TESE DE DOUTORADO

"CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DOS MODELOS - SIGMA SUPERSIMÉTRICOS"

Mauro Sérgio Góes Negrão

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, setembro de 1999

Dedico esta Tese a Minha Amada Imortal Margarida,

aos meus sobrinhos Lucas e Rafael e ao meu mais novo irmãozinho Kauê.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Amigo e Professor José Helayël pelo tema desenvolvido e pela preciosa ajuda na elaboração deste trabalho. É uma enorme satisfação trabalhar sob sua orientação.

Agradeço, também, aos colegas: Tião, Oswaldo, Marquinho, Roman, André, Guilherme, Álvaro, Leon, Cris, Márcia, Boldo, Nelson, Irmãos Sazaki, Winder, Hugo, Humberto, Patrick, Danilo, Álvaro(Deda), Índio, Casana, Colatto, Emília e todos os outros pelo incentivo e espírito de confraternização encontrado no DCP.

Ao Nenêm Sabido, seu Pai Careta e sua Avó Sabe-Tudo nas aventuras do túnel do tempo, ao Filósofo-Amador-Lorde-Inglês, ao Professor Biruta, às cenas de ciúmes dos Amorinha, Ameixinha e Cerejinha e aos que virão nos próximos dias...

A Rosângela, Beth, Elizete, Regina pela paciência e por todos os galhos quebrados...

Ao pessoal da Biblioteca.

Ao Prof. J. Leite Lopes pela simpatia e momentos de descontração no DCP.

Ao Prof. Caride, num certo dia de "pesadelo"...

As minhas duas famílias, pelo carinho e apoio.

A minha esposa Guida (Nega, Jurubeba, Sapão, Espécie, Jabutoca, Mozão, Princesa, Pantera...), pela ENORME paciência, pelo apoio, pela ajuda e por estar sempre ao meu lado...Seu Amor e sua Força são de pasmar...É bom estar com você!!

Ao pessoal da UEFS pelo amparo técnico.

Finalmente, ao CNPq pela bolsa neste período de trabalho.

Índice

Introdução

Modelos-σ não-lineares vêm suscitando renovado interesse na área da Física Teórica nas últimas três décadas. Dentre os principais temas estudados, podemos enumerar a finitude ultravioleta a todas as ordens em teoria de perturbação de algumas classes de modelos-σ em duas dimensões, fenômenos relacionados à Física Hadrônica de Baixas Energias, solução de cordas heteróticas e aplicações à Matéria Condensada, como no caso do ferromagnetismo e anti-ferromognetismo.

O grande interesse no estudo dos modelos-σ em $D = 2$ advém do fato destes apresentarem notáveis semelhanças com as teorias de Yang-Mills em $D = 4$. Por exemplo, a existência de ínstantons, a renormalizabilidade, a liberdade assintótica e a finitude do modelos $N = 2$-supersimétrico (no caso de certas variedades) e $N = 4$-supersimétrico, exatamente como no caso da teoria de super-Yang-Mills $N = 2$ e $N = 4$-$D = 4$.

Por outro lado, desde os trabalhos seminais de Wess e Zumino [1], Ferrara e Zumino [2], e Salam e Strathdee [3], a idéia de supersimetria sedimentou-se como um dos pilares básicos na construção de teorias quânticas da gravitação (Supergravidade [4]), de extensões ao Modelo Padrão, de Teorias de Grande Unificação, e, posteriormente, das

Teorias de Supercordas e Supermembranas. Quando introduzida em conjunção com os modelos-σ não-lineares, a supersimetria em duas dimensões culminou com resultados de grande relevância mesmo no campo da Geometria, quando se pôde constatar a conexão entre supersimetrias extendidas e variedades de Kähler e hyper-Kähler, que aparecem, respectivamente, nos casos dos modelos-σ com $N = 4$ e $N = 2$ supersimetrias.

Como já citado anteriormente, a combinação de supersimetria com os modelos-σ permitiu a construção de teorias completamente finitas no ultravioleta [5]. Estas foram e vêm sendo objeto de grande atenção por descreverem a primeira quantização de teorias de supercordas; em outras palavras: os modelos-σ com supersimetria $N = 2 - D = 2$, uma vez quantizados, respondem pela série perturbativa no parâmetro α das supercordas, sem, entretanto, levarem em consideração loops de strings [6].

Mais recentemente, os modelos-σ reapareceram como equivalentes a modelos de Born-Infeld [7], que, por sua vez, emergem como limite de baixas energias da dinâmica das chamadas D-branes [8]. Ao que a experiência parece indicar, campos escalares dos modelos supersimétricos que se propõem a descrever a gravidade, seja no caso da Supergravidade que no caso das Strings e das Branes, estão associados a modelos-σ com espaço- alvo dotado de geometria complexa.

Uma vez apresentadas as motivações que apóiam a relevância da compreensão profunda das propriedades clássicas, geométricas e quânticas dos modelos-σ, desejaríamos chamar a atenção para um outro problema que vem envolvendo um número sempre crescente de publicações na literatura: a introdução e a aplicação de campos-de-gauge tensoriais anti-simétricos (p-formas) em teorias de campos usuais e com supersimetria.

Por que estamos interessados em campos tensoriais e um formalismo um pouco mais complicado, quando campos escalares podem descrever partículas de spin-0 de um modo mais simples? Primeiramente, como sabemos, a invariância de gauge é um princípio extremamente importante em Física Teórica e, nada mais natural, explorarmos essa nova classe de teorias de gauge. Além do mais, esta invariância de gauge fornece uma razão natural para partículas de spin-0 terem massa nula. Convém ressaltar, aproveitando o contexto em que nos encontramos, que existe na literatura toda uma linha de trabalhos sobre possíveis implicações cosmológicas de partículas escalares associadas à 2-formas de gauge, às quais usualmente nos referimos como campo de Kalb-Ramond [9]. Uma outra razão é o aparecimento de campos tensoriais anti-simétricos em algumas formulações de teorias de Supergravidade como, por exemplo, o aparecimento natural destes campos quando fazemos redução dimensional de teorias de supergravidade $N = 8$ e em recente formulação de superespaços-$N = 8$, onde todas as partículas de spin-0 são descritas por campos tensoriais anti-simétricos. Um dos motivos do nosso interesse aqui é a equivalência entre campos tensoriais anti-simétricos e os modelos-σ. Essa equivalência aparece quando impomos certos vínculos na formulação de primeira ordem ao Lagrangeano "tensorial". A solução deste vínculo, que está relacionada às equações de Maurer-Cartan, fornece-nos naturalmente um Lagrangeano característico dos modelos-σ.

A organização desta tese procede de acordo com a seguinte divisão: no Capítulo 1, fazemos uma breve revisão de supersimetria, modelos-σ e variedades complexas, onde damos ênfase às supersimetrias do tipo-(p, q). No Capítulo 2, abordamos o modelo-σ anisotrópico, onde estudamos o cancelamento das anomalias de uma forma geométrica e a seguir, fazendo uso dos campos tensoriais anti-simétricos, estudamos as interações entre os multipletos de mésons vetoriais e fornecemos uma possível abordagem fenomenológica. Finalmente, no Capítulo 3, realizamos o acoplamento de um modelo-σ (definido numa variedade de Kähler) ao setor de Yang-Mills da supersimetria-(2,0). Seguem-se as Conclusões Gerais e Perspectivas de Prosseguimento, e um Apêndice onde são explicitados os resultados usados ao trabalharmos com uma série de espaços-quociente mostrados ao longo desta tese.

Capítulo 1

Supersimetria, Modelos-σ Não-Lineares e Geometria das Variedades complexas

Este capítulo[1] constitui-se em uma revisão objetiva dos conceitos geométricos necessários para a descrição dos modelos-σ não-lineares bosônicos usuais e supersimétricos. Mencionaremos aplicações a sistemas bidimensionais e descreveremos, brevemente, a sua aplicação no campo das variedades com geometria complexa.

Os modelos-σ não-lineares usuais são descritos por campos definidos numa esfera. Estes modelos têm um número de propriedades interessantes em D=2: são modelos integráveis, tanto clássica quanto quanticamente e são renormalizáveis. Alguns deles

[1]Deste capítulo, não consta nenhuma contribuição original advinda deste trabalho de tese.

tornam-se mesmo finitos no ultra-violeta, quando devidamente supersimetrizados.

Modelos-σ podem ser generalizados a sistemas descritos por campos definidos em uma variedade arbitrária. Em geral, tais sistemas não são nem integráveis nem renormalizáveis. D. Friedan mostrou que eles admitem divergências a todas as ordens e que a variedade é modificada no processo de renormalização [10].

Modelos-σ não-lineares supersimétricos consistem do modelo-σ não-linear bosônico devidamente acoplado a férmions, de tal modo a garantir a invariância do sistema sob uma ou mais supersimetrias.

Em geral, quanto mais supersimetrias um modelo tem, mais restrita é a variedade bosônica na qual ele pode ser definido. Os trabalhos de B. Zumino [11], L. Alvarez-Gaumé [12] e D. Z. Freedman [13] mostraram que em $D = 2$ qualquer variedade admite 1 supersimetria; somente uma variedade de Kähler admite 2 supersimetrias e apenas variedades de hyper-Kähler admitem 4 supersimetrias. Além disso, Alvarez-Gaumé e D. Z. Freedman [12] sugeriram extraordinárias propriedades quânticas para estes modelos: analisando a estrutura de divergências a 2 loops, encontraram que todos os modelos-σ supersimétricos são super-renormalizáveis (as equações do grupo de renormalização determinam, de fato, todos os contratermos em função da divergência a 1 loop) e que os modelos do tipo Ricci-flat e, conseqüentemente, os hyper-Kähler são finitos. Eles provaram essas propriedades a todas as ordens para certos modelos, e conjecturaram que são gerais.

As restrições no tipo de variedade que é compatível com supersimetria estendida implicam em uma relação fascinante entre supersimetria e variedade complexa e que permitiram a construção de novas variedades [14].

Para continuar, precisamos definir o que são variedades de Kähler e hyper-Kähler. Há vários modos de se fazer isso, mas a mais geométrica é em termos de restrições no tensor de curvatura de Riemann (e suas derivadas) da variedade bosônica. Para uma variedade geral, o tensor de Riemann é anti-simétrico em seus dois primeiros índices. Portanto, quando tratado como matriz nesses índices, ele é uma rotação infinitesimal (preserva a identidade). Isto implica que o grupo de holonomia (o grupo gerado pelo tensor de Riemann) é um subgrupo do grupo de rotação. Para uma variedade de Kähler, o grupo de holonomia é um subgrupo de um grupo unitário, *i.e.*, o tensor de Riemann preserva um tensor anti-simétrico bem como a identidade. Finalmente, para uma variedade do tipo hyper-Kähler, o grupo de holonomia é um subgrupo de um grupo simplético, *i.e.*, o tensor de Riemann preserva 3 tensores anti-simétricos linearmente independentes.

Localmente, a construção de uma variedade de Kähler é trivial (a métrica é encontrada diferenciando uma função escalar arbitrária) e, conseqüentemente, há uma completa compreensão de supersimetrias $N = 2$ em modelos-σ não-lineares. Para variedades de hyper-Kähler, este não é o caso e, explorando supersimetrias $N = 4$, somos levados a exemplos bem interessantes.

1.1 Modelos-σ não-lineares bosônicos

A geometria, a dinâmica clássica e as propriedades quânticas dos modelos-σ não-lineares têm sido extensivamente discutidas por Físicos Teóricos na última década. Motivações fenomenológicas relacionadas à Física de Baixas Energias [15] e considerações de natureza mais formal tratando do comportamento ultravioleta, renormalizabilidade [10] e finitude a todas as ordens de algumas classes de modelos-σ [5] têm sido a razão para uma investigação mais profunda destas teorias não-lineares.

A introdução de supersimetria levanta vários pontos relacionados aos modelos-σ [11]. Um dos pontos principais levantados tem a ver com os férmions que, por meio da supersimetria, se acoplam naturalmente às coordenadas bosônicas do espaço-alvo.

A dinâmica dos férmions acoplados ao modelo-σ requer um fibrado vetorial, B, com uma conexão definida sobre o espaço-alvo, M, no qual os campos bosônicos, φ^i, mapeiam a variedade do espaço-tempo. O acoplamento com eventuais férmions quirais, como ditado pela supersimetria, e a conexão naturalmente definida em B é uma fonte potencial de anomalias, como claramente discutida no trabalho da referência [16].

