

99/4

TESE DE
DOUTORADO

**Modelos
com Emissão de
Radiação Gravitacional
em Métricas de
Bondi-Robinson-Trautman**

Marcelo Costa de Lima

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 1999.

MODELOS COM EMISSÃO DE RADIAÇÃO
GRAVITACIONAL EM MÉTRICAS DE



1999/4
L732
020820

Agradecimentos

- A meu orientador, Dr. *Ivano Damião Soares*.
- Aos colegas *Renato Klippert Barcellos*, *Ronaldo Rodrigues da Silva* e *Humberto Belich Júnior*, sem os quais não teria sido possível criar um clima de discussão acadêmica profícuo e criativo.
- Aos colegas da “509 – B”, *Vitorio De Lorenci*, *Martha Christina Motta da Silva*, *Sandra Sautú*, *Carla Fonseca-Barbatti* e *Manoel Messias Júnior*, por terem proporcionado um convívio ameno e prazeroso durante minha permanência nesta casa.
- Aos integrantes do “quarteto”, *Luis Alberto Oliveira*, *Paulo Israel Trajtenberg* e (also starring) *Stephon Alexander*, pelos bons momentos lúdicos.
- A Capes pela bolsa, através do PICDT.

Resumo

Fizemos o estudo, e revisão, completos da definição e caracterização de radiação gravitacional, no contexto da teoria da Relatividade Geral exata, dentro das abordagens de Pirani-Bondi-Sachs.

A classificação de Petrov para espaços-tempos, fundamental na caracterização de zona de radiação gravitacional, é rediscutida, tanto do ponto de vista de Petrov-Pirani (associado à estrutura algébrica abstrata de autovalores e autovetores do tensor de Weyl) bem como do ponto de vista de Debever-Penrose (associado às direções nulas principais do tensor de Weyl). Neste ponto fizemos a conexão entre as duas formulações, comumente um ponto obscuro na literatura. Aplicamos este formalismo a métricas radiativas que descrevem espaços-tempos de sistemas gravitacionais limitados emitindo ondas gravitacionais: métricas de Bondi-Sachs e métricas de Robinson-Trautman.

Fizemos um exame exaustivo da integrabilidade do problema de Bondi-Sachs, onde exibimos soluções formais para as funções incógnitas.

Ênfase maior foi dada às métricas da família de Robinson-Trautman, onde quebramos as condições de analiticidade sobre as funções-solução do problema. Esta quebra de analiticidade produz física nova, no sentido de que as equações de Einstein exigem, então, uma fina camada de matéria no plano equatorial, e que pode ser modelada por neutrinos, strings e termos radiativos. Nestes casos, mostramos que existem soluções tanto radiativas quanto não radiativas, estando a presença, ou não, da radiação gravitacional ligada aos processos dinâmicos da camada material.

Índice

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Índice	iii
Notação e convenções	vi
Introdução	1
1 Caracterização da noção de Radiação gravitacional	7
1.1 A frente de onda gravitacional	7
1.2 A estrutura algébrica do setor descontínuo da curvatura.	11
1.3 A classificação de Petrov	15
1.3.1 O problema de autovalores para o tensor de Weyl	15
1.3.2 Solução do problema de autovalores.	18
1.4 Campo de radiação gravitacional.	21
1.5 As direções nulas principais do tensor de Weyl.	23

1.5.1	Bases nulas locais.	24
1.5.2	Bases bivectoriais autoduais/anti-autoduais	27
1.5.3	As direções nulas principais.	30
1.5.4	A classificação de Petrov revisitada.	34
1.6	O teorema do “Peeling-off”.	42
2	Métricas radiativas	44
2.1	Foliamento por hipersuperfícies nulas e o problema de Cauchy.	45
2.1.1	Problema de valor inicial característico para o campo escalar.	48
2.2	A métrica de Bondi.	51
2.2.1	As identidades de Bianchi para o problema de Bondi	54
2.2.2	Bondi perturbativamente: Função informação e perda de massa	56
2.2.3	Estrutura algébrica do tensor de Weyl para a métrica de Bondi.	59
2.3	A métrica de Robinson-Trautman	61
2.3.1	A estrutura algébrica do tensor de Weyl na métrica de RT	66
2.3.2	RT em regime perturbativo	67
2.3.3	Condições de analiticidade e as soluções para a métrica de RT.	72
3	Camada equatorial na métrica de RT	75
3.1	O plano equatorial da família de RT	75
3.2	O tensor energia-momentum da camada	77

3.3	Leis de conservação.	80
3.4	A natureza material da camada.	81
3.4.1	Neutrinos radiais.	81
3.4.2	Strings radiais.	84
4	Soluções de Robinson-Trautman	87
4.1	As soluções em ordem zero.	87
4.1.1	Os modos com $c = 0$	88
4.1.2	Os modos com $c \neq 0$	88
4.2	Soluções em primeira ordem.	90
4.2.1	A solução de Foster-Newman.	90
4.2.2	Perturbação na camada equatorial.	91
4.2.3	Perturbação tipo RT em Minkowski	93
4.2.4	Considerações finais.	96
	Conclusão	98
	Apêndice A: Objetos relacionados à métrica de RT	102
	Apêndice B : Objetos relacionados à métrica de Bondi	106
	Referências	115

Notação e convenções

1. Índices

(a) gregos minúsculos ($\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3$) são utilizados para caracterizar índices de espaço-tempo;

(b) latinos maiúsculos ($A, B \dots = 0, 1, 2, 3$) são utilizados em componentes de tensores em base de tetradas.

Eventualmente são usados como etiquetas, quando convenientemente indicado no texto.

(c) latinos minúsculos ($i, j \dots = 1, 2, 3$) são utilizados, em geral, para designar componentes espaciais de tensores em base de coordenadas.

($m, n \dots = 1, 2, 3$) serão usados como índices no espaço de 3-vetores complexos, conforme será oportunamente indicado no decorrer do texto;

(d) latinos minúsculos ($a, b \dots = 0, 1, 3$) serão utilizados para objetos definidos no subespaço ${}^{(3)}\Sigma : \theta = \frac{\pi}{2}$, na base local deste subespaço.

2. Simetrização e anti-simetrização

(a) Índices entre parênteses (“(”, “)”) denotam a operação de simetrização sobre os mesmos.

(b) Índices entre colchetes (“[”, “]”) indicam a anti-simetrização.

(c) Em nossa convenção o fator $1/n!$ está sempre embutido nas operações de simetrização

e anti-simetrização, onde n é o número de índices simetrizados (ou anti-simetrizados).

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2!}(T_{ij} + T_{ji}).$$

3. Derivadas

(a) A derivada simples sobre funções, é denotada por um sub-índice correspondente à variável em relação a qual a derivação é tomada:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} f = f_{x^\mu} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} f = f_{x^\mu, x^\nu}$$

A notação,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} f = \partial_\mu f$$

é eventualmente usada.

(b) A derivada covariante é denotada por “ ; ”.

4. Se $\Sigma_0 : \lambda = 0$ é uma superfície particular de uma família de superfícies Σ_λ , então a descontinuidade associada a um objeto qualquer F através da superfície Σ_0 é denotada por $[F]_{\Sigma_0}$ e definida por:

$$[F]_{\Sigma_0} = F^+ - F^-$$

onde,

$$F^+ = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} F \quad F^- = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} F$$

Introdução

Quem primeiramente estabeleceu que, segundo a Teoria Geral da Relatividade (TGR), processos gravitacionais de natureza radiativa poderiam ocorrer foi o próprio Einstein, [1], quase simultaneamente ao nascimento da teoria relativística do campo gravitacional, já em 1916. Neste contexto, a noção de radiação gravitacional surge ligada à perturbações dependentes do tempo, em regime de campo fraco na teoria linearizada ou quase linearizada. Propriedades bastante conhecidas de tais “ondas gravitacionais” encontram-se em livros básicos, como Schutz, [32], sendo os mais notórios o fato de se propagarem com a velocidade da luz e serem de natureza quadrupolar pelo menos. Embora tais aspectos sejam amplamente conhecidos, não podemos esperar que tal abordagem forneça um cenário realista das ondas gravitacionais.

Uma questão que poderíamos levantar refere-se ao fato de o campo gravitacional apresentar, como característica mais intrínseca, não linearidades na dinâmica dos potenciais, de natureza tanto algébrica quanto diferencial. Deste modo algumas propriedades relevantes das ondas gravitacionais poderiam estar completamente ausentes na abordagem linearizada. Por outro lado, que sentido podemos atribuir à noção de “onda gravitacional” no contexto da teoria exata, de modo que possamos perguntar por suas propriedades?

Outro problema que foi levantado consiste na discussão da possível natureza “espúria” das soluções radiativas provenientes das equações linearizadas de campo. Dito de outro modo, como poderíamos garantir a correspondência entre uma solução ondulatória obtida

das equações de campo linearizadas e o comportamento assintótico, convenientemente definido, de alguma solução exata das equações exatas do campo gravitacional? Ou ainda, a correspondência entre a solução radiativa das equações linearizadas e a solução aproximada, em alguma ordem de perturbação, das equações de Einstein exatas, para um problema particular? Tais questões, entre outras, levaram a um grande desenvolvimento da teoria da radiação gravitacional.

Poderíamos situar o novo impulso no desenvolvimento da teoria da radiação gravitacional a partir da década de cinquenta, através dos trabalhos de Petrov, [11], que estabeleceu a classificação algébrica para o tensor de Riemann, que hoje leva seu nome. A partir, então, da classificação de Petrov para o tensor de curvatura inicia-se o desenvolvimento do aparato matemático que iria possibilitar a caracterização invariante da noção de radiação gravitacional. Tal formulação invariante, inicialmente proposta por Pirani, [18], mostrou ser uma ferramenta adequada para a análise do papel da radiação gravitacional no contexto da TGR exata.

Segundo a caracterização proposta por Pirani (1957), a noção de radiação gravitacional estaria associada a tipos de Petrov particulares do tensor de curvatura do vazio, não podendo ser do tipo geral (o chamado tipo I). Posteriormente esta condição foi relaxada, conforme propuseram Bondi, Robinson e o próprio Pirani (1959). Estes autores apontaram para a estreita analogia entre os tipos radiativos propostos por Pirani, em 57, e os campos de Maxwell auto-conjugados (campos de pura radiação eletromagnética). Assim, segundo estes autores, as condições de Pirani se aplicariam exatamente apenas aos espaços-tempos que representassem pura radiação gravitacional, [26]. Um espaço-tempo radiativo genérico poderia ainda ser do tipo I , desde que apresentasse uma região assintótica, convenientemente definida, na qual os termos dominantes da curvatura satisfizessem as condições de Pirani. Isto seria, em princípio, possível devido à natureza local da classificação de Petrov.

Paralelamente Debever, [10], estabeleceu que todo espaço-tempo admite certos vetores nulos, num máximo de quatro e num mínimo de um, associados de um modo específico ao tensor de curvatura: as chamadas direções nulas principais do tensor de curvatura. Nós

mostramos, então, haver uma equivalência entre cada tipo de Petrov do tensor de curvatura e a configuração particular de direções nulas principais associadas a este, surgindo então um modo equivalente de se fazer a classificação de Petrov, em termos de direções nulas principais. Esta equivalência é usualmente mencionada, tendo sido completamente estabelecida por nós, no presente trabalho, por considerarmos um ponto obscuro na literatura.

Seguindo estas abordagens, poderíamos incluir os trabalhos de Sachs e Ehlers (1960), [22] e Sachs (1961), [24]. Este último investigou a relação entre as direções nulas principais e os chamados raios nulos geodésicos. Tais raios nulos são gradientes de hipersuperfícies nulas e representam a noção de vetor de onda na TRG. Foi possível estabelecer então uma condição para que o espaço-tempo admitisse uma zona na qual restam apenas ondas sendo expelidas pelo sistema, na qual os termos dominantes do tensor de curvatura são tipos algébricos especiais que obedecem a caracterização de Pirani. Surge assim, neste contexto, o chamado teorema do “peeling-off” que estabelece qual é a forma particular da expansão do tensor de curvatura, em potências inversas da distância à fonte e em termos dos tipos algébricos de Petrov. Sachs pôde ainda fornecer uma interpretação para os termos presentes em tal expansão de acordo com a análise desenvolvida por Bergmann e o próprio Sachs (1958), [23], relacionando a estrutura da fonte à estrutura da correspondente curvatura que esta gera, no contexto da teoria linearizada. Tal teorema constitui talvez a síntese das contribuições destes autores, acima mencionados, à teoria da radiação gravitacional.

Surge ainda o chamado formalismo de Newman-Penrose, [8, 9], no qual a TRG é tratada em uma abordagem espinorial. Este formalismo mostra-se também uma ferramenta poderosa para a teoria da radiação gravitacional e fornece também um método, equivalente aos já mencionados, de classificar o tensor de curvatura em tipos algébricos distintos. Tal formalismo não será, entretanto, usado no presente trabalho, sendo os resultados obtidos por este formalismo equivalentes àqueles que serão aqui discutidos e demonstrados.

Com os desenvolvimentos mencionados acima, surgem soluções exatas das equações de Einstein que satisfazem às condições de métricas radiativas no sentido elaborado por Pirani, seja exatamente ou assintoticamente: Bondi, Pirani e Robinson, [26], obtiveram soluções

de onda plana, originalmente encontradas por Rosen,[27]. Ondas esféricas são obtidas por Robinson e Trautman, [3].

Um dos aspectos que motivou o estudo de ondas gravitacionais, no contexto da teoria exata, reside no seguinte fato: um sistema espacialmente limitado emitindo ondas gravitacionais em regime não fraco poderia ter uma parcela significativa de sua energia carregada para fora do sistema, pela radiação gravitacional. Deste modo, em tal sistema, poderia se fazer notar um decréscimo da “massa total” do mesmo, medida por um observador newtoniano, em alguma região assintótica convenientemente definida. Este decréscimo estaria relacionado à potência irradiada pelas ondas gravitacionais. Acontece que na teoria da gravitação linearizada um tal cenário não ocorre, sendo o termo de monopolo do potencial gravitacional (“massa”) conservado; do mesmo modo que na teoria eletromagnética o monopolo associado (carga) se conserva mesmo quando o campo está num regime radiativo. Assim, o cenário natural no qual este aspecto distintivo dos processos radiativos gravitacionais poderiam se explicitar teria que ser, necessariamente, o da teoria exata. Partindo desta premissa Bondi, Metzner e van der Burg, [28], propuseram uma família de métricas (as métricas de Bondi), que trata da emissão de ondas axialmente simétricas por um sistema isolado, cujas propriedades iremos posteriormente discutir. Estudando então o problema de Cauchy sobre uma superfície nula de dados iniciais, estes autores puderam estabelecer sob que condições em tais espaços-tempos o sistema perde massa por emissão de radiação gravitacional. Este resultado é também um dos mais relevantes aspectos distintivos dos processos radiativos gravitacionais. Em seguida, Sachs propôs uma família mais geral [25] na qual a condição de simetria axial, presente na métrica de Bondi, é relaxada.

Nosso propósito, neste trabalho, foi o de averiguar certas soluções radiativas das equações de Einstein exatas, para as quais sistemas espacialmente localizados são afetados pela emissão de radiação gravitacional, havendo alterações relacionadas à massa dos mesmos. Embora situações fisicamente realistas sejam de difícil descrição a partir de modelos exatos, pensamos que tais situações ideais sempre fornecem paradigmas para a melhor compreensão da natureza do campo gravitacional. Tendo isto em mente, empreendemos esforços no sen-

tido de obter soluções radiativas exatas a partir de espaços-tempo tipo Bondi. Embora tenhamos exibido as soluções formais para as funções incógnitas do problema, de modo a resolver exatamente parte das equações de Einstein, os vínculos propagados pelas equações restantes não puderam ser avaliados senão perturbativamente. Damos maior ênfase, em particular, à família de Robinson-Trautman (RT) por nos parecer adequada à proposição de modelos radiativos exatos, exibindo uma classe nova de soluções, conforme veremos adiante.

