

16 / 99

Tese de
Doutorado

**Férmions, Campos-de-Gauge e Gravitação com
Torção em Modelos Planares: Uma Análise
Perturbativa.**

Nelson Luiz Panza Pereira da Silva

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF.

Rio de Janeiro, 24 de Novembro de 1999.

Dedicatória

À Mirian, que redespertou o meu interesse pela pesquisa.

À Rachel, pequeno raio de sol que aquece meu coração.

À Nazira Tomimura, pelo incentivo.

Aos meus pais, Maria e Nelson, pelo exemplo.

À minha avó, Alcides. (In Memoriam).

Agradecimentos

José Abdalla Helayël-Neto, pela orientação recebida nesta tese, pela sua grande amizade e por suas sábias palavras em momentos difíceis.

Nazira Tomimura, pela sua grande amizade, pelo interesse, apoio e estímulo constantes, elementos decisivos na elaboração deste trabalho.

José Luis Boldo, pela amizade, pelo trabalho conjunto, parte do qual aqui apresentado, e pelas críticas construtivas e valiosas sugestões.

Winder Alexander de Moura Melo, pela amizade e co-autoria em um dos trabalhos que compõem esta tese.

Leonardo M. de Moraes, pela amizade e por sua valiosa e abnegada colaboração.

Oswaldo M. Del Cima, pela amizade e pelas sugestões em um dos trabalhos desta tese.

Resumo

O campo de Kalb-Ramond é não-minimamente acoplado à gravidade com torção em $D = (1+2)$, através de um termo de massa topológica. Estuda-se a possibilidade de geração dinâmica de massa para o campo de gauge e correções a 1-loop para a sua auto-energia são calculadas. Férmions são então acoplados minimamente à gravidade com torção dinâmica, atribuindo massa à esta última.

Abstract

The Abelian rank-2 skew-symmetric tensor gauge field, referred to as Kalb-Ramond field (K-R), is non-minimally coupled to 3D gravity with torsion through a topological mass term. We study the issue of 1-loop corrections to the K-R self-energy, so as to understand how the corrections influence the mass spectrum at tree-level. Fermions are also minimally coupled to 3D gravity with dynamical torsion. A 1-loop mass generation mechanism takes place for the torsion.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1 - "Aspectos Peculiares de Campos Tensoriais de Gauge e da Gravitação em $D = (1 + 2)$".	
1.1 - Aspectos gerais da gravitação sem torção:	7
1.2 - O campo de Kalb-Ramond:	12
Capítulo 2 - "Geração Dinâmica de Massa e Campos Tensoriais em Background de Gravitação".	
2.1 - Apresentação do modelo:	17
2.2 - Regras de Feynman:	27
2.3 - Conclusões:	30
Capítulo 3 - "Campos de Kalb-Ramond em Backgrounds de Gravitação com Torção".	
3.1 - Aspectos gerais da torção:	31
3.2 - O modelo:	35
3.3 - Conclusões:	39
Capítulo 4 - "Férmions, Torção e Geração Dinâmica de Massa em $D =$	

(1 + 2)”.
.

4.1 - Introdução:	41
4.2 - Geração de massa para o campo de K-R não-minimamente acoplado a férmions:	48
4.3 - Conclusões:	52
Capítulo 5 - "Perspectivas Futuras":	54
Apêndice	55
Referências:	56

Introdução

Os trabalhos seminais de Yang e Mills, Utiyama, e Sakurai, que pela primeira vez discutiram a dinâmica dos campos de gauge, baseam-se na assertiva de que todas as propriedades de simetria interna das partículas elementares são, essencialmente, de natureza local. Segue desta afirmação que os grupos de simetria globais devam ser substituídos pelos correspondentes grupos locais, cujos parâmetros de transformação variam de ponto a ponto. Isto torna possível introduzir na teoria um novo objeto físico, o assim-chamado campo de gauge. Desta forma, o princípio de invariância de gauge local permite a introdução de uma interação de modo puramente axiomático, a sua forma sendo determinada de acordo com as propriedades de simetria da teoria. (As propriedades dos campos de gauge podem ser estudadas independentemente das evidências experimentais). A idéia de invariância local já havia sido usada pela primeira vez como um princípio físico fundamental na teoria de Einstein da Relatividade Geral, porém o princípio de invariância de gauge local obteve o status de um princípio físico nos trabalhos de Yang-Mills.

A invariância de gauge local levou à proposição, nos anos 60, da interação nuclear como sendo mediada por uma partícula vetorial instável (méson vetorial- ρ), o que mais tarde inspirou a linha de trabalhos da chamada "Strong Gravity", que foi o prelúdio da Gravitação Quântica nos primeiros anos da década de 70. Após a descoberta do mecanismo de geração de massa por quebra espontânea de simetria para as partículas vetoriais (o mecanismo de Higgs), e a técnica de renormalização para os modelos de gauge com simetria espontaneamente quebrada ('t Hooft, Slanov, e Taylor), tornou-se possível construir uma teoria renormalizável das interações eletrofracas das partículas elementares (modelo de Salam-Weinberg). Atualmente, a incorporação da gravidade no esquema geral das interações renormalizáveis encontra-se em aberta discussão.

O princípio de invariância de gauge local reflete uma profunda relação entre a uni-

versalidade das diversas interações, conservação de correntes vetoriais, e a existência das próprias interações. Este princípio determina a forma das interações, independentemente de sua natureza física, abrindo, desta forma, uma maneira de construirmos uma teoria unificada e consistente das interações entre as partículas elementares. Além disso, o princípio de invariância de gauge local, da mesma forma que o princípio da Relatividade Geral de Einstein, dá à teoria uma forma que admite uma interpretação puramente geométrica. Como resultado, torna-se possível desenvolver e generalizar a idéia de Einstein de que a geometria do espaço não é especificada 'ad hoc', porém é determinada pela interação entre as entidades físicas. Em outras palavras, a geometria adquire um caráter dinâmico e, efetivamente, reflete a influência de toda a matéria restante no Universo sobre partículas-teste (ou campos).

A geometrização dos campos de gauge mostra que o espaço-tempo quadri-dimensional é simplesmente um caso particular de uma possível geometria dinâmica. Um campo de gauge arbitrário corresponde à geometria de um espaço fibrado obtido do espaço-tempo ordinário pela associação de "espaços internos" em cada um de seus pontos, no qual o campo de gauge atua. Assim, a teoria clássica dos campos de gauge, bem como a Relatividade Geral, torna-se uma teoria puramente geométrica. A teoria unificada resultante (forte, fraca, eletromagnética e gravitacional) é também uma teoria geométrica. Em termos da geometria dos espaços fibrados, as partículas que interagem com os campos de gauge comportam-se como livres. Como na Relatividade Geral, isto elimina a distinção entre movimento inercial e movimento não-inercial, tornando possível descrever os campos de gauge por meio de conceitos geométricos simples (coeficientes de conexão e tensores de curvatura).

As dificuldades inerentes à quantização das teorias gravitacionais são bem conhecidas. A teoria de Einstein em três ou mais dimensões envolve uma constante dimensional, κ , de dimensão positiva, que pode levar a um número infinito de contratermos na expansão perturbativa, eliminando assim qualquer previsão da teoria. Concretamente, qualquer ação local, covariante, construída a partir do tensor de curvatura e de suas derivadas,

conduz a propagadores e vértices que são da mesma ordem que as derivadas. (Isto é uma característica comum a todas as teorias de gravidade quando expandidas, digamos, em torno do espaço plano). Esta expressão do princípio de equivalência implica que o comportamento dominante a grandes momentos seja da forma

$$\mathcal{D}(k) \sim k^{-n} \sim \mathcal{V}^{-1}(k), \quad (0.1)$$

onde \mathcal{D} representa o propagador quântico e \mathcal{V} um vértice genérico. Visto que cada diagrama de 1-loop contém igual número de linhas internas e de vértices, juntamente com uma integração no espaço dos momenta, a forma esquemática dos gráficos de Feynman é como segue:

$$\int d^n k (\mathcal{D}\mathcal{V})^p \sim \int d^n k \sim k^n, \quad (0.2)$$

isto é, diverge com o número de dimensões do espaço-tempo. Cada loop de ordem superior fornece uma integração adicional, $\int d^n k'$, vezes três propagadores e dois vértices (devido à inserção de uma nova linha interna). Ficamos, assim, com um fator da forma

$$\int d^n k \mathcal{D} (\mathcal{D}\mathcal{V})^2 \sim k^{n-m} \quad (0.3)$$

Portanto, a única maneira de evitarmos a introdução de novos contatermos seria escolher $n = m$. Em particular, para $n = 4$ dimensões, $\mathcal{D} \sim k^{-4}$, levando a termos proporcionais ao quadrado da curvatura, possivelmente junto com o termo de Einstein $\sim R$. No entanto, como é bem conhecido, tais teorias apresentam ghosts (são não unitárias e, conseqüentemente, sem significado físico). Em face a este cenário que por hora nos é apresentado, surge a seguinte pergunta: Pode o campo gravitacional ser descrito por grávitons, ao invés de uma métrica onde resida toda a dinâmica da gravitação? Roger Penrose, por exemplo, sugere que a Mecânica Quântica deva ser alterada para incorporar a Relatividade Geral. Stephen Hawking, por sua vez, argumenta que a Relatividade Geral simplesmente não consegue dar conta da origem do Universo, isto é, é impossível

estudar Cosmologia sem Gravitação Quântica.

Se formos nos basear puramente no empiriocriticismo, poderíamos deixar de lado essa busca frenética por uma teoria quântica da gravidade, já que evidências experimentais disponíveis a nível macroscópico confirmam a teoria de Einstein. Podem ser necessárias modificações na escala de Planck, o que talvez não afete muitas de suas previsões. A Relatividade Geral pode também ser apenas uma aproximação de baixa energia a alguma teoria mais fundamental, como a teoria das cordas. Por outro lado, existe um mal-estar na Física Teórica atual. As interações forte, fraca e eletromagnética são descritas no contexto da teoria quântica de campos em um espaço-tempo de Minkowski (um espaço-tempo plano e estático). Esses campos quânticos residem nesse espaço-tempo, porém não interagem com ele. A gravidade, por sua vez, deforma o espaço de Minkowski e dele é inerente (a gravidade requer um espaço-tempo não plano e dinâmico). Retomaremos essa discussão posteriormente.

Apenas a título de exemplo, a aplicação da teoria quântica à Relatividade Geral já fez duas previsões testáveis. Uma dessas previsões, o desenvolvimento de pequenas perturbações durante a inflação, está confirmada por observações recentes de flutuações na radiação de fundo. A outra previsão, a de que os buracos negros deveriam emitir radiação térmica, é testável em princípio.

Resumindo o que foi dito acima, temos: somente se $m \geq n$, a teoria pode ter uma chance de ser renormalizável; porém, $m \geq 4$ é proibido pela unitariedade, e não existe teoria geométrica dinâmica em $n = 2$. Assim, resta-nos $n = m = 3$ para caracterizar modelos geométricos viáveis.

A organização geral desta tese é apresentada a seguir. A discussão da Teoria de Einstein em três dimensões, bem como a teoria de Einstein-Chern-Simons constituem o material do Capítulo 2. Ainda no Capítulo 2, propomos um modelo de gravitação não-minimamente acoplada a um campo tensorial anti-simétrico. Os propagadores do gráviton e do campo tensorial de gauge são apresentados e a unitariedade a tree-level é discutida em termos dos resíduos dos propagadores nos seus pólos. No Capítulo 3,

discutimos a interação entre a torção e o campo de Kalb-Ramond em três dimensões. Os propagadores para ambos os campos são obtidos, e verifica-se a não-geração dinâmica de massa para esses campos. O resultado que se obtém é apenas uma correção à função de onda. Uma digressão das propriedades da torção é também apresentada. O Capítulo 4 apresenta um modelo no qual a matéria fermiônica é minimamente acoplada à gravidade em 3D com torção dinâmica. Também aí se discute o campo de Kalb-Ramond não-minimamente acoplado a esses férmions de maneira invariante de gauge. Mostra-se que ocorre geração dinâmica de massa para o campo de rank-2, que, a nível quântico, adquire propagação, correspondendo a um escalar massivo. Quanto ao férmion, não ocorre geração de massa a 1-loop, mas apenas uma correção proporcional à constante de acoplamento de Yukawa. A Análise Crítica e Perspectivas Futuras são apresentadas no Capítulo 5, que será, finalmente, seguido por um Apêndice e pela lista de Referências.

Capítulo 1

Aspectos Peculiares de Campos

Tensoriais de Gauge e Gravitação

em $D = (1+2)$.

¹O interesse no desenvolvimento de teorias físicas em dimensões menores do que quatro tem-se mostrado bastante fecundo nos últimos anos. Por exemplo, teorias vetoriais e tensoriais de gauge em três dimensões espaço-temporais estão ligadas ao comportamento em altas temperaturas dos modelos correspondentes em quatro dimensões. Em Mecânica Quântica, potenciais constantes em uma dimensão espacial fornecem o exemplo mais simples de quantização de energia e tunelamento. Em Mecânica Estatística, o modelo de Ising bidimensional é um sistema exatamente solúvel exibindo uma transição de fase. Em teoria de campos, podemos citar o campo escalar em duas dimensões espaço-temporais, usado para descrever a quebra espontânea de simetria e sólitons, e a eletrodinâmica bidimensional de Schwinger. Em matéria condensada, a supercondutividade é um efeito basicamente planar, bem como o efeito Hall quântico. Em todos os exemplos mencionados, a complexidade matemática encontrada nos correspondentes modelos em quatro dimensões são evitadas. Não só esse fato, mas em grande parte devido a ele, novas idéias a respeito do fenômeno físico podem ser obtidas. Teorias em $D = (1 + 2)$ funcionam

¹Deste capítulo, consta o paper "On Massive Vector Bosons and Abelian Magnetic Monopoles in $D=(3+1)$: a Possible Way to Quantise the Topological Mass Parameter.", escrito em colaboração com J. A. Helayël-Neto e W. A. Moura Melo, aceito para publicação em "Int. J. Mod. Phys. A.

como uma espécie de laboratório, onde, quem sabe, apareça um princípio novo que nos guie na construção de uma teoria mais realista em $D = (1 + 3)$. A gravitação, com certeza, não foge a esta regra. Motivados por esses argumentos, a primeira parte deste capítulo começa discutindo as principais características da gravitação em três dimensões, e culmina com um resumo da gravidade topologicamente massiva. O termo é denominado topológico por não contribuir para o tensor energia-momento. A segunda parte trata das principais propriedades do campo de Kalb-Ramond, fundamental na discussão dos capítulos ulteriores.