A ação do modelo-σ não-linear é dada por [17]

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^m \partial^\mu \varphi^m, \tag{1.1}$$

onde se deixa em aberto a dimensão, D, do espaço-tempo. O conjunto $(\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^N)$ define as coordenadas do modelo-σ com a métrica $g_{mn}(\phi)$. Estes campos satisfazem, por exemplo, um vínculo não-linear:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + ... + \varphi_N^2 = 1. \tag{1.2}$$

Este vínculo induz um mapeamento $\mathcal{M}^{1,3} \rightarrow S^{N-1}$. A simetria global é $SO(N)$, e é simples obter a métrica dessa variedade:

$$g_{mn}(\varphi) = \delta_{mn} + \frac{\varphi_m \varphi_n}{1 - \varphi_m \varphi_m}. \tag{1.3}$$

Conseqüentemente, a ação original pode ser reescrita com:

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} g_{mn}(\varphi) \partial_\mu \varphi^m \partial^\mu \varphi^n. \tag{1.4}$$

O espaço quociente neste caso é $S^{N-1} = \frac{SO(N)}{SO(N-1)}$, e as equações de Maurer-Cartan definem quantidades como curvatura e torção nesta variedade:

$$de + e \wedge e = 0, \tag{1.5}$$

$$de + w \wedge e = T, \tag{1.6}$$

$$dw + w \wedge w = R. \tag{1.7}$$

A conexão é dada por:

$$\omega_m^{ab} = \frac{1}{2}\Omega_m^{ab} + \frac{1}{2} e_m^c K_c^{ab}, \tag{1.8}$$

onde Ω e K são, respectivamente, os coeficientes de não-holonomicidade e de contorção.

Seguindo o trabalho da referência [3], especificamos a geometria de G/H em termos das propriedades da G e H. Primeiramente, supomos o splitting ditado pela decomposição:

$$\begin{aligned}
adj\ G &= adj\ H \oplus V : \\
[Q_i, Q_j] &= f_{ij}{}^k Q_k, \\
[Q_i, Q_a] &= f_{ia}{}^b Q_b, \\
[Q_a, Q_b] &= f_{ab}{}^i Q_i + f_{ab}{}^c Q_c,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde os $Q_i(i = 1, ..., dimH)$ são os geradores de H e V refere-se aos geradores $Q_a(a = 1, ..., D)$ que estão em G mas não estão em H.

Chamando de φ^a as coordenadas de um ponto no coset G/H (α é o índice mundo que vai de 1 até D), a *vielbein* e a conxão são obtidas por meio da uma-forma "$G - Lie - algebra - valued$":

$$e(\varphi) \equiv L_\varphi^{-1} dL_\varphi = [e^i_\alpha(\varphi)Q_i + e^a_\alpha(\varphi)Q_a]d\varphi^\alpha, \tag{1.10}$$

onde L_φ é um representativo do coset e $a = 1, ..., D$ é identificado com o índice do espaço tangente.

Com a ajuda da equação de Maurer-Cartan para a dois-forma $de(\varphi)$,

$$de(\varphi) = -e(\varphi) \wedge e(\varphi), \tag{1.11}$$

onde $e \equiv e^i Q_i + e^a Q_a$, os objetos geométricos, como a dois-forma torção, T^a, e a dois-forma curvatura, R^a_b, são dadas por:

$$de^a + w^a{}_b \wedge e^b = T^a \tag{1.12}$$

e

$$R^a{}_b = dw^a{}_b + w^a{}_c \wedge w^c{}_b. \tag{1.13}$$

Assim, a conexão pode ser lida como:

$$w^a{}_b = -f^a{}_{bi}e^i - \frac{1}{i}f^a{}_{bc}e^c - \frac{1}{i}T^a{}_{bc}e^c. \tag{1.14}$$

Se a torção for escolhida com a forma

$$T^a = \frac{1}{2}kf^a{}_{bc}e^b \wedge e^c, \tag{1.15}$$

onde k é um coeficiente arbitrário, a conexão torna-se:

$$w^a{}_b = -f^a{}_{bi}e^i - (1+k)f^a{}_{bc}e^c; \tag{1.16}$$

e isso leva à seguinte expressão para o tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R^a{}_{bcd} &= f^a{}_{bi}f^i{}_{cd} + \frac{1}{2}(1+k)f^a{}_{be}f^e{}_{cd} + \\ &+ \frac{1}{4}(1+k)^2(f^a{}_{ce}f^e{}_{db} - f^a{}_{de}f^e{}_{cb}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Assim, torção estará ausente se $k = 0$, ou no caso do mergulho de H em G ser simétrico.

1.2 Supersimetrias-$(1,0)$ e $(2,0)$

Na supersimetria, bósons e férmions são colocados no mesmo supermultiplete. A álgebra de supersimetria é uma extensão graduada da álgebra de Lie. Tal álgebra, envolvendo também comutadores, é dada por:

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}Q_\beta, \tag{1.18}$$

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0, \tag{1.19}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu, \tag{1.20}$$

onde γ são as matrizes de Dirac e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. A equação (1.18) implica que o gerador de supersimetria, Q_α, transforma-se como um espinor sob transformação de Lorentz. Como Q_α comuta com P_μ, os componentes do supermultiplete devem ter a mesma massa.

Um dos aspectos mais importantes da supersimetria é a possibilidade que a mesma oferece de formular teorias finitas, uma vez que ela sempre atenua as divergências ultravioleta das teorias convencionais [1]. Neste sentido, em $D = 4$, já foi mostrado que a supersimetria estendida com $N = 2$ permite a construção de modelos de Yang-Mills em interação com a matéria que, para grupos de gauge e representações unitárias convencionalmente escolhidas, apresentam a propriedade de finitude em todas as ordens de teoria de perturbação [2]. Mais significativo ainda é o resultado de que as teorias de Yang-Mills $N = 4$-supersimétricas são finitas a todas as ordens para grupos complementamente arbitrários [18].

Em $D = 10$, a supersimetria desempenha um papel fundamental na formulação de teorias de supercordas. Para teorias de cordas, um dos problemas que a supersimetria soluciona é o aparecimento de táquions no espectro e uma constante cosmológica não-nula.

Um dos diversos tipos de teorias de supercordas já propostas, a que parece mais promissora, é a chamada supercorda heterótica [19], para a qual a supersimetria na *world sheet* deve ser do tipo (p, q), onde p é o número de geradores de Majorana *left-handed* e q o número de geradores *right-handed.*

O programa de compactificação [20] considera que o espaço-tempo de dez dimensões de uma supercorda é , na verdade, da forma $M^4 \times K$, onde M^4 é o espaço-tempo quadridimensional de Minkowsi e K é um espaço compacto de seis dimensões [22].

Um dos aspectos mais interessantes deste esquema é que a topologia e a geometria de K determinam boa parte da Física de Baixas Energias. A propagação da supercorda na variedade compacta K é descrita por um modelo-σ não-linear bidimensional, com uma variedade interna (espaço-alvo) K. Este modelo-σ deve ter uma supersimetria do tipo $(2,0)$ no caso da supercorda heterótica.

1.2.1 Supersimetria-$(1,0)$

Para este tipo de supersimetria, a álgebra é dada por

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(1)}\} = 2P_{++} = 2i\partial_{++}, \tag{1.21}$$

$$[Q_+, P_{++}] = 0. \tag{1.22}$$

Para a construção do superespaço-(1,0), faremos uso das coordenadas do espaço-tempo, x^{++} e x^{--} e de uma coordenada anticomutante, θ (que é um espinor de Majorana-Weyl *right-handed*). Necessitamos, também, de uma derivada covariante de supersimetria, que podemos definir da seguinte maneira:

$$D_+ = \partial_\theta + i\theta\partial_{++}, \tag{1.23}$$

com

$$D_+^2 = i\partial_{++}, \tag{1.24}$$

onde usamos

$$\partial_{++} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{++}}, \tag{1.25}$$

$$\partial_\theta \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}, \tag{1.26}$$

e as coordenadas do cone de luz

$$x^{++} = \frac{(x^0 + x^1)}{\sqrt{2}}, \tag{1.27}$$

$$x^{--} = \frac{(x^0 - x^1)}{\sqrt{2}}. \tag{1.28}$$

Uma possível realização diferencial do gerador Q_+ é

$$Q_+ = i(\partial_\theta - i\theta\partial_{++}), \tag{1.29}$$

No superespaço-(1,0), definimos supercampos escalares e espinoriais que são funções das coordenadas x^{++}, x^{--} e θ. A forma mais geral para o supercampo escalar é

$$\Phi(x,\theta) \equiv \varphi(x) + i\theta\eta(x), \tag{1.30}$$

onde φ e η são campos escalar e espinorial, respectivamente. Para o supercampo espinorial, temos

$$\Psi(x,\theta) \equiv \psi(x) + i\theta F(x), \tag{1.31}$$

onde F é um campo escalar e ψ é um espinor de Majorana-Weyl right-handed.

No superespaço-(1,0), a ação toma a seguinte forma genérica:

$$S = \int d^2x d\theta \mathcal{L}(\Sigma, \partial\Sigma, D\Sigma), \tag{1.32}$$

onde Σ é um supercampo qualquer e $\mathcal{L}$ é uma função local destes supercampos. Podemos construir uma ação com n supercampos bosônicos e fermiônicos (i,j=1...n):

$$S = \int d^2x d\theta [(D_+\Phi^i)(\partial_{++}\Phi_i + \Psi^i(D_+\Psi_i) + M_{ij}\Phi^i\Psi^j]. \tag{1.33}$$

Esta ação é invariante sob as seguintes transformações de supersimetria:

$$\delta_I \Phi^i = i\epsilon_- Q_+ \Phi^i, \tag{1.34}$$

$$\delta_I \Psi^i = i\epsilon_- Q_+ \Psi^i, \tag{1.35}$$

onde ϵ é um parâmetro global da supersimetria-(1,0) e possui propriedades de um espinor de Majorana-Weyl *right-handed.*

1.2.2 Supersimetria-$(2,0)$

Podemos introduzir novas transformações de supersimetria, além daquelas dadas pelas equações (1.34) e (1.35), impondo a invariância da ação (1.33) sob este conjunto de transformações. Voltemos, então, à álgebra (1.18), onde, para os novos geradores-$Q_+^{(2)}$, teremos:

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(1)}\} = 2P_{++}, \tag{1.36}$$

$$\{Q_+^{(2)}, Q_+^{(2)}\} = 2P_{++}, \tag{1.37}$$

$$\{Q_+^{(1)}, Q_+^{(2)}\} = 0, \tag{1.38}$$

satisfazendo

$$\{Q_+, D_+\} = 0 \tag{1.39}$$

$$\{D_+, D_+\} = 2i\partial_{++}. \tag{1.40}$$

Com isto, podemos escolher $Q_+^{(1)}$ e $Q_+^{(2)}$ tal que

$$Q_+^{(1)} = Q_+ \tag{1.41}$$

e

$$Q_+^{(2)} = D_+. \tag{1.42}$$

Feito isto, podemos definir a seguinte transformação dos supercampos-$(1,0)$ sob esta segunda supersimetria:

$$\delta_{II}\Phi^i = f^i_j \zeta D_+ \Phi^j, \tag{1.43}$$

$$\delta_{II}\Psi^i = g^i_j \zeta D_+ \Psi^j, \tag{1.44}$$

onde ζ é o parâmetro global (espinorial) da segunda supersimetria e f^j_i e g^j_i são matrizes constantes. Tais matrizes podem ser dadas por:

$$f^2 = -1, \tag{1.45}$$

$$f^T = -f, \tag{1.46}$$

$$g^2 = -1, \tag{1.47}$$

$$g^T = -g, \tag{1.48}$$

onde usamos

$$[\delta_I, \delta_{II}]\Phi^i = 0, \tag{1.49}$$

$$[\delta_I^2, \delta_I^1]\Phi^i = 2i\epsilon_1\epsilon_2\partial_{++}\Phi^i, \tag{1.50}$$

$$[\delta_{II}^2, \delta_{II}^1]\Phi^i = 2i\zeta_1\zeta_2\partial_{++}\Phi^i. \tag{1.51}$$

Vamos introduzir, agora, mais uma coordenada fermiônica, θ_2, no próprio superespaço-$(2,0)$, para que ele seja parametrizado por $(x^{++}, x^{--}; \theta_1, \theta_2)$, onde as coordenadas fermiônicas são espinores de Majorana-Weyl independentes. Para seguir a notação usada na última seção, vamos trabalhar com espinores de Weyl definidos por

$$\theta \equiv \theta_1 + i\theta_2, \tag{1.52}$$

$$\bar{\theta} \equiv \theta_1 - i\theta_2. \tag{1.53}$$

Temos, agora, duas derivadas covariantes

$$D_+ = \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_{++}, \tag{1.54}$$

$$\bar{D}_+ = \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_{++}, \tag{1.55}$$

com álgebra dada por

$$\{D_+, D_+\} = 0, \tag{1.56}$$

$$\{\bar{D}_+, \bar{D}_+\} = 0, \tag{1.57}$$

$$\{D_+, \bar{D}_+\} = 2i\partial_{++}. \tag{1.58}$$

Um supercampo escalar complexo definido no superespaço-$(2,0)$ pode ser escrito como:

$$\Phi(x;\theta,\bar{\theta}) = \varphi(x) + \theta\eta(x) + \bar{\theta}\beta(x) + \theta\bar{\theta}A_{++}. \tag{1.59}$$

Como o grau de liberdade vetorial é desnecessário num supermultipleto escalar, podemos eliminá-lo impondo o vínculo de quiralidade:

$$\bar{D}_+\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = 0 \tag{1.60}$$

e

$$D_+\bar{\Phi}(x,\theta,\bar{\theta}) = 0. \tag{1.61}$$

Com isto, a expressão (1.59) torna-se

$$\Phi(x;\theta,\bar{\theta}) = \varphi(x) + \theta\eta(x) + i\theta\bar{\theta}\partial_{++}\varphi(x), \tag{1.62}$$

onde φ é um campo escalar complexo e η é um campo espinorial (Wely) *left-handed.*

Vale lembrar que o supercampo espinorial, Ψ, que também obedece ao vínculo de quiralidade, toma a seguinte forma

$$\Psi(x;\theta,\bar{\theta}) = \psi(x) + \theta F(x) + i\partial_{++}\psi(x), \tag{1.63}$$

onde ψ é um campo espinorial complexo (Weyl) *right-handed* e $F(x)$ é um campo escalar.