O trabalho se organiza então do seguinte modo: No primeiro capítulo, desenvolvemos de modo sucinto as noções que permitem caracterizar a radiação gravitacional de um modo invariante. A teoria de radiação gravitacional, no contexto da TGR, é certamente um dos tópicos mais complexos da teoria, a qual requer um aparato matemático bastante amplo. Deste modo, fugiria ao escopo do presente trabalho discutí-la em todos os seus aspectos. Procuramos assim, expor apenas os aspectos essenciais relacionados a caracterização invariante da noção de radiação gravitacional, de modo que nos permitisse discutir a natureza radiativa das métricas aqui apresentadas. Excelentes compilações sobre o tema podem ser encontrados em Trautman, Pirani e Bondi [16], ou ainda em Witten [36].

No capítulo dois passamos então à discussão de certos espaços-tempos radiativos, analisando as características gerais das métricas de Bondi e RT, dando particular ênfase a esta última, devido à presença da simetria por reflexão do ângulo polar, que permitirá introduzir uma nova classe de soluções radiativas nestes espaços-tempos.

No capítulo três exploramos a possível natureza física do plano equatorial definido nas métricas de RT, agora pensado como uma fina camada material. Deste modo analisamos as possibilidades de relacionar os processos radiativos, observados assintoticamente no espaço-tempo, a processos físicos ocorrendo intrínsecamente na camada material. Apontamos assim para a possibilidade de relacionar, neste caso, o comportamento do campo fora da fonte ao comportamento dinâmico da própria fonte.

No capítulo quatro exibimos então nova classe de soluções radiativas em espaço-tempos de RT, com camada material sobre a região equatorial. Conforme veremos são as condições

de junção dos “hemisfério” norte/sul de RT, que diferenciam as possíveis classes de solução. Mostramos que a escolha de funções angulares analíticas através do plano equatorial (que podemos pensar como uma condição de junção trivial) nos conduziu à reobtenção da solução linearizada, originalmente encontrada por Newman e Foster [7]. Ao considerarmos a presença da camada material introduzimos a quebra de analiticidade das funções-solução do problema (e conseqüentemente introduzimos condições de junção não triviais), surgindo daí a possibilidade de obtenção de uma nova classe de soluções radiativas em RT.

Deixamos para os apêndices a listagem das expressões exatas de objetos como o tensor de Ricci, Weyl, e assim por diante, associados às métricas de Bondi e RT, bem como as integrais formais exatas de parte das equações de Einstein para o problema de Bondi, de modo a complementar as discussões feitas em caráter perturbativo, quando discutimos as propriedades destas métricas.

Capítulo 1

Caracterização da noção de Radiação gravitacional

Nosso propósito, neste capítulo, é o de estabelecer os conceitos essenciais relacionados a caracterização invariante de ondas gravitacionais em relatividade geral para posteriormente discutirmos soluções das equações de Einstein nas quais ondas são emitidas por sistemas isolados.

1.1 A frente de onda gravitacional

Para caracterizarmos ondas gravitacionais de um modo invariante precisamos estabelecer qual propriedade do campo, passível de ser definida de um modo invariante, corresponde à noção de um comportamento radiativo deste campo no vazio.

No caso gravitacional, de acordo com o princípio da equivalência, sabemos que a força gravitacional, representada pelos símbolos de Christoffel, não é uma quantidade tensorial, podendo ser anulada ao longo de uma linha de universo. Entretanto as variações desta,

medidas pela curvatura do espaço-tempo, é uma quantidade tensorial sendo, por assim dizer, a evidência real da presença de um campo gravitacional. Deste modo assumimos que o “campo físico” em questão é o tensor de curvatura do espaço-tempo e é em termos de algum comportamento específico deste que caracterizaremos a noção de radiação gravitacional.

Quando falamos em processos radiativos, uma noção elementar a eles associada é a de frente de onda, que é a superfície através da qual se dá o transporte de informação efetuado pelo campo durante o regime radiativo. Em particular, se imaginarmos a situação extrema na qual uma única frente de onda, associada a um dado campo físico, é produzida em algum ponto, ou região, propagando-se então através do espaço, esta promoveria um salto descontínuo do campo físico em um dado ponto, ao passar por este ponto. Chamamos a isto uma onda de choque. Deste modo, a frente de onda será aquela hipersuperfície pela qual se propagam as descontinuidades do campo. Para saber como caracterizar tal hipersuperfície, no caso do campo gravitacional, é conveniente usarmos o método de Hadamard, [2], para o tratamento de descontinuidades.

Assumimos então que através de uma hipersuperfície, definida por,

$$\Sigma : u(x^\mu) = u_0 \quad (1.1)$$

a segunda derivada do potencial gravitacional, é descontínua. Isto é

$$[g_{\mu\nu, \beta, \rho}]_\Sigma = \Psi_{\mu\nu\beta\rho} \quad (1.2)$$

onde supomos que $\Psi_{\mu\nu\beta\rho}$ é simétrico tanto no par (μ, ν) quanto no par (β, ρ) .

Além disto esperamos que tais descontinuidades estejam relacionadas apenas às segundas derivadas do campo:

$$[g_{\mu\nu}]_\Sigma = [g_{\mu\nu, \beta}]_\Sigma = 0 \quad (1.3)$$

Expandindo então a primeira derivada do tensor métrico entre os pontos (x) e $(x + dx)$,

sobre a hipersuperfície Σ , teremos,

$$g_{\mu\nu, \beta}(x + dx) = g_{\mu\nu, \beta}(x) + g_{\mu\nu, \beta, \rho}(x) dx^\rho$$

Tomando-se a descontinuidade desta equação, usando (1.3), encontramos que,

$$[g_{\mu\nu, \beta, \rho}]_\Sigma dx^\rho = 0 \quad \forall \quad dx^\rho \in \Sigma$$

como esta situação é simétrica na troca $dx^\rho \rightarrow dx^\beta$ deduzimos que $\Psi_{\mu\nu\beta\rho}$ tem a forma genérica,

$$\Psi_{\mu\nu\beta\rho} = \psi_{\mu\nu} k_\beta k_\rho \quad (1.4)$$

onde $k_\mu = u_{,\mu}$ é o vetor normal à Σ , definida em (1.1), e $\psi_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico.

Daí concluímos que (1.2) se escreverá como,

$$[g_{\mu\nu, \beta, \rho}]_\Sigma = \psi_{\mu\nu} k_\beta k_\rho \quad (1.5)$$

O tensor de Riemann, por sua vez, pode ser escrito em termos do tensor métrico como

$$R_{\mu\nu\beta\rho} = -2\partial_{[\rho} g_{\beta][\mu, \nu]} + C_{\mu\nu\beta\rho}$$

onde $C_{\mu\nu\beta\rho}$ envolve apenas o tensor métrico e suas primeiras derivadas, sendo, portanto, contínuo através de Σ . Tomando a descontinuidade da equação anterior através de Σ , e usando (1.5), encontramos

$$[R_{\mu\nu\beta\rho}]_\Sigma = -2k_{[\rho} \psi_{\beta][\mu} k_{\nu]} \quad (1.6)$$

Impondo então que o tensor de curvatura corresponda a uma dada solução das equações

de Einstein no vazio, teremos

$$R_{\nu\rho} = 0 \rightarrow [R_{\nu\rho}]_{\Sigma} = g^{\mu\beta}[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} = 0 \quad (1.7)$$

Usando então (1.6), virá

$$g^{\mu\beta}k_{[\rho}\psi_{\beta][\mu}k_{\nu]} = \psi_{\rho\nu}k^{\alpha}k_{\alpha} - k_{\nu}\psi_{\rho\alpha}k^{\alpha} - k_{\rho}\psi_{\nu\alpha}k^{\alpha} + (\psi_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})k_{\rho}k_{\nu} = 0 \quad (1.8)$$

Multiplicando esta equação $k_{\mu}k_{\beta}$ e antissimetrizando nos pares (μ, ν) e (β, ρ) , restará de (1.8) apenas,

$$\left\{k_{[\rho}\psi_{\beta][\mu}k_{\nu]}\right\}k_{\alpha}k^{\alpha} = 0$$

e como o termo entre chaves é, por (1.6), a própria descontinuidade do tensor de curvatura através de Σ , a expressão anterior se escreverá como:

$$[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma}k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (1.9)$$

Deste modo, de acordo com (1.9), ou o tensor de curvatura ele próprio não apresenta descontinuidades, $[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} = 0$, ou em apresentando tal descontinuidade, a superfície pela qual esta se propaga é do tipo nula:

$$k^{\alpha}k_{\alpha} = 0 \quad (1.10)$$

Vemos, assim, que as frentes de onda são superfícies nulas sendo o vetor k^{μ} , normal a tal hipersuperfície, o vetor de propagação. Tal resultado nos assegura também que, no vazio, a radiação gravitacional possui localmente uma velocidade fundamental: a da luz.

1.2 A estrutura algébrica do setor descontínuo da curvatura.

Conforme vimos na secção precedente, o setor descontínuo do tensor de curvatura está associado ao tensor $\psi_{\mu\nu}$, simétrico, de acordo com (1.6). Iremos agora explorar mais detalhadamente a estrutura algébrica do tensor $\psi_{\mu\nu}$, de modo a estabelecermos posteriormente qual a estrutura algébrica de $[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma}$.

Vamos assumir, então, que a superfície Σ é, de fato, a frente de onda. Tomando (1.8), fazendo o produto desta equação por k_{λ} e antissimetrizando em (λ, ρ) , obtemos,

$$k_{[\lambda}\psi_{\rho]\nu} k^{\alpha}k_{\alpha} - k_{\nu} k_{[\lambda}\psi_{\rho]\alpha}k^{\alpha} = 0$$

e, por (1.10), resta apenas,

$$k_{[\lambda}\psi_{\rho]\alpha}k^{\alpha} = k_{\lambda}\psi_{\rho\alpha}k^{\alpha} - k_{\rho}\psi_{\lambda\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (1.11)$$

e daí então,

$$\psi_{\rho\alpha}k^{\alpha} = p k_{\rho}$$

para algum campo escalar p . Substituindo esta expressão em (1.8), encontramos que o escalar p está relacionado ao traço de $\psi_{\mu\nu}$ por,

$$p = \frac{1}{2} \psi_{\alpha}^{\alpha}$$

Daí, então temos, finalmente,

$$\psi_{\rho\alpha}k^{\alpha} = \frac{1}{2} \psi k_{\rho} \quad \text{onde, } \psi = \psi_{\alpha}^{\alpha} \quad (1.12)$$

Notemos ainda que, de acordo com (1.6) e com o vínculo (1.12) anterior, podemos

diretamente concluir as seguintes relações algébricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} [R_{\alpha\beta\mu\nu}]_{\Sigma} k^{\nu} = 0 \\ [R_{\alpha\beta[\mu\nu]}]_{\Sigma} k_{\rho]} = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Podemos agora assumir uma base vetorial para descrever mais detalhadamente a estrutura algébrica da descontinuidade do tensor de curvatura.

Sem perda de generalidade podemos assumir uma base semi-nula de vetores na qual o primeiro vetor de base é o próprio vetor nulo \vec{k} , de acordo com (1.10); completando a base com outro vetor nulo, \vec{n} , e dois vetores tipo espaço, $\{\vec{b}^2, \vec{b}^3\}$. Estes obedecem, juntamente com \vec{k} , as relações de quase-ortonormalidade usuais:

$$\left\{ \begin{array}{lll} g(\vec{k}, \vec{n}) = 1 & g(\vec{b}^2, \vec{b}^2) = -1 & g(\vec{b}^3, \vec{b}^3) = -1 \\ g(\vec{k}, \vec{b}^2) = 0 & g(\vec{k}, \vec{b}^3) = 0 & g(\vec{b}^2, \vec{b}^3) = 0 \\ g(\vec{n}, \vec{n}) = 0 & g(\vec{n}, \vec{b}^2) = 0 & g(\vec{n}, \vec{b}^3) = 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Nesta base o tensor $\psi_{\alpha\beta}$ se escreve, genericamente, como:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} &= \alpha_{00} k_{\alpha} k_{\beta} + \alpha_{01} (k_{\alpha} n_{\beta} + n_{\alpha} k_{\beta}) + \\ &+ \alpha_{02} (k_{\alpha} b_{\beta}^2 + b_{\alpha}^2 k_{\beta}) + \alpha_{03} (k_{\alpha} b_{\beta}^3 + b_{\alpha}^3 k_{\beta}) + \\ &+ \alpha_{11} n_{\alpha} n_{\beta} + \alpha_{12} (n_{\alpha} b_{\beta}^2 + b_{\alpha}^2 n_{\beta}) + \alpha_{13} (n_{\alpha} b_{\beta}^3 + b_{\alpha}^3 n_{\beta}) + \\ &+ \alpha_{22} b_{\alpha}^2 b_{\beta}^2 + \alpha_{23} (b_{\alpha}^2 b_{\beta}^3 + b_{\alpha}^3 b_{\beta}^2) + \alpha_{33} b_{\alpha}^3 b_{\beta}^3 \end{aligned}$$

onde $\{\alpha_{AB}\}$, são coeficientes escalares desta expansão. Acontece que o vínculo (1.12) impõe que, nesta base, $\alpha_{01} = 1/2\psi$, $\alpha_{33} = -\alpha_{22}$, e que sejam nulos os coeficientes

$\{\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}\}$. Deste modo, a expansão genérica para $\psi_{\alpha\beta}$ poderá ser descrita da forma,

$$\psi_{\mu\nu} = k_{(\mu} J_{\nu)} + \alpha_{22} (b_{\mu}^2 b_{\nu}^2 - b_{\mu}^3 b_{\nu}^3) + \alpha_{23} (b_{\mu}^2 b_{\nu}^3 + b_{\mu}^3 b_{\nu}^2) \quad (1.15)$$

onde

$$J_{\mu} = \alpha_{00} k_{\mu} + \psi n_{\mu} + 2\alpha_{02} b_{\mu}^2 + 2\alpha_{03} b_{\mu}^3 \quad (1.16)$$

é um vetor genérico.

Usando finalmente (1.15) em (1.6), encontramos que o setor descontínuo do tensor de curvatura tem a seguinte estrutura algébrica:

$$[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} = -2 \sum_{A=2}^3 \sum_{C=2}^3 N_{AC} k_{[\rho} b_{\beta]}^A b_{[\mu}^C k_{\nu]} \quad (1.17)$$

onde a matriz \mathbf{N} é simétrica e dada por:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & -\alpha_{22} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Deste modo, vemos que todos os graus de liberdade disponíveis para o setor descontínuo do tensor de curvatura estão ligados à matriz \mathbf{N} , dada em (1.18). Notemos que apesar da presença da corrente J_{μ} no tensor $\psi_{\mu\nu}$, esta em nada contribue para $[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma}$.

A pergunta natural que surge então é: Como pode o tensor de descontinuidade $\psi_{\mu\nu}$ depender do vetor J_{μ} e este, por sua vez, em nada afetar a descontinuidade do tensor de curvatura?

Devemos inicialmente lembrar que o tensor $\psi_{\mu\nu}$ foi construído em termos da segunda derivada da métrica e não em termos do tensor de curvatura diretamente. Sendo assim, a informação que este tensor carrega é, em princípio, diferente daquela que $[R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma}$, em (1.17), carrega. Conforme mostraremos a seguir a diferença está ligada ao grupo geral de transformações de coordenadas, haja visto que uma transformação do grupo geral de transformações de coordenadas pode eliminar J_{μ} , da expressão para $\psi_{\mu\nu}$, sem eliminar os

termos que estarão presentes em (1.17).

De fato, se considerássemos a matriz $\mathbf{N} = 0$, então teríamos,

$$\psi_{\mu\nu} = k_{(\mu} J_{\nu)} \rightarrow \begin{cases} [g_{\mu\nu}, \beta, \rho]_{\Sigma} = k_{\beta} k_{\rho} k_{(\mu} J_{\nu)} \\ [R_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Nesta situação existe uma transformação de coordenada que remove a descontinuidade presente na segunda derivada do tensor métrico. Em uma vizinhança da superfície $u_0 = 0$ esta transformação é dada por,

$$x^{\mu} \rightarrow \bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{12} u^3 \Theta(u) J^{\mu}(x) \quad (1.20)$$

Deste modo vemos, que o setor de $\psi_{\mu\nu}$ que efetivamente carrega os graus de liberdade associados à descontinuidade da curvatura, de acordo com (1.17), é aquele associado à matriz \mathbf{N} , definida em (1.18).