1.1 Aspectos gerais da gravitação sem torção em três dimensões

A Teoria de Einstein em três dimensões apresenta algumas características singulares, que podem ser deduzidas das propriedades das equações de campo de Einstein e do tensor de curvatura. Em qualquer número de dimensões, as equações de Einstein para a Relatividade Geral são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} . \quad (1.1.1)$$

Em (1.1.1), a constante κ tem dimensão de (massa) $^{-1/2}$. O tensor de Riemann, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, definido a partir da conexão, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$, por

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \partial_{\gamma}\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha} - \partial_{\delta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha}\Gamma_{\beta\delta}^{\mu} - \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} , \quad (1.1.2)$$

pode ser decomposto em uma parte simétrica (tensor de Ricci, $R^{\mu\nu}$) e uma parte de traço nulo (tensor conforme de Weyl, $C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$). Em três dimensões, o tensor $C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ anula-se identicamente, e é substituído por um novo tensor conforme de Weyl de segunda ordem, $C^{\mu\nu}$ [1]. O anulamento de $C_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ é decorrência do fato dos tensores de Riemann e de Ricci apresentarem o mesmo número de componentes independentes (6), sendo portanto

completamente equivalentes:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}\bar{R}_{\beta\delta} + g_{\beta\delta}\bar{R}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\delta}\bar{R}_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}\bar{R}_{\alpha\delta} , \quad (1.1.3)$$

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}R, \quad R \equiv R^\alpha{}_\alpha .$$

De (1.1.1) e (1.1.2), segue que o tensor de curvatura é localmente determinado pelo tensor energia momento, $T_{\mu\nu}$. Isto significa que qualquer efeito de curvatura produzido pela matéria não se propaga através do espaço-tempo. Em outras palavras, não existem graus de liberdade dinâmicos na teoria e, conseqüentemente, a sua versão quântica não apresenta grávitons.

Muitos dos aspectos básicos da teoria de Einstein em três dimensões são discutidos nos artigos de Gidings, Abbott e Kuchar [43] e Gott e Alpert [45]. Dentre alguns destes resultados, podemos citar: a falta de correspondência entre as teorias gravitacionais de Einstein e Newton, e a não-existência de soluções estáticas não-triviais para a teoria Einstein-Yang-Mills.

A busca por uma teoria quântica consistente para o campo gravitacional é um dos mais fascinantes desafios da Física Teórica atual. Entre as diversas tentativas, muitas delas buscaram considerar a Relatividade Geral como uma teoria de gauge, na expectativa de que aquilo se aprendeu na quantização dos campos de gauge pudesse também ser usado no caso da gravitação. Alguns resultados parciais vem sendo obtidos desde 1960, no sentido de identificar a Relatividade Geral com alguma espécie de teoria de gauge do grupo de Poincaré. No entanto, até o presente momento, ainda não se conseguiu fazer isto de maneira completamente satisfatória. Uma equivalência mais estrita da gravidade com as teorias de gauge pode ser obtida em dimensões mais baixas. De fato, em $D = (1 + 1)$ e em $D = (1 + 2)$, a Relatividade Geral pode ser considerada como uma teoria de gauge vetorial do grupo de anti-de Sitter ou de Poincaré de dimensão mais baixa, com uma ação do tipo topológica. O termo topológico sugere que nenhuma métrica de fundo seja introduzida no formalismo.

Mais precisamente, em três dimensões adota-se a ação de Chern-Simons com grupo anti-de Sitter ou Poincaré. Após uma identificação adequada das componentes da conexão de gauge com as dreibeins e a conexão de Lorentz da variedade, recupera-se a ação de Einstein-Hilbert em $D = (1 + 3)$. Um mecanismo análogo opera em $D = (1 + 1)$, se escolhermos uma ação tipo BF.

Os modelos em dimensões mais baixas têm em comum a ausência de graus de liberdade, tornando o seu estudo mais simples do que as correspondentes teorias em dimensões mais altas. Em particular, pode-se efetuar a sua quantização de maneira direta. A pergunta natural que se coloca agora é se estes modelos podem ser generalizados para dimensões mais altas. Caso possam, eles adquirem graus dinâmicos de liberdade e sua quantização ainda pode ser facilmente conseguida? Tais generalizações são de fato possíveis, mas as teorias resultantes podem não mais ser identificadas com a Relatividade Geral.

A primeira análise da gravitação quântica em três dimensões foi feita por Leutwyler. Uma teoria quântica mais interessante em três dimensões foi obtida pelo acoplamento da gravidade a um campo escalar, gerando-se uma teoria com um conteúdo dinâmico não-trivial. t'Hooft [12] e Deser e Jackiw [10] consideraram o espalhamento de partículas escalares em três dimensões, onde a interação era puramente gravitacional.

Nesta década, a gravidade topologicamente massiva, proposta por Deser, Jackiw e Templeton, tem atraído muita atenção. A fim de se obter uma teoria com vácuo não-trivial, o termo de Chern-Simons para a curvatura Riemanianna é adicionado no Lagrangeano de Einstein-Hilbert. Tal modelo pode ser considerado como um limite para altas temperaturas ou como uma redução dimensional do Lagrangeano de Einstein-Hilbert em quatro dimensões. É uma característica intrínseca do modelo em três dimensões que o termo de Chern-Simons induza massa sem quebra da invariância de gauge infinitesimal e sem apelar para o mecanismo de Higgs.

Esta teoria é obtida pela inclusão, na ação gravitacional, da classe característica

secundária de Chern-Simons,

$$S_{CS} = \frac{1}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\delta} \left(R_{\beta\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\delta}^\beta - \frac{2}{3} \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\gamma\nu}^\beta \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma \right) \quad (1.1.4)$$

onde $\Gamma_{\alpha\delta}^\beta$ é o símbolo de Christoffel e $\epsilon^{\mu\nu\delta}$ é a densidade tensorial totalmente antisimétrica. Devido à presença explícita do termo de Levi-Civita no modelo descrito pela ação acima, não podemos utilizar a regularização dimensional além de 1-loop para verificarmos se esta teoria é, ou, não renormalizável em todas as ordens de perturbação. Somos, então, forçados a usar o método BRST, o qual revela a ausência de qualquer termo anômalo em qualquer ordem de teoria de perturbação. Desta forma, definitivamente, a gravidade topologicamente massiva é uma teoria renormalizável.

A variação do termo de Chern-Simons em relação a $g_{\alpha\beta}$ fornece o tensor

$$C^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\delta S_{CS}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{\epsilon^{\alpha\beta\mu}}{\sqrt{g}} \nabla_\beta \left(R_\alpha^\nu - \frac{1}{4} \delta_\alpha^\nu R \right), \quad (1.1.5)$$

que é conhecido como tensor de Cotton (é o tensor de Weyl em três dimensões, já mencionado anteriormente). É fácil mostrar que este tensor possui as seguintes propriedades: (a) $C^{\mu\nu} = C^{\nu\mu}$ (visto que o seu dual é proporcional a $\nabla_\mu G^{\mu\nu}$), (b) $\nabla_\mu C^{\mu\nu} = 0$, como pode ser verificado diretamente, ou lembrando que este tensor é obtido pela variação em relação à métrica de uma ação invariante (mesmo embora o termo de Chern-Simons $\Gamma \left(\partial\Gamma - \frac{2}{3} \Gamma\Gamma \right)$ não o seja) e (c) $C_\mu^\mu = 0$, o que é óbvio de (1.1.5).

A ação para a gravidade topologicamente massiva é dada por,

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{g} R + \frac{1}{\kappa^2 \mu} S_{CS}, \quad (1.1.6)$$

onde μ é uma constante de acoplamento com dimensão (comprimento)⁻¹. É digno de nota a utilização de um sinal oposto àquele utilizado em quatro dimensões. Isto é assim para que se evite a aparição de "ghosts na teoria". As equações de movimento resultantes

são:

$$G^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C^{\mu\nu} = 0, \quad (1.1.7)$$

com

$$C^{\mu\nu} = \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} g^{\mu\nu} R \right). \quad (1.1.8)$$

A gravidade topologicamente massiva, diferentemente da teoria de Einstein, apresenta dinâmica, com a curvatura exibindo excitações massivas com parâmetro de massa μ . Isto pode ser facilmente verificado, se observarmos que qualquer métrica que satisfaça à equação (1.1.8) também satisfará à equação, obtida quando da atuação do operador $\sqrt{g}\epsilon_{\nu\alpha\beta}\nabla^\beta$ sobre a equação (1.1.8). A equação resultante pode ser escrita na forma:

$$\left(\nabla^\alpha \nabla_\alpha + \mu^2 \right) R^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 3R_\mu^\alpha R_{\nu\alpha}, \quad (1.1.9)$$

o que de fato mostra que as excitações são massivas e sua propagação causal. De fato, (1.1.9) implica que no limite linearizado, a parte com traço nulo do tensor de Ricci satisfaz a uma equação tipo Klein-Gordon com massa μ .

1.2 O campo de Kalb-Ramond em 3D

O campo tensorial anti-simétrico, $B_{\mu\nu}$, foi estudado, independentemente, por Cremmer e Scherk, no contexto de geração topológica de massa via quebra dinâmica de simetria de gauge, e por Kalb e Ramond, no estudo da interação clássica entre strings, em modelos duais (modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond). O trabalho original destes autores referia-se a quatro dimensões espaço-temporais. Em quatro dimensões, este campo tem somente um grau de liberdade e a sua principal importância está associada ao mecanismo invariante de gauge de geração de massa para o campo eletromagnético, A_μ , através do termo de acoplamento topológico, $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} B_{\alpha\beta}$. Mais recentemente, a questão de fótons massivos e a existência de monopólos magnéticos de Dirac foi retomada no contexto deste

modelo [42].

Como uma última aplicação bastante interessante do campo de Kalb-Ramond, podemos citar os assim chamados áxions de K-R. Estas entidades, amplificadas por flutuações do vácuo, podem representar um interessante ingrediente para modelos do pré Big-Bang, visto que podem ser invocados para a geração da radiação de microondas cósmicas de fundo. Para detalhes desta interessante área de pesquisa, sugerimos a referência [8].²

Nesta seção, não discutiremos o modelo CSKR, apenas apresentaremos algumas propriedades do campo $B_{\mu\nu}$, agora em $D = (1 + 2)$, que serão úteis no restante da dissertação.

Consideremos o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} G_{\mu\nu\alpha} G^{\mu\nu\alpha} , \quad (1.2.1)$$

onde

$$G_{\mu\nu\alpha} = \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\alpha\mu} \quad (1.2.2)$$

é um tensor de "rank" três totalmente antisimétrico (intensidade de campo). O campo $B_{\mu\nu}$ é sujeito à transformação de gauge Abeliana

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu (x) - \partial_\nu \xi_\mu (x) , \quad (1.2.3)$$

com ξ_μ uma função vetorial arbitrária³. A transformação acima é a versão antisimetrizada da transformação de gauge para um tensor de rank 2, $U(1)_{B_{\mu\nu}}$. As equações de campo, quando na presença de fontes, são facilmente obtidas:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\alpha} = J^{\nu\alpha} . \quad (1.2.4)$$

²Este modelo é descrito pela ação $S = -\frac{1}{\lambda^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{12} H^{\mu\nu\alpha} H_{\mu\nu\alpha}) e^{-\phi}$, onde $g_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -a^2(t), -b^2(t), -c^2(t))$. ϕ é o campo do dÍlaton.

³Supomos que o parâmetro da transformação de gauge, ξ_μ , vá a zero no infinito.

A identidade de Bianchi para a intensidade de campo dual,

$$\partial_\mu {}^*G^\mu = 0 , \quad (1.2.5)$$

onde

$${}^*G^\mu = \frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} G_{\alpha\beta} , \quad (1.2.6)$$

segue de (1.2.1), quando a corrente é conservada. A equação de conservação da corrente é, então, dada por:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\nu J_\alpha = 0 . \quad (1.2.7)$$

Notar a forma pouco convencional da lei de conservação da corrente.

Como estamos trabalhando em três dimensões, propomos que o campo $B_{\mu\nu}$ seja reparametrizado na forma

$$B_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} B^\alpha , \quad (1.2.8)$$

de modo que o Lagrangeano (1.2.1) seja convenientemente escrito como:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu B^\mu \partial_\nu B^\nu . \quad (1.2.9)$$

Propondo-se descrever o campo tensorial através de seu dual vetorial, chegamos a uma interessante forma da simetria de gauge e a uma análise bem mais direta da contagem dos graus de liberdade físicos do campo em questão, quando acoplado à gravidade⁴. Em termos do dual, a transformação de gauge (1.2.3) é colocada na forma:

$$B'_\alpha = B_\alpha + \epsilon_\alpha^{\rho\lambda} \partial_\rho \Lambda_\lambda \quad (1.2.10)$$

Passemos agora à discussão do número de graus de liberdade físicos. Para este fim,

⁴No restante deste capítulo, trabalharemos com a forma tensorial do campo.

vamos escolher a seguinte base linearmente independente no espaço dos momenta:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}), \bar{p}^\mu = (p^0, -\vec{p}), \epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon}), \quad (1.2.11)$$

sujeita à condição $p \cdot \epsilon = \bar{p} \cdot \epsilon = 0$. Expandindo o campo $B_{\mu\nu}$ em termos desta base, temos:

$$B_{\mu\nu}(p) = ap_{[\mu}\bar{p}_{\nu]} + bp_{[\mu}\epsilon_{\nu]} + c\bar{p}_{[\mu}\epsilon_{\nu]} \quad (1.2.12)$$

Da expressão acima, vemos que o número de componentes independentes para o campo $B_{\mu\nu}$ é 3. A transformação de gauge (1.2.3) escreve-se em termos desta mesma base como:

$$B'_{\mu\nu}(p) = B_{\mu\nu}(p) + ip_\mu \xi_\nu(p) - ip_\nu \xi_\mu(p). \quad (1.2.13)$$

Substituindo (1.2.12) em (1.2.13), constatamos que os coeficientes a e b são dependentes do gauge e, assim, não poderão representar graus de liberdade físicos propagados pelo campo $B_{\mu\nu}$. Devido a esta dependência, podemos encontrar um gauge no qual estes coeficientes possam ser anulados, e (1.2.12) reduz-se para:

$$B_{\mu\nu}(p) = c\bar{p}_{[\mu}\epsilon_{\nu]} \quad (1.2.14)$$

A utilização da simetria de gauge reduziu o número de componentes independentes do campo $B_{\mu\nu}$ de 3 para 1 (grau de liberdade "off-shell"). O próximo passo será a utilização das equações de movimento para a determinação dos graus de liberdade realmente físicos ("on-shell").

No espaço dos momenta, a equação de movimento toma a forma:

$$p_\mu (p^\mu \tilde{B}^{\nu\alpha} + p^\nu \tilde{B}^{\alpha\mu} + p^\alpha \tilde{B}^{\mu\nu}) = 0. \quad (1.2.15)$$

Manipulando as relações acima, juntamente com $p^2 = 0$, chegamos à conclusão de que

$c = 0$, de modo que:

$$B_{\mu\nu}(p) = 0 . \quad (1.2.16)$$

Portanto, para o modelo livre descrito pelo Lagrangeano (1.2.1), não existe nenhum grau de liberdade propagado. Em resumo, tanto o gráviton como o campo de Kalb-Ramond não apresentam dinâmica em três dimensões. Seria interessante finalizar esta seção transcrevendo as equações de Maxwell em forma Cartesiana em 3D. Em termos do campo B_α , as equações de campo (1.2.4) escrevem-se, no vácuo, como

$$\partial_\mu \partial_\nu B^\nu = 0 . \quad (1.2.17)$$

Definindo $B^\alpha = (\Phi, \vec{B})$, obtemos as equações desejadas

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 , \\ \vec{\nabla} \Phi = 0 . \end{cases} \quad (1.2.18)$$

As equações acima mostram, claramente, como uma forma alternativa de verificação, a ausência de graus de liberdade físicos para o campo livre em estudo. Os próximos capítulos propõem a análise de termos invariantes de gauge topologicamente não-triviais, e focalizam a questão da geração de massa para o campo de gauge e matéria fermiônica sem, contudo, quebrar-se a simetria de gauge. Muitas peculiaridades serão observadas, e a sua detalhada discussão será o sujeito de nossa atenção daqui por diante.