A superação mais simples para esses campos pode ser escrita como:

$$S = \int d^2x d\theta d\bar{\theta}[\bar{\Phi}\partial_{--}\Phi - (\partial_{--}\bar{\Phi})\Phi] + \int d^2x d\theta d\bar{\theta}[\bar{\Psi}\Psi]. \tag{1.64}$$

1.3 Modelos-σ supersimétricos e variedades complexas

Modelos bosônicos, como aqueles vistos na primeira seção, podem ter extensão supersimétrica adicionando novos graus de liberdade fermiônicos, ψ^i, e acoplando-os aos campos bosônicos, φ. A ação supersimétrica $N = 1$ do modelo-σ pode ser escrita através de supercampos [23]: as componentes bosônicas φ^i e as componentes fermiônicas ψ^i são combinadas em um único supercampo Φ^i dado por [2]:

$$\Phi^i(x;\theta,\bar{\theta}) = \varphi^i(x) + \bar{\theta}\psi^i(x) + \theta\bar{\theta}F^i(x) \tag{1.65}$$

onde $\theta = (\bar{\theta}C)^T$ é uma coordenada espinorial (anticomutante) real. F^i é um campo auxiliar. Sua equação de campo é expressa em termos dos campos físicos φ^i e ψ^i.

Fazendo uso da derivada covariante de supersimetria (fermiônica), $D = \begin{pmatrix} D_+ \\ D_- \end{pmatrix} = \partial_\theta - i\bar{\theta}\not{\partial}$, cuja álgebra é dada por

$$\begin{aligned} \bar{D}D &= -iD_+D_- \\ D_\pm^2 &= \pm i\partial_\pm, \end{aligned} \tag{1.66}$$

a versão supersimétrica para o modelo-σ, equação (1.4), torna-se

$$S_{susy1} = \frac{1}{2}\int d^2x\bar{D}Dg_{ij}(\Phi)\bar{D}\Phi^i D\Phi^j. \tag{1.67}$$

A ação em componentes pode ser encontrada expandindo os supercampos e derivadas

[2]Uma ótima introdução de modelos-σ supersimétricos pode ser encontrada em "Explorando o Modelo-σ Supersimétrico", Breno Cesar de Oliveira Imbiriba, Tese de Mestrado - IFT, Junho de 1999.

fermiônicas em termos de θ ou pelo conhecido método das projeções:

$$S_{susy1} = \frac{1}{2}\int d^Dx\Big(g_{ij}(\varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j + ig_{ij}(\varphi)\bar{\psi}^i\gamma^\mu D_\mu\psi^j + \frac{1}{6}R_{ijkl}\bar{\psi}^i\psi^j\bar{\psi}^k\psi^l\Big) \tag{1.68}$$

onde

$$D_\mu\psi^j \equiv \partial_\mu\psi^j + \Gamma^j_{km}(\partial_\mu\varphi^m)\psi^k \tag{1.69}$$

é a derivada covariante, Γ^i_{jk} é a conexão de Christoffel e R_{ijkl} a curvatura de Riemann. As transformações de supersimetria

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\varphi^i &= \bar{\epsilon}\psi^i\\ \delta^{(1)}\psi^i &= -i\partial\!\!\!/\varphi^i\epsilon - \Gamma^i_{jk}\bar{\epsilon}\psi^j\psi^k\end{aligned} \tag{1.70}$$

comutam com reparametrizações de coordenadas em M.

Um resultado muito importante é a existência de uma segunda supersimetria que deixa a equação (1.68) invariante e satisfaz a álgebra de supersimetria (sem carga central)

$$\{Q^{(a)}, \bar{Q}^{(b)}\} = 2\delta^{ab}P\!\!\!/, \tag{1.71}$$

se e somente se existir um tensor, $f^i_j(\varphi)$, com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}f^i_jf^j_k &= -\delta^i_k\\ f^i_jg_{ik}f^k_l &= g_{jl}\\ \nabla_kf^i_j &= 0.\end{aligned} \tag{1.72}$$

Esta segunda supersimetria é completamente fixada em função de $f^i_j(\varphi)$:

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\varphi^j &= \bar{\epsilon}f^i_j\psi^j\\ \delta^{(2)}(f^i_j\psi^j) &= -i\partial\!\!\!/\varphi^i\epsilon - \Gamma^i_{jk}(\bar{\epsilon}f^j_m\psi^m)f^k_n\psi^n.\end{aligned} \tag{1.73}$$

Observamos que esta equação é semelhante à (1.70) com $\psi \to f\psi$.

Vamos, agora, interpretar as equações (1.72) através de um ponto de vista geométrico[3]:

1. Equação (1.72a) $\Longleftrightarrow f^i_j$ é uma estrutura quase complexa. Coordenadas complexas z^α e $\bar{z}^{\bar{\alpha}}$ podem ser definidas localmente tal que diagonalizem a estrutura: $f^\alpha_\alpha = i$; $f^{\bar{\alpha}}_{\bar{\alpha}} = -i$ com $\alpha, \bar{\alpha} = 1, ..., m$ e $n = 2m$.

2. Equação (1.72a+b) $\Longleftrightarrow g_{ij}$ é hermitiano com respeito a $f^i_j \Leftrightarrow$ a variedade Riemanniana (M, g_{ij}) seja uma variedade quase hermitiana. Em coordenadas complexas z^α, $\bar{z}^{\bar{\alpha}}$, $g_{\alpha,\beta} = g_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = 0$.

   Um tensor anti-simétrico é, então, definido:

$$f_{ij} = g_{ik} f^k_j = -f_{ji},,$$

   e também uma duas-forma chamada de forma de Kähler

$$\Omega = \frac{1}{2} f_{ij} d\phi^i \wedge d\phi^j = i g_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\bar{\beta}}, \tag{1.74}$$

   onde todas estas propriedades são locais.

   A extensão global é possível se e somente se f^i_j satisfizer à condição de integrabilidade

[3]Uma introdução detalhada da geometria de Kähler para físicos pode ser encontrada em L. Alvarez-Gaumé e D. Z. Freedman, Erice 1980 "Unification of the fundamental particle interactions" ed. S. Ferrara *et all*, Plenum New York 1980, pág. 41. Para um ponto de vista mais matemático, veja S. Gallot " Première classe de Chern et courbure de Ricci: preuve de la conjecture de Calabi" Societé Mathematique de France, Astérisque nº 58 (1978), e K. Yano "Differential geometry on complex and almost complex spaces" Pergamon Press, 1964.

tal que o tensor de Nijenhuis vá a zero:

$$N_{ij}{}^{k} = f_i^l(\partial_l f_j^k - \partial_j f_l^k) - (i \leftrightarrow j) = 0. \tag{1.75}$$

3. Equação (1.72a + 1.75) $\Longleftrightarrow$ M é uma variedade complexa. Então, em cada conjunto aberto pode-se escolher coordenadas complexas tais que, na interseção de 2 cartas, os sistemas de coordenadas z^α, z'^α são holomorficamente relacionados:

$$z'^\alpha = f^\alpha(z) \qquad \bar{z}'^{\bar{\beta}} = \bar{f}^{\bar{\beta}}(\bar{z})$$

4. Equação (1.72a+b+1.75) $\Longleftrightarrow$ (M, g_{ij}) é uma variedade Hermitiana. A propriedade $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$ é preservada por uma mudança analítica de coordenadas.

5. Equação (1.72a+b+c)$\Longleftrightarrow$ M é uma variedade de Kähler $\Leftrightarrow$ $d\Omega = 0$. Esta é uma propriedade global (1.72c $\Longrightarrow N_{ij}{}^{k} = 0$) que é uma restrição forte em M: ela significa que, em um sistema de coordenadas adaptado à estrutura hermitiana f_j^i, existe um potencial de Kähler $K(z, \bar{z})$, tal que

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 K(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^{\bar{\beta}}}. \tag{1.76}$$

$K(z, \bar{z})$ é definido módulo uma transformação de Kähler:

$$K(z,\bar{z}) \rightarrow K(z,\bar{z}) + f(z) + \bar{f}(\bar{z}). \tag{1.77}$$

Se duas estruturas complexas covariantes existem, satisfazendo à álgebra de Clifford que resulta da supersimetria (1.71)

$$f^{(a)} f^{(b)} + f^{(b)} f^{(a)} = -2\delta^{ab}, \qquad a, b = 1, 2 \tag{1.78}$$

então $f^{(3)} = f^{(1)}f^{(2)}$ é também uma estrutura complexa covariante, e temos assim uma supersimetria extendida do tipo $N = 4$. Temos, então, três estruturas complexas covariantes $f^{(a)}, a = 1, 2, 3$, satisfazendo a relação de $SU(2)$ (quaterniônica):

$$f^{(a)i}{}_k f^{(b)k}{}_j = -\delta^{ab}\delta^i_j + \epsilon^{abc} f^{(c)i}{}_j \tag{1.79}$$

e, neste caso, M é chamado de variedade de hyper-Kähler.

A tabela seguinte sumariza os resultados conhecidos das extensões supersimétricas dos modelos-σ não-lineares para variedades Riemannianas (M, g_{ij}). (Uma teoria com N supersimetrias em $D = 4$ fornece, através de uma redução dimensional, uma teoria com $2N$ supersimetrias em $D = 2$: isto justifica a coluna $D = 4$ da tabela).

Susy estendida	D=2	D=4
N=1	nenhuma restrição sobre M	M é Kähler
N=2	M é Kähler	M é hyper-Kähler
N=4	M é hyper-Kähler	Não admite extensão

Vale enfatizar que esta tabela mostra uma equivalência na propriedade geométrica de uma variedade e alguma simetria física de um modelo(σ supersimétrico não-linear) construído em tal variedade. Para modelos bosônicos gerais, não se constata tal equivalência.

Finalizando a nossa tarefa de fixar as convenções e notações para os superespaços que trabalharemos, apresentamos a seguir a nossa parametrização do superespaço adequado para a formulação da supersimetria-(2,0).

Para $N = 2$, introduzimos coordenadas fermiônicas complexas θ e $\bar{\theta} \neq \theta^T C$ e definimos derivadas covariantes de supersimetria, D e $\bar{D}$, tais que:

$$\begin{aligned} \bar{D}D &= \frac{1}{2}(\bar{D}_+ D_- - \bar{D}_- D_+), \\ D_\pm^2 &= \bar{D}_\pm^2 = \{D_\pm, \bar{D}_\mp\} = 0, \\ \{D_\pm, \bar{D}_\pm\} &= \pm i\partial_\pm. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Os campos escalares e espinoriais componentes são acomodados em supercampos quirais, Φ^i e $\bar{\Phi}^i$, tais que

$$\begin{aligned} \bar{D}\Phi^i &= 0 \\ D\bar{\Phi}^i &= 0. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Assim, a ação supersimétrica para o modelo $N = 2$ toma sua forma mais simples:

$$S_{susy2} = \int d^2x (\bar{D}D)^2 K(\Phi, \bar{\Phi}), \tag{1.82}$$

onde K é o potencial de Kähler da variedade.

Capítulo 2

Anisotropia em Modelos-σ e Campos Tensoriais Anti-Simétricos de Matéria: Possíveis Conexões com a Fenomenologia

Neste capítulo[1] procuraremos nos deter sobre dois pontos diferentes, um de natureza mais formal e outro de caráter aplicativo da formulação dos modelos-σ não-lineares. Do

[1]Este capítulo beseia-se nos papers "On The Geometry of Two-Dimensional Anisotropic Non-Linear Sigma-Models", escrito em colaboração com D.H.Franco, A.R.Pereira e J.A.Helaÿel-Neto **hep-th/9802104**, e "Anti-symmetric Tensor Matter Fields and Non-Linear Sigma-Models", escrito em colaboração com A.B.Penna-Firme e J.A.Helaÿel-Neto, **hep-th/9808174**

ponto de vista mais formal, estaremos discutindo a questão das anomalias (e seu possível cancelamento) induzidas pelo setor fermiônico dos modelos-σ acoplados a campos vetoriais de gauge. Por outro lado, tendo em mente uma possível aplicação dos modelos-σ à Física Hadrônica de Baixas Energias, buscaremos um modo de descrever degenerescências no espectro das ressonâncias mesônicas em termos de campos tensoriais de gauge compostos pelos graus-de-liberdade escalares dos modelos-σ. Primeiramente, é feita uma análise de como vínculos geométricos podem ser impostos na geometria do espaço-alvo, de forma a evitar o aparecimento de anomalias relacionadas aos campos de gauge associados a alguma conexão de gauge introduzida no fibrado principal, B, definido sobre o espaço-alvo de modelos-σ, ou à isometria dos campos de gauge que podem surgir quando é feito o gauging das isometrias ou isotropias dos modelos-σ definidos em espaços homogêneos do tipo G/H.

