

Tese de Doutorado

A Simetria Quiral e o Confinamento na Cromodinâmica Quântica

Marcello Barbosa da Silva Neto

Dedicatória

*Ao meu querido filho Leonardo
e à minha amada esposa Anna*

Agradecimentos:

- Ao meu orientador Nami Svaiter e ao meu co-orientador Adolfo Malbouisson pela amizade, ensinamentos e paciência durante estes anos de frutífera colaboração;
- Ao meu grande amigo e colaborador Flavio Nogueira com quem aprendi e ainda aprenderei muita física;
- Ao meu eterno guru Sebastião Alves Dias (grande pai 20) pelos ensinamentos ao pequeno filho 14;
- Aos meus mais recentes colaboradores Anastasios Petkou, Hugo Christiansen e Gentil Pires, pelas discussões e amizade;
- A todos os funcionários, secretárias, alunos e pesquisadores do DCP, LAFEX, biblioteca e CFC, que me acompanharam durante todos estes anos;
- Um agradecimento especial a Anibal Omar Caride por permitir e oferecer condições para o desenvolvimento da pesquisa científica entre os pós-graduandos;
- À CAPES pelo apoio financeiro;
- À toda minha família pelo apoio e amor a mim dedicados.

Resumo

Nesta tese, vamos estudar algumas propriedades termodinâmicas da cromodinâmica quântica em condições extremas: alta temperatura e/ou densidade bariônica. Para começar, vamos investigar, no primeiro capítulo, a quebra da simetria quiral, e sua eventual restauração à temperatura finita, no contexto da redução dimensional de teorias de campos. Vamos calcular a constante de decaimento do *pion*, à temperatura finita, a partir de uma teoria efetiva dimensional reduzida, conforme sugerido na literatura. Dando seqüência, discutiremos a restauração da simetria quiral, no caso de a quebra de simetria ter origem dinâmica, na presença de um potencial químico: real ou imaginário. Mostraremos que, enquanto para um potencial químico real a restauração da simetria é favorecida devido à existência de um meio denso, para o caso de um potencial químico imaginário a mesma não somente é dificultada como torna-se impossível para certos valores deste segundo. Isto acontece devido ao aparecimento de uma fase, para os campos fermiônicos, de maneira semelhante ao processo de anionização. Para finalizar, vamos mostrar, no segundo capítulo, como a transição de desconfinamento, em uma teoria em $2 + 1$ dimensões, pode ser entendida como um efeito Aharonov-Bohm. O desconfinamento seria uma transição do tipo BKT (Berezinsky-Kosterlitz-Thouless), idêntica à encontrada para um gás Coulombiano bi-dimensional. Discutiremos, ainda, a relevância física de alguns estados com energia livre e entropia negativas, que aparecem durante o cálculo de algumas quantidades termodinâmicas no regime desconfinado.

Abstract

In this thesis we will be concerned with some thermodynamical properties of quantum chromodynamics in unusual environments: high temperature and/or baryon density. As a starting point, we investigate, in the first chapter, some general aspects related to the problem of the chiral symmetry phase transition at finite temperature. We will calculate the finite temperature pion decay constant from a dimensionally reduced effective theory, as is a common belief in the literature. In the sequence, we will discuss chiral symmetry restoration transition, for the interesting case of dynamical symmetry breaking, in the presence of a chemical potential: real or imaginary. We will show that, while a real chemical potential favours chiral symmetry restoration, due to a dense medium, for the case of an imaginary chemical potential, chiral symmetry is not only disfavoured, but is even prohibited for a short range of values of the second. This is due to the appearance of an extra phase for the fermion fields, much like what happens in anyon physics. Finally, in the second chapter, we will show how the problem of the deconfinement phase transition, in $2 + 1$ dimensions, can be understood as an Aharonov-Bohm effect. It corresponds to a BKT phase transition, identical to the one observed in a two dimensional Coulomb gas. Also, we will discuss the physical meaning of some states with negative free energy and entropy which appear during the computation of some thermodynamical observables in the deconfined phase.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
1 Introdução	2
2 A simetria quiral	10
2.1 Introdução	10
2.2 A CDQ com <i>quarks</i> leves a baixas temperaturas	12
2.3 A fenomenologia da transição quiral	15
2.4 Do gás de <i>pions</i> à região crítica	18
2.5 A constante de decaimento do <i>pion</i> à temperatura finita $f_\pi(T)$	26
2.6 Quebra dinâmica da simetria quiral	30
2.6.1 O modelo de Gross-Neveu à temperatura finita	31
2.6.2 Restauração de simetria à densidade finita	34
2.6.3 O caso do potencial químico imaginário	37
2.6.4 Universalidade e expoentes críticos	39

3	O confinamento	44
3.1	Introdução	44
3.2	A simetria $Z(N)$ nas teorias de Yang-Mills	46
3.3	Bolhas e domínios no espaço de Minkowski	51
3.4	A simetria Z em teorias de calibre Abelianas	54
3.5	O desconfinamento como um efeito Aharonov-Bohm	57
3.5.1	Quantização da carga e confinamento	58
3.5.2	Topologia e transmutação estatística	60
3.5.3	O potencial efetivo para A_0 e a quebra da simetria Z	66
4	Conclusão	70
A	O mecanismo da universalidade	74
B	Redução dimensional	79
C	Polilogarítmos	82

Lista de Figuras

1.1	Sistemas onde se poderia observar o plasma de <i>quarks</i> e <i>gluons</i>	8
2.1	A energia livre de Landau-Ginzburg para a transição de fase quiral	17
2.2	A constante de decaimento do <i>pion</i> à temperatura finita	28
2.3	Diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu à temperatura e densidade finitas	35
2.4	Configuração de condensados em função da temperatura e densidade bariônica	36
2.5	Diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu na presença de um potencial químico imaginário	38
2.6	Diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu para diversos valores do acoplamento forte e da temperatura	41
3.1	Padrão de quebra de simetria em uma transição de fase de segunda ordem	49
3.2	Padrão de quebra de simetria em uma transição de fase de primeira ordem	50
3.3	Domínios em uma teoria de calibre não Abelianana pura	52
3.4	Estados meta-estáveis para uma teoria de calibre não Abelianana na presença de <i>fermions</i>	53

3.5	Fluxo do grupo de renormalização para a transição BKT de um gás Coulombiano bi-dimensional	68
A.1	Exemplo de fluxo do grupo de renormalização	77
B.1	Aniquilação da dimensão compactificada para altas temperaturas	79

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos trinta anos, testemunhou-se o progresso espetacular da teoria quântica de campos (TQC). Introduzida originalmente para a descrição da eletrodinâmica quântica (EDQ), a TQC tornou-se o instrumento natural para a descrição de todas as interações fundamentais. Mais surpreendentemente ainda, a TQC mostrou-se ideal para o entendimento das transições de fase de segunda ordem em sistemas da mecânica estatística, uma vez que ela provê a estrutura natural para o estudo e a descrição de sistemas em que um número infinito de graus de liberdade se encontram acoplados. Vale a pena lembrar que esta conexão entre TQC e mecânica estatística, estabelecida no trabalho de Kenneth G. Wilson [1], nos tem permitido não somente resolver problemas complexos de sistemas da matéria condensada, através da utilização dos métodos da TQC, mas, reciprocamente, interpretar diversos resultados existentes na TQC, a partir de uma linguagem simples e concreta de sólidos e sistemas magnéticos. Uma excelente referência para a introdução aos métodos da TQC e suas aplicações ao estudo dos fenômenos críticos é o livro *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, de Jean Zinn-Justin [2].

A teoria não relativística de campos foi inventada no final dos anos 50 para a descrição

teórica de sistemas da matéria condensada e nuclear, em condições usuais de laboratório. Apesar de não envolver conceitos além da equação de Schrödinger e mecânica estatística, ela já oferece a estrutura teórica conveniente para se lidar com um grande número de partículas. Por esta razão, a teoria não relativística de campos é também conhecida como teoria de muitos corpos ou, ainda, a teoria de N corpos. Posteriormente, a teoria relativística de campos, introduzida por Fradkin em 1965 [3] e redescoberta somente dez anos mais tarde, ganhou força devido ao crescente interesse, por parte da comunidade de teóricos, por uma descrição da transição de fase que ocorre na teoria eletro-fracas para temperaturas em torno de 200 Mev [4].

Não menos interessante é o estudo dos fenômenos críticos da cromodinâmica quântica (CDQ) [5]. A CDQ é uma teoria de calibre não Abelianas cujo grupo de simetria é o grupo de cor $SU(3)$ - mais genericamente nos referiremos ao grupo $SU(N_c)$. Definida pela densidade de Lagrangeano [6]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \sum_{r=1}^N \bar{\psi}_r (i\not{D} - m_r)\psi_r, \quad (1.1)$$

com $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, e $D_\mu = \partial_\mu - i g A_\mu^a t_a$, onde g é o acoplamento forte e t^a , $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$, são os geradores do grupo de cor, a CDQ é uma teoria de campos renormalizável que, até o presente momento, é a melhor proposta que temos para a descrição das interações fortes. A teoria descrita por (1.1) é uma teoria onde $N_c^2 - 1$ *bosons* vetoriais A_μ^a , os chamados *gluons*, são os mediadores das interações entre os campos de matéria $\bar{\psi}$, ψ , partículas de spin 1/2 chamadas de *quarks*. Existem atualmente seis sabores de *quarks* ($N = 6$): *up*, *down*, *strange*, *charm*, *bottom* e *top*. Na primeira parte desta tese, iremos considerar apenas a CDQ com dois sabores de *quarks* não massivos, $m_u = m_d = 0$,

enquanto que os sabores restantes serão considerados infinitamente pesados, $m_s = m_c = m_b = m_t = \infty$, de modo a desacoplar da dinâmica dos dois primeiros.

O interesse pela CDQ vem, principalmente, de sua propriedade conhecida como liberdade assintótica, segundo a qual os *quarks* não interagiriam a pequenas distâncias [7]. De fato, como acontece em qualquer teoria de campos renormalizável, a constante de acoplamento da CDQ é uma função da escala de energia dos processos de espalhamento Q : $\alpha_s = \alpha_s(Q^2)$. Aqui, $\alpha_s = g^2/4\pi$ desempenha um papel análogo ao da constante de estrutura fina na eletrodinâmica quântica (EDQ). Cálculos baseados no grupo de renormalização mostram que a constante de acoplamento α_s satisfaz

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{2\pi}{b_0 \log(Q/\Lambda_{CDQ})}, \quad (1.2)$$

onde $\beta(g) = -b_0/(4\pi)^2$ é a função beta do grupo de renormalização, com $b_0 = 11 - 2N/3$ e N o número de sabores, e Λ_{CDQ} é a escala de energia característica da CDQ, onde α_s se torna um acoplamento forte [8]. Medidas experimentais indicam que $\Lambda_{CDQ} \sim 200$ Mev. Assim, o uso de teoria de perturbações na CDQ somente dará resultados confiáveis quando Q for muito superior à Λ_{CDQ} , digamos $Q \sim 1$ Gev, quando $\alpha_s \sim 0,4$. Neste regime, a teoria é assintoticamente livre e pode-se usar os métodos da teoria de perturbações com bastante precisão. Por outro lado, as interações se tornam realmente fortes para distâncias maiores que $1/\Lambda_{CDQ}$, que é aproximadamente o tamanho dos *hadrons* mais leves. Para $Q \ll \Lambda_{CDQ}$, a teoria de perturbações não é mais aplicável e o uso de métodos não perturbativos se faz necessário.

A liberdade assintótica é a propriedade que nos permite separar o estudo dos fenômenos críticos, na CDQ, em dois pontos de vista qualitativamente diferentes. O primeiro diz

respeito ao confinamento. Como proposto inicialmente por Collins e Perry [9], a baixas temperaturas ($T \ll \Lambda_{CDQ}$) e/ou densidade bariônica ($n \ll \Lambda_{CDQ}^3$), o sistema é composto por um gás de estados hadrônicos, singletos de cor, auto-estados do Hamiltoniano da CDQ à temperatura zero ¹. Para temperaturas realmente baixas, o sistema simplifica ainda mais, sendo composto essencialmente por *pions*, uma vez que outros *mesons* e *hadrons* têm massas muito superiores e sua mistura no meio é exponencialmente pequena $\sim e^{-M/T}$. Neste caso, temos um sistema rarefeito cujas propriedades podem ser reproduzidas, com bastante precisão, por um gás ideal. Entretanto, com o aumento da temperatura, a densidade de *pions* cresce, a interação entre os mesmos não pode mais ser desprezada e, paralelamente, outros *mesons* e *hadrons* passam a desempenhar um papel importante na dinâmica do sistema. Para temperaturas da ordem de 150 Mev, a interação é tão forte que os estados hadrônicos não podem mais ser considerados como uma boa base para a descrição das propriedades do meio e nenhum cálculo analítico faz sentido. No outro extremo, a altas temperaturas ($T \gg \Lambda_{CDQ}$) e/ou alta densidade bariônica ($n \gg \Lambda_{CDQ}^3$), a análise teórica se torna possível novamente. A diferença é que, nesta ordem de energia, a base ideal para a descrição das propriedades do meio passam a ser estados de *quarks* e *gluons*, os campos elementares do Lagrangeano da CDQ, e não mais estados hadrônicos. Podemos dizer que, a altas temperaturas, os *hadrons* se ionizam em seus componentes básicos, onde os efeitos das interações podem ser tratados perturbativamente, uma consequência direta da liberdade assintótica. Nestas condições extremas, a configuração do meio seria a de um plasma de *quarks* e *gluons* (PQG). A ausência de confi-

¹Deste ponto em diante, T desempenhará o papel da escala de energia Q dos processos de espalhamento. Estas duas quantidades podem, de fato, ser relacionadas.

namento na CDQ, para altas temperaturas, foi demonstrada por Polyakov e Susskind via simulações na rede [10], mas, do ponto de vista teórico, ainda restam algumas perguntas em aberto como: realmente existe uma transição de fase desconfiante na CDQ, ou seria apenas um fenômeno conhecido como *crossover*²?; no caso de uma real transição de fase, qual sua ordem e qual a sua temperatura crítica?; quais as excitações coletivas na fase desconfinada?

O segundo ponto de vista das transições de fase na CDQ diz respeito à restauração, a altas temperaturas, de uma simetria das equações de movimento, no limite onde os *quarks* u e d tem massa nula [11, 12, 13]. Esta é a chamada *simetria quiral*. A ordem desta transição, por ora já bem estabelecida, depende diretamente do número de sabores de *quarks* envolvidos e, até certo ponto, dos valores de suas massas - de fato, a inclusão de um terceiro sabor, o *quark* s , torna a transição de segunda ordem, uma de primeira. No entanto, sua natureza, ou melhor, seu comportamento crítico, ainda dá origem a controvérsias (veja, por exemplo, as discussões em [14, 15]). Assim, uma vez que o número de sabores na CDQ real é maior que dois, $N \geq 2$, e já que as massas dos *quarks* não são exatamente nulas, podemos concluir que a simetria quiral é, na verdade, somente aproximada. Uma simetria quiral exata teria como consequência a existência de dubletos quirais e/ou ausência de massa para todos os *baryons*. Como o *proton* não tem um neutrino associado, e é massivo, concluímos que a simetria quiral deve, necessariamente, estar quebrada. Acima da temperatura crítica, ou densidade bariônica, as previsões da CDQ são de que os *baryons* se agrupem em dubletos de paridade, dubletos quirais, e que

²Diz-se que em um sistema termodinâmico ocorre o fenômeno do *crossover*, quando verifica-se uma mudança apreciável no comportamento das quantidades termodinâmicas do mesmo, mas sem o aparecimento de singularidades na energia livre ou suas derivadas.

os *pions* se tornem massivos.

Por último, interessa ainda saber se a quebra da simetria quirál e o confinamento podem ser relacionados. A concordância entre as temperaturas críticas de ambos os fenômenos conspira a favor de uma unificação dos mesmos. Ainda, a quebra da simetria quirál, como um mecanismo de geração de massa para os *quarks*, induz o aparecimento de um termo que destrói a simetria global, $Z(3)$, associada ao confinamento [16]³. Isto sugere, mais fortemente ainda, uma conexão entre quebra da simetria quirál e confinamento. Todas estas questões são de extrema importância, e ainda se espera poder dar uma explicação teórica, seja no contexto das teorias quânticas de campos e física de partículas, ou, ainda, no contexto da física nuclear, das simulações na rede, da matéria condensada, da cosmologia e da astrofísica.

Poderíamos nos perguntar qual o motivo para tanto interesse nas transições de fase da CDQ. As razões não são poucas. Primeiro, parece não haver mais qualquer dúvida, hoje em dia, de que tal transição efetivamente ocorreu no universo primordial cerca de 10^{-5} segundos após o *big bang* (ver figura (1.1)). Uma transição de primeira ordem levaria a efeitos observáveis. Em particular, poderia ter dado origem a uma assimetria na densidade do número bariônico, o que afetaria o processo de nucleossíntese e, conseqüentemente, deixaria uma assinatura da abundância nuclear primordial. Em segundo lugar, como a teoria das interações fortes, é natural que se explore as propriedades da matéria hadrônica nestas condições extremas, alta temperatura e/ou densidade bariônica. Existem dois sistemas onde se acredita poder encontrar tais condições: um exemplo é o interior das

³Este processo ocorre de maneira semelhante à destruição da transição de fase magnética no modelo de Potts em 3D, que também possui simetria Z_3 na fase ordenada, pela introdução de um campo magnético externo

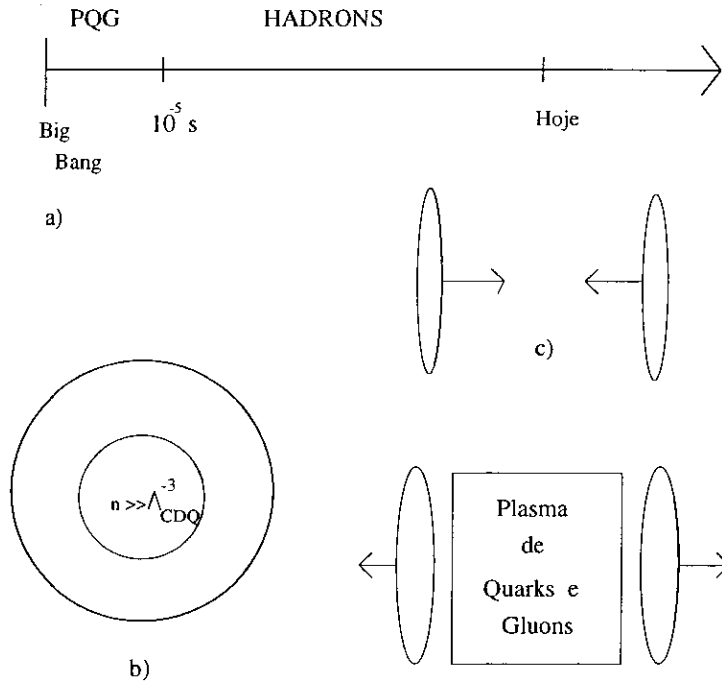


Figura 1.1: Sistemas onde se poderia observar o plasma de *quarks e gluons*: a) nos instantes iniciais de nosso universo; b) no interior de estrelas de *neutrons*, onde a densidade bariônica chega a ser 20 vezes a de um *nucleon*; c) durante a colisão de *ions* pesados relativísticos, onde uma região de alta densidade e temperatura é criada.

estrelas de *neutron*, onde a densidade bariônica chega a ser vinte vezes maior que a densidade bariônica usual de um núcleo atômico; o outro é durante a colisão de *ions* pesados a extremamente altas energias, os chamados processos duros, onde um estado de alta densidade e temperatura pode ser produzido. Em ambos os casos, acredita-se que o sistema físico de interesse seja o PQG. Infelizmente, a falta de evidências experimentais da existência deste plasma ainda é um problema frustrante que se espera poder resolver com o avanço da tecnologia de aceleradores de partículas. Hoje em dia, temos que nos conformar com o fato de que, no que diz respeito aos fenômenos críticos da CDQ, o que é de interesse teórico ainda não pode ser medido experimentalmente e o que pode ser medido experimentalmente já possui, na grande maioria dos casos, uma explicação teórica

bastante razoável. É por estas e outras razões que vale a pena estudar as propriedades termodinâmicas das transições de fase na CDQ para o maior número de circunstâncias possíveis, e aprender o quanto mais puder ser aprendido dependendo o mínimo de modelos e suposições específicas e tirar o máximo proveito das simetrias fundamentais e argumentos de universalidade.

Nesta tese, vamos estudar ambos os aspectos das transições de fase na CDQ: a quebra de simetria quiral e o confinamento. Devido à sua complexidade, no entanto, isto será feito através de modelos efetivos e argumentos de universalidade. No capítulo 2, estudaremos o problema da quebra da simetria quiral, do ponto de vista da redução dimensional em teorias de campos a altas temperaturas. Vamos calcular a constante de decaimento do *pion* e discutiremos o alcance de validade desta técnica. No capítulo 3, estudaremos o confinamento em teorias de calibre abelianas. Será mostrado como a imposição da lei de Gauss implica a existência de uma simetria extra para o *loop* de Polyakov, parâmetro de ordem da transição, e como a quebra desta simetria, desconfinamento, pode ser alcançada.

Capítulo 2

A simetria quiral

2.1 Introdução

As propriedades termodinâmicas da CDQ, no limite de baixas energias, podem ser apropriadamente descritas em termos dos modelos σ . A extremamente baixas temperaturas, os únicos graus de liberdade excitados são os *pions*. Pode-se, então, usar os métodos da teoria de perturbações quiral que, em sua ordem dominante, se reduz ao modelo σ não linear em $(3+1)$ dimensões. De fato, como originalmente demonstrado por Weinberg [17], uma teoria efetiva conveniente envolvendo os modos de Goldstone gera, automaticamente, amplitudes de transição que satisfazem os teoremas da álgebra de correntes e PCAC. A interação entre os modos de Goldstone é descrita por um Lagrangeano efetivo que é invariante sob uma transformação global de quiralidade [18]. A linha de raciocínio utilizada para determinar a forma da teoria efetiva é, no entanto, muito heurística. Uma derivação mais precisa, que relacione as propriedades da teoria efetiva com as propriedades da teoria fundamental, ainda se faz necessária. Por outro lado, alguns autores sugerem que, perto da temperatura crítica, $T_c \simeq 150$ Mev, as flutuações de grandes comprimentos de onda da CDQ com, por exemplo, dois sabores de *quark* não massivos, seriam pertencentes à

mesma classe de universalidade do magneto de Heisenberg; um modelo σ linear com simetria $O(4)$, em três dimensões espaciais [12][13]. Esta afirmação está baseada na contagem do número de graus de liberdade não massivos na região crítica. Como veremos a seguir, esta região é dominada pelas flutuações transversais e longitudinais do parâmetro de ordem, uma vez que estes são os únicos graus de liberdade não massivos perto da transição. Isto é uma consequência do caráter bosônico destas flutuações. Os *quarks*, mesmo sendo não massivos à temperatura zero, não modificariam a natureza da transição de fase, uma vez que adquirem um termo de massa dependente da temperatura e que nunca se anula.

