),$$

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) - \phi^{\alpha}{}_{\beta}(x) = \phi^{\mu}{}_{\beta}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \phi^{\alpha}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\beta}}. \tag{1.11}$$

A quantidade infinitesimal de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial \overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial \overline{x}^{\rho}}(\overline{x}) - \frac{\partial \phi^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\rho}}(x)\right)\delta x^{\rho},$$

juntamente com (1.11), fornece

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial \overline{x}^{\rho}}(\overline{x})\,\delta x^{\rho} - \phi^{\alpha}{}_{\beta}(x) = -\frac{\partial \phi^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho} + \phi^{\mu}{}_{\beta}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \phi^{\alpha}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\beta}},$$

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(x) - \phi^{\alpha}{}_{\beta}(x) = -\frac{\partial \phi^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho} + \phi^{\mu}{}_{\beta}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \phi^{\alpha}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\beta}}, \tag{1.12}$$

já que

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(x) = \overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial \overline{x}^{\rho}}(\overline{x})\,\delta x^{\rho}$$

é o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem da função $\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}$ no ponto $\overline{x}$. O conteúdo da expressão (1.12) pode ser guardado na afirmação: toda variação infinitesimal de coordenadas δx^{ρ} induz em um campo tensorial $\phi^{\alpha}{}_{\beta}$ uma variação funcional infinitesimal $\delta\phi^{\alpha}{}_{\beta}$ e vale a relação

$$\delta\phi^{\alpha}{}_{\beta}(x) = -\frac{\partial \phi^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho} + \phi^{\mu}{}_{\beta}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \phi^{\alpha}{}_{\nu}(x)\,\frac{\partial \delta x^{\nu}}{\partial x^{\beta}}. \tag{1.13}$$

Registremos aqui a seguinte expressão que resulta de (1.11) e (1.13):

$$\overline{\phi}^{\alpha}{}_{\beta}(\overline{x}) - \phi^{\alpha}{}_{\beta}(x) = \frac{\partial \phi^{\alpha}{}_{\beta}}{\partial x^{\rho}}(x)\,\delta x^{\rho} + \delta\phi^{\alpha}{}_{\beta}(x). \tag{1.14}$$

Para completar o quadro de objetos tensoriais, é necessário considerar o caso de uma densidade escalar ϕ de peso ω, cuja lei de transformação local é dada por

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = \phi(x)\left(\det \frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right)^{\omega}, \tag{1.15}$$

e cuja versão infinitesimal é

$$\overline{\phi}(\overline{x}) = \phi(x)\left(1 - \omega\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}\right),$$

$$\overline{\phi}(\overline{x}) - \phi(x) = -\omega\,\phi(x)\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}. \tag{1.16}$$

A quantidade infinitesimal de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{x}^\rho}(\overline{x}) - \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(x)\right)\delta x^\rho,$$

juntamente com (1.16), fornece

$$\overline{\phi}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{x}^\rho}(\overline{x})\,\delta x^\rho - \phi(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho - \omega\,\phi(x)\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma},$$

$$\overline{\phi}(x) - \phi(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho - \omega\,\phi(x)\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}, \tag{1.17}$$

já que

$$\overline{\phi}(x) = \overline{\phi}(\overline{x}) - \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial \overline{x}^\rho}(\overline{x})\,\delta x^\rho$$

é o polinômio de Taylor de primeira ordem da função $\overline{\phi}$ no ponto $\overline{x}$. O conteúdo da expressão (1.17) pode ser guardado na afirmação: toda variação infinitesimal de coordenadas δx^ρ induz em um campo de densidade escalar ϕ de peso ω uma variação funcional infinitesimal $\delta\phi$ e vale a relação

$$\delta\phi(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho - \omega\,\phi(x)\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}. \tag{1.18}$$

registramos aqui a seguinte expressão que resulta de (1.16) e (1.18):

$$\overline{\phi}(\overline{x}) - \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \delta\phi(x). \tag{1.19}$$

Variações funcionais infinitesimais induzidas em campos tensoriais genéricos por transformações infinitesimais de coordenadas podem ser determinadas pelo expediente computacional usado até aqui. Por exemplo, se $\gamma^{\mu\nu}$ é um tensor do tipo $\binom{2}{0}$, a sua variação funcional infinitesimal $\delta\gamma^{\mu\nu}$ induzida pelo campo de variação infinitesimal δx^ρ é dada por

$$\delta\gamma^{\mu\nu} = -\frac{\partial\gamma^{\mu\nu}}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \gamma^{\rho\nu}(x)\,\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\rho} + \gamma^{\mu\rho}(x)\,\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\rho}. \tag{1.20}$$

Em geral, se $\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}$ é uma $\binom{r}{s}$-densidade tensorial de peso ω , sua variação funcional infinitesimal induzida pela variação infinitesimal de coordenadas δx^ρ é dada por

$$\begin{aligned}\delta\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(x) = -\frac{\partial\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \phi^{\rho\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(x)\,\frac{\partial\delta x^{\alpha_1}}{\partial x^\rho} + \ldots + \phi^{\alpha_1\ldots\rho}_{\beta_1\ldots\beta_s}(x)\,\frac{\partial\delta x^{\alpha_r}}{\partial x^\rho} - \\ -\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\sigma\ldots\beta_s}(x)\,\frac{\partial\delta x^\sigma}{\partial x^{\beta_1}} - \ldots - \phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\sigma}(x)\,\frac{\partial\delta x^\sigma}{\partial x^{\beta_s}} - \omega\,\phi^{\alpha_1\ldots\alpha_r}_{\beta_1\ldots\beta_s}(x)\,\frac{\partial\delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}.\end{aligned} \tag{1.21}$$

As expressões (1.3), (1.8), (1.13) e (1.18) são casos particulares de (1.21), obtidas individualmente, e já trazem em si todos os ingredientes técnicos necessários à realização desta. Além disso, as fórmulas (1.4), (1.9), (1.14) e (1.19) permitem concluir no caso geral a validade de

$$\overline{\phi}^A(\overline{x}) - \phi^A(x) = \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \delta\phi^A(x). \tag{1.22}$$

Derivando (1.22) em relação à variável $\overline{x}^\sigma$ obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\sigma}(\overline{x}) &= \left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}(x) + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\rho}(x)\,\frac{\partial\delta x^\rho}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu}(x)\right)\left(\delta^\mu{}_\sigma - \frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\sigma}\right) \\ &= \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\sigma}(x) - \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}(x)\,\frac{\partial\delta x^\mu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\rho}(x)\,\frac{\partial\delta x^\rho}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\sigma}(x),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\sigma}(\overline{x}) - \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\sigma}(x) = \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\sigma}(x). \tag{1.23}$$

Derivando (1.23) em relação à variável $\overline{x}^\mu$ segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\mu\partial\overline{x}^\sigma}(\overline{x}) &= \left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}(x) + \frac{\partial^3\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\,\delta x^\rho + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\,\frac{\partial\delta x^\rho}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2\delta\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}(x)\right)\left(\delta^\nu{}_\mu - \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\mu}\right) \\ &= \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}(x) - \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\sigma}(x)\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^3\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\delta x^\rho + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\sigma\partial x^\rho}(x)\frac{\partial\delta x^\rho}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2\delta\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\sigma}(x),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^\mu \partial \overline{x}^\sigma}(\overline{x}) - \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}(x) = \frac{\partial^3 \phi^A}{\partial x^\mu \partial x^\sigma \partial x^\rho}(x)\, \delta x^\rho + \frac{\partial^2 \delta \phi^A}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}(x). \tag{1.24}$$

As expressões (1.21), (1.22), (1.23) e (1.24) podem ser consideradas a síntese desta seção e sua importância será transparente na próxima. Enfatizamos que o cenário computacional desenvolvido exigiu para sua realização tão somente aquelas propriedades de invariância local que caracterizam os tensores como objetos geométricos com relação ao grupo geral de transformações de coordenadas em uma variedade diferenciável.

1.2 Funções locais e a derivada lagrangeana

Teorias clássicas de campo também utilizam, para sua implementação, objetos não tensoriais; estes são expressos em termos dos campos tensoriais via relações de dependência funcional conhecidas. Como exemplo típico de objeto não tensorial, podemos mencionar a função local

$$\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma{}_{\mu[\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu]\sigma}\ ,$$

a qual é obtida da densidade lagrangeana de Einstein-Hilbert,

$$\sqrt{-g} R\ ,$$

pela eliminação da divergência total

$$\partial_\rho \Big(\sqrt{-g}\; g^{\mu[\nu} \Gamma^{\rho]}{}_{\mu\nu} \Big)\ .$$

Uma função local $\mathcal{L}$ é uma função diferenciável de classe C^3, de um conjunto finito de tensores ϕ^A, suas derivadas primeiras $\dfrac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}$, suas derivadas segundas $\dfrac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$, e eventualmente das coordenadas x^α, isto é,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big(x^\alpha,\, \phi^A(x),\, \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}(x),\, \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(x) \Big). \tag{1.25}$$

Cabe aqui a ressalva de que o label A está indexando simultaneamente o conjunto de tensores e, para cada tensor, o conjunto dos seus índices contravariantes e covariantes. Deste modo, não é exatamente preciso afirmar o "tensor ϕ^A".

Considerando o desenvolvimento de Taylor de primeira ordem da função local $\mathcal{L}$ no ponto $P = \left(x^\alpha,\, \phi^A(x),\, \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}(x),\, \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(x)\right)$, e denotando

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\Big(\overline{x}^\alpha,\, \overline{\phi}^A(\overline{x}),\, \frac{\partial\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x}),\, \frac{\partial^2\phi^A}{\partial\overline{x}^\nu\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x})\Big)\ ,$$

podemos escrever a variação infinitesimal induzida em $\mathcal{L}$ pela variação infinitesimal de coordenadas δx^α como

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L} \;=&\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\,(\overline{x}^\alpha - x^\alpha) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,\Big(\overline{\phi}^A(\overline{x}) - \phi^A(x)\Big) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\left(\frac{\partial\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x}) - \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}(x)\right) + \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\left(\frac{\partial^2\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\nu\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x}) - \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}(x)\right) \\
=&\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \delta\phi^A\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu}\right) + \\
&+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\left(\frac{\partial^3\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial^2\delta\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right) \\
=&\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\,\delta\phi^A\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^A + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\,\frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\right)\frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu} \\
=&\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\alpha}\right)}\,\delta\phi^A\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^A + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\alpha\partial x^\mu}\right)}\,\frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^A\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\right)\delta\phi^A \\
=&\; \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\,\delta x^\alpha + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\right)\right)\delta\phi^A + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\alpha}\right)}\,\delta\phi^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\alpha\partial x^\mu}\right)}\,\frac{\partial\delta\phi^A}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\mu\partial x^\alpha}\right)}\right)\delta\phi^A\right) \\
=&\; \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} - \mathcal{L}\,\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\alpha}\ ,
\end{aligned}$$

o que fornece finalmente

$$\overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L}\left(1 - \frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.26}$$

onde

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right)}\right) \tag{1.27}$$

é a derivada lagrangeana de $\mathcal{L}$ com respeito a ϕ^A e

$$J^\alpha = \mathcal{L}\,\delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\alpha}\right)}\,\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}\right)}\,\frac{\partial \delta \phi^A}{\partial x^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\mu \partial x^\alpha}\right)}\right)\delta\phi^A. \tag{1.28}$$

No cálculo que acaba de ser realizado, a importância das expressões (1.22), (1.23) e (1.24) é transparente. Além disso, o objeto local J^α definido em (1.28) depende explicitamente dos $\delta\phi^A$'s, o que revela a oportunidade da expressão geral (1.21). A quantidade infinitesimal de segunda ordem

$$(\overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L})\,\frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}$$

permite reescrever (1.26) como

$$\overline{\mathcal{L}}\left(1 + \frac{\partial \delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}\right) - \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha}\,. \tag{1.29}$$

1.3 Densidades escalares e quantidades não-locais

Nas seções anteriores exploramos as propriedades de invariância local que caracterizam os tensores, com o objetivo de investigar como as transformações infinitesimais de coordenadas afetam os campos tensoriais e suas derivadas. No entanto, as exigências concretas das teorias clássicas de campo demandam o trato com quantidades não-locais, as quais são obtidas a partir das quantidades locais via integração. Identificamos nosso objetivo nesta seção como sendo o de investigar o modo pelo qual quantidades integrais são afetadas por transformações infinitesimais de coordenadas na região de integração. Dito de outro modo, estamos interessados em determinar a variação infinitesimal δS imposta à quantidade integral

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}\, dx, \tag{1.30}$$

pela variação infinitesimal de coordenadas δx^{α}, onde $\mathcal{L}$ é a função local expressa em (1.25).

Uma transformação arbitrária de coordenadas $x \longrightarrow \overline{x}$ promove, na visão ativa, transformações locais finitas

$$\phi^A(x) \to \overline{\phi}^A(\overline{x}) \ ,$$

as quais caracterizam cada tipo particular de tensor ϕ^A. Resultam, então, correspondentes transformações locais finitas em suas derivadas primeiras

$$\frac{\partial \phi^A}{\partial x^{\mu}}(x) \to \frac{\partial \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x})$$

e em suas derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}}(x) \to \frac{\partial^2 \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\nu} \partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x}) \ .$$

Além disso, a região de integração sofre uma transformação $\Omega \to \overline{\Omega}$. Deste modo, podemos afirmar que a quantidade integral S, definida em (1.25) e (1.30), acusa uma variação finita

$$\Delta S = \int_{\overline{\Omega}} \mathcal{L}\Big(\overline{x}^{\alpha},\, \overline{\phi}^A(\overline{x}),\, \frac{\partial \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x}) \frac{\partial^2 \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\nu} \partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x})\Big)\, d\overline{x} - \int_{\Omega} \mathcal{L}\Big(x^{\alpha},\, \phi^A(x),\, \frac{\partial \phi^A}{\partial x^{\mu}}(x) \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}}(x)\Big)\, dx. \tag{1.31}$$

A conhecida fórmula de mudança de variáveis sob o sinal de integração permite escrever

$$\Delta S = \int_{\Omega} \Big(\mathcal{L}\Big(\overline{x}^{\alpha},\, \overline{\phi}^A(\overline{x}),\, \frac{\partial \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x}),\, \frac{\partial^2 \overline{\phi}^A}{\partial \overline{x}^{\nu} \partial \overline{x}^{\mu}}(\overline{x})\Big) \Big|\det\, \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}(x)\Big| - \mathcal{L}\Big(x^{\alpha},\, \phi^A(x),\, \frac{\partial \phi^A}{\partial x^{\mu}}(x),\, \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}}(x)\Big)\Big)\, dx, \tag{1.32}$$

onde $|\ |$ representa a função valor absoluto. Agora estamos prontos para obter o resultado desejado, já que a versão infinitesimal de (1.32) é dada por

$$\delta S = \int_\Omega \left(\mathcal{L}\Big(\overline{x}^\alpha, \overline{\phi}^A(\overline{x}), \frac{\partial\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x}), \frac{\partial^2\overline{\phi}^A}{\partial\overline{x}^\nu\partial\overline{x}^\mu}(\overline{x})\Big)\Big(1+\frac{\partial\delta x^\sigma}{\partial x^\sigma}\Big)-\mathcal{L}\Big(x^\alpha, \phi^A(x), \frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}(x), \frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}(x)\Big)\right) dx\ ,$$

o que, juntamente com (1.29), acarreta

$$\delta S = \int_\Omega \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^A}\,\delta\phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) dx\ . \tag{1.33}$$

A quantidade integral S definida em (1.25) e (1.30) é denominada invariante em relação ao grupo geral de transformações de coordenadas se para cada região de integração Ω prefixada o seu valor numérico expresso em (1.30) independe do sistema de coordenadas utilizado; dito de outro modo, se sua variação finita ΔS expressa em (1.31) é identicamente nula independentemente da região de integração Ω e da transformação de coordenadas $x \to \overline{x}$ considerada. É consequência imediata desta definição, juntamente com a fórmula de mudança de variáveis expressa em (1.32), a validade da

afirmação (i): A quantidade integral S definida em (1.25) e (1.30) é invariante com relação ao grupo geral de transformações de coordenadas se, e somente se, $\mathcal{L}$ é uma densidade escalar de pêso 1.

Do ponto de vista da exigência de covariância geral para as teorias clássicas de campo, e em particular para a teoria da relatividade geral, o conteúdo da afirmação (i) fornece uma rota segura e única para a obtenção de quantidades não locais com significado físico. Transformações infinitesimais de coordenadas constituem uma classe particular de transformações de coordenadas. Resulta desta simples obervação a

afirmação (ii): Se $\mathcal{L}$ definida por (1.25) é uma densidade escalar de pêso 1 então qualquer transformação infinitesimal de coordenadas impõe à quantidade integral S definida por (1.30) uma variação infinitesimal δS identicamente nula, isto é :

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) dx = 0 \ , \tag{1.34}$$

qualquer que seja a região de integração Ω considerada.

Da independência da validade de (1.34) com respeito a região de integração Ω resulta a

afirmação (iii): Se $\mathcal{L}$ definida por (1.25) é uma densidade escalar de pêso 1 e $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}$ e J^α são definidos respectivamente por (1.27) e (1.28) então vale a identidade

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \ . \tag{1.35}$$

Um caso particular interessante da afirmação (iii) é aquele no qual $\mathcal{L}$ depende unicamente de uma densidade escalar θ de pêso 1, segundo a relação funcional

$$\mathcal{L}(\theta) = \theta \ ,$$

a qual acarreta imediatamente

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \theta} &= 1 \\ \text{e } J^\alpha &= \theta \delta x^\alpha . \end{aligned}$$

Com isto, a identidade (1.35) se escreve como

$$\delta \theta + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\theta \delta x^\alpha) = 0 \ ,$$

e reobtemos, deste modo, o caso particular $w = 1$ da expressão (1.18) da primeira seção.

Com o objetivo de completar o quadro conceitual desenvolvido nesta seção e com vistas à próxima seção é importante acrescentar a

afirmação (iv): Se $\mathcal{L}$ definida por (1.25) é uma densidade escalar de peso 1 e ϕ^A é um tensor do tipo $\binom{r}{s}$ então a derivada lagrangeana $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}$ de $\mathcal{L}$ com respeito a ϕ^A, definida por (1.27), é uma $\binom{s}{r}$-densidade tensorial de pêso 1.

Não nos deteremos aqui com a demonstração desta afirmação. Em contrapartida, destacamos o caso particular no qual $\gamma^{\mu\nu}$ é um tensor simétrico do tipo $\binom{2}{0}$. Resulta da afirmação (iv) que a derivada lagrangeana $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}$ da densidade escalar $\mathcal{L}$ de pêso 1 com respeito a $\gamma^{\mu\nu}$ é uma $\binom{0}{2}$-densidade tensorial simétrica de pêso 1. Na próxima seção $\gamma^{\mu\nu}$ será o tensor métrico do espaço-tempo de fundo e $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}$ permitirá, oportunamente, definir o tensor momento-energia gravitacional.