Capítulo 2

Geração Dinâmica de Massa e Campos Tensoriais em Backgrounds de Gravitação.

Neste capítulo, apresentamos uma nova forma de atribuir dinâmica à teoria de Einstein, qual seja, o acoplamento não-mínimo do campo de Kalb-Ramond à gravidade, através de um termo de massa topológica. Esta teoria revela-se unitária e livre de táquions. São obtidas as regras de Feynman, e correções a 1-loop para a auto-energia do campo de gauge são calculadas, no contexto da quantização covariante, empregando a técnica de regularização dimensional.

2.1 Apresentação do modelo

⁵Iniciamos a discussão apresentando a densidade de Lagrangeano que utilizaremos para descrever o acoplamento não-mínimo entre os setores gravitacional e de gauge em $D = (1+2)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{int} . \quad (2.1.1)$$

⁵O conteúdo deste capítulo é baseado no paper: "3D Kalb-Ramond Field, Massive Gravitons and Torsion", escrito em colaboração com J.L.Boldo e J.A.Helâyel Neto, e submetido para publicação em "Phys. Lett. B."

O primeiro termo é o Lagrangeano usual de Einstein-Hilbert, dado por⁶

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{1}{\kappa^2} \sqrt{g} R . \quad (2.1.2)$$

O sinal desse termo é oposto àquele utilizado em quatro dimensões, a fim de se evitar a aparição de ghosts no modelo⁷. A constante de Einstein, κ^2 , tem dimensão de comprimento. O segundo termo representa o Lagrangeano do campo de gauge, $B_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L}_{gauge} = \frac{1}{6} \sqrt{g} G_{\mu\nu\alpha} G^{\mu\nu\alpha} , \quad (2.1.3)$$

onde $G_{\mu\nu\alpha}$ é o tensor totalmente antisimétrico discutido no Capítulo 1 (a derivada comum foi substituída pela derivada covariante, ∇),⁸

$$G_{\mu\nu\alpha} = \nabla_\mu B_{\nu\alpha} + \nabla_\alpha B_{\mu\nu} + \nabla_\nu B_{\alpha\mu} . \quad (2.1.4)$$

O último termo descreve a interação entre a gravidade e o campo de gauge,

$$\mathcal{L}_{int} = \xi \sqrt{g} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \nabla_\mu B_{\nu\alpha} R . \quad (2.1.5)$$

No Lagrangeano acima, $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ denota $\frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha}}{\sqrt{g}}$ e R representa o escalar de curvatura⁹. A constante de acoplamento, ξ , tem dimensão de $(\text{massa})^{-\frac{1}{2}}$, fazendo com que a renormalizabilidade da teoria seja perdida. Assim, podemos considerar a teoria apenas como uma teoria efetiva a baixas energias. As técnicas da teoria de campos efetiva tem-se tornado comum na Física de Partículas. O método não se constitui numa mudança nas regras da Mecânica Quântica, mas apenas um procedimento que "organiza" os nossos cálculos, separando os efeitos de altas energias daqueles conhecidos a baixas energias. Desta forma,

⁶Neste trabalho, a convenção que adotamos para a métrica é tal que o espaço plano é representado por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

⁷O tensor de Riemann é $R_{\alpha\beta\gamma}^\rho = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\rho - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \Gamma_{\gamma\delta}^\rho$, e o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\alpha\mu\beta}^\alpha$.

⁸Índices gregos variam de 0 a 2.

⁹ $\epsilon^{012} = \epsilon_{012} = +1$.

previsões quânticas ainda podem ser feitas em teorias não-renormalizáveis.

As dimensões dos demais campos que aparecem no Lagrangeano são:

$$[R] = 2 ; [B] = \frac{1}{2} . \quad (2.1.6)$$

A fim de analisar o espectro do modelo, devemos considerar a aproximação linearizada da teoria completa. Esta aproximação consiste na expansão do campo métrico em torno da geometria do espaço plano, com uma possível escolha sendo

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - \kappa h^{\mu\nu} + \kappa^2 h_{\lambda}^{\mu} h^{\lambda\nu} + \dots, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é o campo do gráviton linearizado. A expansão acima é equivalente à assertiva de que as flutuações quânticas no campo gravitacional podem ser expandidas em torno da métrica de fundo $\eta_{\mu\nu}$. Nas expressões subseqüentes, os índices serão abaixados e levantados com a métrica de fundo.

Adotando este ponto de vista, a ação linearizada de Einstein-Hilbert assume a forma

$$\mathcal{L}_{E-H} = -\frac{1}{2} h^{\rho\lambda} \partial_{\rho} \partial^{\alpha} h_{\lambda\alpha} + \frac{1}{4} h^{\rho\lambda} \square h_{\rho\lambda} - \frac{1}{4} h \square h + \frac{1}{2} h \partial_{\alpha} \partial_{\rho} h^{\alpha\rho}, \quad (2.1.8)$$

onde $h \equiv h^{\alpha}_{\alpha}$.

Para que a medida de integração no funcional gerador da função de Green faça sentido, isto é, a fim de que possamos quantizar o campo $h_{\mu\nu}$, é necessário fixar a invariância de gauge,¹⁰

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \zeta_{\mu} - \partial_{\mu} \zeta_{\nu} \quad (2.1.9)$$

¹⁰Supomos que o parâmetro da transformação de gauge, ζ_{μ} , vá a zero no infinito.

Segundo 't Hooft e Veltman, isto é conseguido pela introdução do gauge de De Donder,

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\alpha} F^\mu F_\mu , \quad (2.1.10)$$

onde

$$F_\mu [h_{\rho\sigma}] = \partial_\lambda \left(h_\mu^\lambda - \frac{1}{2} \delta_\mu^\lambda h \right) . \quad (2.1.11)$$

O Lagrangeano de Einstein-Hilbert, juntamente com o termo de gauge-fixing, pode ser reescrito em termos dos operadores de spin de Barnes-Rivers [27] da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{1}{2} h^{\mu\alpha} O_{\mu\alpha,\nu\beta} h^{\nu\beta} , \quad (2.1.12)$$

onde

$$O_{\mu\alpha,\nu\beta} = \square \left(\frac{1}{2} P^{(2)} - \frac{(4\alpha + 3)}{4\alpha} P_S^{(0)} - \frac{1}{2\alpha} P^{(1)} - \frac{1}{4\alpha} P_w^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{ws}^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{sw}^{(0)} \right)_{\mu\alpha,\nu\beta} \quad (2.1.13)$$

Os projetores de spin de Barnes-Rivers que aparecem acima formam um conjunto completo de operadores no espaço de tensores de 'rank' 2. Para o caso simétrico, eles são em número de seis (os quatro primeiros são operadores de projeção e os dois últimos são operadores de troca), e são dados por:

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\alpha} \theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta} \theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3} \theta_{\mu\nu} \theta_{\alpha\beta} , \quad (2.1.14)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\alpha} \omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta} \omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha} \omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta} \omega_{\mu\alpha}) , \quad (2.1.15)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-s)} = \frac{1}{3} \theta_{\mu\nu} \theta_{\alpha\beta} , \quad P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-w)} = \omega_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} , \quad (2.1.16)$$

$$P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \theta_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} , \quad P_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega_{\mu\nu} \theta_{\alpha\beta} , \quad (2.1.17)$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\alpha\beta}$ são, respectivamente, os operadores de projeção transversal e longitudinal

no espaço dos vetores, dados por:

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}. \quad (2.1.18)$$

Os projetores e operadores de troca satisfazem às seguintes relações de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} P^{(2)} P^{(2)} &= P^{(2)} - \frac{1}{3} P_S^{(0)}, & P_m^{(1)} P_m^{(1)} &= P_m^{(1)}, \\ P^{(2)} P_S^{(0)} &= \frac{1}{3} P_S^{(0)}, & P^{(2)} P_{SW}^{(0)} &= \frac{1}{3} P_{SW}^{(0)}, \\ P_{WS}^{(0)} P^{(2)} &= \frac{1}{3} P_{WS}^{(0)}, & P_S^{(0)} P_S^{(0)} &= \frac{2}{3} P_S^{(0)}, \\ P_W^{(0)} P_W^{(0)} &= P_W^{(0)}, & P_S^{(0)} P_{WS}^{(0)} &= \frac{2}{3} P_{SW}^{(0)}, \\ P_{WS}^{(0)} P_S^{(0)} &= \frac{2}{3} P_{WS}^{(0)}, & P_{SW}^{(0)} P_W^{(0)} &= P_{SW}^{(0)}, \\ P_S^{(0)} P^{(2)} &= \frac{1}{3} P_S^{(0)}, & P_W^{(0)} P_{WS}^{(0)} &= P_{WS}^{(0)}, \\ P_{SW}^{(0)} P_{WS}^{(0)} &= P_S^{(0)}, & P_{WS}^{(0)} P_{SW}^{(0)} &= \frac{2}{3} P_W^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Também será útil a seguinte identidade tensorial:

$$\left(P^{(2)} + P^{(1)} + P_S^{(0)} + P_W^{(0)} \right)_{\mu\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) \quad (2.1.20)$$

Vejamos, agora, como fica a ação linearizada para o campo de gauge. Substituindo a equação (2.1.4) em (2.1.3), obtemos:

$$\mathcal{L}_{gauge} = \sqrt{g} (\nabla_\alpha B^\alpha)^2. \quad (2.1.21)$$

Lembrando que o Lagrangeano (2.1.3) é invariante de gauge mediante a transformação (1.1.2), com $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$, somos levados à seguinte escolha para o termo de gauge-fixing:

$$\mathcal{L}_{gf} = \beta \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta B_\gamma \epsilon_{\alpha\mu\nu} \nabla^\mu B^\nu. \quad (2.1.22)$$

O Lagrangeano linearizado para o campo de gauge com o termo de gauge-fixing vem dado por

$$\mathcal{L}_{g+gf} = \frac{1}{2} B^\mu \mathcal{O}_{\mu,\alpha} B^\alpha, \quad (2.1.23)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\mu,\alpha} = -2\Box (\omega_{\mu\alpha} + \beta\theta_{\mu\alpha}). \quad (2.1.24)$$

O termo de interação, com o auxílio de (3.11), pode ser colocado na forma

$$\mathcal{L}_{int} = 2\xi\sqrt{g}R\nabla_\alpha B^\alpha. \quad (2.1.25)$$

A parte linearizada que advém da \mathcal{L}_{int} é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = 2\kappa\xi (h^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\partial_\mu B^\mu - B^\mu\partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho h^{\alpha\rho} - \eta_{\alpha\rho}h^{\alpha\rho}\Box\partial_\mu B^\mu + \eta_{\alpha\rho}B^\mu\partial_\mu\Box h^{\alpha\rho}). \quad (2.1.26)$$

Coletando os resultados anteriores, a parte bilinear do Lagrangeano (3.1) é adequadamente escrito como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h^{\mu\alpha} & B^\lambda \end{pmatrix} \mathcal{O}_{\mu\alpha\lambda,\nu\beta\rho} \begin{pmatrix} h^{\nu\beta} \\ B^\rho \end{pmatrix}. \quad (2.1.27)$$

O operador de onda, $\mathcal{O}_{\mu\alpha\lambda,\nu\beta\rho}$, pode ser decomposto em quatro setores, a saber:

$$\mathcal{O}_{\mu\alpha\lambda,\nu\beta\rho} = \begin{pmatrix} A_{\mu\alpha,\nu\beta} & B_{\mu\alpha,\rho} \\ C_{\lambda,\nu\beta} & D_{\mu,\nu} \end{pmatrix}, \quad (2.1.28)$$

onde

$$A_{\mu\alpha,\nu\beta} = \Box \left(\frac{1}{2} P^{(2)} - \frac{(4\alpha + 3)}{4\alpha} P_s^{(0)} - \frac{1}{2\alpha} P_m^{(1)} - \frac{1}{4\alpha} P_w^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{ws}^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha} P_{sw}^{(0)} \right)_{\mu\alpha,\nu\beta},$$

$$B_{\mu\alpha,\rho} = -2\kappa\xi (\eta_{\mu\alpha}\Box\partial_\rho - \partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho), \quad (2.1.29)$$

$$C_{\lambda,\nu\beta} = 2\kappa\xi (\eta_{\nu\beta}\Box\partial_\lambda - \partial_\lambda\partial_\nu\partial_\beta), \quad (2.1.30)$$

$$D_{\mu,\nu} = -2\Box (\omega_{\lambda\rho} + \beta\theta_{\lambda\rho}). \quad (2.1.31)$$

A próxima etapa consiste em quantizarmos a teoria. Os parâmetros de gauge, α e β , serão mantidos arbitrários. A relação entre o operador \mathcal{O} e a função de Green é

$$\int d^3y \mathcal{O}(x-y) \mathcal{G}(y-z) = \delta^3(x-z) . \quad (2.1.32)$$

O operador inverso de \mathcal{O} é, portanto, a função de Green de nossa teoria. A fim de inverter o operador de onda, vamos escrever o seu inverso na forma

$$\mathcal{O}^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}, \quad (2.1.33)$$

onde, formalmente,

$$\begin{aligned} X &= (A - BD^{-1}C)^{-1}, \\ Y &= -A^{-1}BW, \\ Z &= -D^{-1}CX, \\ W &= (D - CA^{-1}B)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

Utilizando a álgebra de Barnes-Rivers para os operadores de projeção, e após algumas tediosas linhas de cálculo, obtemos as seguintes expressões para os elementos de matriz de \mathcal{O}^{-1} :

$$\begin{aligned} X_{\mu\alpha,\nu\beta} &= \left(\frac{2}{\square} P^{(2)} - \frac{2\alpha}{\square} P_m^{(1)} - \frac{4(1+\alpha+8\kappa^2\xi^2\alpha\square)}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} P_w^{(0)} - \frac{2\sqrt{3}}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} P_{sw}^{(0)} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{3}}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} P_{ws}^{(0)} - \frac{4(1+2\kappa^2\xi^2\square)}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} P_s^{(0)} \right)_{\mu\alpha,\nu\beta}, \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

$$Y_{\mu\alpha,\rho} = 2\kappa\xi\partial_\rho \left(\frac{1}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} \theta_{\mu\alpha} + \frac{2}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} \omega_{\mu\alpha} \right), \quad (2.1.36)$$

$$W_{\lambda,\nu\beta} = -2\kappa\xi\partial_\lambda \left(\frac{1}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} \theta_{\nu\beta} + \frac{2}{\square(1+8\kappa^2\xi^2\square)} \omega_{\nu\beta} \right), \quad (2.1.37)$$

$$Z_{\lambda,\rho} = -\frac{1}{2\beta\Box}\theta_{\lambda\rho} - \frac{1}{2\Box(1+8\kappa^2\xi^2\Box)}\omega_{\lambda\rho}. \quad (2.1.38)$$

No espaço dos momenta, o propagador do gráviton é dado por

$$\begin{aligned} \langle T [h_{\mu\nu}(-p) h_{\alpha\beta}(p)] \rangle = & \left(-\frac{2}{p^2} P^{(2)} + \frac{2\alpha}{p^2} P_m^{(1)} - \frac{2\sqrt{3}m^2}{p^2(p^2-m^2)} P_{sw}^{(0)} - \frac{2\sqrt{3}m^2}{p^2(p^2-m^2)} P_{ws}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \frac{4(p^2\alpha - m^2\alpha - m^2)}{p^2(p^2-m^2)} P_w^{(0)} + \frac{p^2 - 4m^2}{p^2(p^2-m^2)} P_s^{(0)} \right)_{\mu\nu,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

e o do campo de gauge por

$$\langle T [B_\mu(-p) B_\nu(p)] \rangle = \frac{1}{2\beta p^2} \theta_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2p^2(p^2-m^2)} \omega_{\mu\nu}, \quad (2.1.40)$$

onde $m^2 = \frac{1}{8\kappa^2\xi^2}$.

