

TESE DE

MESTRADO

Anomalia de Calibre

na

Eletrodinâmica Quiral em  $d = 4$

Márcia Moutinho

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, OUTUBRO DE 1999

# DEDICATÓRIA

*Aos meus pais,  
Marcelino Moutinho (in memoriam)  
e Aurora Moutinho.*

## AGRADECIMENTOS A:

- Tião, pela confiança, orientação, *paciência* e pelas críticas duras e incisivas. Mas principalmente pela honestidade, carinho e pelos grandes momentos rubro-negros no Maraca.
- A. L. M. A. Nogueira, grande rubro-negro, meu amigo, meu confidente e um exemplo de profissional.  
E a Leon Manssur, *death metal man*, cabeludo, mas dono de uma paciência infinita. Pelas longas discussões (na verdade, grandes aulas) e por todo o tempo dispensado com as contas desta tese.
- Sérgio e Tito (Faísca e Fumaça) pela força na computação algébrica.
- Rodolfo Casana, que atuou numa época crítica.
- Marcellão, pelos desenhos que estão nesta tese e por muitas discussões nos estágios iniciais.
- Vitor e Ozemar, por me tirarem do sufoco.
- Pessoal do chá, Martin, Robson, Santini, Tonini, Wagner...

- Todo o pessoal do DCP, Rô, Beth, Eliseth, Helayël, Leite Lopes, Caride e Susana e a toda a galera que circula pelo departamento.
- MT<sup>2</sup>, minha grande incentivadora e madrinha, pelo muito que me ensinou...
- Antonio Cesar, amigo de todas as horas. Por antepenúltimo, mas sempre em primeiro lugar.
- Minhas quatro Marias: Maria Aurora, Maria Carolina, Maria Fernanda e Maria Elaine, por estarem sempre presentes.
- C. R. Flamengo, Campeão do Mundo e Penta Campeão Brasileiro: "...na regata ele me mata, me maltrata, me arrebatava, de emoção no coração..."

## RESUMO

Integrando funcionalmente sobre férmions com acoplamento quiral ao campo eletromagnético (em quatro dimensões), encontramos uma ação efetiva classicamente finita. Sob a hipótese de que não sejam geradas correções quânticas que dependam de potências ímpares do campo de calibre, mostramos o cancelamento quântico da anomalia na simetria de calibre.

# ABSTRACT

By functionally integrating over fermions with a chiral coupling to the gauge fields (in four dimensions), we find an effective action classically finite. Under the hypothesis that there are no quantum corrections to this action which depend on odd powers of the gauge field, we show the quantum cancellation of the gauge anomaly.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Diagramas de Feynmann relativos ao determinante fermiônico (pag. 17).

# ÍNDICE

|   |           |
|---|-----------|
| Dedicatória . . . . .   | i         |
| Agradecimentos . . . . .  | ii        |
| Resumo . . . . .  | iv        |
| Abstract . . . . .  | v         |
| Lista de Figuras . . . . .  | vi        |
| Índice . . . . .  | viii      |
| <br>  |           |
| <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| <br>  |           |
| <b>1 Argumentos Formais para o Cancelamento da Anomalia de Calibre</b>        | <b>5</b>  |
| 1.1 Formulação invariante de calibre . . . . .                                | 5         |
| 1.2 Cancelamento da anomalia no formalismo invariante de<br>calibre . . . . . | 11        |
| <br>  |           |
| <b>2 Cancelamento da Anomalia de Calibre para Férmions Quirais</b>            | <b>16</b> |
| 2.1 Regularização da ação efetiva: o método de Pauli-Villars . . . . .        | 16        |
| 2.1.1 Cancelamento dos <i>loops</i> de ordem ímpar . . . . .                  | 18        |
| 2.1.2 Regularização da ação efetiva . . . . .                                 | 20        |



|                                  |   |           |
|----------------------------------|---|-----------|
| 2.1.3                            | Regularização do <i>loop</i> de 2 pernas . . . . .                    | 22        |
| 2.1.4                            | Regularização do <i>loop</i> de quatro pernas . . . . .               | 29        |
| 2.2                              | Renormalização da divergência do <i>loop</i> de duas pernas . . . . . | 37        |
| 2.3                              | Cancelamento da anomalia . . . . .                                    | 40        |
| <b>Conclusão</b>                 |   | <b>45</b> |
| <b>Apêndice: Integrais Úteis</b> |   | <b>48</b> |

# INTRODUÇÃO

As teorias de campo que pretendem fornecer uma descrição realista de três das quatro interações fundamentais são baseadas no *princípio de calibre* [1]. Este princípio pressupõe que simetrias globais (parametrizadas por constantes, independentes do ponto  $x$  do espaço-tempo), identificadas devido à existência de um certo conjunto de quantidades conservadas nestas interações, sejam promovidas a simetrias locais (com parâmetros dependentes de  $x$ ). Isto organiza e norteia a construção de Lagrangeanas para as interações em questão, as quais, naturalmente refletem as simetrias observadas na natureza [2] [3].

A simetria de calibre foi descoberta primeiramente no Eletromagnetismo, onde se mostrou fundamental para que se pudesse obter uma versão quântica da teoria, escrita em termos de campos com propriedades de transformação bem definidas sob o grupo de Lorentz. Um fóton físico tem dois graus de liberdade (expressos nas duas polarizações linearmente independentes da luz), enquanto o potencial vetor  $A_\mu$  envolve quatro funções a serem determinadas pelas equações de movimento (duas a mais, portanto, do que seria necessário). A simetria de calibre, refletindo a presença de vínculos na teoria, permite a redução às duas componentes requeridas, de maneira completamente consistente com a necessidade de covariância sob o grupo de Lorentz [4].

Posteriormente, na formulação da versão quântica desta teoria, na qual as fontes do campo eletromagnético se incorporavam dinamicamente ao sistema, pode-se observar que existe uma quantidade conservada em função da versão global da simetria  $U(1)$ , característica do Eletromagnetismo: a carga elétrica. Esta quantidade faz, então, o papel de gerador do grupo de simetria em questão, representado unitariamente no espaço de Fock do sistema. Isto é tudo o que precisamos para identificar a simetria  $U(1)$  como uma simetria também no nível quântico. Embora possam existir problemas para definir os elementos de matriz deste gerador, tais problemas podem ser superados com a renormalização da teoria, que mostrou ser possível tal definição sem afetar esta implementação unitária do grupo de simetria no espaço de estados [5].

Contudo, tal implementação de simetrias de calibre nem sempre parece ser possível. Teorias envolvendo férmions de Weyl [6], por exemplo, fornecem uma ação efetiva que não exhibe a simetria de calibre clássica da teoria. Por meio de métodos de cohomologia [7], mostra-se que, *sem integrar sobre os campos de calibre*, a quantidade responsável pela não invariância da ação efetiva é um cociclo não trivial no espaço dos polinômios de campos de calibre. Isto impede que esta *anomalia* seja removida, através da redefinição usual da ação efetiva, pela adição de contratermos locais nos campos da teoria. Sendo assim, as identidades de Slavnov-Taylor estariam comprometidas, o que arruinaria a tentativa de definir a teoria, ao menos no nível perturbativo, através da renormalização.

Um passo importante no sentido de esclarecer a situação acima descrita, foi dado por Faddeev e Shatashvili [8] (e posteriormente esmiuçado por Harada e Tsutsui [9], e Babelon, Schaposnik e Viallet [10]) na segunda metade da década de 80. Estes autores

mostraram que havia um mecanismo subjacente atuando na teoria, que podia promover a restauração da simetria de calibre. O mecanismo em questão se baseava na existência de graus de liberdade adicionais, puramente quânticos, os quais, ao serem levados em conta, produziam uma ação efetiva invariante de calibre. Uma consequência desta simetria, deveria ser a anulação da anomalia, quando fosse levado em conta o caráter quântico dos potenciais de calibre.

Exemplos em duas dimensões foram dados (o modelo de Schwinger, tanto para férmions de Weyl, quanto para o caso vetorial, mas anômalo [11]) e o cancelamento das anomalias foi explicitamente verificado. Entretanto, para dimensões arbitrárias (em particular para 4), tal cancelamento deve ser conferido caso a caso, dadas as dificuldades de definição quântica da teoria efetiva, obtida após a integração sobre os férmions. Em geral, a ação efetiva, escrita em termos dos potenciais de calibre, vai envolver infinitas potências de  $A_\mu$ , tornando a análise muito difícil para que se permita chegar rapidamente a uma conclusão sobre o cancelamento ou não.

Contudo, antes de chegar a este estágio, é preciso mostrar que a integração sobre os férmions pode ser feita sem problemas, definindo uma teoria efetiva em termos de  $A_\mu$  que faça sentido, ao menos no nível clássico (embora ainda tenha que ter uma versão quântica formulada). Na integração sobre os férmions, podem aparecer divergências que, se não conseguirmos remover pelos procedimentos usuais de renormalização, podem inviabilizar preliminarmente a própria definição da teoria efetiva clássica. Em um trabalho anterior [12], foi investigado o cancelamento da anomalia na simetria de calibre para uma teoria em 4 dimensões abeliana, onde havia o acoplamento usual (vetorial) entre férmions de

Dirac e o campo eletromagnético. Foi mostrado que a ação efetiva pode ser definida, ao menos no nível clássico, devido à possibilidade de renormalizar a divergência logarítmica e cancelar a divergência quadrática que apareciam da integração sobre os férmions. Isto abria a possibilidade de tentar considerar a teoria efetiva no nível quântico, onde se poderia provar definitivamente o cancelamento da anomalia.

Este é o contexto no qual se insere este trabalho. Investigamos uma teoria de calibre abeliana em quatro dimensões, onde férmions *quirais* interagem minimamente com o campo  $A_\mu$ . Pretendemos investigar a possibilidade de definição clássica da teoria efetiva, assim como o cancelamento formal da anomalia, neste contexto. Para isto, expomos, no capítulo 1 uma breve revisão sobre o cancelamento das anomalias, visto desde o ponto de vista de Harada e Tsutsui, com argumentos formais que sustentam este cancelamento para teorias abelianas em qualquer dimensão. No capítulo 2, particularizamos a análise para a teoria mencionada acima, calculando os termos que poderiam dar contribuições divergentes à ação efetiva. Mostramos que as divergências que aparecem podem ser canceladas (através da escolha cuidadosa da regularização) ou renormalizadas. O terreno está, então, preparado para a análise do cancelamento da anomalia na simetria de calibre. Mostramos que este cancelamento sempre ocorrerá, se não forem gerados dinamicamente termos ímpares no potencial  $A_\mu$ . No último capítulo, apresentamos nossas conclusões. Adicionamos um apêndice com integrais úteis aos cálculos realizados.

# 1. ARGUMENTOS FORMAIS PARA O CANCELAMENTO DA ANOMALIA DE CALIBRE

Neste capítulo, pretendemos motivar a investigação do cancelamento de anomalias na simetria de calibre em teorias de calibre abelianas em qualquer número de dimensões, com acoplamento quirral ou vetorial. Os argumentos apresentados não podem constituir uma prova deste cancelamento, dadas as dificuldades para definir quanticamente as teorias em questão, mas constituem motivação suficiente para um estudo caso a caso.