1.4 Um objeto absoluto e a condição "on shell"

Podemos perspectivar os resultados obtidos até o momento como decorrência necessária do princípio de covariância geral nas teorias clássicas de campo e de sua implementação local via os campos tensoriais e não-local via a integração de densidades escalares de peso 1. É interessante observar o elo de ligação entre objetos locais invariantes e quantidades não-locais invariantes através do roteiro objetos locais $\rightarrow$ quantidade não local $\rightarrow$ relação local. Creditamos a esta profícua ligação a justa causa para o sucesso do princípio da mínima ação, ou mais precisamente, princípio da ação estacionária, como paradigma por excelência para as teorias clássicas de campo. É a partir da implementação deste princípio que as equações dinâmicas são obtidas, as simetrias de calibre e correspondentes quantidades conservadas introduzidas e interações modeladas. É caracterizado por uma quantidade invariante não local, a ação clássica S, obtida via integração de uma densidade escalar de peso 1, a densidade lagrangeana $\mathcal{L}$, a qual é uma função conhecida de um conjunto finito de tensores ϕ^A, suas derivadas primeiras $\partial_\mu\phi^A$, suas derivadas segundas $\partial_\nu\partial_\mu\phi^A$ e eventualmente das variáveis independentes x^ρ. As expressões (1.25) e (1.30) são a transcrição destas relações de dependência funcional.

Na implementação do princípio da ação estacionária em teorias clássicas de campo é mais do que usual a presença de um campo tensorial simétrico não degenerado $\gamma^{\mu\nu}$ no conjunto $\{\phi^A\}$ de campos tensoriais. Os cenários teóricos que temos em mente, e para os quais o resultado central desta seção é válido, são exatamente aqueles nos quais o tensor $\gamma^{\mu\nu}$ desempenha o papel de tensor métrico do espaço-tempo de fundo, e portanto ocupa o status de objeto absoluto da teoria, isto é: **$\gamma^{\mu\nu}$ é o único tensor no conjunto $\{\phi^A\}$ que não é variável dinâmica.**

Com os objetivos de explicitar esta hipótese, bem como facilitar a exposição e elaboração do resultado que vem a seguir, vamos "retirar" o tensor $\gamma^{\mu\nu}$ do conjunto $\{\phi^A\}$ e reescrever a densidade lagrangeana como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\gamma^{\mu\nu} \; ; \; \gamma^{\mu\nu}{}_{,\rho} \; ; \; \gamma^{\mu\nu}{}_{,\rho,\sigma} \; ; \; \phi^A \; ; \; \phi^A{}_{,\rho} \; ; \; \phi^A{}_{,\rho,\sigma}\right) \tag{1.36}$$

Deste modo a condição dinâmica "on shell" da teoria é caracterizada pelo conjunto de equações diferenciais parcias

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} = 0 \; . \tag{1.37}$$

Estamos agora em condições de enunciar e provar o

teorema da divergência covariante nula: Se a densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ verifica a relação de dependência funcional expressa em (1.36), $\gamma^{\mu\nu}$ é objeto absoluto e os campos tensoriais ϕ^A verificam a condição dinâmica "on shell" expressa em (1.37), então a divergência covariante da densidade tensorial simétrica $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{\mu\nu}}$ é identicamente nula, isto é:

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{\mu\nu}}\right)^{;\nu} = 0 \; . \tag{1.38}$$

Demonstração: A identidade (1.34) da seção anterior se reescreve como

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \delta\gamma^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \delta\phi^A + J^\alpha{}_{,\alpha}\right) dx = 0 \; , \tag{1.39}$$

onde

$$J^\alpha = \mathcal{L}\delta x^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_{,\mu}}\delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_{,\alpha,\mu}}(\delta\phi^A)_{,\mu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_{,\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\phi^A + $$
$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^{\rho\sigma}{}_{,\alpha}}\delta\gamma^{\rho\sigma} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^{\rho\sigma}{}_{,\alpha,\mu}}(\delta\gamma^{\rho\sigma})_{,\mu} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma^{\rho\sigma}{}_{,\alpha,\mu}}\right)_{,\mu}\delta\gamma^{\rho\sigma} \ . \tag{1.40}$$

A expressão (B.4) do apêndice B permite escrever

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\delta\gamma^{\mu\nu} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}(\delta x^\mu{}_{;\alpha}\gamma^{\alpha\nu} + \delta x^\nu{}_{;\alpha}\gamma^{\alpha\mu}) \\
&= \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\delta x^\mu\gamma^{\alpha\nu} + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\delta x^\nu\gamma^{\alpha\mu}\right)_{;\alpha} - \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\gamma^{\alpha\nu}\right)_{;\alpha}\delta x^\mu - \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\gamma^{\alpha\mu}\right)_{;\alpha}\delta x^\nu \\
&= 2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\gamma^{\alpha\nu}\delta x^\mu\right)_{,\alpha} - 2\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\right)^{;\nu}\delta x^\mu \ ,
\end{aligned} \tag{1.41}$$

onde foi utilizada a identidade

$$H^\alpha{}_{;\alpha} = H^\alpha{}_{,\alpha} \ ,$$

a qual é válida para uma densidade vetorial contravariante H^α de peso 1.

A identidade (1.39), a condição dinâmica (1.37) e a expressão (1.41), juntamente com o teorema de Stokes, permitem escrever

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\right)^{;\nu}\delta x^\mu dx = \int_{\partial\Omega} L^\alpha\Sigma_\alpha \ , \tag{1.42}$$

onde

$$2L^\alpha = J^\alpha + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\left(\gamma^{\alpha\nu}\delta x^\mu + \gamma^{\alpha\mu}\delta x^\nu\right) \ ,$$
$$\Sigma_\alpha = dx\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, -\right)$$

e J^α é definido pela expressão (1.40). Para dar continuidade à argumentação é essencial observar que a densidade vetorial L^α é uma função linear do argumento $(\delta x^\rho \ ; \ \delta x^\rho{}_{,\mu} \ ; \ \delta x^\rho{}_{,\mu,\nu})$. Resulta deste fato a identidade

$$L^\alpha(\delta x^\rho = 0 \ \ ; \ \delta x^\rho{}_{,\mu} = 0 \ \ ; \ \ \delta x^\rho{}_{,\mu,\nu} = 0) = 0 \ . \tag{1.43}$$

Suponhamos a existência de um ponto P_0 no interior da região compacta Ω e de um índice μ_0 tais que

$$\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu_0\nu}}\right)^{;\nu}(P_0) = a \neq 0\ . \tag{1.44}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que o número real a é positivo. Basta escolher um número real $r > 0$ e uma função $f \geq 0$ de classe C^∞, de tal modo a se cumprirem as seguintes condições:

(i) $B(P_0; 2r) \subset \Omega$,

(ii) $\left(\dfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu_0\nu}}\right)^{;\nu}(P) \geq \dfrac{a}{2}$ em todo ponto $P \in B(P_0; r)$,

(iii) $f \equiv 0$ no conjunto compacto $\Omega - B(P_0; r)$,

(iv) $\displaystyle\int_{B(P_0;r)} f(x)dx = b > 0$,

onde $B(P_0; r)$ denota a bola aberta de raio r e centro no ponto P_0. Lembrar que estamos computando em um sistema de coordenadas pré-fixado e portanto podemos utilizar a topologia do espaço euclideano $\mathbb{R}^n$. Podemos definir o campo de variação infinitesimal δx^μ de classe C^∞ via

(v) $\dfrac{\delta x^\mu}{\delta u} = \delta^\mu_{\mu_0} f$,

onde $\delta u > 0$ é uma variação infinitesimal do parâmetro real u.

As condições (ii), (iii), (iv) e (v) acarretam

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\right)^{;\nu} \delta x^\mu dx \geq \frac{ab}{2}\,\delta u > 0\ ,$$

enquanto as condições (i), (iii) e (v), juntamente com (1.43) implicam

$$\int_{\partial\Omega} L^\alpha \Sigma_\alpha = 0\ ,$$

uma evidente contradição com a expressão (1.42). Logo a hipótese contida em (1.44) é falsa, o que confirma a identidade (1.38).

Entendemos que a questão de atribuir conteúdo físico para o tensor $\gamma^{\mu\nu}$, ou mesmo negar-lhe tal conteúdo, é problema específico de cada cenário teórico particular, e portanto, no ponto em que nos encontramos, não cabe e nem é possível empreender esta tarefa. Com vistas a objetivos mais modestos é bastante ter presente a seguinte afirmação, a qual consideramos o conteúdo síntese desta seção: **a premissa de um tensor $\gamma^{\mu\nu}$ ocupando o status de objeto absoluto da teoria disponibiliza automaticamente uma densidade tensorial simétrica com divergência covariante "on shell" nula.**

Capítulo 2

O Formalismo de Teoria de Campo para a Relatividade Geral

A teoria da Relatividade Geral estabelece e consagra o Princípio da Equivalência entre geometria e gravitação. Em sua formulação usual, as componentes do tensor métrico desempenham dupla função: determinam a estrutura geométrica do espaço-tempo e constituem as legítimas variáveis dinâmicas do campo gravitacional. Todavia, a impossibilidade de se obter leis de conservação em forma covariante, proibitivas em decorrência do Princípio da Equivalência, impõe a revisão da formulação geométrica tradicional e justifica a busca de um formalismo alternativo.

2.1 As variáveis dinâmicas e as geometrias efetiva e de fundo no formalismo D.G.P.P.

Orientados por uma perspectiva de teoria clássica de campos, apresentada primeiramente por Feynman [5], e desenvolvida posteriormente por Deser [6], Grishchuk et al. [7, 8], introduzimos um espaço-tempo de fundo (d+1)-dimensional, com geometria de Riemann definida pelo tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$ e afinidade métrica $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$. Redefinimos as variáveis dinâmicas no formalismo geométrico de primeira ordem, o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e a afinidade simétrica $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, em termos das novas variáveis dinâmicas no formalismo de campo, os tensores simétricos $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, através das relações

$$\sqrt{-\bar{g}}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \tag{2.1}$$

e

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

Acrescentamos a premissa essencial de que a geometria de fundo é configurada a priori, e portanto não guarda graus de liberdade dinâmicos. Seu tensor métrico adquire caráter absoluto no formalismo variacional a ser apresentado em seguida e será utilizado para realizar a dualização entre índices tensoriais contravariantes e covariantes. Por exemplo, se $h^{\mu}{}_{\nu}$ é um tensor misto, suas versões contravariante e covariante são obtidas respectivamente pelas expressões

$$h^{\mu\rho} = h^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu\rho} \;\; e \;\; h_{\rho\nu} = \gamma_{\rho\mu}h^{\mu}{}_{\nu}.$$

A relação (2.1) pode ser resolvida para as componentes $g^{\mu\nu}$ do tensor métrico da geometria efetiva. Para confirmar esta afirmação basta considerar as relações complementares

$$g^{\mu\nu}\bar{g}_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho} = \gamma^{\mu\nu}\gamma_{\nu\rho}, \;\; \bar{g} = \det[\bar{g}_{\nu\rho}] \;\;\; e \;\; \gamma = \det[\gamma_{\nu\rho}],$$

e aplicar a função determinante nos dois lados de (2.1) para obter

$$(\sqrt{-\bar{g}})^{d+1} \det[g^{\mu\nu}] = (\sqrt{-\gamma})^{d+1} \det[\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}],$$

$$(\sqrt{-\bar{g}})^{d-1} = (\sqrt{-\gamma})^{d-1} \det[\delta^\sigma{}_\rho + h^\sigma{}_\rho],$$

$$\frac{\sqrt{-\bar{g}}}{\sqrt{-\gamma}} = (\det[\delta^\sigma{}_\rho + h^\sigma{}_\rho])^{\frac{1}{d-1}}, \tag{2.3}$$

o que permite eliminar as densidades escalares e escrever

$$g^{\mu\nu} = (\det[\delta^\sigma{}_\rho + h^\sigma{}_\rho])^{-\frac{1}{d-1}} \ (\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}). \tag{2.4}$$

As expressões (2.3) e (2.4) juntamente com as fórmulas dos traços (Apêndice C) permitem explicitar a relação de dependência funcional entre o tensor métrico da geometria efetiva e o da geometria de fundo. Por exemplo, em dimensão "2 + 1" valem as seguintes relações:

$$\frac{\sqrt{-\bar{g}}}{\sqrt{-\gamma}} = 1 + h_1 + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2) + \frac{1}{6}(h_1^3 - 3h_1h_2 + 2h_3),$$

$$g^{\mu\nu} = \left(1 + h_1 + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2) + \frac{1}{6}(h_1^3 - 3h_1h_2 + 2h_3)\right)^{-1} (\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})$$

e

$$\bar{g}_{\nu\rho} = h_{\nu\alpha}h^\alpha{}_\rho - (1 + h_1)h_{\nu\rho} + \left(1 + h_1 + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2)\right)\gamma_{\nu\rho},$$

onde

$$h_1 = h^\alpha{}_\alpha, \qquad h_2 = h^\alpha{}_\beta\, h^\beta{}_\alpha \quad e \quad h_3 = h^\alpha{}_\beta h^\beta{}_\sigma h^\sigma{}_\alpha.$$

No entanto, para o cálculo das variações funcionais infinitesimais $\delta(\sqrt{-\bar{g}})$ e $\delta g^{\mu\nu}$, é suficiente recorrer diretamente à expressão (2.1):

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\nu} &= \delta\left(\frac{\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})}{\sqrt{-\bar{g}}}\right) \\
&= \frac{\delta(\sqrt{-\gamma})(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})}{\sqrt{-\bar{g}}} + \frac{\sqrt{-\gamma}(\delta\gamma^{\mu\nu} + \delta h^{\mu\nu})}{\sqrt{-\bar{g}}} - \frac{\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\delta(\sqrt{-\bar{g}})}{(\sqrt{-\bar{g}})^2} \\
&= \frac{\delta(\sqrt{-\gamma})}{\sqrt{-\gamma}}\, g^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\bar{g}}}(\delta\gamma^{\mu\nu} + \delta h^{\mu\nu}) - \frac{\delta(\sqrt{-\bar{g}})}{\sqrt{-\bar{g}}}\, g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Multiplicando esta expressão por $\bar{g}_{\mu\nu}$, somando nos índices μ, ν e lembrando que

$$\delta(\sqrt{-\gamma}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma_{\alpha\beta}\delta\gamma^{\alpha\beta}\,, \qquad \delta(\sqrt{-\bar{g}}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-\bar{g}}\bar{g}_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \quad e \quad \bar{g}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = d+1\,,$$

obtemos

$$(d-1)\,\delta\left(\sqrt{-\bar{g}}\right) = \left(\sqrt{-\gamma}\bar{g}_{\mu\nu} - \frac{d+1}{2}\sqrt{-\bar{g}}\gamma_{\mu\nu}\right)\delta\gamma^{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\bar{g}_{\mu\nu}\delta h^{\mu\nu}. \tag{2.6}$$

Levando (2.6) em (2.5) resulta

$$\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu} &= \left(\frac{1}{d-1}g^{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{d-1}\frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\bar{g}}}g^{\mu\nu}\bar{g}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\bar{g}}}\delta^{(\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu)}{}_{\beta}\right)\delta\gamma^{\alpha\beta}\\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\bar{g}}}\delta^{(\mu}{}_{\alpha}\delta^{\nu)}{}_{\beta} - \frac{1}{d-1}\frac{\sqrt{-\gamma}}{\sqrt{-\bar{g}}}g^{\mu\nu}\bar{g}_{\alpha\beta}\right)\delta h^{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

É oportuno lembrar que a geometria efetiva no formalismo geométrico de primeira ordem tem caráter "off shell" genérico. Dito de outro modo: não existem vínculos pré-fixados de qualquer espécie entre o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ e a afinidade simétrica $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$. Em particular, a eventual metricidade "on shell" da geometria efetiva pode ser caracterizada em termos das novas variáveis dinâmicas e da geometria de fundo pela

afirmação (i): Se valem as relações (2.1) e (2.2) juntamente com as relações complementares e denotamos derivação covariante com respeito à afinidade simétrica Γ por "//" então

$$\left(\sqrt{-\bar{g}}\,g^{\mu\nu}\right)_{//\alpha} = \sqrt{-\gamma}\left(h^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + K^{\mu}{}_{\alpha\sigma}(\gamma^{\sigma\nu} + h^{\sigma\nu}) + K^{\nu}{}_{\alpha\sigma}(\gamma^{\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}) - K^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\right). \tag{2.8}$$

Demonstração: Basta ter em conta que $\sqrt{-\bar{g}}$ *e* $\sqrt{-\gamma}$ são densidades escalares de peso 1, e que $(\sqrt{-\gamma})_{;\alpha} = 0 = \gamma^{\mu\nu}{}_{;\alpha}$ devido ao caráter Riemanniano da geometria de fundo para se obter

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu}\right)_{//\alpha} &= \left(\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu}\right)_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\sigma\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu} \\
&= \left(\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu}\right)_{,\alpha} + \left(\{{}_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\sigma}\} + K^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\right)\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\sigma\nu} + \left(\{{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\sigma}\} + K^{\nu}{}_{\alpha\sigma}\right)\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\sigma} \\
&\quad - \left(\{{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\sigma}\} + K^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}\right)\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu} \\
&= \left(\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu}\right)_{;\alpha} + K^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\sigma\nu} + K^{\nu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\sigma} - K^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\bar{g}}\, g^{\mu\nu} \\
&= \left(\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\right)_{;\alpha} + K^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\sigma\nu} + h^{\sigma\nu}) + K^{\nu}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}) \\
&\quad - K^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \\
&= \sqrt{-\gamma}\left(h^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + K^{\mu}{}_{\alpha\sigma}\,(\gamma^{\sigma\nu} + h^{\sigma\nu}) + K^{\nu}{}_{\alpha\sigma}\,(\gamma^{\mu\sigma} + h^{\mu\sigma}) - K^{\sigma}{}_{\alpha\sigma}\,(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\right).
\end{aligned}
$$

De importância central para qualquer formalismo de teoria de campo que pretenda recuperar o cenário geométrico da Relatividade Geral é investigar a relação entre o tensor de Riemann da geometria efetiva e o da geometria de fundo. Este é o conteúdo da

afirmação (ii): Se as afinidades simétricas das geometrias efetiva e de fundo verificam (2.2), então seus tensores de Riemann, $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ e $\mathring{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ respectivamente, verificam

$$
R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \mathring{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\beta} - K^{\alpha}{}_{\mu\beta;\nu} + K^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\, K^{\sigma}{}_{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\, K^{\sigma}{}_{\mu\beta}.
$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\,\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\beta} \\
&= \{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\}_{,\beta} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} - \{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\beta}\}_{,\nu} - K^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} + \left(\{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\beta}\} + K^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\right)\left(\{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\} + K^{\sigma}{}_{\mu\nu}\right) \\
&\quad - \left(\{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\nu}\} + K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\right)\left(\{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\beta}\} + K^{\sigma}{}_{\mu\beta}\right) \\
&= \{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}\}_{,\beta} - \{{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\beta}\}_{,\nu} + \{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\beta}\}\{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\} - \{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\nu}\}\{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\beta}\} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu,\beta} + \{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\beta}\} K^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\beta}\} K^{\alpha}{}_{\sigma\nu} \\
&\quad - K^{\alpha}{}_{\mu\beta,\nu} - \{{}_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\nu}\} K^{\sigma}{}_{\mu\beta} + \{{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu}\} K^{\alpha}{}_{\sigma\beta} + K^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\, K^{\sigma}{}_{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\, K^{\sigma}{}_{\mu\beta} \\
&= \mathring{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\beta} - K^{\alpha}{}_{\mu\beta;\nu} + K^{\alpha}{}_{\sigma\beta}\, K^{\sigma}{}_{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\sigma\nu}\, K^{\sigma}{}_{\mu\beta}.
\end{aligned}
$$

Contraindo nos índices α, β é imediata a seguinte relação entre os tensores de Ricci da geometria efetiva e da geometria de fundo

$$R_{\mu\nu} = \overset{\circ}{R}_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - K^{\alpha}{}_{\mu\alpha;\nu} + K^{\alpha}{}_{\sigma\alpha} K^{\sigma}{}_{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\sigma\nu} K^{\sigma}{}_{\mu\alpha}. \tag{2.9}$$

2.2 O formalismo de campo generalizado e sua equivalência dinâmica com a Relatividade Geral

O formalismo de teoria de campo para a Relatividade Geral que introduzimos agora consiste em:

(i) impor à geometria de fundo a condição no tensor de Ricci expressa por

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = \frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}\gamma_{\mu\nu}; \tag{2.10}$$

(ii) eleger como variáveis dinâmicas para o campo gravitacional os tensores simétricos

$$h^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad K^{\alpha}_{\ \mu\nu} \ ;$$

(iii) implementar as relações (2.1) e (2.2) na densidade lagrangeana de Einstein-Hilbert com constante cosmológica

$$\mathcal{L}^{g} = \frac{c^3}{16\pi G_d}\ \left(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda\right)\sqrt{-g}\ ;$$

(iv) adicionar a $\mathcal{L}^{g}$ uma lagrangeana $\mathcal{L}^{m}$ de interação de campos materiais ϕ^{A} com o campo graviational,

$$\mathcal{L}^{m} = \mathcal{L}^{m}\left(g^{\mu\nu}\ ;\ g^{\mu\nu}{}_{,\rho}\ ;\ \phi^{A}\ ;\ \phi^{A}{}_{,\rho}\right)\ ,$$

para obter a lagrangena total

$$\mathcal{L}^{T} = \mathcal{L}^{g} + \mathcal{L}^{m}\ .$$

A forma particular escolhida para a Lagrangeana de matéria $\mathcal{L}^m$ pressupõe o princípio do acoplamento mínimo e pretende contemplar o princípio da equivalência, na medida em que qualifica a geometria de fundo como inobservável e estabelece, por intermédio da geometria efetiva, o caráter de universalidade da interação das fontes materiais com o campo gravitacional.