A discussão feita nesta secção, para o setor descontínuo do tensor de curvatura depende do fato de assumirmos como válidas as equações de Einstein no vazio, de acordo com (1.7). Deste modo, os mesmos resultados (1.6), (1.12) e (1.13) são válidos para o tensor de Weyl haja vista que, no vazio, o tensor de curvatura é o próprio tensor de Weyl.

Assim, podemos sumarizar o resultado obtido nesta secção dizendo que uma onda de choque gravitacional é caracterizada por um comportamento descontínuo do tensor de Weyl, através de uma superfície nula, e cujo tensor de Weyl associado é de um tipo algébrico particular que satisfaz a relação algébrica,

$$[W_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} k^{\rho} = 0 \quad (1.21)$$

para uma dada solução das equações de Einstein, do vazio. Isto por sua vez, implica que

tal tipo algébrico é da forma:

$$[W_{\mu\nu\beta\rho}]_{\Sigma} = -2 \sum_{A=2}^3 \sum_{C=2}^3 N_{AC} k_{[\rho} b_{\beta]}^A b_{[\mu}^C k_{\nu]} \quad (1.22)$$

com a matriz N definida por (1.18). Ao discutirmos, a seguir, a classificação de Petrov, veremos que a estrutura algébrica do tensor de Weyl (1.22) corresponde ao tipo II -degenerado, também chamado tipo N de Petrov.

1.3 A classificação de Petrov

1.3.1 O problema de autovalores para o tensor de Weyl

O resultado básico da secção precedente consiste no fato de que uma onda de choque gravitacional gera um tensor de Weyl que possui uma estrutura algébrica específica, de acordo com (1.21) e (1.22). De acordo com a classificação de Petrov podemos separar o tensor de Weyl em classes algébricas distintas, de acordo com o número de autovetores linearmente independentes, associados à seguinte equação de autovalores bivetorial:

$$W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = 2\lambda M^{\mu\nu} \quad \text{onde, } M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu} \quad (1.23)$$

Trata-se portanto, de um modo de classificar o tensor de Weyl ponto a ponto, sendo que um determinado tipo pode mudar de um ponto a outro. Como a classificação de Petrov é de natureza puntual, podemos então, sem perda de generalidade, efetuá-la em uma base local de tétradas ortonormais, $\{e_{(A)}^{\mu}\}$, tomando a equação de autovalores em termos de escalares:

$$W^{CD}{}_{AB} M^{AB} = 2\lambda M^{CD} \quad \text{onde, } M^{AB} = -M^{BA} \quad (1.24)$$

e ainda,

$$\begin{cases} W_{ABCD} = W_{\mu\nu\alpha\beta} e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu e_{(C)}^\alpha e_{(D)}^\beta \\ M_{AB} = M_{\mu\nu} e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu \end{cases} \quad (1.25)$$

O sistema de equações (1.24) é constituído por seis equações lineares cujas incógnitas são as seis componentes independentes do bivector M^{AB} . Escrevendo explicitamente este sistema de equações e colocando-o sob a forma matricial, teremos então,

$$\mathbf{W} \mathbf{M} = \lambda \mathbf{M} \quad (1.26)$$

onde,

$$\mathbf{M} = (M^{23} \quad M^{31} \quad M^{12} \quad M^{01} \quad M^{02} \quad M^{03})^T \quad (1.27)$$

sendo pensado como um “vetor” de seis componentes, e ainda,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} W^{23}_{23} & W^{23}_{31} & W^{23}_{12} & W^{23}_{01} & W^{23}_{02} & W^{23}_{03} \\ W^{31}_{23} & W^{31}_{31} & W^{31}_{12} & W^{31}_{01} & W^{31}_{02} & W^{31}_{03} \\ W^{12}_{23} & W^{12}_{31} & W^{12}_{12} & W^{12}_{01} & W^{12}_{02} & W^{12}_{03} \\ W^{01}_{23} & W^{01}_{31} & W^{01}_{12} & W^{01}_{01} & W^{01}_{02} & W^{01}_{03} \\ W^{02}_{23} & W^{02}_{31} & W^{02}_{12} & W^{02}_{01} & W^{02}_{02} & W^{02}_{03} \\ W^{03}_{23} & W^{03}_{31} & W^{03}_{12} & W^{03}_{01} & W^{03}_{02} & W^{03}_{03} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Entretanto, na forma atual, o problema de autovalores não está posto de forma conveniente. Sabemos que o tensor de Weyl comporta dez graus de liberdade e que, portanto, a matriz anterior pode ser reescrita em termos dos graus de liberdade independentes do tensor de Weyl. A vantagem de trabalharmos na base local ortonormal, em vez de bases coordenadas, está no fato de podermos controlar os graus de liberdade acomodados nas componentes independentes do tensor de Weyl de um modo trivial. Com efeito sabemos

que, nesta base,

$$\begin{aligned} W^0_{BCD} &= W_{0BCD}, & W^i_{BCD} &= -W_{iBCD}, \\ W^{i0}_{CD} &= -W_{i0CD}, & W^{ij}_{CD} &= W_{ijCD}, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Deste modo podemos usar as simetrias do tensor de Weyl,

$$\begin{aligned} W_{ABCD} &= W_{[AB]CD} = W_{AB[CD]} = W_{CDAB} \\ W^C_{[ABD]} &= 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

bem como as propriedades de traços,

$$W^A_{BAC} = W^{AB}_{AB} = 0 \tag{1.30}$$

para eliminar todos os graus de liberdade espúrios no tensor de Weyl, nesta base.

Poderíamos reduzir (1.28) apenas às componentes independentes usando a base ortonormalizada. Entretanto optamos por caracterizar o tensor de Weyl nesta base, em termos das chamadas partes elétrica e magnética do mesmo, que são tensores simétricos e sem traços definidos, na base ortonormal, por:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu} = -W_{\mu\rho\nu\sigma} e^\rho_{(0)} e^\sigma_{(0)} \\ H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu} = -\tilde{W}_{\mu\rho\nu\sigma} e^\rho_{(0)} e^\sigma_{(0)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E^\mu{}_\mu = E_\mu{}^\mu = 0 \\ H^\mu{}_\mu = H_\mu{}^\mu = 0 \end{array} \right. \tag{1.31}$$

Deste modo, ficará evidente a estreita analogia entre o presente problema de autovalores (bivetorial) e o problema de autovalores (vetorial) associado ao tensor de Maxwell, [35], no espaço de Minkowski. Na base de tétradas ortonormal os tensores (E_{AB}, H_{AB}) não possuirão

componentes $(0, i)$, podendo ser expressos pelas matrizes tridimensionais,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

e com as condições de traço nulo expressas simplesmente por,

$$E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0 \quad H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0 \quad (1.33)$$

Em termos destas quantidades a matriz de Weyl, (1.28), fica então escrita como,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Escrevendo também o 6-vetor, (1.27), em termos de 3-vetores (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , definidos por,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M^{01} \\ M^{02} \\ M^{03} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} M^{23} \\ M^{31} \\ M^{12} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

o problema de autovalores para o tensor de Weyl, (1.26), ficará finalmente posto do seguinte modo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

ou

$$\begin{cases} \mathbf{EB} - \mathbf{HA} = \lambda \mathbf{B} \\ \mathbf{HB} + \mathbf{EA} = \lambda \mathbf{A} \end{cases} \quad (1.37)$$

1.3.2 Solução do problema de autovalores.

O polinômio característico associado ao problema de autovalores real, em dimensão seis, dado em (1.26), admite em geral no máximo seis raízes distintas. Quaisquer raízes

complexas do problema aparecerão aos pares conjugados, haja visto que a matriz (1.28) é real. Entretanto prosseguir na busca das soluções com o sistema 6×6 , (1.26), não é evidentemente uma boa estratégia. Reduzindo o problema para três dimensões reais, como no sistema acoplado (1.37), não fornece tampouco algum avanço pois cada equação, separadamente, não constitui um problema de autovalores. Podemos, entretanto, transformar este sistema em um problema de autovalores complexo em dimensão três, desacoplando o sistema linear (1.37).

Isto pode ser feito definindo a matriz de Petrov, complexa, e dada por

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} - i\mathbf{H} \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{E} + i\mathbf{H} \quad (1.38)$$

de modo que o sistema (1.37) se escreverá como,

$$\begin{cases} \mathbf{P}\mathbf{U} &= \lambda \mathbf{U} \\ \mathbf{P}\mathbf{V} &= \bar{\lambda} \mathbf{V} \end{cases} \quad (1.39)$$

que são duas equações distintas e simultâneas para os autovetores $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$, onde,

$$\begin{cases} \mathbf{U} &= \mathbf{B} - i\mathbf{A} \\ \mathbf{V} &= \bar{\mathbf{B}} - i\bar{\mathbf{A}} \end{cases} \quad (1.40)$$

Tomando, então, a primeira das equações em (1.39) e resolvendo então a equação secular,

$$|\mathbf{P} - \lambda \mathbf{1}_3| = 0 \quad (1.41)$$

encontramos três soluções complexas do problema complexo. Note que estas serão, em geral, três raízes complexas distintas dada a natureza complexa de \mathbf{P} . Deste modo se estas raízes $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, do polinômio característico para \mathbf{P} , são autovalores do problema real original, então $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\}$ também o são. Ainda, se os autovetores associados ao conjunto $\{\lambda_{(k)}, k = 1, 2, 3\}$ são dados por $\{\mathbf{B}_{(k)}, \mathbf{A}_{(k)}\}$, então os autovetores associados ao conjunto

$\{\bar{\lambda}_{(k)}\}$ são dados por $\{\bar{\mathbf{B}}_{(k)}, \bar{\mathbf{A}}_{(k)}\}$.

Assim para construirmos os autovetores solução do problema real original procedemos então do seguinte modo: De posse dos autovalores $\{\lambda_{(k)}\}$ encontramos diretamente os autovetores $\{\mathbf{U}_{(k)}\}$ da primeira das equações em (1.39). Tomando então as conjugadas complexas destas mesmas raízes e substituindo-as na segunda equação de (1.39) encontramos os correspondentes $\{\mathbf{V}_{(k)}\}$. Deste modo, os autovetores $\{\mathbf{B}_{(k)}, \mathbf{A}_{(k)}\}$, que são a solução do problema real original serão dados, de acordo com (1.40), por:

$$\lambda_{(k)} \Rightarrow \mathbf{M}_{(k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{(k)} \\ \mathbf{A}_{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{(k)} + \bar{\mathbf{V}}_{(k)} \\ i(\mathbf{U}_{(k)} - \bar{\mathbf{V}}_{(k)}) \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

e as complexas conjugadas.

$$\bar{\lambda}_{(k)} \Rightarrow \bar{\mathbf{M}}_{(k)} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{(k)} \\ \bar{\mathbf{A}}_{(k)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}}_{(k)} + \mathbf{V}_{(k)} \\ -i(\bar{\mathbf{U}}_{(k)} - \mathbf{V}_{(k)}) \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

Do ponto de vista do espaço-tempo temos então no máximo seis bivectores distintos $\{\lambda_{(k)}, \mathbf{M}_{(k)}\}$ e $\{\bar{\lambda}_{(k)}, \bar{\mathbf{M}}_{(k)}\}$, $\{k = 1, 2, 3\}$, associados ao problema de autovalores bivectorial, (1.24), para o tensor de Weyl.

Deste modo podemos classificar a matriz \mathbf{P} (e conseqüentemente o tensor de Weyl), conforme o número de autovetores distintos, $\mathbf{U}_{(k)}$, definindo classes algébricas distintas. Nisto constitui a classificação de Petrov, [11]. Cada possibilidade distinta das soluções (1.42) e (1.43), define um tipo de Petrov. Estes tipos algébricos recebem nomes e símbolos particulares os quais sumarizamos na tabela que segue.

<i>autovetores LI</i>	<i>3</i>			<i>2</i>			<i>1</i>		
<i>tipo de Petrov</i>	<i>I</i>			<i>II</i>			<i>III</i>		
<i>autovalores distintos</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>tipos com degenerescência</i>		<i>D</i>	<i>O</i>		<i>N</i>				

Os tipos *I* e *II* podem apresentar degenerescência. Costuma-se, então, atribuir nomes especiais a certos casos degenerados, conforme indicamos na última linha do quadro.

O tipo *I*-degenerado é dito tipo *D* e o tipo *II*-degenerado é dito *N*. Incluímos ainda na tabela o tipo *O* que corresponde ao tensor de Weyl identicamente nulo. Em termos dos autovalores, chamemos atenção para o seguinte fato: Como a matriz **P** não possui traços, a soma das raízes $\{\lambda_{(k)}\}$ é zero. Deste modo o valor correspondente ao único autovalor disponível no tipo *N* de Petrov é necessariamente o autovalor zero.

1.4 Campo de radiação gravitacional.

Dentre os tipos de Petrov, o tipo *N* é aquele que nos concerne mais diretamente na descrição da radiação gravitacional. Para discutirmos esta questão, tomemos o polinômio característico associado ao problema de autovalores para o tensor de Weyl dado em (1.41):

$$|\mathbf{P} - \lambda \mathbf{1}_3| = 0.$$

Os coeficientes deste polinômio estarão associados aos invariantes algébricos do tensor de Weyl. Expandindo a expressão acima, usando a definição de **P**, (1.38), e reescrevendo o polinômio em termos das entradas da matriz **P** nesta base, esta equação característica se escreve explicitamente como:

$$\lambda^3 - \left(\frac{I_1 - iI_2}{2}\right)\lambda + \left(\frac{I_3 + iI_4}{3}\right) = 0 \quad (1.44)$$

onde $\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$, são dados por:

$$\begin{cases} I_1 &= E_{AB}E^{AB} - H_{AB}H^{AB} \\ I_2 &= 2E_{AB}H^{AB} \\ I_3 &= -E^A{}_B E^B{}_C E^C{}_A + 3H^A{}_B H^B{}_C E^C{}_A \\ I_4 &= H^A{}_B H^B{}_C H^C{}_A - 3E^A{}_B E^B{}_C H^C{}_A \end{cases} \quad (1.45)$$

em estreita analogia com os invariantes associados ao tensor de Maxwell

$$\frac{1}{2}F_{AB}F^{AB} = E_A E^A - H_A H^A \quad \frac{1}{2}F_{AB} \overset{*}{F}{}^{AB} = 2 E_A H^A \quad (1.46)$$

De fato, os invariantes $\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ acima, quando reescritos em termos das componentes do tensor de Weyl e do seu dual são dados pelas seguintes expressões, [20]:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = (1/8) W_{ABCD} W^{ABCD} \\ I_2 = (1/8) W_{ABCD} \overset{*}{W}{}^{ABCD} \\ I_3 = (1/16) W_{ABCD} W^{CDKL} W_{KL}{}^{AB} \\ I_4 = (1/16) \overset{*}{W}{}_{ABCD} W^{CDKL} W_{KL}{}^{AB} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

No caso eletromagnético, a noção de radiação é bem estabelecida. Sabemos que um campo de radiação eletromagnético pode ser definido em termos dos invariantes algébricos (1.46), associados ao tensor de Maxwell, [35], como sendo o campo para o qual estes se anulam.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}F_{AB}F^{AB} = 0 \Rightarrow E_A E^A = H_A H^A \\ \frac{1}{2}F_{AB} \overset{*}{F}{}^{AB} = 0 \Rightarrow E_A H^A = 0 \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Neste caso o campo eletromagnético é dito um **campo de radiação** ou **campo nulo**.

De modo análogo, diremos que o campo gravitacional é um puro campo de radiação, ou nulo, quando:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{ABCD} W^{ABCD} = W_{ABCD} \overset{*}{W}{}^{ABCD} = 0 \\ W_{ABCD} W^{CDKL} W_{KL}{}^{AB} = \overset{*}{W}{}_{ABCD} W^{CDKL} W_{KL}{}^{AB} = 0 \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Deste modo, o polinômio característico (1.44) terá apenas uma raiz independente (e

igual a zero). Observando, então, a tabela exibida na secção (1.3.2) vemos que isto equivale dizer que o tensor de Weyl que satisfaz a condição de radiação (1.49) é do tipo N ou III , mas não do tipo I .