Na região do ultravioleta, o comportamento dos propagadores é como segue:

$$\langle hh \rangle \sim \frac{1}{p^2}, \quad \langle BB \rangle \sim \frac{1}{p^2}. \quad (2.1.41)$$

O método pelo qual verificaremos a existência, ou não, de ghosts e táquions será o de exigir que o propagador tenha somente pólos de primeira ordem com massas reais e resíduos positivos. Estas exigências seguem da representação espectral dos propagadores das teorias de campos locais. Como é bem sabido, os pólos fornecem as massas dos possíveis quanta propagados, e o resíduo em um determinado pólo está associado à normalização da função de onda que descreve o quantum livre correspondente ao pólo. Assim, resíduo nulo significa que a excitação não é dinâmica; resíduo negativo indica a presença de um estado de ghost. Analisando as equações (2.1.37) e (2.1.38), vemos imediatamente que os propagadores exibem pólos em $p^2 = 0$ e em $p^2 = m^2$, ambos de primeira ordem, de modo que táquions estão ausentes da teoria.

O próximo passo consiste em analisar a unitariedade da teoria a tree-level. Como é bem- conhecido, uma condição necessária para a unitariedade a tree-level é obtida saturando-se o propagador com correntes externas, $J^{\mu\nu}$ e J^μ (para o gráviton e para o campo de gauge, respectivamente), compatíveis com as simetrias de gauge do Lagrangeano. Se a parte imaginária da matriz de resíduos da amplitude de transição corrente-corrente for não-negativa nos pólos que eventualmente existirem, o modelo não apresenta ghosts. A amplitude de transição corrente-corrente no espaço dos momenta é, para o gráviton, dada por

$$\mathcal{A} \equiv J^{*\mu\nu}(p) \langle T [h_{\mu\nu}(-p) h_{\kappa\lambda}(p)] \rangle J^{\kappa\lambda}(p), \quad (2.1.42)$$

onde, devido à transversalidade de $J^{\mu\nu}(p)$, somente os projetores de spin $P^{(2)}$ e $P_s^{(0)}$ contribuem. Este fato permitem-nos escrever a parte imaginária do resíduo da amplitude de transição no pólo $p^2 = 0$ como

$$\text{Im Re } s \mathcal{A} = 2 \left(J^{*\mu\nu} J_{\mu\nu} - J_\mu^{*\nu} J_\nu \right). \quad (2.1.43)$$

Para termos uma definição quanto ao sinal da expressão anterior, devemos analisar com mais detalhes a estrutura da corrente $J_{\mu\nu}$. Definindo o seguinte conjunto de vetores independentes no espaço dos momentos,

$$p^\mu \equiv (p^0, \vec{p}), \quad \bar{p}^\mu \equiv (p_0, -\vec{p}), \quad \epsilon^\mu \equiv (0, \vec{\epsilon}), \quad (2.1.44)$$

sujeitos às seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \bar{p} \cdot p &= (p^0)^2 + (\vec{p})^2 > 0, \\ p \cdot \epsilon &= \bar{p} \cdot \epsilon = 0, \\ \epsilon^\mu \epsilon_\mu &= -1, \end{aligned} \quad (2.1.45)$$

podemos escrever a corrente simétrica, $J^{\mu\nu}(p)$, como

$$J_{\mu\nu}(p) = a(p) p_\mu p_\nu + b(p) p_{(\mu} \bar{p}_{\nu)} + c(p) p_{(\mu} \epsilon_{\nu)} + d(p) \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu + e(p) \bar{p}_{(\mu} \epsilon_{\nu)} + f(p) \epsilon_\mu \epsilon_\nu . \quad (2.1.46)$$

Levando em consideração a lei de conservação desta corrente on-shell, $p^\mu J_{\mu\nu} = 0$, obtemos algumas relações envolvendo os coeficientes da equação acima, que substituídas em (2.1.43), deixa-nos com o resultado simples,

$$\text{Im Re } s \mathcal{A} = 0 , \quad (2.1.47)$$

evidenciando que o gráviton não-massivo não apresenta qualquer conteúdo dinâmico.

No pólo $p^2 = m^2$,

$$\text{Im Re } s \mathcal{A} = \left| J_\mu^\mu \right|^2 , \quad (2.1.48)$$

a qual é sempre definida positiva, indicando a presença de um grau de liberdade físico para o gráviton massivo. Neste caso, uma análise da corrente semelhante a anterior não se fez necessária.

Para o campo vetorial, a amplitude de transição é dada por

$$\mathcal{A} = J^{*\mu}(p) \langle T [B_\mu(-p) B_\nu(p)] \rangle J^\nu(p) . \quad (2.1.49)$$

Expandindo a corrente $J^\mu(p)$ na forma

$$J_\mu(p) = a(p) p_\mu + b(p) \bar{p}_\mu + c(p) \epsilon_\mu , \quad (2.1.50)$$

usando a lei de conservação por ela satisfeita

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha} p_\nu J_\alpha(p) = 0 , \quad (2.1.51)$$

e um procedimento símil àquele utilizado para o gráviton, pode ser facilmente mostrado

que tanto para o pólo não-massivo quanto para o massivo, a parte imaginária da amplitude de transição (2.1.49) é dada por

$$\text{Im } \mathcal{A} = \frac{|a|^2}{2} \frac{m^2}{p^2 - m^2}. \quad (2.1.52)$$

No pólo $p^2 = 0$,

$$\text{Im Re } s\mathcal{A} = \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{|a|^2}{2} \frac{m^2}{p^2 - m^2} p^2 = 0. \quad (2.1.53)$$

Deste resultado, fica evidente a ausência de qualquer grau de liberdade on-shell para o campo vetorial não-massivo. A análise no pólo $p^2 = m^2$ dá uma contribuição não-nula para $\text{Im Re } s\mathcal{A}$, a saber,

$$\frac{1}{2} |a|^2 m^2 \quad (2.1.54)$$

o que assegura um grau de liberdade físico. Portanto, o acoplamento não-mínimo entre o campo de Kalb-Ramond e a gravidade em 3D resulta na aparição de um pólo massivo dinâmico no setor longitudinal de B_μ .

Na próxima seção, investigamos as correções a 1-loop para o propagador do campo de gauge, a fim de verificar possíveis modificações à massa obtida anteriormente.

2.2 Regras de Feynman

Os vértices relevantes à nossa discussão são mostrados na Fig.1. Como estamos interessados na auto-energia do campo de gauge, existem somente três diagramas que contribuem para a aproximação a 1-loop. Esta aproximação é de especial interesse em teoria quântica de campos; por um lado, porque a análise para loops de ordens superiores é mais difícil e, por outro, qualquer propriedade física pode frequentemente já ser encontrada a 1-loop. Estes diagramas são mostrados na Fig.2, onde a linha ondulada representa o campo de gauge e a espiralada, o gráviton.

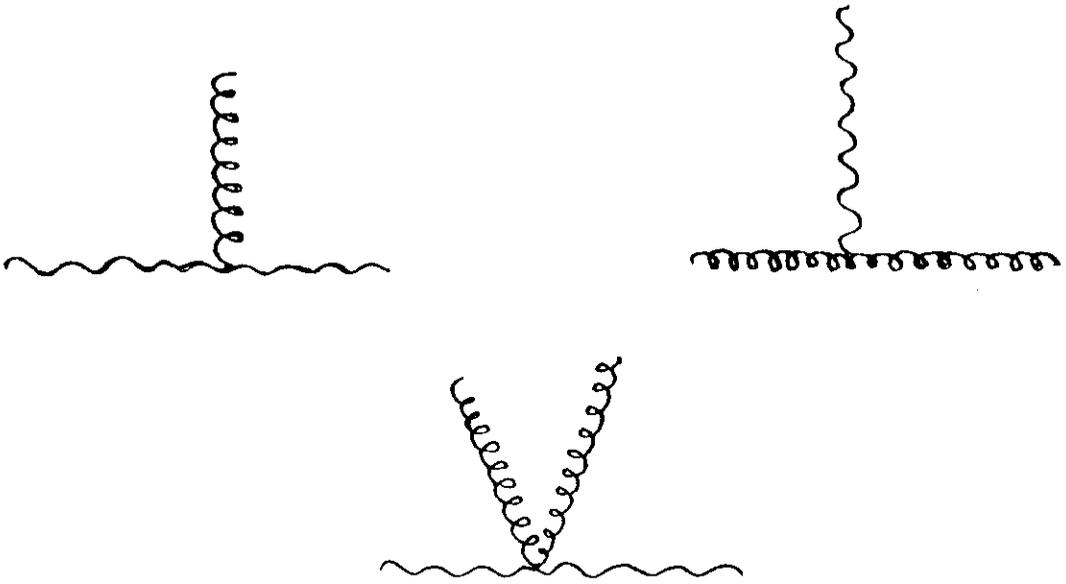


Fig.1

Vértices gráviton-campo vetorial

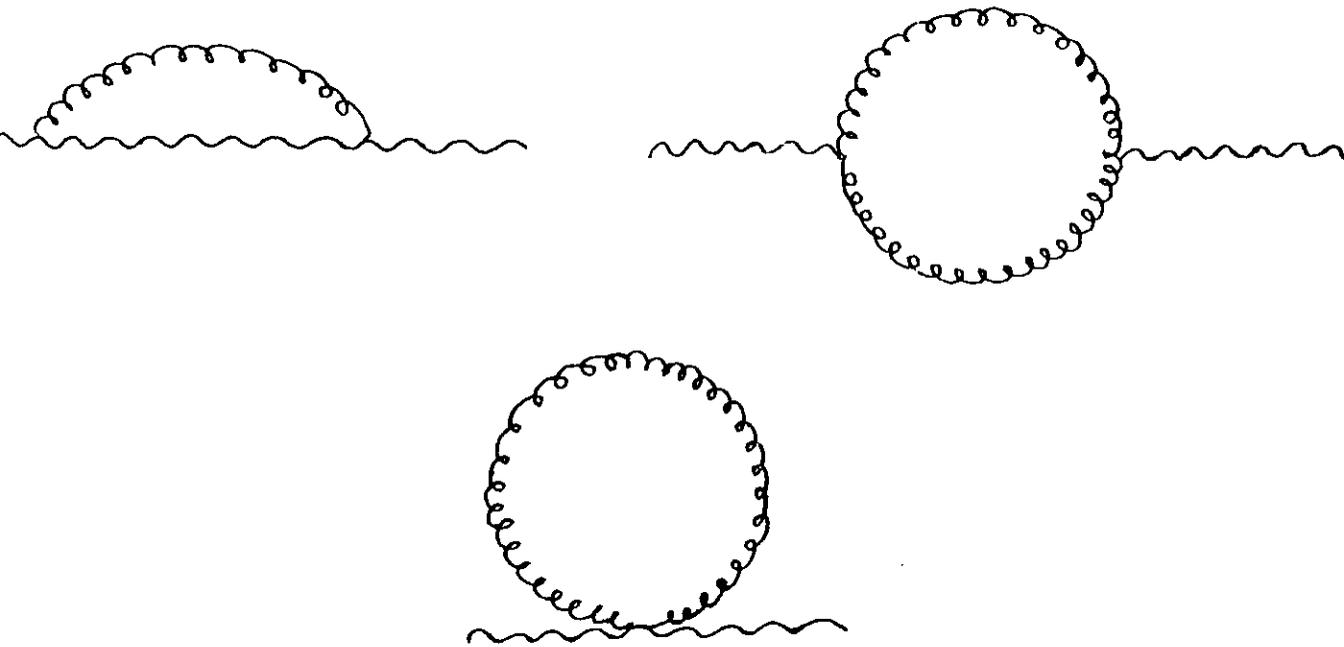


Fig.2

Contribuição a 1-loop para a auto-energia do campo vetorial

A regra de Feymann para o vértice trilinear (Fig.1a) é obtido facilmente do Lagrangeano (2.1.3), após expansão do campo métrico até ordem κ :

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta,\mu,\nu} = i\kappa \left(\eta_{\alpha\nu} p_{1\mu} p_{3\beta} + \eta_{\beta\nu} p_{1\mu} p_{3\alpha} - \eta_{\alpha\beta} p_{1\mu} p_{3\nu} + \eta_{\nu\beta} p_{1\mu} p_{2\alpha} + \eta_{\nu\alpha} p_{1\alpha} p_{2\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} p_{1\mu} p_{2\nu} \right), \quad (2.2.1)$$

onde $p_1 + p_2 + p_3 = 0$. Para o vértice trilinear (Fig.1b), a regra de Feymann é obtida do Lagrangeano de interação (2.1.5), sendo, que agora, o campo métrico é expandido até segunda ordem em κ^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\alpha\beta,\rho\lambda,\mu} = & \kappa^2 \xi \left(2\eta_{\rho\mu} p_{2\lambda} p_{3\beta} p_{3\alpha} - \eta_{\rho\lambda} p_{2\mu} p_{3\beta} p_{3\alpha} + 2\eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\alpha} p_2^2 p_{3\beta} + \eta_{\rho\lambda} \eta_{\mu\alpha} p_2^2 p_{3\beta} + \right. \\ & + 4\eta_{\beta\lambda} p_{2\beta} p_{2\alpha} p_{1\mu} + 2\eta_{\beta\lambda} p_{2\rho} p_{1\mu} p_{3\alpha} - 2\eta_{\alpha\beta} p_{3\lambda} p_{1\mu} p_{3\rho} - 2\eta_{\alpha\beta} p_{2\rho} p_{1\mu} p_{3\lambda} + \\ & + \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} p_{1\mu} p_3^2 + \frac{3}{2} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} p_2 \cdot p_3 p_{1\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} p_2 \cdot p_3 p_{1\mu} + \eta_{\rho\lambda} p_{2\alpha} p_{3\beta} p_{1\mu} + \\ & \left. 2\eta_{\lambda\mu} p_{1\rho} p_{3\beta} p_{3\alpha} - 2\eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\lambda} p_{1\rho} p_3^2 + \eta_{\lambda\rho} p_{1\mu} p_{3\beta} p_{3\alpha} - \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{1\mu} p_3^2 \right). \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

O vértice quadrilinear (Fig.1c) apresenta a seguinte regra de Feymann, obtida do Lagrangeano (2.1.3) com a métrica expandida até segunda ordem na constante de acoplamento gravitacional, κ .