Procedendo desta forma e tendo em conta as expressões (2.9) e (2.10) obtemos

$$\mathcal{L}^g = \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big(\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})\Big(\frac{2\overset{0}{\Lambda}}{d-1}\gamma_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu:\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu}\Big) - 2\Lambda\sqrt{-\overline{g}}\Big) ,$$

onde

$$K_\mu = K^\alpha{}_{\mu\alpha} \quad \text{e} \quad (KK)_{\mu\nu} = K_\alpha K^\alpha{}_{\mu\nu} - K^\beta{}_{\mu\alpha}K^\alpha{}_{\nu\beta} .$$

Debitando de $\mathcal{L}^g$ a parcela que não depende das variáveis dinâmicas e o termo de divergência total

$$\sqrt{-\gamma}\;\gamma^{\mu\nu}(K^\alpha{}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu}) = (\sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu}K^\alpha{}_{\mu\nu} - \gamma^{\mu\alpha}K_\mu))_{,\alpha} ,$$

já que não contribuem com as equações dinâmicas, obtemos no lugar de $\mathcal{L}^T$ a lagrangeana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big(\sqrt{-\gamma}\Big(\gamma^{\mu\nu}(KK)_{\mu\nu} + h^{\mu\nu}\Big(\frac{2\overset{0}{\Lambda}}{d-1}\gamma_{\mu\nu} + K^\alpha{}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu}\Big)\Big) - 2\Lambda\sqrt{-\overline{g}}\Big)\\ & + \mathcal{L}^m(g^{\mu\nu}\;;\;g^{\mu\nu}{}_{,\rho}\;;\;\phi^A\;;\;\phi^A{}_{,\rho}),\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde $\sqrt{-\overline{g}}$ e $g^{\mu\nu}$ dependem funcionalmente de $\gamma^{\alpha\beta}$ e $h^{\alpha\beta}$ segundo as relações (2.3) e (2.4) respectivamente. As equações dinâmicas para o campo gravitacional são obtidas pela variação funcional da ação

$$S = \int \mathcal{L}dx$$

com relação às variáveis dinâmicas $h^{\mu\nu}$ e $K^\alpha{}_{\mu\nu}$ e pela afirmação do princípio da ação estacionária

$$\delta S = 0 .$$

Procedemos agora ao cálculo das derivadas funcionais da densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ recorrendo diretamente à expressão (2.11). Tomando a variação funcional da ação S com relação à variável $h^{\mu\nu}$ e debitando um termo de superfície adequado, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^{\mu\nu}} &= \frac{c^3\sqrt{-\gamma}}{16\pi G_d}\Big(\frac{2\overset{0}{\Lambda}}{d-1}\,\gamma_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2}\,K_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}\,K_{\nu;\mu} + (KK)_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{d-1}\,\overline{g}_{\mu\nu} + \\ &+ \frac{16\pi G_d}{c^3\sqrt{-\overline{g}}}\,\frac{\delta\mathcal{L}^m}{\delta g^{\alpha\beta}}\left(\frac{1}{2}\,\delta^{(\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta)}{}_{\nu} - \frac{1}{d-1}\,g^{\alpha\beta}\overline{g}_{\mu\nu}\right)\Big)\ ,\end{aligned}$$

onde fizemos uso essencial das expressões (2.6) e (2.7) bem como de

$$\frac{\delta\mathcal{L}^m}{\delta h^{\mu\nu}} = \frac{\delta\mathcal{L}^m}{\delta g^{\alpha\beta}}\,\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial h^{\mu\nu}}\ ,$$

a qual constitui aplicação direta da regra da cadeia para a derivada lagrangeana (apêndice A).

Impondo as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h^{\mu\nu}} = 0\ ,$$

definindo o tensor momento-energia da matéria

$$t_{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-\overline{g}}}\frac{\delta\mathcal{L}^m}{\delta g^{\alpha\beta}}$$

e seu traço com respeito à métrica efetiva

$$t = g^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta}\ ,$$

obtemos

$$\frac{2\overset{0}{\Lambda}}{d-1}\gamma_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - \frac{1}{2}K_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}K_{\nu;\mu} + (KK)_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_d}{c^3}\left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}\,t\,\overline{g}_{\mu\nu}\right)\ . \tag{2.12}$$

Tomando agora a variação funcional da ação S com relação à variável $K^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, e debitando a divergência total

$$\partial_\alpha\left(\sqrt{-\gamma}\ h^{\mu[\nu}\delta K^{\alpha]}{}_{\mu\nu}\right)\ ,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta K^{\alpha}{}_{\mu\nu}} = \frac{c^3\sqrt{-\gamma}}{16\pi G_d}\Big(&\frac{1}{2}(\gamma^{\rho\sigma} + h^{\rho\sigma})K^{(\mu}{}_{\rho\sigma}\delta^{\nu)}_{\alpha} - (\gamma^{\mu\rho} + h^{\mu\rho})K^{\nu}{}_{\alpha\rho} - (\gamma^{\nu\rho} + h^{\nu\rho})K^{\mu}{}_{\alpha\rho} + \\ &(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu})K_\alpha - h^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2}\,h^{\rho(\mu}{}_{;\rho}\delta^{\nu)}{}_{\alpha}\Big)\ .\end{aligned}$$

As equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta K^{\alpha}{}_{\mu\nu}} = 0$$

acarretam sucessivamente

$$(\gamma^{\rho\sigma} + h^{\rho\sigma}) K^{\mu}{}_{\rho\sigma} + h^{\mu\rho}{}_{;\rho} = 0 \tag{2.13}$$

e

$$h^{\mu\nu}{}_{;\alpha} + (\gamma^{\mu\rho} + h^{\mu\rho}) K^{\nu}{}_{\alpha\rho} + (\gamma^{\nu\rho} + h^{\nu\rho}) K^{\mu}{}_{\alpha\rho} - (\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) K_{\alpha} = 0 \ , \tag{2.14}$$

a qual, tendo em vista a expressão (2.8) e as relações

$$\sqrt{-\overline{g}}\ g^{\mu\nu}{}_{//\alpha} = (\sqrt{-\overline{g}} g^{\mu\nu})_{//\alpha} - \frac{1}{d-1} (\sqrt{-\overline{g}} g^{\rho\sigma})_{//\alpha} \overline{g}_{\rho\sigma} g^{\mu\nu}$$

e

$$\overline{g}_{\rho\sigma_{//\alpha}} = -\ \overline{g}_{\rho\mu} g^{\mu\nu}{}_{//\alpha} \overline{g}_{\nu\sigma} \ ,$$

implica a condição de metricidade

$$\overline{g}_{\rho\sigma_{//\alpha}} = 0 \ ,$$

o que é equivalente, em decorrência do teorema de Levi-Civita, a afirmar que a geometria efetiva é uma geometria de Riemann. Em particular, o tensor de Ricci da geometria efetiva verifica a condição de simetria

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu},$$

a qual juntamente com as expressões (2.9) e (2.10) e a equação dinâmica (2.12) acarretam sucessivamente

$$R_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{d-1} \overline{g}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_d}{c^3} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1} t\ \overline{g}_{\mu\nu} \right) \ , \tag{2.15}$$

$$\frac{R}{2} - \left(\frac{d+1}{d-1} \right) \Lambda = -\frac{8\pi G_d}{c^3 (d-1)}\ t$$

e $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \overline{g}_{\mu\nu} (R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G_d}{c^3} t_{\mu\nu} \ , \tag{2.16}$$

as quais são as equações de Einstein com constante cosmológica e fontes materiais. Deste modo o cenário geométrico da teoria da relatividade geral é integralmente recuperado, o que confirma a equivalência dinâmica entre o formalismo de teoria de campo adotado e o formalismo geométrico usual. Todavia, com o objetivo de preparar terreno para a oportuna introdução do tensor momento-energia gravitacional é necessário desenvolver um pouco mais as equações dinâmicas apresentadas. Neste sentido, vamos considerar a versão covariante da expressão (2.14) de acordo com

$$[\alpha\mu\nu] = h_{\mu\nu;\alpha} + K_{\mu\nu\alpha} + K_{\nu\mu\alpha} + h^{\rho}_{\mu}K_{\nu\alpha\rho} + h^{\rho}_{\nu}K_{\mu\alpha\rho} - (\gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})K_{\alpha} = 0 \ ,$$

e em seguida efetuar a soma cíclica

$$[\alpha\mu\nu] - [\nu\alpha\mu] - [\mu\nu\alpha] = 0 \ ,$$

de tal modo a obter

$$h_{\mu\nu;\alpha} - h_{\nu\alpha;\mu} - h_{\alpha\mu;\nu} - (\gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})K_{\alpha} + (\gamma_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha})K_{\mu} + (\gamma_{\alpha\mu} + h_{\alpha\mu})K_{\nu} - 2K_{\alpha\mu\nu} +$$
$$+h^{\rho}_{\mu}K_{[\nu\alpha]\rho} + h^{\rho}_{\nu}K_{[\mu\alpha]\rho} - h^{\rho}_{\alpha}K_{(\mu\nu)\rho} = 0 \ .$$

Tomando a divergência nesta expressão resulta

$$h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha} - \gamma_{\mu\nu}K_{\alpha}{}^{;\alpha} + K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} - 2K_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha} + (h_{\alpha(\mu}K_{\nu)} + h^{\rho}_{\mu}K_{[\nu\alpha]\rho} +$$
$$h^{\rho}_{\nu}K_{[\mu\alpha]\rho} - h^{\rho}_{\alpha}K_{(\mu\nu)\rho} - h_{\mu\nu}K_{\alpha})^{;\alpha} = 0 \ . \qquad (2.17)$$

Multiplicando (2.12) por $\gamma^{\mu\nu}$ e contraindo nos índices μ, ν e tomando a divergência em (2.13) obtemos respectivamente

$$2\Big(\frac{d+1}{d-1}\Big)\overset{0}{\Lambda} + \gamma^{\mu\nu}K^{\alpha}{}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\alpha}{}^{;\alpha} + (KK)^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}^{\alpha}{}_{\alpha} = \frac{8\pi G_d}{c^3}\Big(t^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{d-1}\, t\overline{g}^{\alpha}{}_{\alpha}\Big)$$

$$\text{e} \qquad \gamma^{\rho\sigma}K^{\mu}{}_{\rho\sigma;\mu} + (h^{\rho\sigma}K^{\mu}{}_{\rho\sigma})_{;\mu} + h^{\mu\rho}{}_{;\rho;\mu} = 0 \ ,$$

as quais conjuntamente acarretam

$$K_\alpha{}^{;\alpha} = 2\Big(\frac{d+1}{d-1}\Big)\overset{0}{\Lambda} - (h^{\rho\sigma}K_{\alpha\rho\sigma})^{;\alpha} - h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma} + (KK)^\alpha{}_\alpha - \frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}^\alpha{}_\alpha - \frac{8\pi G_d}{c^3}\left(t^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{d-1}\, t\overline{g}^\alpha{}_\alpha\right) . \tag{2.18}$$

A expressão (2.17) com o auxílio das expressões (2.12) e (2.18) fornece

$$\frac{1}{2}(h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha} + \gamma_{\mu\nu}h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma}) + (KK)_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\gamma_{\mu\nu}(KK)^\alpha_{\ \alpha} - Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha} - \overset{0}{\Lambda}\,\gamma_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{d-1}\left(2\overline{g}_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\overline{g}^\alpha{}_\alpha\right) = \frac{8\pi G_d}{c^3}\left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}\, t\overline{g}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\left(t^\alpha{}_\alpha - \frac{1}{d-1}\, t\overline{g}^\alpha{}_\alpha\right)\right) , \tag{2.19}$$

onde

$$2Q_{\alpha\mu\nu} = h^\rho_\mu K_{[\alpha\nu]\rho} + h^\rho_\nu K_{[\alpha\mu]\rho} + h^\rho_\alpha K_{(\mu\nu)\rho} - h_{\alpha(\mu}K_{\nu)} + h_{\mu\nu}K_\alpha - \gamma_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}K_{\alpha\rho\sigma} . \tag{2.20}$$

A expressão (2.19) guarda com respeito ao formalismo de teoria de campo relação análoga àquela existente entre a equação dinâmica (2.16) e o formalismo geométrico usual da relatividade geral. Vale notar que a presença no lado esquerdo de (2.19) dos termos não lineares nos campos $h^{\mu\nu}$ e $K^\alpha_{\mu\nu}$ pode ser interpretada fisicamente como o fenômeno da auto-interação, no qual o campo gravitacional atua como fonte de si mesmo. Neste sentido, o princípio da equivalência sugere que aqueles termos constituam a parcela da energia gravitacional correspondente à própria gravitação. É nossa tarefa em seguida confirmar essa expectativa bem como definir e obter uma expressão adequada para o tensor momento-energia gravitacional.

Capítulo 3

O Tensor Momento-Energia Gravitacional

O formalismo de teoria de campo para a Relatividade Geral recém apresentado contém como ingrediente central uma geometria de Riemann fixada a priori e caracterizada pelo tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$, o qual ocupa o status dinâmico de objeto absoluto. Assim, podemos considerar a densidade Lagrangeana deste formalismo, $\mathcal{L}$, e definir o tensor momento-energia gravitacional:

$$\overset{\circ}{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} \tag{3.1}$$

Os resultados alcançados no último capítulo justificarão, a posteriori, a denominação aqui adotada para o tensor $\overset{\circ}{T}_{\mu\nu}$. Por ora, é bastante ter presente que o mesmo, em conseqüência do teorema do capítulo 1 e em relação à geometria de fundo, possui divergência covariante "on shell" nula, isto é:

$$\overset{\circ}{T}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \, . \tag{3.2}$$

Como preparação para o cálculo do tensor momento-energia gravitacional é necessário considerar a seguinte variação funcional em respeito a $\gamma^{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{-\gamma}h^{\rho\sigma}\,\delta\left(K^{\lambda}{}_{\rho\sigma;\lambda} - K_{\rho;\sigma}\right)\\
&= \sqrt{-\gamma}\,h^{\rho\sigma}\left(\delta\left\{{\lambda \atop \lambda\alpha}\right\}K^{\alpha}{}_{\rho\sigma} - \delta\left\{{\alpha \atop \lambda\rho}\right\}K^{\lambda}{}_{\alpha\sigma} - \delta\left\{{\alpha \atop \lambda\sigma}\right\}K^{\lambda}{}_{\rho\alpha} + \delta\left\{{\alpha \atop \sigma\rho}\right\}K_{\alpha}\right)\\
&= \sqrt{-\gamma}\,h^{\rho\sigma}\left(\frac{1}{2}\,\gamma^{\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu;\alpha}K^{\alpha}{}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\nu}(\delta\gamma_{\nu\lambda;\rho} + \delta\gamma_{\rho\nu;\lambda} - \delta\gamma_{\lambda\rho;\nu})K^{\lambda}{}_{\alpha\sigma} -\right.\\
&\quad\left. -\frac{1}{2}\gamma^{\alpha\nu}(\delta\gamma_{\nu\lambda;\sigma} + \delta\gamma_{\sigma\nu;\lambda} - \delta\gamma_{\lambda\sigma;\nu})K^{\lambda}{}_{\rho\alpha} + \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\nu}(\delta\gamma_{\nu\sigma;\rho} + \delta\gamma_{\rho\nu;\sigma} - \delta\gamma_{\sigma\rho;\nu})K_{\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{\mu\nu}h^{\rho\sigma}K^{\alpha}{}_{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\nu}h^{\alpha\sigma}K^{\mu}{}_{\rho\sigma} - \gamma^{\lambda\nu}h^{\mu\sigma}K^{\alpha}{}_{\lambda\sigma} + \gamma^{\rho\alpha}h^{\nu\sigma}K^{\mu}{}_{\rho\sigma} - \gamma^{\sigma\nu}h^{\rho\alpha}K^{\mu}{}_{\rho\sigma}\\
&\quad -\gamma^{\lambda\nu}h^{\rho\mu}K^{\alpha}{}_{\rho\lambda} + \gamma^{\sigma\alpha}h^{\rho\nu}K^{\mu}{}_{\rho\sigma} + \gamma^{\rho\nu}h^{\alpha\mu}K_{\rho} + \gamma^{\sigma\nu}h^{\mu\alpha}K_{\sigma} - \gamma^{\rho\alpha}h^{\nu\mu}K_{\rho})\,\delta\gamma_{\mu\nu;\alpha}\\
&= -\sqrt{-\gamma}\,Q^{\alpha\mu\nu}\delta\gamma_{\mu\nu;\alpha}\\
&= \sqrt{-\gamma}\,Q^{\alpha\mu\nu}{}_{;\alpha}\delta\gamma_{\mu\nu} - (\sqrt{-\gamma}\,Q^{\alpha\mu\nu}\delta_{\mu\nu})_{,\alpha}\,,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos as expressões (B.6) e (B.7) do apêndice B e a definição contida em (2.20). Debitando a divergência total e observando que

$$
Q^{\alpha\mu\nu}{}_{;\alpha}\,\delta\gamma_{\mu\nu} + Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}\,\delta\gamma^{\mu\nu} = 0,
$$

obtemos finalmente

$$
h^{\rho\sigma}\frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu\nu}}(K^{\lambda}{}_{\rho\sigma;\lambda} - K_{\rho;\sigma}) = -Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}\,.
$$