Ainda, tomando-se o tensor de Weyl da forma (1.22), construindo suas partes elétrica e magnética e montando a matriz (1.38) associada aquela expressão particular para o tensor de Weyl, encontramos que o tipo correspondente à (1.22) é o N . Deste modo vemos que as discontinuidades do tensor de Weyl produzem um caso algebricamente especial, da classificação de Petrov, que é do tipo- N .

Conforme mencionamos anteriormente um espaço-tempo cujo tensor de Weyl satisfaça (1.49) exatamente, representa um sistema de pura radiação gravitacional. Sistemas radiativos provenientes da emissão por uma fonte limitada no espaço, por sua vez, poderiam ser caracterizados por um espaço-tempo algebricamente genérico, do tipo I , admitindo porém assintoticamente uma estrutura deste tipo (N ou III) para o tensor de Weyl.

1.5 As direções nulas principais do tensor de Weyl.

Embora tenhamos feito a classificação de Petrov, para o tensor de Weyl, através do problema de autovalores bivetorial (1.24), conforme já dissemos, outros modos equivalentes de classificar algebricamente este tensor são conhecidos. Em particular o chamado método tensorial devido a Debever, [10], permite compreender o significado dos tipos de Petrov sob uma nova perspectiva.

De acordo com Debever, **todo espaço-tempo vazio admite no mínimo um e no máximo quatro vetores tipo-nulos reais, como soluções das seguintes equações:**

$$n_{[A} W_{B]EF[C} n_{D]} n^E n^F = 0 \quad n^A n_A = 0 \quad (1.50)$$

e diz-se, então, que estes vetores definem as **direções nulas principais** do tensor de Weyl.

Estas equações podem apresentar multiplicidade de soluções. Assim, é possível mostrar que um modo equivalente de se fazer a classificação de Petrov consiste em contar as diversas possibilidades de soluções múltiplas das equações (1.50).

1.5.1 Bases nulas locais.

Para demonstrarmos o resultado (1.50) é conveniente introduzirmos uma base nula de tétradas, na qual o elemento de linha se escreve como:

$$dS^2 = 2N^0N^1 - 2N^2N^3 \quad (1.51)$$

Esta base pode ser obtida trivialmente a partir de uma base usual ortonormal $\{\theta^A\}$ fazendo as combinações:

$$\begin{cases} N^0 = (\theta^0 - \theta^1) / \sqrt{2} & N^1 = (\theta^0 + \theta^1) / \sqrt{2} \\ N^2 = (\theta^2 - i\theta^3) / \sqrt{2} & N^3 = (\theta^2 + i\theta^3) / \sqrt{2} \end{cases} \quad (1.52)$$

Deste modo vemos que as tétradas $\{N^0, N^1\}$ são reais e $\{N^2, N^3\}$ são complexas, uma conjugada a outra. Em termos dos diferenciais de coordenada, dx^μ , estas tétradas definem quatro vetores nulos no espaço-tempo,

$$\begin{cases} N^0 = \mathbf{n} = n_\mu dx^\mu & N^1 = \mathbf{k} = k_\mu dx^\mu \\ N^2 = \mathbf{m} = m_\mu dx^\mu & N^3 = \bar{\mathbf{m}} = \bar{m}_\mu dx^\mu \end{cases} \quad (1.53)$$

sendo o par $\{n_\mu, k_\mu\}$ reais e o par $\{m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ complexos, um conjugado ao outro. Genericamente poderíamos escrever de forma compacta,

$$N^A = n_\mu^{(A)} dx^\mu \quad (1.54)$$

onde $\{n_\mu^{(0)}, n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, n_\mu^{(3)}\} = \{n_\mu, k_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$.

Nesta base a métrica local $\{g_{AB}, g^{AB}\}$ se escreve como:

$$g^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

onde,

$$g_{AB} = g_{\mu\nu} n_{(A}^\mu n_{B)}^\nu \quad g^{AB} = g^{\mu\nu} n_\mu^{(A)} n_\nu^{(B)} \quad (1.56)$$

Um tensor genérico $\{\mathbf{T}\}$ descrito nesta base de tétradas terá, em geral, componentes complexas. Se este for um tensor real no espaço-tempo, então o escalar,

$$\mathbf{T} = T_{\mu\dots\nu} dx^\mu \dots dx^\nu = T_{A\dots B} N^A \dots N^B \quad (1.57)$$

será um objeto real. Assim, uma regra prática para sabermos se um conjunto de componentes complexas $\{T_{A\dots B}\}$, nesta base, correspondem a um tensor real no espaço-tempo consiste no seguinte: trocando-se simultaneamente quaisquer índices (2, 3) por (3, 2) a componente em questão deverá ser levada em sua complexa conjugada, isto é,

$$\overline{T_{A\dots 23\dots B}} = T_{A\dots 32\dots B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \text{ é real.} \quad (1.58)$$

Notemos também que nesta base, ao subirmos ou descermos um índice local $\{A\}$, temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} T_{A\dots 0\dots B} &= T_{A\dots 1\dots B} & T_{A\dots 1\dots B} &= T_{A\dots 0\dots B} \\ T_{A\dots 2\dots B} &= -T_{A\dots 3\dots B} & T_{A\dots 3\dots B} &= -T_{A\dots 2\dots B} \end{aligned} \quad (1.59)$$

Outro aspecto que devemos chamar atenção refere-se ao pseudo tensor de Levi-Civita

nesta base:

$$\eta_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \quad \varepsilon_{0123} = 1 \quad (1.60)$$

Deste modo, o objeto $\{\eta_{ABCD}\}$ será dado por,

$$\eta_{ABCD} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} n_{(A)}^\mu n_{(B)}^\nu n_{(C)}^\lambda n_{(D)}^\rho = \sqrt{-g} \det(n_{(L)}^\mu) \varepsilon_{ABCD}$$

mas, de acordo com (1.56) temos,

$$\sqrt{-g} \det(n_{(L)}^\mu) = \pm i \quad (1.61)$$

fixando então o sinal positivo, a expressão anterior para η_{ABCD} ficará,

$$\eta_{ABCD} = i \varepsilon_{ABCD} \quad \varepsilon_{0123} = 1 \quad (1.62)$$

Com esta base, podemos escrever de modo simples a relação entre um dado tensor e o seu dual. Com efeito, se f_{AB} é um bivector e,

$$f_{AB}^* = -\frac{1}{2} \eta_{ABCD} f^{CD} \quad (1.63)$$

é o dual a ele associado, então o cálculo explícito, nesta base, de acordo com (1.59) e (1.62), mostra que:

$$\begin{aligned} f_{12}^* &= i f_{12} & f_{13}^* &= -i f_{13} & f_{23}^* &= i f_{01} \\ f_{02}^* &= -i f_{02} & f_{03}^* &= i f_{03} & f_{01}^* &= i f_{23} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Em particular se um bivector $\{f_{AB}^{(+)}\}$ for autodual, isto é, se

$$f_{AB}^{(+)*} = i f_{AB}^{(+)} \quad (1.65)$$

então este se escreverá, nesta base, de tal modo que:

$$f_{13}^{(+)} = f_{02}^{(+)} = 0 \quad \text{e} \quad f_{23}^{(+)} = f_{01}^{(+)} \quad (1.66)$$

Se $\{f_{AB}^{(-)}\}$ for anti-autodual,

$$f_{AB}^{(-)*} = -if_{AB}^{(-)} \quad (1.67)$$

então,

$$f_{12}^{(-)} = f_{03}^{(-)} = 0 \quad \text{e} \quad f_{23}^{(-)} = -f_{01}^{(-)} \quad (1.68)$$

Deste modo, $\{f_{AB}^{(+)}, f_{AB}^{(-)}\}$ podem ser representados, nesta base, pelas matrizes:

$$f_{AB}^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ -\alpha & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & \alpha \\ -\beta & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad f_{AB}^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 \\ -\tilde{\alpha} & 0 & 0 & \tilde{\sigma} \\ -\tilde{\beta} & 0 & 0 & -\tilde{\alpha} \\ 0 & -\tilde{\sigma} & \tilde{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

Podíamos dizer, então, que esta base de tétradas é uma base natural para descrever bivectores autoduais e anti-autoduais.

1.5.2 Bases bivectoriais autoduais/anti-autoduais

Podemos, com esta motivação, definir bases bivectoriais a partir de (1.53), que expandem bivectores autoduais e anti-autoduais. De fato, definimos uma base para 2-formas de modo

que três delas são auto-duais e três são anti-autoduais do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^{(1)} = N^3 \wedge N^0 \\ \Omega^{(2)} = N^1 \wedge N^2 \\ \Omega^{(3)} = \frac{1}{2} (N^1 \wedge N^0 - N^2 \wedge N^3) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}^{(1)} = N^2 \wedge N^0 \\ \bar{\Omega}^{(2)} = N^1 \wedge N^3 \\ \bar{\Omega}^{(3)} = \frac{1}{2} (N^1 \wedge N^0 + N^2 \wedge N^3) \end{array} \right. \quad (1.70)$$

As componentes $\{\Omega_{AB}^{(m)}\}$ destas bases para 2-formas, tais que,

$$\Omega^{(m)} = \Omega_{AB}^{(m)} N^A \wedge N^B \quad (1.71)$$

são dadas por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{AB}^{(1)} = 2\delta_{[A}^3 \delta_{B]}^0 \\ \Omega_{AB}^{(2)} = 2\delta_{[A}^1 \delta_{B]}^2 \\ \Omega_{AB}^{(3)} = (\delta_{[A}^1 \delta_{B]}^0 - \delta_{[A}^2 \delta_{B]}^3) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{AB}^{(1)} = 2\delta_{[A}^2 \delta_{B]}^0 \\ \bar{\Omega}_{AB}^{(2)} = 2\delta_{[A}^1 \delta_{B]}^3 \\ \bar{\Omega}_{AB}^{(3)} = (\delta_{[A}^1 \delta_{B]}^0 + \delta_{[A}^2 \delta_{B]}^3) \end{array} \right. \quad (1.72)$$

Daí vemos então, de acordo com (1.66) e (1.68), que $\{\Omega^{(m)}\}$ são bases autoduais, enquanto que $\{\bar{\Omega}^{(m)}\}$ são bases anti-autoduais:

$$\star \Omega^{(m)} = i\bar{\Omega}^{(m)} \quad \star \bar{\Omega}^{(m)} = -i\Omega^{(m)} \quad (1.73)$$

Assim, dado qualquer bivector real $f_{\mu\nu}$ podemos definir as suas partes autodual e anti-autodual, por

$$f_{\mu\nu}^{(+)} = f_{\mu\nu} - i \star f_{\mu\nu} \quad f_{\mu\nu}^{(-)} = f_{\mu\nu} + i \star f_{\mu\nu} \quad (1.74)$$

de modo que $\{f_{\mu\nu}^{(+)}\}$ satisfaz (1.65) e $\{f_{\mu\nu}^{(-)}\}$ satisfaz (1.67). Inversamente, dadas as partes autodual e anti-autodual de um tensor real poderemos escrevê-lo como a soma de

suas partes autoduais e anti-autoduais:

$$f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (f_{\mu\nu}^{(+)} + f_{\mu\nu}^{(-)}) \quad \star f_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (f_{\mu\nu}^{(+)} - f_{\mu\nu}^{(-)}) \quad (1.75)$$

Desta maneira, usando a base de tétratas (1.52) bem como a base para 2-formas (1.70), a 2-forma associada a $\{f_{\mu\nu}\}$ se escreverá, nestas bases, como:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} f_{AB} N^A \wedge N^B = f_m \Omega^{(m)} + \bar{f}_m \bar{\Omega}^{(m)} \quad (1.76)$$

onde $\{m = 1, 2, 3\}$, e os seis graus de liberdade que \mathbf{f} comporta são agora carregados pelos pares de complexos conjugados $\{f_m, \bar{f}_m\}$. A relação entre cada $\{f_m, \bar{f}_m\}$ com f_{AB} é facilmente obtida usando (1.70) nas expressão anterior. Em particular, se \mathbf{f} já for um tensor autodual, $\mathbf{f}^{(+)}$, então teremos,

$$\mathbf{f}^{(+)} = \frac{1}{4} f_{AB}^{(+)} N^A \wedge N^B = f_m \Omega^{(m)} \quad (1.77)$$

ou se este já for anti-autodual, $\mathbf{f}^{(-)}$, virá,

$$\mathbf{f}^{(-)} = \frac{1}{4} f_{AB}^{(-)} N^A \wedge N^B = \bar{f}_m \bar{\Omega}^{(m)} \quad (1.78)$$

Deste modo podemos mapear bivectores reais $\{f_{\mu\nu}\}$, definidos no espaço-tempo, em 3-vetores complexos $\{f_m, \bar{f}_m\}$. Podemos então introduzir a noção de produto escalar no espaço dos 3-vetores complexos do seguinte modo:

De acordo com (1.77) e (1.69), o invariante complexo associado a $\mathbf{f}^{(+)}$ se escreve como,

$$\frac{1}{8} f_{AB}^{(+)} f^{(+)\,AB} = -\frac{1}{2} (f_{12}^{(+)} f_{03}^{(+)} + f_{01}^{(+)} f_{01}^{(+)}) \quad (1.79)$$

em termos dos $\{f_m\}$ esta expressão pode ser reescrita como,

$$\frac{1}{8} f_{AB}^{(+)} f^{(+)\,AB} = 2f_1 f_2 - \frac{1}{2} (f_3)^2 = \gamma^{mn} f_m f_n \quad (1.80)$$

onde,

$$\gamma^{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

Definimos então a inversa de γ como sendo a matriz:

$$\gamma_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

As entradas de γ podem ser obtidas diretamente a partir da base (1.70):

$$\gamma^{mn} = \frac{1}{2} \Omega_{AB}^{(m)} \Omega^{(n)\,AB} \quad (1.83)$$

Notemos ainda que a mesma “métrica” bivectorial é obtida quando tomamos contrações das bases $\{\bar{\Omega}^{(m)}\}$,

$$\gamma^{mn} = \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{AB}^{(m)} \bar{\Omega}^{(n)\,AB} \quad (1.84)$$

e que os espaços expandidos por $\{\Omega^{(m)}\}$ e $\{\bar{\Omega}^{(m)}\}$ são ortogonais:

$$0 = \frac{1}{2} \Omega_{AB}^{(m)} \bar{\Omega}^{(n)\,AB} \quad (1.85)$$

1.5.3 As direções nulas principais.

De posse destas ferramentas desenvolvidas acima podemos então, demonstrar que o tensor de Weyl possui quatro direções nulas principais e com estas fazer a classificação de

Petrov. Para isso tomemos o tensor de Weyl e construíamos com este o tensor autodual:

$$W_{ABCD}^{(+)} = W_{ABCD} - i \bar{W}_{ABCD}^* \quad (1.86)$$

Em termos da base bivetorial (1.70) este se escreverá como,

$$W_{ABCD}^{(+)} = W_{mn} \Omega_{AB}^{(m)} \Omega_{CD}^{(n)} \quad (1.87)$$

onde $\{W_{mn}\}$ é uma matriz simétrica, de acordo com as simetrias do tensor de Weyl e, ainda, pela ausência de traços no tensor de Weyl teremos:

$$W_{AB}^{(+)}{}^{AB} = 0 = W_{mn} \Omega_{AB}^{(m)} \Omega^{(n)AB} = 2W_{mn} \gamma^{mn}$$

A condição de que o traço de $\{W_{mn}\}$ é nulo, pela matriz γ^{mn} , de acordo com (1.81), se escreve simplesmente como:

$$W_{mn} \gamma^{mn} = 2W_{12} - \frac{1}{2}W_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{33} = 4W_{12} \quad (1.88)$$

Assim, a matriz complexa W_{mn} terá cinco graus de liberdade complexos que correspondem aos dez graus de liberdade reais do tensor de Weyl. Com efeito se construíssemos a parte anti-autodual do tensor de Weyl, esta se escreveria em termos de $\{W_{mn}\}$ como,

$$W_{ABCD}^{(-)} = \bar{W}_{mn} \bar{\Omega}_{AB}^{(m)} \bar{\Omega}_{CD}^{(n)} \quad (1.89)$$

e o tensor de Weyl se escreve, então, como:

$$2W_{ABCD} = W_{mn} \Omega_{AB}^{(m)} \Omega_{CD}^{(n)} + \bar{W}_{mn} \bar{\Omega}_{AB}^{(m)} \bar{\Omega}_{CD}^{(n)} \quad (1.90)$$

Tomemos, então a classe de 3-vetores complexos F_m que satisfazem:

$$\begin{cases} W_{mn} F^m F^n = 0 \\ \gamma_{mn} F^m F^n = 0 \end{cases} \quad (1.91)$$

A segunda condição em (1.91) implica, por (1.82), em

$$F^1 F^2 - (F^3)^2 = 0$$

e é identicamente satisfeita por qualquer F^m da forma:

$$F^m = (X^2, Y^2, XY) \quad (1.92)$$

Substituindo então a expressão anterior na primeira equação em (1.91) e usando ainda o fato de que W_{mn} não possui traço, no sentido de (1.88), virá:

$$W_{11} X^4 + 2W_{13} X^3 Y + 6W_{12} X^2 Y^2 + 2W_{23} X Y^3 + W_{22} Y^4 = 0 \quad (1.93)$$

Esta é uma equação quártica complexa homogênea nas componentes de F^m , que sempre admitirá raízes, num máximo de quatro soluções distintas. As quatro raízes desta equação, $\{\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}, \mathbf{F}^{(3)}, \mathbf{F}^{(4)}\}$, definirão quatro bivectores autoduais nulos no espaço-tempo. Acontece que um bivector nulo define univocamente um vetor real tipo-nulo associado a este. Deste modo, a cada um dos quatro bivectores nulos, associados aos $\{\mathbf{F}^{(k)}, k = 1, 2, 3, 4\}$, estará associado um vetor nulo real, num total de quatro. Estes definirão as **direções nulas principais** do tensor de Weyl.