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\alpha\beta,\rho\lambda,\mu,\nu} = & i\kappa^2 \left(-2\eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\lambda} p_{4\rho} p_{1\alpha} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{4\nu} p_{1\alpha} + \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{3\alpha} p_{1\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{4\nu} p_{1\mu} + \right. \\ & - 2\eta_{\lambda\beta} \eta_{\nu\alpha} p_{4\rho} p_{1\mu} + \eta_{\alpha\beta} \eta_{\nu\rho} p_{3\lambda} p_{1\mu} - \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\rho} p_{3\alpha} p_{4\lambda} + \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\rho} p_{3\lambda} p_{4\nu} + \\ & - \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{3\mu} p_{4\nu} + \eta_{\lambda\beta} \eta_{\rho\alpha} p_{3\nu} p_{1\mu} - 2\eta_{\lambda\alpha} \eta_{\rho\nu} p_{4\beta} p_{1\mu} - 2\eta_{\rho\alpha} \eta_{\lambda\nu} p_{1\beta} p_{1\mu} + \\ & \left. - \eta_{\mu\beta} \eta_{\lambda\nu} p_{1\rho} p_{1\alpha} + \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{1\mu} p_{1\alpha} - \frac{1}{8} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\rho\lambda} p_{1\mu} p_{1\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\alpha\rho} \eta_{\beta\lambda} p_{1\mu} p_{1\nu} \right) \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

onde $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$.

O diagrama apresentado na Fig.(2.a) dá a seguinte contribuição à auto-energia

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\mu\nu}(p) = & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\sigma}(p, q) \langle h^{\alpha\beta}(-q) h^{\rho\lambda}(q) \rangle \times \\ & \times \langle B^\sigma(-(p-q)) B^\gamma(p-q) \rangle \mathcal{V}_{\rho\lambda\gamma\nu}(p, q). \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

O gráfico de tadpole é dado pela seguinte expressão

$$\mathcal{I}_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\alpha\beta\rho\lambda\mu\nu}(q) \langle h^{\alpha\beta}(-q) h^{\rho\lambda}(q) \rangle. \quad (2.2.5)$$

Finalmente, o diagrama da Fig.(2c) contribui com

$$\mathcal{I}_{\mu\nu}(p) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{V}_{\alpha\beta\mu\gamma\sigma}(p, q) \langle h^{\alpha\beta}(-q) h^{\rho\lambda}(q) \rangle \langle h^{\gamma\delta}(-q) h^{\tau\zeta}(q) \rangle \mathcal{V}_{\rho\lambda\nu\tau\zeta}(p, q). \quad (2.2.6)$$

Devido à complexidade dos vértices e propagadores, as integrais de loop obtidas acima são de cálculo extremamente árduo. A manipulação algébrica destas integrais e suas exaustivas simplificações só se tornaram possíveis devido ao uso do software "FORM" [48].

Para o cálculo destas integrais no espaço dos momenta, empregamos o método de regularização dimensional, o qual é particularmente bem adequado para teorias de gauge. Como estamos trabalhando em três dimensões, todas as integrais mostram-se finitas a 1-loop. Visto que a principal motivação deste trabalho é a verificação da geração dinâmica, ou não, de massa para o campo de Kalb-Ramond através do seu acoplamento não- mínimo com a gravidade, o cálculo explícito das integrais de loop faz-se imperativo. Após verificarmos que um termo tipo Chern-Simons não é gerado, podemos calcular os gráficos acima atribuindo-se momento nulo às pernas externas. Tendo esses fatos em mente, e utilizando as integrais de loop no espaço dos momenta dadas em [50], obtemos a seguinte contribuição para a massa do campo vetorial:

$$M^2 = \frac{3\pi^2}{16\sqrt{2}\kappa\xi^3}. \quad (2.2.7)$$

2.3 Conclusões

Investigamos, em detalhes, uma teoria de gauge na qual um campo tensorial anti-simétrico de rank-2 é **não-minimamente** acoplado à gravidade em 3D. Com a ajuda da teoria de perturbação padrão para a gravitação quântica, calculamos o propagador corrigido à ordem de 1-loop para o campo de gauge, e verificamos que ocorre propagação de uma excitação física massiva causal. O campo vetorial, que classicamente não propagava nenhum grau de liberdade, adquire dinâmica por efeitos quânticos e passa a descrever um escalar físico e massivo. Além disso, a unitariedade da matriz- S é garantida em bases físicas. O tipo de acoplamento escolhido fornece também um mecanismo de geração de massa invariante de gauge. Obviamente, alguns problemas interessantes ainda permanecem em aberto, como por exemplo, a determinação do espaço de Fock da teoria. Esta proposta de continuação encontra-se em desenvolvimento.

Capítulo 3

Campos de Kalb-Ramond em Backgrounds de Gravitação com Torção.

¹¹Iniciamos a nossa discussão apresentando um resumo das principais propriedades da torção em três dimensões. Uma destas propriedades mais importantes é o fato do spin da matéria adquirir um papel dinâmico, através do seu acoplamento com a parte não-Riemanniana do espaço-tempo, isto é, com o tensor de torção de Cartan. Seguindo o mesmo espírito do capítulo anterior, propomos um modelo no qual o campo de Kalb-Ramond acopla-se não-minimamente à torção. O surpreendente resultado que se obtém são pólos não-massivos e não-propagantes. A análise da correção a 1-loop revela a não-geração dinâmica de massa para o campo de gauge devido a este tipo de acoplamento, contrariamente ao caso onde não há torção.

3.1 Aspectos Gerais da Torção

Em sua monografia de 1924 sobre as variedades com conexão afim, E. Cartan discute de modo geral a teoria dos espaços de Riemann generalizados. Nesta teoria, introduz-se uma conexão não-métrica, isto é, não inteiramente redutível a um funcional da métrica. Assim, vários autores procuraram utilizar a teoria dos espaços de Cartan (assim chama-

¹¹O conteúdo deste capítulo é baseado no paper: "3D Kalb-Ramond Field, Massive Gravitons and Torsion", escrito em colaboração com J.L.Boldo e J.A.Heläyel Neto, e submetido para publicação em Phys.Lett.B.

dos hoje, aquela generalização do espaço de Riemann) na interação gravitacional de partículas com spin. É bem conhecido que, em Relatividade Geral, a matéria interage com o campo gravitacional somente através do tensor energia-momento. O tensor de spin é independente do tensor energia-momento, não estando relacionado com a gravidade. Por outro lado, o spin (juntamente com a massa) é uma característica fundamental das partículas elementares. Parece, então, natural que uma teoria onde sejam levadas em consideração matéria e interação gravitacional, a nível microscópico, ambas as características das partículas elementares sejam contabilizadas. A suposição de que as fontes do campo gravitacional possam ser os tensores de energia-momento e de spin levou a uma teoria na qual o campo gravitacional é descrito por dois objetos geométricos, a saber, a métrica e a torção. A descrição do campo gravitacional pela métrica e pela torção segue de um enfoque de gauge para a gravidade. Como a fonte da torção é um objeto intrinsecamente quântico, é natural supor que a teoria que leva a torção em consideração seja uma teoria quântica. Estimativas simples mostram que os efeitos da torção somente são importantes quando a densidade de spin da matéria é da ordem de $\rho_s = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar L_P^2}$, onde L_P é o comprimento de Planck e m é a massa da partícula teste.

Outra importante razão para considerarmos a torção em uma teoria da gravidade está relacionada com a unitariedade e com a renormalizabilidade no limite linearizado da teoria. É conhecido que, apesar do enorme sucesso da teoria de Einstein em quatro dimensões ao resistir aos mais diversos testes experimentais, existem fortes evidências de que seja uma teoria incompleta, dado à dificuldade de uma formulação quântica para ela. Sua versão quântica é não-renormalizável. A fim de se tentar contornar essas dificuldades, propostas tais como a inclusão de termos de derivadas de ordem superior foram realizadas. No entanto, tais tentativas logo se mostraram infrutíferas, pois levavam a teorias não-unitárias. Uma nova esperança para a gravidade quântica surgiu com a teoria das cordas, na qual a torção aparece naturalmente. Neste caso, a teoria das cordas produz uma ação efetiva a baixas energias que depende, no setor gravitacional, não só da métrica, mas também de um campo tensorial anti-simétrico de rank-três, normalmente associado à

torção. A torção constitui-se portanto, num dos caminhos mais naturais para se estender a Relatividade Geral.

Cabe aqui salientar que, embora a gravidade seja um campo com o qual lidamos no nosso-dia-a dia, ainda não se tem evidências experimentais de que a torção realmente exista. Uma das principais razões para a sua introdução é o seu aparecimento no espectro da corda a nível quântico. A torção não existe como um campo independente, mas apenas como possíveis graus de liberdade da corda. No restante desta seção, apresentamos uma breve revisão das noções básicas da gravidade com torção. Pode-se encontrar uma descrição mais detalhada para a gravidade com torção nas referências [38] e para a teoria quântica no espaço-tempo curvo com torção na referência [37].

Consideremos um espaço de Riemann-Cartan, onde a conexão afim é não-simétrica nos dois últimos índices. A parte antisimétrica da conexão afim é o tensor de torção,

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}. \quad (3.1.1)$$

A condição de metricidade, $\nabla_{\mu}g_{\alpha\beta} = 0$, permite-nos expressar a conexão através da métrica e da torção de maneira única, como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\lambda}{}_{\mu\nu}, \quad (3.1.2)$$

onde $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ é o símbolo de Christoffel, determinado completamente pela métrica

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha} (\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (3.1.3)$$

e

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\lambda}{}_{\mu\nu} + T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu} - T_{\nu\mu}{}^{\lambda}) \quad (3.1.4)$$

é o tensor de contorção, anti-simétrico no primeiro e terceiro índices. É importante enfatizar que este termo não pode ser eliminado por uma transformação de coordenadas, visto que ele é um tensor. A teoria do campo gravitacional passa agora a ser descrita

por dois objetos geométricos independentes, a saber, a métrica e a torção. Na teoria de Einstein, a torção é nula.

A natureza peculiar de um espaço-tempo de Riemann-Cartan em $D = (1 + 2)$ torna-se evidente a partir do seguinte ponto de vista: somente para $n = 3$, um vetor e um bivector têm o mesmo número de componentes independentes ou, em outras palavras, o grupo (pseudo) Euclidiano possui o mesmo número de geradores de translação e de rotação. Em três dimensões, a torção possui nove graus de liberdade (spin-0, com multiplicidade 1; spin-1, com multiplicidade 1; spin-2, com multiplicidade 1. Dentre todas estas componentes, parece que a matéria fermiônica seleciona somente o spin 0) e pode ser dividida covariantemente em suas componentes irredutíveis de $SO(1,2)$, a saber, o traço $t_\mu = T_{\mu\nu}{}^\nu$, a parte totalmente antisimétrica, $\varphi = \varepsilon^{\mu\nu\lambda} T_{\mu\nu\lambda}$, e um tensor simétrico de rank-2 e traço nulo, $X_{\mu\nu}$. Reunindo todas essas informações, o tensor de torção tem a forma geral¹²

$$T_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\varphi + \frac{1}{2}(\eta_{\nu\lambda}t_\mu - \eta_{\mu\lambda}t_\nu) + \varepsilon_{\mu\nu\alpha}X^\alpha{}_\lambda . \quad (3.1.5)$$

Para utilização posterior, listamos abaixo alguns objetos importantes do espaço-tempo em função ora da contorção, ora das componentes irredutíveis da torção.

1 - Tensor de Riemann:¹³

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \tilde{R}^\rho{}_{\lambda\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\nu K^\rho{}_{\mu\lambda} - \tilde{\nabla}_\mu K^\rho{}_{\nu\lambda} + K^\sigma{}_{\mu\lambda}K^\rho{}_{\nu\sigma} - K^\sigma{}_{\nu\lambda}K^\rho{}_{\mu\sigma} . \quad (3.1.6)$$

2 - Tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}_\mu K^\mu{}_{\beta\alpha} - \tilde{\nabla}_\beta K^\alpha{}_{\mu\alpha} + K^\sigma{}_{\beta\alpha}K^\mu{}_{\mu\sigma} - K^\sigma{}_{\mu\alpha}K^\mu{}_{\beta\sigma} . \quad (3.1.7)$$

¹²Em $D = (1 + 3)$, a torção apresenta 24 graus de liberdade, sendo possível representá-la sob a forma de um tensor de traço nulo e de dois vetores.

$$T^\alpha{}_{\mu\nu} = L^\alpha{}_{\mu\nu} + \frac{1}{3}(\delta^\alpha{}_\mu T_\nu - \delta^\alpha{}_\nu T_\mu) - \frac{1}{3}\eta^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}\Sigma^\lambda$$

¹³ $\tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} = \tilde{\nabla}_\mu g_{\alpha\beta} = 0$.

3 - Derivada covariante:

$$\nabla_{\mu} B_{\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} - \frac{1}{2} \left(\varphi \epsilon_{\alpha\mu\nu} + \delta^{\alpha}_{\mu} t_{\nu} - \eta_{\mu\nu} t^{\alpha} + \epsilon_{\mu\nu\lambda} \chi^{\lambda\alpha} \right) B_{\alpha} . \quad (3.1.8)$$

4 - Escalar de Ricci (ou escalar de curvatura):¹⁴

$$\begin{aligned} R &= \tilde{R} + \tilde{\nabla}_{\mu} K^{\mu\alpha}_{\alpha} - \tilde{\nabla}_{\alpha} K^{\mu}_{\alpha}{}^{\alpha} + K^{\sigma\alpha}_{\alpha} K^{\mu}_{\mu\sigma} - K^{\sigma}_{\mu\alpha} K^{\mu\alpha}_{\sigma} \\ R &= \tilde{R} + 2\tilde{\nabla}_{\mu} t^{\mu} - \frac{1}{2} t^{\mu} t_{\mu} - \frac{3}{2} \varphi^2 + \chi_{\mu\nu} \chi^{\mu\nu} , \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde as grandezas com o símbolo de "til" são todas calculadas com o símbolo de Christoffel, isto é, com a conexão sem torção.

3.2 O Modelo

A teoria que iremos estudar a fim de verificar a possibilidade de propagação da torção, quando não-minimamente acoplada ao campo de Kalb-Ramond, é definida pela seguinte ação:

$$S = \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{1}{k^2} R + \frac{1}{6} G_{\mu\nu\alpha} G^{\mu\nu\alpha} + 2\xi R \tilde{\nabla}_{\mu} B^{\mu} \right) , \quad (3.2.1)$$

onde $\tilde{\nabla}_{\mu}$ representa a derivada covariante expressa em termos do símbolo de Christoffel

$$\tilde{\nabla}_{\mu} B_{\nu} = \partial_{\mu} B_{\nu} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} B_{\alpha} . \quad (3.2.2)$$

Cabe aqui uma importante observação a respeito do tipo de escolha feita para o Lagrangeano de interação. À primeira vista, a maneira mais fácil de se obter interações entre a torção e os campos relativísticos é através da derivada covariante. No entanto, a conexão afim contém uma parte dependente da torção, de modo que a derivada covariante do campo também contém uma interação com a torção. Todavia, devemos tomar cuidado com este tipo de procedimento, pois ele pode levar a uma quebra da invariância de gauge

¹⁴ $K^{\mu\alpha}_{\alpha} = -t^{\mu}$

da teoria. De fato, um campo Abeliano de gauge, A_μ , não pode interagir com a torção e ao mesmo tempo manter a invariância de gauge. Daí, a escolha do termo de interação na forma apresentada em (3.2.2).