Se a $dimG/H = D$, a anomalia mencionada na referência [16] é aquela associada à conexão (pull-back) $SO(D)$ de B. No nosso caso, devemos levar em conta a situação onde são introduzidos campos de gauge extra, que aparecem com o propósito de fazer o gauging do subgrupo H (convenientemente mergulhado em $SO(D)$) ou de todo o grupo G.

Nossa proposta aqui é entender se há uma relação entre os atributos fermiônicos do subgrupo H e a torção em G/H, de forma a caracterizar o mecanismo de supressão de anomalia mais diretamente em termos da estrutura geométrica do espaço-alvo. A principal motivação por trás de nossa tentativa é o acoplamento entre a torção da variedade do modelo-σ e os bilineares fermiônicos. Consideramos aqui espaços não-simétricos com torção diferente de zero, tendo em mente que interessantes propriedades geométricas podem aparecer às custas de se trabalhar com uma conexão métrica com torção. Tentamos também explorar a natureza geométrica dos modelos-σ não-lineares anisotrópicos. A natureza topológica deste último foi considerada por Watanabe e Otsu [26]. Estes autores mostraram que anisotropia pode levar a estados metaestáveis não-triviais que geram um mínimo de energia local (instantons).

2.1 Anisotropia e Anomalia em Modelos-σ

Os modelos-σ não-lineares anisotrópicos são teorias de mapeamentos entre variedades. Mais precisamente, os campos escalares, φ^i, da teoria mapeiam um dado espaço-tempo, X, em um dado espaço-alvo, M. A ação do modelo é obtida através do termo cinético $\frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^i + \lambda\partial_\mu\varphi^k\partial^\mu\varphi^k]$ (i=1,2,...,k,...n), resolvendo o vínculo $\varphi^i\varphi^i = 1$, assim

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x g_{ij}(\varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j, \tag{2.1}$$

com

$$g_{ij}(\varphi) = \delta_{ij} + (1+\lambda)\frac{\varphi_i\varphi_j}{1-\varphi^2}, \tag{2.2}$$

onde $i, j \neq k$ e $\lambda > -1$.

Reescrevendo os campos originais como $\tilde{\varphi} = \Big(\varphi_1, \varphi_2, ..., (1+\lambda)^{1/2}\varphi_k, ..., \varphi_n\Big)$, temos a superfície S^{n-1} em um esferóide n-dimensional

$$\sum_{i\neq k}\tilde{\varphi}^i\tilde{\varphi}^i + \frac{\tilde{\varphi}^k\tilde{\varphi}^k}{b^2} = 1, \tag{2.3}$$

onde $b^2 = (1+\lambda)$. Das eq. (2.2) e (2.3) vemos que o parâmetro de anisotropia, λ, deforma a métrica ususal na esfera.

Em duas dimensões, a ação (2.1) não é a mais geral. Por exemplo, suponhamos que o espaço-alvo carregue, além da métrica g, uma dois-forma ω. Então, a ação completa é dada por

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x g_{ij}(\varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^j + \frac{1}{2}\int d^2x\epsilon^{\mu\nu}\omega_{ij}(\varphi)\partial_\mu\varphi^i\partial_\nu\varphi^j, \tag{2.4}$$

onde ω_{ij} é o potencial torção. É bem sabido que este termos introduz torção na variedade [27].

Consideramos o seguinte *ansatz* para a torção

$$T^a = \frac{1}{2}(1+\lambda)kf^a_{bc}e^b\wedge e^c, \tag{2.5}$$

onde k está relacionado ao grau de torção e $(1+\lambda)$ dá a dependência da torção no parâmetro de anisotropia. Segue então que

$$\omega^a_b = -f^a_{bi}e^i - \frac{1}{2}(1+k+k\lambda)f^a_{bc}e^c. \tag{2.6}$$

Isto permite obter a curvatura de Riemann e o tensor de Ricci, respectivamente:

$$R^a_{bcd} = f^a_{bi}f^i_{cd} + \frac{1}{2}(1+k+k\lambda)f^a_{be}f^e_{cd} + \frac{1}{4}(1+k+k\lambda)^2(f^a_{ec}f^e_{bd} - f^a_{ed}f^e_{bc}), \tag{2.7}$$

$$R_{ab} = f^c_{ai}f^i_{cb} + \frac{1}{4}[1-(1+\lambda)^2k^2]f^c_{ae}f^e_{cb}. \tag{2.8}$$

Agora, nossa idéia principal é tentar entender como o acoplamento fermiônico à torção de G/H pode testar a condição de cancelamento de anomalia proposta no trabalho da referência [25]. Já que ainda não encontramos uma linha geral de argumentos que leva a encontrar a contrapartida geométrica da condição mencionada acima, é nossa idéia considerar a geometria de alguns espaços não-simétricos tais como $Sp(4)/U(1) \times U(1)$, $SU(2) \times SU(2)/U(1)$, $G_2/SU(3)$, $SU(3)/U(1) \times U(1)$ and $Sp(4)/(SU(2) \times U(1))_{nonmax}$, para ilustrar que a condição de cancelamento encontrada na referência [25] tem a ver com a impossibilidade de se achar uma conexão Ricci-flat com torção.

Para os últimos três espaços homogêneos listados acima, é sempre possível ter uma conexão Ricci-flat, sempre que o coeficiente k na eq.(2.8) e o coeficiente de anisotropia obedecerem à seguinte relação:

$$(1+\lambda)k = \pm\sqrt{5}. \tag{2.9}$$

Isto ocorre porque

$$R_{ab} = f^c{}_{ai}f^i{}_{cb} + \frac{1}{4}(1-(1+\lambda)^2k^2)f^c{}_{ad}f^d{}_{cb} \tag{2.10}$$

pode ser tomado como zero, devido aos resultados abaixo

$$f^c{}_{ai}f^i{}_{cb} = f^c{}_{ad}f^d{}_{cb} = \begin{cases} \delta_{ab}, para \;\; SU(3)/U(1) \times U(1); \\ \delta_{ab}, para \;\; Sp(4)/(SU(2) \times U(1))_{nonmax}; \\ \frac{4}{3}\delta_{ab}, para \;\; G_2/SU(3). \end{cases} \tag{2.11}$$

Entretanto, para $Sp(4)/U(1) \times U(1)$ e $SU(2) \times SU(2)/U(1)$, o anulamento do tensor de Ricci não pode ser alcançado às custas da torção . Para $SU(2) \times SU(2)/U(1)$, isto acontece porque o $rank(SU(2) \times SU(2)/U(1)) \neq 1$; contudo, embora o $rank\ Sp(4) = rank(U(1) \times U(1))$, não é possível encontrar uma solução para k que possibilite fazer

$R_{ab} = 0$. Este resultado pode ser entendido com a ajuda dos resultados explícitos de combinações das constantes de estrutura do $Sp(4)$:

$$f^c{}_{ai}f^i{}_{cb} = \begin{cases} 1, para \quad a = b = 2, 4, 5, 8, 9; \\ 2, para \quad a = b = 3, 6, 7; \\ 0, para \quad a \neq b, \end{cases} \tag{2.12}$$

enquanto que

$$f^d{}_{ac}f^c{}_{db} = \begin{cases} 2, para \quad a = b = 3, 4, 6, 7; \\ 4, para \quad a = b = 2, 5, 8, 9; \\ 0, para \quad a \neq b. \end{cases} \tag{2.13}$$

Os valores listados em (2.11), (2.12) e (2.13) foram calculados explicitamente mediante oportunos " embeddings" e através de uma escolha precisa de base nas álgebras de Lie envolvidas. Não apresentamos os detalhes destes cálculos por serem extremamente longos e por comprometrem a fluência de apresentação de nossos resultados. Entretanto, detalhes que possam ser de ajuda imediata encontram-se no Apêndice dado no final desta tese.

O que resta, então, é analisar a conexão entre a não-simetria do espaço, a não-existência de uma conexão Ricci-flat com torção e a realização a condição de cancelamento da anomalia, expressa em termos do conteúdo fermiônico de H.

Nossa suposição, por hora sustentada somente por exemplos explícitos e não por uma abordagem geral, é que se $rankG = rankH$, e a torção é não-trivial e não permite o anulamento do tensor de Ricci, então a anomalia do grupo de isometria não aparece. Nos casos em que a torção leva a um tensor de Ricci nulo, observamos que as anomalias não são canceladas, como no caso do $SU(3)/U(1) \times U(1)$ e $Sp(4)/(SU(2) \times U(1))_{nonmax}$.

Também para espaços Grassmannianos e espaços projetivos como CP^n, que aparecem na abordagem do modelo-σ supersimétrico $N = 1 - D = 4$, a anomalia persiste já que não há torção, pois eles são todos espaços simétricos.

2.2 Geometria dos modelos-σ e campos tensoriais no espaço-tempo

É bem conhecido que os campos tensoriais anti-simétricos, $B_{\mu\nu}$, sujeitos às transformações de gauge $\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \zeta_\nu$, são equivalentes a partículas escalares não-massivas [28, 29, 30, 31]. Começando pela teoria Abeliana, é possível obter condições de consistência para construir a versão não-Abeliana, onde termos de auto-interação poderiam estar presentes.

Numa formulação em primeira ordem dessa teoria tensorial, é fácil mostrar que há uma equivalência entre esses campos tensoriais não-Abelianos e o modelo-σ não-linear sem torção [13]. Tratados como campos de gauge, é bem sabido que o teorema no-go dado no trabalho da referência [32] proíbe a construção de uma teoria de gauge onde bósons usuais de spin-1 interajam com o potencial tensorial anti-simétrico de acordo com a prescrição de Yang-Mills.

Aqui, os campos tensoriais anti-simétricos serão considerados como campos de matéria, ao invés de campos de gauge. Com este propósito, é possível escrever a ação para o modelo-σ não-linear com o gauging das isometrias. Dessa forma é encontrada uma expressão para o acoplamento de matéria tensorial (equivalente aos campos escalares do modelo-σ) com os campos de gauge de Yang-Mills definidos sobre uma variedade do tipo quociente. Encontra-se que esses acoplamentos implicam num caráter não elementar para o campo tensorial: a matéria tensorial é, então, escrita em termos dos graus de liberdade do modelo-σ.

Seguindo esse procedimento, verifica-se que esses campos de matéria podem ser introduzidos como fontes de torção no espaço-alvo. Dependendo das isometrias deste espaço, pode-se construir uma abordagem fenomenológica na qual as interações entre os multipletes de mésons vetoriais são vistos em termos das propriedades geométricas da torção gerada pelos campos tensoriais de matéria. Ressonâncias vetoriais e de spin-2 são associadas a objetos compostos escritos em termos da conexão, da torção e da curvatura.

É possível obter a equivalência com o modelo-σ definindo o "pull-back da conexão com os campos de gauge:

$$V_\mu^{ab} = \omega_m^{ab} \partial_\mu \varphi^m \rightarrow F_{\mu\nu}^{ab} = R_{mn}^{ab} \; \partial_\mu \varphi^m \partial_\nu \varphi^n, \tag{2.14}$$

onde $R_{mn}^{ab}(\varphi)$ é o tensor de curvatura de Riemann da variedade do modelo-σ, e pode ser escrita fazendo-se uso da segunda equação de Maurer-Cartan:

$$R_{mn}^{ab} = \partial_m \omega_n^{ab} - \partial_n \omega_m^{ab} + \omega_m^{ac} \omega_{nc}^{b} - \omega_n^{ac} \omega_{mc}^{b}. \tag{2.15}$$

A dois-forma de torção da variedade é dada pela primeira equação de Maurer-Cartan:

$$T_{mn}^{a} = \frac{1}{2}\Big(\partial_m e_n^a - \partial_n e_m^a + \omega_{mb}^{a} e_n^b - \omega_{nb}^{a} e_m^b \Big). \tag{2.16}$$

Para introduzir os campos do tipo dois-forma como um grau de liberdade de matéria, é necessária a torção, sobretudo porque ela é um tensor e seu pull-back define um campo de rank-2 sobre o espaço-tempo:

$$W^a_{\mu\nu} = T^a_{mn}(\varphi)\partial_\mu\varphi^m\partial_\nu\varphi^n. \tag{2.17}$$

Como podemos ver, T^a_{mn} é um tensor real, então, $W^a_{\mu\nu}$ é um campo tensorial de matéria anti-simétrico, o qual, em princípio, pode descrever partículas não-massivas de spin-0 ou massivas de spin-1.

Em nossa abordagem, propomos a seguinte identificação:

$$W^a_{\mu\nu} = T^a_{mn}(\varphi)\partial_\mu\varphi^m\partial_\nu\varphi^n, \tag{2.18}$$

$$F^a_{\mu\nu}(V) = R^{ab}_{mn}\partial_\mu\varphi^m\partial_\nu\varphi^n, \tag{2.19}$$

$$V^{ab}_\mu = \omega^{ab}_m\partial_\mu\varphi^m, \tag{2.20}$$

onde V^{ab}_μ age como uma conexão de Yang-Mills e $W^a_{\mu\nu}$ transformam-se como campo de spin-0 ou campo de matéria de spin-1.