Para mostrarmos isto admitamos que um dado \mathbf{F} é solução desta equação. Podemos então fazer um giro nas tétradas nulas, $\{N^0, N^1, N^2, N^3\} \Rightarrow \{\tilde{N}^0, \tilde{N}^1, \tilde{N}^2, \tilde{N}^3\}$, preservando a forma (1.51) da métrica local, de modo que o vetor solução seja paralelo a algum dentre os novos elementos da base bivetorial, definidos de modo análogo a (1.70). Sem perda de

generalidade, podemos assumir que a base de t etradas (1.53), anteriormente constru ıda, e a subseqüente base bivetorial com esta constru ıda, (1.70), é justamente aquela na qual um dado vetor solução \mathbf{F} é paralelo, por exemplo,   base $\Omega^{(2)}$. Neste caso teríamos então,

$$\mathbf{F}^{(1)} = F_m \Omega^{(m)} = X^2 \Omega^{(2)} \Rightarrow \bar{\mathbf{F}}^{(1)} = (X^2, 0, 0) \quad (1.94)$$

e como este é, por hipótese um vetor solução de (1.93) vemos que nesta base $W_{11} = 0$. Observando então (1.70) e (1.53) vemos que esta base está associada ao vetor real nulo k_μ por,

$$\Omega^{(2)} = N^{(1)} \wedge N^{(2)} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{m} \quad (1.95)$$

Deste modo $\mathbf{k} = k_\mu dx^\mu$ é, então, a direção nula principal associada   solução (1.94). Do mesmo modo, as outras soluções de (1.93) ter o associadas a elas outros três vetores nulos reais. Note que as outras soluções de (1.93), não seriam expressas de modo tão simples quanto (1.94), não sendo possível alinhar os eixos das t etradas com cada uma destas simultaneamente. O ponto importante aqui   que as direções nulas associadas a cada solução de (1.93) existem e podem ser exibidas por uma escolha conveniente de base, tal qual o fizemos para a solução anterior.

Podemos agora obter a relação algébrica que o tensor de Weyl guarda com estes vetores nulos, no espaço-tempo. Deixando do lado, por hora, os casos em que há raízes múltiplas em (1.93) tomemos a solução (1.94) e notemos que, nesta base,

$$\Omega_{AB}^{(m)} k^B = \delta_1^m \bar{m}_A + \frac{1}{2} \delta_3^m k_A \quad (1.96)$$

a parte auto-dual do tensor de Weyl $W_{ABCD}^{(+)}$ satisfará a seguinte relação:

$$\begin{aligned} W_{ABCD}^{(+)} k^B k^C &= W_{mn} \Omega_{AB}^{(m)} \Omega_{CD}^{(n)} k^B k^C \\ &= W_{11} \bar{m}_A \bar{m}_D + W_{13} \bar{m}_{(A} k_{D)} + W_{12} k_A k_D \end{aligned}$$

mas como $W_{11} = 0$ nesta base, teremos,

$$W_{ABCD}^{(+)} k^B k^C = W_{13} \tilde{m}_{(A} k_{D)} + W_{12} k_A k_D \quad (1.97)$$

ou ainda, usando (1.86), teremos,

$$W_{ABCD} k^B k^C - i \tilde{W}_{ABCD}^* k^B k^C = W_{13} \tilde{m}_{(A} k_{D)} + W_{12} k_A k_D \quad (1.98)$$

Multiplicando esta equação por k_E e k_F e antissimetrizando nos pares (E, A) e (D, F) encontramos a relação equivalente:

$$k_{[E} W_{A]B} k_{[D} k_{F]} k^B k^C - i k_{[E} \tilde{W}_{A]B}^* k_{[D} k_{F]} k^B k^C = 0 \quad (1.99)$$

que é, por sua vez, equivalente às condições reais:

$$\begin{cases} k_{[\mu} W_{\nu]\alpha} k_{\beta[\lambda} k_{\rho]} k^\alpha k^\beta = 0 \\ k_{[\mu} \tilde{W}_{\nu]\alpha}^* k_{\beta[\lambda} k_{\rho]} k^\alpha k^\beta = 0 \end{cases} \quad (1.100)$$

Deste modo os vetores reais tipo-nulos, associados às soluções de (1.93), são soluções das equações (1.100) acima. Pelo que já discutimos acima sabemos que estas equações sempre admitem vetores-solução, num máximo de quatro vetores distintos. Fica, assim, demonstrado o resultado já mencionado devido a Debever [10].

1.5.4 A classificação de Petrov revisitada.

Podemos classificar o tensor de Weyl em categorias algébricas distintas, de acordo com as diversas possibilidades de raízes múltiplas da equação (1.93), ou equivalentemente (1.100).

Para isto, vamos então introduzir a seguinte notação usual para as diversas configurações possíveis das direções nulas principais: indicamos por [1111] a situação na qual os quatro

vetores solução são distintos, [211] quando houverem apenas três soluções distintas (uma delas com multiplicidade 2), e assim por diante até a situação na qual há apenas um vetor que é uma solução de multiplicidade quatro, [4], quando os quatro vetores-solução são iguais. Cada configuração corresponderá, então, a um tipo algébrico distinto.

Assim, a classificação do tensor de Weyl segundo a multiplicidade das direções nulas principais a ele associadas poderia ser feita conforme a tabela abaixo:

<i>tipos</i>	[1111]	[211]	[22]	[31]	[4]
--------------	--------	-------	------	------	-----

Acontece que tal classificação é equivalente à classificação de Petrov, conforme mostraremos agora.

Notemos inicialmente que o problema de autovalores associado à matriz W^m_n corresponde ao mesmo problema de autovalores visto anteriormente para o tensor de Weyl. Com efeito, seja M um autobivetor do tensor de Weyl, que pode ser escrito genericamente em termos da base bivetorial $\{\Omega^{(m)}, \bar{\Omega}^{(m)}\}$ como,

$$M = \frac{1}{2} M_{AB} N^A \wedge N^B = U_m \Omega^m + \bar{V}_m \bar{\Omega}^m \tag{1.101}$$

onde $\{U_m, \bar{V}_m\}$ não precisam ser pares de complexos conjugados, haja visto que o autobivetor M não necessariamente é real.

Assim, de acordo com (1.90) e (1.101),

$$W_{ABCD} M^{CD} = W^p_m U_p \Omega^{(m)}_{AB} + \bar{W}^p_m \bar{V}_p \bar{\Omega}^{(m)}_{AB} \tag{1.102}$$

e como, por hipótese, \mathbf{M} é um autobivetor teremos,

$$\begin{cases} W^p_m U^m &= \lambda U^p \\ \bar{W}^p_m \bar{V}_m &= \lambda \bar{V}^p \end{cases} \quad (1.103)$$

que é, fundamentalmente, o mesmo problema de autovalores (1.39). Assim, podemos considerar apenas a matriz W^m_n para efeito da classificação de Petrov, que segue de acordo com os resultados encontrados da secção (1.3.2).

Retornemos então às classes algébricas definidas pelas multiplicidades das direções nulas principais. Para traçarmos o paralelo, tomaremos cada caso e discutiremos o problema de autovalor a ele associado.

- Caso [4]: Neste caso, a solução (1.94) é uma solução com multiplicidade quatro da equação (1.93) e, portanto, nesta base, não somente $W_{11} = 0$ (raíz simples), mas também $W_{13} = W_{12} = W_{23} = 0$ na mesma base. Deste modo a matriz W^m_n se escreverá simplesmente como:

$$W^m_n = \gamma^{mp} W_{pn} = \begin{pmatrix} 0 & W_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

e deste modo a equação característica,

$$|W^n_p - \lambda \delta^n_p| = 0$$

apresentará três raízes nulas. Haverão neste caso apenas dois autovetores distintos associados à W^m_n que poderão ser dados por,

$$U_1^m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

Observando então a classificassão de Petrov sumarizada na tabela exibida na secção

(1.3.2), vemos que este caso é o tipo- N .

- Caso [31]: Neste caso, (1.94) é solução tripla de (1.93). Nesta base, então, apenas $W_{11} = W_{13} = W_{12} = 0$. Além disto, como existe agora uma segunda direção nula distinta, podemos, sem perda de generalidade, e sem alterar a forma de (1.94), escolher a base de modo que a segunda solução de (1.93) esteja alinhada à Ω^1 , ou seja,

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(2)} = (0, Y^2, 0) \quad (1.106)$$

Nesta base assim fixada teríamos, ainda, $W_{22} = 0$ e a matriz W^m_n seria da forma:

$$W^m_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_{23}/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

Mais uma vez a equação característica possui três raízes nulas e haveria apenas um autovetor associado que poderia ser expresso por:

$$U^m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

De acordo com a classificação de Petrov este é o tipo- III .

- Caso [22]: Neste caso existem duas raízes múltiplas. Assumindo que tais raízes são (1.94) e (1.106) vemos que, nesta base $W_{11} = W_{13} = 0$ (já que $\mathbf{F}^{(1)}$ é raiz dupla), e ainda $W_{22} = W_{23} = 0$ (já que $\mathbf{F}^{(2)}$ é também raiz dupla). Teremos então,

$$W^m_n = \begin{pmatrix} W_{12} & 0 & 0 \\ 0 & W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -2W_{12} \end{pmatrix} \quad (1.109)$$

A equação característica fornece agora $\lambda_1 = \lambda_2 = W_{12}$ e $\lambda_3 = -2W_{12}$. Teremos então três autovetores distintos associados, que podem ser lidos diretamente da matriz

diagonal anterior. Vemos assim que trata-se de um Petrov tipo- D

- Caso $\{211\}$: Assumindo que $\mathbf{F}^{(1)}$, dado em (1.94), é a raiz dupla, temos $W_{11} = W_{13} = 0$. Assumindo que $\mathbf{F}^{(2)}$, dado em (1.106) é uma das duas outras raízes teremos ainda $W_{22} = 0$ nesta base. Não podemos, entretanto, fixadas estas duas bases alinhar a terceira solução com $\Omega^{(3)}$, haja visto que $\Omega^{(3)}$, por construção, não é uma base nula. Assim a matriz W^m_n seria, neste caso, da forma:

$$W^m_n = \begin{pmatrix} W_{12} & 0 & W_{23} \\ 0 & W_{12} & 0 \\ 0 & -W_{23}/2 & -2W_{12} \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

A equação característica fornece, tal qual o caso anterior, $\lambda_1 = \lambda_2 = W_{12}$ e $\lambda_3 = -2W_{12}$. Haverão agora, dois autovetores iguais entre si, associados a $\lambda_1 = \lambda_2$, e um terceiro, linearmente independente a estes, associado ao autovalor λ_3 , num total de dois autovetores distintos. trata-se portanto de um petrov tipo- II .

- Caso $[1111]$: Neste caso, podemos sempre alinhar os eixos de modo que (1.94) é uma raiz simples, $W_{11} = 0$, e (1.106) é uma segunda raiz simples, $W_{22} = 0$. Além disto nada podemos fazer, de modo a reduzir a forma da matriz W^m_n por uma escolha conveniente de bases. Assim teríamos:

$$W^m_n = \begin{pmatrix} W_{12} & 0 & W_{23} \\ 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{13}/2 & -W_{23}/2 & -2W_{12} \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

A equação característica fornece então, neste caso, três raízes distintas, as quais estarão associados três autovetores distintos: Petrov tipo- I .

Deste modo vemos que a classificação algébrica do tensor de Weyl pela contagem da multiplicidade das direções nulas principais a ele associadas, é a própria classificação de Petrov que pode ser sumarizada agora do seguinte modo:

<i>tipos de Petrov</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>D</i>	<i>III</i>	<i>N</i>	<i>O</i>
<i>direções nulas principais</i>	[1111]	[211]	[22]	[31]	[4]	[-]

onde incluímos o caso tipo-*O* como sendo aquele que não possui direções nulas principais.

A classificação de Petrov pode, também, ser representada através do diagrama,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & I & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 & & II & \longrightarrow & D & & \\
 & & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
 & & III & \longrightarrow & N & \longrightarrow & O
 \end{array} \tag{1.112}$$

onde as setas indicam os possíveis “caminhos” pelos quais as direções nulas podem colapsar umas sobre as outras, a partir do caso em que o tensor de Weyl é algebricamente geral (tipo-*I*), seguindo uma ordem crescente de especialização.

Casos degenerados.

A equação (1.100), é satisfeita por cada direção nula principal e podemos então tomá-la como uma definição tensorial, no espaço-tempo, para o tipo de Petrov *I*. Nos casos degenerados podemos reduzir aquela equação de modo a encontrar definições tensoriais para cada tipo de Petrov. Para fazermos isto vejamos inicialmente qual é a condição para que tenhamos degenerescência.

Retornando à equação (1.93) e assumindo que esta possui pelo menos uma raiz múltipla, podemos assumir que esta é dada por (1.94). Conforme já discutimos isto implica que, nesta base, $W_{11} = W_{13} = 0$ e, com isto, a equação (1.97) ficará,

$$W_{ABCD}^{(+)} k^B k^C = W_{12} k_A k_D \tag{1.113}$$

Esta é, então, a condição necessária e suficiente para que tenhamos degenerescência das direções nulas principais. Vejamos então quais equações tensoriais, no espaço-tempo, podemos construir:

- Petrov-*II*: este é justamente o caso representado em (1.113), sendo as duas outras direções distintas entre si e distintas da raiz dupla. Podemos então reescrever (1.113) na forma tensorial equaivalente:

$$\begin{cases} k_{[\mu} W_{\nu]\alpha \beta \lambda} k^\alpha k^\beta = 0 \\ k_{[\mu} \overset{*}{W}_{\nu]\alpha \beta \lambda} k^\alpha k^\beta = 0 \end{cases} \quad (1.114)$$

Estas equações podem então ser tomadas como uma definição para o tensor de Weyl do tipo-*II*. Evidentemente se o tensor de Weyl satisfaz as relações (1.114), satisfaz também identicamente (1.100).