## 1.1. Formulação invariante de calibre

Sabemos que, numa teoria quanticamente invariante de calibre, o funcional gerador não é bem definido [13], devido às configurações de campos de calibre fisicamente equivalentes, que contribuem igualmente para o funcional gerador. Uma maneira de remover esta ambiguidade, e obter um funcional gerador bem definido é a utilização do procedimento de Faddeev-Popov. Isto permite a escolha de apenas uma configuração de campo em cada órbita de calibre, através da condição de fixação de *gauge*  $f[A_\mu] = 0$ , que tem solução única em cada órbita.

Vamos considerar uma teoria de calibre genérica, cuja ação  $I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$  seja dada por

$$\begin{aligned} I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] &= I_G[A_\mu] + I_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \\ &= \int dx \left( \frac{1}{2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + \int dx [\bar{\psi} D \psi], \end{aligned}$$

onde  $D$  é a derivada covariante,  $D = i\partial_\mu \gamma^\mu + eA_\mu \gamma^\mu$ . Os campos  $\psi$  podem representar espinores de Weyl ou de Dirac.

Com objetivo de analisar as consequências de uma eventual não invariância de calibre, vamos introduzir a identidade de Faddeev-Popov

$$\Delta_f[A_\mu] \int dg \delta[f(A_\mu^g)] = 1, \quad (1.1)$$

onde  $dg$  representa uma medida invariante sob o grupo de simetria de calibre em questão.

Escrevemos o funcional gerador da teoria, na ausência de fontes, sob a forma

$$Z = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left( \Delta_f[A_\mu] \int dg \delta[f(A_\mu^g)] \right) \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \quad (1.2)$$

Sob uma mudança na variável de integração  $A_\mu$ ,  $A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}}$ ,  $A_\mu^g \equiv g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g$  o funcional gerador torna-se

$$\begin{aligned} Z &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu^{g^{-1}} \left( \Delta_f[A_\mu^{g^{-1}}] \int dg \delta[f(A_\mu^{g^{-1}})^g] \right) \times \\ &\quad \times \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu dg \exp(iI[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu]), \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde usamos o fato de que  $\Delta_f [A_\mu] = \Delta_f [A_\mu^{g^{-1}}]$ ,  $I [\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu] = I [\psi, \bar{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}]$ , e definimos  $\mathcal{D}A_\mu = dA_\mu \Delta_f [A_\mu] \delta [f(A_\mu)]$ . Se pudéssemos redefinir os campos fermiônicos como

$$\psi \rightarrow \psi^g = g^{-1}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}^g = \bar{\psi}g, \quad (1.4)$$

de modo que  $d\psi d\bar{\psi} = d\psi^g d\bar{\psi}^g$ ,  $\psi^g$  e  $\bar{\psi}^g$  poderiam ser trocados por  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  e reobteríamos o funcional original. No caso de teorias invariantes de calibre isso é possível e os campos fermiônicos ficam independentes de  $g$ . Assim, a integral em  $dg$  é fatorizada, e o volume do grupo de *gauge* pode ser absorvido no fator de normalização.

Em geral, contudo, tal redefinição deve ser tratada com mais cuidado [9], uma vez que a medida fermiônica  $d\psi d\bar{\psi}$  não é invariante de calibre, mas se transforma com um jacobiano

$$\begin{aligned} d\psi d\bar{\psi} &= J [A_\mu, g^{-1}] d\psi' d\bar{\psi}' \\ &= \exp (i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}]) d\psi' d\bar{\psi}', \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}]$  é o chamado *funcional de Wess-Zumino*. A presença deste funcional é responsável pelo aparecimento de uma anomalia na simetria de calibre da teoria. Pode-se mostrar [14] que a conservação quântica da corrente de calibre é violada da maneira abaixo [12]:

$$\langle 0 | \mathcal{D}_\mu j^\mu | 0 \rangle = \left\langle 0 \left| i \frac{\delta \alpha_1}{\delta \theta(x)} [A_\mu, \theta_a^{-1}] \right|_{\theta=0} 0 \right\rangle \equiv \langle 0 | \mathcal{A} [A_\mu] | 0 \rangle,$$



onde  $\theta$  é definido por  $g = \exp(i\theta^a T_a)$  e  $j^\mu$  é um operador que se escreve em termos dos campos fermiônicos da teoria exatamente como a corrente clássica conservada em função da simetria de calibre e  $D_\mu$  é a derivada covariante.

Podemos escrever, então, a forma final do funcional gerador após a transformação de calibre:

$$Z = \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu dg \left( \exp iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] \right). \quad (1.6)$$

Notamos o aparecimento de novos graus de liberdade, expressos pelos parâmetros que caracterizam  $g$ ,

$$dg = \prod_a d\theta_a(x),$$

que são chamados *campos de Wess-Zumino*. Nosso próximo passo será mostrar que a ação efetiva, obtida após a integração nos graus de liberdade fermiônicos, e nos campos de Wess-Zumino, é invariante de calibre. Para tanto, definimos

$$\exp(iW[A_\mu]) = \det D[A_\mu]. \quad (1.7)$$

Portanto,

$$\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] = W[A_\mu^{g^{-1}}] - W[A_\mu], \quad (1.8)$$

e

$$\alpha_1 [A_\mu^h, g^{-1}] = W[A_\mu^{hg^{-1}}] - W[A_\mu^h] \quad (1.9)$$

$$= \alpha_1 [A_\mu, hg^{-1}] - \alpha_1 [A_\mu, h].$$

Definimos a *ação efetiva* integrando sobre os férmions e sobre os campos de Wess-Zumino,

$$\exp(iI_{eff}[A_\mu]) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} dg \left( \exp iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] \right). \quad (1.10)$$

Esta ação é invariante por transformações de calibre

$$\begin{aligned} \exp(iI_{eff}[A_\mu^h]) &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^h] + i\alpha_1 [A_\mu^h, g^{-1}]) \quad (1.11) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp\left(iI[\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A_\mu] + \right. \\ &\quad \left. + i\alpha_1 [A_\mu, hg^{-1}] - i\alpha_1 [A_\mu, h]\right) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1 [A_\mu, hg^{-1}]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} d(gh^{-1}) \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] - \\ &\quad - i\alpha_1 [A_\mu, (gh^{-1})^{-1}]) \\ &= \exp(iI_{eff}[A_\mu]). \end{aligned}$$

O formalismo aqui apresentado é chamado *formalismo invariante de calibre*, devido à invariância de calibre da ação efetiva. Neste contexto podemos mostrar (formalmente) o cancelamento da anomalia para teorias abelianas, o que faremos na próxima seção.

Como exemplos, apresentamos dois casos do formalismo que descrevemos. O modelo de Schwinger [15] e o modelo de Schwinger quiral [16]. Em ambos, podem ser integrados exatamente [17] os graus de liberdade fermiônicos, por serem modelos bidimensionais. Os resultados são, respectivamente:

$$W^S [A_\mu] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu \left[ \frac{(a+1)}{2} \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu \right\} \quad (1.12)$$

e

$$W^{SQ} [A_\mu] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{8\pi} A_\mu \left[ a\eta^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\alpha} + \epsilon^{\mu\alpha}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (\eta^{\beta\nu} - \epsilon^{\beta\nu}) \right] A_\nu \right\}. \quad (1.13)$$

O parâmetro  $a$  representa uma ambiguidade no cálculo dos determinantes fermiônicos associados às duas teorias. Os termos de Wess-Zumino podem ser calculados facilmente utilizando o resultado (1.8) e as expressões (1.12) e (1.13)

$$\alpha_1^S [A_\mu, \theta] = \frac{a-1}{\pi} \int d^2x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \theta) (\partial^\mu \theta) + e\theta \partial_\mu A^\mu \right) \quad (1.14)$$

e

$$\alpha_1^{SQ} [A_\mu, \theta] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left( \frac{(a-1)}{2} (\partial_\mu \theta) (\partial^\mu \theta) - e\theta ((a-1) \partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) \right). \quad (1.15)$$

Uma integração sobre o campo de Wess-Zumino produz ações efetivas similares,

$$I_{eff} [A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} \square^{-1} (\square + m^2(a)) F^{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

explicitamente invariantes de calibre, de acordo com o que foi demonstrado em geral. A constante  $m^2(a)$  varia de um modelo para o outro. Para o modelo de Schwinger ela é

$$m^2(a) = \frac{(a+1)e^2}{2\pi}, \quad (1.17)$$

enquanto que, para o modelo de Schwinger quirral,

$$m^2(a) = \frac{a^2 e^2}{4\pi(a-1)}. \quad (1.18)$$

## 1.2. Cancelamento da anomalia no formalismo invariante de calibre

Vamos agora mostrar o cancelamento formal da anomalia, no caso abeliano. Veremos, nesta seção, como a anomalia é cancelada exatamente em teorias bidimensionais. Em quatro dimensões, no entanto, o cancelamento da anomalia depende da possibilidade de definição quântica da ação efetiva.

O valor esperado da anomalia é dado por (da referência [12] temos:  $\mathcal{A}[A_\mu] = i \frac{\delta}{\delta\theta} \alpha[A_\mu, \theta^{-1}]$ )

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}[A_\mu] \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \quad (1.19)$$

Introduzindo o 1 de Faddeev-Popov e fazendo uma mudança de variáveis no campo  $A_\mu$ ,  $A_\mu \rightarrow A_\mu^{\theta^{-1}}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A} \rangle &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}[A_\mu^{\theta^{-1}}] \left( \Delta_f[A_\mu] \int d\theta \delta[f(A_\mu)] \right) \times \\ &\times \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1[A_\mu, \theta^{-1}]). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Para obtermos uma expressão que relacione diretamente a anomalia com a ação efetiva, utilizamos a relação entre o termo de Wess-Zumino  $\alpha_1$  e  $W[A_\mu]$  dada pela (1.8)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= i \left. \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta(x)} \right|_{\theta=0} \\
&= i \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta \theta(x)} \right|_{\theta=0} \\
&= i \int dz \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \frac{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)}{\delta \theta(x)} \right|_{\theta=0} \\
&= i \int dz \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \left( \frac{1}{e} \partial_\mu^z \delta(z-x) \right) \right|_{\theta=0} \\
&= -\frac{i}{e} \left. \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} \right|_{\theta=0},
\end{aligned} \tag{1.21}$$

o que nos dá, calculada em  $\theta = 0$ , uma expressão para a anomalia totalmente definida em termos do funcional  $W[A_\mu]$ :

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu]}{\delta A_\mu(x)}. \tag{1.22}$$

Para a transformada de calibre da anomalia, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\theta^{-1}} &= -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} \\
&= -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} \\
&= i \int dz \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \left( \frac{1}{e} \partial_\mu^z \delta(z-x) \right) \\
&= i \int dz \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \frac{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)}{\delta \theta(x)}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$= i \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta(x)},$$

e podemos escrever a integral funcional que define o valor esperado da anomalia:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^S \rangle &= \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \left( \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta(x)} \right) \times \\ &\quad \times \exp (iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^S [A_\mu, \theta^{-1}]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \frac{\delta}{\delta \theta(x)} \exp (iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^S [A_\mu, \theta^{-1}]) \\ &= \int d\theta \frac{\delta}{\delta \theta(x)} F[\theta] = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Como veremos nos exemplos a seguir esta demonstração do cancelamento da anomalia é válida para teorias em duas dimensões, como o modelo de Schwinger e o modelo de Schwinger quiral. Entretanto, em quatro dimensões, se vamos trabalhar com a teoria efetiva, devemos primeiramente, nos preocupar com a definição desta teoria, obtida após integração sobre os férmions.