As expressões (2.6), (2.7), (2.9), (2.10) e (2.15) do capítulo anterior, juntamente com a expressão acima e a regra da cadeia para a derivada lagrangeana (apêndice A), permitem computar a derivada lagrangeana da densidade $\mathcal{L}$ expressa em (2.11) com respeito ao tensor métrico do espaço-tempo de fundo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\gamma^{\mu\nu}} &= \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big(-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Big((KK)^{\alpha}{}_{\alpha}+h^{\alpha\beta}\Big(\frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}_{\alpha\beta}+\frac{8\pi G_d}{c^3}\Big(t_{\alpha\beta}-\frac{1}{d-1}\ t\,\overline{g}_{\alpha\beta}\Big)\Big)\Big)\\
&\quad+(KK)_{\mu\nu}-\frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}\,h_{\mu\nu}-Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}-\frac{2\Lambda}{d-1}\Big(\overline{g}_{\mu\nu}-\frac{d+1}{2}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{\mu\nu}\Big)\Big)\\
&\quad-\frac{1}{2}t_{\alpha\beta}\Big(\frac{1}{d-1}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}g^{\alpha\beta}\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{d-1}g^{\alpha\beta}\overline{g}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\delta^{(\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta)}{}_{\nu}\Big)=\\
&= \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big((KK)_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}_{\alpha}-Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}-\frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}h_{\mu\nu}\\
&\quad-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Big(\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}g^{\alpha\beta}-\gamma^{\alpha\beta}\Big)\Big(\frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}^{\alpha\beta}+\frac{8\pi G_d}{c^3}\Big(t_{\alpha\beta}-\frac{1}{d-1}\ t\,\overline{g}_{\alpha\beta}\Big)\Big)\\
&\quad-\frac{2\Lambda}{d-1}\Big(\overline{g}_{\mu\nu}-\frac{d+1}{2}\ \frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{\mu\nu}\Big)\Big)-\frac{1}{2(d-1)}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}t\,\gamma_{\mu\nu}+\frac{1}{2(d-1)}t\,\overline{g}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}t_{\mu\nu}\\
&= \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big((KK)_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}_{\alpha}-Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}-\frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}h_{\mu\nu}\\
&\quad-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Big(\frac{2\Lambda(d+1)}{d-1}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}+\frac{8\pi G_d}{c^3}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}\Big(t-\frac{d+1}{d-1}t\Big)-\frac{2\Lambda}{d-1}\overline{g}^{\alpha}{}_{\alpha}\\
&\quad-\frac{8\pi G_d}{c^3}\Big(t^{\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{d-1}t\,\overline{g}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big)-\frac{2\Lambda}{d-1}\Big(\overline{g}_{\mu\nu}-\frac{d+1}{2}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}\gamma_{\mu\nu}\Big)\Big)\\
&\quad-\frac{1}{2(d-1)}\frac{\sqrt{-\overline{g}}}{\sqrt{-\gamma}}t\,\gamma_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\Big(t_{\mu\nu}-\frac{1}{d-1}\ t\,\overline{g}_{\mu\nu}\Big)\\
&= \frac{c^3}{16\pi G_d}\Big((KK)_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}_{\alpha}-Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}-\frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}h_{\mu\nu}-\frac{\Lambda}{d-1}\Big(2\overline{g}_{\mu\nu}-\gamma_{\mu\nu}\overline{g}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big)\\
&\quad-\frac{1}{2}\Big(t_{\mu\nu}-\frac{1}{d-1}\ t\,\overline{g}_{\mu\nu}\Big)+\frac{1}{4}\gamma_{\mu\nu}\Big(t^{\alpha}_{\alpha}-\frac{1}{d-1}\ t\,\overline{g}^{\alpha}_{\alpha}\Big).
\end{aligned}$$

Logo, tendo em vista a definição contida em (3.1), o tensor momento-energia gravitacional é dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{T}_{\mu\nu} &= \frac{c^3}{8\pi G_d}\Big(-(KK)_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\,(KK)^{\alpha}{}_{\alpha}+Q_{\alpha\mu\nu}{}^{;\alpha}+\frac{2\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}h_{\mu\nu}+\frac{\Lambda}{d-1}\,\Big(2\overline{g}_{\mu\nu}-\gamma_{\mu\nu}\overline{g}^{\alpha}_{\alpha}\Big)\Big)\\
&\quad+t_{\mu\nu}-\frac{1}{d-1}t\,\overline{g}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\Big(t^{\alpha}{}_{\alpha}-\frac{1}{d-1}t\,\overline{g}^{\alpha}{}_{\alpha}\Big),
\end{aligned}\tag{3.3}$$

a qual, juntamente com (2.19) do capítulo anterior, permite escrever

$$\frac{16\pi G_d}{c^3}T_{\mu\nu}=h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha}-h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha}-h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha}+\gamma_{\mu\nu}h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma}+\frac{4\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1}h_{\mu\nu}\ ,\tag{3.4}$$

onde redefinimos o tensor momento-energia gravitacional de acordo com a relação

$$T_{\mu\nu} = \overset{\circ}{T}_{\mu\nu} + \frac{\overset{\circ}{\Lambda}\, c^3}{8\pi G_d}\gamma_{\mu\nu}. \tag{3.5}$$

O caráter Riemanniano da geometria de fundo e as espressões (3.2) e (3.5) acarretam conjuntamente a condição de divergência covariante "on shell" nula para o tensor $T_{\mu\nu}$, isto é:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \tag{3.6}$$

Todavia, é instrutivo reobter esta condição dinâmica diretamente a partir de (3.4). Este é o conteúdo da

afirmação(i): Se o tensor de Ricci da geometria de Riemann caracterizada pelo tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$ verifica a condição (2.10) e $h_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, então

$$(h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha} + \gamma_{\mu\nu} h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma} + \frac{4\,\overset{\circ}{\Lambda}}{d-1} h_{\mu\nu})^{;\nu} = 0. \tag{3.7}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
& (h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha} - h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha} + \gamma_{\mu\nu} h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma})^{;\nu} \\
= \;& h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;\alpha;\nu} - h_{\alpha\mu;\nu}{}^{;\alpha;\nu} - h_{\alpha\nu;\mu}{}^{;\alpha;\nu} + h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;\sigma;\mu} = h_{\mu\nu;\alpha}{}^{;[\alpha;\nu]} + h^{\sigma\rho}{}_{;\rho;[\sigma;\mu]} + h^{\sigma\rho}{}_{;[\rho;\mu];\sigma} \\
= \;& \overset{0}{R}_{\mu}{}^{\sigma\nu\alpha} h_{\sigma\nu;\alpha} + \overset{0}{R}_{\nu}{}^{\sigma\nu\alpha} h_{\mu\sigma;\alpha} + \overset{0}{R}_{\alpha}{}^{\sigma\nu\alpha} h_{\mu\nu;\sigma} + \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\mu\sigma} h^{\alpha\rho}{}_{;\rho} + (\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\mu\rho} h^{\alpha\rho} + \overset{0}{R}{}^{\rho}{}_{\alpha\mu\rho} h^{\sigma\alpha})_{;\sigma} \\
= \;& \overset{0}{R}_{\mu}{}^{\sigma\nu\alpha} h_{\sigma\nu;\alpha} + \overset{0}{R}{}^{\sigma\alpha} h_{\mu[\sigma;\alpha]} - \overset{0}{R}_{\alpha\mu} h^{\alpha\rho}{}_{;\rho} + \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\mu\rho;\sigma} h^{\alpha\rho} + \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\mu\rho} h^{\alpha\rho}{}_{;\sigma} - (\overset{0}{R}_{\alpha\mu} h^{\sigma\alpha})_{;\sigma} \\
= \;& (\overset{0}{R}_{\mu\alpha\rho}{}^{\sigma} + \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\mu\rho}) h^{\alpha\rho}{}_{;\sigma} + \overset{0}{R}{}^{\sigma\alpha} h_{\mu[\sigma;\alpha]} - \overset{0}{R}_{\alpha\mu} h^{\alpha\rho}{}_{;\rho} - (\overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\mu;\rho} + \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\alpha\rho\sigma;\mu}) h^{\alpha\rho} - (\overset{0}{R}_{\alpha\mu} h^{\sigma\alpha})_{;\sigma} \\
= \;& \overset{0}{R}{}^{\sigma}{}_{\mu\alpha\rho} h^{\alpha\rho}{}_{;\sigma} + \overset{0}{R}{}^{\sigma\alpha} h_{\mu[\sigma;\alpha]} + \overset{0}{R}_{\alpha\rho;\mu} h^{\alpha\rho} - 2(\overset{0}{R}_{\alpha\mu} h^{\alpha\rho})_{;\rho} \\
= \;& -\frac{4\,\overset{0}{\Lambda}}{d-1} h_{\mu\nu}{}^{;\nu},
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas todas as simetrias do tensor de Riemann, as identidades de Bianchi e a condição no tensor de Ricci.

A divergência covariante identicamente nula expressa em (3.7) confere à (3.4), em relação ao formalismo de teoria de campo, um caráter dinâmico análogo àquele existente entre as equações de Einstein (2.16) e o formalismo geométrico usual da Relatividade Geral, no qual a condição dinâmica no tensor momento-energia da matéria

$$t_{\mu\nu}{}^{//\nu} = 0$$

é decorrência da identidade no tensor de Einstein

$$\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overline{g}_{\mu\nu}R\right)^{//\nu} = 0.$$

Com o propósito de atribuir significado físico para a redefinição do tensor momento-energia gravitacional contida em (3.5), e portanto eliminar a aparente arbitrariedade desta, vamos considerar a

afirmação (ii): São equivalentes as seguintes afirmações a respeito do espaço de soluções do problema variacional caracterizado pela densidade Lagrangeana definida em (2.11) do capítulo anterior:

(a) Os campos de matéria ϕ^A admitem um estado $\overset{0}{\phi}{}^A$ tal que

$$(h^{\mu\nu} = 0 \ , \ K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = 0 \ , \ \phi^A = \overset{0}{\phi}{}^A) \tag{3.8}$$

é solução das equações de Euler-Lagrange.

(b) Os campos de matéria ϕ^A admitem um estado $\overset{\circ}{\phi}{}^A$ tal que

$$\frac{\delta \mathcal{L}^m}{\delta \phi^B}(g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} \ , \ \phi^A = \overset{\circ}{\phi}{}^A) = 0$$

e

$$t_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} \ , \ \phi^A = \overset{0}{\phi}{}^A) = \frac{(\Lambda - \overset{\circ}{\Lambda})\, c^3}{8\pi G_d} \gamma_{\mu\nu}.$$

(c) A geometria de Riemann caracterizada pelo tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$ e pela condição (2.10) do capítulo anterior é solução das equações de Einstein com constante cosmológica e fontes materiais expressa em (2.16) do capítulo anterior.

O estado $\overset{0}{\phi}{}^A$ dos campos de matéria considerado acima pode ser interpretado como o estado de vácuo da teoria.

Demonstração: Basta ter em conta as equações dinâmicas (2.12) e (2.14), as versões geométricas (2.15) e (2.16), e a relação (2.1), todas do capítulo anterior.

Apesar de não ser essencial, é razoável e proveitoso presumir a validade de qualquer uma das condições da afirmação anterior, na medida em que

(1º) concede realização física à configuração de campo

$$h^{\mu\nu} = 0 \, ;$$

(2º) torna oportuna e transparente a redefinição do tensor momento-energia gravitacional contida em (3.5), uma vez que, em decorrência de (3.4), a condição

$$T_{\mu\nu}(h^{\rho\sigma} = 0) = 0$$

adquire caráter dinâmico e realização física;

(3º) faz da solução expressa em (3.8) uma referência fisicamente natural e matematicamente adequada para a computação de soluções aproximadas das equações de campo.

Como o tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ é um verdadeiro tensor, é natural que ele não possua as ambiguidades presentes nas definições usuais dos pseudo-tensores em RG. No entanto, a RG no contexto da teoria de campo apresenta uma invariância sob verdadeiras transformações de calibre, provenientes da invariância da RG sob a ação do grupo de mapeamento da variedade. O tensor $T_{\mu\nu}$, definido acima, não é uma quantidade invariante de calibre, como veremos agora.

A invariância por transformações de coordenadas da RG corresponde à invariância sob transformações de calibre em $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ na teoria de campo. Considere a transformação infinitesimal de coordenadas $x'^{\alpha} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x)$, a qual muda a forma funcional de

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}$$

como

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \pounds^{(1)}_{\xi}\tilde{g}^{\mu\nu}(x), \tag{3.9}$$

onde a derivada de Lie $\pounds^{(1)}_{\xi}\tilde{g}^{\mu\nu}$ é dada por

$$\pounds^{(1)}_{\xi}\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = -\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\lambda}\xi^{\lambda} + \tilde{g}^{\lambda\mu}\xi^{\nu}_{,\lambda} + \tilde{g}^{\lambda\nu}\xi^{\mu}_{,\lambda} - \tilde{g}^{\mu\nu}\xi^{\sigma}_{,\sigma}. \tag{3.10}$$

No caso de uma transformação finita, a variação em $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é dada por

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_{\xi}\tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

onde $\pounds^{(k)}_{\xi}$ é a derivada de Lie de ordem k definida como

$$\pounds^{(k)}_{\xi} = \pounds^{(1)}_{\xi}[\pounds^{(k-1)}_{\xi}]. \tag{3.12}$$

Substituindo em (3.11) a definição

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}\ ,$$

onde

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\;\gamma^{\mu\nu}$$

e

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\; h^{\mu\nu}\ ,$$

obtemos

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}). \tag{3.13}$$

A densidade métrica transformada pode ser decomposta em duas maneiras distintas:

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{h}'^{\mu\nu}(x) \tag{3.14}$$

e

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{*\mu\nu}(x) + \tilde{h}^{*\mu\nu}(x), \tag{3.15}$$

onde, por comparação com (3.13), obtem-se

$$\tilde{h}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}), \tag{3.16}$$

$$\tilde{h}^{*\mu\nu}(x) = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} \tilde{h}^{\mu\nu}, \tag{3.17}$$

e

$$\tilde{\gamma}^{*\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} \tilde{\gamma}^{\mu\nu}. \tag{3.18}$$

Analogamente, a transformação de calibre correspondente à Eq. (3.16) para o campo $K^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$ é

$$K'^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = K^{\alpha}_{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} (C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}), \tag{3.19}$$

enquanto que para o caso correspondente à transformação (3.17) se escreve

$$K^{*\alpha}_{\mu\nu}(x) = K^{\alpha}_{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} K^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{3.20}$$

As equações (3.17), (3.18) e (3.20) representam as transformações usuais nos campos tensoriais, resultado do mapeamento geral da variedade na qual eles estão definidos. Assim, todos os tensores na variedade, em particular o tensor momento-energia definido acima, se transformarão do modo usual:

$$T'^{\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds_{\xi}^{(k)} T^{\mu\nu}(x) \tag{3.21}$$

A situação é completamente diferente para o caso das equações (3.16) e (3.19). Aquelas transformações atuam somente nos campos $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$, deixando a métrica de fundo, $\gamma^{\mu\nu}(x)$, invariante. Neste sentido, pode-se interpretá-las como verdadeiras transformações de calibre. É possível mostrar que, sob as transformações (3.16) e (3.19), as equações dinâmicas para o campo gravitacional se transformam em combinações lineares delas próprias, supondo que o espaço de fundo verifique $\mathring{R}_{\mu\nu} = 2\,\mathring{\Lambda}\,\gamma_{\mu\nu}/(d-1)$. O novo campo $\tilde{h}'^{\mu\nu}(x)$ é também uma solução das equações de campo, e ele corresponde ao mesmo campo físico que $\tilde{h}^{\mu\nu}(x)$. Nesse caso, os tensores não se transformam do modo usual (3.21), mas contêm termos não-homogêneos, o que possibilita seus cancelamentos. Nesse caso, o tensor momento-energia, por exemplo, se transforma de acordo com:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(h', K') &= T_{\mu\nu}(h, K) + \frac{c^3}{16\pi G_d}\Bigg\{2\hat{G}^L_{\mu\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds_{\xi}^{(k)}(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})\right] \\ &\quad + \gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{4\,\mathring{\Lambda}}{(d-1)\sqrt{-\gamma}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds_{\xi}^{(k)}(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde $\hat{G}^L_{\mu\nu}$ é o operador que, ao atuar em $h^{\rho\sigma}$, resulta na expressão

$$\hat{G}^L_{\mu\nu}(h^{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}\,\left(\gamma_{\mu\nu}h^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\nu}h^{\beta}_{\mu}\right)_{;\alpha;\beta}.$$

Portanto, é sempre possível achar transformações de calibre (3.16) e (3.19) que anulem o tensor momento-energia previamente definido. Isto é o análogo no contexto da teoria de campo ao que ocorre com os pseudo-tensores em RG. Note que o novo tensor momento-energia na eq. (3.22) é também covariantemente conservado devido às propriedades de $\hat{G}^L_{\mu\nu}$.

Capítulo 4

Correntes Gravitacionais, a Integral Exterior e o Método Computacional

Campos de Killing são geradores de isometrias infinitesimais, as quais quando integradas constituem um fluxo a um parâmetro de isometrias finitas. Do ponto de vista geométrico, e em acordo com o formalismo de teoria de campo que apresentamos, este fluxo pode ser entendido como um movimento de simetria da métrica de fundo. Seria de se esperar que tal cenário desse origem a quantidades conservadas e é nossa tarefa nesta seção confirmar esta expectativa.