- Petrov-*D*: neste caso (1.113) também é satisfeita. Entretanto como existe outra raiz dupla da equação (1.93) podemos assumí-la como sendo (1.106) de modo que, nesta base, a matriz W^n_m se escreve como (1.109). Assim a relação (1.113) também é satisfeita com respeito à segunda direção principal degenerada (n_A):

$$\begin{cases} W_{ABCD}^{(+)} k^B k^C = W_{12} k_A k_D \\ W_{ABCD}^{(+)} n^B n^C = W_{12} n_A n_D \end{cases} \quad (1.115)$$

fornecendo assim as equações tensoriais,

$$\begin{cases} k_{[\mu} W_{\nu]\alpha \beta \lambda} k^\alpha k^\beta = 0 \\ k_{[\mu} \overset{*}{W}_{\nu]\alpha \beta \lambda} k^\alpha k^\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{[\mu} W_{\nu]\alpha \beta \lambda} n^\alpha n^\beta = 0 \\ n_{[\mu} \overset{*}{W}_{\nu]\alpha \beta \lambda} n^\alpha n^\beta = 0 \end{cases} \quad (1.116)$$

- Petrov-*III*: neste caso temos, por (1.107), que a parte autodual do tensor de Weyl, dada em (1.87), se escreve como,

$$W_{ABCD}^{(+)} = W_{23} (\Omega_{AB}^{(2)} \Omega_{CD}^{(3)} + \Omega_{AB}^{(3)} \Omega_{CD}^{(2)}) \quad (1.117)$$

Como nesta base a solução três vezes degenerada é representada por (1.94), então de acordo com (1.96), teremos,

$$W_{ABCD}^{(+)} k^D = \frac{1}{2} W_{23} \Omega_{AB}^{(2)} k_C \quad (1.118)$$

Multiplicando esta equação por k_E e antissimetrizando no par $\{C, E\}$ encontramos então,

$$W_{AB D[C}^{(+)} k_E] k^D = 0$$

que equivale às equações tensoriais,

$$\begin{cases} W_{\mu\nu \beta[\lambda} k_{\alpha]} k^\beta = 0 \\ \bar{W}_{\mu\nu \beta[\lambda}^* k_{\alpha]} k^\beta = 0 \end{cases} \quad (1.119)$$

- Petrov- N : finalmente consideramos o caso em que a matriz W^m_n é dada por (1.104), sendo (1.94) a única raiz da equação quártica (1.93). Teremos que, nesta base, a parte autodual do tensor de Weyl se escreverá, de acordo com (1.87), como,

$$W_{ABCD}^{(+)} = W_{22} \Omega_{AB}^{(2)} \Omega_{CD}^{(2)} = 4W_{22} k_{[A} m_B] k_{[C} m_D] \quad (1.120)$$

de modo que,

$$W_{ABCD}^{(+)} k^D = 0$$

fornecendo as equações tensoriais,

$$\begin{cases} W_{\mu\nu\beta\lambda} k^\beta = 0 \\ \bar{W}_{\mu\nu\beta\lambda}^* k^\beta = 0 \end{cases} \quad (1.121)$$

Podemos finalmente sumarizar nossos resultados. Denotando o tensor de Weyl por $(I_{\mu\nu\alpha\beta}, II_{\mu\nu\alpha\beta}, D_{\mu\nu\alpha\beta}, III_{\mu\nu\alpha\beta}, N_{\mu\nu\alpha\beta})$, conforme este seja dos tipos (I, II, D, III, N) res-

pectivamente, as equações tensoriais associadas a cada tipo serão dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{[\mu} I_{\nu] \alpha \beta [\lambda} k_{\rho]} k^{\alpha} k^{\beta} = 0 \\ k_{[\mu} II_{\nu] \alpha \beta \lambda} k^{\alpha} k^{\beta} = 0 \\ III_{\mu\nu \beta [\lambda} k_{\alpha]} k^{\beta} = 0 \\ N_{\mu\nu\beta\lambda} k^{\beta} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_{[\mu} {}^* I_{\nu] \alpha \beta [\lambda} k_{\rho]} k^{\alpha} k^{\beta} = 0 \\ k_{[\mu} {}^* II_{\nu] \alpha \beta \lambda} k^{\alpha} k^{\beta} = 0 \\ {}^* III_{\mu\nu\beta[\lambda} k_{\alpha]} k^{\beta} = 0 \\ {}^* N_{\mu\nu\beta\lambda} k^{\beta} = 0 \end{array} \right. \quad (1.122)$$

O tipo- D é aquele que satisfaz a mesma equação associada à $II_{\nu\alpha\beta\lambda}$ para dois vetores (k^{μ}, n^{μ}) distintos entre si.

Em particular, chamamos a atenção para a última das equações em (1.122). Conforme vimos anteriormente o setor descontínuo do tensor de Weyl, dado em (1.22) obedecia à relação algébrica (1.21). Vemos então que aquele é do tipo N tendo como direção nula principal o próprio vetor de onda k^{μ} . Isto está de acordo com a definição precedente de que o campo é radiativo quando é degenerado de tipos (N, III) , de acordo com (1.49). Vemos ainda que o tipo N é aquele que corresponde à degenerescência máxima de direções nulas principais.

1.6 O teorema do “Peeling-off”.

Conforme os resultados das secções precedentes, vimos que a noção de radiação gravitacional pode ser introduzida de modo invariante, associada a tipos algébricos especiais do tensor de Weyl, segundo a classificação de Petrov. Vimos também que o tipo- N desempenha um papel destacado haja visto que, de acordo com (1.21) e (1.122), o tensor que propaga as discontinuidades do campo gravitacional é do tipo- N com respeito ao vetor de onda, que é, então, uma direção nula principal do tensor de Weyl.

Entretanto, em um espaço-tempo genérico, as soluções de (1.93), ou (1.122), podem

fornecer vetores que não são, em geral, normais à qualquer hipersuperfície nula, não sendo possível identificar, em princípio, qualquer destas direções principais com o vetor de onda. Este problema levou autores como Bondi, Robinson e Pirani a considerar que as noções desenvolvidas nas secções anteriores, quando aplicadas ao problema da emissão de radiação por uma fonte limitada no espaço, deveriam descrever o comportamento do campo em alguma região do espaço-tempo que tende à Minkowski. Nesta região é que poderíamos fazer a separação entre campo de radiação e campo não-radiativo gravitacionais.

É neste contexto que surge o importante resultado, devido à Sachs, [24], que é o chamado teorema do “**Peeling-off**”. Tomando como parâmetro radial, r , o parâmetro afim ao longo de geodésicas nulas, Sachs mostrou que o campo gravitacional, a grandes distâncias de uma fonte limitada, pode ser expandido em potências inversas de r . Tal comportamento poderia ser intuitivamente esperado, haja visto que este problema é o análogo da expansão multipolar usual, para qualquer campo físico. O teorema do Peeling-off, entretanto, garante que a série é precisamente do seguinte tipo:

$$W_{ABCD} = \frac{{}_0N_{ABCD}}{r} + \frac{{}_0III_{ABCD}}{r^2} + \frac{{}_0II_{ABCD}}{r^3} + \frac{{}_0I_{ABCD}}{r^4} + \frac{{}_0I'_{ABCD}}{r^5} + O(r^{-6}) \quad (1.123)$$

onde os tensores, independentes de r , $\{{}_0N_{ABCD}, {}_0III_{ABCD}, {}_0II_{ABCD}, {}_0I_{ABCD}\}$ são tipos de Petrov, respectivamente $\{N, III, II, I\}$, com respeito ao vetor de onda, tangente à uma geodésica nula. O termo ${}_0I'_{ABCD}$ não guarda nenhuma relação especial com o vetor de onda. Havendo um setor do tipo- D , este aparece na expansão anterior na mesma ordem que o tipo- II , isto é, $O(r^{-3})$. O subíndice “0” significa que o objeto por ele marcado possui derivada absoluta nula na direção do vetor de onda.

De posse destas noções passaremos finalmente à discussão de alguns espaço-tempos radiativos, no contexto da teoria da relatividade geral exata.

Capítulo 2

Métricas radiativas

Os espaços-tempos radiativos nos quais estamos interessados, no presente trabalho, são aqueles que possam representar a região exterior a algum sistema gravitacional limitado no espaço e que irradia ondas gravitacionais. Neste contexto qualquer métrica de radiação deve ter seu conteúdo físico interpretado em alguma região destes espaços-tempos nas quais observadores quase-newtonianos podem ser definidos e através destes avaliar as propriedades físicas observáveis do sistema irradiante. Isto significa dizer que esperamos poder definir uma região (dita assintótica, no sentido de “distante” da região na qual o sistema que irradia está localizado) na qual a contribuição mais significativa do campo é apenas aquela associada ao processo radiativo. Deste modo, em tal região, o tensor de Weyl será do tipo N de Petrov. Tal região assintótica do espaço-tempo é dita uma **zona de radiação**. Deste modo, entendemos por métricas radiativas aquelas que admitem uma zona de radiação. Iremos, então, discutir neste capítulo algumas famílias de espaços-tempos (métricas) para os quais há uma zona de radiação bem definida.

Um bom sumário de soluções radiativas, de natureza cosmológicas ou não, das equações de Einstein pode ser encontrado em [17], onde as soluções são classificadas quanto aos parâmetros ópticos do vetor de onda. Tais parâmetros são os análogos, para os campos

vetoriais nulos, da expansão, distorção e vorticidade dos campos vetoriais do tipo-tempo. Uma simplificação inerente à nossa abordagem é que discutiremos espaços-tempos nos quais o vetor de onda não tem vorticidade, podendo apenas expandir-se e/ou distorcer-se.

A questão que se coloca então é: como construir uma métrica com suficiente generalidade para representar tal sistema físico? Para iniciarmos nossa discussão vejamos como definir um sistema de coordenadas “quase-gaussiano” quando foliamos o espaço-tempo por hipersuperfícies nulas e algumas implicações disto.

2.1 Foliamento por hipersuperfícies nulas e o problema de Cauchy.

Nossa primeira premissa é a de que a hipersuperfície que irá representar a frente de onda esteja definida no espaço-tempo. Tal superfície é uma superfície do tipo nula e poderia ser escrita parametricamente como,

$$u = u(\bar{x}^\mu) \tag{2.1}$$

onde,

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 0 \quad u_\mu = \partial_\mu u \tag{2.2}$$

Deste modo podemos foliar o espaço-tempo por hipersuperfícies nulas, uma para cada valor constante da função $u = u(\bar{x}^\mu)$. Como consequência disto, o vetor de onda,

$$k^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu = (\nabla u)^\mu \tag{2.3}$$

não possui vorticidade, pois trata-se de um gradiente.

A superfície (2.1) será uma superfície característica das equações de Einstein no vazio, através da qual podem se propagar descontinuidades do tensor de curvatura. Pela teoria de equações diferenciais parciais sabe-se que, para uma vasta classe de equações diferenciais

parciais, sobre cada superfície característica do sistema, existem as bicaracterísticas que são curvas através das quais os dados de Cauchy são propagados por equações diferenciais ordinárias.

Neste caso as curvas bicaracterísticas são uma congruência de geodésicas nulas, $x^\mu(s)$, às quais dá-se usualmente a denominação de raios nulos. Tais curvas, que vivem em $u = cte.$, tem por vetor tangente o próprio k^μ definido acima. De fato, se

$$\frac{Dx^\mu(s)}{DS} = k^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu$$

teremos,

$$\frac{D^2x^\mu(s)}{DS^2} = k^\mu{}_{;\nu} \frac{Dx^\nu(s)}{DS} = k^\mu{}_{;\nu} k^\nu$$

Como k^μ é um gradiente, então o tensor $k_{\mu;\nu}$ é necessariamente simétrico, e como trata-se de um vetor tipo-nulo, temos que,

$$(k^\nu k_\nu)_{;\mu} = 0 \Rightarrow k_{\nu;\mu} k^\nu = 0 \Rightarrow k_{\mu;\nu} k^\nu = 0$$

e portanto a curva $x^\mu(s)$ é uma geodésica:

$$\frac{D^2x^\mu(s)}{DS^2} = k^\mu{}_{;\nu} k^\nu = 0 \tag{2.4}$$

Tais propriedades são bastante gerais e podemos tomá-las para construir um sistema de coordenadas para métricas radiativas: Tomando como coordenada x^0 a função (2.1), teremos que o vetor normal à superfície torna-se simplesmente $u_\mu = \delta_\mu^0$ e a condição (2.2) se escreverá simplesmente como $g^{00} = 0$. Podemos ainda escolher como coordenada x^1 , um parâmetro r que somente varia ao longo da curva bicaracterística e deste modo, o vetor δ_1^μ , tangente às curvas r , será proporcional ao vetor tangente à bicaracterística. Neste sistema de coordenadas virá,

$$\frac{Dx^\mu(S)}{DS} = g^{\mu 0} = F(x^\mu) \delta_1^\mu$$

ou seja,

$$g^{\mu 0} = (0, F(x^\mu), 0, 0) \quad (2.5)$$

Com estas considerações, a métrica se escreverá, neste sistema de coordenadas como,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F & 0 & 0 \\ F & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & F^{-1} & g_{02} & g_{03} \\ F^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ g_{02} & 0 & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & 0 & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Poderíamos ter assumido por coordenada x^1 o próprio parâmetro S , o que seria equivalente a tomar a função $F(x^\mu) = 1$, com a correspondente forma para a métrica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ 0 & g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ 0 & g^{13} & g^{23} & g^{33} \end{pmatrix} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & 1 & g_{02} & g_{03} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{02} & 0 & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & 0 & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Este sistema de coordenadas é o análogo do sistema de coordenadas gaussiano no caso do foliamento ser feito por hipersuperfícies do tipo espaço, ao invés de hipersuperfícies nulas.

Este tipo de foliação do espaço-tempo nos obriga a rever o problema de Cauchy para as equações de Einstein. Em sua versão tradicional, o foliamento do espaço-tempo é feito por superfícies do tipo espaço, Σ , permitindo a introdução de um sistema de coordenadas Gaussiano. Sobre a superfície Σ_0 fornecemos, então, os dados iniciais, g_{ij} e $g_{ij,0}$, os quais são independentes. Neste contexto as equações de Einstein determinam a dinâmica das superfícies Σ , fixando $g_{ij,0,0}$, como função dos dados iniciais e propagando estes dados para a superfície do tipo espaço, $\Sigma_0 + \delta\Sigma$, seguinte.

Acontece que, no vazio, as equações de Einstein que fornecem a dinâmica dos potenciais g_{ij} , são dadas por,

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} g^{00} g_{ij,0,0} + C_{ij}$$

sendo C_{ij} um objeto conhecido a partir dos dados iniciais. As outras componentes das equações de Einstein fornecem apenas vínculos a serem satisfeitos sobre a superfície de dados iniciais.

Vemos então qual a origem do embaraço quando foliamos o espaço-tempo por hipersuperfícies nulas: como $g^{00} = 0$, já não temos meios de explicitar a segunda derivada normal dos potenciais em termos dos dados na superfície, restando apenas vínculos a serem satisfeitos nesta equação. Neste caso o problema de Cauchy está mal posto, no sentido de que não podemos mais fornecer arbitrariamente $\{g_{ij}\}$ e $\{g_{ij,0}\}$, sobre a superfície de dados iniciais singular. Dizemos tratar-se então de um **problema de valor inicial característico**.

O tratamento deste problema para as equações de Einstein é, em geral, bastante complexo, sendo tratado em textos avançados de relatividade geral como [33]. Iremos aqui, apenas chamar a atenção para um aspecto particular deste problema que já se evidencia ao tratarmos da propagação de um campo escalar sem massa, no espaço-tempo plano, a partir de dados iniciais sobre a superfície característica.