Variando a ação em relação a t_μ , obtemos a seguinte relação:

$$t^\mu = -\frac{4k^2\xi\widetilde{\nabla}^\mu\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}{1+2k^2\xi\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}, \quad (3.2.3)$$

por ser puramente algébrica a sua contribuição à ação. A variação em relação aos campos φ e $\chi_{\mu\nu}$ leva-nos a

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ \chi_{\mu\nu} = 0. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Substituindo estas equações na ação, o Lagrangeano do nosso modelo pode ser reescrito sob uma forma na qual a torção é totalmente eliminada (a torção aparece somente como um campo auxiliar):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{k^2}\sqrt{g}\widetilde{R} + \frac{1}{6}\sqrt{g}G_{\mu\nu\alpha}G^{\mu\nu\alpha} + 2\xi\sqrt{g}\widetilde{R}\widetilde{\nabla}_\mu B^\mu + 8k^2\xi^2\sqrt{g}\frac{\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\mu B^\mu\widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}{1+2k^2\xi\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}. \quad (3.2.5)$$

Deve-se notar a similaridade entre o termo de auto-interação de B_μ e os modelos- σ não-lineares. A forma não-polinomial do vértice, tornando-o não-renormalizável, não deve causar surpresa, pois a gravitação pura com matéria já é não-renormalizável em 3D.

Para se obter o propagador e, conseqüentemente, o espectro de partículas da teoria, devemos linearizar a parte dependente da métrica do Lagrangeano, fazendo uso da aproximação de campo fraco já discutida no Capítulo 3. Procedendo desta forma, e mantendo somente os termos bilineares nos campos, o Lagrangeano torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}h^{\mu\alpha}\square\left(\frac{1}{2}P^{(2)} - \frac{(4\alpha+3)}{4\alpha}P_S^{(0)} - \frac{1}{2\alpha}P^{(1)} - \frac{1}{4\alpha}P_w^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}P_{ws}^{(0)} + \frac{\sqrt{3}}{4\alpha}P_{sw}^{(0)}\right)_{\mu\alpha,\nu\beta} \times \\ & \times h^{\nu\beta} + \frac{1}{2}B^\mu\square\left(-2\omega_{\mu\alpha} - 2\beta\theta_{\mu\alpha} + 16k^2\xi^2\square\omega_{\mu\alpha}\right)B^\alpha + \frac{1}{2}2k\xi h^{\alpha\rho}\partial_\alpha\partial_\rho\partial_\mu B^\mu - B^\mu \times \\ & \times \partial_\mu\partial_\alpha\partial_\rho h^{\alpha\rho} - \eta_{\alpha\rho}h^{\alpha\rho}\square\partial_\mu B^\mu + \eta_{\alpha\rho}B^\mu\partial_\mu\square h^{\alpha\rho}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

O Lagrangeano linearizado acima pode ser reescrito em uma forma mais conveniente, como segue

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum \phi^\alpha \mathcal{O}_{\alpha\beta} \phi^\beta, \quad (3.2.7)$$

onde $\phi^\alpha = (h^{\mu\nu}, B^\mu)$ e $\mathcal{O}_{\alpha\beta}$ é o operador de onda. Os propagadores são dados por

$$\langle 0 | T [\phi_\alpha(x) \phi_\beta(y)] | 0 \rangle = i (\mathcal{O}_{\alpha\beta})^{-1} \delta(x-y). \quad (3.2.8)$$

A fim de inverter o operador de onda do Lagrangeano, usaremos novamente o formalismo dos operadores de projeção já discutidos no Capítulo 2. Usando a álgebra dos operadores de spin, os propagadores são facilmente obtidos. Sua forma explícita no espaço dos momenta lê-se como segue:

$$\langle hh \rangle = \left(\frac{2}{\square} P^{(2)} - \frac{2\alpha}{\square} P_m^{(2)} - 4 \frac{1 + \alpha - 8k^2 \xi^2 \square}{\square} P_w^{(0)} - 2\sqrt{3} \frac{1 - 8k^2 \xi^2 \square}{\square} P_{ws}^{(0)} + \right. \\ \left. 2\sqrt{3} \frac{1 - 8k^2 \xi^2 \square}{\square} P_{sw}^{(0)} - 4 \frac{1 - 6k^2 \xi^2 \square}{\square} P_s^{(0)} \right) \quad (3.2.9)$$

$$\langle B_\mu B_\nu \rangle = \left(-\frac{1}{2\beta \square} \theta_{\mu\nu} - \frac{1}{2\square} \omega_{\mu\nu} \right), \quad (3.2.10)$$

onde suprimimos os índices de $h_{\mu\nu}$ e dos projetores $P_{\mu\nu, \alpha\beta}$.

Dos resultados acima, vemos que esta teoria contém um único pólo não-massivo e não-taquiónico, tanto no setor de spin-2 de $\langle h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \rangle$, como no que diz respeito ao campo $B_{\mu\nu}$.

O próximo passo é verificar a unitariedade da teoria a tree-level. Isto é feito analisando-se os resíduos do propagador saturado. As correntes com a qual saturaremos o propagador devem ser compatíveis com as simetrias da teoria. Procedendo como Capítulo 2, expandimos a corrente na forma

$$J_{\mu\nu}(p) = a(p) p_\mu p_\nu + b(p) p_{(\mu} \bar{p}_{\nu)} + c(p) p_{(\mu} \epsilon_{\nu)} + d(p) \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu + e(p) \bar{p}_{(\mu} \epsilon_{\nu)} + f(p) \epsilon_\mu \epsilon_\nu, \quad (3.2.11)$$

onde p^μ , \tilde{p}^μ e ε^μ são os vetores linearmente independentes já definidos anteriormente. A amplitude de transição é o propagador saturado,

$$\mathcal{A} = J^{*\mu\nu}(p) \langle h_{\mu\nu}(p) h_{\alpha\beta}(p) \rangle J^{\alpha\beta}(p). \quad (3.2.12)$$

Devido ao vínculo $p_\mu J^{\mu\nu} = 0$, somente os projetores $P^{(2)}$ e $P_s^{(0)}$ sobrevivem. Após algumas manipulações algébricas, obtemos finalmente o seguinte resultado para a parte imaginária da amplitude de transição no pólo $p^2 = 0$:

$$\text{Im Re s } \mathcal{A} = 0. \quad (3.2.13)$$

Desta forma, chegamos à conclusão de que o gráviton não-massivo não se propaga. Uma análise semelhante para o campo de gauge revela que este também não apresenta nenhuma dinâmica. O efeito de introduzirmos a torção em nossa teoria foi o de eliminar o pólo massivo que havia sido gerado pela interação do campo de gauge com a gravitação pura. Este efeito, a princípio, não era esperado. O próximo passo natural é verificarmos o efeito do campo de torção na geração de massa a 1-loop.

Os diagramas de Feynman e os vértices pertinentes à nossa discussão são os mesmos que os apresentados nas Figuras (1) e (2) do capítulo precedente. O vértice representado na Figura (1a) apresenta, no caso do presente modelo, a seguinte expressão analítica:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & 8i\kappa^3 \xi^2 \left\{ -2\eta^{\alpha\nu} p_3^\beta p_1^\mu (p_1 \cdot p_3) + \eta^{\alpha\beta} p_3^\nu p_1^\mu (p_1 \cdot p_2) - 2\eta^{\alpha\nu} p_1^\mu p_3^\beta (p_1 \cdot p_3) + \right. \\ & + \eta^{\alpha\beta} p_3^\nu p_1^\mu (p_1 \cdot p_3) + 2\eta^{\alpha\nu} p_2^\beta p_1^\mu (p_1 \cdot p_3) + \eta^{\alpha\nu} p_2^\beta p_1^\mu (p_1 \cdot p_2) - p_1^\alpha p_1^\mu p_2^\beta p_2^\nu + \\ & \left. - \eta^{\mu\alpha} p_1^\beta p_2^\nu (p_1 \cdot p_2) + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} p_2^\nu p_1^\mu (p_1 \cdot p_2) \right\} + i\kappa \left(\eta_{\alpha\nu} p_1^\mu p_3^\beta + \eta^{\beta\nu} p_1^\mu p_3^\alpha - \right. \\ & \left. \eta^{\alpha\beta} p_1^\mu p_3^\nu + \eta^{\nu\beta} p_1^\mu p_2^\alpha + \eta^{\nu\alpha} p_1^\mu p_2^\beta - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} p_1^\mu p_2^\nu \right). \quad (3.2.14) \end{aligned}$$

O vértice (2b) apresenta a mesma expressão algébrica que o correspondente modelo sem torção. A expressão algébrica para o vértice (2c), com torção, é bastante complexa e, por razões de simplicidade de apresentação, encontra-se listado no Apêndice dado ao

final desta tese.

Por um cálculo direto dos diagramas da Figura (2), o resultado final é que nenhum termo de massa topológica para o campo de gauge B^μ está presente a 1-loop, devido ao tipo de acoplamento não-mínimo deste campo com o setor gravitacional. Este resultado é equivalente à afirmação de que os pólos do propagador (3.2.8) não são corrigidos após levarmos em consideração os efeitos de 1-loop.

2.3 Conclusões

Investigamos uma ação na qual a torção é acoplada não-minimamente a um campo de gauge anti-simétrico, num background Riemanniano. A torção, por não ser um campo de gauge (ela transforma-se como um campo de matéria), pode ser problemática para a unitariedade da teoria. De fato, em $D = (1 + 2)$, o efeito da torção é trazer um ghost no setor de spin 2 e um táquion no setor de spin-1 [1]. No entanto, no modelo discutido neste capítulo, foi mostrado que a teoria é consistente, isto é, unitária. Além disto, o campo de torção não apresenta dinâmica.

Um outro resultado interessante pode ser extraído desse tipo de acoplamento. No capítulo anterior, vimos que o efeito do acoplamento do campo de K-R com a gravidade era a aparição de um pólo dinâmico para o primeiro. Quando o campo de torção é levado em consideração, o que obtemos é o exato cancelamento deste pólo. A partir de primeiros princípios, este resultado não poderia ser previsto.

Cálculos explícitos mostram também que não há correções de massa a 1-loop, decorridos do tipo de acoplamento estudado. Obtivemos, apenas, uma correção na função de onda do campo de Kalb-Ramond [47].

Capítulo 4

Férmions, Torção e Geração Dinâmica de Massa em $D = (1+2)$.

¹⁵Na primeira parte deste capítulo, discutimos o acoplamento mínimo entre férmions e a gravidade em três dimensões, com torção dinâmica. Na segunda parte, o campo de Kalb-Ramond é não-minimamente acoplado a estes férmions de modo invariante de gauge. Mostramos que um mecanismo de geração de massa a 1-loop ocorre tanto para o campo de gauge como para a torção. Para os férmions, não há geração dinâmica de massa, mas ocorre apenas uma correção na massa a tree-level, proporcional ao acoplamento de Yukawa. A unitariedade é assegurada e os graus de liberdade longitudinais, excitados no campo de KR, não correspondem a um ghost. Em todos estes aspectos, a torção parece desempenhar um papel crucial.

4.1 Introdução

Como enfatizado nos capítulos anteriores, o mecanismo de geração dinâmica de massa (mecanismo invariante de gauge) tem despertado grande interesse nas duas últimas

¹⁵O conteúdo deste capítulo é baseado no paper " Propagating Torsion in 3D-Gravity and Dynamical Mass Generation ", hep-th 99 ,escrito em colaboração com J.L.Boldo e J.A.Heläyel-Neto, e submetido para publicação em "Journal of High Energy Physics."

décadas. Em particular, a teoria de Maxwell em três dimensões acoplada a férmions conduz a uma correção a 1-loop para o propagador do fóton com um pólo não-trivial. Um outro fato de especial relevância é a pesquisa da interação entre a torção e campos espinoriais. Recentemente, o estudo de teorias com torção vem crescendo devido ao sucesso do desenvolvimento formal das teorias de cordas, as quais, juntamente com as suas modificações e generalizações, têm sido atualmente consideradas como as principais candidatas para uma descrição única de todos os campos quânticos. Lembramos que a teoria de cordas prevê a existência da torção do espaço-tempo. Motivado por estes fatos, neste capítulo investigaremos um modelo onde a matéria fermiônica é minimamente acoplada à gravidade em 3D na presença da torção. Visto que o nosso principal objetivo é estudar o acoplamento entre o campo de torção e os férmions, a parte das contribuições Riemannianas usuais, colocamos $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. (Salientemos que um espaço plano com torção não é algo meramente especulativo, já que pode corresponder, na Natureza, ao caso de um espaço preenchido por um mar de neutrinos cosmológicos (neutrinos solares). É um fato conhecido que os neutrinos podem produzir torção, sem contribuir para a métrica do espaço onde eles habitam). Em essência, isto nos diz que queremos estudar os efeitos da torção sobre um background plano, ou ainda, as flutuações da métrica são muito pequenas quando comparadas às excitações da torção. Neste background plano, a interação entre a componente escalar da torção e o férmion fornece, a 1-loop, uma correção de massa para este último. Por outro lado, a flutuação no escalar de torção pode adquirir, também a 1-loop, uma massa proporcional ao parâmetro de massa do férmion.

No que segue, estaremos interessados apenas no acoplamento mínimo entre férmions e torção. Como será mostrado mais adiante, somente a componente φ do tensor de torção (eq. (3.1.5)) na verdade se acopla minimamente aos férmions. Por outro lado, vale a pena mencionarmos que a componente de spin-2, $\chi_{\mu\nu}$, desempenha um papel peculiar quando consideramos a teoria gravitacional de Chern-Simons: influencia o setor dependente do gauge do propagador do gráviton e é responsável pela aparição de um modo de ghost

massivo no espectro.

Neste estágio da discussão, cabe lembrar da observação feita, no capítulo anterior, a respeito da interação entre a torção e os campos relativísticos e a manutenção da exigência da invariância de gauge da teoria. Este tipo de problema não ocorrerá aqui, pois, para uma teoria escalar, a derivada covariante é a derivada usual, e daí, o campo escalar não se acopla minimamente à torção. Por outro lado, a exigência de que a equação de Dirac em um campo gravitacional preserve a invariância de Lorentz local dá uma interação direta entre torção e férmions. Um espinor de Dirac em $D = (1 + 2)$ tem dois graus de liberdade independentes. Eles correspondem à partícula e à sua antipartícula, ambas com spin meio. Se a partícula é idêntica à sua antipartícula temos um espinor de Majorana. Não existem espinores de Weyl em $D = (1 + 2)$.