A seguir apresentamos dois exemplos de como a anomalia é cancelada de forma simples e precisa. No modelo de Schwinger a anomalia é dada por:

$$\mathcal{A}^S [A_\mu] = -ie \frac{(a-1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu \tag{1.25}$$

e

$$\langle \mathcal{A}^S \rangle = -i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left( e \frac{(a-1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu \right) \exp (iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu]).$$

Após introduzirmos o 1 de Faddeev-Popov e aplicarmos uma transformação,  $A^\mu \rightarrow A_\mu^{\theta^{-1}}$ , nos campos de calibre, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}^S [A_\mu] \rangle &= -i \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \left( \frac{e(a-1)}{\pi} \left[ \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \square \theta \right] \right) \times \\
&\times \exp (iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^s [A_\mu, \theta^{-1}]).
\end{aligned} \tag{1.26}$$

É imediato ver que o segundo termo entre parênteses é exatamente a derivada funcional, em relação a  $\theta$ , do funcional de Wess-Zumino (vide expressão (1.14) do capítulo anterior).

A integração nos graus de liberdade dos férmions produz um determinante fermiônico finito. A integração sobre os campos  $A_\mu$  envolve apenas integrais gaussianas cujo resultado também é finito. O funcional de  $\theta$  restante é, portanto, perfeitamente bem definido e finito, e a última integração fornece apenas um termo de fronteira na variedade dos campos, que se supõe ser nulo (corresponde às configurações limite na integral funcional, que, em geral, são tomadas como identicamente nulas - lembremo-nos de que as condições de contorno físicas completam a definição da integral funcional).

Como segundo exemplo apresentamos o modelo de Schwinger quiral onde a anomalia é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{SQ} [A_\mu] &= \frac{i}{4\pi} \left( -\frac{(a-1)}{2} \square \theta - e(a-1) \partial_\mu A^\mu - e\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right) \\
&= i \frac{\delta \alpha_1^{SQ} [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta(x)}.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

O valor esperado pode ser calculado exatamente, como no caso anterior, e o resultado que obtemos é o cancelamento da anomalia.

$$\langle \mathcal{A}^{SQ} [A_\mu] \rangle = 0. \quad (1.28)$$

Naturalmente, esses valores esperados também podem ser calculados diretamente, sem integração sobre os férmions, fornecendo o mesmo resultado. Em ambos os exemplos, as teorias obtidas após a integração sobre os férmions são lineares em  $A_\mu$ , o que faz com que a sua definição quântica seja garantida. Como veremos a seguir, isso não acontece com teorias em quatro dimensões onde a integração sobre os férmions produz não linearidade de ordem arbitrária na teoria resultante.



## 2. CANCELAMENTO DA ANOMALIA DE CALIBRE PARA FÉRMIONS QUIRAIS

Neste capítulo, vamos investigar o cancelamento da anomalia dentro do contexto de uma teoria de calibre abeliana, em quatro dimensões espaço-temporal, com acoplamento quiral. É sabido que as anomalias de calibre, para estas teorias, não são passíveis de absorção, via redefinição dos contratermos de renormalização. Isto é usualmente utilizado como argumento para a má definição quântica destas teorias. Como veremos, temos evidências de que a situação seja bem mais complexa, o que inviabilizaria conclusões como a mencionada acima.

### 2.1. Regularização da ação efetiva: o método de Pauli-Villars

Vamos aplicar as técnicas apresentadas, numa teoria de calibre com férmions não massivos e acoplamento quiral, em quatro dimensões espaço-temporal, cuja lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + eA\mathbb{P}_+)\psi,$$

com  $\mathbb{P}_+ = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)$ ,  $\psi$  um espinor de Dirac e  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , sendo  $\gamma^\mu$  as matrizes de Dirac. Esta teoria é completamente equivalente a uma outra em que  $\psi = \psi_R + \psi_L$ , com

$\psi_R$  livre e  $\psi_L$  acoplado minimamente ao campo  $A_\mu$ . O funcional  $W[A_\mu]$  tem a seguinte expansão em um *loop*:

$$i W[A_\mu] = \text{Diagram 1} + \frac{1}{2} \text{Diagram 2} + \frac{1}{3} \text{Diagram 3} + \frac{1}{4} \text{Diagram 4} + \dots$$

Figura 2.1: Diagramas de Feynman relativos ao determinante fermiônico.

Para uma teoria qualquer, em quatro dimensões, o grau de divergência superficial  $d$  de um gráfico de Feynmann, em um *loop*, é:

$$d = 4 - \frac{3}{2}E_f - E_b,$$

onde  $E_f$  é o número de férmions externos, e  $E_b$  o número de bósons externos.

Calculando  $d$  para cada termo da figura 2.1, por exemplo, os gráficos com seis e oito pernas externas, vemos que  $d_6 = -2$  e  $d_8 = -4$ . Portanto, estes termos são finitos, assim como todos os de ordem par, com mais de oito pernas externas.

Para os *loops* de duas e quatro pernas,  $d_2 = 2$  e  $d_4 = 0$ , o que representa uma

divergência superficial quadrática e uma logarítmica, respectivamente. E indica a necessidade de regularização (seções 2.1.3 e 2.1.4) e, eventualmente, posterior renormalização. Os gráficos de ordem ímpar são nulos, conforme mostraremos na próxima seção.

### 2.1.1. Cancelamento dos *loops* de ordem ímpar

Vamos mostrar (teorema de Furry [2]) que os *loops* de ordem ímpar não contribuem para a ação efetiva. Para tanto, consideremos um *loop* de  $2n + 1$  pernas:

$$I_{2n+1} = \int d\nu A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \text{tr}[\mathbb{P}_+ G_F(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} \times \quad (2.1)$$

$$\times G_F(x_2 - x_3) \gamma^{\mu_3} G_F(x_3 - x_4) \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}} G_F(x_{2n+1} - x_1) \gamma^{\mu_1}],$$

onde  $d\nu = dx_1 dx_2 \cdots dx_{2n+1}$  e  $\mathbb{P}_+ = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)$ . As matrizes de Dirac satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz  $C$  tal que

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t,$$

onde  $\gamma_\mu^t$  é a matriz transposta de  $\gamma_\mu$ . Como consequência, podemos escrever:

$$C G_F(x_n - x_{n+1}) C^{-1} = -G_F^t(x_n - x_{n+1}), \quad (2.2)$$

$$G_F(x_n - x_{n+1}) = C^{-1} G_F^t(x_{n+1} - x_n) C,$$

uma vez que  $G_F(x - y) = -G_F(y - x)$ .

Para a matriz  $\gamma^5$ , considerando  $C = i\gamma^0\gamma^2$ , temos

$$\begin{aligned}
C^{-1}\gamma^{5t}C &= iC^{-1}\gamma^{3t}\gamma^{2t}\gamma^{1t}\gamma^{0t}C \\
&= iC^{-1}C\gamma^{3t}C^{-1}C\gamma^{2t}C^{-1}C\gamma^{1t}C^{-1}C\gamma^{0t}C^{-1}C \\
&= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
&= \gamma^5.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Substituindo (2.3) e (2.2) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \int dv A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \operatorname{tr}[\mathbb{P}_+ C^{-1} C G_F(x_1 - x_2) C^{-1} C \gamma^{\mu_2} \times \\
&\quad \times C^{-1} C G_F(x_2 - x_3) C^{-1} C \gamma^{\mu_3} C^{-1} C \cdots C^{-1} C \gamma^{\mu_{2n+1}} C^{-1} C \times \\
&\quad \times G_F(x_{2n+1} - x_1) C^{-1} C \gamma^{\mu_1} C^{-1} C] \\
&= - \int dv A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \operatorname{tr}[\mathbb{P}_+ C^{-1} G_F^t(x_2 - x_1) \gamma^{\mu_2} \times \\
&\quad \times G_F^t(x_3 - x_2) \gamma^{\mu_3} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}} G_F^t(x_1 - x_{2n+1}) \gamma^{\mu_1} C].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= - \int dv A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \operatorname{tr}[\mathbb{P}_+ C^{-1} G_F^t(x_2 - x_1) \gamma^{\mu_2} \times \cdots \\
&\quad \times G_F^t(x_3 - x_2) \gamma^{\mu_3} \cdots \gamma^{\mu_{2n+1}} G_F^t(x_1 - x_{2n+1}) \gamma^{\mu_1} C] \\
&= - \int dv A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \operatorname{tr}[C^t \gamma^{\mu_1} G_F(x_1 - x_{2n+1}) \times \cdots \\
&\quad \times \gamma^{\mu_{2n+1}} \cdots \gamma^{\mu_3} G_F(x_3 - x_2) \gamma^{\mu_2} G_F(x_2 - x_1) C^{-1t} \mathbb{P}_+^t]^t.
\end{aligned}$$

Mas, como  $C^t = -C$ ,  $C^{-1t} = -C^{-1}$  e  $\operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} A$ , temos

$$I_{2n+1} = - \int dv A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \text{tr}[\gamma^{\mu_1} G_F(x_1 - x_{2n+1}) \gamma^{\mu_{2n+1}} \times \\ \times \gamma^{\mu_3} G_F(x_3 - x_2) \gamma^{\mu_2} G_F(x_2 - x_1) \mathbb{P}_+].$$

Comutando  $\mathbb{P}_+$  com os propagadores e as matrizes de Dirac e trocando os índices  $1 \rightarrow 2n+1, 2 \rightarrow 2n, \dots, 2n \rightarrow 2, 2n+1 \rightarrow 1$  em  $I_{2n+1}$ , finalmente obtemos

$$I_{2n+1} = -I_{2n+1} = 0. \quad (2.4)$$

Portanto, *loops* com número ímpar de pernas externas não contribuem para a ação efetiva.

### 2.1.2. Regularização da ação efetiva

Sabe-se que a utilização de uma regularização do tipo Pauli-Villars não é capaz de lidar com todas as divergências presentes numa teoria de calibre [18]. Isso se deve ao fato de, usualmente, querermos preservar a simetria de calibre durante a regularização, o que força a utilização da derivada covariante na definição dos propagadores regularizados, ao invés da derivada convencional. A cada campo de Pauli-Villars adicional introduzido, novos vértices de interação com o campo  $A^\mu$  se fazem presentes, exigindo mais campos de Pauli-Villars e assim sucessivamente.