2.1.1 Problema de valor inicial característico para o campo escalar.

Tomemos o espaço-tempo de Minkowski, em coordenadas esféricas, e com o tempo sendo uma coordenada atrasada, $u = t - r$, através do qual foliamos o espaço-tempo em hipersuperfícies $u = u_0$. Neste sistema de coordenadas,

$$ds^2 = du^2 + 2dudr - r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2).$$

A equação para o campo escalar sem massa,

$$\square\psi = 0$$

se escreverá, neste sistema de coordenadas, como:

$$(r\psi_u)_{,r} = \frac{1}{2r}(r^2\psi_r)_{,r} + \frac{1}{2r\sin(\theta)} \left[(\sin(\theta)\psi_\theta)_{,\theta} + \frac{1}{\sin(\theta)}\psi_{\phi,\phi} \right] \quad (2.8)$$

Assim, queremos propagar ψ , de uma superfície $u = u_0$ para $u = u_0 + \delta u$. Isto é, queremos construir a série,

$$\psi(u_0 + \delta u) = \psi(u_0) + \psi_{,u}(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2}\psi_{,u,u}(u_0)(u - u_0)^2 + \dots \quad (2.9)$$

Acontece agora que a superfície de dados iniciais é uma superfície característica do campo, ou seja, é a superfície pela qual se propagam as discontinuidades do mesmo, [16]. Trata-se portanto de um problema de valor inicial característico para o campo escalar ψ .

Conforme já havíamos chamado atenção, os dados iniciais, $\{\psi|_{u_0}, \psi_{,u}|_{u_0}\}$, já não podem ser fornecidos independentemente. A equação (2.8), que originalmente forneceria a dinâmica, é agora uma equação de vínculo entre os "dados iniciais". Assim, para propagarmos uma solução a partir de u_0 poderemos fornecer $\{\psi|_{u_0}\}$ e, conseqüentemente, suas derivadas intrínsecas em u_0 . A derivada normal $\{\psi_{,u}|_{u_0}\}$, entretanto, terá que ser obtida por integração, de modo que seja compatível com o vínculo (2.8). Entretanto, procedendo desta maneira, somente é possível determinar $\{\psi_{,u}|_{u_0}\}$ a menos de uma função de integração arbitrária, $p_0(\theta, \phi)$. De fato, notando que,

$$I(u_0, r, \theta, \phi) = \left\{ \frac{1}{2r}(r^2\psi_r)_{,r} + \frac{1}{2r\sin(\theta)} \left[(\sin(\theta)\psi_\theta)_{,\theta} + \frac{1}{\sin(\theta)}\psi_{\phi,\phi} \right] \right\}_{u_0}$$

é uma função conhecida a partir dos dados iniciais, por (2.8) decorre que,

$$\psi_{,u}|_{u_0} = \frac{p_0(\theta, \phi)}{r} - \int^r I(u_0, r', \theta, \phi) dr' \quad (2.10)$$

Para obtenção da segunda derivada de ψ em u_0 tomamos a derivada em u da equação (2.8), em u_0 :

$$(r\psi_{,u,u})_{,r}|_{u_0} = \left\{ \frac{1}{2r}(r^2\psi_{r,u})_r + \frac{1}{2r\sin(\theta)} \left[(\sin(\theta)\psi_{\theta,u})_{\theta} + \frac{1}{\sin(\theta)}\psi_{\phi,\phi,u} \right] \right\}_{u_0}$$

O lado direito desta equação já não é conhecido apenas em termos dos dados iniciais, haja visto que nele está presente $\{\psi_{,u}|_{u_0}\}$. Portanto está aí embutida a função de integração arbitrária $p_0(\theta, \phi)$. Mesmo assim, para um dado $p_0(\theta, \phi)$ poderíamos prosseguir com a integração que, novamente, determinaria a segunda derivada em u de ψ a menos de uma nova função de integração $p_1(\theta, \phi)$. Teríamos então que:

$$\psi_{,u,u}|_{u_0} = \frac{p_1(\theta, \phi)}{r} - \int^r P(u_0, p_0(\theta, \phi), r', \theta, \phi) dr' \quad (2.11)$$

Vemos, então, que a cada ordem sucessiva das derivadas, em u , de ψ , surgem sucessivas funções arbitrárias de integração $\{p_0(\theta, \phi), p_1(\theta, \phi), \dots, p_n(\theta, \phi), \dots\}$, definidas em $u = u_0$, impossibilitando-nos de encontrar uma solução unívoca para este problema.

Poderíamos então definir uma função $A(u, \theta, \phi)$, a partir de suas derivadas em u_0 de modo que,

$$\left\{ \begin{array}{l} A|_{u_0} = p_0(\theta, \phi) \\ \partial_u A|_{u_0} = p_1(\theta, \phi) \\ \dots = \dots \\ \partial_u^n A|_{u_0} = p_n(\theta, \phi) \\ \dots = \dots \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Deste modo vemos que, para podermos efetivamente propagar a solução ψ a partir

de dados iniciais fornecidos sobre a superfície característica u_0 , seria preciso conhecermos uma função arbitrária $A(u, \theta, \phi)$ não somente para u_0 mas para todo u . Isto equivaleria a conhecer as infinitas funções $\{p_0(\theta, \phi), p_1(\theta, \phi), \dots, p_n(\theta, \phi), \dots\}$.

Esta é uma situação típica do problema de valor inicial característico. Devido a natureza singular da superfície de dados iniciais, a solução não é propagada univocamente, podendo acontecer situações fisicamente diversas, conforme a escolha da função arbitrária $A(u, \theta, \phi)$.

Isto está de acordo com o fato de que as descontinuidades associadas à dinâmica do campo ψ , não massivo, se propagam através de hipersuperfícies nulas, sendo portanto razoável que o campo ψ não seja univocamente determinado por dados iniciais fornecidos sobre a característica. Em contrapartida ψ estaria univocamente determinado a partir dos dados iniciais, se estes fossem dados sobre uma superfície de Cauchy usual, do tipo espaço, não podendo sofrer qualquer transição descontínua.

Conforme veremos, ao discutirmos os espaços-tempos radiativos de Bondi, funções deste tipo surgirão no contexto das equações de Einstein, quando tratarmos da propagação de soluções a partir de dados iniciais fornecidos sobre uma superfície característica. Como a evolução do sistema somente estará determinada se uma função deste tipo for fornecida, Bondi sugeriu denominá-la de **função informação** do sistema. Passemos então à discussão de métricas radiativas no contexto da relatividade geral.

2.2 A métrica de Bondi.

As métricas da família de Bondi representam espaços-tempos radiativos, axialmente simétricos e assintoticamente planos, para descrição de uma fonte isolada que pode perder massa por emissão de ondas gravitacionais.

Para construir a métrica de Bondi assumimos que este espaço-tempo admite uma foliação do tipo (2.6). Bondi assume então que é possível definir, pelo menos em regiões longe da

fonte de campo, um sistema de coordenadas esféricas usual, caracterizado pelos ângulos, (θ, ϕ) , e um parâmetro radial r , tais que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

neste sistema de coordenadas.

As simetrias assumidas para a métrica são então as seguintes:

- Invariância sob translações ao longo do ângulo azimutal ϕ ,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(u, r, \theta) \quad (2.14)$$

- Invariância por reflexão azimutal $\phi \rightarrow -\phi$,

$$g_{u\phi} = g_{r\phi} = g_{\theta\phi} = 0 \quad (2.15)$$

- A área do setor espacial bidimensional, $(u, r) = (u_0, r_0)$, é aquela usual em coordenadas esféricas,

$$g_{\theta\theta} g_{\phi\phi} = r^4 \sin^2(\theta) \rightarrow \begin{cases} g_{\theta\theta} &= -r^2 e^N \\ g_{\phi\phi} &= -r^2 \sin^2(\theta) e^{-N} \end{cases} \quad (2.16)$$

onde $N = N(u, r, \theta)$ é uma função arbitrária.

Além das simetrias toma-se a hipótese de que a curva integral de $x^1 = r$ é paralela à bicaracterística. Temos então que, neste sistema de coordenadas, as bicaracterísticas são caracterizadas por $(\theta, \phi) = (\theta_0, \phi_0)$, e ainda,

$$\frac{dx^\mu}{dr} = \delta_1^\mu = e^\beta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (2.17)$$

onde $\beta = \beta(u, r, \theta)$ é uma função arbitrária, e $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ é o vetor tangente à bicaracterística

$x^\mu(\lambda)$.

Deste modo, neste sistema de coordenadas teremos, de acordo com (2.5),

$$g^{\mu 0} = e^{-\beta} \delta_1^\mu \quad (2.18)$$

e a métrica inversa se escreverá, neste sistema de coordenadas, como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\beta} & 0 & 0 \\ e^{-\beta} & -Ve^{-\beta}/r & Ue^{-\beta} & 0 \\ 0 & Ue^{-\beta} & -e^{-2N}/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2N}/\sin(\theta)^2 r^2 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

onde (V, β, U, N) são funções arbitrárias de (u, r, θ) . O elemento de linha de Bondi fica então escrito em sua forma usual:

$$dS^2 = (Ve^\beta/r - U^2 r^2 e^{2N}) du^2 + 2e^\beta du dr + 2U r^2 e^{2N} du d\theta + \\ -r^2 (e^{2N} d\theta^2 + \sin(\theta)^2 e^{-2N} d\phi^2) \quad (2.20)$$

Devido a sua forma particular, é conveniente tratar a métrica de Bondi em uma base de tétradas semi-nulas na qual o elemento de linha (2.20) se escreve como,

$$dS^2 = 2N^0 N^1 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (2.21)$$

e que pode ser dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} N^0 = du \\ N^1 = Ve^\beta/2r du + e^\beta dr \\ \theta^2 = re^N(d\theta - U du) \\ \theta^3 = r \sin(\theta) e^{-N} d\phi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^\mu_{(0)} = \delta_0^\mu - V/2r \delta_1^\mu + U \delta_2^\mu \\ e^\mu_{(1)} = e^{-\beta} \delta_1^\mu \\ e^\mu_{(2)} = e^{-N}/r \delta_2^\mu \\ e^\mu_{(3)} = e^N/r \sin(\theta) \delta_3^\mu \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Notemos que, por construção, a métrica de Bondi exhibe explicitamente um vetor nulo e geodésico dado por,

$$k^\mu = e^\mu_{(1)} = e^{-\beta} \delta_1^\mu \Rightarrow k^\mu_{;\nu} k^\nu = 0 \quad (2.23)$$

que é tangente as curvas bicaracterísticas. Este será então o vetor de propagação das ondas gravitacionais neste modelo. Os parâmetros ópticos, não nulos, associados a este campo vetorial são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta := k^\mu_{;\mu}/2 = e^{-\beta}/r \\ |\sigma| := g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} k_{(\mu;\lambda)} k_{(\nu;\rho)} - \Theta^2 = (N_r)^2 e^{-2\beta} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

deste modo vemos que a congruência de geodésicas nulas apresenta expansão e distorção.

2.2.1 As identidades de Bianchi para o problema de Bondi

Conforme mostrou Bondi, o conjunto de equações de Einstein deste problema se separa em quatro grupos:

- Aquelas que são satisfeitas identicamente em decorrência das simetrias do problema, e que são, nesta base,

$$R_{03} = R_{13} = R_{23} = 0$$

- As chamadas “main equations”,

$$R_{11} = 0, \quad R_{12} = 0, \quad R_{22} = 0, \quad R_{33} = 0, \quad (2.25)$$

- As equações suplementares (“supplementary conditions”),

$$R_{02} = 0, \quad R_{00} = 0$$

- A equação trivial

$$R_{01} = 0$$

Tal separação provém da estrutura das identidades de Bianchi contraídas para este problema. De fato, se assumirmos que as equações (2.25) são satisfeitas, então de acordo com as identidades de Bianchi,

$$G^{AB}{}_{;B} = G^{AB}{}_{,\mu} e^{\mu}_{(B)} + \gamma^A{}_{BC} G^{BC} + G^{AC} \gamma^B{}_{CB} = 0,$$

teremos que:

- a componente ($A = 0$) impõe como consequência,

$$R_{01} = 0$$

sendo a equação trivial, portanto, uma consequência algébrica de (2.25).

- a componente ($A = 2$) impõe que, nesta base,

$$\left\{ R_{02} / (e^N r^3) \right\}_r = 0$$

que será portanto uma equação das variáveis (u, θ) essencialmente. Esta será propagada identicamente se for satisfeita em uma superfície $r = r_0$.

- usando adicionalmente que $R_{02} = 0$, a componente ($A = 1$) impõe que

$$(r^2 R_{00})_r = 0$$

que será também, propagada identicamente quando satisfeita para $r = r_0$. Trata-se também, de uma equação a duas variáveis.

- a componente ($A = 3$) é satisfeita identicamente.

A forma exata de tais componentes do tensor de Ricci, bem como outros objetos relacionados à métrica de Bondi, na base (2.22), são exibidos no apêndice (B).

2.2.2 Bondi perturbativamente: Função informação e perda de massa

A métrica de Bondi constitui um bom paradigma para avaliarmos alguns aspectos da dinâmica gravitacional, num espaço-tempo com suficiente generalidade para uma descrição mais realista de um sistema isolado, irradiando ondas gravitacionais que se expandem e distorcem. Não há solução exata conhecida para este problema, mas podemos extrair informações fisicamente relevantes tratando as equações de campo perturbativamente.

O esquema de perturbar as funções (N, β, U, V) para a métrica de Bondi é feito nas seguintes etapas:

- Assumindo que $N(u, r, \theta)$ pode ser expandido na forma,

$$N(u, r, \theta) = \frac{C(u, \theta)}{r} + \frac{Q(u, \theta)}{r^3} + O(r^{-4}) \quad (2.26)$$

onde (C, Q, \dots) são funções-coeficientes da expansão. Podemos usar a equação (B.5) para integrar a função $\beta(u, r, \theta)$ até uma ordem conveniente de r . Procedendo desta

maneira encontramos:

$$\beta(u, r, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{CQ}{r^4} + O(r^{-5}) \quad (2.27)$$

- De posse destas expressões aproximadas para (N, β) , podemos tomar a equação de Einstein (B.6) para determinar a forma aproximada da função $U(u, r, \theta)$. Como a equação (B.6) envolve segundas derivadas radiais da função U , devem surgir duas funções de integração arbitrárias, das variáveis (u, θ) , na expressão para U . Como assumimos que este é o sistema de coordenadas minkowskiano assintótico, esperamos que $g_{u\theta}$ seja no máximo de ordem um, para r muito grande. Este requisito nos permite descartar uma das funções de integração. Chamando a função de integração restante de $D = D(u, \theta)$, a expressão para $U(u, r, \theta)$ será:

$$U(u, r, \theta) = -\frac{C_\theta + 2C \cotg(\theta)}{r^2} + \frac{2D + 3CC_\theta + 4C^2 \cotg(\theta)}{r^3} + O(r^{-4}) \quad (2.28)$$

- Obtidas as expressões aproximadas para (N, β, U) , tomamos a equação de Einstein (B.7) para determinar a forma aproximada da função $V(u, r, \theta)$. Daí encontramos então que,

$$V(u, r, \theta) = r - 2M(u, \theta) + O(r^{-1}) \quad (2.29)$$

onde $M(u, \theta)$ é a função de integração restante no problema.

Com estas expressões aproximadas para (N, β, U, V) , as equações de superfície (B.5), (B.6) e (B.7) ficam satisfeitas nas ordens:

$$R_{11} = O(r^{-7}) \quad R_{12} = O(r^{-5}) \quad R_{22} + R_{33} = O(r^{-4}) \quad (2.30)$$

A equação dinâmica (B.11) fornece então,

$$R_{33} = \frac{4Q_u + D_\theta - D \cotg(\theta) - 2CM}{r^4} + O(r^{-5})$$

e as condições suplementares (B.12) e (B.13), fornecem:

$$R_{02} = \frac{3D_u + M_\theta + 3CC_{u,\theta} + C_u C_\theta + 4CC_u \cot g(\theta)}{r^3} + O(r^{-4})$$

$$R_{00} = -\frac{2M_u + 2(C_u)^2 + 2C_u - C_{u,\theta,\theta} - 3C_{u,\theta} \cot g(\theta)}{r^2} + O(r^{-3})$$

Tomando então,

$$4Q_u + D_\theta - D \cot g(\theta) - 2CM' = 0 \quad (2.31)$$

e

$$\begin{cases} 2M_u + 2(C_u)^2 + 2C_u - C_{u,\theta,\theta} - 3C_{u,\theta} \cot g(\theta) = 0 \\ 3D_u + M_\theta + 3CC_{u,\theta} + C_u C_\theta + 4CC_u \cot g(\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

teremos uma solução aproximada na menor ordem de potência inversa de r , isto é r^{-2} , das equações de Einstein. As equações (2.31) e (2.32) são, deste modo, as equações básicas a serem discutidas.