Apesar de bastante intuitivo, este cenário não é unânime. De fato, há indícios de que os parâmetros da teoria efetiva a altas temperaturas podem não estar relacionados de uma maneira simples com os parâmetros da teoria efetiva a baixas temperaturas [19]. Esta segunda alternativa tem recebido bastante respaldo através dos resultados obtidos nas simulações em rede [20]. Por exemplo, os dados para o calor latente na transição mostram que, enquanto no magneto de Heisenberg a contribuição singular dos modos não massivos pode ser desprezada no ponto crítico, para a CDQ com dois sabores de quarks estes mesmos modos dão origem a um comportamento singular em torno de T_c . Isto certamente implica que, perto da criticalidade, vários graus de liberdade estão sendo criados ou modificados [15]. Uma possível explicação para esta discrepância foi proposta por Dine e Fischler [21]. Segundo eles, enquanto as funções de correlação críticas são dominadas pelos modos de grandes comprimentos de onda do parâmetro de ordem, quantidades termodinâmicas globais, como a energia livre e o calor específico, recebem contribuição de todos os modos de energia. No caso de teorias com liberdade assintótica, como a CDQ,

o principal efeito de um aumento de temperatura é preencher os estados excitados fracamente acoplados. Neste sentido, as correções aos resultados típicos de um gás ideal devem diminuir com o aumento da temperatura. O modo fundamental, $n = 0$, contribui perturbativamente apenas enquanto que todos os outros estados excitados devem ser considerados. A conclusão é que a energia livre, próximo à transição, não pode ser calculada através dos métodos da mecânica estatística.

Neste capítulo, vamos estudar a redução dimensional do modelo σ não linear, a fim de relacionar os parâmetros das teorias efetivas para os regimes de baixas e altas temperaturas. Daremos, também, uma interpretação para a expressão da constante de decaimento do *pion*, à temperatura finita, em termos da energia armazenada no estado fundamental. Por fim, vamos discutir o comportamento universal de algumas quantidades termodinâmicas, com relação à temperatura e densidade bariônica, para um modelo com quebra dinâmica da simetria quiral.

2.2 A CDQ com *quarks* leves a baixas temperaturas

Teorema 2.1 *Considere a CDQ com $N \geq 2$ sabores de quarks não massivos: $q = u, d, \dots$. Se a teoria possui quebra espontânea da simetria $SU(N) \times SU(N) \rightarrow SU(N)$, com um valor esperado no vácuo não nulo para o condensado $\bar{q}q$, então os coeficientes dominantes na expansão em baixas temperaturas da média térmica correspondente,*

$$\langle \bar{q}q \rangle_\beta = \frac{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} \bar{q}q}{\text{Tr } e^{-\beta \hat{H}}}, \quad (2.1)$$

são completamente determinados pela constante de decaimento do pion, f_π , conforme

$$\langle \bar{q}q \rangle_\beta = \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \left[1 - \frac{N^2 - 1}{N} \frac{T^2}{12 f_\pi^2} - \frac{N^2 - 1}{2N^2} \left(\frac{T^2}{12 f_\pi^2} \right)^2 + O(T^6) \right]. \quad (2.2)$$

Este teorema, estabelecido em 1984 por Gasser e Leutwyler [22], ilustra claramente o fato de que a simetria quiral impõe severas restrições ao comportamento da função de partição na região dos *quarks* leves, baixas temperaturas e grandes volumes. As razões pelas quais a simetria quiral fixa os termos dominantes da expansão de baixas temperaturas do condensado fermiônico são as seguintes:

- a quebra espontânea da simetria gera $N^2 - 1$ *bosons* de Goldstone, os *pions*, que dominam, a baixas temperaturas, as médias térmicas no sistema;
- a energia típica dos *pions* é da ordem $E \sim T$. Assim, a simetria quiral implica que a interação entre os *pions* é muito pequena [23], podendo ser tratada perturbativamente;
- a simetria quiral determina os termos dominantes da expansão de baixas temperaturas, não somente das amplitudes de espalhamento, mas também de outros elementos de matriz como

$$\langle \pi^a | \bar{q}q | \pi^b \rangle = -\frac{\delta^{ab}}{f_\pi^2} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle. \quad (2.3)$$

Para calcularmos as contribuições perturbativas geradas pela interação, é conveniente trabalhar com uma teoria efetiva envolvendo somente os *pions* [24]. Fazendo uso do método do campo de fundo [25], vamos definir uma função de partição, com a qual a média térmica

das correlações entre as correntes vetorial v_μ e axial a_μ serão calculadas, como

$$e^{-Z} = \langle 0|T \exp\left(-\int d^4x \bar{q}(\gamma_\mu v_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 a_\mu + \mathcal{M})q\right)|0\rangle, \quad (2.4)$$

onde T é o operador de ordenamento temporal, \mathcal{M} é a matriz de massa dos *quarks* e ambas as correntes v_μ e a_μ são matrizes Hermiteanas $N \times N$. As funções de Green conexas podem, assim, ser determinadas como os coeficientes da expansão de Z em potências dos campos externos.

A simetria quiral implica que o funcional Z pode ter uma representação, a baixas energias, dada por

$$\exp(-Z/\hbar) = \int \mathcal{D}U \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(U, v, a)\right). \quad (2.5)$$

O lado direito da expressão acima define uma teoria de campos para descrever a dinâmica dos *pions*, representados por uma matriz unitária U , $N \times N$, tal que

$$UU^\dagger = 1, \quad \det U = 1. \quad (2.6)$$

A expansão de baixas energias de Z pode então ser escrita como

$$Z = Z^{(2)} + \hbar Z^{(4)} + \hbar^2 Z^{(6)} + \dots \quad (2.7)$$

Em sua ordem dominante, identificamos o Lagrangeano do modelo σ não linear

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{4}F^2 \left\{ \text{tr} \left(\nabla_\mu U^\dagger \nabla_\mu U \right) - 2B \text{tr} \left[\mathcal{M}(U + U^\dagger) \right] \right\}, \quad (2.8)$$

onde F e B são constantes de acoplamento a serem devidamente renormalizadas e

$$\nabla_\mu U = \partial_\mu U - i(v_\mu + a_\mu)U + iU(v_\mu - a_\mu). \quad (2.9)$$

2.3 A fenomenologia da transição quiral

A quebra da simetria quiral na CDQ tem sua origem, como dito anteriormente, no desenvolvimento de um valor esperado no vácuo não nulo para um condensado de *quarks*, $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. A altas temperaturas, a teoria é assintoticamente livre e o condensado tende a desaparecer¹. Assim, o candidato natural para parâmetro de ordem é o objeto

$$\mathcal{M}_j^i = \langle \bar{q}_E^i q_{Dj} \rangle, \quad (2.10)$$

uma vez que ele diferencia as duas fases: simetria quiral manifesta ou quebrada, de acordo com seu valor: nulo ou não. As simetrias relevantes do parâmetro de ordem são as transformações globais unitárias $U(2)_E \times U(2)_D$ entre os *quarks* esquerdo e direito, sob as quais

$$\mathcal{M} \rightarrow U\mathcal{M}V^\dagger, \quad (2.11)$$

com $U, V \in U(2)$. Este não é exatamente o grupo de simetria necessário, uma vez que ele inclui a simetria axial do número bariônico, que não é uma simetria da CDQ real. Podemos resolver este problema através da imposição de um vínculo nas matrizes \mathcal{M} . Para dois sabores de *quarks*, este vínculo se reduz, simplesmente, ao requerimento de que \mathcal{M} seja um múltiplo de uma matriz unitária com determinante positivo, ao invés de uma matriz complexa geral. Assim, \mathcal{M} pode ser parametrizada linearmente em termos de quatro parâmetros reais $(\sigma, \vec{\pi})$

$$\mathcal{M} = \sigma + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau}, \quad (2.12)$$

¹Simulações em rede, com dois sabores de *quarks* não massivos, $m_u = m_d = 0$, indicam, de fato, a existência de uma transição de segunda ordem para temperaturas em torno de 150 Mev.

onde τ^a , $a = 1, \dots, 3$, são as matrizes de Pauli. Usando a representação

$$\phi^a = (\sigma, \vec{\pi}), \quad (2.13)$$

não é difícil perceber que as transformações (2.11) são, simplesmente, rotações no espaço interno dos campos (2.13). Desta forma, podemos concluir que o parâmetro de ordem para a descrição da transição de fase quiral na CDQ tem as mesmas simetrias e natureza que os graus de liberdade do magneto de Heisenberg $O(4)$, também conhecido como modelo σ linear ².

Segundo a teoria fenomenológica de Landau, em uma transição de fase contínua, as oscilações de grandes comprimentos de onda do parâmetro de ordem podem ser apropriadamente descritas em termos de uma energia livre construída a partir de algumas informações bastante gerais a respeito do sistema em questão (ver apêndice 1). Assim, respeitando todas as simetrias de (2.10) e (2.11), construímos a seguinte energia livre

$$F = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_i \phi^a)^2 + \frac{1}{2} \mu^2(T) \phi_0^a \phi^a + \frac{\lambda(T)}{4} (\phi_0^a \phi^a)^2 \right\}, \quad (2.14)$$

onde $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$, para $T < T_c$, de modo a reproduzir o padrão de quebra de simetria desejado (ver figura (2.1)). Para temperaturas acima da temperatura crítica, a direção no espaço interno na qual o parâmetro de ordem está orientado é arbitrária e, portanto, temos desordem, $\langle \phi \rangle = 0$. Por outro lado, abaixo da temperatura crítica, a simetria está espontaneamente quebrada e as flutuações do parâmetro de ordem ϕ , em torno de $\langle \phi \rangle \neq 0$, são diferentes para as direções σ e $\vec{\pi}$, onde estes últimos são os *bosons* de Goldstone. Finalmente, para $T = T_c$, o comprimento de correlação se torna infinito

²É preciso lembrar que esta equivalência só é válida para dois sabores de *quarks* não massivos, uma vez que, somente para $N = 2$ temos o isomorfismo entre os grupos $O(4)$ e $SU(2) \times SU(2)$.

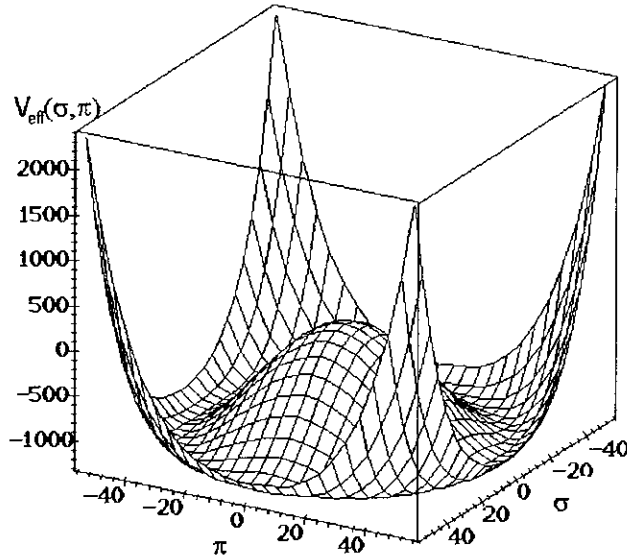


Figura 2.1: A energia livre de Landau-Ginzburg para a transição de fase quiral, no caso $N = 2$. De acordo com o padrão de quebra de simetria, $\langle \sigma \rangle \neq 0$ e $\langle \pi \rangle = 0$, vemos que o campo $\pi(\tau, \mathbf{x})$ descreve o *boson* de Goldstone associado à quebra da simetria quiral contínua.

e as flutuações de ϕ são invariantes por uma mudança de escala; estamos no ponto fixo infravermelho. Os termos de ordem $(\phi_0^a \phi_0^a)^3$ em diante serão desprezados uma vez que são operadores marginais ou irrelevantes para o fluxo do grupo de renormalização próximo ao ponto fixo crítico (ver apêndice 1). Este modelo tem sido extensivamente estudado na literatura e a existência de um ponto fixo infravermelho do grupo de renormalização já está bem estabelecida [26, 27]. Seus expoentes críticos também são conhecidos até sete *loops* na expansão perturbativa em λ [28]. Deste modo, temos um modelo fenomenológico para a descrição da transição quiral na CDQ com dois sabores de *quarks* não massivos.

2.4 Do gás de *pions* à região crítica

A estratégia que usaremos agora, para a obtenção de uma relação entre os parâmetros das fases de baixa e alta temperaturas da CDQ com $m_u = m_d = 0$, respectivamente, a constante de decaimento do *pion*, f_π , e os coeficientes da energia livre de Landau-Ginzburg, a massa μ e o acoplamento λ , será utilizar o modelo $O(N)$ em $3 + 1$ dimensões como elo entre os modelos efetivos para ambas as fases.

A densidade de Lagrangeano do modelo $O(N)$ é dada por

$$\mathcal{L}(\phi^a(x)) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^a)^2 + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^a \phi^a + \frac{\lambda}{4}(\phi^a \phi^a)^2, \quad (2.15)$$

onde $\phi^a(x)$ é um campo escalar real de N componentes. Na fase ordenada (simetria quebrada), $\mu^2 < 0$, o campo adquire um valor esperado no vácuo não nulo

$$\langle \phi^a(x) \phi^a(x) \rangle \equiv M^2(\mu, \lambda) = \frac{-\mu^2}{\lambda}, \quad (2.16)$$

quebrando espontaneamente a simetria rotacional $O(N) \rightarrow O(N - 1)$. Para uma quantização consistente, devemos escolher uma direção no espaço interno e fixá-la. Esta escolha é completamente arbitrária e, para os nossos objetivos, será conveniente escolher a direção radial $\hat{\phi}(x) \equiv \vec{\phi}(x)/|\vec{\phi}(x)|$. Esta escolha corresponde à "mudança de variáveis"

$$\vec{\phi}(x) = \rho(x)\hat{\phi}(x), \quad (2.17)$$

onde $\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} = 1$, por construção. Em termos das novas variáveis, ρ e $\hat{\phi}$, a função de partição se torna

$$Z = \int \rho^{N-1}(x) \mathcal{D}\rho(x) \mathcal{D}\hat{\phi}^a(x) e^{-S(\rho, \hat{\phi})}, \quad (2.18)$$

com

$$S(\rho, \hat{\phi}^a) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \rho^2(x) (\partial_\mu \hat{\phi}^a(x))^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x))^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 + \frac{1}{4} \lambda \rho^4 \right\}. \quad (2.19)$$

A integração sobre o campo $\rho(x)$ gera uma teoria efetiva local $S_{eff}(\hat{\phi}^a)$ para o campo $\hat{\phi}^a$

$$e^{-S_{eff}(\hat{\phi}^a)} = \int \rho^{N-1}(x) \mathcal{D}\rho(x) e^{-S(\rho, \hat{\phi}^a)}. \quad (2.20)$$

Apesar de não ser possível calcular esta integral funcional exatamente, podemos fazer uso das expansões semi-clássicas. De fato, notemos que, sendo M o valor esperado no vácuo do campo ρ , podemos escrever

$$\rho(x) = M + \rho'(x), \quad (2.21)$$

onde ρ' são as flutuações do campo ρ em torno de M . Em termos da nova variável ρ' , a ação (2.19) se torna

$$S(\rho', \hat{\phi}^a) = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} [M^2 + 2M\rho' + \rho'^2] (\partial_\mu \hat{\phi}^a(x))^2 \right. \quad (2.22)$$

$$\left. + \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho(x)')^2 + \frac{1}{2} \mu [M + \rho']^2 + \frac{1}{4} \lambda [M + \rho']^4 \right\}. \quad (2.23)$$

O termo dominante na expansão semi-clássica de (2.23) é então obtido desprezando-se as flutuações ρ'

$$S_{eff}^0(\hat{\phi}^a) = M^2 \int d^4x \frac{1}{2} [\partial_\mu \hat{\phi}^a(x)]^2. \quad (2.24)$$

Se fizermos a identificação $M = f_\pi$, onde f_π é a constante de decaimento do pión, podemos reconhecer em (2.24) a ação do modelo σ não linear em termos de um campo escalar $\Phi \equiv \phi^a$ de N componentes, submetido a um vínculo dado por $\Phi^2 = f_\pi^2$.

Deve ser ressaltado que, até a equação (2.23), não foi feita qualquer menção à ordem de magnitude da temperatura. A única imposição feita foi que $T < T_c$ de modo a garantir que o sistema estivesse na sua fase quebrada. Apenas ao desprezar as flutuações ρ' ,

estamos realmente impondo que a temperatura envolvida seja muito menor que T_c . Por último, devemos dizer que as correções provenientes de termos superiores na expansão semi-clássica, renormalizam o coeficiente $M^2(\mu, \lambda)$ em (2.24). Eventuais interações envolvendo $\hat{\phi}^a$ podem ser expandidas em termos locais, desde que os *momenta* considerados sejam muito menores que o corte, a massa do *meson*, M ³. Assim sendo, o modelo σ não linear descreve completamente as propriedades de longas distâncias ($p \ll M$) de um magneto de Heisenberg à baixas temperaturas.

Por outro lado, como já foi mencionado anteriormente, são os modos de grandes comprimentos de onda do parâmetro de ordem que determinam o comportamento das funções de correlação próximo à temperatura crítica. De um modo geral, estas funções de correlação podem ser descritas pela mecânica estatística. Em termos da soma discreta de frequências na formulação de Matsubara para teorias de campos à temperatura finita, isto implica que somente precisamos levar em conta o modo de frequência zero dos campos, $\phi_0^a(\mathbf{x})$, comumente chamado de modo zero ou modo estático. Mantendo apenas os modos zero, obtemos uma teoria efetiva em uma dimensão inferior onde os acoplamentos carregam uma informação do Hamiltoniano original. Esta é a base da *redução dimensional* (ver apêndice 2). A idéia é obter uma teoria efetiva para os modos zero dos campos envolvidos a partir da integração sobre diferentes escalas de energia da teoria original [30], de modo que as propriedades de longas distâncias dos observáveis estáticos da teoria original possam ser descritas, com razoável fidelidade, pelas funções de correlação da teoria

³Evidências experimentais da presença de uma ressonância com a mesma massa e largura que as esperadas para a partícula σ foram recentemente registradas no trabalho de tese de mestrado de André Massaferrri Rodrigues [29].

efetiva [31]. O resultado é uma teoria do tipo

$$Z_{red} = \int \mathcal{D}\phi_0 \exp\left\{-\int d^{d-1}\mathbf{x} (\mathcal{L}_{eff}(\phi_0) + \delta\mathcal{L})\right\}, \quad (2.25)$$

onde $\delta\mathcal{L}$ inclui todos os possíveis contratermos locais, mesmo os ausentes na teoria original, contanto que respeitem as simetrias do problema. Os parâmetros em $\mathcal{L}_{eff}(\phi_0)$ serão, em geral, funções do corte, da temperatura e dos parâmetros nús (não renormalizados) [32].