Como podemos ver, estes campos de matéria não são fundamentais, mas sim compostos de partículas, escritos em termos das coordenadas do modelo-σ, curvatura e torção. Este fato está de acordo com o teorema no-go enunciado na referência [32]. Neste sentido, este modelo serviria apenas como um modelo efetivo descrevendo algum setor da Física de Baixas Energias. Uma boa aplicação desse modelo efetivo seriam as interações entre mésons: não somente mésons escalares, como na abordagem padrão do modelo-σ não-linear, mas também partículas vetoriais. Neste esquema, o campo de gauge poderia ser o quantum desta interação efetiva, que é também um campo composto.

2.3 Contato com a fenomenologia

Para acomodar multipletos de mésons vetoriais, é necessário procurar por espaços-quociente do tipo não-simétrico, pois para estes casos podemos introduzir um tensor de torção com números quânticos bem-definidos do ponto de vista do grupo de gauge. Todas as componentes de um dado multipleto de mésons devem ter aproximadamente a mesma massa:

1. $\frac{G_2}{SU(3)}$:

   variedade 6-dimensional $\longrightarrow$ 6-plete: $a_1(1270GeV)$ e $b_1(1285GeV)$

2. $\frac{SO(4)}{SU(2)}$:

   variedade 3-dimensional $\longrightarrow$ 3-plete: $\rho(770GeV)$

3. $\frac{SU(3)}{U(1)}$ e $\frac{Sp(4)}{SU(2)}$:

   variedades 7-dimensionais $\longrightarrow$ 7-plete: $a_1(1270GeV), b_1(1285GeV)$, $f_1(1285GeV)$.

Todas essas variedades-quociente (G/H) têm uma torção induzida por um mergulho não-simétrico de H em G. Como campos massivos, tensores de rank-2 anti-simétricos construídos a partir da torção, descrevem mésons de spin-1. As ressonâncias quase degeneradas aparecem em multipletos cuja degenerescência é dada pela dimensão do espaço-quociente associado.

2.4 Ressonâncias de spin-2

Com os objetos geométricos que temos à nossa disposição, queremos propor uma possível discussão para ressonâncias de spin-2 do espectro de mésons. Campos tensoriais simétricos de rank-2 associados a partículas massivas de spin-2 podem ser identificadas pelos seguintes campos compostos:

$$S_{\mu\nu} = T^{a}_{ik} T_{j}{}^{k}{}_{a} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j, \tag{2.21}$$

para o caso de um singlete, e

$$S^a_{\mu\nu} = R^{kab}_{(i} T^{kb}_{j)} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j = S^a_{\nu\mu} \tag{2.22}$$

para multipletos não-triviais. Entretanto, uma inspeção cuidadosa da tabela de mésons indica o aparecimento de singletes, dubletes, tripletes e sextupletes de ressonâncias de spin-2. Então, os espaços não-simétricos $G_2/SU(3)$ e $SO(4)/SU(2)$ podem perfeitamente fixar a geometria para o triplete e o sextuplete de mésons de spin-2. De novo, a torção parece ser o elemento-chave para a construção de campos compostos descrevendo ressonâncias de spin não-trivial.

Nesta seção, mostramos que modelos-σ não-lineares com torção definida em um espaço-quociente G/H, com um mergulho não-simétrico permite a introdução de campos tensoriais não-Abelianos que se comportam como campos de matéria de spin-1. Estes campos anti-simétricos são introduzidos como fontes de torção na variedade do modelo-σ. Como uma conseqüencia, mostra-se que multipletos vetoriais e mésons de spin-2 podem ser introduzidos de tal modo que eles interagem com mésons escalares no ponto de vista de uma teoria efetiva (não-renormalizável) descrita pelo modelo-σ.

Neste contexto, ressaltamos que não somente mésons escalares podem ser efetivamente descritos por modelos-σ não-lineares, mas também os mésons vetoriais e ressonâncias de spin-2. Para tanto, é, contudo, necessário que a variedade apresente torção.

De acordo com que se expoôs acima, conseguimos chegar a uma classificação espectral das ressonâncias mesônias, agrupando-as em multipletes, de forma eminentemente cinemática. A etapa seguinte, e ainda em curso [21], trata as questões das interações e os possíveis decaimentos delas decorrentes, i.e, a dinâmica ditada pelas interações entre os multipletes de ressonâncias.

Capítulo 3

Super-Yang-Mills-(2,0) Acoplado a Modelos-σ Não-Lineares

O crescimento do interesse na investigação dos aspectos geométricos e o comportamento quântico de sistemas em duas dimensões, tais como teorias de Yang-Mills e modelos-σ não-lineares, especificamente se tratados com supersimetria, tem sido amplamente renovado em conexão com a análise de configurações de superstrings [22, 20], o estudo de teorias de campo conforme e modelos integráveis.

Assim como para supersimetrias definidas em duas dimensões espaço-temporais, elas podem ser geradas por p left-handed e q right-handed cargas independentes de Majorana: conhecida como supersimetria-(p,q) [22, 33] e são de importância fundamental na formulação das superstrings heteóticas [19].

Motivado pela tentativa de compreensão de alguns aspectos relacionados à dinâmica da world-sheet dos campos de gauge [34] e pela possibilidade de se encontrar novos exemplos em teorias de campo conformes, considerou-se a formulação de superespaço de um modelo de Yang-Mills-$(2,0)$ [35, 36]acrescido pela introdução de um potencial de gauge extra transformando-se sob o mesmo grupo de gauge simples que a teoria de campo de Yang-Mills comum.

Nos trabalhos das referências [35, 36], o papel de um potencial de gauge extra foi questionado com base na discussão de vínculos no supercampo field-strength utilizando a álgebra das derivadas covariantes de gauge no superespaço-$(2,0)$. O acoplamento mínimo entre este tipo de modelo de Yang-Mills menos vinculado e o supercampo de matéria já foi obtido e foi estabelecido que o potencial de gauge adicional corresponde a graus de liberdade que não interagem no caso Abeliano. Para simetrias não-Abelianas, o campo de Yang-Mills extra desacopla da matéria, embora apresente auto-interações com o setor de gauge [35].

O propósito aqui [1] é, então, encontrar um possível papel dinâmico para o potencial de gauge adicional discutido nas referências [35, 36], em termos de seu acoplamento com supercampos de matéria que descrevem as coordenadas da variedade de Kähler adotada como espaço-alvo de um modelo-σ não-linear-(2,0) [37]. Para fazer tal investigação, faremos o gauging do grupo de isometria do modelo-σ em consideração trabalhando no superespaço-(2,0); após, só nos restará a tarefa de acoplar os supermultipletos do super-

[1] Este capítulo baseia-se no paper "$(2,0)$-Super-Yang-Mills coupled to non-linear σ-model", escrito em colaboração com A.B.Penna-Firme e M.R.Negrão e submetido para publicação ao Journal of High Energy Physics(**hep-th/9903126**).

Yang-Mills-(2,0) da referência [35] aos supercampos que definem o modelo-σ-(2,0) onde foi feito o gauging.

As coordenadas escolhidas para parametrizar o superespaço-(2,0) são dadas por

$$z^A \equiv (x^{++}, x^{--}; \theta, \bar{\theta}), \tag{3.1}$$

onde x^{++}, x^{--} representam as coordenadas usuais do cone de luz, enquanto θ e $\bar{\theta}$ são espinores de Weyl right-handed complexos. As derivadas covariantes de supersimetria, neste caso, são dadas por

$$D_+ \equiv \partial_\theta + i\bar{\theta}\partial_{++} \tag{3.2}$$

e

$$\bar{D}_+ \equiv \partial_{\bar{\theta}} + i\theta\partial_{++}, \tag{3.3}$$

onde ∂_{++} (ou ∂_{--}) representa a derivada com respeito à coordenada do espaço-tempo x^{++} (ou x^{--}). Elas satisfazem à álgebra:

$$D_+^2 = \bar{D}_+^2 = 0, \qquad \{D_+, \bar{D}_+\} = 2i\partial_{++}, \tag{3.4}$$

com esta definição para D e $\bar{D}$, temos

$$e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} D_+ e^{-i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} = \partial_\theta, \tag{3.5}$$

$$e^{-i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} \bar{D}_+ e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}} = \partial_{\bar{\theta}}. \tag{3.6}$$

Os supercampos de matéria fundamentais com os quais vamos lidar são os supercampos "quirais" escalar e espinorial left-handed, cujas expressões em componentes são dadas, respectivamente, por

$$\Phi(x;\theta,\bar{\theta}) = e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\phi+\theta\lambda),$$
$$\Psi(x;\theta,\bar{\theta}) = e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\psi+\theta\sigma), \tag{3.7}$$

onde ϕ e σ são escalares, enquanto λ e ψ são, respectivamente, espinores de Weyl right-handed e left-handed.

Este tipo de vínculo de quiralidade leva às seguintes expressões para Φ e Ψ:

$$\Phi(x;\theta,\bar{\theta}) = \phi(x)+\theta\lambda(x)+i\theta\bar{\theta}\partial_{++}\phi(x),$$
$$\Psi(x;\theta,\bar{\theta}) = \psi(x)+\theta\sigma(x)+i\theta\bar{\theta}\partial_{++}\psi(x). \tag{3.8}$$

A ação mais geral no superespaço, envolvendo Φ e Ψ com interações governadas por parâmetros de acoplamento adimensionais λ_1 e λ_2, é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int d^2x d\theta d\bar{\theta}[i(\bar{\Phi}\partial_{--}\Phi-\Phi\partial_{--}\bar{\Phi})+\bar{\Psi}\Psi+ \\ &+ m(\Phi\Psi+\bar{\Phi}\Psi)+ \\ &+ \lambda_1 P(\Phi,\bar{\Phi})(\bar{\Phi}\partial_{--}\Phi-\Phi\partial_{--}\bar{\Phi})+ \\ &+ \lambda_2 Q(\Phi,\bar{\Phi})\bar{\Psi}\Psi], \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde m é um parâmetro de massa e P e Q são polinômios reais em Φ e $\bar{\Phi}$.

Supomos que Φ e Ψ transformam-se sob um grupo de gauge compacto e simples, $\mathcal{G}$, de acordo com

$$\Phi' = R(\Lambda)\Phi, \qquad \Psi' = S(\Lambda)\Psi, \tag{3.10}$$

onde R e S são matrizes que representam um elemento do grupo de gauge sob o qual Φ e Ψ, respectivamente, transformam-se. Levando em conta o vínculo em Φ e Ψ, e tendo em mente a representação exponencial de R e S, encontramos que os supercampos parâmetros de gauge, Λ, satisfazem ao mesmo tipo de vínculo. Então, pode ser expandido como:

$$\Lambda(x;\theta,\bar{\theta}) \;=\; e^{i\theta\bar{\theta}\partial_{++}}(\alpha+\theta\beta), \tag{3.11}$$

onde α é um escalar e β um espinor right-handed.

A parte cinética da ação (3.9) pode ser tornada invariante sob as transformações locais (3.10) através do acoplamento mínimo dos supercampos potenciais de gauge, $\Gamma_{--}(x;\theta,\bar{\theta})$ e $V(x;\theta,\bar{\theta})$, de acordo com

$$S_{inv} = \int d^2x d\theta d\bar{\theta}\{i[\bar{\Phi}e^{hV}(\nabla_{--}\Phi) - (\bar{\nabla}_{--}\bar{\Phi})e^{hV}\Phi] + \bar{\Psi}e^{hV}\Psi\}. \tag{3.12}$$

Os supermultipletes de Yang-Mills são introduzidos por meio das derivadas covariantes de gauge, as quais, de acordo com a discussão da referência [35], são definidas como

$$\nabla_{+} \;\equiv\; D_{+}+\Gamma_{+}, \qquad\qquad \bar{\nabla}_{+} \equiv \bar{D}_{+}, \tag{3.13}$$

$$\nabla_{++} \;\equiv\; \partial_{++}+\Gamma_{++} \qquad e \qquad \nabla_{--} \equiv \partial_{--} - ig\Gamma_{--}, \tag{3.14}$$

onde as superconexões de gauge Γ_{+}, Γ_{++} e Γ_{--} são todas *Lie-algebra-valued.* Os acoplamentos de gauge podem, em princípio, ser diferentes. Γ_{+} e Γ_{++} podem ser expressas em termos de um supercampo real, $V(x;\theta,\bar{\theta})$, de acordo com

$$\Gamma_{+} = e^{-gV}(D_{+}e^{gV}) \tag{3.15}$$

e

$$\Gamma_{++} = -\frac{i}{2}\bar{D}_{+}[e^{-gV}(D_{+}e^{gV})]. \tag{3.16}$$

Desta forma, o gauging do grupo de isometria do modelo-σ pode ser alcançado acoplando minimamente a ação do modelo-σ supersimétrico-(2,0) aos supercampos de gauge V e Γ_{--}, como veremos a seguir.