Nesta direção, definimos a corrente gravitacional J^μ associada ao campo de Killing ξ^ν via a relação

$$J^\mu = T^{\mu\nu}\xi_\nu$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia gravitacional definido pelas expressões (3.1) e (3.5) do capítulo anterior. Utilizando a relação dinâmica contida em (3.4) podemos escrever

$$\frac{16\pi G_d}{c^3} J^\mu = \left(h^{\mu\nu;\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\mu;\nu}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{;\beta;\alpha} + \frac{4\overset{0}{\Lambda}}{d-1} h^{\mu\nu}\right)\xi_\nu \ , \tag{4.1}$$

de tal modo que as relações (B.9) do apêndice B e (3.7) do capítulo anterior acarretam conjuntamente a condição de divergência covariante "on shell" nula para a corrente gravitacional, isto é:

$$J^{\mu}{}_{;\mu} = 0 \ . \tag{4.2}$$

Definindo a d-forma exterior J pela expressão

$$J = \sqrt{-\gamma} J^{\mu} \Sigma_{\mu} \ , \tag{4.3}$$

a sua derivada exterior é a $(d+1)$-forma

$$dJ = (\sqrt{-\gamma} J^{\mu})_{,\mu} \Sigma \ ,$$

o que juntamente com (4.2) e a identidade

$$\left(\sqrt{-\gamma} J^{\mu}\right)_{,\mu} = \sqrt{-\gamma} J^{\mu}{}_{;\mu}$$

implica a relação dinâmica

$$dJ = 0 \ , \tag{4.4}$$

isto é, J é uma d-forma exterior fechada "on shell". Como conseqüência do lema de Poincaré podemos assegurar a existência local de uma $(d-1)$-forma Ω cuja derivada exterior cumpre a condição $d\Omega = J$, isto é, J é localmente exata. De fato, podemos mostrar que esta condição se cumpre globalmente, o que significa afirmar que a d-forma exterior J é globalmente exata. Este é, em essência, o conteúdo daquele que consideramos o resultado matemático central deste trabalho, o qual pode ser apreciado no

teorema da integral exterior: Se a d-forma exterior J é definida pelas expressões (4.1) e (4.3) e ξ_{ν} é uma forma de Killing com respeito à geometria de fundo, então a $(d-1)$-forma exterior

$$\Omega = \sqrt{-\gamma} \Omega^{\mu\alpha} \Sigma_{\mu\alpha} \ , \tag{4.5}$$

definida pelo tensor anti-simétrico

$$\Omega^{\mu\alpha} = \frac{c^3}{32\pi G_d}\left(h^{\nu[\mu;\alpha]}\xi_\nu + h^{\nu[\alpha}{}_{;\nu}\xi^{\mu]} + h^{\nu[\mu}\xi^{\alpha]}{}_{;\nu}\right) \;, \tag{4.6}$$

verifica a condição dinâmica

$$d\Omega = J \;, \tag{4.7}$$

ou equivalentemente

$$2\Omega^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} = J^\mu \;. \tag{4.8}$$

Demonstração: tomando a divergência covariante nos dois lados de (4.6) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{32\pi G_d}{c^3}\Omega^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} &= \left(h^{\mu\nu;\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}{}_{;\alpha}\right)\xi_\nu + \left(h^{\mu\nu;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}\right)\xi_{\nu;\alpha} + h^{\nu\alpha}{}_{;\nu;\alpha}\xi^\mu + h^{\nu\alpha}{}_{;\nu}\xi^\mu{}_{;\alpha} - h^{\nu\mu}{}_{;\nu;\alpha}\xi^\alpha \\
&\quad - h^{\nu\mu}{}_{;\nu}\xi^\alpha{}_{;\alpha} + h^{\mu\nu}{}_{;\alpha}\xi^\alpha{}_{;\nu} + h^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{;\nu;\alpha} - h^{\alpha\nu}{}_{;\alpha}\xi^\mu{}_{;\nu} - h^{\alpha\nu}\xi^\mu{}_{;\nu;\alpha} \\
&= \left(h^{\mu\nu;\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\mu;\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu}h^{\beta\alpha}{}_{;\beta;\alpha}\right)\xi_\nu + h^{\alpha\mu}{}_{;[\nu;\alpha]}\xi^\nu + h^{\mu\nu}\xi^\alpha{}_{;\nu;\alpha} - h^{\alpha\nu}\xi^\mu{}_{;\nu;\alpha} \\
&= \left(h^{\mu\nu;\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\mu;\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu}h^{\beta\alpha}{}_{;\beta;\alpha}\right)\xi_\nu + \left(\overset{0}{R}{}^\alpha{}_{\sigma\alpha\nu}h^{\sigma\mu} + \overset{0}{R}{}^\mu{}_{\sigma\alpha\nu}h^{\alpha\sigma}\right)\xi^\nu - \\
&\quad - h^{\mu\nu}\overset{0}{R}{}^\alpha{}_{\nu\sigma\alpha}\xi^\sigma + h^{\alpha\nu}\overset{0}{R}{}^\mu{}_{\nu\sigma\alpha}\xi^\sigma \\
&= \left(h^{\mu\nu;\alpha}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\nu;\mu}{}_{;\alpha} - h^{\alpha\mu;\nu}{}_{;\alpha} + \gamma^{\mu\nu}h^{\beta\alpha}{}_{;\beta;\alpha}\right)\xi_\nu + 2\overset{0}{R}_{\sigma\nu}h^{\sigma\mu}\xi^\nu + \left(\overset{0}{R}{}^\mu{}_{\sigma\alpha\nu} + \overset{0}{R}{}^\mu{}_{\sigma\nu\alpha}\right)h^{\alpha\sigma}\xi^\nu \\
&= \frac{16\pi G_d}{c^3}J^\mu \;,
\end{aligned}$$

onde foram utilizadas as expressões (B.9), (B.10) e (B.11) do apêndice B para a forma de Killing, a expressão "on shell" para a corrente gravitacional contida em (4.1) e a expressão (2.10) para o tensor de Ricci da geometria de fundo. Para confirmar a condição na derivada exterior expressa em (4.7) basta ter em conta a definição contida em (4.5) e escrever

$$
\begin{aligned}
d\Omega &= d(\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha}\Sigma_{\mu\alpha}) \\
&= (\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha})_{,\rho}\; dx^\rho \wedge \Sigma_{\mu\alpha} \\
&= (\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha})_{,\rho}\delta^{\rho}{}_{[\alpha}\Sigma_{\mu]} \\
&= (\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha})_{,[\alpha}\Sigma_{\mu]} \\
&= 2(\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha})_{,\alpha}\Sigma_{\mu} \\
&= 2\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha}{}_{;\alpha}\Sigma_{\mu} \\
&= \sqrt{-\gamma}\;J^{\mu}\Sigma_{\mu} \\
&= J\,,
\end{aligned}
$$

onde utilizamos essencialmente a definição de derivada exterior, a identidade

$$
dx^\rho \wedge \Sigma_{\mu\alpha} = \delta^{\rho}{}_{[\alpha}\Sigma_{\mu]}\,,
$$

a definição da d-forma exterior J contida em (4.3), a condição dinâmica expressa em (4.8) e a identidade

$$
\left(\sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha}\right)_{,\alpha} = \sqrt{-\gamma}\;\Omega^{\mu\alpha}{}_{;\alpha}\,,
$$

a qual é válida tendo em vista a anti-simetria do tensor $\Omega^{\mu\alpha}$.

A disponibilidade da $(d-1)$-forma exterior Ω verificando a condição dinâmica expressa em (4.7), o uso apropriado do teorema de Stokes e a ocorrência de propriedades de regularidade global e de condições assintóticas adequadas permitem conjuntamente realizar as expectativas delineadas no início desta seção, a saber, a obtenção de quantidades conservadas com conteúdo físico. A argumentação a seguir produz um método computacional cujos resultados suportam esta afirmação.

Sejam M um volume $(d+1)$-dimensional compacto e ∂M sua fronteira de classe C^∞ constituída de três hiperfícies conexas d-dimensionais, B_1 e B_2 do tipo espaço, e D do tipo tempo. Podemos guardar estas informações escrevendo

$$\partial M = B_1 \cup B_2 \cup D \ . \tag{4.9}$$

Apesar de não ser essencial, mas motivados pelo fato de estudarmos oportunamente espaços assintoticamente AdS em dimensão "3 + 1", os quais têm no setor espacial uma subvariedade bidimensional com a topologia da esfera S^2, é conveniente ter presente o sistema de coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). Deste modo o volume quadridimensional M e suas fronteiras tridimensionais B_1, B_2 e D poderiam ser caracterizadas tipicamente por

$$\begin{aligned}
M &= \{(t,r,\theta,\phi) \ ; \ t_1 \leq t \leq t_2 \ , \ 0 \leq r \leq r_0 \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ , \ 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \ , \\
B_{1,2} &= \{(t,r,\theta,\phi) \ ; \ t = t_{1,2} \ , \ 0 \leq r \leq r_0 \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ , \ 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \ , \\
D &= \{(t,r,\theta,\phi) \ ; \ t_1 \leq t \leq t_2 \ , \ r = r_0 \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi \ , \ 0 \leq \phi \leq 2\pi\} \ .
\end{aligned}$$

Apelando para a intuição geométrica em três dimensões tais variedades podem ser descritas pelas "igualdades"

M = esfera sólida de raio r_0 "durante" o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$,

$B_{1,2}$ = esfera sólida de raio r_0 no instante $t_{1,2}$,

D = superfície esférica de raio r_0 "durante" o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.

O teorema de Stokes e a expressão (4.4) permitem escrever

$$\int_{\partial M} J = \int_M dJ = 0 \ , \tag{4.10}$$

o que juntamente com (4.9) acarreta

$$\int_{B_2} J - \int_{B_1} J + \int_D J = 0 \ , \tag{4.11}$$

onde orientamos ∂M através da normal exterior. A $3^{\underline{a}}$ parcela em (4.11) contabiliza o fluxo da corrente gravitacional através da superfície esférica de raio r_0 durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Importa salientar que a regularidade do potencial gravitacional em suas derivadas até $3^{\underline{a}}$ ordem, no volume quadridimensional M, é condição necessária para a implementação do teorema de Stokes contida em (4.10). Supondo que o potencial gravitacional e o campo de Killing se comportem assintoticamente ao longo da coordenada radial r de tal modo que o termo de radiação cumpra a condição

$$\lim_{r_0 \to \infty} \int_{D(r_0)} J = 0 \ , \tag{4.12}$$

podemos tomar limites ($r_0 \to \infty$) nos dois lados de (4.11) e concluir que

$$\int_{t=t_2} J = \int_{t=t_1} J \ .$$

Dito de outro modo, a integral da corrente gravitacional J ao longo de uma seção espacial global associa a cada campo de Killing ξ uma quantidade conservada Q dada por

$$Q = \int_{t=t_0} J(\xi) \ , \tag{4.13}$$

onde t_0 é um instante de tempo arbitrário. Se o campo de Killing é do tipo tempo ou associado a alguma simetria rotacional as respectivas quantidades conservadas são a energia total e o momento angular total. É necessário enfatizar que a condição assintótica contida em (4.12) é essencial para a obtenção da quantidade conservada expressa em (4.13). Além disso, essa condição caracteriza os sistemas não radiantes e se verifica nos exemplos computados logo em seguida.

Podemos reescrever (4.13) através da integral imprópria de Riemann

$$Q = \lim_{r \to \infty} \int_{B(r)} J \ , \tag{4.14}$$

onde $B(r)$ é a esfera sólida de raio r no instante arbitrário $t = t_0$. Utilizando uma vez mais o teorema de Stokes e tendo em vista a relação dinâmica entre as formas exteriores J e Ω expressa em (4.7), podemos escrever a igualdade

$$\int_{B(r)} J = \int_{S(r)} \Omega \ , \tag{4.15}$$

a qual contabiliza a parcela da quantidade conservada Q contida no interior da superfície esférica de raio r no instante arbitrário $t = t_0$, aqui denotada por $S(r)$. A observação conjunta de (4.14) e (4.15) implica a expressão limite

$$Q = \lim_{r \to \infty} \int_{S(r)} \Omega \ . \tag{4.16}$$

Trocando a ordem das operações de passagem ao limite e de integração e tendo em conta a definição contida em (4.5), (4.16) pode ser reescrita como a expressão assintótica

$$Q = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{-\gamma}\ \Omega^{tr}(t = t_0, r = \infty, \theta, \phi) d\theta d\phi \ . \tag{4.17}$$

Em linguagem geométrica esta expressão afirma que a quantidade conservada Q pode ser calculada pela integração da forma exterior Ω na superfície esférica no infinito. É necessário enfatizar uma vez mais que estamos supondo tacitamente que o potencial gravitacional e o campo de Killing se comportam assintoticamente ao longo da coordenada radial r, de tal modo a conferir um valor finito e bem definido aos limites contidos em (4.16) e em (4.17). Somente neste caso adquire conteúdo geométrico e físico a denominação de superfície esférica no infinito. Verificada esta condição, o cáculo da quantidade conservada Q pode ser efetuado indistintamente via as expressões (4.16) ou (4.17), e requer tão somente o conhecimento do comportamento assintótico do campo gravitacional e da forma de Killing, não importando de modo algum seus comportamentos locais em regiões limitadas do espaço-tempo.

Este fato abre a possibilidade de calcularmos quantidades conservadas para inúmeros exemplos de campos gravitacionais gerados por sistemas compactos, mesmo não conhecendo com detalhe seu comportamento local, desde que se saiba com exatidão seu comportamento assintótico. Um outra consequência do fato de podermos escrever estas quantidades conservadas como integrais de superfície no infinito é que elas serão invariantes por quaisquer transformações de calibre que preservem a estrutura assintótica dos campos, ou seja, que se reduzam à identidade no infinito. Acreditamos que estas constatações guardam um duplo sentido: a um tempo corroboram os princípios do acoplamento mínimo e da equivalência na medida em que desautorizam à geometria de fundo qualquer significado físico local. Por outro lado, sugerem que a condição assintótica encerra algum conteúdo físico não-local para a geometria de fundo e, consequentemente, para o campo gravitacional. Os exemplos a seguir justificam esta interpretação e clarificam a necessidade de uma escolha criteriosa para a geometria de fundo.

Capítulo 5

Quantidades Conservadas em Espaços Assintoticamente Anti-de-Sitter

Com o objetivo de organizar e facilitar a exposição vamos apresentar as seguintes geometrias de Riemann em dimensão "3+1" através de seus respectivos elementos de linha, expressos em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) por:

Anti-de-Sitter (AdS)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{\overset{0}{R}{}^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{\overset{0}{R}{}^2}} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \ , \tag{5.1}$$

Schwarzschild-Anti-de-Sitter (SchAdS)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2G_3 m}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2G_3 m}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \ , \tag{5.2}$$

Reissner-Nordström-Anti-de-Sitter (RNAdS)

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2G_3 m}{c^2 r} + \frac{q^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2G_3 m}{c^2 r} + \frac{q^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2) \ , \tag{5.3}$$

onde o parâmetro $\overset{0}{R}$ tem a dimensão de comprimento e representa o raio de curvatura da geometria AdS, a qual verifica a condição no tensor de Ricci expressa em (2.10) com

$$\overset{0}{\Lambda} = -\frac{3}{\overset{0}{R}{}^2}\,, \tag{5.4}$$

e portanto, em decorrência do formalismo desenvolvido, pode ser utilizada como geometria de fundo. A geometria SchAdS é solução das equações de Einstein "no vazio" e a geometria RNAdS é solução das equações de Einstein-Maxwell, ambas com a presença de uma constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{3}{R^2}\,. \tag{5.5}$$

Consideraremos, neste momento, $\overset{0}{R} = R$ ($\overset{0}{\Lambda} = \Lambda$), de tal forma que as métricas efetivas (SchAdS e RNAdS) tendam assintoticamente, ao longo da coordenada radial r, à métrica de fundo (AdS). Qualquer uma destas geometrias admite o campo de Killing tipo tempo

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t}\,,$$

o que sugere a existência de uma quantidade conservada com caráter de energia. De fato, a escolha de RNAdS e AdS como geometrias efetiva e de fundo respectivamente, o uso da relação (2.1) para a determinação do potencial gravitacional $h^{\mu\nu}$, da expressão (4.6) para o cálculo do tensor anti-simétrico $\Omega^{\mu\alpha}$ e o suporte computacional do **software Riemann** permitiram conjuntamente obter o valor

$$Q^{\mathrm{RNAdS/AdS}} = Q^{\mathrm{SchAdS/AdS}} = mc^2 \tag{5.6}$$

para a integral assintótica expressa em (4.17). Tomando o limite $R = \infty$ ($\Lambda = 0$) em (5.1), (5.2), (5.3), (5.5) e (5.6) obtemos respectivamente as geometrias de **Minkowski** (M), **Schwarzschild** (Sch), **Reissner-Nordström** (RN), uma constante cosmológica $\Lambda = 0$ e o valor

$$Q^{\mathrm{RN/M}} = Q^{\mathrm{Sch/M}} = mc^2$$

para a integral assintótica expressa em (4.17). Com a finalidade de completar o quadro computacional, informamos que a utilização do campo de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial\phi}$ gerou uma quantidade conservada identicamente nula em todos os casos já mencionados.

Com o propósito de evidenciar a sensibilidade do método com relação à questão da existência ou não de condições assintóticas adequadas vamos considerar SchAdS (ou AdS) e M como geometrias efetiva e de fundo respectivamente. Este é um caso onde $\overset{0}{\Lambda}=0$ ($\overset{0}{R} = \infty$) e $\Lambda \neq 0$ ($R < \infty$). Estas escolhas não parecem promissoras na medida em que, devido à parcela

$$r^2/R^2 \ ,$$

pode-se afirmar que as geometrias AdS e M não se "acomodam assintoticamente" ao longo da coordenada radial r. De fato, o uso da relação (2.1) para a determinação do potencial gravitacional $h^{\mu\nu}$, do campo de Killing tipo tempo já mencionado, da expressão (4.6) para o cálculo do tensor anti-simétrico $\Omega^{\mu\alpha}$ e o suporte computacional do **software Riemann** permitiram conjuntamente obter as divergências

$$Q^{\mathrm{SchAdS/M}} = \lim_{r\to\infty} \int_{S(r)} \Omega^{\mathrm{SchAdS/M}} = \infty$$

e

$$Q^{\mathrm{AdS/M}} = \lim_{r\to\infty} \int_{S(r)} \Omega^{\mathrm{AdS/M}} = \infty$$

para a expressão limite em (4.16). A tentativa de debitar a energia de AdS/M da energia de SchAdS/M com a finalidade de extrair uma energia renormalizada do tipo SchAdS/AdS tampouco é satisfatória, uma vez que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S(r)} \left(\Omega^{\mathrm{SchAdS/M}} - \Omega^{\mathrm{AdS/M}}\right) = \frac{1}{2} mc^2 \ ,$$

em desarcodo com (5.6). Note que o resultado da expressão acima independe de Λ e portanto seu limite para $\Lambda = 0$, que deveria corresponder a $Q^{\mathrm{Sch/M}}$, continua sendo $\frac{1}{2}\, mc^2$, em desacordo com o resultado obtido anteriormente: $Q^{\mathrm{Sch/M}} = mc^2$. Isto evidencia a inconsistência de se usar uma métrica de fundo que não corresponda ao limite assintótico da métrica efetiva. Deste modo, podemos concluir que a escolha da geometria de fundo não é de modo algum arbitrária, mas ditada essencialmente pela estrutura assintótica da geometria efetiva.

Os resultados obtidos até o momento autorizam a denominação de energia gravitacional à quantidade conservada obtida e confirmam provisoriamente a oportunidade e propriedade nas definições do tensor momento-energia gravitacional e da corrente gravitacional.

Vamos considerar agora o exemplo **Kerr-Anti-de-Sitter** (KAdS) e **Anti-de-Sitter** (AdS) como geometrias efetiva e de fundo respectivamente. O uso da relação (2.1) e a discriminação dos termos de menor grau na variável $1/r$ (inverso da coordenada radial) conferem as seguintes expressões assintóticas, em coordenadas esféricas, para as componentes do potencial gravitacional:

$$
\begin{aligned}
h^{tt} &= -\tfrac{2G_3 mR^4}{c^4 r^5}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-5/2} \\
h^{t\phi} &= -\tfrac{2aG_3 mR^2}{c^3 r^5}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-5/2} \\
h^{\phi\phi} &= -\tfrac{2G_3 ma^2}{c^2 r^5}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-5/2} \\
h^{rr} &= -\tfrac{2G_3 m}{c^2 r}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-3/2} \\
h^{r\theta} &= \tfrac{2G_3 ma^2}{c^2 r^4}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-5/2}\sin\theta\cos\theta \\
h^{\theta\theta} &= -\tfrac{2G_3 ma^4}{c^2 r^7}[1 - \tfrac{a^2}{R^2}\sin^2\theta]^{-7/2}\sin^2\theta\cos^2\theta \ ,
\end{aligned}
$$

onde a é um parâmetro com dimensão de comprimento, de tal modo que ac pode ser tomado como uma medida de momento angular por unidade de massa. Para o cálculo da energia gravitacional E basta observar o campo de Killing tipo tempo

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t}$$

no procedimento computacional descrito anteriormente, o qual permite obter o valor

$$E = \frac{mc^2}{(1 - a^2/R^2)^2}$$

para a quantidade conservada expressa pela integral assintótica em (4.17). De modo análogo, observando o campo de Killing

$$\xi = \frac{\partial}{\partial\phi} ,$$

gerador da simetria axial, é possível realizar o valor

$$L = \frac{mac}{(1 - a^2/R^2)^2}$$

para o momento angular gravitacional. Em particular, fixando a condição $a = 0$, reobtemos os valores corretos das quantidades conservadas correspondentes no caso SchAdS/AdS.