Para o caso do modelo $O(N)$, implementamos o traço da função de partição via a imposição de condições de contorno periódicas para o campo bosônico de N componentes

$$\phi^a(\tau, \mathbf{x}) = \phi^a(\tau + \beta, \mathbf{x}), \quad (2.26)$$

de modo que este pode ser decomposto em modos de Fourier como

$$\phi^a(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n^a(\mathbf{x}) e^{i\omega_n \tau}, \quad (2.27)$$

onde $\omega_n = 2\pi n/\beta$, como de costume para *bosons*. A teoria efetiva dimensional reduzida será então obtida a partir da integração dos modos $\omega_n \neq 0$ na integral funcional Euclideana, o que pode ser feito através de uma expansão semi-clássica [33]. Para isto consideraremos as configurações de campo ϕ^a flutuando em torno de uma configuração estática Φ_0^a

$$\phi^a \rightarrow \Phi_0^a + \eta^a \quad (2.28)$$

de modo que, após uma integração Gaussiana, chegamos à função de partição

$$Z(\beta) = e^{-S_E(\Phi_0)} \det \left[\frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi} \Big|_{\phi=\Phi_0} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

O argumento do determinante acima pode ser facilmente calculado, em termos dos modos (2.27), a partir da expressão (2.15) [34], o que nos leva a

$$\left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi^a \delta\phi^b} \right|_{\phi=\Phi_0} = - \sum_n [(\nabla^2 - \omega_n^2 - \mu^2)\delta^{ab} - \lambda T(\Phi_0^k \Phi_0^k \delta^{ab} + 2\Phi_0^a \Phi_0^b)]. \quad (2.30)$$

Devido à invariância rotacional do vácuo, devemos novamente escolher uma direção no espaço interno em torno da qual o sistema será quantizado. Assim, escolhemos, por conveniência, $\Phi_0^a = (0, \dots, \phi_0)$ e, com a definição

$$m_i^2 = \begin{cases} \lambda T \phi_0^2, & \text{se } i = 1, \dots, N-1 \\ 3\lambda T \phi_0^2, & \text{se } i = N \end{cases}, \quad (2.31)$$

chegamos a

$$\left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi \delta\phi} \right|_{\phi=\Phi_0} = - \sum_n (\nabla^2 - \omega_n^2 - \mu^2 - m_i^2). \quad (2.32)$$

A função de partição (2.29) pode agora ser calculada na ordem sub-dominante da expansão semi-clássica [33], com o auxílio da expansão

$$\ln \det \left[\left. \frac{\delta^2 S}{\delta\phi \delta\phi} \right|_{\phi=\Phi_0} \right] = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s} (m_i^2)^s \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + \omega_n^2 + \mu^2)^s}. \quad (2.33)$$

A cada termo desta expansão corresponde um diagrama de Feynman diferente, e estes devem ser calculados independentemente. Para isto, faremos uso do método da regularização dimensional [35]

$$\int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^s} = \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(s - d/2)}{\Gamma(s)} \frac{1}{(m^2)^{s-d/2}}, \quad (2.34)$$

onde $\Gamma(z)$ é a função gama usual [36], e de uma extensão analítica da função de Epstein [37], dada por

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + \alpha^2)^s} &= -\frac{1}{2} \alpha^{-2s} + \frac{\sqrt{\pi}}{2 \alpha^{2s-1} \Gamma(s)} \\ &\times \left[\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\alpha)^{s-1/2} K_{s-1/2}(2\pi n\alpha) \right], \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $K_n(z)$ é a função de Bessel modificada de ordem n [36]. Definindo a quantidade

$$\alpha^2 = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 (\mu^2), \quad (2.36)$$

chegamos, após a integração sobre os *momenta* \mathbf{k} e soma sobre os modos de Matsubara, à expressão do potencial efetivo para a configuração invariante translacional Φ_0^a

$$Z(\beta) = e^{-\beta\Omega V(\phi_0)}, \quad (2.37)$$

onde Ω é o volume espacial e

$$\begin{aligned} V(\phi_0) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi_0^2 + \frac{\lambda T}{4}\phi_0^4 \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{s} \frac{1}{2^{3\pi^{\frac{3}{2}}}} \left[(N-1)m_\pi^{2s} + m_\sigma^{2s} \right] \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{2s-3} \\ &\times \left\{ \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\alpha^{2s-4}} \frac{1}{\Gamma(s)} \left[\Gamma(s-2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\pi n\alpha)^{s-2} K_{s-2}(2\pi n\alpha) \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2}\delta\mu^2\phi_0^2 + \frac{\delta\lambda T}{4}\phi_0^4. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Como explicitamente demonstrado por Landsman [31], a redução dimensional depende da habilidade de se encontrar contratermos térmicos para cancelar as divergências que aparecem no limite $T \rightarrow \infty$, oriundas da integração sobre os modos não estáticos. Estes contratermos devem ser controlados por uma equação do grupo de renormalização térmica e fixados por condições de renormalização impostas sobre os diagramas de Feynman calculados com alguma prescrição de regularização ⁴. Assim, vamos exigir que, no ponto de subtração mínima ($q = 0$, $T = T_0$), onde q é um parâmetro com dimensão de

⁴Apesar de o esquema de renormalização ser apenas uma ferramenta intermediária no processo de subtração, sabe-se que a redução dimensional é dependente do esquema [38, 39], sendo ótima para o esquema BPHZ. Nós trabalharemos com o esquema modificado da subtração mínima, de maneira análoga ao esquema utilizado em [40].

massa introduzido convenientemente para a utilização da expansão ε , o potencial efetivo satisfaça às condições

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_0^2}(\beta, \phi_0) \right|_{\phi_0=0} = \mu^2 + \delta\mu^2 = \mu_R^2 \quad (2.39)$$

e

$$\left. \frac{\partial^4 V}{\partial \phi_0^4}(\beta, \phi_0) \right|_{\phi_0=0} = \lambda + \delta\lambda = \lambda_R, \quad (2.40)$$

de tal forma a obter os contratermos (para $d = 4 - \varepsilon$)

$$\delta\mu^2 = (N + 2)\lambda \left(\frac{T_0^2}{24} - \frac{\mu^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \Psi(2) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n\mu}{2T_0}\right) + \gamma \right] \right) \quad (2.41)$$

e

$$\delta\lambda = -\frac{(N + 8)}{6} \frac{\lambda^2}{64\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \Psi(1) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n\mu}{2T_0}\right) + \gamma \right], \quad (2.42)$$

onde $\Psi(z)$ é a função Psi usual e γ é o número de Euler, $\Psi(1) = -\gamma$ [36]. Escolhendo estas quantidades como contratermos de massa e acoplamento, garantimos a finitude da teoria efetiva

$$S(\phi_0) = \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 + \frac{1}{2}\mu_R^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda_R T}{4} \phi_0^4 + O(\lambda_R^3) + O(1/T) \right\}, \quad (2.43)$$

que deve ser comparada à energia livre de Landau-Ginzburg (2.14), fenomenologicamente obtida na seção anterior.

Para completar a análise acima, precisamos calcular as funções do grupo de renormalização. A independência das funções de correlação nuas da escolha do ponto de renormalização pode ser expressa pelas equações

$$q \frac{d}{dq} \Gamma^{(N)} = 0, \quad (2.44)$$

$$T_0 \frac{d}{dT_0} \Gamma^{(N)} = 0, \quad (2.45)$$

onde

$$\Gamma^{(N)} = \left. \frac{\partial^N V}{\partial \phi_0^N} \right|_{\phi_0=0}, \quad (2.46)$$

e q é o parâmetro com dimensão de massa mencionado anteriormente. Já que estamos interessados somente no cálculo das funções do grupo de renormalização térmico, vamos considerar somente

$$\left(T_0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \beta_{T_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_{T_0} \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right) \Gamma^{(N)} = 0 \quad (2.47)$$

com

$$\beta_{T_0} = T_0 \frac{\partial \lambda}{\partial T_0}, \quad (2.48)$$

$$\gamma_{T_0} = \mu^{-2} T_0 \frac{\partial \mu^2}{\partial T_0}. \quad (2.49)$$

Usando os resultados obtidos para os contratermos de massa e acoplamento (2.41) e (2.42), chegamos às expressões

$$\beta_{T_0} = \frac{(N+8)}{6} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \quad (2.50)$$

e

$$\gamma_{T_0} = (N+2) \left[\frac{\lambda T_0^2}{12\mu^2} + \frac{\lambda}{16\pi^2} \right]. \quad (2.51)$$

Vale a pena comentar o fato de que a forma funcional das funções do grupo de renormalização acima obtidas estão de acordo com o discurso de que a compactificação da dimensão temporal Euclideana não afetaria a forma das divergências ultravioletas em uma teoria de campos. De fato, percebemos, exatamente, que tanto β_{T_0} quanto γ_{T_0} , calculadas a partir da teoria reduzida, reproduzem os valores esperados para a teoria original à baixas temperaturas.

2.5 A constante de decaimento do *pion* à temperatura finita $f_\pi(T)$

Para verificar se a teoria efetiva (2.43), obtida na seção anterior, reproduz as quantidades termodinâmicas relevantes com fidelidade, vamos calcular a constante de decaimento do *pion* à temperatura finita. À temperatura zero, $f_\pi \sim 93$ Mev e está relacionada com os elementos de matriz da corrente axial \mathcal{A}_μ^a por

$$\langle 0 | \mathcal{A}_\mu^a | \pi^b(p) \rangle = i f_\pi p_\mu \delta^{ab}, \quad (2.52)$$

onde o índice superior em \mathcal{A}_μ^a diz respeito ao isospin. Como estamos supondo existir uma simetria quiral exata, ela só pode ser quebrada espontaneamente pelo vácuo. Conseqüentemente, apesar de a corrente axial \mathcal{A}_μ agir não trivialmente no vácuo, ela deve se conservar, ao menos na camada de massa dos *pions*. À temperatura zero isto é trivial: a divergência do elemento de matriz (2.52) é

$$\langle 0 | \partial_\mu \mathcal{A}^\mu | \pi \rangle \sim f_\pi P^2, \quad (2.53)$$

que se anula quando $P^2 = -\omega^2 + \mathbf{p}^2 = 0$, como acontece para partículas relativísticas não massivas [41]. À temperatura finita, no entanto, o resultado acima obtido não é mais tão evidente. Além da perda da invariância de Lorentz (pois a presença de um meio privilegia o referencial de repouso da matéria), temos toda a complicação adicional do formalismo das funções de Green à temperatura finita. Para dar uma interpretação física a $f_\pi(T)$, Bochkarev e Kapusta [19] usaram a representação espectral da função de Green para a corrente axial

$$G_{ab}^{\mu\nu}(z, \mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - z} \rho_{ab}^{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}), \quad (2.54)$$

onde o tensor espectral é, como de costume [42, 43], dado por

$$\rho_{ab}^{\mu\nu}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{1}{Z} \sum_{m,n} (2\pi)^3 \delta(\omega - E_m + E_n) \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_n) \times \\ (e^{-E_n/T} - e^{-E_m/T}) \langle n | \mathcal{A}_a^\mu | m \rangle \langle m | \mathcal{A}_b^\nu | n \rangle. \quad (2.55)$$

Devido à conservação da corrente axial, o tensor espectral pode ser decomposto em suas componentes longitudinal e transversal [44], o que levou Bochkarev e Kapusta à definição

$$f_\pi^2(T) = 2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon \frac{dq_0^2}{q_0^2} \rho_A^L(q_0, \mathbf{q} = 0), \quad (2.56)$$

para a constante de decaimento do *pion* à temperatura finita, onde $\rho_A^L(q)$ é a parte longitudinal da densidade espectral axial (2.55). O cálculo da constante de decaimento do *pion* pode então ser efetuado e verifica-se que, para valores pequenos da temperatura, reproduz-se o conhecido resultado de Gasser e Leutwyler [22] (ver figura (2.2))

$$f_\pi^2(T) = f_\pi^2 \left[1 - \frac{N-2}{12} \frac{T^2}{f_\pi^2} \right], \quad (2.57)$$

enquanto que, para altas temperaturas,

$$f_\pi^2(T) = f_\pi^2 \left[1 - \frac{N+2}{12} \frac{T^2}{f_\pi^2} \right], \quad (2.58)$$

de acordo com [19, 45] (ver figura (2.2)), se anulando na temperatura crítica

$$T_c^2 = \frac{12}{N+2} f_\pi^2. \quad (2.59)$$

O significado físico de (2.56) para a constante de decaimento do *pion* à temperatura finita, é a medida da intensidade do acoplamento entre os *bosons* de Goldstone, $\vec{\pi}$, e a parte longitudinal da densidade espectral axial no limite de zero *momentum* externo

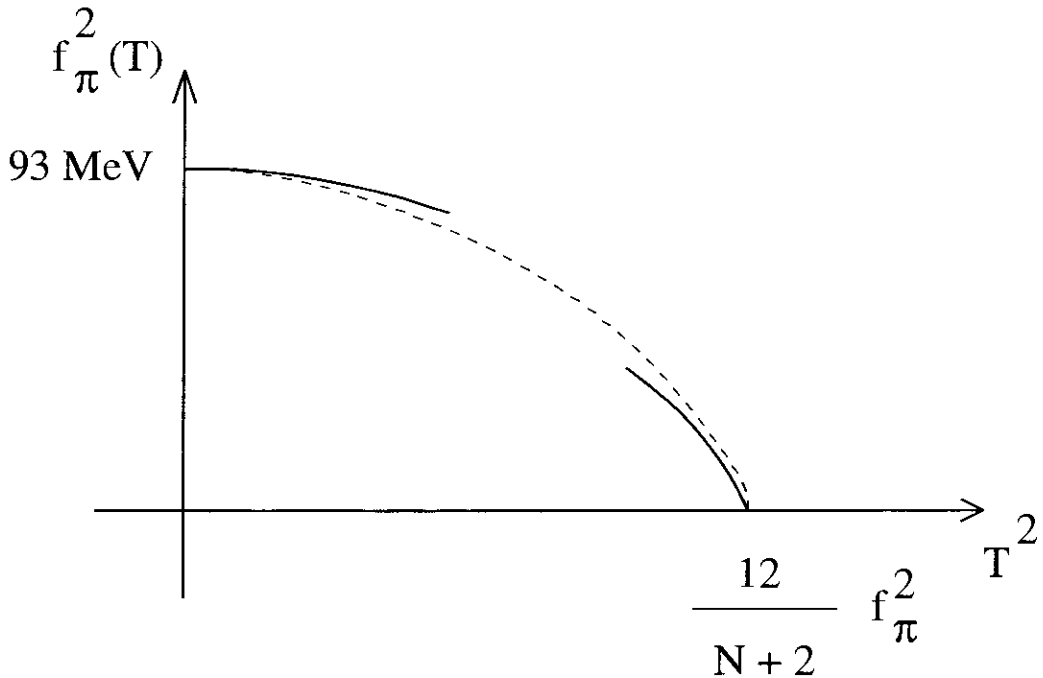


Figura 2.2: A constante de decaimento do *pion* à temperatura finita. Vemos, nas linhas cheias, os resultados obtidos por Gasser e Leutwyler, para baixas temperaturas, o resultado obtido por Bochkarev e Kapusta, para temperaturas próximo a T_c , e, finalmente, na linha pontilhada, uma interpolação de *Padé* obtida por Jeon e Kapusta, para reproduzir o valor de $f_\pi(T)$, para qualquer temperatura.

[19]. Os *bosons* de Goldstone associados à quebra da simetria quiral representam, à temperatura finita, a energia armazenada na direção transversal do estado fundamental. Conseqüentemente, a contribuição dos *pions* às funções de correlação deve depender da probabilidade de o sistema se encontrar no estado fundamental. Enquanto esta probabilidade é relativamente alta a baixas temperaturas, onde $f_\pi(T \ll T_c) \sim 93 \text{ MeV}$, ela diminui com o aumento da temperatura, de modo que, próximo a T_c , podemos dizer que, praticamente, não há *pions* no sistema. Não há energia armazenada no estado fundamental e $f_\pi^2(T \rightarrow T_c) \rightarrow 0$, assim como o condensado. Esta é uma transição de segunda ordem, onde as quantidades termodinâmicas se comportam de maneira contínua próximo à criticalidade.

Vejamos, agora, como a redução dimensional possibilita, de uma maneira mais simples, o cálculo da constante de decaimento do *pion* à temperatura finita, a partir da teoria dimensional reduzida (2.43). Usando a fórmula (2.16), com $M = f_\pi$, chegamos a

$$f_\pi^2(T, T_0) = \frac{-\mu_R^2}{\lambda_R} = -\frac{\mu^2 + (N+2) \left\{ \frac{\lambda(T^2 - T_0^2)}{24} - \frac{\lambda\mu^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right\}}{\lambda - \frac{(N+8)}{6} \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)}, \quad (2.60)$$

onde a independência de $f_\pi(T, T_0)$ do ponto de subtração T_0 é governada por uma equação do grupo de renormalização do tipo (2.47). Para reproduzirmos o resultado (2.58), basta escolhermos $T = T_0 + \theta$, onde θ mede o desvio do ponto de subtração. Nesta aproximação, os logaritmos que aparecem em (2.39) e (2.40) podem ser desprezados e chegamos a

$$f_\pi^2(T) = f_\pi^2 \left[1 - \frac{N+2}{12} \frac{T\theta}{f_\pi^2} \right]. \quad (2.61)$$

Uma igualdade com (2.58) será obtida ao fazermos uma subtração à temperatura zero, isto é, $\theta = T$ e $T_0 = 0$. Note que não teremos problemas com os logaritmos das expressões (2.39) e (2.40) uma vez que estes não estarão presentes na subtração à temperatura zero. A conclusão que tiramos destes cálculos é que, de fato, a redução dimensional permite o cálculo de observáveis estáticos da teoria original a partir da teoria reduzida, desde que estes sejam expressos por funções de correlação.

Podemos dar uma interpretação para a quantidade $f_\pi^2(T, T_0)$ de maneira análoga ao que se diz de $f_\pi^2(T)$ em (2.56). Enquanto esta última mede a energia armazenada no estado fundamental para um gás de *pions* à temperatura T , $f_\pi^2(T, T_0)$ mede a energia armazenada no estado de energia T_0 para este mesmo sistema. Assim, não somente devemos esperar que $f_\pi^2(T, 0) = f_\pi^2(T)$, como discutido no parágrafo anterior, mas também é natural obtermos $f_\pi^2(T, T) \sim 93 \text{ Mev}$, para qualquer valor de T , uma vez que estaremos

medindo a energia armazenada no estado de energia T para um sistema à temperatura T .

2.6 Quebra dinâmica da simetria quiral

Até agora, estudamos o problema da quebra da simetria quiral do ponto de vista da *quebra espontânea de simetria*, onde uma simetria da teoria não é partilhada pelo vácuo. Esta é a idéia por trás do famoso trabalho de Gell-Mann e Levy [46], proposto para descrever a dinâmica entre *mesons* e *nucleons*. Segundo Gell-Mann e Levy, os *mesons*, σ e $\vec{\pi}$, seriam partículas elementares descritas por campos canônicos na teoria. No entanto, a ausência de campos escalares, fundamentais, na natureza, levou a comunidade de teóricos da época a procurar mecanismos alternativos para quebrar simetrias. Uma das alternativas mais comuns é a chamada *quebra dinâmica de simetria* (para uma boa introdução ao assunto ver [47]), onde o parâmetro de ordem que diferencia as fases quebrada e simétrica é um operador composto, cuja existência depende da dinâmica dos outros campos fundamentais do modelo. Este mecanismo tem sido bastante utilizado para descrever fenômenos da matéria condensada, como a supercondutividade, onde o parâmetro de ordem é o par de Cooper, ou, ainda, no contexto da física de partículas, como a principal fonte de geração de massas para os *hadrons*.

Nesta seção, vamos estudar um modelo com quebra dinâmica de simetria; o modelo de Gross e Neveu [48]. Estaremos interessados, principalmente, na determinação das circunstâncias para as quais a restauração da simetria quiral pode ser favorecida. Calcularemos, ainda, os expoentes críticos desta transição de fase, e compararemos com alguns

resultados já existentes na literatura.

2.6.1 O modelo de Gross-Neveu à temperatura finita

O modelo de Gross-Neveu é definido, no espaço de Minkowski, pela densidade de Lagrangeano

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{g}{2N}(\bar{\psi}\psi)^2, \quad (2.62)$$

onde $\bar{\psi}$, ψ são *fermions* de Dirac com N componentes, g é um acoplamento forte e $\not{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial_\mu$, com as matrizes γ_μ em uma representação bi-dimensional. Este modelo foi primeiramente estudado em $1 + 1$ dimensões como um protótipo para simular algumas das propriedades da cromodinâmica quântica ⁵. De fato, além de ser assintoticamente livre, em duas dimensões, este Lagrangeano possui, para qualquer $2 \leq d < 4$, simetrias discretas que são quebradas, dinamicamente, para determinados valores da constante de acoplamento. Em $1 + 1$ dimensões, por exemplo, (2.62) é invariante sob a transformação quiral discreta

$$\psi(t, x) \rightarrow \exp(i\gamma_5\pi/2)\psi(t, x), \quad (2.63)$$

onde γ_5 é a matriz obtida através do produto de todas as outras matrizes γ , enquanto que, em $2 + 1$ dimensões, a simetria discreta é a paridade

$$\psi(t, x, y) \rightarrow i\gamma_1\psi(t, -x, y). \quad (2.64)$$

Como o operador composto $\bar{\psi}\psi$ troca de sinal sob ambas as transformações (2.63) e (2.64), concluímos que o parâmetro de ordem para diferenciar as fases de simetria quebrada e manifesta é o valor esperado $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$. Em outras palavras, quando um termo de massa é

⁵Este modelo pode ser, ainda, usado para descrever a cadeia bi-dimensional de *spins*-1/2 antiferromagnéticos de Heisenberg [49], ou, no caso de $2 + 1$ dimensões, o chamado líquido de *spins* quiral [50].

gerado, a simetria discreta, quiral ou paridade, é quebrada *dinamicamente*. Ainda, devido à sua natureza discreta, não há o aparecimento de *bosons* de Goldstone.

Apesar de perturbativamente não renormalizável para $d > 2$, este modelo pode ser estudado, para $2 \leq d < 4$, através de uma expansão no número de componentes do campo fermiônico [51]. Esta é a expansão $1/N$, que pode ser implementada na integral funcional através de um campo auxiliar λ

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\rlap{-}\not{\partial} - \lambda)\psi - \frac{\lambda^2}{2g}, \quad (2.65)$$

tal que, classicamente, $\lambda = (g/N)\bar{\psi}\psi$. Nesta formulação da teoria, podemos integrar funcionalmente os graus de liberdade fermiônicos na função de partição para obter

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\lambda \exp[-NI(\lambda, g)], \quad (2.66)$$

onde

$$I(\lambda, g) = \frac{1}{2g} \int_0^\beta d\tau \int d^2\mathbf{x} \lambda^2(x) - \text{Tr} [\ln(\rlap{-}\not{\partial} + \lambda)]_\beta, \quad (2.67)$$

é a ação efetiva, à temperatura finita, já na formulação Euclideana ⁶. Ação efetiva, (2.67) descreve a dinâmica dos condensados (pares de Cooper) $\lambda = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ e, para N grande, a função de partição (2.66) pode ser calculada pelo método da fase estacionária. Para isto, precisamos resolver a equação de ponto de sela

$$\left. \frac{\delta I(\lambda, g)}{\delta \lambda} \right|_{\lambda=\langle \lambda \rangle} = 0, \quad (2.68)$$

⁶Segundo o formalismo de Matsubara, para descrever uma teoria de campos à temperatura finita, devemos fazer uma rotação de Wick para o tempo imaginário, $t \rightarrow -i\tau$, e, ainda, compactificar esta dimensão impondo condições de contorno (anti-)periódicas para os campos (fermiônicos) bosônicos. Para uma introdução mais detalhada ao assunto, recomendamos o livro [43].

que à temperatura finita se reduz a

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + \langle\lambda\rangle^2}, \quad (2.69)$$

onde Λ é um corte para regular a integral no ultravioleta e $\langle\lambda\rangle$, o ponto de sela, é considerado constante. Apesar de divergente no ultravioleta, esta expressão pode ser renormalizada através da substituição de g pelo seu valor à temperatura zero

$$\frac{1}{g_r} = 2 \int^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad (2.70)$$

onde m é a massa induzida no pólo do propagador dos *fermions*. Fazendo uso da regularização dimensional, como definida em (2.34), e usando a fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\theta} + 1} \right), \quad (2.71)$$

para fazer a soma discreta de frequências de Matsubara, chegamos à seguinte expressão para a equação do ponto de sela

$$\langle\lambda\rangle = \frac{2}{\beta} \ln \left[\frac{e^{\beta m/2} + \sqrt{e^{\beta m} - 4}}{2} \right]. \quad (2.72)$$

Esta é a expressão que nos permitirá estudar a restauração da simetria quiral à temperatura finita ⁷. De fato, para $T = 0$, o modelo de Gross-Neveu pode ser encontrado em duas fases distintas, caracterizadas pela invariância, ou não, sob as transformações (2.64).

Caso $g_r > g_c$, onde

$$\frac{1}{g_c} = 2 \int^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \quad (2.73)$$

⁷Apesar de estarmos em $2+1$ dimensões, nos referiremos, deliberadamente, à quebra da simetria de paridade como quebra da simetria quiral. Este abuso de linguagem é usualmente justificado pela direta conexão que se estabelece com o caso da CDQ.