Para estabelecer contato com a formulação de campos componentes e realmente identificar a presença de um potencial de gauge adicional, escrevemos as expansões em θ para V e Γ_{--}:

$$V(x;\theta,\bar{\theta}) = C + \theta\xi - \bar{\theta}\bar{\xi} + \theta\bar{\theta}v_{++} \tag{3.17}$$

e

$$\Gamma_{--}(x;\theta,\bar{\theta}) = \frac{1}{2}(A_{--} + iB_{--}) + i\theta(\rho + i\eta) + i\bar{\theta}(\chi + i\omega) + \frac{1}{2}\theta\bar{\theta}(M + iN). \tag{3.18}$$

A_{--}, B_{--} e v_{++} são as componentes do cone de luz dos campos potenciais de gauge; ρ, η, χ e ω são espinores de Majorana left-handed; M, N e C são escalares reais e ξ é um espinor complexo right-handed.

As transformações de gauge dos campos componentes acima são dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta C &= \frac{2}{h}\Im m\alpha \\
\delta\xi &= -\frac{i}{h}\beta \\
\delta v_{++} &= \frac{2}{h}\partial_{++}\Re e\alpha \\
\delta A_{--} &= \frac{2}{g}\partial_{--}\Re e\alpha \\
\delta B_{--} &= \frac{2}{g}\partial_{--}\Im m\alpha \\
\delta\eta &= -\frac{1}{g}\partial_{--}\Re e\beta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\rho &= \frac{1}{g}\partial_{--}\Im m\beta, \\
\delta M &= -\frac{2}{g}\partial_{--}\partial_{++}\Im m\alpha, \\
\delta N &= \frac{2}{g}\partial_{--}\partial_{++}\Re e\alpha, \\
\delta\chi &= 0, \\
\delta\omega &= 0
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

e elas sugerem que podemos tomar $h = g$, de tal modo que a componente v_{++} pode ser identificada como o parceiro de cone-de-luz de A_{--},

$$v_{++} \equiv A_{++}; \tag{3.20}$$

assim, terminamos com dois campos componentes do tipo potenciais de gauge: $A^{\mu} \equiv (A^0, A^i)$ e $B_{--}(x)$. A este ponto, é interessante fazer uma observação não-trivial: a componente $\theta\bar{\theta}$ de Γ_{--} pode ser identificada como abaixo:

$$M + iN = i\partial_{++}(A_{--} + iB_{--}), \tag{3.21}$$

para assegurar que $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ aparece como uma componente acomodada no supercampo field-strength definido por:

$$[\nabla_{+}, \nabla_{--}] \equiv X = -igD_{+}\Gamma_{--} - \partial_{--}\Gamma_{+}. \tag{3.22}$$

Isto não quebra a supersimetria, já que χ e ω são graus de liberdade não-dinâmicos e desaparecem do supercampo field-strength X. Na prática, após a identificação dada pela equação (3.21), Γ_{--} carrega dois graus de liberdade bosônicos e dois graus de liberdade fermiônicos.

Utlizando o field-strength definido na equação (3.22), podemos construir o Lagrangeano cinético invariante de gauge:

$$S_{kin} = -\frac{1}{8g^2}\int d^2x d\theta d\bar{\theta}\bar{X}X. \tag{3.23}$$

Esta ação leva ao Lagrangeano em componentes dado abaixo:

$$\mathcal{L}_{kin} = \mathcal{L}_{kin}(\rho,\eta,\xi) + \mathcal{L}_{kin}(A) + \mathcal{L}_{kin}(B_{--},C), \tag{3.24}$$

onde

$$\mathcal{L}_{kin}(\rho,\eta,\xi) = \frac{i}{8}(\bar{\rho} - i\bar{\eta} - \partial_{--}\bar{\xi}) \overleftrightarrow{\partial}_{++} (\rho + i\eta - \partial_{--}\xi), \tag{3.25}$$

com $A \overleftrightarrow{\partial} B = (\partial A)B - A(\partial B)$,

$$\mathcal{L}_{kin}(A) = \frac{1}{2}A^{\nu}(\Box\eta_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu})A^{\mu} = \frac{1}{2}A^{\nu}R_{\mu\nu}A^{\mu}, \tag{3.26}$$

e

$$\mathcal{L}_{kin}(B_{--},C) = \frac{1}{8}(\partial_{++}B_{--} - \partial_{++}\partial_{--}C)^2 = \frac{1}{8}(B_{--}\ \ C)K(B_{--}\ \ C)^t. \tag{3.27}$$

Note que, como mencionado acima, χ e ω não estão presentes no Lagrangeano cinético (3.25).

Podemos ver que $R_{\mu\nu}$ e K são matrizes-não-inversíveis, então é necessário introduzir o Lagrangeano de gauge-fixing, dado por:

$$\begin{aligned} S_{gf} &= k\int d^2x d\theta d\bar{\theta}\bar{G}G \\ &= -\frac{1}{2\alpha}(\partial_{\mu}A^{\mu})^2 - \frac{i}{4\alpha}(\bar{\rho} - i\bar{\eta} - \partial_{--}\bar{\xi})\partial_{++}(\rho + i\eta - \partial_{--}\xi) + \\ &- \frac{1}{8\alpha}(\partial_{++}B_{--} + \partial_{--}\partial_{++}C) \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $G = D_+\partial_{--}V - iD_+\Gamma_{--}$. Utilizando o gauge-fixing, eq.(3.28), juntamente com as equações (3.26) e (3.27), podemos escrever os propagadores para A, B_{--} e C:

$$\begin{aligned}
\langle AA\rangle &= -\frac{2i}{\Box}(\theta^{\mu\nu} + \alpha\omega^{\mu\nu}), \\
\langle BB\rangle &= -\frac{8i}{\Box^2}(\alpha - 1)\partial_{--}^2, \\
\langle BC\rangle &= -\langle CB\rangle = \frac{8i}{\Box^2}(\alpha + 1)\partial_{--}, \\
\langle CC\rangle &= \frac{8i}{\Box^2}(\alpha - 1)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Expressando a ação da equação (3.12) em termos dos campos componentes, e adotando o gauge de Wess-Zumino, o Lagrangeano resultante é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{comp} &= 2\phi\Box\phi^* - igA_{--}[\phi^*\partial_{++}\phi - c.c] - igA_{++}[\phi^*\partial_{--}\phi - c.c] + \\
&+ g\phi\phi^*\partial_{++}B_{--} - g^2A_{++}A_{--}\phi\phi^* + 2i\bar{\lambda}\partial_{--}\lambda + gA_{--}\bar{\lambda}\lambda + \\
&- ig\phi^*[(\chi + \bar{\rho} + i\omega - i\bar{\eta})\lambda - c.c] - 2i\bar{\psi}\partial_{++}\psi - gA_+\bar{\psi}\psi + \\
&+ \sigma^*\sigma.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Vê-se, imediatamente, que o campo de gauge extra, B_{--}, não desacopla da matéria vetorial. Nossa abordagem de deixar a superconexão Γ_{--} como um supercampo complexo introduziu, naturalmente, um potencial de gauge extra, B_{--}, além do campo de gauge usual, A_μ. B_{--} comporta-se como um segundo campo de gauge. O fato do pólo não-massivo ser de ordem dois pode danificar a unitariedade. Contudo, a mistura com a componente C de V, que é um campo compensador, indica que podemos acoplá-los a correntes externas e analisar a parte imaginária da amplitude corrente-corrente no pólo. Fazendo isto, esta parte imaginária revela-se positivo-definida, de tal modo que não há ghosts presentes. Isto leva-nos a afirmar que B_{--} comporta-se como um campo de gauge físico. Possui dinâmica e se acopla com a matéria. A única peculiaridade está na presença de um única componente nas coordenadas do cone-de-luz. O campo B faz o papel de um "potencial de gauge quiral". Apesar da presença do par de campos de gauge, um termo massivo invariante de gauge não pode ser introduzido, já que B não apresenta a componente B_{++}, ao contrário do que acontece com A^{μ}. Vamos, agora, nos voltar para o acoplamento dos dois potenciais de gauge, A_{μ} e B_{--}, ao modelo-σ não-linear.

Nossa principal meta é fazer o acoplamento de um modelo-σ-(2,0) aos supercampos de gauge da ref. [35], e mostrar que os graus de liberdade extra não se desacoplam dos campos de matéria (isto é, das coordenadas do espaço-alvo). O potencial de gauge extra obtido através de um "relaxamento" dos vínculos pode, assim, adquirir um significado dinâmico em termos do acoplamento entre o modelo-σ e os campos de Yang-Mills da ref.[35]. Além do mais, este sistema pode fornecer outro exemplo de teoria conforme invariante de gauge.

A ação do modelo-σ-(2,0) supersimétrico, escrita no superespaço (2,0), é dada por [37]:

$$S = -\frac{i}{2}\int d^2x d\theta d\bar{\theta}\Big[K_i(\Phi,\bar{\Phi})\partial_{--}\Phi^i - c.c.\Big], \tag{3.31}$$

onde o vetor do espaço-alvo $K_i(\Phi,\bar{\Phi})$ pode ser expresso como o gradiente de um potencial escalar real (de Kähler), $K(\Phi,\bar{\Phi})$, sempre que o termo de Wess-Zumino estiver ausente (*i.e.*, caso sem torção) [22]:

$$K_i(\Phi,\bar{\Phi}) = \partial_i K(\Phi,\bar{\Phi}) \equiv \frac{\partial}{\partial\Phi^i}K(\Phi,\bar{\Phi}). \tag{3.32}$$

Vamos concentrar nossa atenção nas variedades-alvo Kählerianas do tipo-quociente,

G/H. Os geradores do grupo de isometria, G, são representados por $Q_\alpha(\alpha = 1, ..., dimG)$, enquanto que o grupo de isotropia, H, tem seus geradores representados por $Q_{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha} = 1, ..., dimH)$. As transformações do grupo de isotropia são realizadas linearmente nos supercampos Φ e $\bar{\Phi}$, e agem como multiplicações de matrizes, assim como para as variedades planas. As transformações de isometria, ao contrário, são não-lineares, e sua ação nos pontos de G/H pode ser escrita como:

$$\delta\Phi^i = \lambda^\alpha k^i_\alpha(\Phi) \tag{3.33}$$

e

$$\delta\bar{\Phi}_i = \lambda^\alpha \bar{k}_{\alpha i}(\Phi), \tag{3.34}$$

onde $k_{\alpha i}$ e $\bar{k}_{\alpha i}$ são, respectivamente, os vetores de Killing holomórficos e anti-holomórficos da variedade alvo. As versões finitas das transformações de isometria acima são dadas por:

$$\Phi'^i = exp(\mathbf{L}_{\lambda.k})\Phi^i \tag{3.35}$$

e

$$\Phi'^i = exp(\mathbf{L}_{\lambda.\bar{k}})\bar{\Phi}^i \tag{3.36}$$

com

$$\mathbf{L}_{\lambda.k}\Phi^i \equiv \left[\lambda^\alpha k^i_\alpha \frac{\partial}{\partial\Phi^j}, \Phi^i\right] = \delta\Phi^i. \tag{3.37}$$

Embora o potencial escalar de Kähler possa ser sempre tomado como H-invariante, as transformações de isometria induzem em K uma variação dada por:

$$\delta K = \lambda^\alpha[(\partial_i K)k_{\alpha i} + (\bar{\partial}^i K)\bar{k}_{\alpha i}] = \lambda^\alpha[\eta_\alpha(\Phi) + \bar{\eta}_\alpha(\bar{\Phi})], \tag{3.38}$$

onde as funções holomórficas e anti-holomórficas, η_α e $\bar{\eta}_\alpha$, podem ser determinadas a menos de uma quantidade puramente imaginária, como abaixo:

$$(\partial_i K)k^i_\alpha \equiv \eta_\alpha + iM_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}) \tag{3.39}$$

e

$$(\bar{\partial}^i K)\bar{k}_{\alpha i} \equiv \bar{\eta} - iM_\alpha(\Phi, \bar{\Phi}). \tag{3.40}$$

As funções reais M_α, juntamente com as funções holomórficas e anti-holomórficas, η_α e $\bar{\eta}_\alpha$, desempenham um papel crucial na discussão do gauging do grupo de isometia da variedade alvo [24]. Então, em virtude da transformação (3.38) e dos vínculos impostos em Φ e $\bar{\Phi}$, pode ser imediatamente verificado que a ação do superespaço (3.31) é invariante sob transformações globais de isometria.

Indo além no estudo de isometrias, um tópico relevante na abordagem de modelos-σ é o gauging do grupo de isometria G da variedade alvo Kähleriana. Isto significa que é possível fazer o acoplamento mínimo do modelo-σ-(2,0) aos supermultipletos de Yang-Mills da supersimetria-(2,0) [38]. Uma motivação eventual para que tal análise seja feita está relacionada às teorias de campo conformes 2-dimensionais. Sabe-se que os modelos-σ 2-dimensionais definem teorias de campo conformes, desde que vínculos convenientes sejam impostos na geometria do espaço-alvo [22, 20]. Agora, o acoplamento desses modelos ao setor de Yang-Mills pode levar a teorias conformes novas e interessantes.