É oportuno observar que o limite plano $R = \infty$ nestas expressões produz, em relação ao cenário caracterizado por **Kerr** e **Minkowski** como geometrias efetiva e de fundo respectivamente, os valores esperados para a energia e o momento angular gravitacionais.

Com o propósito de apreciar a irrelevância dimensional no método desenvolvido, apresentamos a geometria de **Schwarzschild-Anti-de-Sitter** em dimensão "4 + 1" através de seu elemento de linha, expresso em coordenadas esféricas $(t, r, \xi, \theta, \phi)$ por

$$ds^2 = -\Big(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r^2}\Big)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{r^2}} + r^2(d\xi^2 + sen^2\xi(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)) ,$$

e informamos que a mesma é solução das equações de Einstein "no vazio", com constante cosmológica

$$\Lambda = -\frac{6}{R^2}$$

A condição $r_0 = 0$ no elemento de linha acima define a geometria de **Anti-de-Sitter** em dimensão "4 + 1". Tomando-a como geometria de fundo e o seu campo de Killing

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t}$$

como gerador da simetria temporal, e procedendo computacionalmente da forma usual, obtemos o valor

$$E = \frac{3\pi r_0^2 c^4}{8G_4}$$

para a energia gravitacional.

É importante observar que, em dimensão "4 + 1", Ω é uma 3-forma exterior, e portanto, a quantidade conservada E agora se escreve, em coordenadas esféricas $(t, r, \xi, \theta, \phi)$, como uma integral assintótica na tri-esfera no infinito:

$$E = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{-\gamma}\ \Omega^{tr}\,(t = t_0\ ,\ r = \infty\ ,\ \xi, \theta, \phi)\, d\xi d\theta d\phi\ .$$

O último exemplo que consideramos é denominado **limite do horizonte próximo da membrana *D3*** ; a geometria efetiva em dimensão "4 + 1" se escreve

$$ds^2 = -\frac{r^2}{R^2}\Big(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\Big)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{R^2}\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)} + \frac{r^2}{R^2}\left(dx^2 + dy^2 + dx^2\right)\ ,$$

e a geometria de fundo é definida pela condição $r_0 = 0$.

Tomando o campo de Killing

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

gerador da simetria temporal, e procedendo computacionalmente da maneira usual, obtemos para a energia gravitacional a expressão

$$E = \frac{3c^4 r_0^4}{16\pi G_4 R^5}\int\int\int dxdydz\ ,$$

a qual permite definir uma energia por unidade de volume para a membrana.

Todos os resultados obtidos nesta seção concordam com os valores encontrados através de outros métodos [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Conclusão

Neste trabalho, o formalismo de teoria de campo é generalizado [9]: o termo com constante cosmológica é introduzido na densidade lagrangeana, a condição Ricci plana para a geometria de fundo é relaxada para a condição mais geral característica dos espaços de Einstein, e a dimensão do espaço-tempo é tornada arbitrária. A equivalência dinâmica com o cenário geométrico da Relatividade Geral é estabelecida através da adequada identificação da geometria efetiva, a qual resulta ser solução das equações de Einstein com constante cosmológica e fontes materiais. A expressão para o tensor momento-energia gravitacional é obtida e a existência de campos de Killing com respeito à geometria de fundo permite definir as correntes gravitacionais. Estas resultam possuir divergência covariante "on shell" nula, o que é equivalente, na linguagem das formas diferenciais, a afirmar que a corrente gravitacional $\boldsymbol{J}$ é uma d-forma exterior fechada "on shell", isto é:

$$(d\boldsymbol{J})_{\text{“on shell”}} = \mathbf{0} \; ,$$

onde d é a dimensão do setor espacial. É neste ponto que acreditamos estar presente a contribuição matemática deste trabalho, a saber: a obtenção de uma integral exterior "on shell", $\boldsymbol{\Omega}$, para a corrente gravitacional $\boldsymbol{J}$, isto é:

$$(d\boldsymbol{\Omega})_{\text{“on shell”}} = \boldsymbol{J} \; .$$

A disponibilidade da $(d-1)$-forma exterior $\boldsymbol{\Omega}$ verificando a condição acima, juntamente com o teorema de Stokes, permitiu desenvolver um método computacional eficiente para o cálculo de quantidades conservadas em espaços assintoticamente anti-de-Sitter; este consiste essencialmente em expressar a quantidade conservada $\boldsymbol{Q}$ como uma integral assintótica na esfera $(d-1)$-dimensional $\boldsymbol{S}$ do infinito, isto é:

$$\boldsymbol{Q} = \int_{\boldsymbol{S}} \Omega_\infty \, .$$

Os valores para a energia e o momento angular obtidos através do método desenvolvido nesta tese concordam com os valores obtidos na literatura através de outros métodos [12, 13, 14, 15, 16, 17].

O método desenvolvido guarda uma diferença fundamental em relação aos métodos alternativos citados na literatura, pois descreve o campo gravitacional se propagando dinamicamente como um campo de spin dois em um espaço-tempo de fundo pré-fixado. Este cenário permite importar técnicas usuais de teorias de campo em espaços curvos para estudar problemas relacionados com a termodinâmica de buracos negros.

Apesar da dinâmica da geometria efetiva não depender da geometria de fundo, os valores das quantidas globais são fortemente afetados por sua escolha. Como evidenciado no texto, a ausência de critério na adoção de uma determinada geometria de fundo pode acarretar resultados inconsistentes. O fato da geometria efetiva possuir uma estrutura assintótica bem definida privilegia uma determinada estrutura geométrica para o espaço-tempo de fundo. Deste modo, a ambigüidade na escolha da geometria de fundo somente pode ser superada indo além das equações de movimento. É na consistência dos cálculos, os quais demandam condições assintóticas favoráveis aos potenciais gravitacionais e ao campo de Killing, que acreditamos residir a justa medida para uma criteriosa escolha da geometria de fundo. Neste sentido, a expressão da quantidade conservada $\boldsymbol{Q}$, como a integral assintótica da $(d-1)$-forma exterior

$\boldsymbol{\Omega}$, na esfera $(d-1)$-dimensional $\boldsymbol{S}$ no infinito, é reveladora. Suspeitamos que o cenário assintótico desenvolvido encerra algum conteúdo físico não-local para a geometria de fundo e, consequentemente, do mesmo modo, para o campo gravitacional.

Apêndice A

A Regra da Cadeia para a Derivada Lagrangena

De importância fundamental para o formalismo de teorias clássicas de campo é considerar a situação bastante comum na qual a descrição de um determinado sitema físico através de um conjunto de campos de variáveis dinâmicas $\{\phi^A\}$ é modificada para uma descrição em termos de um novo conjunto de variáveis dinâmicas $\{\Psi^I\}$. Esta alteração pode ser implementada através de uma relação de dependência funcional

$$\phi^A = \phi^A(\Psi^I), \tag{A.1}$$

a qual acarreta

$$\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^I} \frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu} \tag{A.2}$$

e

$$\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \Psi^J \partial \Psi^I} \frac{\partial \Psi^J}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^I} \frac{\partial^2 \Psi^I}{\partial x^\nu \partial x^\mu}. \tag{A.3}$$

As expressões (A.1), (A.2) e (A.3), permitem definir a nova função local

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{L}}(\psi^I)$$

em termos da função local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A)$$

através da relação

$$\tilde{\mathcal{L}}\left(x^\alpha,\, \Psi^I(x),\, \frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu}(x),\, \frac{\partial^2 \Psi^I}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(x)\right) = \mathcal{L}\left(x^\alpha,\, \phi^A(x),\, \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}(x)\, \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}(x)\right). \tag{A.4}$$

Como preparação para o importante resultado que vem logo a seguir, é útil destacar o seguinte

lema: As relações de dependência funcional fixadas em (A.1), (A.2), (A.3) implicam

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \Psi^L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A}\frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \Psi^L \partial \Psi^I}\frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu} + \\
&\quad + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right)}\left(\frac{\partial^3 \phi^A}{\partial \Psi^L \partial \Psi^J \partial \Psi^I}\frac{\partial \Psi^J}{\partial x^\nu}\frac{\partial \Psi^I}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \Psi^L \partial \Psi^I}\frac{\partial^2 \Psi^I}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right), && \text{(A.5)}\\
\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial \Psi^L}{\partial x^\mu}\right)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^L} + 2\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial \Psi^J \partial \Psi^L}\frac{\partial \Psi^J}{\partial x^\nu}, && \text{(A.6)}\\
\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial x^\nu \partial x^\mu}\right)}\frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^L}. && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

A demonstração é imediata e requer tão somente a adequada aplicação da regra da cadeia para derivadas parciais de funções de várias variáveis reais. Estamos, agora, de posse de todos os ingredientes necessários para enunciar e provar a

regra da cadeia para a derivada lagrangeana: Se valem as relações de dependência funcional definidas em (A.1) e (A.4) e a derivada lagrangeana é definida pela expressão (1.27), então

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}}{\delta \Psi^L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}\frac{\partial \phi^A}{\partial \Psi^L}. \tag{A.8}$$

Demonstração: As expressões (A.6) e (A.7) do lema implicam respectivamente:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial\Psi^L}{\partial x^\mu}\right)}\Bigg) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial\phi^A}{\partial\Psi^L} + 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\Psi^J\partial\Psi^L}\frac{\partial\Psi^J}{\partial x^\nu}\Bigg) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial\phi^A}{\partial\Psi^L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\Psi^I\partial\Psi^L}\frac{\partial\Psi^I}{\partial x^\mu} + 2\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\Psi^J\partial\Psi^L}\frac{\partial\Psi^J}{\partial x^\nu} + \\
&+2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^3\phi^A}{\partial\Psi^I\partial\Psi^J\partial\Psi^L}\frac{\partial\Psi^I}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Psi^J}{\partial x^\nu} + 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\Psi^J\partial\Psi^L}\frac{\partial^2\Psi^J}{\partial x^\mu\partial x^\nu}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial^2\psi^L}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial\phi^A}{\partial\psi^L}\Bigg) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\Bigg(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial\phi^A}{\partial\psi^L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\psi^I\partial\psi^L}\frac{\partial\psi^I}{\partial x^\mu}\Bigg) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial\phi^A}{\partial\psi^L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\psi^I\partial\psi^L}\frac{\partial\psi^I}{\partial x^\nu} \\
&+\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Bigg(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\psi^I\partial\psi^L}\frac{\partial\psi^I}{\partial x^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^3\phi^A}{\partial\psi^J\partial\psi^I\partial\psi^L}\frac{\partial\psi^J}{\partial x^\nu}\frac{\partial\psi^I}{\partial x^\mu} + \\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial^2\phi^A}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\frac{\partial^2\phi^A}{\partial\psi^I\partial\psi^L}\frac{\partial^2\psi^I}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\,.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

A definição contida na expressão (1.27) é genérica e permite escrever

$$\frac{\delta\tilde{\mathcal{L}}}{\delta\psi^L} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\psi^L} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial\psi^L}{\partial x^\mu}\right)}\Bigg) + \frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\Bigg(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\left(\frac{\partial^2\psi^L}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right)}\Bigg)\,,$$

o que juntamente com (A.5), (A.9) e (A.10) acarreta (A.8), o que prova a regra da cadeia para a derivada lagrangeana.

Multiplicando os dois lados de (A.8) pela variação funcional infinitesimal de ψ^L, $\delta\psi^L$, contraindo no índice L e observado que a relação de dependência funcional (A.1) implica

$$\delta\phi^A = \frac{\partial\phi^A}{\partial\psi^L}\delta\psi^L\,,$$

obtemos o importante

corolário: Se valem os relações de dependência funcional fixadas em (A.1) e (A.4) e a derivada lagrangeana é definida pela expressão (1.27) então

$$\frac{\delta \widetilde{\mathcal{L}}}{\delta \psi^L}\, \delta \psi^L = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A}\, \delta \phi^A \ . \tag{A.11}$$

É importante observar que em nenhum momento foi requisitada a inversibilidade das relações (A.1) de tal modo que a validade da regra da cadeia para a derivada lagrangeana, juntamente com seu corolário, se mantém inclusive naqueles casos nos quais o conjunto finito $\{\psi^I\}$ tem cardinalidade maior (ou menor) que a cardinalidade do conjunto finito $\{\phi^A\}$. Do ponto de vista físico isto significa que a validade de (A.8) e (A.11) independe de terem sido acrescentados (ou retirados) graus de liberdade dinâmicos quando da passagem de uma descrição em termos do conjunto $\{\phi^A\}$ para uma descrição em têrmos de conjunto $\{\psi^I\}$.

Apêndice B

Campos de Killing na Geometria de Fundo

O formalismo de campo para Relatividade Geral introduz um espaço-tempo de fundo com geometria de Riemann definida pelo tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$. O propósito de atender às demandas deste formalismo impõe a necessidade de estabelecer algumas notações e rever alguns conceitos. Fixado o sistema de coordenadas, podemos adotar para a derivada simples da componente tensorial $J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$, com relação à variável independente x^ρ, a notação $J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s,\ \rho}$, ao invés das usuais $\dfrac{\partial J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}}{\partial x^\rho}$ e $\partial_\rho J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$. Além disso, adotaremos a notação "ponto e vírgula" para a derivação covariante com respeito à afinidade métrica

$$\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\left(\gamma_{\sigma\mu,\nu} + \gamma_{\nu\sigma,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\sigma}\right)\ . \tag{B.1}$$

Deste modo, a derivada covariante da $\binom{r}{s}$-densidade tensorial de pêso w, $J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}$, será denotada e definida por

$$\begin{aligned} J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s;\ \rho} \ &= \ J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s,\ \rho} + \left\{{\alpha_1 \atop \rho\sigma}\right\} J^{\sigma\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s} + \cdots + \left\{{\alpha_r \atop \rho\sigma}\right\} J^{\alpha_1\cdots\sigma}_{\beta_1\cdots\beta_s} - \\ &\quad - \left\{{\sigma \atop \rho\beta_1}\right\} J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\sigma\cdots\beta_s} - \cdots - \left\{{\sigma \atop \rho\beta_s}\right\} J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\sigma} - w\left\{{\sigma \atop \rho\sigma}\right\} J^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s}\ . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Não custa lembrar que a afinidade métrica definida pelos símbolos de Kristoffel $\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ é a única afinidade simétrica (sem torção) que cumpre as condições equivalentes

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{;\rho} = 0 \qquad \text{e} \qquad \gamma_{\alpha\beta;\sigma} = 0 \ , \tag{B.3}$$

sendo este exatamente o conteúdo do teorema de Levi-Civita do cálculo diferencial absoluto.

A variação funcional infinitesimal $\delta\gamma^{\mu\nu}$ induzida no tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$ pelo campo de variação infinitesimal δx^{α} é dada pela expressão

$$\delta\gamma^{\mu\nu} = \delta x^{\mu}{}_{;\alpha}\gamma^{\alpha\nu} + \delta x^{\nu}{}_{;\alpha}\gamma^{\alpha\mu} \ , \tag{B.4}$$

a qual pode ser obtida como consequência de (1.20) da 1ª seção, (B.2) e (B.3). (B.4) é essencial na demonstração do teorema da divergência covariante nula, e juntamente com

$$\gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\mu}$$

e

$$\delta\gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\rho} + \gamma^{\alpha\sigma}\delta\gamma_{\sigma\rho} = 0$$

acarreta

$$-\delta\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\nu} + \gamma_{\nu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\mu} \ . \tag{B.5}$$

Além disso, a variação funcional infinitesimal $\delta\gamma^{\mu\nu}$, induzida no tensor métrico $\gamma^{\mu\nu}$ pelo campo de variação δx^{α}, ocasionará uma correspondente variação funcional infinitesimal $\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\}$ nas componentes da afinidade métrica. Tal correspondência pode ser apreciada pelas relações

$$\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\left(\delta\gamma_{\sigma\mu;\nu} + \delta\gamma_{\nu\sigma;\mu} - \delta\gamma_{\mu\nu;\sigma}\right) = -\delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} - \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\delta x^{\beta} \tag{B.6}$$

e

$$\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\alpha} \right\} = \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\delta\gamma_{\alpha\sigma;\mu} \ , \tag{B.7}$$

onde

$$\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu} = \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}_{,\beta} - \left\{{\alpha \atop \mu\beta}\right\}_{,\nu} + \left\{{\alpha \atop \rho\beta}\right\}\left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} - \left\{{\alpha \atop \rho\nu}\right\}\left\{{\rho \atop \mu\beta}\right\}$$

é o tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, associado à afinidade métrica $\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}$. Para a demonstração de (B.6) basta observar (B.5) e recorrer diretamente à definição (B.1):

$$\begin{aligned}
\delta\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\} &= \frac{1}{2}\,\delta\gamma^{\alpha\sigma}\left(\gamma_{\sigma\mu,\nu} + \gamma_{\nu\sigma,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\sigma}\right) + \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\left(\delta\gamma_{\sigma\mu,\nu} + \delta\gamma_{\nu\sigma,\mu} - \delta\gamma_{\mu\nu,\sigma}\right) \\
&= \delta\gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\rho}\left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\} + \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\Big(\delta\gamma_{\sigma\mu;\nu} + \left\{{\rho \atop \nu\sigma}\right\}\delta\gamma_{\rho\mu} + \left\{{\rho \atop \nu\mu}\right\}\delta\gamma_{\sigma\rho} + \delta\gamma_{\nu\sigma;\mu} + \\
&\quad + \left\{{\rho \atop \mu\nu}\right\}\delta\gamma_{\rho\sigma} + \left\{{\rho \atop \mu\sigma}\right\}\delta\gamma_{\nu\rho} - \delta\gamma_{\mu\nu;\sigma} - \left\{{\rho \atop \sigma\mu}\right\}\delta\gamma_{\rho\nu} - \left\{{\rho \atop \sigma\nu}\right\}\delta\gamma_{\mu\rho}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\left(\delta\gamma_{\sigma\mu;\nu} + \delta\gamma_{\nu\sigma;\mu} - \delta\gamma_{\mu\nu;\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\sigma}\Big(\left(\gamma_{\sigma\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\mu} + \gamma_{\mu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\sigma}\right)_{;\nu} + \\
&\quad + \left(\gamma_{\nu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\sigma} + \gamma_{\sigma\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\nu}\right)_{;\mu} - \left(\gamma_{\mu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\nu} + \gamma_{\nu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\mu}\right)_{;\sigma}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\delta x^{\alpha}{}_{;(\mu;\nu)} + \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\mu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;[\sigma;\nu]} + \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\nu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;[\sigma;\mu]}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(2\delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} + \delta x^{\alpha}{}_{;[\nu;\mu]} + \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\mu\rho}\overset{0}{R}{}^{\rho}{}_{\beta\nu\sigma}\delta x^{\beta} + \gamma^{\alpha\sigma}\gamma_{\nu\rho}\overset{0}{R}{}^{\rho}{}_{\beta\mu\sigma}\delta x^{\beta}\right) \\
&= -\delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2}\left(\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \overset{0}{R}{}_{\mu\beta\nu}{}^{\alpha} + \overset{0}{R}{}_{\nu\beta\mu}{}^{\alpha}\right)\delta x^{\beta} \\
&= -\delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} - \frac{1}{2}\left(\overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\nu\beta\mu} + \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\right)\delta x^{\beta} \\
&= -\delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} - \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\delta x^{\beta}\,.
\end{aligned}$$

Para confirmar (B.7) basta contrair (B.6) nos índices ν, α e observar que o têrmo

$$\delta\gamma_{\sigma\mu;\alpha} - \delta\gamma_{\mu\alpha;\sigma}$$

é anti-simétrico no par de índices σ, α.