Para o tipo de problema em que estamos interessados, contudo, *precisamos* de um esquema de regularização que quebre a simetria de calibre, para que a anomalia tenha chance de aparecer. Além disso, é sabido que não há nenhum esquema de regularização

que preserve a simetria de calibre, no caso de teorias com acoplamentos quirais. Isto faz com que possamos usar o esquema de Pauli-Villars sem restrições, abrindo a possibilidade concreta de regularizar a teoria assim.

Vamos usar o método de Pauli-Villars na sua versão generalizada, onde vários campos são introduzidos, fazendo a seguinte mudança no propagador fermiônico:

$$\left(\frac{1}{\not{k}}\right)' = \frac{1}{\not{k}} - \sum_n \frac{C_n}{\not{k} - M_n}. \quad (2.5)$$

O índice  $n$  indica o  $n$ -ésimo campo de Pauli-Villars, de massa  $M_n$  e resíduo  $C_n$ . Como é usual, impomos condições de convergência sobre os coeficientes, que visam melhorar o comportamento ultravioleta do propagador regularizado:

$$\begin{aligned} \sum_n C_n &= 1, \\ \sum_n C_n M_n &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Com o auxílio destas duas condições, podemos mostrar que o comportamento ultravioleta do propagador fermiônico é precisamente o necessário para regularizar os *loops* divergentes na expansão da ação efetiva. Reescrevemos o propagador livre como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{k}} &= \frac{1}{\not{k}} + \sum_n \frac{C_n M_n}{k^2} \\ &= \sum_n C_n \frac{(\not{k} + M_n)}{k^2}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo essa expressão na equação (2.5), é fácil mostrar que

$$\left(\frac{1}{\not{k}}\right)' = \sum_n C_n \left(\frac{-\not{k}M_n^2 - M_n^3}{k^2(k^2 - M_n^2)}\right) \propto \frac{1}{k^3}. \quad (2.8)$$

Os *loops* de 2 e 4 pernas externas possuem divergências superficiais quadrática e logarítmica, respectivamente, sendo todos os demais *loops* superficialmente convergentes. Termos na ação efetiva que quebrem a simetria de calibre devem, portanto, ser provenientes destes dois gráficos, já que os outros serão explicitamente invariantes de calibre.

### 2.1.3. Regularização do *loop* de 2 pernas

O *loop* de duas pernas tem a seguinte estrutura:

$$L^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}^\mu(-p) \int d^4\tilde{k} \text{tr} \left[ \frac{1}{\not{k}} \gamma_\mu \mathbb{P}_+ \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma_\nu \mathbb{P}_+ \right] \tilde{A}^\nu(p). \quad (2.9)$$

Portanto, a integral que devemos regularizar é:

$$I_{\mu\nu}(p) = \int d^4\tilde{k} \text{tr} \left[ \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu \mathbb{P}_+ \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} \gamma_\nu \mathbb{P}_+ \right]. \quad (2.10)$$

Utilizando o método de Pauli-Villars reescrevemos os propagadores como:

$$\frac{\not{k}}{k^2} \rightarrow \frac{\not{k}}{k^2} - \sum_n C_n \frac{(\not{k} + M_n)}{(k^2 - M_n^2)},$$

e a integral fica:

$$I_{\mu\nu}(p) = \int d^4\tilde{k} \text{tr} \left\{ \left( \frac{\not{k}}{k^2} - \sum_n C_n \frac{(\not{k} + M_n)}{(k^2 - M_n^2)} \right) \gamma_\mu \mathbb{P}_+ \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} - \sum_m C_m \frac{(\not{k} + \not{p} + M_m)}{(k+p)^2 - M_m^2} \right) \gamma_\nu \mathbb{P}_+ \right\}.$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) = & \int d^4\tilde{k}tr \left\{ \frac{\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{k^2(k+p)^2} - \sum_m C_m \frac{\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{k^2((k+p)^2 - M_m^2)} - \right. \\
& - \sum_m C_m \frac{M_m\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{k^2((k+p)^2 - M_m^2)} - \sum_n C_n \frac{\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)(k+p)^2} + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \frac{\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} + \sum_{mn} C_m C_n \times \\
& \times \frac{M_m\not{k}\gamma_\mu\mathbb{P}_+\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} - \sum_n C_n \frac{M_n\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)(k+p)^2} \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \frac{M_n\gamma_\mu\mathbb{P}_+(\not{k}+\not{p})\gamma_\nu\mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} + \sum_{mn} C_m C_n \times \\
& \left. \times \frac{M_m M_n \gamma_\mu \mathbb{P}_+ \gamma_\nu \mathbb{P}_+}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} \right\}.
\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades do traço das matrizes de Dirac, encontramos

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) = & 2 \int d^4\tilde{k} \left\{ [(2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}(k^2 + k \cdot p)) + \right. \\
& + \frac{i}{2}(k^\alpha p^\beta - k^\beta p^\alpha) \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}] \times \left( \frac{1}{k^2(k+p)^2} - \right. \\
& - \sum_m C_m \frac{1}{k^2((k+p)^2 - M_m^2)} - \sum_n C_n \frac{1}{(k^2 - M_n^2)(k+p)^2} + \\
& \left. \left. + \sum_{mn} C_m C_n \frac{1}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Empregamos, então, a representação  $\alpha$  do propagador para podermos integrar em  $k$  (ver expressão (1) do apêndice)

$$I_{\mu\nu}(p) = 2 \int d^4\tilde{k} [(2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}(k^2 + k \cdot p)) +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2} (k^\alpha p^\beta - k^\beta p^\alpha) \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} \Big] \times \int d\alpha d\beta \left[ \exp (ik^2 (\alpha + \beta) + 2i\beta p \cdot k) \times \right. \\
& \times \left( 1 - \sum_n C_n (\exp (-i\beta M_n^2) + \exp (-i\alpha M_n^2)) + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{mn} C_m C_n \exp (-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2) \right) \times (\exp (i\beta p^2 - \varepsilon (\alpha + \beta))) \right],
\end{aligned}$$

obtendo (ver apêndice, expressão (9)),

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{8\pi^2} \int d\alpha d\beta \left\{ \exp \left( i\beta p^2 - \varepsilon (\alpha + \beta) - i \frac{\beta^2 p^2}{(\alpha + \beta)} \right) \times \left[ i \frac{\eta_{\mu\nu}}{(\alpha + \beta)^3} + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^4} - \frac{\beta}{(\alpha + \beta)^3} \right) \times (p^2 \eta_{\mu\nu} - 2p_\mu p_\nu) \right] \times \\
& \times \left( 1 - \sum_n C_n (\exp (-i\beta M_n^2) + \exp (-i\alpha M_n^2)) + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{mn} C_m C_n \exp (-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2) \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Vamos, agora, fazer a seguinte transformação nas variáveis  $\alpha$  e  $\beta$

$$\alpha = xy,$$

$$\beta = (1-x)y,$$

$$(2.11)$$

$$\int d\alpha d\beta = \int_0^1 dx \int_0^\infty dy y,$$

para obter

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{8\pi^2} (p^2 \eta_{\mu\nu} - 2p_\mu p_\nu) \left\{ \int_0^1 dx (x^2 - x) \int_0^\infty dy \frac{1}{y} \times \right. \\
& \times (\exp (i(x - x^2) p^2 y) - \exp (i((x - x^2) p^2 - (1-x) M_n^2) y)) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp(-\varepsilon y) + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \int_0^\infty dy \frac{1}{y} \times \\
& \times \left( \exp(i((x-x^2)p^2 - xM_n^2 - (1-x)M_m^2)y) - \right. \\
& \left. - \exp(i((x-x^2)p^2 - xM_n^2)y) \right) \times \exp(-\varepsilon y) \} + \\
& + i \frac{\eta_{\mu\nu}}{8\pi^2} \left\{ \sum_n C_n \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{1}{y^2} \left( \exp(i(x-x^2)p^2 y) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp(i((x-x^2)p^2 - (1-x)M_n^2)y) \right) \times \exp(-\varepsilon y) + \right. \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{1}{y^2} \times \\
& \times \left( \exp(i((x-x^2)p^2 - xM_n^2 - (1-x)M_m^2)y) - \right. \\
& \left. - \exp(i((x-x^2)p^2 - xM_n^2)y) \right) \times \exp(-\varepsilon y) \}.
\end{aligned}$$

Podemos utilizar as integrais (10) e (11) do apêndice para integrar em  $y$

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{4\pi^2} (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left\{ \sum_n C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \times \right. \\
& \times \ln \left[ \frac{(x-x^2)p^2 - (1-x)M_n^2 + i\varepsilon}{(x-x^2)p^2 + i\varepsilon} \right] + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \times \\
& \times \ln \left[ \frac{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 + i\varepsilon}{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 - (1-x)M_m^2 + i\varepsilon} \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{\eta_{\mu\nu}}{8\pi^2} \left\{ \sum_n C_n M_n^2 \int_0^1 dx x \times \right. \\
& \times \ln \left[ \frac{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 + i\varepsilon}{(x-x^2)p^2 - (1-x)M_n^2 + i\varepsilon} \right] - \\
& - \sum_{mn} C_m C_n M_n^2 \int_0^1 dx \times \\
& \times \ln \left[ \frac{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 - (1-x)M_m^2 + i\varepsilon}{(x-x^2)p^2 - (1-x)M_m^2 + i\varepsilon} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Notamos que a integral regularizada  $I_{\mu\nu}(p)$  contém uma parte que, ao ser contraída com os campos  $A^\mu$ , irá gerar uma contribuição invariante de calibre à ação efetiva, e outra não invariante de calibre que contribuirá à anomalia de calibre. Notamos também que, antes de fazermos  $M_n$  tender para o infinito, podemos escolher os coeficientes  $\alpha_n$ , que representam as relações entre as massas  $\alpha_n = M_n/M$ , e os  $C_n$  de tal modo que cancelem as divergências quadráticas presentes em  $I_{\mu\nu}(p)$ . Expandindo os logaritmos como função de  $M$  e tomando  $M$  muito grande obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) = & \frac{1}{4\pi^2} (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left\{ -\frac{1}{6} \sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| + \frac{1}{6} \ln |p^2| - \frac{1}{6} i\pi - \right. & (2.12) \\
& -\frac{1}{36} \sum_{mn} C_m C_n [5(\alpha_n^6 - \alpha_m^6) - 27\alpha_n^2 \alpha_m^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2) + \\
& + (18\alpha_n^2 \alpha_m^4 - 6\alpha_m^6) \ln \left( \frac{\alpha_n^2}{\alpha_m^2} \right)] \times \left( \frac{1}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} \right)^3 \left. \right\} + \\
& + \frac{\eta_{\mu\nu}}{8\pi^2} \left\{ \sum_{mn} C_m C_n \alpha_n^2 \left[ \left( 2 \ln \left( \frac{\alpha_m^2}{\alpha_n^2} \right) + \alpha_n^2 - \alpha_m^2 \right) \times \left( \frac{1}{2(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \right) \right] M^2 - \right. \\
& - \frac{1}{6} p^2 \sum_{mn} C_m C_n (3\alpha_n^8 - 13\alpha_n^6 \alpha_m^2 + 12\alpha_n^4 \alpha_m^4 - 3\alpha_m^6 \alpha_n^2 + \\
& + \alpha_m^8 + 6\alpha_n^4 \alpha_m^4 \ln \left( \frac{\alpha_n^2}{\alpha_m^2} \right)) \times \\
& \left. \times \left( \frac{1}{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2)^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2)^2 \alpha_m^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

A divergência quadrática pode ser cancelada impondo a condição

$$\sum_{m \neq n} C_m C_n S_{mn} = 0, \quad (2.13)$$

$$S_{mn} = \left( 2 \ln \left( \frac{\alpha_m^2}{\alpha_n^2} \right) + \alpha_n^2 - \alpha_m^2 \right) \times \left( \frac{1}{2(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \right). \quad (2.14)$$

A parte imaginária do resíduo no pólo, fornece a informação sobre o tipo de excitação propagada, associando a diferentes sinais propagações usuais e de *ghosts*. No caso de valor nulo da parte imaginária do resíduo do propagador no pólo, a informação que se apresenta é a da não propagação dos modos em questão. Tomar o resíduo como uma quantidade real, significa eliminar a propagação, evitando, portanto, problemas de unitaridade relacionados com a eventual propagação de um *ghost*.