Em um espaço de Riemann-Cartan, a ação de Dirac para um férmion massivo tem a forma

$$S_D = \int d^3x \sqrt{g} \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi \right], \quad (4.1.1)$$

onde as derivadas covariantes dos campos espinoriais são dadas por

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{8} B_\mu^{ab} [\gamma_a, \gamma_b] \psi, \quad (4.1.2)$$

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{8} B_\mu^{ab} \bar{\psi} [\gamma_a, \gamma_b]; \quad (4.1.3)$$

aqui, os índices latinos referem-se aos índices de espaço plano tangente. B_μ^{ab} são as componentes da conexão de spin,

$$B_\mu^{ab} = \omega_\mu^{ab} + K_\mu^{ab}, \quad (4.1.4)$$

que é o campo de gauge do grupo de Lorentz local.¹⁶ (O espaço local é importante para descrevermos os spins da teoria, já que este conceito só tem sentido quando estamos

¹⁶Neste capítulo, definimos a contorsão de uma forma ligeiramente diferente daquela utilizada anteriormente, a saber, $K_{\mu\nu\alpha} = -T_{\mu\nu\alpha} - T_{\alpha\mu\nu} + T_{\nu\alpha\mu}$.

trabalhando com o grupo de Lorentz local). $\omega_\mu{}^{ab}$ é a parte Riemanniana da conexão de spin:

$$\omega_\mu{}^{ab} = e_{\mu c} \omega^{cab} = \frac{1}{2} e_{\mu c} (\Omega^{cab} + \Omega^{acb} - \Omega^{bac}), \quad (4.1.5)$$

onde $\Omega_{cba} = e_c^\mu e_b^\nu (\partial_\mu e_{\nu a} - \partial_\nu e_{\mu a})$ representa os coeficientes de rotação de Ricci, e e_μ^a são as dreibeins.

Estamos usando a seguinte representação para as matrizes de Dirac em um espaço-tempo tri-dimensional localmente plano:

$$\gamma^0 = \sigma^3; \gamma^1 = i\sigma^1; \gamma^2 = i\sigma^2, \quad (4.1.6)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli. Elas satisfazem às seguintes relações de anticomutação:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}1, \quad (4.1.7)$$

e

$$\gamma^a \gamma^b = \eta^{ab}1 - i\varepsilon^{abc} \gamma_c. \quad (4.1.8)$$

Após alguma álgebra, mostra-se que o Lagrangeano de Dirac na presença da torção é dado por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (4.1.9)$$

onde \mathcal{L}_0 é o Lagrangeano de Dirac para o férmion livre

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi, \quad (4.1.10)$$

e \mathcal{L}_I é o termo de interação¹⁷,

$$\mathcal{L}_I = \frac{i}{4} K_{\mu\nu\lambda} \bar{\psi} \gamma^{[\mu} \gamma^\nu \gamma^{\lambda]} \psi. \quad (4.1.11)$$

¹⁷ $\gamma^a \gamma^b \gamma^c = \eta^{ab} \gamma^c - \eta^{ac} \gamma^b - \eta^{bc} \gamma^a - i\varepsilon^{abc}.$

Usando a identidade $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\gamma^{[\mu}\gamma^\nu\gamma^{\lambda]} = -i3!$, o termo de interação pode ser colocado numa forma bem mais simples, a saber¹⁸,

$$\mathcal{L}_I = -\frac{3}{2}\varphi\bar{\psi}\psi. \quad (4.1.12)$$

Desta maneira, vemos que somente a componente escalar da torção é selecionada, e assim, se acopla aos férmions, desde que a prescrição de acoplamento mínimo seja escolhida. Mais ainda: a interação entre a torção e o férmion faz-se através de um acoplamento tipo Yukawa.

Das equações anteriores, vemos imediatamente que a componente φ da torção não apresenta dinâmica e, conseqüentemente, esta última não se propaga. Se desejarmos que a torção seja um campo que se propague, nosso próximo passo é obter um Lagrangeano que contenha um termo cinético para este campo. Várias classes de Lagrangeanos podem ser obtidos via procedimento de substituição mínima, a saber, da substituição do símbolo de Christoffel pela conexão afim de Cartan. No entanto, se este procedimento for seguido, obtemos um único termo algébrico para o campo φ , que advém do Lagrangeano de Einstein-Hilbert, $R \sim \varphi^2$. Isto mostra que a torção, bem como o gráviton, não se propagam na teoria de Einstein da gravitação em três dimensões. Em face a esta dificuldade, termos de ordem superior na curvatura devem ser introduzidos, a fim de se obter um termo cinético para a torção. De fato, este termo é obtido de termos de curvatura de ordem superior do tipo $\left(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right) \sim \partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi$. Portanto, consideramos a seguinte ação

$$S = S_D + S_R, \quad (4.1.13)$$

onde S_D é dada por (4.1.1), e S_R é

$$S_R = \int d^3x\sqrt{g} \left[aR + b\left(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2\right) \right]. \quad (4.1.14)$$

¹⁸ $[K] = m^{-\frac{1}{2}}$; $[\varphi] = [\chi_{\mu\nu}] = [t_\mu] = m$; $[\psi] = m$.

Finalmente, em um background plano, o Lagrangeano conjunto para os férmions e para a torção é dado por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2 + i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi + \alpha \phi \bar{\psi} \psi, \quad (4.1.15)$$

onde redefinimos o campo $\varphi \rightarrow \phi = \sqrt{b}\varphi$, de modo que $\mu^2 = \frac{a}{b}$ e $\alpha = -\frac{3}{2\sqrt{b}}$. Notemos, agora, a presença de um termo cinético para a torção na equação acima. Além disso, devemos exigir que $a > 0$ e $b > 0$ para assegurar que μ^2 seja positivo e α , real. Além disso, as dimensões canônicas dos campos e parâmetros da teoria são dadas por:

$$[\phi] = \frac{1}{2}; [\psi] = 1; [b] = 1; [a] = 1. \quad (4.1.16)$$

Observando o Lagrangeano (4.1.15), podemos notar que iniciamos a nossa discussão com dois parâmetros de massa não-nulos, μ^2 e m . Todavia, após efetuarmos os cálculos a 1-loop, podemos colocar $\mu = 0$ e analisarmos como as massas são corrigidas. Enfatizamos que a colocação de $m = 0$ ao final dos cálculos a 1-loop **não** é um procedimento adequado, visto que estaríamos passando de um modelo em que a paridade é quebrada para um no qual a paridade é restaurada. Assim, o procedimento de passarmos ao limite $m \rightarrow 0$ não é consistente após cálculos perturbativos [47].

Agora, podemos obter as regras de Feynman da teoria. Os propagadores para os campos escalar e espinorial obtidos da ação são dados por

$$i\Delta_0(p) = \frac{i}{p^2 - \mu^2} \quad (4.1.17)$$

e

$$iS_0(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}. \quad (4.1.18)$$

Além disto, o vértice férmion-torção é dado por

$$V(\psi, \phi) = i\alpha. \quad (4.1.19)$$

Visto que a dimensão de α é $\frac{1}{2}$, este vértice é super-renormalizável. De fato, uma análise por contagem de potência mostra que o grau de divergência de gráficos primitivamente divergentes, δ , decresce quando o número de vértices cresce:

$$\delta = 3 - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}E_\phi - E_\psi, \quad (4.1.20)$$

onde V_n é o número de vértices, enquanto que E_ϕ e E_ψ são as linhas externas de ϕ e ψ , respectivamente.

A partir destes resultados, estamos agora em condições de proceder ao cálculo das correções de auto-energia para os propagadores "nus" e discutir o mecanismo de geração de massa, analisando os pólos dos propagadores corrigidos a 1-loop. Para o gráfico de auto-energia do férmion, obtemos:

$$-i\Sigma(p) = (i\alpha)^2 i^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + \not{q} + m)}{[(p-q)^2 - m^2]} \frac{1}{(q^2 - m^2)}. \quad (4.1.21)$$

Como estamos interessados em verificar a geração, ou não, de massa devido à interação, podemos colocar os momenta externos iguais a zero. Assim, chegamos ao seguinte resultado

$$-i\Sigma(0) = i \frac{\alpha^2 m}{4\pi(m + \mu)}. \quad (4.1.22)$$

A inserção deste gráfico de 1-loop leva ao seguinte propagador corrigido:

$$\begin{aligned} iS &= iS_0 + iS_0(-i\Sigma)iS_0 + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

O resultado acima mostra que, se iniciássemos com um modelo no qual a torção¹⁹ e o férmion tivessem massa nula, a correção de alta energia para o férmion ainda seria diferente de zero, e dada somente em termos do acoplamento de Yukawa, α . Todavia,

¹⁹Torção com massa nula apresenta o mesmo problema no infra-vermelho que a QED₃.

este resultado não deve ser interpretado como uma geração dinâmica de massa para o férmion visto que, como já mencionamos, o procedimento de passagem ao limite $m \rightarrow 0$, após a realização dos cálculos perturbativos, não é consistente; se tivéssemos iniciado os cálculos com torção e férmions não-massivos, obteríamos

$$-i \sum(p) = \frac{\alpha^2 \not{p}}{16\sqrt{p^2}} \quad (4.1.24)$$

evidenciando que nenhuma massa seria dinamicamente gerada para o férmion. Este resultado é consistente com a invariância de paridade dos modelos com férmions não-massivos em 3D: anomalia de paridade não deve ser induzida perturbativamente em modelos com férmions não-massivos. O propagador modificado (4.1.23) apresenta um pólo massivo em $p^2 = \left(m - \frac{\alpha^4}{16\pi}\right)^2$.

A auto-energia para a torção é dada por:

$$\begin{aligned} i\Pi_\phi &= -(-i\alpha)(i)^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\text{tr}[(\not{q} + m)(\not{p} - \not{q} + m)]}{(q^2 - m^2)[(p - q)^2 - m^2]}, \\ i\Pi_\phi(0) &= -i \frac{m\alpha^2}{\pi}. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Similarmente, o propagador modificado da torção é obtido somando-se a série

$$\begin{aligned} i\Delta &= i\Delta_0 + i\Delta_0(i\Pi_\phi)i\Delta_0 + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu^2 + \Pi_\phi}. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Aqui, temos uma outra correção de massa, desta vez para o pólo do propagador da torção. Deste resultado, concluímos que o campo de torção, ao mediar a interação entre férmions massivos, dá origem a uma interação de curto alcance. Em outras palavras, se considerarmos no início uma teoria com torção de massa nula, colocando $a = 0$, seu propagador corrigido a 1-loop exibe um pólo em $p^2 = \frac{m\alpha^2}{\pi}$. Deve ser enfatizado que a **geração dinâmica de massa para a torção exige seu acoplamento a férmions**

massivos. Concluimos esta seção notando que, para férmions não-massivos ($m = 0$), o Lagrangeano (4.1.15) tem uma paridade (\mathcal{P}), visto que ϕ (pseudo-escalar) e $\bar{\psi}\psi$ não são invariantes sob esta operação de simetria em 3D, a saber,

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow -\phi, \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow -\bar{\psi}\psi,\end{aligned}$$

de modo que $\phi\bar{\psi}\psi \rightarrow \phi\bar{\psi}\psi$. Por outro lado, tendo em mente que um termo do tipo ϕ^4 pode ser introduzido via $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ou R^2 , e ajustando os parâmetros tais que o campo ϕ adquira um valor esperado não-nulo no vácuo, os férmions podem se tornar massivos via quebra espontânea de simetria.

Até aqui, lidamos com uma teoria envolvendo torção e campo espinorial. Na próxima seção, incluiremos o campo de Kalb-Ramond e estudaremos a possibilidade de atribuímos a ele uma massa e um caráter dinâmico, por meio de uma interação mediada por um férmion, que o acopla indiretamente à torção.

4.2 Geração de Massa para o campo de K-R não-minimamente acoplado a férmions

Mantendo o mesmo espírito da seção anterior, examinaremos agora o comportamento do campo de KR, no que diz respeito ao mecanismo de geração de massa, quando não-minimamente acoplado aos férmions. A motivação para estudarmos os campos de gauge tipo K-R em 3D pode ser justificada pelo interesse de estudarmos vórtices supersimétricos auto-duais com momento magnético anômalo, como recentemente discutido na referência [80].

O nosso ponto de partida será a ação livre para este campo, já discutida em capítulos

anteriores, e aqui reproduzida

$$S = \frac{1}{6} \int d^3x \sqrt{g} G_{\mu\nu\lambda} G^{\mu\nu\lambda} \quad (4.2.1)$$

bem como o seu termo de gauge-fixing

$$S_{gf} = \beta \int d^3x \left(\eta^{\mu\nu\lambda} \tilde{\nabla}_\mu B_\lambda \right)^2. \quad (4.2.2)$$

Para representar a interação **não-mínima** entre o campo $B_{\mu\nu}$ e a matéria fermiônica, de forma a manter a invariância de gauge da teoria, propomos o seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L}_{int} = \xi \sqrt{g} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{\nabla}_\mu B_\nu \bar{\psi} \psi, \quad (4.2.3)$$

onde ξ tem dimensão $-\frac{1}{2}$, de modo que a renormalizabilidade da teoria é perdida. No espaço-tempo plano, a Lagrangeana total da teoria, que é a soma de (4.1.15), (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu B^\mu)^2 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2 + i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + \\ & + \beta \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu B_\lambda \right)^2 + \alpha \phi \bar{\psi} \psi + \xi \partial_\mu B^\mu \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

A partir do setor bilinear da Lagrangeana acima obtemos, além dos propagadores (4.1.17) e (4.1.18), para a torção e para o férmion, o seguinte propagador para o campo B_μ :

$$iG_0^{\mu\nu}(p) = i \left(\frac{1}{2\beta p^2} \theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2p^2} \omega^{\mu\nu} \right). \quad (4.2.5)$$

A parte imaginária do resíduo da amplitude de transição, quando calculada no pólo $p^2 = 0$, conduz-nos ao resultado:

$$\text{Im Re } s(\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \rightarrow 0} \frac{|a|^2}{2} p^2 = 0; \quad (4.2.6)$$

daí, encontramos um pólo não-massivo que não se propaga.