é o valor crítico da constante de acoplamento à temperatura zero, então estaremos na fase quebrada. Este é o regime de acoplamento forte, onde há a formação do condensado quiral, e os *fermions* adquirem uma massa gerada dinamicamente. Por outro lado, no regime de acoplamento fraco, $g_r < g_c$, o modelo estará na fase simétrica, desordenada, e os estados ligados desaparecem. Em particular, podemos forçar as condições iniciais do problema para que a simetria esteja quebrada à temperatura zero, e estudar a sua restauração à temperatura finita, o que, segundo a equação (2.72), deve ocorrer para $T_c = m/2 \ln 2$. Para este valor da temperatura, $\langle \lambda \rangle = 0$ e o termo que quebra a paridade desaparece.

2.6.2 Restauração de simetria à densidade finita

Vamos agora permitir que o sistema troque partículas com um reservatório a uma taxa constante. Para isto, basta introduzirmos um potencial químico, μ , em (2.67), conforme a maneira padrão [52]

$$I_{eff}(\lambda, g, \mu) = \frac{1}{2g} \int_0^\beta d\tau \int d^2\mathbf{x} \lambda^2(x) - Tr [\ln(\not{D} + \lambda + \mu\gamma_0)]_\beta. \quad (2.74)$$

Este potencial químico garante que o número médio de partículas no sistema seja constante

$$\langle \hat{N} \rangle = \int d^2\mathbf{k} \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)} + 1} \right\} = cte, \quad (2.75)$$

onde, $\hat{N} = \int d^2\mathbf{x} \psi^\dagger \psi$, é o operador número e, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \langle \lambda \rangle^2}$, dá a relação de dispersão.

A expressão acima pode, ainda, ser reescrita, através da utilização dos polilogarítmos [53] (ver apêndice 3)

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{\beta \langle \lambda \rangle}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{1 + e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}} \right) + \frac{1}{\beta \langle \lambda \rangle} \left(Li_2(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) - Li_2(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) \right) \right]. \quad (2.76)$$

Agora, a equação de ponto de sela para a ação Euclideana (2.74), na presença de um reservatório de partículas, se modifica para

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (\omega_n + i\mu)^2 + (\lambda)^2}, \quad (2.77)$$

de modo que, após o procedimento de renormalização descrito anteriormente, integração via regularização dimensional e soma por integração de contorno (ver [54]), chega-se a

$$\beta(\langle\lambda\rangle - m) + \ln(1 + e^{-\beta(\langle\lambda\rangle - \mu)}) + \ln(1 + e^{-\beta(\langle\lambda\rangle + \mu)}) = 0. \quad (2.78)$$

Esta equação define uma linha de transições de fase de segunda ordem no plano $\mu \times T$, quando $\langle\lambda\rangle = 0$, relacionada à restauração da simetria quiral (ver figura (2.3)). Vemos, a

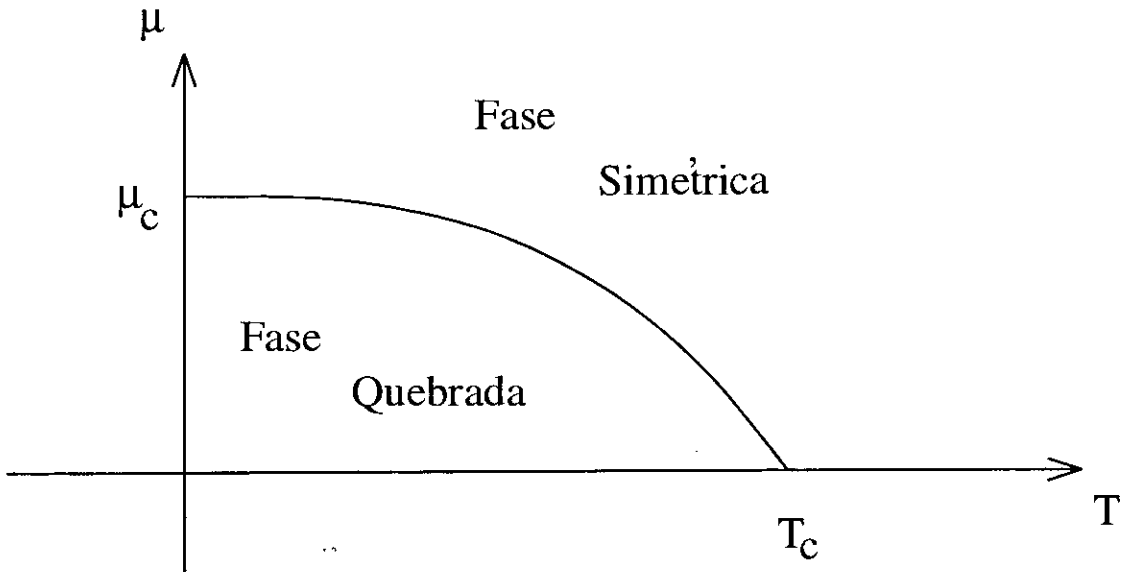


Figura 2.3: O diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu à temperatura e densidade finitas. A curva mostrada no gráfico divide o espaço em duas regiões caracterizadas pela invariância, ou não, sob as transformações de quiralidade.

partir da equação (2.78), que, à densidade finita, a restauração da simetria quiral, $\langle\lambda\rangle \rightarrow 0$, acontece para um valor menor da temperatura crítica, $0 \leq T_c \leq m/2 \ln 2$, em comparação

com o caso $\mu = 0$. Em outras palavras, *um meio denso favorece a restauração da simetria quiral*.

Do ponto de vista fenomenológico, isto pode ser facilmente entendido com a ajuda da figura (2.4). Ao contrário do que acontece com o par de Cooper na supercondutividade,

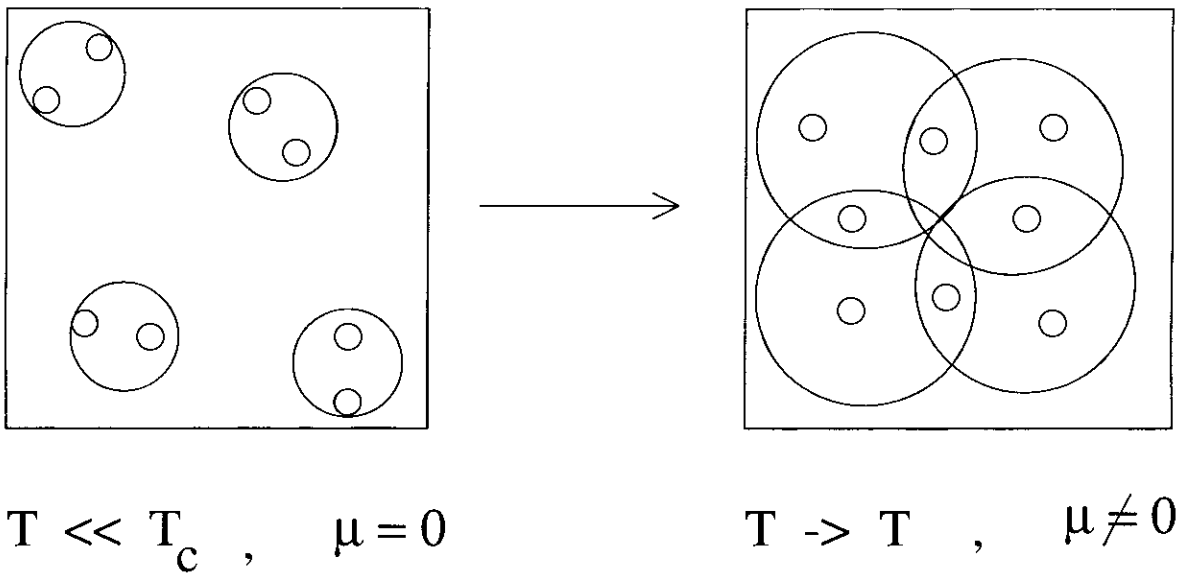


Figura 2.4: A restauração da simetria quiral se dá quando os condensados começam a se sobrepôr. Isto pode acontecer de duas maneiras: a) aumentando-se a temperatura, o que causa um aumento de seu raio; b) tornando o meio denso, o que os aproxima.

cujo tamanho não se modifica consideravelmente com variações da temperatura, aqui, o condensado quiral, que tem um raio típico dado por

$$R \sim \frac{1}{f_\pi(T)}, \tag{2.79}$$

crece de tamanho à medida que T aumenta. Ao nos aproximarmos da região crítica, o raio do condensado diverge, uma vez que $f_\pi(T \rightarrow T_c) \rightarrow 0$, e chegamos a uma configuração onde os mesmos começam a se sobrepôr, não formando mais uma base ideal para a descrição do sistema. Simplesmente não faz mais sentido falar em condensado, uma vez que os *fermions* constituintes passam a dominar completamente a dinâmica crítica. O mesmo

mecanismo acontece quando introduzimos um potencial químico no sistema. Aumentar a densidade de condensados faz com que estes se aproximem, e, conseqüentemente, a sobreposição do lado direito da figura (2.4) ocorre para uma temperatura crítica mais baixa que o caso $\mu = 0$.

2.6.3 O caso do potencial químico imaginário

A introdução de um potencial químico imaginário, $\theta(\beta)$, no entanto, produz o efeito contrário. Um potencial químico imaginário deste tipo, pode ser associado à componente zero, constante, de um campo de calibre, $A_0(\beta) = \theta(\beta)$

$$I_{eff}(\lambda, g, \mu) = \frac{1}{2g} \int_0^\beta d\tau \int d^2\mathbf{x} \lambda^2(x) - Tr [\ln(\not{\partial} + \lambda + i\theta\gamma_0)]_\beta. \quad (2.80)$$

Este, por sua vez, seria gerado por um solenóide infinitesimal ao longo do eixo do cilindro onde a teoria está sendo quantizada⁸. Como veremos a seguir, a restauração da simetria quiral não mais é favorecida, mas, ao contrário, uma temperatura crítica maior passa a ser necessária, devido a uma variação na fase dos campos fermiônicos, conhecida como o efeito Aharonov-Bohm [56].

Na presença do potencial químico imaginário, θ , a equação de ponto de sela se modifica para

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^A \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (\omega_n + \theta)^2 + (\lambda)^2}, \quad (2.81)$$

de modo que, após o procedimento de renormalização utilizado nas seções anteriores,

⁸Para uma discussão mais detalhada a respeito desta analogia, recomendamos a referência [55]. Para nossos propósitos, entretanto, consideraremos, apenas, o sistema fermiônico na presença de um campo A_0 constante.

chega-se a

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\beta} \ln \left[\frac{e^{\beta m} - 2 \cos(\beta \theta) + \sqrt{(2 \cos(\beta \theta) - e^{\beta m})^2 - 4}}{2} \right]. \quad (2.82)$$

Esta equação dá a dependência do condensado quiral com relação a T e θ , para um dado valor de m . Uma simples análise da equação acima mostra que:

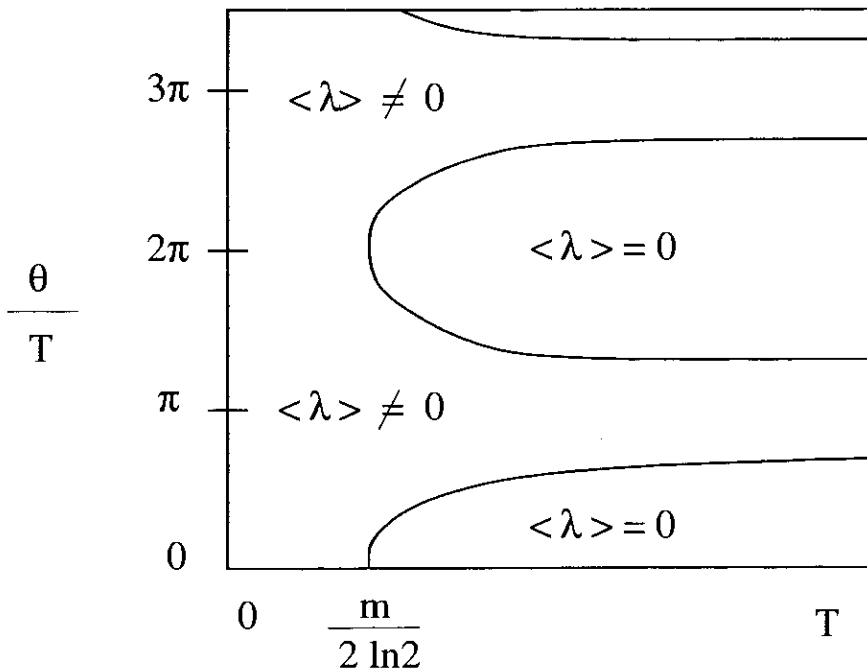


Figura 2.5: O diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu na presença de um solenóide infinitesimal de fluxo θ . Vemos que à medida que θ aumenta, o valor da temperatura, para qual a simetria quiral é restaurada, também aumenta, até chegar ao valor infinito no interior da região $(2\pi/3\beta, 4\pi/3\beta)$, onde a simetria quiral permanece sempre quebrada.

- a simetria quiral está sempre quebrada, para *qualquer* $T > 0$, quando $2\pi/3\beta \leq \theta \leq 4\pi/3\beta$;
- a simetria quiral pode ser restaurada, para outros valores de θ , porém a uma temperatura maior que $m/2 \ln 2$.

As regiões onde $2\pi/3\beta \leq \theta \leq 4\pi/3\beta$ são caracterizadas por um valor não nulo para o condensado quiral, $\langle \lambda \rangle \neq 0$. Assim como no caso à temperatura zero, onde a simetria

quiral é quebrada pela indução, no pólo do propagador dos *fermions*, de uma massa m , agora também a simetria quiral estará quebrada pela geração da massa $\langle\lambda\rangle$, uma vez que, nestas regiões, $T_c \rightarrow \infty$. A conclusão é que, a presença de um solenóide, de fluxo θ , ao longo do eixo do cilindro em $2 + 1$ dimensões, causa um aumento da escala de massa do modelo (diminuição do comprimento de correlação), e, conseqüentemente, um aumento na temperatura crítica para a restauração da simetria quiral [55, 57].

2.6.4 Universalidade e expoentes críticos

Para finalizar a análise da restauração da simetria quiral no modelo de Gross-Neveu, devemos, ainda, calcular seus expoentes críticos, o que possibilitará a identificação da classe de universalidade deste fenômeno. Em geral, tais expoentes podem ser obtidos a partir da equação de estado do sistema estatístico em questão [58]. Para o modelo de Gross-Neveu, na ausência de qualquer potencial químico, real ou imaginário, esta equação é dada naturalmente pela equação de ponto de sela

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + \langle\lambda\rangle^2}, \quad (2.83)$$

conhecida, ainda, como *equação de lacuna*, ou como encontramos mais freqüentemente na literatura, *equação do gap*. Esta equação é perfeitamente analítica no infravermelho. De fato, as freqüências de Matsubara, *ímpares*, dos *fermions*, $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$, fazem o papel de um regulador infravermelho, para baixos valores do *momentum* \mathbf{p} , tornando finita a integral em (2.83). Conseqüentemente, os expoentes críticos, através dela calculados, se reduzirão aos expoentes típicos de uma teoria de campo médio. Isto não deveria ser nenhuma surpresa, uma vez que estamos, realmente, fazendo uma aproximação de campo

médio ao desprezarmos as flutuações do campo auxiliar, $\lambda(\tau, \mathbf{x}) \rightarrow (\lambda)$. A conclusão é que, na ordem dominante da expansão $1/N$, o modelo de Gross-Neveu tem um comportamento de uma teoria de campo médio, com os expoentes dados na tabela (2.1)⁹. A introdução de um potencial químico real, μ , não altera, tampouco, o comportamento infravermelho da integral em (2.83), uma vez que este contribuirá, somente, com uma parte imaginária para as frequências de Matsubara (como podemos ver pela equação (2.77)).

$2 \leq d < 4$	β	γ	δ	ν	η	Modos
Campo Médio	1/2	1	3	1/2	0	$\forall n$
$\theta \in [0, 2\pi/3\beta)$ ou $(4\pi/3\beta, 2\pi/\beta]$	1/2	1	3	1/2	0	$\forall n$
$\theta \in [0, \pi/\beta)$ ou $(\pi/\beta, 2\pi/\beta]$	1/2	1	3	1/2	0	$n = 0$
$\theta = \pi/\beta$	$1/(d-2)$	1	$d-1$	$1/(d-2)$	$4-d$	$n = 0$

Tabela 2.1: Expoentes Críticos do Modelo de Gross-Neveu em $2 \leq d < 4$ Dimensões

Entretanto, este panorama muda, completamente, na presença de um potencial químico imaginário, $\theta(\beta)$, conforme mostrado em [59]. Para vermos como isso acontece explicitamente, vamos renormalizar a equação de lacuna, para $\theta \neq 0$,

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (\omega_n + \theta)^2 + (\lambda)^2}, \quad (2.84)$$

com a ajuda da definição da temperatura crítica

$$\frac{1}{g} = \frac{2}{\beta_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (\omega_{nc} + \theta(\beta_c))^2}, \quad (2.85)$$

onde $\omega_{nc} = (2n+1)\pi/\beta_c$. Esta equação define, no caso $\theta = 0$, uma linha de transições de fase de segunda ordem no plano (g, T) . Para cada valor do acoplamento, existe uma

⁹Foi recentemente sugerido, em [14], que a restauração da simetria quiral teria um comportamento de campo médio inclusive para ordens sub-dominantes da expansão $1/N$. Entretanto, esta afirmação foi prontamente negada no trabalho de Reisz, [60], onde foi mostrado que, além da ordem dominante, a restauração da simetria quiral no modelo de Gross-Neveu, em $2+1$ dimensões, seria pertencente à mesma classe de universalidade que o modelo de Ising.

temperatura crítica acima da qual a simetria quiral estará restaurada. Por outro lado, para um dado valor da temperatura, existirá um valor crítico do acoplamento abaixo do qual novamente teremos restauração de simetria. À temperatura zero, a simetria é restaurada em $g_r = g_c$. Assim, $(g_r = g_c, T = 0)$ é o ponto fixo ultravioleta. Conforme o acoplamento se afasta de g_c , a temperatura para a restauração da simetria aumenta, de modo que, quando $g_r \rightarrow \infty$, $T = T_c$. Este é o ponto fixo infravermelho. Assim, a linha crítica definida pela equação (2.85) conecta os pontos fixos ultravioleta e infravermelho, dividindo o plano (g, T) em duas partes (ver figura (2.6)).

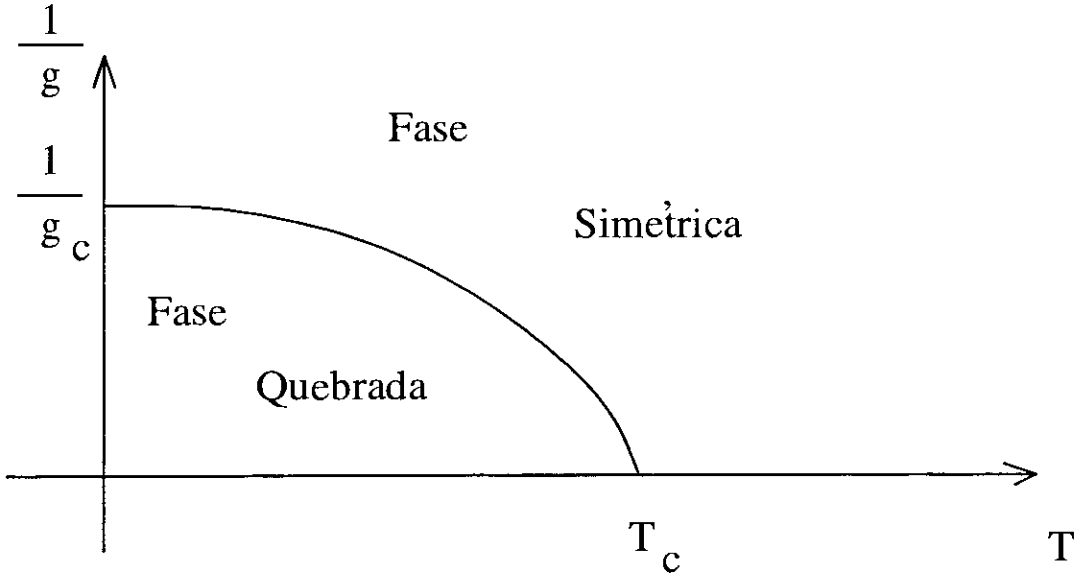


Figura 2.6: O diagrama de fases do modelo de Gross-Neveu para diversos valores do acoplamento forte e da temperatura. A $T = 0$ temos o ponto fixo ultravioleta enquanto que, em $T = T_c$, temos o ponto fixo infravermelho.