Portanto, para evitar possíveis propagações dos campos de Pauli-Villars, desejamos que (2.13) tenha solução para  $C's$  e  $\alpha's$  reais. Resolvendo para  $\alpha_n$  e impondo as condições de convergência (2.6) verificamos serem dois campos de Pauli-Villars suficientes para (2.13) ter tal solução. Então, podemos, finalmente, fixar as condições impostas sobre os diversos coeficientes e razões entre as massas,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^2 C_n &= 1, \\ \sum_{n=1}^2 C_n \alpha_n &= 0, \\ \sum_{m \neq n} C_m C_n S_{mn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

A integral regularizada é, então:

$$I_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{4\pi^2} (p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left\{ -\frac{1}{6} \sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| + \frac{1}{6} \ln |p^2| - \frac{1}{6} i\pi - \frac{1}{6} \sum_{m \neq n} C_m C_n A_{mn} \right\} +$$

$$+ \frac{\eta_{\mu\nu}}{8\pi^2} p^2 \left( -\frac{1}{6} \sum_{m \neq n} C_m C_n B_{mn} \right),$$

com

$$A_{mn} = \frac{1}{6} \left( 5(\alpha_n^6 - \alpha_m^6) - 27\alpha_n^2 \alpha_m^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2) + (18\alpha_n^2 \alpha_m^4 - 6\alpha_m^6) \ln \left( \frac{\alpha_n^2}{\alpha_m^2} \right) \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} \right)^3$$

e

$$B_{mn} = \left( 3\alpha_n^8 - 13\alpha_n^6 \alpha_m^2 + 12\alpha_n^4 \alpha_m^4 - 3\alpha_m^6 \alpha_n^2 + \alpha_m^8 + 6\alpha_n^4 \alpha_m^4 \ln \left( \frac{\alpha_n^2}{\alpha_m^2} \right) \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{(\alpha_n^2 + \alpha_m^2)^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2)^2 \alpha_m^2 (\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \right).$$

Definindo

$$\alpha = -\frac{1}{6} \sum_{m \neq n} C_m C_n B_{mn}, \quad (2.16)$$

verificamos a presença de ambiguidades advindas do processo de regularização, similares às que aparecem em duas dimensões. Observamos que a parte divergente é apenas logarítmica, e aparece multiplicada por um projetor transverso, ou seja, corresponde a um termo invariante de calibre na ação efetiva. Assim, não irá contribuir para o jacobiano de uma transformação de calibre na integral funcional.

## Contribuição à anomalia do *loop* de duas pernas

No espaço dos momenta, o termo não invariante de calibre do *loop* regularizado que acabamos de calcular tem a forma:

$$L^{(2)} = -\frac{e^2\alpha}{16\pi^2} \int d\tilde{p}p^2 \tilde{A}_\nu(-p) \tilde{A}^\nu(p). \quad (2.17)$$

Passando ao espaço de configurações temos que:

$$L^{(2)} = \frac{e^2\alpha}{16\pi^2} \eta_{\mu\nu} \int dx \tilde{A}^\mu(x) \square \tilde{A}^\nu(x). \quad (2.18)$$

A contribuição à anomalia deste termo vem da derivada da ação efetiva em relação ao campo de calibre (veja eq. (1.22))

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(2)}[A] &= -\frac{i}{e} \partial_\mu^x \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left\{ -\frac{e^2\alpha}{16\pi^2} \int dx A_\nu(x) \square A^\nu(x) \right\} \\ &= \frac{e\alpha}{8\pi^2} \partial_\mu \square A^\mu(x). \end{aligned} \quad (2.19)$$

No espaço dos momenta, a anomalia é dada por:

$$\mathcal{A}^{(2)}[A] = -\frac{e\alpha}{8\pi^2} k^2 k \cdot \tilde{A}(k). \quad (2.20)$$

### 2.1.4. Regularização do *loop* de quatro pernas

O *loop* de quatro pernas tem a seguinte estrutura

$$L^{(4)} = -\frac{e^4}{4} \int d^4\tilde{p}d^4\tilde{q}d^4\tilde{r} \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}_\nu(-q) \tilde{A}_\alpha(p+q+r) \tilde{A}_\beta(-r) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int d^4 \tilde{k} tr \left\{ \frac{1}{\not{k}} \gamma^\mu \mathbb{P}_+ + \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma^\nu \mathbb{P}_+ + \frac{1}{\not{k} + \not{p} + \not{q}} \gamma^\alpha \mathbb{P}_+ \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\not{k} + \not{p} + \not{q} + \not{r}} \gamma^\beta \mathbb{P}_+ \right\}. \end{aligned}$$

Vemos claramente que a divergência presente nesta integral é do tipo logarítmico, concentrada na integral em  $k$ . Portanto, a integral que vamos regularizar é:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \int d^4 \tilde{k} tr \left\{ \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu \mathbb{P}_+ + \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} \gamma^\nu \mathbb{P}_+ + \frac{\not{k} + \not{p} + \not{q}}{(k+p+q)^2} \times \right. \\ & \left. \times \gamma^\alpha \mathbb{P}_+ + \frac{\not{k} + \not{p} + \not{q} + \not{r}}{(k+p+q+r)^2} \gamma^\beta \mathbb{P}_+ \right\}. \end{aligned}$$

Uma vez que integramos em  $k$ , vamos reescrever os momentos externos da seguinte forma:

$p + q \rightarrow q'$  e  $p + q + r \rightarrow r'$  o que simplifica a notação. Para regularizar a integral acima, vamos utilizar o método de Pauli-Villars. Reescrevendo o propagador regularizado conforme a equação (2.8)

$$\frac{\not{k}}{k^2} \rightarrow \sum_i C_i (\not{k} + M_i) \left\{ \frac{-M_i^2}{k^2 (k^2 - M_i^2)} \right\}, \quad (2.21)$$

obtemos a integral  $I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r)$  numa forma finita:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \times \\ & \int d^4 \tilde{k} tr \left\{ (\not{k} + M_i) \gamma^\mu \mathbb{P}_+ (\not{k} + \not{p} + M_j) \gamma^\nu \mathbb{P}_+ \times \right. \\ & \times (\not{k} + \not{q}' + M_n) \gamma^\alpha \mathbb{P}_+ (\not{k} + \not{r}' + M_m) \gamma^\beta \mathbb{P}_+ \left. \right\} \times \\ & \times \left[ \frac{M_i^2 M_j^2}{k^2 (k^2 - M_i^2) (k^2 + p^2) ((k^2 + p^2) - M_j^2)} \right] \times \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\times \left. \frac{M_m^2 M_n^2}{(k^2 + q'^2) ((k^2 + q'^2) - M_m^2) (k^2 + r'^2) ((k^2 + r'^2) - M_n^2)} \right].$$

Note que, na integral acima, a expressão entre chaves não terá contribuição de nenhum termo proporcional a  $M$ . Isso se dá pela anticomutação de  $\gamma^\mu$  com  $\gamma^5$ . Assim,  $\gamma^\mu \mathbb{P}_+ = \mathbb{P}_- \gamma^\mu$  e  $\mathbb{P}_+ \mathbb{P}_- = 0$ . Com esta observação, obtemos a seguinte integral:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \times \\ &\int d^4 \tilde{k} t r \{ \mathbb{P}_+ \not{k} \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q}') \gamma^\alpha (\not{k} + \not{r}') \gamma^\beta \} \times \\ &\times \left[ \frac{M_i^2 M_j^2}{k^2 (k^2 - M_i^2) (k^2 + p^2) ((k^2 + p^2) - M_j^2)} \times \right. \\ &\left. \times \frac{M_m^2 M_n^2}{(k^2 + q'^2) ((k^2 + q'^2) - M_m^2) (k^2 + r'^2) ((k^2 + r'^2) - M_n^2)} \right], \end{aligned}$$

totalmente finita em  $k$  no limite ultravioleta (para as diversas potências de  $k$ ). No  $\lim M \rightarrow \infty$  a integral acima se comporta como  $M^0$ . Portanto, há a possibilidade de uma *divergência logarítmica na massa* neste limite, contida no termo de maior potência em  $k$ , os outros termos sendo finitos ou nulos.

Note que a presença do operador  $\mathbb{P}_+$  no vértice desta teoria simplifica profundamente a integral que estamos regularizando. Pela discussão do último parágrafo, os termos entre chaves em (2.22) se reduzem a termos proporcionais aos momenta.

Na teoria vetorial, esta simplificação não acontece e haverá termos com  $M^n$  no numerador da integral, com  $n = 1, 2, 3, 4$ . No entanto, sabemos, por *power counting*, que a divergência máxima nesta integral é logarítmica, o que se constitui, aparentemente, em uma contradição. Após uma análise detalhada, concluímos que a representação do propa-



gador utilizada na equação (2.21) produz uma dependência em  $M^1$ , na teoria vetorial, em contraste com o propagador original regularizado, que dependia de  $M$  na forma  $M^{-1}$ . Isto se deve ao fato de termos somado quantidades nulas para obter a representação em questão (o que, por sua vez, é possível devido à escolha das condições de convergência). Isto faz com que apareçam termos de divergência *aparente* no limite em que  $M$  tende para o infinito. Estas divergências são eliminadas após o cálculo *completo* da integral do *loop* de quatro pernas, o que, além de ser uma tarefa extremamente complexa, está além das nossas motivações. Isto sugere que, na teoria vetorial, devemos usar outra representação para o cálculo da parte divergente no *loop* de quatro pernas.