O estudo de teorias de Yang-Mills supersimétricas foi feito na referência ref.[38] e o gauging das isometrias do modelo-σ no superespaço-(2,0) foram consideradas na referência [39]. Por outro lado, uma versão alternativa, menos vinculada, dos multipletos de gauge foi proposta e discutida nas ref.[35, 36]. Foi mostrado que a eliminação de alguns vínculos nas superconexões de gauge e nos supercampos field-strength leva ao aparecimento de um potencial de gauge extra que compartilha um campo de gauge. Entretanto, mostra-se que este potencial extra desacopla dos supercampos de matéria-(2,0) sempre que eles estiverem acoplados minimamente ao setor de Yang-Mills.

Para escrever a versão local das transformações de isometria (3.33) e (3.34), é necessário substituir o parâmetro global λ^α por um par quiral e antiquiral de supercampos, $\Lambda^\alpha(x;\theta,\bar{\theta})$ e $\bar{\Lambda}^\alpha(x;\theta,\bar{\theta})$, em virtude dos vínculos satisfeitos por Φ e $\bar{\Phi}$. Isto pode ser feito de acordo com:

$$\Phi'^i = exp(\mathbf{L}_{\Lambda.k})\Phi^i \tag{3.41}$$

e

$$\bar{\Phi}'^i = exp(\mathbf{L}_{\bar{\Lambda}.\bar{k}})\bar{\Phi}^i. \tag{3.42}$$

Para nos aproximarmos mais do caso de transformações globais, e para expressarmos todas as variações de gauge exclusivamente em termos dos dos parâmetros de supercampo Λ^α, propomos uma redefinição que consiste em substituir $\bar{\Phi}$ por um novo supercampo, $\tilde{\bar{\Phi}}$, como segue:

$$\tilde{\bar{\Phi}}_i \equiv exp(i\mathbf{L}_{v.\bar{k}})\bar{\Phi}_i. \tag{3.43}$$

Da expressão para a transformação de gauge do pré-potencial V, pode ser demonstrado que:

$$exp(i\mathbf{L}_{V'.\bar{k}}) = exp(\mathbf{L}_{\Lambda.\bar{k}})exp(i\mathbf{L}_{v.\bar{k}})exp(-\mathbf{L}_{\bar{\Lambda}\bar{k}}), \tag{3.44}$$

e $\tilde{\Phi}_i$ consequentemente se transforma com o parâmetro de gauge Λ^α:

$$\tilde{\Phi}'_i = exp(\mathbf{L}_{\Lambda\bar{k}})\tilde{\Phi}_i, \tag{3.45}$$

que é dado infinitesimalmente por:

$$\delta\tilde{\Phi}_i = \Lambda^\alpha(x;\theta\bar{\theta})\bar{k}_{\alpha i}(\bar{\Phi}). \tag{3.46}$$

Agora, uma transformação infinitesimal de isometria induz no potencial modificado de Kähler potential, $K(\Phi,\tilde{\Phi})$, uma variação dada por:

$$\delta K(\Phi,\tilde{\Phi}) = \Lambda^\alpha(\eta_\alpha + \tilde{\eta}_\alpha), \tag{3.47}$$

onde

$$\tilde{\eta}_\alpha = (\tilde{\partial}^i K)\bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}) + iM_\alpha(\Phi,\tilde{\Phi}), \tag{3.48}$$

com $\tilde{\partial}$ representando a derivada parcial com respeito a $\tilde{\Phi}$. A variação de isometria δK calculada acima é dada simplesmente como uma transformação de Kähler e é uma conseqüencia direta da existência do escalar real $M_\alpha(\Phi,\tilde{\Phi})$, como discutido nas ref.[24].

A forma da variação de isometria de $K(\Phi,\tilde{\Phi})$ sugere a introdução de um par de supercampos quiral e antiquiral, $\xi(\Phi)$ e $\bar{\xi}(\bar{\Phi})$, cujas respectivas transformações de gauge são fixadas de modo a compensar a mudança de K sob isometrias. Isto pode ser feito em termos do Lagrangeano definido como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi &= \partial_i[K(\Phi,\tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})]\nabla_{--}\Phi^i + \\ &- \tilde{\partial}_i[K(\Phi,\tilde{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})]\nabla_{--}\tilde{\Phi}^i, \end{aligned}\tag{3.49}$$

onde as derivadas covariantes $\nabla_{--}\Phi^i$ e $\nabla_{--}\tilde{\Phi}^i$ são definidas em perfeita analogia ao que foi feito no caso do modelo-σ bosônico:

$$\nabla_{--}\Phi_i \equiv \partial_{--}\Phi_i - g\Gamma^{\alpha}_{--}k^i_{\alpha} \tag{3.50}$$

e

$$\nabla_{--}\tilde{\Phi}_i \equiv \partial_{--}\tilde{\Phi}_i - g\Gamma^{\alpha}_{--}\bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}). \tag{3.51}$$

Finalmente, tudo que se necessita para que o Lagrangeano $\mathcal{L}_{\xi}$ dada acima seja invariante sob isometrias locais é fixar as variações de gauge dos supercampos escalares auxiliares ξ e $\tilde{\xi}$. Se esses últimos forem escolhidos tais que:

$$(\partial_i\xi)k^i_{\alpha}(\Phi) = \eta_{\alpha}(\Phi) \tag{3.52}$$

e

$$(\tilde{\partial}^i\tilde{\xi})\bar{k}_{\alpha i}(\tilde{\Phi}) = \tilde{\eta}_{\alpha}(\tilde{\Phi}), \tag{3.53}$$

então pode-se verificar facilmente que o potencial de Kähler transformado,

$$[K(\Phi,\bar{\Phi}) - \xi(\Phi) - \tilde{\xi}(\tilde{\Phi})], \tag{3.54}$$

é invariante por isometria, e o Lagrangeano $\mathcal{L}_{\xi}$ da eq. (3.49) é realmente simétrico sob o grupo de isometria sob gauge.

O ponto interessante que gostaríamos de ressaltar é que os graus de liberdade de gauge extra acomodados na componente $B_{--}(x)$ da superconexão Γ_{--} comportam-se como um campo de gauge genuíno, que compartilha com A^{μ} o acoplamento à matéria e ao modelo-σ [35]. Este resultado pode ser visto explicitamente no Lagrangeano em campos componentes projetado a partir do Lagrangeano em supercampos $\mathcal{L}_{\xi}$. Concluímos, então, que esta teoria-de-gauge-(2,0) menos vinculada leva a um par de potencias de gauge que se transformam naturalmente sob a ação de um grupo de gauge Abeliano simples.

Capítulo 4

Conclusões Gerais e Perspectivas de Prosseguimento

No primeiro problema exposto, onde foram tratados modelos-σ não-lineares anisotrópicos (para os quais a anisotropia pode ser a responsável pelo aparecimento de ínstantons na teoria), abordamos o problema do cancelamento de anomalias em modelos-σ com espaços-alvo do tipo-quociente (G/H) através de uma forma geométrica. Para isto, procuramos entender se há uma relação entre os atributos fermiônicos do subgrupo H e a torção em G/H, de forma a caracterizar o mecanismo de supressão da anomalia mais diretamente em termos da estrutura geométrica do espaço-alvo. Esta abordagem foi feita através do acoplamento entre a torção da variedade do modelo-σ e os bilineares fermiônicos. Foi, então, necessário, considerar espaços não-simétricos. Nossa investigação baseou-se nos espaços: $S_p(4)/U(1) \times U(1)$;$SU(2) \times SU(2)/U(1)$; $G_2/SU(3)$; $SU(3)/U(1) \times U(1)$ e

$S_p(4)/SU(2) \times U(1)$. A análise de somente cinco espaços-quociente não é suficiente para pensar que esta abordagem é geral. Portanto, seria necessário ir mais além e, talvez, propor um teorema, para termos maior fundamento ao falar do cancelamento de anomalia de uma forma geométrica. Esta é uma primeira perspectiva de continuação.

No segundo trabalho aqui desenvolvido, analisamos a equivalência de modelos-σ e teorias de gauge com campos tensoriais anti-simétricos, fazendo o acoplamento destes campos com o setor de Yang-Mills. Tal acoplamento mostrou um caráter não-elementar em relação ao campo tensorial. Exprimimos, então, a matéria tensorial em termos dos graus de liberdade do modelo-σ. Com isto, construímos uma abordagem fenomenológica para as interações entre multipletes de mésons vetoriais(onde são vistos em termos das propriedades geométricas da torção gerada pelos campos tensoriais de matéria). A atributos geométricos tais como torção, conexão e curvatura, associamos as ressonâncias vetoriais e de spin-2. Como procedemos na primeira parte, analisamos quatro espaços-quociente não-simétricos: $G_2/SU(3)$;$SO(4)/SU(3)$;$SU(3)/U(1)$ e $S_p(4)/SU(2)$. Os resultados apresentados nesta tese referem-se apenas a uma classificação espectral. Ainda não foi possível, com os resultados aqui apresentados, definir um método para analisarmos as interações entre os campos aqui encontrados, de tal modo que nos possibilite um melhor entendimento da dinâmica de tais campos e que reproduza os decaimentos apresentados. Não nos foi possível encontrar um espaço-quociente não-simétrico de dimensão quatro, o que seria interessante se ocorresse, pois tal espaço colocaria a análise feita aqui um pouco mais próxima de uma teoria "real", pois incluiria quadrupletes de mésons que não conseguimos classificar. Como perspectiva de prosseguimento, com esta linha, o próximo passo (já em andamento [21]) consiste na análise dos decaimentos e no acoplamento entre os diferentes multipletes em função das propriedades geométircas e algébricas dos espaços G/H a partir dos quais definimos os mésons compostos.

Na terceira parte, utilizamos a supersimetria do tipo-(p, q), mais precisamente o tipo $(2, 0)$, para encontrar e analisar a dinâmica dos superpotenciais de gauge. Este estudo foi feito investigando tais superpotenciais em componentes. Este superpotencial advém do fato de fazermos o acoplamento mínimo na ação cinética inicial. Esta análise foi realizada através do seu acoplamento com campos de matéria. Estes campos de matéria descrevem as coordenadas de uma variedade do tipo Kähler adotada como espaço-alvo de um modelo-σ não-linear. Um resultado interessante, no que diz respeito a este superpotencial, é a presença de um campo vetorial extra com uma única componente nas coordenadas do cone de luz (o que não é o caso para o campo A_{--}). Mesmo assim, este potencial é um campo de gauge genuíno. Vimos, então, que esta teoria-de-gauge-(2,0) leva a um par de potenciais de gauge que se transformam naturalmente sob a ação de um grupo Abeliano. Encontra-se em andamento uma análise da versão não-Abeliana do modelo. Dependendo dos resultados encontrados, seria interessante estender esta parte do trabalho à supersimetria $N = 4 - D = 2$. Tal extensão poderá nos trazer informações novas e interessantes com respeito ao gauging das isotropias de modelos-σ. Também, a analogia existente entre modelos-σ em D=2 e teorias de Yang-Mills em D=4 dimensões poderia ser enriquecida se estudássemos possíveis dualidades presentes no modelo-σ N=4-D=2, mesmo se não acoplados ao setor de Yang-Mills.

Apêndice: Geometria e Álgebra de Espaços-Quociente

Como podemos observar, no Cap. 3 analisamos, para os propósitos de cancelamento de anomalias e formação de multipletes de mésons, 8 espaços-quociente: $Sp(4)/U(1) \times U(1)$, $SU(2) \times SU(2)/U(1)$, $G_2/SU(3)$, $SU(3)/U(1) \times U(1)$, $Sp(4)/SU(2) \times U(1)$, $SO(4)/SU(2)$, $SU(3)/U(1)$, $Sp(4)/SU(2)$. Propomo-nos a apresentar aqui os cálculos explícitos para três destes espaços-quociente não-simétricos. Escolhemos aqueles que não se encontram na literatura. Para os demais, segue a mesma sistemática.

$\underline{SU(3)/U(1) \times U(1)}$:

Para analisarmos se o espaço estudado é simétrico ou não, faremos uso da equação (2.9). Para o espaço quociente $SU(3)/U(1) \times U(1)$, faremos uso dos 8 geradores de $SU(3)$

na forma das matrizes de Gell-Mann:

$$Q_1 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_5 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_7 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_6 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_8 = -\frac{i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Os geradores do subgrupo H podem ser escolhidos como sendo: Q_3 e Q_8.

De posse destes geradores, obtemos o seguinte conjunto de constantes de estrutura:

$$\begin{array}{lll} f_{123} = 1 & f_{246} = \frac{1}{2} & f_{367} = -\frac{1}{2} \\ f_{147} = \frac{1}{2} & f_{257} = \frac{1}{2} & f_{456} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f_{156} = -\frac{1}{2} & f_{345} = \frac{1}{2} & f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \tag{4.2}$$

Usando, agora, a eq. (3.8):

$$\begin{aligned} R_{ab} &= f_{cai}f_{icb} + \frac{1}{4}[1-(1+\lambda)^2k^2]f_{cad}f_{dcb}, \\ &\equiv R^{(1)}_{ab} + \frac{1}{4}[1-(1+\lambda)^2k^2]R^{(2)}_{ab}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

com os índices i e a tomando os valores: $i = 3, 8$ e $a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$. Então, para $R^{(1)}_{ab}$ e $R^{(2)}_{ab}$, temos:

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{11} = R^{(2)}_{11} = 1 \quad R^{(1)}_{44} = R^{(2)}_{44} = 1 \\
R^{(1)}_{22} = R^{(2)}_{22} = 1 \quad R^{(1)}_{55} = R^{(2)}_{55} = 1 \\
R^{(1)}_{66} = R^{(2)}_{66} = 1 \quad R^{(1)}_{77} = R^{(2)}_{77} = 1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{ab} &= 0 \quad para \quad a \neq b \\
R^{(2)}_{ab} &= 0 \quad para \quad a \neq b;
\end{aligned} \tag{4.5}$$

assim, chegamos à conclusão de que

$$R^{(1)}_{ab} = R^{(2)}_{ab} = \delta_{ab}. \tag{4.6}$$

Desta forma, podemos ter um tensor de Ricci nulo se o coeficiente de anisotropia obedecer à relação (2.8):

$$(1 + \lambda)k = \pm\sqrt{5}. \tag{4.7}$$

Procederemos, em seguida, à análise dos espaços $G_2/SU(3)$ e $Sp_4/SU(2)$.