Um campo de vetores $\xi = \xi^{\alpha}\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ é denominado um campo de Killing com respeito à geometria de fundo se a variação infinitesimal de coordenadas δx^{α} gerada por ξ, ao longo da variação infinitesimal δu do parâmetro real u, e definida por

$$\frac{\delta x^{\alpha}}{\delta u} = \xi^{\alpha}\ ,$$

verifica qualquer uma das condições equivalentes:

$$\begin{aligned}
\delta\gamma^{\mu\nu} &= \delta x^{\mu}{}_{;\rho}\gamma^{\rho\nu} + \delta x^{\nu}{}_{;\rho}\gamma^{\rho\mu} = 0 \ , \\
\frac{\delta\gamma^{\mu\nu}}{\delta u} &= \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu} = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
-\delta\gamma_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\nu} + \gamma_{\nu\rho}\delta x^{\rho}{}_{;\mu} = 0 \ , \\
-\frac{\delta\gamma_{\mu\nu}}{\delta u} &= \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

as quais implicam, como conseqüência de (B.6), as seguintes condições equivalentes:

$$\begin{aligned}
-\delta\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} &= \delta x^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} + \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\delta x^{\beta} = 0 \ , \\
-\frac{\delta}{\delta u}\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} &= \xi^{\alpha}{}_{;\mu;\nu} + \overset{0}{R}{}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\xi^{\beta} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{B.10}$$

A contração de (B.8) ou (B.9) nos indices μ, ν acarreta

$$\xi^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \ . \tag{B.11}$$

A transformação infinitesimal de coordenadas

$$x^{\alpha} \to \overline{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + \delta u \xi^{\alpha}$$

gerada pelo campo de Killing ξ, ao longo da variação infinitesimal δu do parâmetro real u, é denominada, na visão ativa, uma isometria infinitesimal. Tal definição é transparente tendo em vista as expressões (B.8), (B.9) e (B.10).

Apêndice C

As Fórmulas dos Traços Produzem a Fórmula da Métrica Inversa

É um fato bem conhecido que o primeiro e o último coeficientes não triviais do polinômio característico de um operador linear são, respectivamente, o seu traço e o seu determinante. Este trabalho mostra como computar recursivamente todos os coeficientes do polinômio característico como funções polinomiais nos traços das sucessivas potências do operador. Com a ajuda do teorema de Cayley-Hamilton, as fórmulas dos traços fornecem, para cada dimensão finita do espaço vetorial subjacente, uma fórmula racional para o núcleo resolvente e uma identidade nula na álgebra de operadores. A fórmula resolvente quadridimensional permite uma solução algébrica do problema da métrica inversa na Relatividade Geral. Os resultados deste apêndice estão publicados na referência [18].

C.1 Introdução

O problema de autovalores surge em diferentes áreas da física matemática. Por exemplo, é fato bem conhecido que sistemas quânticos atingem estados estacionários que são representados pelos autovetores de um operador linear adequado, definido em um espaço vetorial complexo representando os estados quânticos do sistema físico. Em dimensão infinita, métodos analíticos reais e complexos foram desenvolvidos para computar os autovalores de um operador linear. Mencionamos, por exemplo, métodos variacionais globais, os quais consistem na investigação dos níveis estacionários de um funcional energia apropriado, e métodos perturbativos locais, por meio de continuação analítica no plano complexo.

Por outro lado, se o espaço vetorial subjacente tem dimensão finita, o problema de autovalores torna-se um problema algebricamente bem posto em termos do polinômio característico. É exatamente este fato que justifica a abordagem algébrica neste trabalho. Após desenvolvermos umas poucas ferramentas, a mais importante delas sendo as identidades de Newton, e estabelecermos conceitos gerais e resultados básicos em álgebra linear complexa, obtivemos sucesso em alcançar o núcleo matemático deste apêndice: um algoritmo recursivo para computar os coeficientes do polinômio característico como funções polinomiais nos traços das potências sucessivas do operador linear.

Com a ajuda do teorema de Cayley-Hamilton, as fórmulas dos traços recém obtidas fornecem, para cada dimensão finita do espaço vetorial subjacente, uma identidade nula na álgebra de operadores. Como resultado extra, as fórmulas dos traços lançam luz na álgebra associativa dos operadores lineares complexos. A habilidade computacional agora disponível é suficiente para produzir um polinômio com coeficientes racionais para o núcleo resolvente em dimensão finita, o qual melhora um resultado conhecido, revelando a dependência racional deste com respeito à variável espectral, bem como com respeito ao operador linear.

No contexto da Relatividade Geral, a fórmula característica quadridimensional fornece uma expressão polinomial para a densidade escalar de volume. Além disso, a fórmula resolvente quadridimensional fornece um polinômio tensorial de terceira ordem para a métrica inversa, evitando portanto as desvantagens computacionais e formais da série de Neumann.

C.2 As identidades de Newton

O teorema fundamental da álgebra, juntamente com o algoritmo da divisão de Euclides, implicam o fechamento algébrico do corpo dos números complexos; este resultado básico é enunciado sem prova pelo

teorema 0: Se $p(z) = z^n + D_1 z^{n-1} + \cdots + D_{n-1}z + D_n$ é um polinômio com coeficientes complexos D_k então existem números complexos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, denominados as raízes de p, tais que $p(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n)$.

Como consequência do princípio da identidade, valem as seguintes relações entre coeficientes e raízes:

$$\begin{aligned} -D_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\ +D_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ &\vdots \\ (-)^k D_k &= \textstyle\sum k\text{-produtos de } \lambda\text{'s}, \\ &\vdots \\ (-)^n D_n &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \end{aligned} \tag{C.1}$$

O lado direito de (C.1) define as funções simétricas elementares nas variáveis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Depois destas, as funções simétricas mais importantes são as somas de potências iguais:

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \\
T_2 &= {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \cdots + {\lambda_n}^2, \\
&\ \vdots \\
T_k &= {\lambda_1}^k + {\lambda_2}^k + \cdots + {\lambda_n}^k, \\
&\ \vdots
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

D_k e T_k, além de serem simétricas, são funções homogêneas de grau k nas variáveis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Desenvolveremos um conjunto de relações recursivas conectando D's e T's, através das quais os λ's são eliminados de (C.1) e (C.2).

Para atingir este objetivo, precisamos de dois lemas. O primeiro é uma versão melhorada do teorema do resto.

Proposição 1: Se $p(z) = z^n + D_1\, z^{n-1} + \cdots + D_{n-1}\, z + D_n$ é um polinômio com coeficientes complexos D_k e λ é um número complexo, então

$$
\begin{aligned}
\frac{p(z) - p(\lambda)}{z - \lambda} &= z^{n-1} + (\lambda + D_1)\, z^{n-2} + (\lambda^2 + D_1\, \lambda + D_2)\, z^{n-3} + \cdots \\
&\quad + (\lambda^{n-1} + D_1\, \lambda^{n-2} + \cdots + D_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Prova: Por indução no grau. Para n=1, $p(z) - p(\lambda) = (z + D_1) - (\lambda + D_1) = z - \lambda$. Para n genérico, $p(z) - p(\lambda) =$

$$
\begin{aligned}
&= (z^n + D_1\, z^{n-1} + \cdots + D_{n-1} z + D_n) - (\lambda^n + D_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + D_{n-1} \lambda + D_n) \\
&= z\,(z^{n-1} + D_1\, z^{n-2} + \cdots + D_{n-1}) - \lambda\,(\lambda^{n-1} + D_1\, \lambda^{n-2} + \cdots + D_{n-1}) \\
&= z\,((z^{n-1} + D_1\, z^{n-2} + \cdots + D_{n-1}) - (\lambda^{n-1} + D_1\, \lambda^{n-2} + \cdots + D_{n-1})) + \\
&\quad + (z - \lambda)(\lambda^{n-1} + D_1\, \lambda^{n-2} + \cdots + D_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Como consequência da hipótese indutiva, a última expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} &z\,(z-\lambda)\,(z^{n-2}+(\lambda+D_1)\,z^{n-3}+\cdots+(\lambda^{n-2}+D_1\,\lambda^{n-3}+\cdots+D_{n-2}))+\\ &+(z-\lambda)(\lambda^{n-1}+D_1\,\lambda^{n-2}+\cdots+D_{n-1})\\ =\;&(z-\lambda)(z^{n-1}+(\lambda+D_1)z^{n-2}+\cdots+(\lambda^{n-2}+D_1\lambda^{n-3}+\cdots+D_{n-2})\,z+\\ &+(\lambda^{n-1}+D_1\lambda^{n-2}+\cdots+D_{n-1})). \end{aligned}$$

O segundo lema é uma contribuição do cálculo diferencial à álgebra.

Proposição 2: Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raízes complexas do polinômio de n-ésimo grau p e p' é o seu polinômio derivada, então

$$p'(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{p(z)}{z-\lambda_k}.$$

Prova: De $p(z)=d_0\,(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$, segue

$$\begin{aligned} p'(z)&=d_0\,(z-\lambda_2)(z-\lambda_3)\cdots(z-\lambda_n)+d_0\,(z-\lambda_1)(z-\lambda_3)\cdots(z-\lambda_n)+\cdots\\ &+d_0\,(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_{n-1})=\frac{p(z)}{z-\lambda_1}+\frac{p(z)}{z-\lambda_2}+\cdots+\frac{p(z)}{z-\lambda_n}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos obter agora o

teorema 1 (As Fórmulas de Newton): Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são as raízes complexas do polinômio $p(z)=z^n+D_1\,z^{n-1}+D_2\,z^{n-2}+\cdots+D_{n-1}\,z+D_n$ com coeficientes complexos D_k e $T_k={\lambda_1}^k+{\lambda_2}^k+\cdots+{\lambda_n}^k$ então

$$T_k+D_1\,T_{k-1}+\cdots+D_{k-1}\,T_1+k\,D_k=0,\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Prova: As proposições (1) e (2) implicam

$$nz^{n-1} + (n-1)D_1 z^{n-2} + (n-2)D_2 z^{n-3} + \cdots + D_{n-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big\{ z^{n-1} + (\lambda_k + D_1) z^{n-2} + (\lambda_k^2 + D_1\lambda_k + D_2) z^{n-3} + \cdots$$

$$+ (\lambda_k^{n-1} + D_1 \lambda_k^{n-2} + \cdots + D_{n-2}\lambda_k + D_{n-1}) \Big\}$$

$$= nz^{n-1} + (T_1 + nD_1) z^{n-2} + (T_2 + D_1 T_1 + nD_2) z^{n-3} + \cdots$$

$$+ (T_{n-1} + D_1 T_{n-2} + \cdots + D_{n-2} T_1 + nD_{n-1}).$$

Igualando coeficientes, obtemos

$$(n-1)D_1 = T_1 + nD_1,$$

$$(n-2)D_2 = T_2 + D_1 T_1 + nD_2,$$

$$\vdots$$

$$D_{n-1} = T_{n-1} + D_1 T_{n-2} + \cdots + D_{n-2} T_1 + nD_{n-1},$$

das quais seguem as $(n-1)$ primeiras relações a serem demonstradas. Como cada λ_k é uma raiz de p, ela verifica

$$\lambda_k^n + D_1 \lambda_k^{n-1} + \cdots + D_{n-1}\lambda_k + D_n = 0.$$

A adição destas relações fornece

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \lambda_k^n + D_1 \lambda_k^{n-1} + \cdots + D_{n-1}\lambda_k + D_n \Big\} = T_n + D_1 T_{n-1} + \cdots + D_{n-1} T_1 + nD_n,$$

a qual é a fórmula que faltava ser provada.

C.3 As fórmulas dos traços

O polinômio característico de um operador linear $\mathbf{T}$ em um espaço vetorial complexo de dimensão finita $\mathbb{V}$ é definido por $p(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{T})$, onde $\mathbf{I}$ é o operador identidade em $\mathbb{V}$. O grau de p como polinômio na variável complexa z é igual à dimensão de $\mathbb{V}$ como espaço vetorial complexo; suas raízes são denominadas os valores característicos de $\mathbf{T}$, e o conjunto de valores característicos é denominado o espectro de $\mathbf{T}$.

Estas definições e propriedades conduzem à

proposição 3: O traço de um operador linear complexo $\mathbf{T}$ é igual à soma de seus valores característicos, contadas as respectivas multiplicidades.

Prova: $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{T}) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n)$. Pela representação matricial $T^i{}_j$ de $\mathbf{T}$ escrevemos o lado esquerdo como $z^n - (T^1{}_1 + T^2{}_2 + \cdots + T^n{}_n)\, z^{n-1} +$ termos de ordem $\leq n-2$. No lado direito temos $z^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\, z^{n-1} +$ termos de ordem $\leq n-2$. Igualando coeficientes obtemos

$$T^1{}_1 + T^2{}_2 + \cdots + T^n{}_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

As raízes n-ésimas da unidade no corpo complexo fornecem o seguinte lema de fatoração na álgebra associativa dos operadores lineares complexos.

Proposição 4: Se $\mathbf{T}$ e $\mathbf{W}$ são operadores lineares complexos que comutam e $\theta = e^{i2\pi/k} = \cos\frac{2\pi}{k} + i\,\sin\frac{2\pi}{k}$, com k um inteiro positivo, então

$$\mathbf{T}^k - \mathbf{W}^k = (\mathbf{T} - \mathbf{W})(\mathbf{T} - \theta\,\mathbf{W})(\mathbf{T} - \theta^2\mathbf{W})\cdots(\mathbf{T} - \theta^{k-1}\mathbf{W}).$$

Prova: Como $\mathbf{T}$ e $\mathbf{W}$ comutam, coletamos termos como em

$$(\mathbf{T} - \mathbf{W})(\mathbf{T} - \theta\,\mathbf{W})(\mathbf{T} - \theta^2\mathbf{W})\cdots(\mathbf{T} - \theta^{k-1}\mathbf{W}) =$$
$$= \mathbf{T}^k + d_1\mathbf{W}\mathbf{T}^{k-1} + d_2\mathbf{W}^2\mathbf{T}^{k-2} + \cdots + d_{k-1}\mathbf{W}^{k-1}\mathbf{T} + d_k\mathbf{W}^k,$$

onde os números complexos $d_1, d_2, \ldots, d_k$ são os coeficientes do polinômio $(z-1)(z-\theta)(z-\theta^2)\cdots(z-\theta^{k-1}) = z^k - 1$, já que $(\theta^j)^k = \left(\left(e^{i2\pi/k}\right)^j\right)^k = 1$ para cada $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Portanto, $d_1 = d_2 = \ldots = d_{k-1} = 0$ e $d_k = -1$.

Das propriedades multiplicativa e de homogeneidade dos determinantes obtemos a

proposição 5: Se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os valores característicos do operador linear complexo $\mathbf{T}$, então ${\lambda_1}^k, {\lambda_2}^k, \ldots, {\lambda_n}^k$ são os valores característicos do operador linear $\mathbf{T}^k$.

Prova: Para o caso particular em que $\mathbf{W} = w\mathbf{I}$, a proposição 4 fornece

$$\det\left(\mathbf{T}^k - w^k\mathbf{I}\right) = \det(\mathbf{T} - w\mathbf{I})\det(\mathbf{T} - \theta w\mathbf{I})\cdots\det\left(\mathbf{T} - \theta^{k-1}w\mathbf{I}\right)$$

$$= (\lambda_1 - w)\cdots(\lambda_n - w)(\lambda_1 - \theta w)\cdots(\lambda_n - \theta w)\cdots(\lambda_1 - \theta^{k-1}w)\cdots(\lambda_n - \theta^{k-1}w)$$

$$= (\lambda_1 - w)(\lambda_1 - \theta w)\cdots(\lambda_1 - \theta^{k-1}w)\cdots(\lambda_n - w)(\lambda_n - \theta w)\cdots(\lambda_n - \theta^{k-1}w)$$

$$= ({\lambda_1}^k - w^k)\cdots({\lambda_n}^k - w^k).$$

Portanto, $\det\left(z\mathbf{I} - \mathbf{T}^k\right) = (z - {\lambda_1}^k)\cdots(z - {\lambda_n}^k)$.

Coletando os resultados anteriores, estamos prontos para obter as **fórmulas recursivas** contidas pelo

teorema 2: Se $p(z) = z^n + D_1 z^{n-1} + \cdots + D_{n-1}z + D_n$ é o polinômio característico do operador linear complexo $\mathbf{T}$ e $T_k = \text{traço}\,(\mathbf{T}^k)$, então

$$T_k + D_1\,T_{k-1} + \cdots + D_{k-1}\,T_1 + k\,D_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prova: É uma consequência direta do teorema (1) juntamente com as proposições (3) e (5).