Em contrapartida, para a renormalização da teoria quiral, basta calcularmos a seguinte integral:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \times tr \{ \mathbb{P}_+ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\theta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \} \times \\
&\times \int d^4 \bar{k} \{ (k_\lambda k_\rho k_\theta k_\sigma) \times \\
&\times \left[ \frac{M_i^2 M_j^2}{k^2 (k^2 - M_i^2) (k^2 + p^2) ((k^2 + p^2) - M_j^2)} \times \right. \\
&\times \left. \frac{M_m^2 M_n^2}{(k^2 + q'^2) ((k^2 + q'^2) - M_m^2) (k^2 + r'^2) ((k^2 + r'^2) - M_n^2)} \right] \} .
\end{aligned}$$

Escrevendo o termo entre colchetes na representação de Feynmann, obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
&\times tr \{ \mathbb{P}_+ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\theta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \} \int d^4 \bar{k} \{ (k_\lambda k_\rho k_\theta k_\sigma) \times
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int d\alpha d\beta d\gamma d\delta \times \\
& \times \exp(i\alpha(k^2 - aM_i^2) + i\beta((k+p)^2 - bM_j^2)) \times \\
& \times \exp(i\gamma((k+q')^2 - cM_m^2) + i\delta((k+r')^2 - dM_n^2)) \times \\
& \times \exp(-\varepsilon\omega),
\end{aligned}$$

e a integral em  $k$  pode ser facilmente calculada. O resultado é:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
& \times tr \{ \mathbb{P}_+ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\theta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \} \times \int d\alpha d\beta d\gamma d\delta \left\{ \left( \frac{\pi^2}{4\omega^4} \right) \times \right. \\
& \times e^{[-i(\alpha a M_i^2 + \beta b M_j^2 + \gamma c M_m^2 + \delta d M_n^2) + i(\beta p^2 + \gamma q'^2 + \delta r'^2) - \varepsilon\omega]} \times \\
& \times \{ \eta_{\sigma\lambda} \eta_{\theta\lambda} + \eta_{\sigma\theta} \eta_{\rho\lambda} + \eta_{\theta\rho} \eta_{\sigma\lambda} - \\
& - \frac{2i}{\omega} (\eta_{\sigma\lambda} \Sigma_\theta \Sigma_\rho + \eta_{\theta\lambda} \Sigma_\sigma \Sigma_\rho + \eta_{\rho\lambda} \Sigma_\sigma \Sigma_\theta + \eta_{\sigma\rho} \Sigma_\theta \Sigma_\lambda + \eta_{\sigma\theta} \Sigma_\sigma \Sigma_\lambda) - \\
& \left. - \frac{4}{\omega^2} (\Sigma_\lambda \Sigma_\rho \Sigma_\theta \Sigma_s) \right\} e^{-i\Sigma^2/\omega} \Big\},
\end{aligned}$$

onde  $\omega = \alpha + \beta + \gamma + \delta$  e  $\Sigma_\mu = \beta p_\mu + \gamma q'_\mu + \delta r'_\mu$ . Fazemos, então, a seguinte mudança de variáveis :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = stuw & 0 < t < 1, \\ \beta = stu(1-w) & 0 < w < 1, \\ \gamma = st(1-u) & 0 < u < 1, \\ \delta = s(1-t) & 0 < s < \infty, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

onde o jacobiano da transformação é  $J = s^3 t^2 u$ . Com as novas coordenadas, temos:

$$\omega = s,$$

$$\Sigma_\mu = s\sigma_\mu,$$

$$\sigma_\mu = tu(1-w)p_\mu + t(1-u)q'_\mu + (1-t)r'_\mu,$$

$$\chi = tu(1-w)p^2 + t(1-u)q'^2 + (1-t)r'^2,$$

e a integral fica:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
&\times tr \{ \mathbb{P}_+ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\theta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \} \times \\
&\times \int dw du dt^2 \int_0^\infty ds \left[ s^3 \left( \frac{\pi^2}{4s^4} \right) \times \right. \\
&\times \{ \eta_{\sigma\lambda} \eta_{\theta\lambda} + \eta_{\sigma\theta} \eta_{\rho\lambda} + \eta_{\theta\rho} \eta_{\sigma\lambda} - \\
&- \frac{2i}{s} (\eta_{\sigma\lambda} \sigma_\theta \sigma_\rho + \eta_{\theta\lambda} \sigma_\sigma \sigma_\rho + \eta_{\rho\lambda} \sigma_\sigma \sigma_\theta + \eta_{\sigma\rho} \sigma_\theta \sigma_\lambda + \eta_{\sigma\theta} \sigma_\sigma \sigma_\lambda) - \\
&- \frac{4}{s^2} s^4 (\sigma_\lambda \sigma_\rho \sigma_\theta \sigma_\sigma) \} \times \\
&\left. \times e^{-is\sigma^2 + is\chi - is \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 + (1-t)dM_n^2 \} - \epsilon s} \right].
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Note que, na integral acima, apenas o termo proporcional a  $1/s$  pode apresentar alguma divergência na integração sobre  $s$ . Os outros termos são finitos sob esta integração. Nestes termos, podemos expandir o integrando - após a integração em  $s$  - em potências de  $M$  e tomar o  $\lim M \rightarrow \infty$ . A integral que vai nos interessar é:

$$I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^4} \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
& \times \text{tr} \{ \mathbb{P}_+ \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\theta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \} (\eta_{\sigma\lambda} \eta_{\theta\lambda} + \eta_{\sigma\theta} \eta_{\rho\lambda} + \eta_{\theta\rho} \eta_{\sigma\lambda}) \times \\
& \times \int dw du dt t^2 \times \\
& \times \int_0^\infty ds \left[ \frac{1}{s} e^{-is\sigma^2 + is\chi - is} \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 + (1-t)dM_n^2 \} \right. \\
& \left. \times e^{-\varepsilon s} \right].
\end{aligned}$$

Nosso próximo passo será calcular o traço das matrizes de Dirac e contrair o resultado com a combinação das métricas que aparece no coeficiente da integral. Um fato importante acontece neste momento: a contração da parte quiral do traço (lembremo-nos que  $\mathbb{P}_+ = (1 + \gamma^5)/2$ ) com as métricas tem resultado nulo. Isto é, da mesma forma que no *loop* de duas pernas, a contribuição quiral é também cancelada no esquema de regularização de Pauli-Villars. O resultado é:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \frac{1}{4\pi^2} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) \times \\
&\times \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
&\times \int dw du dt t^2 \times \\
&\times \int_0^\infty ds \left[ \frac{1}{s} e^{-is\sigma^2 + is\chi - is} \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 + (1-t)dM_n^2 \} \right. \\
&\left. \times e^{-\varepsilon s} \right].
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Para podermos integrar em  $s$  vamos somar em  $d$ ,

$$I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) = \frac{1}{4\pi^2} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) \times \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
& \times \int dw du dt t^2 \times \\
& \times \int_0^\infty ds \left[ \frac{1}{s} \left\{ e^{-is\sigma^2 + is\chi - is \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 \} - \varepsilon s} \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{-is\sigma^2 + is\chi - is \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 + (1-t)M_n^2 \} - \varepsilon s} \right\} \right].
\end{aligned}$$

O resultado da integração é:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \frac{1}{4\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta\nu\alpha}) \times \\
& \times \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
& \times \int dw du dt t^2 \ln |\Omega|,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

onde

$$\Omega = \frac{-\sigma^2 + \chi - \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 + (1-t)M_n^2 \} + i\varepsilon}{-\sigma^2 + \chi - \{ utwaM_i^2 + tu(1-w)bM_j^2 + t(1-u)cM_m^2 \} + i\varepsilon}. \tag{2.30}$$

Podemos, agora, escrever  $M_i^2 = \alpha_i^2 M^2$  e expandir  $\ln |\Omega|$  em  $1/M^2$ . O termo divergente será:

$$\begin{aligned}
I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) &= \frac{1}{4\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta\nu\alpha}) \times \\
& \times \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
& \times \int dw du dt t^2 [\ln |(1-t)\alpha_n^2 M^2| - \ln |-\sigma^2 + \chi|].
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Constatamos a presença da divergência logarítmica na massa exatamente como esperávamos. Nosso último passo será substituir  $I_{div}^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r)$  na expressão do *loop* de quatro pernas :

$$\begin{aligned}
L^{(4)} = & -\frac{e^4}{16\pi^2} \int d^4\tilde{p}d^4\tilde{q}d^4\tilde{r} \left\{ \tilde{A}_\mu(-p) \tilde{A}_\nu(-q) \tilde{A}_\alpha(p+q+r) \times \right. & (2.32) \\
& \times \tilde{A}_\beta(-r) (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta\nu\alpha}) \times \\
& \times \sum_{i,j,m,n} C_i C_j C_m C_n \sum_{a,b,c,d=0}^1 (-1)^{a+b+c+d} \times \\
& \left. \times \int dwdu dt t^2 [\ln |(1-t)\alpha_n^2 M^2| - \ln |-\sigma^2 + \chi|] \right\},
\end{aligned}$$

e contrair as métricas com os campos bosônicos. O resultado da contração é:

$$\begin{aligned}
& \tilde{A}(-p) \cdot \tilde{A}(-q) \tilde{A}(p+q+r) \cdot \tilde{A}(-r) \\
& -2[\tilde{A}(-p) \cdot \tilde{A}(p+q+r) \tilde{A}(-q) \cdot \tilde{A}(-r)] \\
& +\tilde{A}(-p) \cdot \tilde{A}(-r) \tilde{A}(-q) \cdot \tilde{A}(p+q+r).
\end{aligned}$$

Trocando de variáveis,  $p \rightarrow r$ , no segundo termo, e  $r \rightarrow q$  no terceiro, observamos que os termos acima se anulam mutuamente. Isso mostra que o *loop* de quatro pernas é totalmente *finito*.

## 2.2. Renormalização da divergência do *loop* de duas pernas

Como vimos, após a regularização, apenas o *loop* de duas pernas ainda apresenta divergência (do tipo logarítmica na massa). Portanto, a parte da ação efetiva que devemos

renormalizar será:

$$\begin{aligned}
I_{eff}^{(2)} &= \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + W^{(2)} \\
&= \int d^4\tilde{p} \tilde{A}^\mu(-p) \left[ (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left( 1 + \frac{e^2}{8\pi^2} f(p^2) \right) \right] \tilde{A}^\nu(p) - \\
&\quad - \frac{e^2 \alpha}{16\pi^2} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \tilde{A}^\nu(p),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\text{com } f(p^2) = \frac{1}{6} \left[ -\sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| + \ln |p^2| - i\pi - \sum_{m \neq n} C_n C_m A_{mn} \right].$$

É fácil ver que esta divergência pode ser tratada através de uma renormalização de função de onda bosônica do tipo

$$A^\mu \rightarrow \sqrt{Z} A_r^\mu, \tag{2.34}$$

acompanhada de uma renormalização de carga do tipo

$$e \rightarrow \frac{e_r}{\sqrt{Z}}, \tag{2.35}$$

que não alteram o comportamento de nenhum termo da ação efetiva, exceto o termo proporcional ao projetor  $(p^2 \eta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)$ .