Passemos ao cálculo dos expoentes críticos. Combinando a equação de gap (2.84) com a definição da temperatura crítica (2.85), chegamos a

$$\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) = \frac{2g}{\beta} \sum_{-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{(\lambda)^2 + (\omega_{nc} + \theta)(\omega_n + \omega_{nc} + 2\theta)(T/T_c - 1)}{(\mathbf{p}^2 + (\omega_{nc} + \theta)^2)(\mathbf{p}^2 + (\omega_n + \theta)^2 + \langle \lambda \rangle^2)}. \quad (2.86)$$

Esta forma da equação do gap é bastante conveniente para a extração dos expoentes

críticos, uma vez que estes se reduzem à contagem de potências, na região do infravermelho, da integral do lado direito da equação de estado (2.86) [61, 62]. Para $\theta \in [0, 2\pi/\beta]$ e $\theta \neq \pi/\beta$, temos, novamente, um comportamento analítico para a equação de estado, uma vez que $\omega_n + \theta$ ainda serve como regulador. Nesta região, os expoentes críticos são os mesmos de uma teoria de campo médio, como pode ser visto na tabela (2.1). Para $\theta = \pi/\beta$, no entanto, as frequências de Matsubara são levadas às típicas em um sistema bosônico, $\omega_n + \pi/\beta \rightarrow \omega_n^b$, onde, $\omega_n^b = 2n\pi/\beta$, é a frequência de Matsubara de *bosons*. Isto permite que separemos, na equação (2.86), as contribuições do modo zero, $\omega_0^b = 0$, dos demais, tal que

$$\left(\frac{T}{T_c} - 1\right) = \frac{2g}{\beta} \int^\Lambda \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{\langle \lambda \rangle^2}{\mathbf{p}^2(\mathbf{p}^2 + \langle \lambda \rangle^2)} + \sum_{n=-\infty, (n \neq 0)}^{\infty} \dots \quad (2.87)$$

Na expressão acima, introduzimos a dimensionalidade $2 \leq d < 4$, de modo a facilitar a análise dos resultados para os expoentes ¹⁰. O segundo termo, ausente, no lado direito da expressão acima, é completamente analítico no infravermelho, uma vez que, como dissemos anteriormente, as frequências não nulas servem como um regulador. O termo correspondente ao modo zero, no entanto, será o responsável pelo comportamento singular das quantidades termodinâmicas, conforme os princípios da redução dimensional. Os expoentes críticos serão definidos como

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle_{h \rightarrow 0} &\sim t^\beta, \\ \langle \lambda \rangle_{t \rightarrow 0} &\sim h^\delta, \end{aligned} \quad (2.88)$$

onde, $t = (T/T_c - 1)$, é o desvio da temperatura crítica e, h , é um campo externo

¹⁰Para $d > 4$, a integral nos *momenta* é perfeitamente analítica, independente do valor de θ , e os expoentes são os de uma teoria de campo médio (ver tabela (2.1)).

introduzido, provisoriamente, para possibilitar o cálculo do expoente δ . O resultado obtido para estes expoentes vem do fato de que, para $\langle \lambda \rangle \rightarrow 0$, o termo correspondente ao modo zero, na equação acima, se comporta como $\langle \lambda \rangle^{d-2}$, enquanto que, para o campo h , obtemos $h \sim \langle \lambda \rangle^{d-1}$. Isto nos dá, diretamente,

$$\beta = \frac{1}{d-2}, \quad \delta = d-1. \quad (2.89)$$

Os outros expoentes: $\eta = 4-d$, $\gamma = 1$, $\nu = 1/(d-2)$, podem ser obtidos de maneira semelhante, e percebemos que eles satisfazem às relações de escala usuais dos fenômenos críticos (ver tabela (2.1)). Vemos, ainda, a manifestação direta do teorema de Hohenberg-Coleman-Mermin-Wagner [63], que proíbe a existência de uma quebra de simetria contínua em duas dimensões, pelo fato de, no limite $d \rightarrow 2$, o expoente $\beta \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

O confinamento

3.1 Introdução

Uma das características mais curiosas das teorias de calibre é a possibilidade do confinamento. Em um sistema confinado, não existem estados assintóticos que carregam carga de cor [5] e, como resultado, todas as partículas do espectro são singletos sob transformações de simetria do grupo correspondente. Isto geralmente pode ocorrer de duas maneiras: primeiro, como é consenso acontecer na CDQ em $3 + 1$ dimensões, os campos carregados que aparecem na ação, *quarks* e *gluons*, estariam permanentemente confinados em estados ligados que são singletos de cor - os *mesons* e os *baryons*; segundo, além da possibilidade da formação destes singletos, é possível que as cargas dos campos fundamentais sejam completamente blindadas, de modo que estes possam interpolar estados físicos do espectro mas criar somente singletos de cor. Esta segunda situação começou a ser considerada a partir dos resultados obtidos em modelos bi-dimensionais como o modelo de Schwinger e a CDQ com *quarks* sem massa [64]. A esta segunda possibilidade dá-se o nome de blindagem, ao invés de confinamento.

À temperatura finita, a diferença entre as fases confinada e desconfiada é menos evidente. Além da inexistência do conceito de estados assintóticos (as partículas num banho térmico são continuamente espalhadas por excitações térmicas características de um corpo negro), as quantidades observáveis às quais temos acesso são médias termodinâmicas e funções de correlação, que descrevem a resposta do sistema a uma determinada influência externa. Por estas razões, o teste comumente utilizado para se verificar o confinamento em uma teoria de calibre à temperatura finita é a sua capacidade de blindar cargas externas. O operador que verifica esta blindagem é o *loop* de Polyakov [10], que será devidamente definido e apresentado na seção seguinte. O valor esperado deste operador está relacionado com a quantidade de energia necessária para a inserção de uma carga de teste no sistema. Para sistemas confinados, esta energia livre é infinita enquanto que para sistemas desconfiados o seu valor é finito. Veremos, ainda, que uma transição confinamento/desconfinamento está diretamente relacionada com a quebra espontânea de uma simetria global, a simetria $Z(N)$ no caso de teorias de calibre $SU(N)$. No entanto, na presença de *fermions* dinâmicos na representação fundamental esta simetria é quebrada explicitamente, mesmo na fase confinada, e o *loop* de Polyakov não serve mais como um parâmetro de ordem para diferenciar as duas fases.

Neste capítulo, vamos recordar alguns argumentos que nos levam à conclusão de que a transição de fase de confinamento é de primeira ordem para teorias de calibre $SU(N)$ puras e se torna um suave *crossover* quando os mais leves *quarks* dinâmicos são levados em conta [65]. Posteriormente, vamos introduzir a noção de confinamento para teorias de calibre Abelianas, onde o parâmetro de ordem para a distinção entre as fases confinada

e desconfiada é a versão Abelianizada do *loop* de Polyakov [66]. À transição de desconfiamento em uma teoria Abelianizada está associada a quebra espontânea da simetria global Z , o análogo Abelianizado da simetria $Z(N)$ das teorias de Yang-Mills, que tem, ainda, uma interpretação em termos da carga dos estados físicos do sistema, sendo quantizada na fase confinada. Segundo este cenário, vamos mostrar como uma transição de fase confinamento/desconfinamento pode ser induzida, através da introdução de um potencial químico imaginário, que, fazendo o papel da componente zero de um campo de calibre, faz o sistema flutuar em torno das configurações onde a lei de Gauss é satisfeita, e quebra espontaneamente a simetria Z .

3.2 A simetria $Z(N)$ nas teorias de Yang-Mills

No estudo das teorias de calibre $SU(N)$ em equilíbrio térmico à temperatura finita, a função de partição é dada como uma integral Euclideana do tipo

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \propto \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_E(A_\mu)}, \quad (3.1)$$

sobre uma variedade Euclideana que é infinita nas três dimensões espaciais e compacta na direção temporal. Aqui, $A_\mu \equiv A_\mu^a t_a$, onde $t_a, a = 1, \dots, N^2 - 1$, são matrizes da representação fundamental do grupo $SU(N)$. A integral de caminho é feita sobre configurações do campo de calibre que satisfazem condições de contorno periódicas $A_\mu(0, \mathbf{x}) = A_\mu(\beta, \mathbf{x})$, onde $\beta \equiv 1/T$ é o inverso da temperatura, e a ação Euclideana é dada por

$$S_E(A_\mu) = \frac{1}{4g^2} \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \text{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$, como de costume. A expressão acima para $Z(\beta)$ é obtida considerando-se somente os estados $|\psi\rangle$ que satisfazem a lei de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Ela então representa a função de partição para uma teoria na ausência de qualquer tipo de fonte externa.

O valor esperado de operadores é definido como

$$\langle \mathcal{O}(A_\mu) \rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_E(A_\mu)} \mathcal{O}(A_\mu). \quad (3.3)$$

Estaremos particularmente interessados no valor esperado de um operador específico: o *loop* de Polyakov [10]

$$P(\mathbf{x}) = \text{tr} \exp i \int_0^\beta d\tau A_0(\tau, \mathbf{x}), \quad (3.4)$$

com uma conveniente prescrição para ordenamento de caminhos. O interesse por este particular operador vem do fato de que a energia livre de uma carga de teste pode ser escrita como

$$\beta(F_q - F_0) = -\ln \langle P(\mathbf{x}) \rangle, \quad (3.5)$$

onde F_0 é a energia livre do vácuo [16]. Se $\langle P \rangle = 0$, inserir um *quark* no sistema exige uma quantidade infinita de energia. Fisicamente, isto implica que não se consegue blindar o fluxo desta carga de teste e, conseqüentemente, o estado do campo de calibre é modificado até o infinito espacial, o que custa uma energia infinita. Assim, $\langle P \rangle = 0$ indica que a teoria está na sua fase confinada. Se, por outro lado, $\langle P \rangle \neq 0$, então a energia livre F_q é finita e o sistema se encontra na fase desconfiada.

Sob a ação do grupo de calibre

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} + iU\partial_\mu U^{-1}, \quad U(\tau, \mathbf{x}) \in SU(N) \quad (3.6)$$

o *loop* de Polyakov se transforma como

$$P \rightarrow \text{tr} U(0, \mathbf{x}) P U(\beta, \mathbf{x}), \quad (3.7)$$

e, então, P é invariante quando U é periódico. Por outro lado, observáveis locais são invariantes sob transformações não periódicas do tipo

$$U(\tau + \beta, \mathbf{x}) = zU(\tau, \mathbf{x}), \quad (3.8)$$

onde $z = \exp(2\pi i n/N)$ é um elemento do grupo $Z(N)$, o centro do grupo de calibre. Para o *loop* de Polyakov temos, no entanto, a lei de transformação

$$P \rightarrow zP. \quad (3.9)$$

Assim, P é um parâmetro de ordem para a manifestação de uma simetria global. Ir de $\langle P \rangle = 0$ a $\langle P \rangle \neq 0$ requer a quebra espontânea da simetria $Z(N)$.

A transição de fase confinamento/desconfinamento, como uma função da temperatura, em teorias de calibre $SU(N)$, é então uma transição onde a simetria global $Z(N)$ é quebrada espontaneamente. Se o parâmetro de ordem variar continuamente de $\langle P \rangle = 0$, para $T < T_c$, até $\langle P \rangle \neq 0$, para $T > T_c$, então a transição é de segunda ordem. Se, por outro lado, $\langle P \rangle$ for descontínuo em T_c , então a transição é de primeira ordem. Segundo Svetitsky e Yaffe [65], podemos obter uma energia livre de Landau-Ginzburg que descreva as oscilações de grandes comprimentos de onda do parâmetro de ordem

$$F = \int d^3\mathbf{x} [(\partial_i P)^2 + V(P)], \quad (3.10)$$

onde o potencial

$$V(P) = f(|P|^2) + g(|P|^2, \text{Re}(P^N)), \quad (3.11)$$

pode ser obtido via integração, na integral funcional Euclideana, de todos os graus de liberdade, exceto A_0 , a fase para o *loop* de Polyakov. De um modo geral, f e g são

funções arbitrárias que podem ser expandidas em torno da origem, $\langle P \rangle = 0$. Assim, chegamos à expressão geral

$$V(P) = a|P|^2 + b\text{Re}(P^3) + c|P^4| + \dots, \quad (3.12)$$

onde os coeficientes a , b e c são funções da temperatura a serem determinados fenomenologicamente. No caso de $c > 0$ e $b = 0$, teremos que o mínimo do potencial vai se aproximar continuamente da origem até que na temperatura crítica, $a = 0$, a simetria é restaurada. Esta é uma transição de fase de segunda ordem, conforme representado na figura (3.1).

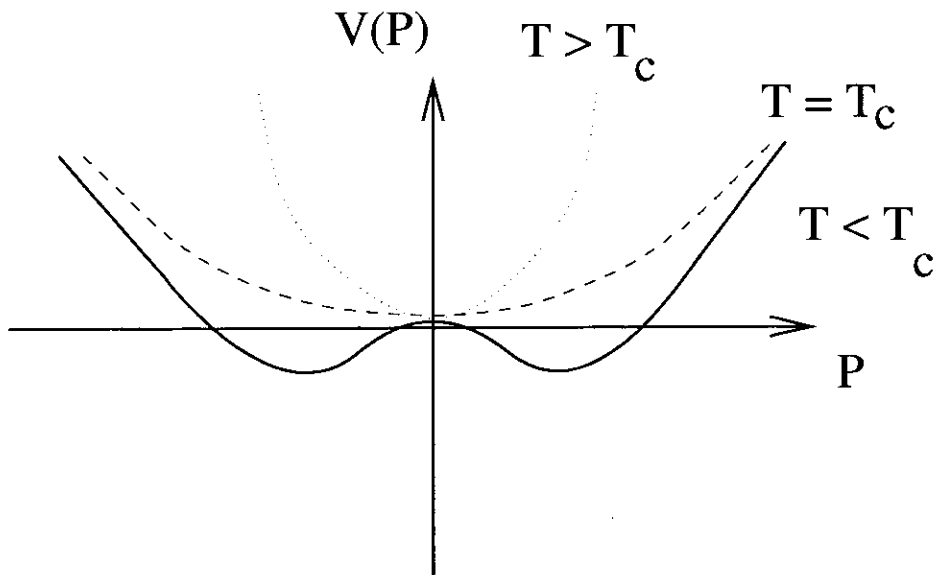


Figura 3.1: Padrão de quebra de simetria em uma transição de fase de segunda ordem. Vemos que, à medida que a temperatura aumenta, o mínimo do potencial se aproxima de uma maneira contínua da origem.

No entanto, a presença de um termo cúbico, $b \neq 0$, faz com que o mínimo do potencial pule descontinuamente da origem para um certo valor, à medida que a diminui. Este termo cúbico está presente no caso de teorias de calibre $SU(3)$, uma vez que a simetria

é $Z(3)$, e isto indica que a transição confinamento/desconfinamento é uma transição de primeira ordem [65], conforme a representação da figura (3.2).

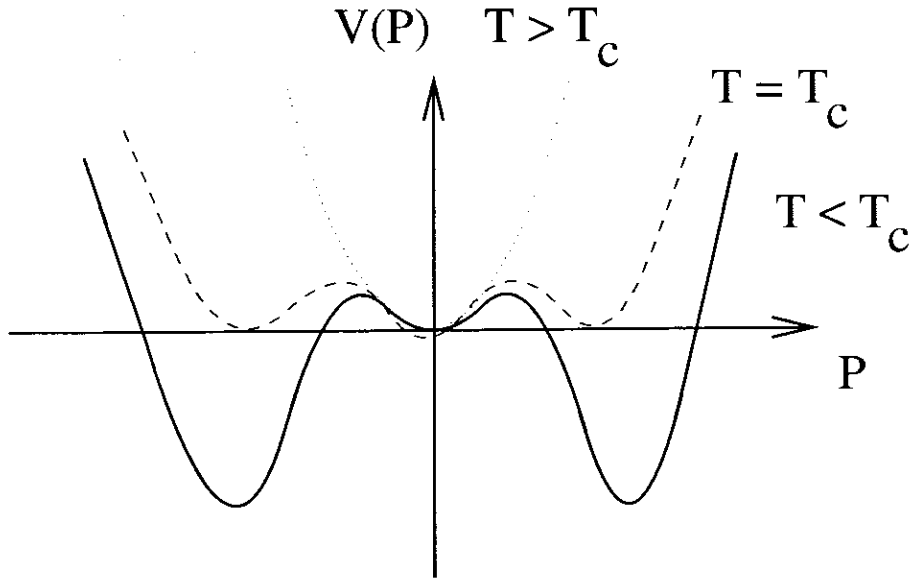


Figura 3.2: Padrão de quebra de simetria em uma transição de fase de primeira. Vemos que, agora, à medida que a temperatura aumenta, o mínimo do potencial se aproxima de uma maneira descontínua da origem.

Antes de prosseguir, vamos tecer algumas considerações a respeito da transição de confinamento na CDQ. Na CDQ, este fenômeno é inerentemente não perturbativo e, como tal, talvez a melhor maneira de se atacar o problema seja via simulações em rede. Segundo Wilson [67], a CDQ pode ser formulada na rede e a integral Euclideana (3.1) pode ser calculada através das técnicas de Monte Carlo [68]. A previsão de Svetitsky e Yaffe de que a transição de confinamento na teoria $SU(3)$ é de primeira ordem foi confirmada pelas simulações na rede [69]. A inclusão de *quarks* dinâmicos na função de partição muda esta situação inteiramente. $\langle P \rangle$ é diferente de zero mesmo na fase confinada. Isto pode ser entendido heurísticamente notando que uma fonte estática pode sempre ser blindada por um par virtual $q\bar{q}$ no sistema. Também pode-se entender mais formalmente mostrando-se

que após a integração sobre os *fermions*, a ação efetiva para os campos de calibre inclui um termo que quebra a simetria $Z(N)$ explicitamente [65]. Não se conhece nenhum parâmetro de ordem para a transição de confinamento quando *fermions* dinâmicos estão presentes. Isto provavelmente exclui a possibilidade de uma transição de segunda ordem. Uma transição de primeira ordem, no entanto, é ainda provável no regime de *quarks* pesados. Para dois sabores de *quarks* leves, no entanto, simulações em rede não detectaram nenhum sinal de uma transição de primeira ordem. O valor esperado $\langle P \rangle$ cresce de uma maneira suave como uma função da temperatura e nenhuma descontinuidade é aparente. Temos um *crossover*.

3.3 Bolhas e domínios no espaço de Minkowski

Uma das maneiras mais simples de se estudar a questão do confinamento é através da análise do potencial efetivo para a fase do *loop* de Polyakov, o campo A_0 [65]. Como é bastante conhecido, a simetria $Z(N)$ é espontaneamente quebrada em uma certa ordem da série perturbativa para teorias de calibre $SU(N)$. De fato, cálculos do potencial efetivo para A_0 mostram a existência de mínimos em $\langle P \rangle = 1$ e seus estados $Z(N)$ simétricos $\langle P \rangle = \exp(2\pi i n/N)$. A presença destes mínimos na fase desconfiada (altas temperaturas) e a sua ausência na fase confinada foram devidamente comprovadas por simulações na rede. Como consequência, a forma do potencial efetivo para A_0 na fase de altas temperaturas sugere a existência de *domínios* na integral funcional Euclideana (ver figura (3.3)). Se forçarmos as condições de contorno do nosso sistema de uma maneira tal que para $x_0 \rightarrow -\infty$ o sistema esteja próximo ao mínimo em $\langle P \rangle = 1$ e que para $x_0 \rightarrow +\infty$ o

sistema esteja próximo a, por exemplo, $\langle P \rangle = \exp(2\pi i n/N)$, então haverá uma "parede" separando estes dois "vácuos". A tensão interfacial entre estes vácuos pode ser obtida a partir do potencial efetivo [70] ou, ainda, medida através de simulações numéricas [71].

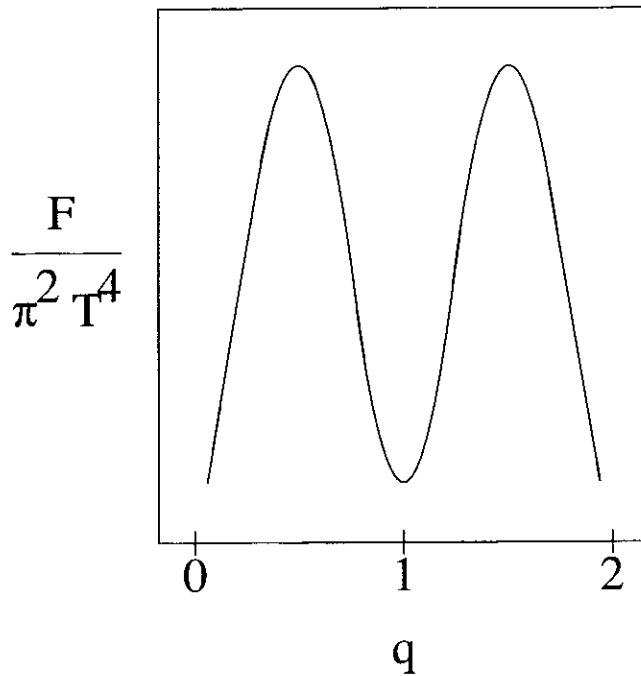


Figura 3.3: Domínios a teoria de calibre $SU(2)$ pura. Neste gráfico, F é a energia livre e $q \propto \ln \langle P \rangle$. Esta figura foi generosamente concedida por Nathan Weiss.

Uma consequência direta da existência destes domínios é o aparecimento de bolhas $Z(N)$ [72]. Estas bolhas são regiões no espaço para as quais $\langle P \rangle \simeq 1$ fora da bolha mas, em seu centro, $\langle P \rangle \simeq \exp(2\pi i n/N)$. Com a diminuição da temperatura, passa a ser mais favorável a criação destas bolhas. Isto acontece pois a probabilidade de formação da bolha é $\exp(-S/g^2)$. A ação é proporcional a T^4 , e g^2 aumenta conforme T diminui. Assim, ao se esfriar o sistema, mais e mais destas bolhas se formarão, randomicamente, de tal forma que, para uma determinada temperatura crítica, $\langle P \rangle = 0$ [73]. Esta é a transição confinamento/desconfinamento para uma teoria de calibre $SU(N)$ pura. Alternativamente,

podemos entender o processo de confinamento acima descrito como a interferência destrutiva, no propagador dos *gluons*, entre as diferentes classes de homotopia. De fato, a simetria $Z(N)$ do sistema de *gluons* fornece amplitudes idênticas em diferentes classes de homotopia. No entanto, uma partícula na representação fundamental do grupo $SU(N)$ adquire fases $\exp(2i\pi n/N)$, $n = 1, \dots, N$, que se cancelam. O resultado é a ausência destas partículas nos estados assintóticos [74]. *A transição de desconfinamento deve ser observada através de amplitudes de transição entre estados assintóticos ao invés de amplitudes de transição vácuo-vácuo.*

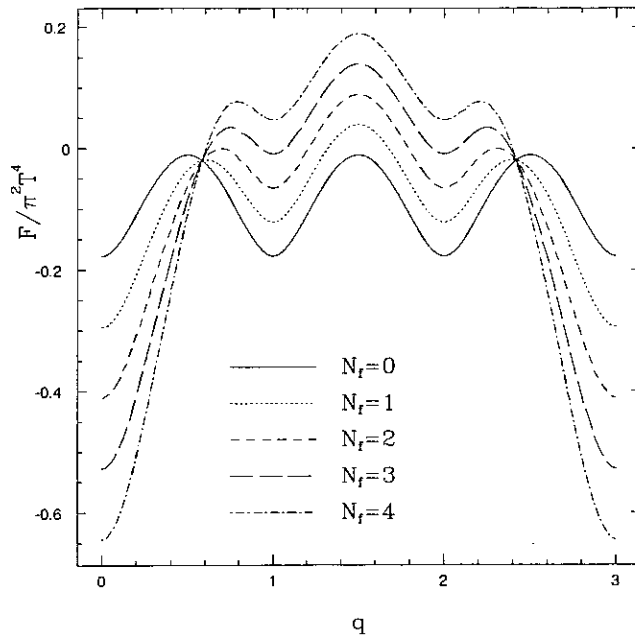


Figura 3.4: Estados meta-estáveis correspondentes a estados com energia livre e entropia negativas para uma teoria de calibre $SU(3)$ na presença de N_f sabores de *fermions*. Novamente, F é a energia livre e $q \propto \ln \langle P \rangle$. Esta figura também foi generosamente concedida por Nathan Weiss.