As regras de Feymann para a teoria em questão são como segue: o vértice torção-férmion já foi calculado e é dado por (4.1.19); o vértice campo de gauge-férmion lê-se:

$$V(B, \psi) = \xi p_\mu. \quad (4.2.7)$$

Além das correções de auto-energia usuais para os propagadores da torção e do campo B_μ , existe um gráfico de auto-energia adicional de mixing que contém os campos B_μ e ϕ nas linhas externas. Este gráfico a 1-loop induz um acoplamento $B_\mu - \phi$ que contribui para o mecanismo de geração de massa. Utilizando as regras de Feynman apresentadas acima, chega-se aos seguintes resultados para os gráficos de auto-energia dos dois campos.

$$\begin{aligned} i\Pi_{\mu\nu} &= i\frac{m\xi^2}{\pi}p^2\omega_{\mu\nu} \\ i\Pi_\mu &= -\frac{m\xi\alpha}{\pi}p_\mu \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

onde $i\Pi_{\mu\nu}$ e $i\Pi_\mu$ são as auto-energias a 1-loop para os diagramas $B_\mu - B_\nu$ e $B_\mu - \phi$, respectivamente. (A auto-energia para o campo de torção é a mesma que em (4.1.24)). A auto-energia para o sistema completo é mais convenientemente escrita na forma matricial:

$$i\Pi_{\mu\nu}^{(total)} = \begin{pmatrix} i\frac{m\xi^2}{\pi}p^2\omega_{\mu\nu} & -\frac{m\xi\alpha}{\pi}p_\mu \\ \frac{m\xi\alpha}{\pi}p_\mu & -i\frac{m\alpha^2}{\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.2.9)$$

O inverso do propagador modificado é dado por

$$\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}_0^{-1} + \Pi^{(total)}, \quad (4.2.10)$$

onde

$$\mathcal{D}_0^{-1} = \begin{pmatrix} (2\beta p^2\theta_{\mu\nu} + 2p^2\omega_{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & (p^2 - m^2) \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Substituindo (4.2.11) e (4.2.9) em (4.2.10), obtemos

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\beta p^2 \theta_{\mu\nu} + 2 \left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right) p^2 \omega_{\mu\nu} & \frac{im\xi\alpha}{2\pi} p_\mu \\ -\frac{im\xi\alpha}{2\pi} p_\mu & p^2 - \mu^2 - \frac{m\alpha^2}{\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.2.12)$$

Os propagadores corrigidos são finalmente obtidos no espaço dos momenta invertendo-se a matriz acima.

$$iG_{\mu\nu}(p) = i \left\{ \frac{1}{2\beta p^2} \theta_{\mu\nu} + \frac{\left(p^2 - \mu^2 - \frac{m\alpha^2}{\pi}\right) \left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right)^{-1}}{2p^2(p^2 - M^2)} \omega_{\mu\nu} \right\}, \quad (4.2.13)$$

$$i\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - M^2}, \quad (4.2.14)$$

onde

$$M^2 = \mu^2 + \frac{m\alpha^2}{\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{m\xi\alpha}{2\pi} \right)^2 \left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi} \right)^{-1}. \quad (4.2.15)$$

Isto mostra que o acoplamento mínimo da torção com a matéria é fundamental para que possamos obter um pólo massivo para o campo de gauge, visto que, se $\alpha = 0$, somente o pólo não-massivo sobrevive. No caso de termos a torção sem massa, o resultado a que chegamos é:

$$M^2 = \frac{m\alpha^2}{\pi} \left[1 + \frac{m\xi^2}{8\pi} \left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi} \right)^{-1} \right]. \quad (4.2.16)$$

Se calcularmos a parte imaginária do resíduo da amplitude de transição no pólo não-massivo, obtemos um resultado positivo, a saber,

$$\text{Im } \mathcal{R}es(A) = \frac{|a|^2}{4} \frac{\left(\frac{m\xi\alpha}{2\pi}\right)^2}{\left(1 + \frac{m\xi^2}{2\pi}\right)^2} > 0,$$

o que nos assegura um grau de liberdade físico. Portanto, o acoplamento indireto entre a torção e o campo de Kalb-Ramond em três dimensões resulta na aparição de um pólo massivo dinâmico no setor longitudinal de B_μ .

Alternativamente, podemos obter um pólo massivo no propagador de B_μ através de um termo da forma $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu B_{\nu\lambda}\phi$, o qual acopla o campo de Kalb-Ramond à parte totalmente antisimétrica do campo de torção.

4.3 Conclusões

A idéia central deste capítulo foi estudar o papel desempenhado pela torção na geração dinâmica de massa para teorias em 3D acopladas à gravidade. Férmions minimamente acoplados à torção selecionam somente a componente escalar desta última. Esta interação dá ao férmion uma correção de massa não-nula que não depende da massa do férmion a 1-loop, mas somente da constante de acoplamento. **O nosso ponto de vista é que nenhuma massa é dinamicamente gerada para esses férmions.** Por outro lado, a própria torção pode adquirir uma massa não-nula por meio de uma correção radiativa a 1-loop.

Quando acoplamos o campo de K-R à gravidade em 3D, via férmions, o resultado interessante que obtivemos foi a **geração dinâmica de massa a 1-loop para a componente longitudinal deste campo**: um pólo massivo e físico é induzido como um subproduto do acoplamento entre a torção e a matéria fermiônica, que também se acopla ao potencial de gauge.

Como uma conclusão geral de nossos cálculos, a torção coloca-se como um meio gerador de massa dinâmica para campos bosônicos em 3D.

Perspectivas Futuras

Como ao final de cada capítulo tecemos considerações gerais e discutimos criticamente os resultados encontrados, seria oportuno finalizar esta tese apresentando um quadro geral de problemas em aberto, em função dos trabalhos desenvolvidos. Inicialmente, tendo em mente continuar na linha de investigação da Gravitação Quântica em 3D, seria cabível proceder-se imediatamente à análise da renormalizabilidade da Gravitação Topologicamente Massiva (Einstein-Chern-Simons) com a inclusão da torção. Esta, uma vez introduzida, gera novas excitações nos setores de spin-2 e de spin-0 do gráviton, introduz um maior número de propagadores mistos e aumenta o grau de convergência dos mesmos no ultravioleta, tornando, por outro lado, necessária uma reconsideração mais cuidadosa da análise da unitariedade perturbativa da matriz- S da teoria..

Os graus de liberdade da torção desempenham um papel importante ao longo de nossas considerações: seja no acoplamento com o campo de gauge de Kalb-Ramond, seja no acoplamento aos férmions. Desta feita, seria bastante razoável que as propriedades da gravitação com torção em 3D ficassem esclarecidas do ponto de vista da formulação BRST, o que já seria necessário na etapa mencionada para o estudo da renormalização e da unitariedade; também, considerações referentes à introdução da supersimetria mereceriam tornar-se objeto de estudos posteriores, complementando de forma mais conclusiva os resultados preliminares obtidos ao longo dos trabalhos que constituem esta tese, e possibilitando uma compreensão melhor sobre o papel da torção em conexão com a supergravidade no caso do modelo topologicamente massivo. Nesta direção, já está em estudo um modelo-de-gauge supersimétrico com simetria $[U(1)]^2$, no qual o "mixing" entre os setores de Maxwell e Kalb-Ramond é realizado através de um termo topológico. Este modelo, inicialmente formulado com uma supersimetria simples, admite uma extensão

ao caso $N=2$ via redução dimensional do modelo acoplado de Maxwell-Kalb-Ramond em 4 dimensões [49].

Finalizando, convém mencionar que a discussão aberta no Capítulo 4 sobre a geração de massa para a torção e para o campo de Kalb-Ramond vem sendo estendida ao caso de férmions de 4 componentes em 3D, na verdade, dubletes de férmions de 2 componentes, para os quais um termo de massa de Dirac **não** quebra a simetria de paridade. Encontram-se em andamento os cálculos perturbativos que irão revelar se, também com estes novos férmions, persiste o mecanismo de indução dinâmica de massa [Nelson, Boldo e Osvaldo, trabalho em andamento].

Apêndice

Neste Apêndice, apresentamos a expressão analítica para o vértice quadrilinear mencionado no texto. Tal vértice é obtido expandindo-se até a ordem- κ^2 o Lagrangeano (3.1.3) e o Lagrangeano abaixo

$$\mathcal{L} = 8\kappa^2\xi^2\sqrt{g}\frac{\widetilde{\nabla}_\alpha\widetilde{\nabla}_\mu B^\mu\widetilde{\nabla}^\alpha\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}{1+2k^2\xi\widetilde{\nabla}_\nu B^\nu}.$$

O resultado encontrado é dado abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \frac{\kappa}{2}(-\eta_{\alpha\nu}p_\mu q_\beta + \eta_{\alpha\mu}(p_\nu - q_\nu)q_\beta - \eta_{\beta\nu}p_\mu q_\alpha + \eta_{\beta\mu}(p_\nu - q_\nu)q_\alpha - \eta_{\alpha\beta}(p_\nu - q_\nu) \times \\ & \times q_\mu + \eta_{\alpha\beta}p_\mu q_\nu - \eta_{\nu\beta}p_\mu(p_\alpha - q_\alpha) - \eta_{\mu\beta}(p_\nu - q_\nu)p_\alpha - \eta_{\nu\alpha}p_\mu(p_\beta - q_\beta) - \eta_{\mu\alpha} \times \\ & \times (p_\nu - q_\nu)p_\beta + \eta_{\alpha\beta}p_\mu(p_\beta - q_\beta)) + \frac{\kappa^3\xi^2}{2}((p^2 - p \cdot q)(-\eta_{\alpha\nu}q_\beta p_\mu + \eta_{\alpha\mu}q_\beta(p_\mu + \\ & - q_\nu) - \eta_{\beta\nu}q_\alpha p_\mu + \eta_{\beta\mu}q_\alpha(p_\nu - q_\nu) + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\mu}(p_\nu - q_\nu)p_\beta + \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}p_\mu(p_\alpha - q_\alpha) + \\ & \frac{1}{2}\eta_{\beta\mu}(p_\nu - q_\nu)p_\alpha - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}p_\beta(p_\nu - q_\nu) - \frac{1}{2}\eta_{\nu\alpha}(p_\beta - q_\beta)p_\mu - \frac{1}{2}\eta_{\mu\beta}p_\alpha(p_\nu - q_\nu) - \\ & \frac{1}{2}\eta_{\nu\beta}(p_\alpha - q_\alpha)p_\mu + \eta_{\alpha\beta}p_\mu(p_\nu - q_\nu)) - p \cdot q(\eta_{\alpha\nu}p_\mu q_\beta + \eta_{\beta\nu}p_\mu q_\alpha - \eta_{\alpha\beta}q_\nu p_\mu - p_\mu \times \\ & \eta_{\alpha\nu}(p_\beta - q_\beta)\eta_{\alpha\nu} - \eta_{\beta\nu}(p_\alpha - q_\alpha)p_\mu) + (p \cdot q - q^2)(-\eta_{\alpha\mu}q_\beta(p_\nu - q_\nu) - \eta_{\beta\mu}q_\alpha \times \\ & (p_\nu - q_\nu) + \eta_{\alpha\beta}q_\mu(p_\nu - q_\nu) - \eta_{\alpha\mu}(p_\nu - q_\nu)p_\beta - \eta_{\beta\mu}p_\alpha(p_\nu - q_\nu)) - p_\alpha p_\mu(p_\beta + \\ & - q_\beta)(p_\nu - q_\nu) - (p_\alpha - q_\alpha)(p_\nu - q_\nu)p_\beta p_\mu), \end{aligned}$$

onde se supõe que todos os momenta estejam orientados de tal modo a entrarem no vértice.

Referências

- [1] J. L. Boldo, L. M. de Moraes and J. A. Helayël-Neto, "Comments on Topological Massive Gravity with Propagating Torsion", hep-th/9903127, submetido para publicação.
- [2] L. M. de Moraes, Tese de M.Sc. em preparação.
- [3] S Deser and Z. Yang, *Class. Quantum Grav.* 7 (1990) 1603-1612.
- [4] Donald E. Neville, *Phys. Rev.* D23 (1980) 1244.
- [5] Peter Peldán, *Class. Quantum Grav.* 11 (1994) 1087-1132.
- [6] Jonh F. Donoghue, *Phys. Rev.* D50 (1994) 3874- 3888.
- [7] F. W. Hehl, P. von der Heyde, G. David Kerlick, *Rev. of Modern Physics*, 48 (1976) 393.
- [8] Jonh F. Donoghue, *Phys. Rev. Letters* 72 (1994).
- [9] Massimo Giovannini, *Phys. Rev.* D59 (1999) 063503-1.
- [10] Sean M. Carroll, George B. Field, *Phys. Rev.* D50 (1994) 3867.
- [11] S. Desser, R. Jackiw, S. Templeton, *Annals of Physics*, 140 (1982) 372-411.
- [12] D. Z. Freedman, P. K. Townsend, *Nuclear Physics* B177 (1981) 282-296.
- [13] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nuclear Physics* B44 (1972) 189-213.
- [14] V. De Sabbata, M. Gasperini, *Physics Letters* 77A (1980) 300-302.
- [15] Bettina Keszehelyi, Gary Kleppe, *Physics Letters B*, 281 (1992) 33-35.
- [16] E. Cremmer, J. Scherk, *Nuclear Physics B*, 72 (1974) 117-124.
- [17] Amitabha Lahiri, *Phys. Rev.* D55 (1996) 5045-5050.

- [18] P. van Nieuwenhuizen, Nuclear Physics B60 (1973) 478.
- [19] A. S. Belyaev, I. I. Shapiro, Phys. Lett. 425B (1998) 246.
- [20] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields: Foundations. (Cambridge Uni. Press, 1995).
- [21] L. H. Ryder and I. L. Shapiro, Phys. Lett. A, A247 (1998) 21.
- [22] I. I. Shapiro, Mod. Phys. Lett. 9A (1994) 729.
- [23] I. L. Buchbinder and I. L. Shapiro, Class. Quantum Grav. 7 (1990) 1197.
- [24] S. Sezgin and P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. D21 (1980) 3269.
- [25] R. T. Hammond, Phys. Rev. D52 (1995) 6918.
- [26] E. Witten, Nucl. Phys. B311 (1988) 46.
- [27] F. C. P. Nunes and G. O. Pires, Phys. Lett. B311 (1993) 339.
- [28] M. Novello, Phys. Lett. A59 (1976) 105.
- [29] N. Birrell and P. C. W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [30] De Sabbata and M. Gasperini, Introduction to Gravitation, World Scientific, Singapore (1985).
- [31] M. Gasperini, Phys. Rev. D56 (1997) 4815.
- [32] Michio Kaku, Introduction to Superstring. (Springer-Verlag, New York, 1994).
- [33] G. Grignani and G. Nardelli, Phys. Rev. D45. (1992) 2719.
- [34] C. G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, Ann. Phys. (N. Y.) 59 (1970) 42.
- [35] G. 't Hooft and M. Veltman, Ann. Inst. Henri Poincaré, 20 (1974) 69.
- [36] O. Piguet and K. Sibold, Nucl. Phys. B248 (1984) 301.
- [37] A. Achucarro and P. K. Townsend, Phys. Lett. B229 (1989) 283.
- [38] R. Feynman, Nucl. Phys. B188 (1981) 479.

- [39] M. Kalb and P. Ramond, Phys. Rev. D9 (1974) 2273.
- [40] E. Cremmer and J. Scherk, Nucl. Phys. B72 (1974) 117.
- [41] R. Jackiw, Phys. Lett. B152 (1985) 303.
- [42] W. A. Moura Melo, J. A. Helayël-Neto e N. Panza, **aceito para publicação em Int. J. Mod. Phys. A.**
- [43] S. Giddings, J. Abbott and K. Kuchar, Gen. Rel. Grav. 16 (1984) 751.
- [44] D. Z. Freedman and P. K. Townsend, Nucl. Phys. B177 (1981) 282.
- [45] J. R. Gott and M. Alpert, Gen. Rel. Grav. 16 (1984) 701.
- [46] A. Lahiri. Mod. Phys. Lett. A8 (1993) 2403.
- [47] J. L. Boldo, J. A. Heläyel-Neto e N. Panza, " Propagating Torsion in 3D-Gravity and Dynamical mass Generation", hep-th 99, submetido para publicação.
- [48] "Symbolic Manipulation with FORM", by J.A.M.Vermaseren, Published by CAN, Amsterdam,1991.
- [49] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Mansur e A.L.M.A. Nogueira, Int. J. Mod. Phys. A14 (1999) 147.

**“FÉRMIONS, CAMPOS-DE-GAUGE E GRAVITAÇÃO
COM TORSÃO EM MODELOS PLANARES: UMA
ANÁLISE PERTURBATIVA ”**

Nelson Luiz Panza Pereira da Silva

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Ion Vasile Vancea

Ion Vasile Vancea

Nazira Abache Tomimura

Nazira Abache Tomimura

Sebastião Alves Dias

Sebastião Alves Dias

Marco Aurélio Cattacin Kneipp

Marco Aurélio Cattacin Kneipp

Oswaldo Monteiro Del Cima

Oswaldo Monteiro Del Cima - Convidado Especial

Rio de Janeiro, 24 de novembro de 1999