Substituindo (2.34) e (2.35) em (2.33), temos:

$$\begin{aligned}
I_{eff}^{(2)} &= \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) Z \left[ (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left( 1 + \frac{e_r^2}{8\pi^2 Z} f(p^2) \right) \right] \times \\
&\quad \times \tilde{A}_r^\nu(p) - \frac{e_r^2 \alpha}{16\pi^2 Z} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) Z \eta_{\mu\nu} p^2 \tilde{A}_r^\nu(p) \\
&= \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \left[ (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left( Z + \frac{e_r^2}{8\pi^2} f(p^2) \right) \right] \tilde{A}_r^\nu(p) -
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$-\frac{e_r^2 \alpha}{16\pi^2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \tilde{A}_r^\nu(p).$$

Escolhendo

$$Z = \left( 1 - \frac{e_r^2}{8\pi^2} f(p^2) \right), \quad (2.37)$$

obtemos uma ação efetiva totalmente finita em termos dos campos renormalizados.

$$\begin{aligned} I_{eff}^{(2)} &= \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \tilde{A}_r^\nu(p) - \\ &\quad - \frac{e_r^2 \alpha}{16\pi^2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \tilde{A}_r^\nu(p). \end{aligned} \quad (2.38)$$

No entanto, podemos fazer uma escolha do parâmetro  $Z$  tal que cancele o termo logarítmico na massa e no momentum externo  $p$ , em  $f(p^2)$ . Uma escolha do tipo

$$Z = 1 + \frac{e_r^2}{8\pi^2} \left( \frac{1}{6} \sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| - \frac{1}{6} \ln |p^2| \right), \quad (2.39)$$

nos dá uma ação efetiva também finita, com uma função  $g(C_m, C_n, \alpha_m, \alpha_n,)$  que multiplica o termo do projetor transverso, ainda invariante de calibre. O termo não invariante de calibre também não é afetado pela renormalização, nem pela escolha do parâmetro  $Z$ . Portanto, a ação efetiva que segue dessa renormalização é totalmente finita e adequada ao cálculo do cancelamento da anomalia.

$$\begin{aligned} I_{eff}^{(2)} &= \frac{e_r^2}{8\pi^2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \tilde{A}_r^\nu(p) g - \\ &\quad - \frac{e_r^2 \alpha}{16\pi^2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \tilde{A}_r^\nu(p), \end{aligned} \quad (2.40)$$



onde  $g = -\frac{1}{6} \left[ i\pi + \sum_{m \neq n} C_n C_m A_{mn} \right]$ .

### 2.3. Cancelamento da anomalia

Podemos finalmente mostrar o cancelamento da anomalia. Para tanto, precisamos da expressão do *loop* de duas pernas. Por ser de segunda ordem em  $A_\mu$  e não invariante de calibre, ele nos fornecerá um propagador livre para o fóton. Com esse propagador livre poderemos estabelecer uma análise perturbativa do valor esperado para a anomalia. O termo da ação efetiva referente ao *loop* de duas pernas é

$$iW[A_r^\mu] = \frac{ie_r^2}{8\pi^2} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \left[ p_\mu p_\nu - \left(1 + \frac{\alpha}{2g}\right) p^2 \eta_{\mu\nu} \right] \tilde{A}_r^\nu(p) g. \quad (2.41)$$

O funcional gerador da teoria, no setor bosônico (que é o que vai interessar para a análise da anomalia), é dado por

$$\begin{aligned} Z = & \int dA_\mu \exp \left\{ -\frac{i}{4} \int d^4\tilde{p} \tilde{F}_{r\mu\nu}(p) F^{r\mu\nu}(p) + \right. \\ & + \frac{ie_r^2}{8\pi^2} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \left[ p_\mu p_\nu - \left(1 + \frac{\alpha}{2g}\right) p^2 \eta_{\mu\nu} \right] \tilde{A}_r^\nu(p) g + \\ & \left. + iW'[A_r^\mu] \right\}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde  $W'[A_r^\mu]$  contém o resto dos termos que dependem de  $A_r^\mu$ , mais que quadraticamente (mas apenas potências pares de  $A_r^\mu$ , graças ao teorema de Furry).

Em termos do operador  $\tilde{D}_{\mu\nu}(p)$ , o funcional gerador é escrito como:

$$Z = \int dA_\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \tilde{D}_{\mu\nu}(p) \tilde{A}_r^\nu(p) + iW'[A_r^\mu] \right\}, \quad (2.43)$$

com

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p) = ip^2 \eta_{\mu\nu} \left( 1 + \frac{e_r^2 g}{4\pi^2} + \frac{e_r^2 \alpha}{8\pi^2} \right) - ip_\mu p_\nu \left( 1 + \frac{e_r^2 g}{4\pi^2} \right). \quad (2.44)$$

Com o auxílio dos operadores

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

e

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2},$$

podemos mostrar que  $\tilde{D}_{\mu\nu}(p)$  pode ser escrito sob a forma

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mu\nu}(p) &= ip^2 \eta_{\mu\nu} \left( 1 + \frac{e_r^2 g}{4\pi^2} + \frac{e_r^2 \alpha}{8\pi^2} \right) - ip_\mu p_\nu \left( 1 + \frac{e_r^2 g}{4\pi^2} \right) \\ &= ip^2 \eta_{\mu\nu} A - ip_\mu p_\nu B \\ &= -ip^2 A \omega_{\mu\nu} + ip^2 B (\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) \\ &= -ip^2 \{ (A - B) \omega_{\mu\nu} - B \theta_{\mu\nu} \}. \end{aligned}$$

Calculamos, então, o inverso do operador  $\tilde{D}_{\mu\nu}(p)$ . Para tanto, devemos mostrar que o produto (operador)  $\times$  (operador inverso) se escreve como:

$$\tilde{D}_{\mu\sigma}(p) \tilde{D}^{\sigma\nu-1}(p) = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu},$$

ou seja,

$$\tilde{D}^{\sigma\nu^{-1}}(p) = a\theta^{\sigma\nu} + b\omega^{\sigma\nu}.$$

Assim,

$$\tilde{D}_{\mu\sigma}(p) \tilde{D}^{\sigma\nu^{-1}}(p) = iaAp^2\theta_\mu^\nu - ib(A-B)p^2\omega_\mu^\nu,$$

com

$$\begin{aligned} a &= -\frac{i}{p^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + e_r^2 g} \right\}, \\ b &= \frac{i}{p^2} \left\{ \frac{8\pi^2}{e_r^2 \alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Obtemos, finalmente, uma expressão para o inverso do operador  $\tilde{D}_{\mu\nu}(p)$

$$\tilde{D}^{\mu\nu^{-1}}(p) = -\frac{i}{p^2} \left\{ \frac{4\pi^2}{4\pi^2 + e_r^2 g} \right\} \eta^{\mu\nu} + \frac{i}{p^4} p_\mu p_\nu \left\{ 1 + \frac{8\pi^2}{e_r^2 \alpha} \right\}. \quad (2.45)$$

Podemos, então, escrever:

$$\begin{aligned} Z &= e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \int dA_\mu \exp -\frac{1}{2} \int d^4 \tilde{p} \left\{ \tilde{A}_r^\mu(-p) \tilde{D}_{\mu\nu}(p) \tilde{A}_r^\nu(p) + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{A}_r^\mu \tilde{J}_\mu(p) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \int dA_\mu \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) \tilde{J}^\nu(p) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\det \left| \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) \right|} \right\} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Utilizando a expressão (1.22), anteriormente deduzida para a anomalia

$$\mathcal{A}[A] = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu(x)}, \quad (2.47)$$

podemos calcular o valor esperado da anomalia no espaço de configurações:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(z) &= - \int dA_r^\mu \left( -\frac{i}{e} \partial_r^\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu(z)} \right) \times \\ &\quad \exp \left( i \int d^4x F_{r\mu\nu}(x) F^{r\mu\nu}(x) + iW'[A_r^\mu] \right) \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{1}{e} \int dA_r^\mu \left( \partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(z)} \right) \exp \left( i \int d^4x F_{r\mu\nu}(x) F^{r\mu\nu}(x) + iW'[A_r^\mu] \right) \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{1}{e} \int dA_r^\mu \left( \partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(z)} \right) \left[ e^{iW'[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}]} \sqrt{\det |\tilde{D}|} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\mu(x) \right\} \right] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Derivando funcionalmente em relação a  $A_r^\mu$ , para derivar em seguida em relação a  $J_\mu(x)$  e avaliando em  $J = 0$ , logo após uma integração em  $A_r^\mu$  encontramos uma expressão que pode ser facilmente avaliada:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW'[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}]} \int dA_r^\mu \left( \partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(x)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\mu(x) \right] \right\} \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW'[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}]} \int dA_r^\mu \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\nu^\rho(z-x) A_r^\nu(x) + J^\rho(z) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\mu(x) \right] \right\} \Big|_{J=0} \\ &= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW'[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)}]} \int dA_r^\mu \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\nu^\rho(z-x) \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} + J^\rho(z) \right\} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left[ -\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\mu(x) \right] \right\} \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{e} \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\nu^\rho(z-x) e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} + e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} J^\rho(z) \right\} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx dy J^\mu(x) \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(x-y) J^\nu(y) \right\} \Big|_{J=0}.
\end{aligned}$$

Com a expressão acima podemos mostrar que:

$$e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx dy J^\mu(x) D_{\mu\nu}^{-1}(x-y) J^\nu(y) \right\} \Big|_{J=0} = 0, \quad (2.50)$$

e também que

$$e^{iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} J^\rho(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int dx dy J^\mu(x) D_{\mu\nu}^{-1}(x-y) J^\nu(y) \right\} \Big|_{J=0} = 0, \quad (2.51)$$

já que cada termo de  $iW' \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]$  contém um número par de derivadas funcionais em relação a  $J$ , e cada termo da expansão da exponencial é de ordem par em  $J$ . Portanto, a integral na equação (2.49) é nula, mostrando que a anomalia é cancelada, na teoria regularizada,

$$(A) = 0. \quad (2.52)$$

## CONCLUSÃO

No último capítulo, mostramos o cancelamento formal da anomalia na teoria efetiva, obtida após a integração sobre os férmions. O caráter formal deste cancelamento é devido à dificuldade de definir a teoria efetiva no nível quântico. Esta teoria envolve um número infinito de termos de interação, o que inviabiliza os procedimentos usuais para decidir sobre a sua renormalizabilidade ou não.

No caso da teoria com acoplamento vetorial, poderíamos usar um argumento indireto para indicar que a teoria efetiva estaria bem definida. É bem conhecido o fato de que a teoria, antes da integração sobre os férmions, é renormalizável. Sendo assim, ela também deveria poder ser definida após esta integração, de alguma maneira ainda desconhecida, supondo que não haja uma ordem específica na qual a integração funcional deva se dar. Assim, poderíamos dizer que o resultado encontrado na referência [12] é exato e mostraria a ação do mecanismo de cancelamento de anomalias num exemplo quadridimensional.