O conteúdo-chave do teorema (2) será enfatizado pelo **enunciado das fórmulas dos traços: os coeficientes do polinômio característico de um operador linear podem ser computados recursivamente como funções polinomiais nos traços de suas potências sucessivas.**

As **fórmulas dos traços** $D_k = D_k(T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}, T_k)$ para os coeficientes do polinômio característico são listadas abaixo para k até 8.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= -T_1,\\
D_2 &= \tfrac{1}{2}T_1{}^2 - \tfrac{1}{2}T_2,\\
D_3 &= -\tfrac{1}{6}T_1{}^3 + \tfrac{1}{2}T_1T_2 - \tfrac{1}{3}T_3,\\
D_4 &= \tfrac{1}{24}T_1{}^4 - \tfrac{1}{4}T_1{}^2T_2 + \tfrac{1}{3}T_1T_3 + \tfrac{1}{8}T_2{}^2 - \tfrac{1}{4}T_4,\\
D_5 &= -\tfrac{1}{120}T_1{}^5 + \tfrac{1}{12}T_1{}^3T_2 - \tfrac{1}{6}T_1{}^2T_3 - \tfrac{1}{8}T_1T_2{}^2 + \tfrac{1}{4}T_1T_4 + \tfrac{1}{6}T_2T_3 - \tfrac{1}{5}T_5,\\
D_6 &= \tfrac{1}{720}T_1{}^6 - \tfrac{1}{48}T_1{}^4T_2 + \tfrac{1}{18}T_1{}^3T_3 + \tfrac{1}{16}T_1{}^2T_2{}^2 - \tfrac{1}{8}T_1{}^2T_4 - \tfrac{1}{6}T_1T_2T_3\\
&\quad +\tfrac{1}{5}T_1T_5 - \tfrac{1}{48}T_2{}^3 + \tfrac{1}{8}T_2T_4 + \tfrac{1}{18}T_3{}^2 - \tfrac{1}{6}T_6,\\
D_7 &= -\tfrac{1}{5040}T_1{}^7 + \tfrac{1}{240}T_1{}^5T_2 - \tfrac{1}{72}T_1{}^4T_3 - \tfrac{1}{48}T_1{}^3T_2{}^2 + \tfrac{1}{24}T_1{}^3T_4 + \tfrac{1}{12}T_1{}^2T_2T_3\\
&\quad -\tfrac{1}{10}T_1{}^2T_5 + \tfrac{1}{48}T_1T_2{}^3 - \tfrac{1}{8}T_1T_2T_4 - \tfrac{1}{18}T_1T_3{}^2 + \tfrac{1}{6}T_1T_6 - \tfrac{1}{24}T_2{}^2T_3\\
&\quad +\tfrac{1}{10}T_2T_5 + \tfrac{1}{12}T_3T_4 - \tfrac{1}{7}T_7,\\
D_8 &= \tfrac{1}{40320}T_1{}^8 - \tfrac{1}{1440}T_1{}^6T_2 + \tfrac{1}{360}T_1{}^5T_3 + \tfrac{1}{192}T_1{}^4T_2{}^2 - \tfrac{1}{96}T_1{}^4T_4\\
&\quad -\tfrac{1}{36}T_1{}^3T_2T_3 + \tfrac{1}{30}T_1{}^3T_5 - \tfrac{1}{96}T_1{}^2T_2{}^3 + \tfrac{1}{16}T_1{}^2T_2T_4 + \tfrac{1}{36}T_1{}^2T_3{}^2\\
&\quad -\tfrac{1}{12}T_1{}^2T_6 + \tfrac{1}{24}T_1T_2{}^2T_3 - \tfrac{1}{10}T_1T_2T_5 - \tfrac{1}{12}T_1T_3T_4 + \tfrac{1}{7}T_1T_7 + \tfrac{1}{384}T_2{}^4\\
&\quad -\tfrac{1}{32}T_2{}^2T_4 - \tfrac{1}{36}T_2T_3{}^2 + \tfrac{1}{12}T_2T_6 + \tfrac{1}{15}T_3T_5 + \tfrac{1}{32}T_4{}^2 - \tfrac{1}{6}T_8.
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

As **fórmulas características** para dimensões até quatro podem então ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\det\,(z\mathbf{I}-\mathbf{T}) &= z - T_1, \\
\det\,(z\mathbf{I}-\mathbf{T}) &= z^2 - T_1 z + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2), \\
\det\,(z\mathbf{I}-\mathbf{T}) &= z^3 - T_1 z^2 + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)z - \frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3), \\
\det\,(z\mathbf{I}-\mathbf{T}) &= z^4 - T_1 z^3 + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)z^2 - \frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)z + \\
&\quad + \frac{1}{24}({T_1}^4 - 6{T_1}^2T_2 + 8T_1T_3 + 3{T_2}^2 - 6T_4).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

C.4 Identidades nulas

O polinômio $p(z) = d_0 z^n + d_1 z^{n-1} + \cdots + d_{n-1} z + d_n$ com coeficientes complexos d_k é dito anular o operador linar complexo $\mathbf{T}$ se $p(\mathbf{T}) = d_0\mathbf{T}^n + d_1\mathbf{T}^{n-1} + \cdots + d_{n-1}\mathbf{T} + d_n\mathbf{I} = \mathbf{O}$, o operador identicamente nulo.

O conhecimento do ideal principal de polinômios anuladores de um operador linear $\mathbf{T}$ é essencial para adquirir habilidade computacional na álgebra associativa gerada por $\mathbf{T}$. Para assegurar este objetivo, enunciamos sem prova um dos resultados fundamentais na álgebra linear.

Teorema 3 (Cayley-Hamilton): O polinômio característico de um operador linear o anula.

Juntando o teorema de Cayley-Hamilton com o enunciado das fórmulas dos traços, concluímos que **para cada dimensão finita do espaço vetorial subjacente há uma identidade fundamental nula na álgebra associativa dos operadores lineares.** Por exemplo, em dimensões até quatro, as fórmulas características (C.4) fornecem as seguintes **identidades nulas:**

$$\mathbf{T} - T_1\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{T}^2 - T_1\mathbf{T} + \tfrac{1}{2}(T_1{}^2 - T_2)\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{T}^3 - T_1\mathbf{T}^2 + \tfrac{1}{2}(T_1{}^2 - T_2)\mathbf{T} - \tfrac{1}{6}(T_1{}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

$$\mathbf{T}^4 - T_1\mathbf{T}^3 + \tfrac{1}{2}(T_1{}^2 - T_2)\mathbf{T}^2 - \tfrac{1}{6}(T_1{}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)\mathbf{T} +$$
$$+ \tfrac{1}{24}(T_1{}^4 - 6T_1{}^2T_2 + 8T_1T_3 + 3T_2{}^2 - 6T_4)\mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

C.5 O núcleo resolvente em dimensão finita

O resolvente de um operador linear complexo $\mathbf{T}$ é a função $\mathbf{R}$ da variável complexa z, definida por $\mathbf{R}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$, e tomando valores na álgebra de operadores. É um fato bem conhecido que $\mathbf{R}$ é uma função analítica fora do espectro de $\mathbf{T}$. Refinaremos este resultado mostrando que no caso de dimensão finita $\mathbf{R}(z)$ é uma função racional da variável complexa z, completamente determinada por um conjunto finito de funções racionais complexas, cujos coeficientes são exatamente as fórmulas dos traços.

Nesta direção, precisamos de uma versão melhorada do teorema do resto na álgebra associativa de operadores lineares complexos, cujo conteúdo é a extensão da proposição (1) a polinômios com valores na álgebra de operadores.

Proposição 6: Se $p(w) = w^n + D_1 w^{n-1} + \cdots + D_{n-1}w + D_n$ é um polinômio com coeficientes complexos D_k e $\mathbf{T}$ e $\mathbf{W}$ são operadores lineares complexos que comutam, então

$$p(\mathbf{W}) - p(\mathbf{T}) = (\mathbf{W} - \mathbf{T})\Big[\mathbf{T}^{n-1} + (\mathbf{W} + D_1\mathbf{I})\mathbf{T}^{n-2} + (\mathbf{W}^2 + D_1\mathbf{W} + D_2\mathbf{I})\mathbf{T}^{n-3} +$$
$$+ \cdots + (\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I})\mathbf{I}\Big].$$

Prova: Por indução no grau. Para $n = 1$, $p(\mathbf{W}) - p(\mathbf{T}) = (\mathbf{W} + D_1\mathbf{I}) - (\mathbf{T} + D_1\mathbf{I}) = \mathbf{W} - \mathbf{T}$.

Para n genérico, $p(\mathbf{W}) - p(\mathbf{T}) =$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{W}(\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I}) + D_n\mathbf{I} + \\
&\quad -\mathbf{T}(\mathbf{T}^{n-1} + D_1\mathbf{T}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I}) - D_n\mathbf{I} \\
&= (\mathbf{W} - \mathbf{T})(\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I}) + \\
&\quad +\mathbf{T}\Big[(\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I}) + \\
&\qquad -(\mathbf{T}^{n-1} + D_1\mathbf{T}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I})\Big].
\end{aligned}
$$

Da hipótese indutiva, a última expressão se escreve

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{W} - \mathbf{T})\,(\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I}) \\
&\quad +\mathbf{T}(\mathbf{W} - \mathbf{T})\,\Big[\mathbf{T}^{n-2} + (\mathbf{W} + D_1\mathbf{I})\mathbf{T}^{n-3} + \cdots \\
&\qquad +(\mathbf{W}^{n-2} + D_1\mathbf{W}^{n-3} + \cdots + D_{n-2}\mathbf{I})\mathbf{I}\Big] \\
&\quad = (\mathbf{W} - \mathbf{T})\,\Big[\mathbf{T}^{n-1} + (\mathbf{W} + D_1\mathbf{I})\mathbf{T}^{n-2} + \cdots + (\mathbf{W}^{n-2} + D_1\mathbf{W}^{n-3} + \\
&\qquad + \cdots + D_{n-2}\mathbf{I})\mathbf{T} + (\mathbf{W}^{n-1} + D_1\mathbf{W}^{n-2} + \cdots + D_{n-1}\mathbf{I})\mathbf{I}\Big].
\end{aligned}
$$

Estamos prontos para obter a **fórmula racional** para o núcleo resolvente.

Teorema 4: Se $p(w) = w^n + D_1w^{n-1} + \cdots + D_{n-1}w + D_n$ é o polinômio característico do operador linear complexo $\mathbf{T}$ e z é qualquer número complexo não pertencente ao espectro de $\mathbf{T}$, então

$$
(z\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} = \frac{1}{p(z)}\mathbf{T}^{n-1} + \frac{z + D_1}{p(z)}\mathbf{T}^{n-2} + \frac{z^2 + D_1z + D_2}{p(z)}\mathbf{T}^{n-3} + \cdots
+ \frac{z^{n-1} + D_1z^{n-2} + \cdots + D_{n-1}}{p(z)}\mathbf{I}.
$$

Prova: É suficiente considerar o teorema de Cayley-Hamilton para o operador linear $\mathbf{T}$ e considerar $\mathbf{W} = z\mathbf{I}$ na proposição 6; note-se que, neste caso, $\mathbf{W}^k + D_1\mathbf{W}^{k-1} + \cdots + D_k\mathbf{I} = (z^k + D_1z^{k-1} + \cdots + D_k)\mathbf{I}$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

O conteúdo conjunto do teorema (4) e do enunciado das fórmulas dos traços será destacado como : **para cada dimensão finita do espaço vetorial subjacente há uma fórmula racional fundamental para o núcleo resolvente de um operador linear.** Por exemplo, em dimensões até quatro, as fórmulas dos traços (C.3) fornecem as seguintes **fórmulas resolventes:**

$$
\begin{aligned}
(z\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} &= (z-T_1)^{-1}\mathbf{I}, \\
(z\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} &= \left(z^2 - T_1 z + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)\right)^{-1}\left[\mathbf{T} + (z-T_1)\mathbf{I}\right], \\
(z\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} &= \left(z^3 - T_1 z^2 + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)z - \frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)\right)^{-1}\Bigg[\mathbf{T}^2 + \\
&\quad + (z-T_1)\mathbf{T} + \left(z^2 - T_1 z + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)\right)\mathbf{I}\Bigg], \\
(z\mathbf{I}-\mathbf{T})^{-1} &= \Bigg(z^4 - T_1 z^3 + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)z^2 - \frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)z + \\
&\quad + \frac{1}{24}({T_1}^4 - 6{T_1}^2T_2 + 8T_1T_3 + 3{T_2}^2 - 6T_4)\Bigg)^{-1}\Bigg[\mathbf{T}^3 + \\
&\quad + (z-T_1)\mathbf{T}^2 + \left(z^2 - T_1 z + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)\right)\mathbf{T} + \Bigg(z^3 + \\
&\quad - T_1 z^2 + \frac{1}{2}({T_1}^2 - T_2)z - \frac{1}{6}({T_1}^3 - 3T_1T_2 + 2T_3)\Bigg)\mathbf{I}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

C.6 Aplicações à Relatividade Geral

Em Relatividade Geral, o objeto físico fundamental é uma geometria efetiva, matematicamente representada por um campo tensorial covariante de ordem dois $\mathbf{g}$, definido em uma variedade quadridimensional adequada. Em um sistema de coordenadas local $\mathbf{x} = (x^\alpha)$ o tensor métrico pode ser escrito como $\mathbf{g} = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$.

Investigações em relativiadde geral são frequentemente desenvolvidas sob a hipótese de que existe uma geometria de fundo $\overset{o}{\mathbf{g}}= \overset{o}{g}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$. As propriedades métricas a serem assumidas em $\overset{o}{\mathbf{g}}$ variam dependendo do cenário gravitacional. A fim de realizar cálculos, é suficiente supor $\overset{o}{\mathbf{g}}$ uma métrica tipo Einstein. Não exigiremos aqui quaisquer condições suplementares sobre a geometria de fundo $\overset{o}{\mathbf{g}}$.

As geometrias efetiva e de fundo são relacionadas por um campo tensorial $\mathbf{h} = h_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ através de uma expressão de conexão, cuja forma geralmente aceita é $\mathbf{g} = \overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h}$. A densidade escalar $\sqrt{-g} d^4x$ associada a $\mathbf{g}$ requer que computemos $\det(\mathbf{g}) = \det(\overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h})$. Isto pode ser feito por meio da

proposição 7: Se $\mathbf{g} = \overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h}$, $\mathbf{H} = \overset{o}{\mathbf{g}}{}^{-1}\mathbf{h}$, $H_k =$ traço $\left(\mathbf{H}^k\right)$ e a variedade subjacente é quadridimensional, então

$$\frac{\det(\mathbf{g})}{\det(\overset{o}{\mathbf{g}})} = 1 + H_1 + \frac{1}{2}(H_1{}^2 - H_2) + \frac{1}{6}(H_1{}^3 - 3H_1H_2 + 2H_3) +$$
$$+ \frac{1}{24}(H_1{}^4 - 6H_1{}^2H_2 + 8H_1H_3 + 3H_2{}^2 - 6H_4).$$

Prova: De $\mathbf{g} = \overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h} = \overset{o}{\mathbf{g}}\,(\mathbf{I} + \mathbf{H})$ segue que $\det(\mathbf{g}) = \det(\overset{o}{\mathbf{g}}) \det(\mathbf{I} + \mathbf{H})$. Agora é suficiente considerar a fórmula quadridimensional característica em (C.4) com $z = 1$ e $\mathbf{T} = -\mathbf{H}$; note-se que $\mathbf{T}^k = (-)^k \mathbf{H}^k$ implica $T_k = (-)^k H_k$.

A conexão de Levi-Civita associada a $\mathbf{g}$ requer que computemos $\mathbf{g}^{-1} = \left(\overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h}\right)^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-1} \overset{o}{\mathbf{g}}{}^{-1}$. A forma explícita conhecida é dada pela série de Neumann

$$(\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H} + \mathbf{H}^2 - \mathbf{H}^3 + \cdots$$

Em coordenadas locais ela se escreve como

$$g^{\mu\nu} = \left(\delta^\mu{}_\beta - \overset{o}{g}{}^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} + \overset{o}{g}{}^{\mu\alpha} h_{\alpha\lambda} \overset{o}{g}{}^{\lambda\epsilon} h_{\epsilon\beta} - \overset{o}{g}{}^{\mu\alpha} h_{\alpha\lambda} \overset{o}{g}{}^{\lambda\epsilon} h_{\epsilon\rho} \overset{o}{g}{}^{\rho\sigma} h_{\sigma\beta} + \cdots \right) \overset{o}{g}{}^{\beta\nu},$$

onde $g^{\mu\nu}$ e $\overset{o}{g}{}^{\mu\nu}$ são bem definidos por $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu = \overset{o}{g}{}^{\mu\beta} \overset{o}{g}_{\beta\nu}$.

Além das exigências para a convergência da série acima, enfatizamos que uma tal expressão leva a dificuldades técnicas na implementação do formalismo variacional. Estes problemas podem ser contornados em alguns casos particulares de fontes materiais em Relativide Geral através de um princípio variacional à la Palatini [7] mas não em geral. Mostramos como superar tais dificuldades por meio da

proposição 8: Se $\mathbf{g} = \overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h}$, $\mathbf{H} = \overset{o}{\mathbf{g}}{}^{-1}\mathbf{h}$, H_k = traço $\left(\mathbf{H}^k\right)$ e a variedade subjacente é quadridimensional, então

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{-1} = \Big(& 1 + H_1 + \frac{1}{2}(H_1{}^2 - H_2) + \frac{1}{6}(H_1{}^3 - 3H_1H_2 + 2H_3) + \\ & + \frac{1}{24}(H_1{}^4 - 6H_1{}^2H_2 + 8H_1H_3 + 3H_2{}^2 - 6H_4)\Big)^{-1} \Big[- \mathbf{H}^3 + \\ & + (1 + H_1)\mathbf{H}^2 - \Big(1 + H_1 + \frac{1}{2}(H_1{}^2 - H_2)\Big)\,\mathbf{H} + \Big(1 + \\ & + H_1 + \frac{1}{2}(H_1{}^2 - H_2) + \frac{1}{6}(H_1{}^3 - 3H_1H_2 + 2H_3)\Big)\,\mathbf{I}\Big]\, \overset{o}{\mathbf{g}}{}^{-1}.\end{aligned}$$

Prova: De $\mathbf{g} = \overset{o}{\mathbf{g}} + \mathbf{h} = \overset{o}{\mathbf{g}}\,(\mathbf{I} + \mathbf{H})$ segue-se que $\mathbf{g}^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^{-1}\,\overset{o}{\mathbf{g}}{}^{-1}$. Agora, é suficiente considerar a fórmula resolvente quadridimensional em (C.5) com $z = 1$ e $\mathbf{T} = -\mathbf{H}$; note-se que $\mathbf{T}^k = (-)^k\mathbf{H}^k$ implica $T_k = (-)^k H_k$.

Referências

[1] A. Einstein, Ann. Physik Ser. **4**, 769 (1916).

[2] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, *"The Classical Theory of Fields"* (Pergamon, Oxford, 1985). p. 280

[3] C. Møller, Ann. Phys. **4**, 347 (1958).

[4] Para uma boa revisão destes assuntos veja *"Uma análise comparativa de algumas prescrições para o cálculo da energia de sistemas gravitacionais"*.
Paulo Israel Trajtenberg, tese de mestrado, CBPF, (1998).

[5] R.P. Feynman, *"Lectures on Gravitation"*, editado por B. Hatfield (Addison Wesley, 1995).

[6] S. Deser, G.R.G. **1**, 9 (1970).

[7] L.P. Grishchuk, A.N. Petrov e A.D. Popova, Commun. Math. Phys. **94**, 379 (1984).

[8] S.V. Baback e L.P. Grishchuk, gr-qc/9907027.

[9] N. Pinto-Neto e R.R. Silva, *" Generalized Field Theoretical Approach to General Relativity and Conserved Quantities in Anti-de-Sitter Spacetimes"*, aceito para publicação na Physical Review **D**.

[10] J.M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1997).

[11] E. Witten, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998).

[12] L.F. Abbott e S. Deser, Nucl. Phys. **B 195**, 76 (1982).

[13] M. Henneaux e C. Teitelboim, Commun. Math. Phys. **98**, 391 (1985).

[14] N. Pinto-Neto e I. Damião Soares, Phys. Rev. **D 52**, 5665 (1995).

[15] V. Balasubramanian e P. Kraus, hep-th/9902121.

[16] R.C. Myers, hep-th/9903203.

[17] R. Aros, M. Contreras, R. Alea, R. Troncoso e J. Zanelli, gr-qc/9909015.

[18] R.R. Silva, J. Math. Phys. **39**, 6206 (1998).

"GENERALIZAÇÃO DO FORMALISMO DE TEORIA DE CAMPO PARA A RELATIVIDADE GERAL E QUANTIDADES CONSERVADAS EM ESPAÇOS ASSINTOTICAMENTE ANTI-DE-SITTER"

Ronaldo Rodrigues da Silva

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Nelson Pinto Neto - Presidente

Chapiro Ilia Lvovich

Maurício Ortiz Calvão

José Abdalla Helayël Neto

Mário Novello

Rio de Janeiro, 20 de dezembro de 1999