No caso de uma teoria com *fermions* dinâmicos, a simetria $Z(N)$ é explicitamente quebrada. O *loop* de Polyakov adquire um valor esperado diferente de zero para qualquer temperatura e o problema de distinguir as fases confinada e desconfiada se torna

ainda mais delicado [75]. No entanto, dependendo do número de cores e sabores, há a possibilidade do aparecimento de estados meta-estáveis no potencial efetivo para A_0 (ver figura (3.4)). Estes estados correspondem a estados onde ambas a energia livre e entropia são negativas e, por este motivo, alguns autores tem argumentado que tais estados não devem ter necessariamente um objeto de Minkowski associado. São como *instantons*; objetos Euclidianos sem similar Minkowskiano. Como veremos, tais estados meta-estáveis também se mostram presentes no estudo da transição de confinamento mesmo para teorias de calibre Abelianas. Veremos ainda que, nestes estados, os *fermions* adquirem uma estatística de *bosons*, mas com o sinal trocado, o que dá origem a energias livres e entropias negativas. Desta forma, seria incorreto tentar associar o surgimento de domínios e bolhas a estes estados meta-estáveis. Mesmo assim, eles devem ser levados em conta pois contribuem para a função de partição Euclideana do sistema.

3.4 A simetria Z em teorias de calibre Abelianas

No caso de teorias de calibre Abelianas em $2 + 1$ dimensões, foi recentemente proposto o uso da versão Abeliana do *loop* de Polyakov

$$P_{\tilde{e}}(\mathbf{x}) \equiv e^{i\tilde{e} \int_0^\beta d\tau A_0(\tau, \mathbf{x})}, \quad (3.13)$$

como parâmetro de ordem para uma transição de fase de confinamento à temperatura finita, mesmo na presença de *fermions* dinâmicos [66]. Para isto, exige-se que a carga de teste \tilde{e} não seja um múltiplo inteiro da carga fundamental e , e que a teoria seja, ainda, massiva e finita no ultravioleta. O valor esperado do operador (3.13) mede, então, a resposta de um sistema eletrodinâmico à presença de uma carga de teste \tilde{e} num ponto \mathbf{x}

do espaço Euclideano. A quantidade

$$\beta(F_{\tilde{e}} - F_0) = -\ln \langle P_{\tilde{e}}(\mathbf{x}) \rangle, \quad (3.14)$$

dá a energia necessária para se inserir uma carga \tilde{e} no sistema eletrodinâmico e pode ser usada para detectar ou não sinais de confinamento. A razão é que, nestas circunstâncias, o *loop* de Polyakov (3.13) se transforma não trivialmente sob a ação da transformação global Z

$$P_{\tilde{e}}(\mathbf{x}) \rightarrow P_{\tilde{e}}(\mathbf{x}) \cdot e^{2\pi i n \tilde{e}/e}, \quad (3.15)$$

que é o análogo Abelian da simetria $Z(N_c)$ mencionada na seção anterior. Na verdade, Z é o grupo quociente entre todas as transformações de calibre e aquelas que são estritamente periódicas no tempo imaginário. O valor esperado de $P_{\tilde{e}}(\mathbf{x})$ pode então ser usado como um parâmetro de ordem para explorar a manifestação da simetria Z no sistema estatístico em consideração [76]. Se a simetria está manifesta, o *loop* de Polyakov se anula indicando que o sistema está na sua fase confinada, onde precisa-se de uma energia infinita para inserir uma carga teste que não seja um múltiplo inteiro da carga fundamental. Por outro lado, se a simetria está quebrada, o *loop* de Polyakov adquire um valor não nulo e o sistema está na sua fase desconfiada, onde a inserção de partículas com carga fracionária é permitida. Como consequência, a simetria Z tem uma interpretação física em termos das cargas dos estados físicos. Se a simetria é manifesta, todos os estados físicos têm carga quantizada enquanto que, no caso da simetria quebrada, a existência de estados com carga não quantizada é permitida.

Para ver a origem desta simetria Z , consideremos a expressão da integral funcional

Euclideana, à temperatura finita, para a função de partição da eletrodinâmica quântica

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi)}, \quad (3.16)$$

onde a ação Euclideana d -dimensional é

$$S(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \int_0^\beta d\tau \int d^{d-1}\mathbf{x} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi \right), \quad (3.17)$$

com $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. As condições de contorno no tempo imaginário são, como de costume, periódicas para *bosons* e anti-periódicas para *fermions*. A integral de caminho em (3.16) é invariante sob a transformação de calibre

$$\begin{aligned} A'_\mu(\tau, \mathbf{x}) &= A_\mu(\tau, \mathbf{x}) + \partial_\mu \chi(\tau, \mathbf{x}), \\ \bar{\psi}'(\tau, \mathbf{x}) &= \bar{\psi}(\tau, \mathbf{x}) e^{-ie\chi(\tau, \mathbf{x})}, \\ \psi'(\tau, \mathbf{x}) &= e^{ie\chi(\tau, \mathbf{x})} \psi(\tau, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

desde que a função χ seja periódica a menos de um fator constante múltiplo de $2\pi/e$

$$\chi(\tau + \beta, \mathbf{x}) = \chi(\tau, \mathbf{x}) + \frac{2\pi n}{e}. \quad (3.19)$$

O grupo de todas as transformações de calibre, módulo aquelas que são estritamente periódicas, é Z , o grupo dos inteiros. Esta é a simetria global que dá origem ao comportamento não trivial (3.15) para o *loop* de Polyakov.

Como dito anteriormente, esta simetria Z tem uma interpretação em termos das cargas dos estados físicos. Na quantização por integrais de caminho das teorias de calibre, a componente zero do campo de calibre surge como um multiplicador de Lagrange para garantir a invariância de calibre. O operador que projeta os estados da teoria em um

subespaço onde a invariância de calibre é manifesta pode ser obtido pela exponenciação do gerador das transformações de calibre infinitesimais e integrando-se sobre todas as configurações de calibre

$$\mathcal{P} = \frac{1}{const.} \int \mathcal{D}A_0 \exp \left(-\beta \int d^{d-1}\mathbf{x} (\nabla A_0 \cdot \mathbf{E} - A_0 e \psi^\dagger \psi) \right). \quad (3.20)$$

Neste caso, a matriz densidade do sistema fica

$$\rho = \mathcal{P} \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z(\beta)}, \quad (3.21)$$

onde o projetor \mathcal{P} se transforma como

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \cdot e^{2\pi i n \hat{Q}/e}, \quad (3.22)$$

sob transformações de calibre do tipo (3.19), onde

$$\hat{Q} = e \int d^{d-1}\mathbf{x} \psi^\dagger \psi, \quad (3.23)$$

é o operador carga. A existência da simetria Z está diretamente relacionada com a questão de se $\exp(2\pi i \hat{Q}/e)$ é ou não o operador identidade quando atuante nos estados com peso de Boltzman não nulo na matriz densidade.

3.5 O desconfinamento como um efeito Aharonov-Bohm

Segundo o que foi discutido na seção anterior, o parâmetro de ordem que diferencia as fases confinada e desconfinada em uma teoria de calibre Abelian, está relacionado com a quebra espontânea de uma simetria global: a simetria Z . Esta, por sua vez, tem uma interpretação em termos da carga dos estados físicos do sistema que, na fase confinada,

deve ser um múltiplo da carga fundamental e . Assim, podemos imaginar ser possível relacionar diretamente quantização da carga com confinamento. Este é o propósito desta seção. Vamos estudar um modelo de *fermions* com auto-interação quártica em $2 + 1$ dimensões, o modelo de Gross-Neveu, definido no capítulo anterior, sujeito a um vínculo na medida funcional segundo o qual a carga total do sistema deve ser quantizada. Vamos mostrar que o multiplicador de Lagrange associado, através do qual o vínculo é satisfeito, gera um potencial Coulombiano que, em três dimensões Euclidianas, é confinante.

3.5.1 Quantização da carga e confinamento

Seja a teoria descrita pela função de partição (2.66). À esta teoria vamos acrescentar um vínculo que imponha a quantização da carga total do sistema [59]. Podemos garantir isto através da projeção dos estados físicos em um subespaço que satisfaça à lei de Gauss

$$\hat{Q} |\psi\rangle = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d^2\mathbf{x} |\psi\rangle, \tag{3.24}$$

onde

$$\hat{Q} \equiv \int d^2\mathbf{x} \hat{Q} = e \int d^2\mathbf{x} \psi^\dagger \psi \tag{3.25}$$

é o operador carga e

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E}) d^2\mathbf{x} \equiv Q_{tot} = eB \tag{3.26}$$

é a carga total do sistema, B sendo o número total de *fermions*. Ao nível da função de partição (2.66), o vínculo será implementado via uma função delta do tipo

$$\delta(\hat{Q} - \rho), \tag{3.27}$$

onde

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^B e \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3.28)$$

é a distribuição de cargas estáticas no sistema. Sendo local, este vínculo é muito difícil de se manipular e, por esta razão, faremos uso de um multiplicador de Lagrange. Usando a representação exponencial da função delta, chegamos a

$$Z(\beta, B) = \int \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}A_0 \exp[-N\mathcal{I}_{eff}(\lambda, \mathcal{G}; A_0, e)], \quad (3.29)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{eff}(\lambda, \mathcal{G}; A_0, e) &= \frac{1}{2\mathcal{G}} \int_0^\beta d\tau \int d^2\mathbf{x} \lambda^2(\tau, \mathbf{x}) - ie_N \sum_{i=1}^B \int_0^\beta d\tau A_0(\tau, \mathbf{x}_i) \\ &- \text{Tr} [\ln(\not{\partial} + \lambda(\tau, \mathbf{x}) + ie\gamma_0 A_0(\tau, \mathbf{x}))]_\beta, \end{aligned} \quad (3.30)$$

é a nova ação efetiva da teoria com o vínculo, $e_N \equiv e/N$ e $A_0(\tau, \mathbf{x})$ é o multiplicador de Lagrange através do qual a lei de Gauss média $\langle \hat{Q} \rangle = Q_{tot}$ é satisfeita. Note que A_0 desempenha o papel da componente zero para um campo de calibre, justificando a escolha de seu símbolo. A ação efetiva (3.30) é invariante sob a transformação global Z

$$\begin{aligned} A_0(\tau, \mathbf{x}) &\rightarrow A_0(\tau, \mathbf{x}) + \partial_\tau \chi(\tau, \mathbf{x}), \\ \chi(\tau + \beta, \mathbf{x}) &= \chi(\tau, \mathbf{x}) + \frac{2\pi n}{e} \end{aligned} \quad (3.31)$$

e podemos, assim, estudar sua quebra espontânea e sua relação com o confinamento. Antes de prosseguirmos, devemos chamar a atenção para o fato de que a função de partição (3.29), com o vínculo da lei de Gauss, dá, simplesmente, o valor esperado da correlação entre B loops de Polyakov em termos de cargas de teste $\tilde{e} = e$. De fato, podemos sempre

retirar a dependência no tempo imaginário de A_0 através de uma transformação de calibre [77]. Assim, $A_0(\tau, \mathbf{x}) \rightarrow A_0(\mathbf{x})$, e a função de partição (3.29) se reduz a

$$Z(\beta, B) \equiv \langle P_e(\mathbf{x}_1) P_e(\mathbf{x}_2) \dots P_e(\mathbf{x}_B) \rangle = e^{-F(Q_{tot})}. \quad (3.32)$$

A energia livre $F(Q_{tot})$ deve ser finita, já que Q_{tot} é, necessariamente, um múltiplo da carga fundamental e . De fato, o sistema acima descrito é não confinante do ponto de vista das cargas quantizadas.

De um modo geral, o estudo das correlações entre os *loops* de Polyakov e o cálculo de energias livres nos permitirão determinar se um determinado sistema eletrodinâmico é ou não confinante. No caso de uma teoria na fase confinada, a correlação $\langle P_{\vec{e}}(\mathbf{x}_1) P_{\vec{e}}(\mathbf{x}_2) \rangle$ deve satisfazer à propriedade de aglomeração (*clustering*) e decrescer exponencialmente. Por outro lado, na fase desconfinada espera-se que tal correlação se aproxime de um valor constante a longas distâncias. Passemos, então, ao cálculo de $F(Q_{tot})$.

3.5.2 Topologia e transmutação estatística

Para um número grande de sabores de *fermions* ($N \rightarrow \infty$), a função de partição (3.29) pode ser calculada via o método da fase estacionária. Para isto, precisamos conhecer seus pontos de sela, em torno dos quais faremos a expansão em $1/N$. Estes pontos de sela são obtidos como solução das equações

$$\frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int^{\Lambda} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + (\omega_n + \langle A_0 \rangle)^2 + \langle \lambda \rangle^2}, \quad (3.33)$$

e

$$i\tilde{b} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\beta} \int^{\Lambda} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \tau} (\omega_n + \langle A_0 \rangle)}{\mathbf{p}^2 + (\omega_n + \langle A_0 \rangle)^2 + \langle \lambda \rangle^2}, \quad (3.34)$$

onde $\omega_n = 2\pi/\beta(n + 1/2)$ são as conhecidas frequências de Matsubara para os *fermions* e uma prescrição para a regularização da soma não convergente em (3.34) foi utilizada [54]. Aqui, definimos $\tilde{b} \equiv \tilde{Q}_{tot}/e\beta\Omega$, Ω sendo o volume espacial. Vamos olhar para todas as soluções possíveis para este sistema de equações. A solução mais geral para $\langle A_0 \rangle$ é do tipo

$$\langle A_0 \rangle = \frac{n\pi}{\beta} + i\mu \equiv \langle A_0 \rangle_n, \quad (3.35)$$

onde n é um inteiro arbitrário e μ é o conhecido (e real) potencial químico¹. Por outro lado, para estas mesmas soluções de $\langle A_0 \rangle_n$, a primeira equação de ponto de sela coincide com a equação comumente encontrada no estudo do modelo de Gross-Neveu à temperatura e densidade finitas [51]. Podemos renormalizá-la através da substituição de \mathcal{G} , no lado esquerdo de (3.33), pelo seu valor à temperatura zero

$$\frac{1}{\mathcal{G}_*} = 2 \int^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + M^2}, \quad (3.36)$$

que é dado em termos da massa M induzida para os *fermions*. Assim, após integração e soma de Matsubara, onde usamos a fórmula de Poisson (ver, por exemplo, [51]), chega-se a

$$\beta(\langle \lambda \rangle - M) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu) + in\pi} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu) - in\pi} \right) = 0 \quad (3.37)$$

que admite soluções reais para $\langle \lambda \rangle$, para todo n , como era de se esperar, uma vez que $\langle \lambda \rangle$ faz o papel de massa para os *fermions*.

A periodicidade no conjunto infinito de pontos de sela (3.35) é um reflexo da topologia não trivial do espaço de configurações da teoria. De fato, de acordo com a discussão, no

¹Devemos mencionar que a solução complexa (3.35) é consistente com a situação proposta recentemente em [78], para estudar o potencial efetivo para a fase do *loop* de Polyakov, no caso de teorias de calibre não Abelianas.

capítulo anterior, sobre o significado de um potencial químico imaginário, um campo de calibre $A_0(\theta)$ constante, pode ser entendido como sinalizando a presença de um solenóide infinitesimal, de fluxo magnético $2\pi\theta$, que coincide com o eixo do cilindro onde a teoria está sendo quantizada [55]. O estado fundamental é infinitamente degenerado e o tunelamento entre um estado com $\langle A_0 \rangle_n$ e outro com $\langle A_0 \rangle_m$ é possível através de uma transformação de calibre global do tipo (3.31). Devido à presença deste fluxo magnético, podemos antecipar um efeito Aharonov-Bohm [56] que terá uma grande influência no comportamento termodinâmico do sistema.

A energia livre do sistema no n -ésimo ponto de sela é

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{f_\infty - f_\beta}{N} \right)_n &= \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \ln(\mathbf{P}^2 + (\omega_m + \langle A_0 \rangle_n)^2 + \langle \lambda \rangle^2) \\
 &\quad - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + M^2) + \frac{(M^2 - \langle \lambda \rangle^2)}{2\mathcal{G}_*} \\
 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln \left(\frac{p^2 + \langle \lambda \rangle^2}{p^2 + M^2} \right) + \frac{(M^2 - \langle \lambda \rangle^2)}{p^2 + M^2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^2\mathbf{P}}{(2\pi)^2} \left\{ \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)-in\pi} \right) + \ln \left(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)+in\pi} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{12\pi} (3\langle \lambda \rangle^2 M - 2\langle \lambda \rangle^3 - M^3) \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi\beta^3} \left[\ln \left(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)} \right) Li_2 \left(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)} e^{-in\pi} \right) - Li_3 \left(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)} e^{-in\pi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)} \right) Li_2 \left(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)} e^{in\pi} \right) - Li_3 \left(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)} e^{in\pi} \right) \right], \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

onde $\omega = \sqrt{\mathbf{P}^2 + \langle \lambda \rangle^2}$, e as funções $Li_2(z)$ e $Li_3(z)$ representam o di e o tri-logaritmos [53] (ver apêndice 3). Por outro lado, após a subtração de divergências ultravioletas em (3.34), a soma sobre as frequências de Matsubara nos leva a

$$\tilde{q} = e \int d^2\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)+in\pi} + 1} - \frac{1}{e^{\beta(\omega+\mu)-in\pi} + 1} \right\} \equiv \langle \hat{Q} \rangle_n, \quad (3.39)$$

onde, novamente, $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \langle \lambda \rangle^2}$. Neste ponto, alguns comentários se fazem necessários: primeiro, para n par, nós caímos na situação onde \tilde{q} representa a carga média de uma distribuição fermiônica em equilíbrio químico [52]

$$\langle \hat{Q} \rangle_{fermions} \equiv \langle \hat{Q} \rangle_{n=par} = \tilde{q}, \quad (3.40)$$

uma vez que podemos sempre absorver a parte real da solução (3.35) por uma translação nas frequências de Matsubara de n unidades. Isto é o que deveríamos naturalmente esperar uma vez que estamos lidando com um sistema fermiônico desde o princípio. Neste caso, a energia livre (3.38) representa a quantidade de energia necessária para se inserir uma fonte fermiônica com carga \tilde{q} no sistema. Esta energia é finita, positiva e identifica a fase confinada da teoria

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_\infty - f_\beta}{N} \right)_{par} &= \frac{1}{12\pi} (3\langle \lambda \rangle^2 M - 2\langle \lambda \rangle^3 - M^3) \\ &+ \frac{1}{2\pi \beta^3} \left[\ln(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) Li_2(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) - Li_3(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) \right. \\ &\left. + \ln(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) Li_2(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) - Li_3(-e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

A expressão acima pode ser simplificada no limite $\mu = 0$ e na criticalidade, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_*$ e $\langle \lambda \rangle = 0$. De fato, para esta configuração, a energia livre acima simplifica dando o resultado

$$\left(\frac{f_\infty - f_\beta}{N} \right)_{par} = \frac{3}{2} \frac{\zeta(3)}{2\pi \beta^3}, \quad (3.42)$$

que é finita e positiva [79]. O resultado acima foi obtido através da utilização de relações não triviais entre polilogaritmos (ver apêndice 3), e se encaixa perfeitamente na expressão geral

$$\frac{f_\infty - f_\beta}{N} = \tilde{c} \frac{\zeta(d)}{(2\pi)^d \beta^d}, \quad (3.43)$$

onde \tilde{c} é a carga central de uma teoria conforme em d dimensões [80]. Para n par, obtemos, então, $\tilde{c} = 3/2$, de acordo com resultados anteriores na literatura [81].

Segundo, e este é o caso mais interessante, para n ímpar, caímos na situação onde $-\tilde{q}$ representa a carga média de um sistema bosônico ² em equilíbrio químico

$$\langle \hat{Q} \rangle_{bosons} \equiv \langle \hat{Q} \rangle_{n=ímpar} = -\tilde{q}. \quad (3.44)$$

Agora, a energia livre (3.38) é negativa e, seguindo o mesmo raciocínio que usado anteriormente, poderia ser interpretada como a energia necessária para se inserir uma fonte bosônica de carga $-\tilde{q}$ no sistema

$$\begin{aligned} \left(\frac{f_\infty - f_\beta}{N} \right)_{ímpar} &= \frac{1}{12\pi} (3\langle \lambda \rangle^2 M - 2\langle \lambda \rangle^3 - M^3) \\ &+ \frac{1}{2\pi\beta^3} \left[\ln(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) Li_2(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) - Li_3(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle - \mu)}) \right. \\ &\left. + \ln(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) Li_2(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) - Li_3(e^{-\beta(\langle \lambda \rangle + \mu)}) \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Estes estados identificam o que chamaremos de fase confinada não convencional. Agora, teremos que a equação (3.37) admite uma solução especial para $\langle \lambda \rangle$ na criticalidade e no limite $\mu = 0$. Esta solução é chamada *média de ouro*, $\langle \lambda \rangle = \frac{2}{\beta} \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, e nos permitirá fazer uso de relações não triviais entre polilogaritmos (ver apêndice 3), o que simplifica a energia livre dando o resultado

$$\left(\frac{f_\infty - f_\beta}{N} \right)_{ímpar} = -\frac{8}{5} \frac{\zeta(3)}{2\pi\beta^3}, \quad (3.46)$$

que é finito e negativo [79]. Novamente, em comparação com a expressão geral (3.43), vemos que $\tilde{c} = -8/5$, para n ímpar. Esta é a carga central de uma teoria conforme

²Note que, para $\langle A_0 \rangle_{n=ímpar}$ uma translação nas frequências de Matsubara resulta em um conjunto de frequências típicas de um sistema de *bosons*.

cujo ponto fixo correspondente é instável³. Ainda, o fato de $\langle \lambda \rangle$ ser não nulo nos leva à conclusão de que, nestes pontos, a simetria quiral não é restaurada e a carga central obtida corresponderia à situação de escalonamento por comprimento finito (*finite size scaling*). Notemos ainda que esta energia livre é exatamente $-2\times$ a energia livre para o modelo sigma não linear em três dimensões [83, 79]. Isto indica que um tipo especial de bosonização pode estar ocorrendo nestes pontos, como veremos mais adiante.