A situação não é tão simples, no entanto, para o caso de acoplamento quiral. A teoria, antes da integração sobre os férmions, desenvolve uma anomalia, que não pode ser removida por redefinições da ação efetiva. Isso impede a renormalização perturbativa da teoria, embora nada possa ser dito sobre qualquer mecanismo de renormalização não-

perturbativa que possa ser criado (vide [19]). Caso fosse possível provar, de alguma forma, que a anomalia é cancelada, a renormalização perturbativa poderia ser tentada e a teoria poderia ser dita como bem definida do ponto de vista quântico.

O que conseguimos foi uma forte indicação de que isto pode de fato acontecer. Mostramos que a integração sobre os férmions pode ser feita, sem deixar divergências incontroláveis a serem herdadas pela teoria efetiva. Divergências quadráticas (que aparecem advindas do *loop* de duas pernas) podem ser canceladas através da escolha cuidadosa dos parâmetros que caracterizam a regularização que estamos empregando (no caso, Pauli-Villars, com dois campos ou mais). Divergências logarítmicas, provenientes do mesmo gráfico, podem ser renormalizadas com a ação conjunta de uma renormalização de carga e de uma renormalização de função de onda bosônica. Finalmente, divergências logarítmicas, originadas na contagem de potências do *loop* de quatro pernas, são canceladas pelo próprio procedimento de regularização, deixando um resultado finito para este gráfico, em completa analogia com o que acontece no caso vetorial. Graças ao teorema de Furry, garantimos que, na obtenção da ação efetiva, não precisamos levar em conta gráficos com um número ímpar de pernas externas. Isto é o bastante para sustentar o cancelamento formal da anomalia. O que falta para transformar esta conjectura em prova é mostrar que, na definição quântica da teoria efetiva, não são gerados dinamicamente termos envolvendo potências ímpares de  $A_\mu$ . Se este for o caso, o valor esperado da anomalia poderá ser calculado da mesma maneira indicada no final do capítulo 2 e o cancelamento da anomalia (com a conseqüente restauração da simetria de calibre quântica) estará provado.

A análise da questão mencionada ao final do último parágrafo é complexa, mas algumas rotas parecem ser indicadas pra a sua abordagem. As contribuições não invariantes de calibre à ação efetiva concentram-se nos termos quadrático e quártico em  $A_\mu$ , já que todos os outros termos (gerados desde gráficos com  $n$  pernas bosônicas,  $n > 3$ , e finitos) são invariantes de calibre. Cálculos preliminares indicam que o gráfico de 6 pernas é nulo, para o caso de acoplamento vetorial. Se pudermos identificar nisto uma tendência, teremos como reduzir esta análise à de uma teoria muito mais simples que a atual.

Outra possibilidade, seria a utilização de métodos de renormalização algébrica [7], que pudessem indicar uma possível renormalizabilidade da teoria efetiva. Tais métodos, tendo fortes componentes não perturbativos, talvez sejam os mais indicados para a análise que estamos pretendendo levar a cabo. Em particular, poderiam existir simetrias discretas, que poderiam ser preservadas pela renormalização da teoria (conjugação de carga, por exemplo) que impediriam o aparecimento dos indesejados termos ímpares.

Caso obtenhamos resultados positivos na análise do caso abeliano, poderíamos passar ao caso não abeliano, mais relevante fisicamente, por ser a base da construção das atuais teorias das interações fortes e eletrofracas. Para isto, vamos considerar primeiramente uma prova formal, análoga à que foi dada para as teorias abelianas, que não fomos ainda capazes de produzir. Progressos nesta direção serão divulgados futuramente.



## APÊNDICE: INTEGRAIS ÚTEIS

A representação de Feynmann do propagador é:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty d\alpha \exp [i\alpha (k^2 - M^2 + i\varepsilon)] &= \frac{-i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon} \times \\
 &\times \exp [i\alpha (k^2 - M^2 + i\varepsilon)] \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{i}{k^2 - M^2 + i\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

A representação da integral Gaussiana, em quatro dimensões, tem a forma:

$$\int d^4k \exp (i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k) = -\frac{i\pi^2}{\omega^2} \exp \left( -\frac{i\Sigma^2}{\omega} \right). \tag{2}$$

As integrais nos propagadores que aparecem ao longo do capítulo 2 podem ser calculadas, derivando em relação a  $\Sigma$ , como a seguir:

$$\begin{aligned}
 \int d^4k k_\lambda k_\rho k_\nu k_\mu e^{(i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k)} &= \frac{1}{16} \int d^4k \frac{\partial}{\partial \Sigma^\lambda} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\rho} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\nu} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\mu} e^{(i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k)} \\
 &= \frac{1}{16} \int d^4k \frac{\partial}{\partial \Sigma^\lambda} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\rho} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\nu} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\mu} e^{i\omega(k + \Sigma/\omega)^2 - i\Sigma^2/\omega} \\
 &= \frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\lambda} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\rho} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\nu} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\mu} e^{-i\Sigma^2/\omega} \int d^4k e^{i\omega(k + \Sigma/\omega)^2} \\
 &= \frac{1}{16} \left( \sqrt{\frac{\pi}{i\omega}} \right)^4 \frac{\partial}{\partial \Sigma^\lambda} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\rho} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\nu} \frac{\partial}{\partial \Sigma^\mu} e^{-i\Sigma^2/\omega}
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{4\omega^4} \left\{ \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\lambda} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2i}{\omega} (\eta_{\mu\lambda}\Sigma_\nu\Sigma_\rho + \eta_{\nu\lambda}\Sigma_\mu\Sigma_\rho + \eta_{\rho\lambda}\Sigma_\mu\Sigma_\nu + \right. \\
&\quad \left. + \eta_{\mu\rho}\Sigma_\nu\Sigma_\lambda + \eta_{\mu\nu}\Sigma_\rho\Sigma_\lambda + \eta_{\nu\rho}\Sigma_\mu\Sigma_\lambda) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{\omega^2} \Sigma_\mu\Sigma_\nu\Sigma_\rho\Sigma_\lambda \right\} \exp\left(-\frac{i\Sigma^2}{\omega}\right), \\
\int d^4k k_\rho k_\nu k_\mu e^{(i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k)} &= \frac{i\pi^2}{2\omega^4} \left\{ \eta_{\nu\mu}\Sigma_\rho + \eta_{\rho\mu}\Sigma_\nu + \eta_{\rho\nu}\Sigma_\mu - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2i}{\omega} \Sigma_\rho\Sigma_\nu\Sigma_\mu \right\} \times \exp\left(-\frac{i\Sigma^2}{\omega}\right), \\
\int d^4k k_\nu k_\mu e^{(i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k)} &= -\frac{i\pi^2}{2\omega^3} \left\{ \eta_{\mu\nu} - \frac{2i}{\omega} \Sigma_\mu\Sigma_\nu \right\} \exp\left(-\frac{i\Sigma^2}{\omega}\right), \\
\int d^4k k^2 e^{(i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k)} &= -\frac{i\pi^2}{2\omega^3} \left\{ 2 - \frac{i}{\omega} \Sigma^2 \right\} \exp\left(-\frac{i\Sigma^2}{\omega}\right), \\
\int d^4k k_\mu &= \frac{\pi^2}{\omega^3} \Sigma_\mu \exp\left(-\frac{i\Sigma^2}{\omega}\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

Estas integrais nos permitem mostrar que:

$$\begin{aligned}
&\int d^4\tilde{k} \left\{ [2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu} (k^2 + k \cdot p)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} (k^\alpha p^\beta - k^\beta p^\alpha) \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \right\} \times \\
&\quad \times \exp [i(\alpha + \beta) k^2 + 2i\beta p \cdot k] \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{i\eta_{\mu\nu}}{(\alpha + \beta)^3} + \left[ \frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^4} - \frac{\beta}{(\alpha + \beta)^3} \right] \right) \times \\
&\quad \times (p^2 \eta_{\mu\nu} - 2p_\mu p_\nu) \exp\left(\frac{-i\beta^2 p^2}{\alpha + \beta}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Outras integrais utilizadas foram:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} (e^{iay} - e^{iby}) e^{-\epsilon y} = \ln\left(\frac{b + i\epsilon}{a + i\epsilon}\right) \tag{10}$$

e

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} (e^{iay} - e^{iby}) e^{-\varepsilon y} = \int_0^\infty \frac{dy}{y} (e^{iay} - e^{iby}) e^{-\varepsilon y} + i(a - b). \quad (11)$$

# BIBLIOGRAFIA

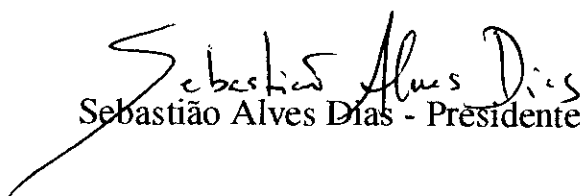
- [1] J. Leite Lopes, *Gauge Field Theories: an Introduction*, Oxford: Pergamon Press, 1981.
- [2] C. Itzykson e J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Nova Iorque, 1980.
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volumes I e II, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [4] Notas de aula do curso de Eletromagnetismo ministrado por Sebastião Alves Dias, CBPF/1997
- [5] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino, E. Witten, *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, Singapura, 1985.
- [6] E. Abdalla, M. C. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapura (1991).
- [7] O. Piguet e S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*, Springer International, Berlim, 1995.
- [8] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167** (1985), 1219.

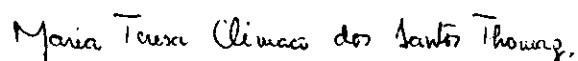
- [9] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **183B** (1986), 225.
- [10] O. Babelon, F. Schaposnik e C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B177** (1986), 385.
- [11] R. Jackiw e K. Johnson, *Phys. Rev.* **182** (1969), 1459.
- [12] Rigoberto Carlos Proleón Patricio, *Cancelamento de Anomalias em Teorias de Calibre Abelianas*, Tese de Mestrado, CBPF, 1998.
- [13] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, segunda edição, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [14] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979), 1195; *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2848; *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 437.
- [15] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962), 2425.
- [16] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1219.
- [17] S. A. Dias e C. A. Linhares, *Phys. Rev.* **D45** (1992), 2162.
- [18] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, segunda edição, Oxford Scientific Pub., Oxford, 1993.
- [19] Rodolfo A. Casana Sifuentes, *Renormalização e Ambigüidades na QED<sub>2</sub>*, tese de Mestrado, CBPF, 1997.

**“ANOMALIA DE CALIBRE NA ELETRODINÂMICA  
QUIRAL EM  $D = 4$ ”**

***Márcia Moutinho***

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

  
Sebastião Alves Dias - Presidente

  
Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz

  
Itzhak Roditi

Rio de Janeiro, 20 de outubro de 1999