Para o cálculo das constantes de estrutura dos grupos G_2 e $Sp(4)$, usaremos as relações de comutação dos geradores na base de Cartan[?]:

$$[H_i, H_j] = 0, \tag{4.8}$$

$$[H_i, G_\alpha] = \rho_i(\alpha) G_\alpha, \tag{4.9}$$

$$[G_\alpha, G_\beta] = N_{\alpha,\beta} G_{\alpha+\beta}. \tag{4.10}$$

$\underline{G_2/SU(3)}$:

Para o grupo G_2, os vetores-raízes são dados por:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= (1,0), \quad \rho_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \rho_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \rho_4 &= (0, \frac{\sqrt{3}}{3}), \quad \rho_5 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \quad \rho_6 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}), \end{aligned} \tag{4.11}$$

Definindo os geradores Q_A de tal modo que

$$\begin{aligned} G_1 &= Q_1 + iQ_2, \quad G_{-1} = Q_1 - iQ_2, \\ G_2 &= Q_4 + iQ_5, \quad G_{-2} = Q_4 - iQ_5, \\ G_3 &= Q_6 + iQ_7, \quad G_{-3} = Q_6 - iQ_7, \\ G_4 &= Q_9 + iQ_{10}, \quad G_{-4} = Q_9 - iQ_{10}, \\ G_5 &= Q_{11} + iQ_{12}, \quad G_{-5} = Q_{11} - iQ_{12}, \\ G_6 &= Q_{13} + iQ_{14}, \quad G_{-6} = Q_{13} - iQ_{14}, \\ H_1 &= Q_3 \quad H_2 = Q_8, \end{aligned} \tag{4.12}$$

obtemos, então, o seguinte conjunto de constantes de estrutura:

$$\begin{aligned} f_{1,2,3} &= 1 \quad f_{3,6,7} = -\frac{1}{2}, \quad f_{6,10,11} = \frac{1}{2}, \\ f_{1,4,7} &= \frac{1}{2} \quad f_{3,11,12} = -\frac{1}{2}, \quad f_{7,9,11} = -\frac{1}{2}, \\ f_{1,5,6} &= -\frac{1}{2} \quad f_{3,13,14} = \frac{1}{2}, \quad f_{7,10,12} = \frac{1}{2}, \\ f_{1,11,14} &= \frac{1}{2} \quad f_{4,5,8} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{8,9,10} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1,12,13} &= -\frac{1}{2} \quad f_{4,9,14}=\frac{1}{2}, \quad f_{8,11,12}=\frac{\sqrt{3}}{6}, \\
f_{2,4,6} &= \frac{1}{2} \quad f_{4,10,13}=\frac{1}{2}, \quad f_{8,13,14}=\frac{\sqrt{3}}{6}, \\
f_{2,5,7} &= \frac{1}{2} \quad f_{5,9,13}=-\frac{1}{2}, \quad f_{9,11,14}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \\
f_{2,11,13} &= -\frac{1}{2} \quad f_{5,10,14}=\frac{1}{2}, \quad f_{9,12,13}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \\
f_{2,12,14} &= -\frac{1}{2} \quad f_{6,7,8}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{10,11,13}=-\frac{\sqrt{3}}{3}, \\
f_{3,4,5} &= \frac{1}{2} \quad f_{6,9,12}=\frac{1}{2}, \quad f_{10,12,14}=\frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Fazendo uso destas constantes, obtemos:

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{9,9} &= R^{(2)}_{9,9}=\frac{4}{3} \\
R^{(1)}_{10,10} &= R^{(2)}_{10,10}=\frac{4}{3} \\
R^{(1)}_{11,11} &= R^{(2)}_{11,11}=\frac{4}{3} \\
R^{(1)}_{12,12} &= R^{(2)}_{12,12}=\frac{4}{3} \\
R^{(1)}_{13,13} &= R^{(2)}_{13,13}=\frac{4}{3} \\
R^{(1)}_{14,14} &= R^{(2)}_{14,14}=\frac{4}{3},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

e

$$\begin{aligned}
R^{(1)}_{ab} &= 0 \quad para \quad a \neq b \\
R^{(2)}_{ab} &= 0 \quad para \quad a \neq b.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Assim, chegamos à conclusão de que

$$R^{(1)}_{ab}=R^{(2)}_{ab}=\frac{4}{3}\delta_{ab}. \tag{4.16}$$

Deste modo, obtemos um tensor de Ricci nulo, se k obedecer a relação (4.7).

$\underline{Sp(4)/SU(2)}$:

Para o grupo $Sp(4)$, os vetores-raízes são dados por:

$$\begin{aligned} \rho(1) &= (1,0), \quad \rho(2) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{2}), \\ \rho(3) &= (0,1), \quad \rho(4) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Definindo agora os geradores Q_A de tal modo que

$$\begin{aligned} G_1 &= Q_1 + iQ_2, \quad G_{-1} = Q_1 - iQ_2, \\ G_2 &= Q_4 + iQ_5, \quad G_{-2} = Q_4 - iQ_5, \\ G_3 &= Q_6 + iQ_7, \quad G_{-3} = Q_6 - iQ_7, \\ G_4 &= Q_9 + iQ_{10}, \quad G_{-4} = Q_9 - iQ_{10}, \\ H_1 &= Q_3 \ \ H_2 = Q_4, \end{aligned} \tag{4.18}$$

chegamos às seguintes constantes de estrutura:

$$\begin{aligned} f_{1,2,3} &= 1 \ \ f_{2,6,10} = \frac{1}{2}, \quad f_{4,7,8} = \frac{1}{2}, \\ f_{1,5,10} &= \frac{1}{2} \ \ f_{3,5,6} = \frac{1}{2}, \quad f_{4,9,10} = \frac{1}{2}, \\ f_{1,6,9} &= -\frac{1}{2} \ \ f_{3,9,10} = -\frac{1}{2}, \quad f_{5,7,10} = \frac{1}{2}, \\ f_{2,5,9} &= \frac{1}{2} \ \ f_{4,5,6} = \frac{1}{2}, \quad f_{5,8,9} = -\frac{1}{2}, \\ f_{6,7,9} &= \frac{1}{2} \ \ f_{6,8,10} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Assim, as componentes do tensor de Ricci são dadas por:

$$
\begin{aligned}
R^{(1)}_{44} &= 0, \quad R^{(2)}_{44} = 3 \\
R^{(1)}_{55} &= \frac{3}{4}, \qquad R^{(2)}_{55} = \frac{3}{2} \\
R^{(1)}_{66} &= \frac{3}{4} \qquad R^{(2)}_{66} = \frac{3}{2} \\
R^{(1)}_{77} &= 0 \qquad R^{(2)}_{77} = 3 \\
R^{(1)}_{88} &= 0 \qquad R^{(2)}_{88} = 3 \\
R^{(1)}_{99} &= \frac{3}{4} \qquad R^{(2)}_{99} = \frac{3}{2} \\
R^{(1)}_{99} &= \frac{3}{4} \qquad R^{(2)}_{99} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Vemos, então, que não é possível obtermos um tensor de Ricci nulo para o espaço quociente $Sp(4)/SU(3)$.

Referências

[1] J. Wess e B. Zumino, *Phys. Lett.* **B49** (1974) 52.

[2] S. Ferrara e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 413.

[3] A. Salam e J. Strathdee, *Ann. of Phys.* **141** (1982) 316.

[4] P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rep.* **68** (1981) 189.

[5] Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *"A Class of Two-dimensional Finite Field Theories"* in proceedings of Symposium on Anomalies, Geometry and Topology, edited by W. Bardeen e A. White, World Scietific, 1985.

[6] H. Ooguri e C. Vafa, em Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1389; *Nuc. Phys.* **B361** (1991) 469.

[7] G. Gibbons, *Nuc. Phys.* **B514** (1998) 603.

[8] J. Polchinski, *TASI Lectures on D-branes* **hep-th/9611050**.

[9] M. Gasperini, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 043503.

[10] D. Friedan, *Phys. Rev. Let.* **45** (1980) 1057.

[11] B. Zumino, *Phys. Let.* **87 B** (1979) 203.

[12] L. Alvarez-Gaumé, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 846; *Phys. Lett.* **94B** (1980) 171, *Comm. Math. Phys.* **80** (1981) 443; L. Alvarez-Gaumé, D. Z. Freedman e S. Mukhi, *Ann. Phys.* **134** (1981) 85.

[13] D. Freedman e P. K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B117** (1981) 282.

[14] U. Lindström e M. Roček, *Nucl. Phys.* **B22** (1983) 285.

[15] S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239; C. G. Callan Jr., S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, *ibid.* **177** (1969) 2247; E. Cremmer, S. Ferrrara, L. Girardello e A. Van Proyen, *Phys. Let.* **116 B** (1982) 231 e *Nucl. Phys* **B 212** (1983) 413.

[16] G. Moore e P. Nelson, *Phys. Rev. Let.* **53** (1984) 1519.

[17] Brezin e Zin-Justin, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 2615.

[18] M. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1063.

[19] D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.***54**(1985) 502; D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec and R. Rohm, *Nucl. Phys.***256**(1985) 253; C. G. Callan, D. Friedan, E. Martinec e M. Perry, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 593; E. Fradkin e A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B261** (1985) 1.

[20] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, *Nucl. Phys.***B258**(1985) 46;

C. M. Hull, *Nucl. Phys.*__B260__(1985) 182 and *Nucl. Phys.*__B267__(1986) 266;

A. Sen, *Phys. Rev.*__D32__(1985) and *Phys. Rev. Lett.*__55__(1985) 1846.

[21] M. S. Góes-Negrão, J. A. Helyël-Neto e A. B. Penna-Firme: trabalho em progresso.

[22] C. M. Hull and E. Witten, *Phys. Lett.*__160B__(1985) 398.

[23] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *" Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry"* (Benjamin/ Cummings, Readings, MA, 1983).

[24] J. Bagger e E. Witten, *Phys. Let.* **118 B** (1982) 103; J. Bagger, *Nucl. Phys.* **B 211** (1983) 302; C. M. Hull, A. Karlhede, U. Lindström e M. Roček, *Nucl. Phys.* **B 266** (1986) 1.

[25] Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B 262** (1985) 439.

[26] T. Watanabe e H. Otsu, *Prog. Theor. Phys.* **65** (1981) 164.

[27] S. Mukhi, "Non-linear Sigma Model, scale invariance and string theories: A pedagogical review", Summer Workshop in High Energy Physics and Cosmology, ICTP, Trieste, 1986.

[28] K. Hayashi, *Phys. Lett.* **44**, (1973) 497.

[29] M. Kalb e P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2273.

[30] E. Cremmer e J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 117.

[31] Y. Nambu, *Phys. Rep.* **23** (1976) 250.

[32] M. Henneaux, S. P. Sorella, O. S. Ventura, C. Sasaki, V. Lemos e L. C. Q. Vilar *Phys. Lett.* **B410** (1997) 195.

[33] M. Sakamoto, *Phys. Lett.*B**151**(1985) 115.

[34] M. Porrati and E. T. Tomboulis, *Nucl. Phys.*B **315**(1989) 615;
J. Quackenbush, *Phys. Lett.*B**234**(1990) 285.

[35] N. Chair, J. A. Helayël-Neto and A. William Smith, *Phys. Lett.*B **233**(1989) 173.

[36] C. A. S. Almeida and R. M. Doria, **CBPF-NF-032-90**

[37] M. Dine and N. Seiberg, , *Phys. Lett.*180B(1986) 364.

[38] R. Brooks. F. Muhammad and S. J. Gates Jr., *Nucl. Phys.*B**268**(1986) 599.

[39] C. A. S. Almeida, J. A. Helayël-Neto and A. William Smith, *Mod. Phys. Lett.*A**6**(1991) 1397 and *Phys. Lett.***279**B(1992) 75.

"CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DOS MODELOS-SIGMA SUPERSIMÉTRICOS"

MAURO SÉRGIO GÓES NEGRÃO

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdala Helayel Neto/CBPF

Cláudio Maia Porto/UFRJ

João Barcelo Neto/UFRJ

Raykov Paounov/CBPF

Sebastião Alves Dias/CBPF

Rio de Janeiro, 01 de outubro de 1999