O resultado acima não é incompatível com o teorema *spin*-estatística, uma vez que é uma consequência de uma transmutação estatística entre as funções distribuição

$$\begin{aligned} n = \textit{par} : \quad & \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)+in\pi} + 1} = \delta_{FD}, \\ n = \textit{impar} : \quad & \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)+in\pi} + 1} = -\delta_{BE}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Esta transmutação estatística acontece pois o efeito do fluxo magnético do efeito Aharonov-Bohm é o de, justamente, variar as condições de contorno dos campos envolvidos, neste caso os *fermions*. Deve ser enfatizado que, como no efeito Aharonov-Bohm, os campos elétrico e magnético ao longo do cilindro são nulos. Assim, o efeito de um $A_0 \neq 0$ é puramente quântico e somente se faz sentir devido ao comprimento finito, raio β , da variedade temporal, conforme exigido pelo formalismo de Matsubara. O significado de (3.39) para n ímpar é que os *fermions* podem condensar [59, 79, 78, 84], com, no entanto, energia livre [79, 78] e entropia [73, 72] negativas. Por estas razões, é comum encontrar na literatura especializada, uma referência a estes estados como não físicos [72]. De qualquer modo, estes devem ser levados em conta pois contribuem para o cálculo da função de partição Euclideana [73].

³A análise do grupo de renormalização para este conjunto de teorias conformes pode ser encontrada em [82].

3.5.3 O potencial efetivo para A_0 e a quebra da simetria Z

É nosso objetivo agora mostrar que uma transição de fase desconfinante pode ser induzida pela introdução de um potencial químico imaginário θ no sistema. Este procedimento equivale a permitir flutuações de A_0 em torno dos seus valores de ponto de sela

$$A_0(\theta) = \langle A_0 \rangle_n + \theta, \quad (3.48)$$

o que causará a quebra espontânea da simetria Z (3.31) e, conseqüentemente, a violação da lei de Gauss [76]. *A transição de fase de desconfinamento está diretamente associada à violação da lei de Gauss para os estados físicos* [74]. Como conseqüência, a inserção de cargas fracionárias, no sistema, com um potencial químico imaginário, pode ser possível com um gasto finito de energia. Além do mais, fazer θ variar no intervalo $[0, \pi/\beta]$, nos permite interpolar continuamente os estados correspondentes a n par ($\theta = 0$) e os estados correspondentes a n ímpar ($\theta = \pi/\beta$), discutidos na seção anterior, sem trocar de setor de topologia (sem tunelamento entre diferentes vácuos Z).

Como discutido anteriormente (ver seção 3.3), a maneira padrão de se estudar a transição de fase de desconfinamento, é através do estudo do potencial efetivo para a fase do *loop* de Polyakov [65]. Assim, a partir da expressão da ação efetiva (3.30), obtemos, ignorando o termo λ^2 e as inserções de $P_e(\mathbf{x})$, a expressão

$$V(A_0(\theta)) = -\frac{1}{\pi\beta^2} \left[\ln \left(e^{-\beta(\langle\lambda\rangle-\mu)} \right) Li_2 \left(-e^{-\beta(\langle\lambda\rangle-\mu)} e^{-i\beta A_0(\theta)} \right) - Li_3 \left(-e^{-\beta(\langle\lambda\rangle-\mu)} e^{-i\beta A_0(\theta)} \right) \right. \\ \left. \ln \left(e^{-\beta(\langle\lambda\rangle+\mu)} \right) Li_2 \left(-e^{-\beta(\langle\lambda\rangle+\mu)} e^{i\beta A_0(\theta)} \right) - Li_3 \left(-e^{-\beta(\langle\lambda\rangle+\mu)} e^{i\beta A_0(\theta)} \right) \right] \quad (3.49)$$

para o potencial efetivo para a fase do *loop* de Polyakov, ou equivalentemente, para $A_0(\theta)$.

Claramente, este potencial efetivo é invariante sob transformações (3.31).

Devido à grande dificuldade de se trabalhar com $\mu \neq 0$, vamos simplificar a análise do potencial efetivo para o caso $\mu = 0$. Neste limite, podemos usar as expansões harmônicas dos di e trilogarítmos [53], para obter

$$V(A_0(\theta)) = -\frac{1}{\pi \beta^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n\beta\langle\lambda\rangle} (1 + n\langle\lambda\rangle\beta) \frac{\cos(ne\beta A_0(\theta))}{n^3}. \quad (3.50)$$

Existem dois limites de onde poderemos obter maiores informações sobre o potencial efetivo. No regime $\langle\lambda\rangle \gg T$, $T/\langle\lambda\rangle$ e $e^2/\langle\lambda\rangle$ são pequenos enquanto que e^2/T é irrestrito. Nesta aproximação, os maiores harmônicos contribuirão apenas perturbativamente, de modo que basta nos concentrarmos no termo dominante

$$V(A_0(\theta)) = \frac{\beta\langle\lambda\rangle}{\pi} e^{-\beta\langle\lambda\rangle} \cos(e\beta A_0(\theta)), \quad (3.51)$$

que é simplesmente o potencial de Sine-Gordon ⁴. A teoria efetiva de baixas energias do modelo em questão exibe, desta forma, uma transição de fase correspondente à bem conhecida transição BKT (Berezinsky-Kosterlitz-Thouless) que acontece em um gás Coulombiano bi-dimensional ⁵, onde a temperatura crítica para a transição de desconfinamento é, ao nível de árvore,

$$T_{crit.}^{\langle\lambda\rangle \gg T} = \frac{e^2}{8\pi}. \quad (3.52)$$

A análise do grupo de renormalização para esta transição de fase foi feita inicialmente por Kosterlitz e Wiegmann e, posteriormente, elaborada por Amit e colaboradores [85, 27] (ver figura (3.5)). Na descrição do gás Coulombiano do modelo XY, esta transição BKT corresponde ao acoplamento-desacoplamento de vórtices. No caso estudado nesta tese,

⁴De fato, como mostrado em [85], para $n > 1$, os operadores $\cos(ne\beta A_0)$ adquirem uma dimensão ultravioleta maior que dois, sendo irrelevantes na criticalidade.

⁵Para uma discussão mais detalhada, veja [76].

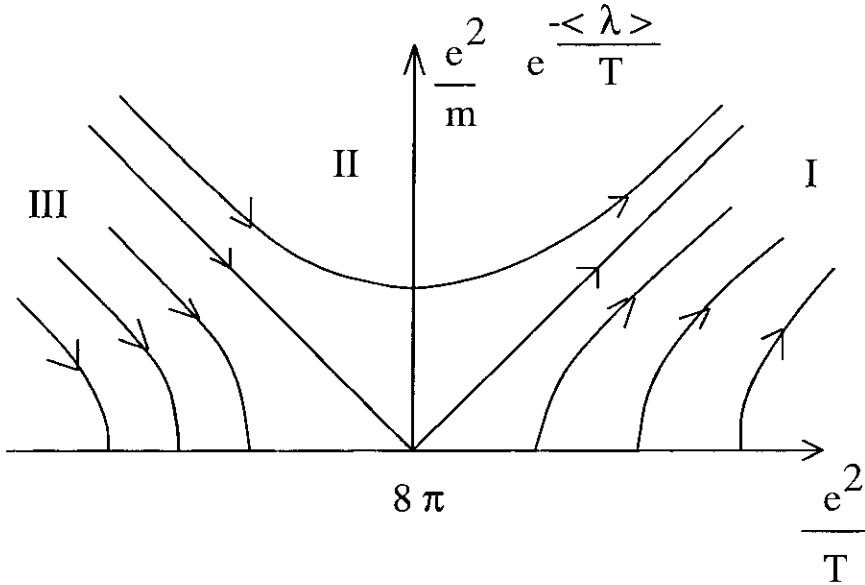


Figura 3.5: Fluxo do grupo de renormalização para a transição BKT de um gás Coulombiano bidimensional. As setas apontam na direção do ultravioleta. Assim, a região I corresponde ao confinamento, enquanto que as regiões II e III ao desconfinamento. A região III é assintoticamente livre, enquanto que na região II existe uma linha de pontos fixos infravermelhos, correspondentes a teorias conformes Gaussianas, isto é, com carga centra $c = 1$. A linha que separa as regiões I e II é a linha da transição BKT.

esta transição teria, então, uma analogia com o acoplamento-desacoplamento de pares de partícula-antipartícula com carga \tilde{e} . Na fase desconfinada, $A_0(\theta)$ flutua em torno de sua configuração de ponto de sela, $\langle A_0 \rangle$. Este é o limite semi-clássico, obtido quando $T \gg \langle \lambda \rangle$.

De fato, neste limite, o potencial efetivo para $A_0(\theta)$ se resume a

$$V(A_0(\theta)) = \frac{1}{\pi\beta^2} Li_3(1, A_0(\theta) + \pi), \quad (3.53)$$

onde $Li_3(r, \theta)$ é a parte real do trilogaritmo na notação de Lewin [53]. $A_0(\theta)$ necessariamente flutua em torno do ponto de sela $\langle A_0 \rangle$, onde a simetria Z é espontaneamente quebrada, sinalizando o desconfinamento.

Podemos tentar dar uma interpretação para a relação entre a transição de fase desconfinante, violação da lei de Gauss e o aparecimento de uma fase para os campos fermiônicos.

A presença do solenoide de fluxo $2\pi\theta$ implica o aparecimento de um potencial químico imaginário θ , que faz a componente zero do campo de calibre flutuar em torno da configuração na qual o sistema tem carga quantizada e é confinante. Estas flutuações causam o aparecimento de uma fase para os campos fermiônicos que, então, passam a descrever excitações aniônicas [86, 87]. Como este processo está acompanhado por uma diminuição da carga total do sistema, associaremos, assim, uma blindagem da carga elétrica por uma névem de *anyons*. Esta diminuição da carga do sistema quebra a simetria Z e permite que partículas com carga fracionária sejam inseridas no meio, caracterizando o desconfinamento. Além do mais, como a temperatura crítica para esta transição é, segundo os argumentos descritos acima, de $T_c = e^2/8\pi$, então associaremos esta energia ao limiar para a criação de *anyons* no sistema.

Capítulo 4

Conclusão

Segundo os argumentos de universalidade, e de acordo com as idéias da redução dimensional de teorias de campos à temperatura finita, as propriedades termodinâmicas estáticas, da cromodinâmica quântica com dois sabores de *quarks* não massivos, seriam, na região crítica, universalmente equivalentes às encontradas para o caso do magneto de Heisenberg em três dimensões espaciais [12, 13]. Apesar de este cenário não ser unânime, sendo, na verdade, alvo de severas críticas, solidamente estruturadas em simulações numéricas, por cientistas altamente qualificados, ele dá, no entanto, resultados bastante próximos aos obtidos por outros métodos analíticos. Um exemplo é a constante de decaimento do *pion* à temperatura finita, que, calculada a partir da teoria dimensional reduzida, como feito nesta tese, resulta em uma expressão comparável aos clássicos resultados de Gasser e Leutwyler [22], e Bochkarev e Kapusta [19]. A razão desta notável concordância, viria do fato de que, quantidades termodinâmicas, escritas como correlação entre os graus de liberdade do modelo, seriam, no equilíbrio termodinâmico, dominadas pelos chamados modos zero, ou, ainda, modos estáticos. Os modos de maiores frequências contribuiriam apenas perturbativamente. Desta forma, as únicas quantidades

termodinâmicas que não poderiam ser descritas pela teoria dimensional reduzida, seriam as quantidades termodinâmicas globais, como a energia livre e o calor específico. Para estas quantidades, os modos de maiores frequências deveriam ser considerados, não apenas como uma perturbação, mas somados completamente. Por este motivo, os resultados obtidos para o calor específico, a partir da teoria reduzida, diferem tanto dos obtidos via simulações numéricas, dando margem à críticas como em [15].

Ao investigarmos a restauração da simetria quiral no modelo de Gross-Neveu, percebemos que, no entanto, o cálculo dos expoentes críticos para o parâmetro de ordem quiral, diferem, entre si, para os casos onde os modos de maiores frequências são desprezados, dos casos onde os mesmos são somados (ver tabela (2.1)). A surpresa deste resultado está exatamente no fato de que o condensado quiral, sendo obtido pela correlação entre os graus de liberdade fermiônicos do modelo, deveria, conforme discutido no parágrafo anterior, se encaixar na classe de observáveis onde a redução dimensional dá resultados confiáveis. O mecanismo que utilizamos para detectar esta incompatibilidade foi a introdução de um potencial químico imaginário no modelo. Na presença deste, obtivemos que, considerando apenas o modo zero, o comportamento crítico das funções de correlação é compatível com o previsto para uma teoria de campo médio, com exceção do ponto onde θ , o potencial químico imaginário, é igual a π/β . Neste ponto, o parâmetro de ordem nunca se anula, uma consequência direta do teorema de Hohenberg-Coleman-Mermin-Wagner [63], e simplesmente não há expoentes a calcular. Somando todos os modos, no entanto, este ponto se transforma numa região, $2\pi/3\beta \leq \langle \lambda \rangle \leq 4\pi/4\beta$, tal que, fora desta, o comportamento crítico é de uma teoria de campo médio, enquanto, em seu interior, vale novamente o

teorema de Hohenberg-Coleman-Mermin-Wagner. Esta discrepância, entre os resultados da redução dimensional e os resultados obtidos em se considerando a soma completa de modos, merece um estudo um pouco mais aprofundado, uma vez que o conceito de universalidade e a técnica da redução dimensional são amplamente utilizados nos mais diversos ramos e áreas da física.

No que diz respeito à restauração da simetria quiral à temperatura finita, percebemos que, fazendo o papel da componente zero de um campo de calibre constante, um potencial químico imaginário atribuí, aos *fermions*, uma fase contínua de maneira análoga ao processo de anionização em teorias de calibre com quebra de paridade. Ao contrário do que acontece no caso de um potencial químico real, onde a restauração da simetria é favorecida devido à presença de um meio denso, agora esta passa a ser dificultada devido a um aumento na escala de massa da teoria, um efeito direto da presença do potencial químico imaginário. No caso de considerarmos ambos os potenciais químicos simultaneamente, teremos uma competição entre favorecimento e prejuízo da restauração da simetria quiral, de modo que a dinâmica crítica dependerá do valor relativo entre os dois potenciais químicos.

Para o problema da transição de fase desconfinanante, por outro lado, aproveitamos a conexão entre confinamento e quantização da carga, sugerida recentemente em [66], para investigar a quebra da simetria global Z em teorias de calibre Abelianas confinantes. Vimos, que a transição de desconfinamento pode ser entendida como um efeito Ahraronov-Bohm, onde a violação da lei de Gauss, condição necessária para o desconfinamento, seria induzida, novamente, pela presença de um potencial químico imaginário. Este,

fazendo o papel de parâmetro de transmutação estatística, induziria uma anionização no sistema, o que causaria uma blindagem das cargas dos campos fermiônicos, tornando-as não quantizadas em relação à unidade de carga fundamental e , e quebrando a simetria Z . Desconfinamento. Ainda, a semelhança entre o potencial efetivo para o campo A_0 , e o potencial do modelo de Sine-Gordon, nos leva à conclusão que a transição desconfinante é equivalente à transição BKT que acontece em um gás Coulombiano bi-dimensional. A temperatura crítica $e^2/8\pi$, poderia, então, ser interpretada como a energia necessária para a anionização do sistema.

Apêndice A

O mecanismo da universalidade

Uma característica comum a todos os fenômenos críticos é o fato de, próximo à criticidade, todas as quantidades termodinâmicas do sistema estudado se relacionarem, entre si, por *leis de potência*. Os respectivos expoentes, conhecidos como *expoentes críticos*, servem para classificar os fenômenos críticos em *classes de universalidade* [88]. As primeiras tentativas teóricas para calcular estes expoentes, foram baseadas no conceito de campo médio, onde o efeito das flutuações do sistema seriam simulados por um campo externo efetivo ¹. Apesar de este tipo de teoria dar uma boa visão qualitativa dos fenômenos críticos, suas predições para os expoentes eram sempre em termos de uma razão entre inteiros, bem diferente do que é medido experimentalmente.

Todos concordavam que desprezar as flutuações era uma aproximação muito grosseira e algumas tentativas foram feitas no sentido de incorporá-las perturbativamente. No entanto, este procedimento logo se revelou impraticável devido ao aparecimento de divergências infravermelhas que *quebravam* a expansão perturbativa numa determinada

¹Este método do campo médio é, de fato, muito comum em diversos ramos da física, variando desde a fórmula de Clausius-Mossotti para um meio polarizável, passando pela aproximação do meio efetivo em sistemas desordenados, a aproximação Hartree-Fock na física atômica e de muitos corpos, até a aproximação semi-clássica no estudo de sistemas quânticos.

ordem. Em 1985, Kenneth G. Wilson ganhou o premio Nobel em física devido aos seus estudos sobre o *grupo de renormalização* (GR) [1]. Com a ajuda do GR, não somente foi possível reproduzir os valores exatos dos expoentes críticos, como, ainda, explicar, de uma maneira simples e natural, o conceito, até então pouco intuitivo, de *universalidade*. A proposta de Wilson era a de se considerar os graus de liberdade microscópicos, não todos de uma só vez, mas, ao contrário, *progressivamente*. Para isto, Wilson definiu um procedimento que, repetido infinitas vezes, daria conta de todos os graus de liberdade do sistema. Este procedimento é conhecido, hoje em dia, como *transformação do grupo de renormalização* (TGR). De uma maneira geral, se \mathcal{H} é o Hamiltoniano de um certo sistema físico

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \Theta^n \{S\}, \quad (\text{A.1})$$

onde K_n são acoplamentos e Θ^n operadores locais definidos em termos dos graus de liberdade S , então uma TGR, representada aqui genericamente por R_λ ($\lambda > 1$), é tal que

$$\begin{aligned} [K]_\lambda &= R_\lambda [K], \\ [K]_{\lambda\mu} &= R_\mu [K]_\lambda \\ &= R_\lambda \circ R_\mu [K]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

R_λ não tem inversa (uma vez que $\lambda > 1$) e, conseqüentemente, a denominação *grupo de renormalização* é usada como abuso de linguagem ².

Após uma TGR, o sistema (A.1) passa a ser caracterizado por uma escala de comprimento (ou energia) que será o parâmetro fundamental para a descrição de como este

²Na verdade, as TGR's, definidas no espaço das constantes de acoplamento, formam o chamado semi-grupo das dilatações.

sistema se aproxima da criticalidade. De fato, a partir da versão infinitesimal das transformações (A.2)

$$\lambda \frac{d[K]_\lambda}{d\lambda} = \mathcal{B}([K]_\lambda), \quad (\text{A.3})$$

com

$$\mathcal{B}([K]_\lambda) = \left. \frac{\partial [K]_\mu}{\partial \mu} \right|_{\mu=\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

percebemos claramente que seu efeito é gerar um fluxo no espaço das constantes de acoplamento (ou, equivalentemente, espaço das teorias), onde as trajetórias são parametrizadas pela escala λ . A equação (A.3) é conhecida como equação homogênea do grupo de renormalização, ou equação de Callan-Symanzik, enquanto que as equações diferenciais parciais (A.4) definem as chamadas funções *beta* e explicitam o caráter de sistema dinâmico irreversível (um processo de Markov) do grupo de renormalização.

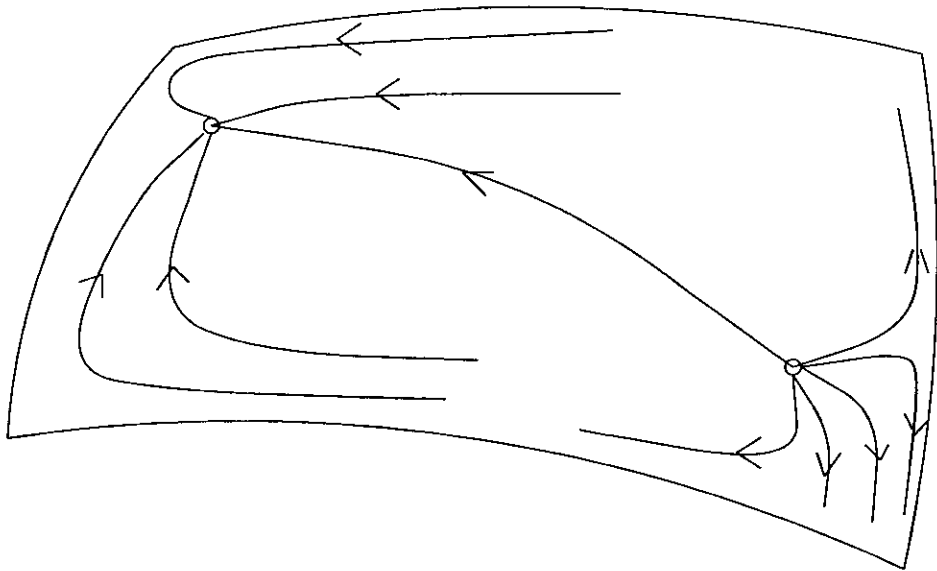
Os ingredientes fundamentais do método do GR são: o reconhecimento da importância física dos chamados *pontos fixos* (atratores do sistema dinâmico definido acima) e o comportamento do fluxo do grupo de renormalização em suas proximidades [89]. Suponha que a forma funcional da transformação R_λ seja conhecida. Um ponto fixo desta transformação é um ponto do espaço dos acoplamentos, $[K]^*$, tal que

$$[K]^* = R_\lambda [K]^*. \quad (\text{A.5})$$

Em geral, uma TGR tem diversos pontos fixos e cada um deles tem a sua própria *base de atração*, ou *domínio*. Por definição, a base de atração de um determinado ponto fixo é o conjunto de todos os pontos no espaço dos acoplamentos (espaço dos Hamiltonianos) que fluem para ele sob TGR's e, eventualmente ³, o alcançam após um número infinito

³A existência de atratores estranhos em alguns sistemas estatísticos já foi documentada, mas estes

de iterações (ver figura (A.1)).



Espaço dos
Hamiltonianos

Figura A.1: Exemplo de fluxo do grupo de renormalização, para o caso de um ponto fixo atrativo (o da esquerda) e um repulsivo.

O fato de todos os pontos pertencentes à base de atração de um certo ponto fixo fluírem em direção a este é o mecanismo básico para o entendimento do conceito de universalidade. Segundo os argumentos de universalidade, se estamos interessados em estudar o comportamento crítico de um sistema de difícil tratamento, basta encontrarmos um sistema mais simples e pertencente à mesma classe de universalidade que o sistema de partida, e, então, todos os expoentes críticos podem ser mais facilmente determinados. Para tal, faz-se uso de informações fenomenologicamente obtidas, segundo as quais sistemas pertencentes a uma mesma classe de universalidade partilham

- simetrias globais do Hamiltoniano;

não serão de interesse para esta tese.

- natureza do parâmetro de ordem;
- alcance das interações.

Assim, uma vez identificado o parâmetro de ordem de uma determinada transição de fase, suas propriedades de simetria e dimensionalidade, passamos à identificação de sistemas simples e conhecidos que possuam estas mesmas características. Esta é a principal razão pela qual se ouve bastante falar de modelos como: **Ising**, **Potts** e **Askin-Teller**, na mecânica estatística e **modelos σ** , **Gross-Neveu** e **CP1** na física de partículas. Próximo a um ponto fixo, todas as teorias na mesma classe de universalidade de um dos modelos acima citados exibem o mesmo comportamento crítico, universalmente.

Apêndice B

Redução dimensional

No limite de altas temperaturas, $T \rightarrow \infty$, as funções de correlação estáticas de uma teoria de campos em 3 + 1 dimensões, por exemplo, podem ser acuradamente reproduzidas, para distâncias maiores que $1/T$, por uma teoria de campos efetiva em três dimensões (ver figura (B.1)).

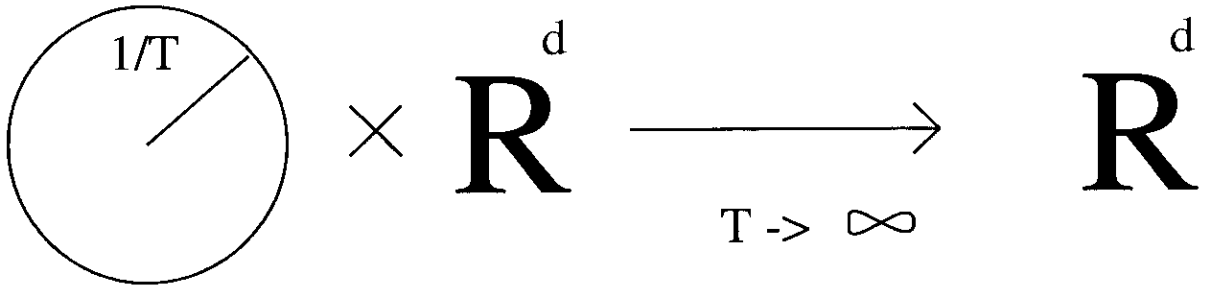


Figura B.1: Aniquilação da dimensão compactificada para altas temperaturas, $T \rightarrow \infty$.

Esta idéia, chamada *redução dimensional*, não é nova [6, 90, 91, 31], mas somente recentemente seu potencial foi totalmente utilizado para calcular quantidades físicas, no contexto da teoria eletrofraca [40]. A redução dimensional está baseada no fato de que as funções de correlação estáticas de uma teoria de campos em equilíbrio térmico podem ser expressas em termos de uma integral funcional Euclideana

$$Z(\beta) = \text{tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \right), \quad (\text{B.1})$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano e $\beta = 1/T$ é o inverso da temperatura. De fato, como $e^{-\beta\hat{H}}$ pode ser interpretado como o operador de evolução temporal na direção do tempo imaginário, então (B.1) pode realmente ser escrita como uma integral funcional sobre campos $\Phi(\tau, \mathbf{x})$ definidos no intervalo 0 a $-i\beta$

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\Phi(\tau, \mathbf{x}) e^{-\int_0^\beta \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\Phi)}, \quad (\text{B.2})$$

onde \mathcal{L} é a densidade de Lagrangeano para uma teoria de campos em $3 + 1$ dimensões cuja componente temporal t foi analiticamente continuada para $-i\tau$. O traço em (B.1) pode ser implementado através da imposição das condições de contorno

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \pm \Phi(\tau + \beta, \mathbf{x}), \quad (\text{B.3})$$

onde o sinal de $+$ diz respeito a *bosons* enquanto que o sinal $-$ diz respeito a *fermions*. Deste modo, a correlação entre dois operadores $\mathcal{O}(\mathbf{0})$ e $\mathcal{O}(\mathbf{R})$ é obtida calculando-se a média de seu produto sobre os campos $\Phi(\tau, \mathbf{x})$ com o peso exponencial de (B.2), como de costume.

Devido à periodicidade de (B.3) em τ , os campos $\Phi(\tau, \mathbf{x})$ podem ser decompostos em modos $\Phi_n(\mathbf{x})$ de Fourier, com frequências de Matsubara $\omega_n = 2\pi n/\beta$ para *bosons* e $\omega_n = 2\pi(n + 1/2)/\beta$ para *fermions*

$$\Phi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) e^{-i\omega_n \tau}. \quad (\text{B.4})$$

A contribuição para a correlação entre modos de Fourier vizinhos decresce, com a distância, obedecendo a $\exp(-|\omega_n|\mathbf{x})$. Assim, os únicos modos para os quais a contribuição não vai a zero exponencialmente são os modos bosônicos com $n = 0$, os chamados *modos zero* ou,

ainda, *modos estáticos*. Esta é a essência da redução dimensional, onde a teoria efetiva é uma teoria de campos em uma dimensão inferior em termos dos modos zero dos campos bosônicos da teoria original, de modo a reproduzir as correlações estáticas, desta última, para distâncias $|\mathbf{R}|$ maiores que $1/T$, $R \gg 1/T$. Diagramaticamente, podemos entender a redução dimensional com ajuda do teorema do desacoplamento de Appelquist-Pisarski [90], uma versão de temperatura finita do teorema do desacoplamento de Appelquist-Carazzone [38]. De fato, no limite de altas temperaturas, todos os modos fermiônicos e os bosônicos, com $n \neq 0$, se tornam infinitamente pesados, uma vez que adquirem uma massa térmica ω_n , e então a contribuição dos modos não estáticos pode ser desprezada. Por exemplo, seja uma teoria escalar com um acoplamento λ . Do ponto de vista de funções de Green estáticas, não é difícil ver que

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{G_{0\dots 0}^R(\mathbf{p}, m, T, \lambda T; n \neq 0)}{G_{0\dots 0}^R(\mathbf{p}, m, \lambda T; n = 0)} = 0, \quad (\text{B.5})$$

onde $G_{0\dots 0}^R$ é calculada a partir da teoria dimensional reduzida. Vemos que, apesar de a teoria efetiva ser "à temperatura zero", a constante de acoplamento efetiva ganha uma dependência em T , como uma assinatura do caráter térmico da teoria original. Esta dependência varia de acordo com o método de renormalização utilizado, mas esta variação é controlada por uma equação do grupo de renormalização extra, necessária para completamente e univocamente definir o processo da redução dimensional. Para uma discussão mais detalhada, veja [32, 31].

Apêndice C

Polilogarítmos

O *dilogarítmo* foi estudado inicialmente por Euler e Landen, na segunda metade do século XVIII. Sua definição, em termos de um argumento complexo z , é dada por

$$Li_2(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^2}, \quad |z| \leq 1. \quad (\text{C.1})$$

Este alcance pode ser estendido para fora do círculo unitário, por intermédio de uma formulação integral

$$Li_2(z) = - \int_0^z \ln(1-t) \frac{dt}{t}. \quad (\text{C.2})$$

De posse desta definição, Euler rapidamente derivou uma série de relações entre dilogarítmos para diversos valores do argumento

$$\begin{aligned} Li_2(z) + Li_2(-z) &= \frac{1}{2} Li_2(z^2) \\ Li_2(-z) + Li_2\left(-\frac{1}{z}\right) &= 2Li_2(-1) - \frac{1}{2} \ln^2 z \\ Li_2(z) + Li_2(1-z) &= Li_2(1) - \ln z \ln(1-z). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

As duas primeiras são conhecidas como relações de duplicamento e inversão, respectivamente, e nos permitem escrever, para os argumentos 1, -1 e $1/2$

$$Li_2(1) = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2),$$

$$\begin{aligned} Li_2(-1) &= -\frac{\pi^2}{12}, \\ Li_2(1/2) &= \frac{\pi^2}{12} - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{C.4}$$

onde o $Li_2(z)$ pode ser expresso em termos de funções elementares.

Definindo a quantidade $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$, que é solução de

$$u^2 + u = 1, \tag{C.5}$$

Landen chegou, após a mudança $z = \rho^2$ e $1 - z = \rho$, e através das relações (C.3), às novas relações

$$\begin{aligned} Li_2(\rho) &= \frac{\pi^2}{10} - \ln^2 \rho \\ Li_2(\rho^2) &= \frac{\pi^2}{15} - \ln^2 \rho. \end{aligned} \tag{C.6}$$

A importância das relações acima vem do fato de que ρ , conhecido ainda como a *média de ouro*, é, além de 1, -1 e $1/2$, o único argumento para o qual o dilogarítmo pode ser expresso em termos de funções elementares.

Nos anos que se seguiram, Landen passou ao estudo das relações entre os *trilogarítmos*.

Definidos como

$$Li_3(z) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^3} = \int_0^z Li_2(t) \frac{dt}{t}, \tag{C.7}$$

eles obedecem à nova relação

$$\begin{aligned} Li_3\left(\frac{-z}{1-z}\right) + Li_3(z) + Li_3(1-z) &= \zeta(3) + \zeta(2) \ln(1-z) - \\ &\quad \frac{1}{2} \ln z \ln^2(1-z) + \frac{1}{2} \ln^3(1-z), \end{aligned} \tag{C.8}$$

obtida a partir de (C.3). Assim, pode-se calcular

$$Li_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{1}{2}\zeta(2) \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} \ln^3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$Li_3(\rho^2) = \frac{4}{5}\zeta(3) + \frac{4}{5}\zeta(2)\ln\rho - \frac{2}{3}\ln^3\rho, \quad (C.9)$$

que são os únicos argumentos para os quais o trilogarítmo pode ser expresso em termos de funções elementares. Novamente percebemos o papel importante da *média de ouro* nas relações entre os di e trilogarítmos.

De um modo mais geral, define-se o *polilogarítmo* de z como

$$\begin{aligned} Li_n(z) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^r}{r^n}, \quad |z| \leq 1 \\ &= \int_0^z Li_{n-1}(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

Além da igualdade trivial $Li_n(1) = \zeta(n)$, nenhuma outra relação não trivial para $n > 3$ é conhecida. Acredita-se, ainda, que não há como se expressar um polilogarítmo com $n > 3$ em termos de funções elementares, qualquer que seja o seu argumento [53, 92].

Algumas outras definições úteis são as partes real e imaginária do polilogarítmo para argumentos no interior do círculo unitário, isto é, $z = re^{i\theta}$ com $|r| \leq 1$. Seguindo a notação de Lewin, vamos definir

$$\begin{aligned} Re(Li_n(r, \theta)) &= \frac{1}{2} [Li_n(re^{i\theta}) - Li_n(re^{-i\theta})] \\ Im(Li_n(r, \theta)) &= \frac{1}{2i} [Li_n(re^{i\theta}) + Li_n(re^{-i\theta})]. \end{aligned} \quad (C.11)$$

No caso especial do dilogarítmo, temos que, para $r = 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a parte imaginária é identificada com a função de Clausen

$$\begin{aligned} Cl_2(\theta) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(r\theta)}{r^2} \\ &\quad - \int_0^\theta \ln|2\sin(t/2)| dt, \end{aligned} \quad (C.12)$$

estudada, por este, em 1830.

Referências

- [1] K. G. Wilson e J. Kogut, Phys. Repts. **12C**, 75 (1974).
- [2] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory e Critical Phenomena*, 3a. ed., Oxford Science Publication, Oxford, 1996.
- [3] E. S. Fradkin, Proc. Lebedev Inst. **29**, 6 (1965).
- [4] *Electroweak Physics and the Early Universe*, NATO ASI Series B: vol. **338**, editores: J. C. Romão e F. Freire, Plenum, New York, 1994.
- [5] W. Marciano e H. Pagels, Phys. Rep. **36**, 137 (1978).
- [6] D. J. Gross, R. D. Pisarski e L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [7] D. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973); H. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973); S. Coleman e D. Gross, Phys. Rev. Lett. **31**, 851 (1973).
- [8] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [9] J. Collins e M. Perry, Phys. Rev. Lett. **35**, 135 (1975),

- [10] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **72**, 477 (1978); L. Susskind, Phys. Rev. D **20**, 2610 (1979).
- [11] T. D. Lee e G. C. Wick, Phys. Rev. D **9**, 2291 (1974); E. V. Shuriak, Phys. Lett. B **107**, 103 (1981).
- [12] R. Pisarski e F. Wilczek, Phys. Rev. D **29**, 338 (1984).
- [13] F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 3911 (1992); K. Rajagopal e F. Wilczek, Nucl. Phys. **B404**, 57 (1993).
- [14] A. Kocić and J. Kogut, Phys. Rev. Lett. **74**, 3110 (1995); Nucl. Phys. **B455**, 229 (1995).
- [15] E. Shuryak, Comm. Nucl. Part. Phys. **21**, 235 (1994).
- [16] L. McLerran, Rev. Mod. Phys. **58**, 1021 (1986).
- [17] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18**, 188 (1967); Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [18] J. F. Donoghue, E. Golowich e B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, Engle, 1992); H. Leutwyler, *QCD 20-Years Later-Anais do Congresso*, Aachen, Germany, 1992, editado por P. M. Zerwas e H. A. Kastrup (World Scientific, Singapore, 1993), Vol. 2.
- [19] A. Bochkarev e J. Kapusta, Phys. Rev. D **54**, 4066 (1996).
- [20] F. Karsch, Phys. Rev. D **49**, 3791 (1994).
- [21] M. Dine e W. Fischler, Phys. Lett. B **105**, 207 (1981).

- [22] J. Gasser e H. Leutwyler, *Phys. Lett. B* **184**, 83 (1987).
- [23] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 879 (1966); *ibid.*, **17**, 616 (1967).
- [24] S. Weinberg, *Physica A* **96**, 327 (1979).
- [25] J. Gasser e H. Leutwyler, *Ann. Phys. (NY)* **158**, 142 (1984); *Nucl. Phys.* **B250**, 465 (1985).
- [26] S. K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, New York, 1976.
- [27] D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, 2a. ed., World Scientific, Singapore, 1984.
- [28] G. Baker, B. Nickel e D. Meiron, *Phys. Rev. B* **17**, 1365 (1978).
- [29] A. Massaferrri, tese de mestrado, sob orientação de I. Bediaga e J. Miranda.
- [30] E. Braaten, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2164 (1995); E. Braaten e A. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1417 (1996).
- [31] N. P. Landsman, *Nucl. Phys.* **B322**, 498 (1989).
- [32] E. Braaten e A. Nieto, *Phys. Rev. D* **51**, 6990 (1995);
- [33] R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 1686 (1974); L. Dolan e R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974).
- [34] A. P. C. Malbouisson, M. B. Silva Neto e N. F. Svaiter, *Physica A* **250**, 423 (1998).

- [35] J. F. Ashmore, *Nuovo Cimento Lett.* **9**, 289 (1972); C. G. Bolini e J. J. Giambiagi, *Nuovo Cimento* **B12**, 20 (1972); G. 't Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44**, 189 (1972); G. Leibrant, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 849 (1975).
- [36] M. Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [37] J. Ambjorn e S. Wolfram, *Ann. Phys.* **147**, 1 (1983); P. Epstein, *Math. Ann.* **56** 516 (1903); *ibid.* **63**, 205 (1907); E. Elisalde and A. Romeo, *J. Math. Phys.* **30**, 5 (1989).
- [38] T. Appelquist e J. Carazzone, *Phys. Rev. D* **11**, 2856 (1975).
- [39] J. Ambjorn, *Commun. Math. Phys.* **67**, 109 (1979).
- [40] K. Farakos, K. Kajantie, K. Rummukainen e M. Schaposhnikov, *Phys. Lett. B* **336**, 494 (1994); *Nucl. Phys.* **B425**, 67 (1994).
- [41] R. D. Pisarski e M. Tytgat, *Phys. Rev. D* **54**, R2989 (1996); preprint hep-th/9609414.
- [42] A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*, Intl. Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [43] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Oxford Science Publication, Oxford, 1997.
- [44] J. Kapusta e E. V. Shuryak, *Phys. Rev. D* **49**, 4694 (1994).
- [45] S. Jeon e J. Kapusta, *Phys. Rev. D* **54**, 6475 (1996).
- [46] M. Gell-Mann e M. Levy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960).
- [47] V. A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*, World Scientific, Singapore, 1993.

- [48] D. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974).
- [49] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [50] X. G. Wen, F. Wilczek e A. Zee, *Phys. Rev. B* **39**, 11413 (1989).
- [51] B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Phys. Rep.* **205**, 59 (1991).
- [52] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1989.
- [53] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North Holland, New York, 1981.
- [54] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Frontiers in Physics, Lecture Notes Series, Addison Wesley 1987.
- [55] S. Huang e B. Schreiber, *Nucl. Phys.* **B426**, 644 (1994).
- [56] Y. Aharonov e D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [57] H. R. Christiansen, A. C. Petkou e M. B. Silva Neto, trabalho em progresso.
- [58] M. Le Bellac, *Quantum and Statistical Field Theory*, Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1991.
- [59] F. S. Nogueira, M. B. Silva Neto and N. F. Svaiter, *Phys. Lett. B* **441**, 339 (1998).
- [60] T. Reisz, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **73**, 462 (1999).
- [61] J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B367**, 105 (1991).

- [62] S. Hands, A. Kocic e J. Kogut, Phys. Lett. B **273**, 111 (1991).
- [63] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967); N. D. Mermin e H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966); N. D. Mermin, Journ. Math. Phys. **8**, 1061 (1967); S. Coleman, Comm. Math. Phys. **31**, 259 (1973); Phys. Rev. D **11**, 2088 (1975).
- [64] J. A. Swieca, em *Field Theoretical Methods in Particle Physics*, p. 325, W. Ruhl, ed. (Plenum, New York, 1979); E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, em *Non-Perturbative Methods in Two Dimensional Quantum Field Theory*, (World Scientific, Singapore, 1991).
- [65] B. Svetitsky e L. G. Yaffe, Nucl. Phys. **B210**, 423 (1982); B. Svetitsky, Phys. Rep. **132**, 1 (1986).
- [66] A. V. Smilga, Ann. Phys. (NY) **234**, 1 (1994); G. Grignani, G. Semenoff and P. Sodano, Phys. Rev. D **53**, 7157 (1996).
- [67] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974); J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979).
- [68] K. G. Wilson, em *Recent Developments in Gauge Theories*, eds. G. 't Hooft *et al.* (Plenum, New York, 1980); M. Creutz, L. Jacobs e C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **42**, 1390 (1979); M. Creutz, Phys. Rev. Lett. **43**, 553 (1979).
- [69] J. B. Kogut *et al.*, Phys. Rev. Lett. **50**, 393 (1983); *ibid.* **51**, 869 (1983); S. A. Gottlieb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1958 (1985); N. H. Christ e A. E. Terrano, Phys. Rev. Lett. **56**, 111 (1986).

- [70] T. Bhattacharya, A. Gocksch, C. P. Korthals Altes e R. D. Pisarski, Phys. Rev. Lett. **66**, 998 (1991); Nucl. Phys. **B383**, 497 (1992).
- [71] C. P. Korthals Altes, A. Michels, M. Stephanov e M. Teper, Phys. Rev. D **55**, 1047 (1997); K. Kajantie, M. Laine, A. Rajantie, K. Rummukainen e M. Tsypin, hep-lat/9811004.
- [72] A. Smilga, Phys. Rep. **291**, 1 (1997).
- [73] N. Weiss, *Introduction to $Z(N)$ Symmetry in $SU(N)$ Gauge Theories at Finite Temperature*, UBCTP93-23.
- [74] J. Polony, *Understanding Deconfinement in QCD*-Anais do Congresso, Trento - Itália, 1999.
- [75] N. Weiss, Phys. Rev. D **35**, 2495 (1987); A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. **B275**, 734 (1986).
- [76] G. Grignani, G. Semenoff, P. Sodano and O. Tirkkonen, Nucl. Phys. **B473**, 143 (1996).
- [77] S. Deser, L. Griguolo and D. Seminara, Phys. Rev. Lett. **79**, 1976 (1997); Phys. Rev. D **57**, 7444 (1998).
- [78] C. P. Korthals Altes, R. D. Pisarski and A. Sinkovics, hep-ph/9904305.
- [79] A. C. Petkou and M. B. Silva Neto, Phys. Lett. B **456**, 147 (1999).

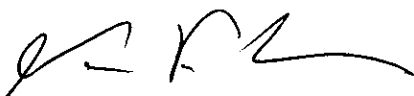
- [80] H. W. J. Blöte, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 742 (1986); I. Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 746 (1986).
- [81] G. Miele and P. Vitale, *Nucl. Phys.* **B494**, 365 (1997); P. Vitale, preprint hep-th/9812076.
- [82] A. C. Petkou e G. Siopsis, preprint hep-th/9906085.
- [83] S. Sachdev, *Phys. Lett. B* **309** (1993), 285.
- [84] P. F. Borges, H. Boschi-Filho and C. Farina, *Phys. Lett. B.* **460**, (1999).
- [85] J. M. Kosterlitz e D. J. Thouless, *J. Phys. C* **6**, 1181 (1973); P. B. Wiegmann, *J. Phys. C* **7**, 1583 (1978).
- [86] P. F. Borges, H. Boschi-Filho and C. Farina, *Mod. Phys. Lett. A* **13**, 843 (1998); hep-th/9811166.
- [87] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 937 (1991).
- [88] C. Itzykson e J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, vols. 1 e 2, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1989.
- [89] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Frontiers in Physics, vol. 85, 1992.
- [90] T. Appelquist e R. D. Pisarski, *Phys. Rev. D* **23**, 2305 (1981).
- [91] S. Nadkarni, *Phys. Rev. D* **27**, 917 (1983); *ibid.* **38**, 3287 (1988); *Phys. Rev. Lett.* **60**, 491 (1988).

- [92] L. Lewin, *Structural Properties of Polylogarithms*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 37, American Mathematical Society, 1991.

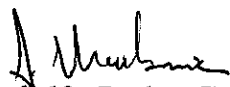
**“A SIMETRIA QUIRAL E O CONFINAMENTO NA
CROMODINÂMICA QUÂNTICA”**

Marcello Barbosa da Silva Neto

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Nami Fux Svaiter - Presidente



Adolfo Pedro Carvvalho Malbouisson - Co-orientador



Carlos Farina de Souza

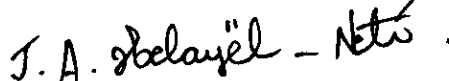
Carlos Farina de Souza



Eduardo Cantera Marino



Hugo Christiansen



José Abdalla Helayël-Neto



Itzhak Roditi - Suplente

Rio de Janeiro, 01 de outubro de 1999