Suponha então que para um dado valor de u , $u = u_0$, conhecemos as funções (N, M, D) e que conhecemos C_u como função de (u, θ) . A partir de (2.32) determinamos então (M_u, D_u) e a partir de (2.31) conhecemos Q_u . Deste modo o problema está determinado, com as condições iniciais dadas sobre o cone $u = u_0$ apropriadamente.

Vemos assim que para determinar a evolução do sistema de equações acima, precisamos conhecer a função C_u que é arbitrária. Conforme já havíamos comentado, esta é a chamada **função informação** do sistema. Uma vez especificada, esta propagaria o sistema (2.31) e (2.32) de um modo particular.

Se partirmos de uma situação estática, neste caso a métrica de Weyl seria a solução exata, axialmente simétrica das equações de Einstein no vázio. Neste caso, as quantidades (M, D, Q) estão relacionadas a seguintes quantidades fisicamente relevantes: M está relacionado a massa do sistema, D ao momento de dipolo e Q ao momento de quadrupolo. Com esta motivação Bondi definiu a função de massa, $m(u)$, do sistema radiante como o valor

médio da função $M(u, \theta)$ sobre a esfera:

$$m(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi M(u, \theta) \sin(\theta) d\theta \quad (2.33)$$

Deste modo, de acordo com a primeira das equações (2.32), temos que:

$$\frac{d}{du} m(u) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi (C_u)^2 \sin(\theta) d\theta \quad (2.34)$$

onde os outros termos presentes na primeira das equações em (2.32), não contribuem para a integral. Isto ocorre devido à imposição de condições de regularidade, no ângulo polar, das funções do problema através do eixo polar.

Com isto podemos enunciar o teorema de Bondi, para o um sistema radiativo axialmente simétrico e assintoticamente plano:

se há função informação, então há perda de massa,
de acordo com (2.34).

2.2.3 Estrutura algébrica do tensor de Weyl para a métrica de Bondi.

O espaço-tempo de Bondi é algebricamente geral, segundo a classificação de Petrov. Todas as direções principais associadas ao tensor de Weyl são dadas por vetores cujas componentes são combinações complicadas das componentes do tensor de Weyl. Estas não fornecem raios nulos geodésicos, sendo de pouco auxílio à nossa discussão exibí-las.

Assim o vetor de onda geodésico k^μ , exibido em (2.23), não é, em geral, uma direção nula principal do tensor de Weyl para a métrica de Bondi. Na zona de radiação, entretanto, este será. De fato tomando as expressões exibidas no apêndice (B) pode-se mostrar que, na base (2.22), as componentes independentes de,

$$k_{[A} W_{B]EF[C} k_{D]} k^E k^F,$$

são todas proporcionais à componente W_{1212} que, de acordo com as expressões exibidas no apêndice (B), é dada por:

$$W_{1212} = -2 \left(N_{r,r} + 2 \frac{N_r}{r} - \beta_r N_r \right) \frac{1}{(e^\beta)^2}$$

Usando a equação de Einstein (B.5), podemos eliminar a dependência em $\beta(u, r, \theta)$, de modo a reescrever a equação anterior em termos da função $N(u, r, \theta)$, apenas.

$$W_{1212} = -2 \left(N_{r,r} + 2 \frac{N_r}{r} - r (N_r)^3 \right) \frac{1}{(e^\beta)^2} \quad (2.35)$$

Esta é, portanto, a expressão exata de W_{1212} , apenas em termos de $N(u, r, \theta)$.

Tomando, então, a expansão para a função $N(u, r, \theta)$, (2.26), a expressão anterior ficará,

$$W_{1212} = -\frac{C^3 - 6Q}{r^5} + O(r^{-6}) \quad (2.36)$$

Deste modo vemos que o vetor de onda, k^A , tende a uma direção nula principal muito rapidamente, quando $r \rightarrow \infty$:

$$k_{[A} W_{B]EF[C} k_{D]} k^E k^F = O(r^{-5}) \quad (2.37)$$

Ainda, conforme o esquema perturbativo da secção precedente, podemos expandir as outras componentes independentes do tensor de Weyl para a métrica de Bondi nesta base. De acordo com as expressões do apêndice, estas são dadas por $\{W_{0101}, W_{0102}, W_{0112}, W_{0202}\}$, além do próprio $\{W_{1212}\}$, e teremos então:

$$W_{0101} = -2 \frac{M + CC_u}{r^3} - 3 \frac{D_\theta + D \cot g(\theta)}{r^4} + O(r^{-5}) \quad (2.38)$$

$$W_{0102} = -\frac{C_{u,\theta} + 2C_u \cot g(\theta)}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (2.39)$$

$$W_{0112} = -3\frac{D}{r^4} + O(r^{-5}) \quad (2.40)$$

$$W_{0202} = -\frac{C_{u,u}}{r} + \frac{1}{2} \frac{C_{u,\theta,\theta} + C_{u,\theta} \cot g(\theta) - 2C_u (\sin(\theta))^{-2}}{r^2} + O(r^{-3}) \quad (2.41)$$

Assim, para $r \rightarrow \infty$ o setor dominante do tensor de Weyl será dado, de acordo com (2.36) e com (2.38)→(2.41), por:

$$W_{0202} = -W_{0303} \stackrel{\approx}{=} -\frac{C_{u,u}}{r} \quad (2.42)$$

Deste modo, nesta região, o vetor k^A é não somente direção nula principal, como também satisfaz,

$$W_{ABCD} k^D = N_{ABCD} k^D = 0 \quad (2.43)$$

onde o setor do tipo N de Petrov depende apenas de uma função, dada por $\{C_{u,u}\}$ conforme (2.42).

Conforme mencionamos anteriormente, Sachs propôs uma família de métricas na qual a hipótese de simetria axial é relaxada, [25]. Com isto obtive um sistema de equações que dependem de duas funções informação e não apenas uma. O setor N de Petrov por sua vez terá, também, duas funções independentes. Estas métricas, entretanto, não serão aqui discutidas em detalhe.

2.3 A métrica de Robinson-Trautman

A família de métricas de Robinson-Trautman (RT), [3], admite soluções exatas das equações de Einstein, no vázio. Trata-se de um espaço-tempo assintoticamente plano, algebricamente especial, apresentando o tensor de Weyl com partes do tipo N , tipo III e tipo II da classificação de Petrov. A congruência de geodésicas nulas, definidas sobre a

superfície característica, apresenta apenas expansão. Por tais características intrínsecas parece razoável que tais métricas pertençam a uma sub-classe das métricas de Bondi-Sachs (generalização das métricas de Bondi na qual a condição de simetria azimutal é relaxada) ou mantenham com estas uma relação estreita.

Acontece que as métricas de RT foram obtidas, anteriormente às de Bondi, em um sistema de coordenadas que não satisfaz as condições assintóticas sugeridas em (2.13). Em sua forma usual esta exibe em $\{g_{00}\}$ um termo com dependência linear no parâmetro que mede o afastamento da região de campo forte. Newman considerou então soluções, [7], que eram perturbações do tipo RT sobre Schwarzschild, interpretando tal solução como descrevendo radiação gravitacional emitida por uma fonte isolada. Neste contexto exibiu então uma transformação de coordenadas da ordem da perturbação que remove o termo linear. Newman e Unti analisaram então a estrutura de espaços assintoticamente planos, [4], e mostraram que tal transformação é definida, em geral, por uma série infinita de potências de r^{-1} .

Posteriormente Isaacson e Winicour, [6, 5], iniciaram o estudo da relação entre soluções de RT e aquelas que seguem a abordagem de Bondi-Sachs, da qual as métricas de Bondi são um exemplo. Tanto quanto sabemos, ninguém exibiu até o momento, de forma fechada, uma transformação de coordenadas para a qual as métricas de RT se escrevam em coordenadas do tipo Bondi, que satisfaçam (2.13).

Deste modo, optamos por apresentar e discutir o espaço-tempo de RT, de modo independente, no sistema de coordenadas usual, no qual o elemento de linha aparece de forma fechada, sendo o gradiente, associado à frente de onda, um vetor sem distorção. Nosso objetivo é o de explorar RT como modelo de métrica radiativa para tratar problemas de emissão de radiação gravitacional por sistemas isolados.

Para construirmos a métrica de RT assumindo então que o espaço-tempo admite um foliamento do tipo (2.7), sendo $x^1 = r$ o parâmetro afim sobre as geodésicas nulas em $u = u_0$. Assumimos ainda que o setor espacial bidimensional da métrica, definido por

$(u, r) = (u_0, r_0)$, é conformalmente plano, e que varia com r da forma quadrática usual. Assim, se (x, y) são as coordenadas cartesianas nas quais este setor bidimensional se escreve na forma conformalmente plana, teremos:

$$dS^2|_{u_0} = -r^2 P(u, x, y)^{-2} (dx^2 + dy^2)$$

E a métrica de RT poderá ser escrita, de acordo com (2.7), como:

$$\begin{aligned} dS^2 &= V du^2 + 2 du dr + \\ &- (r/P)^2 (dx + Q du)^2 - (r/P)^2 (dy + U du)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde $P = P(u, x, y)$ e $\{V, U, Q\}$ são em princípio funções de (u, r, x, y) .

Tomando-se então a base semi-nula,

$$\begin{cases} N^0 &= du \\ N^1 &= V/2 du + dr \\ \theta^2 &= (r/P)(dx + Q du) \\ \theta^3 &= (r/P)(dy + U du) \end{cases} \quad (2.45)$$

de modo que

$$dS^2 = 2 N^0 N^1 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (2.46)$$

tem-se que a solução das equações $R_{12} = R_{13} = R_{23} = R_{22} - R_{33} = 0$, impõem que,

$$\begin{cases} Q = Q(u, x, y) = F(u, x, y)_{,y} \\ U = U(u, x, y) = F(u, x, y)_{,x} \end{cases} \quad (2.47)$$

e a equação de Einstein $R_{23} = 0$ nos fornece a equação para $F(u, x, y)$:

$$F_{xx} + F_{yy} = 0 \quad (2.48)$$

As equações de Einstein, $R_{01} = R_{22} = R_{33} = 0$, permitem integrar $V(u, r, x, y)$, que será da forma,

$$V(u, r, x, y) = \lambda(u, x, y) + \frac{B(u)}{r} + 2H(u, x, y) r$$

onde $B(u)$ é uma função de integração e as funções $\{\lambda, H\}$ estão definidas por,

$$\begin{cases} H(u, x, y) = -(1/P)(P_u + P F_{x,y} - F_x P_y - F_y P_x) \\ \lambda(u, x, y) = P^2 (\ln(P)_{xx} + \ln(P)_{yy}) \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $F(u, x, y) = 0$ que é uma solução trivial da equação (2.48). Deste modo podemos sumarizar a solução de RT, para as equações de Einstein no vazio, através das seguintes equações:

$$\begin{cases} \lambda = P^2 (\ln(P)_{xx} + \ln(P)_{yy}) \\ B_u - 3B P_u/P = -\frac{1}{2}P^2 (\lambda_{xx} + \lambda_{yy}) \end{cases} \quad (2.49)$$

sendo, a função $V(u, r, x, y)$ dada agora por:

$$V = \lambda + \frac{B}{r} - 2\frac{P_u}{P} r \quad (2.50)$$

O calibre temporal da métrica de RT.

A métrica de RT possui uma liberdade de calibre que nos permite tornar a função $B(u)$ uma constante. De fato, se fizermos a transformação:

$$du \rightarrow d\sigma = h(u) du \quad r \rightarrow l = h(u)^{-1} r \quad (2.51)$$

onde $h(u)$ é uma função arbitrária de u . Ainda, redefinindo as funções (P, λ, B) , substituindo-as por $(\tilde{P}, \tilde{\lambda}, \tilde{B})$ tais que:

$$P = h\tilde{P} \quad \lambda = h^2 \tilde{\lambda} \quad B = h^3 \tilde{B} \quad (2.52)$$

o sistema de RT permanece inalterado. Como a função $h(u)$ é arbitrária, esta pode ser usada para fixar um calibre no qual \tilde{B} seja uma constante. Deste modo, neste calibre, o sistema de equações para RT, (2.49), torna-se simplesmente:

$$\begin{cases} \lambda = P^2 (\ln(P)_{xx} + \ln(P)_{yy}) \\ -3B_0 P_u/P = -\frac{1}{2}P^2 (\lambda_{xx} + \lambda_{yy}) \end{cases} \quad (2.53)$$

nas novas variáveis.

Robinson-Trautman e Schwarzschild.

Antes de passarmos adiante na discussão do espaço-tempo de RT, observemos que a parte “atrasada” da solução de Schwarzschild é uma solução particular da família de RT.

Se assumirmos, conforme [7], que a função $P(u, x, y)$ é dada por,

$$P = P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) \quad (2.54)$$

teremos que, por (2.49),

$$\lambda(u, x, y) = 1 \text{ e } B(u) = -2M = cte \quad (2.55)$$

que é a solução de Schwarzschild nas coordenadas atrasadas de Eddington-Finkelstein, $\{u, r\}$. Neste caso a relação que o par $\{u, r\}$ guardam, entre si, para produzir uma coordenada

temporal usual t é a aquela conhecida, para Schwarzschild.

$$u = t - r^* = t - 2M \ln(r - 2M) - r$$

Em RT a coordenada (u) é do tipo tempo e funciona como um tempo-atrasado, que caracteriza a evolução do sistema. Entretanto, a relação que u guarda com a coordenada r de modo a produzir uma coordenada temporal que folheia o espaço-tempo em hipersuperfícies do tipo espaço, não está definida a priori. Esta só pode ser obtida dependendo da solução particular do problema via equações de Einstein. Com este apelo podemos, grosso modo, pensar no par (u, r) como as coordenadas de Eddington-Finkelstein atrasadas, para a família de RT.

2.3.1 A estrutura algébrica do tensor de Weyl na métrica de RT

A família de métricas de RT é algebricamente especial, do tipo II , segundo a classificação de Petrov. A estrutura genérica do tensor de Weyl é, neste caso, a seguinte:

$$W_{ABCD} = N_{ABCD}/r + III_{ABCD}/r^2 + II_{ABCD}/r^3 \quad (2.56)$$

onde $\{N_{ABCD}, III_{ABCD}, II_{ABCD}\}$ são respectivamente tipos algébricos (N, III, II) de Petrov.

Deste modo as equações, (1.50), que definem as direções nulas principais do associadas ao tensor de Weyl,

$$n_{[A} W_{B]CD[E} n_{F]} n^C n^D = 0,$$

admitem apenas três soluções distintas, sendo que uma delas possui multiplicidade dois. A solução que apresenta multiplicidade é aquela definida pelo vetor de onda:

$$k^A = \delta_{(1)}^A \quad (2.57)$$

enquanto que as outras duas, distintas, são obtidas a partir da família de vetores da forma:

$$n^A = \left(cd, 1, \frac{1}{2}(c+d), -\frac{i}{2}(c-d) \right) \quad (2.58)$$

onde,

$$\begin{cases} c &= -2Q/C \pm \sqrt{4Q^2/C^2 - 3F/C} \\ d &= -2Q^*/C^* \pm \sqrt{4Q^{*2}/C^{*2} - 3F/C^*} \end{cases} \quad (2.59)$$

e os coeficientes complexos (Q, C, F) , são dados em termos de combinações das componentes do tensor de Weyl do seguinte modo:

$$\begin{aligned} Q &= -\sqrt{2} P\lambda_x/4r^2 + i\sqrt{2} P\lambda_y/4r^2 \\ C &= -P^2 \{(P_{x,x}/P)_u - (P_{y,y}/P)_u\}/2r + iP^2 (P_{x,y}/P)_u/r + \\ &\quad + \{(P^2\lambda_x)_x - (P^2\lambda_y)_y\}/4r^2 - i \{P^2\lambda_{x,y} + PP_x\lambda_y + PP_y\lambda_x\}/2r^2 \\ F &= B/r^3 \end{aligned} \quad (2.60)$$

os dois vetores reais pertencentes a esta família de vetores constituem assim as duas direções nulas principais restantes do tensor de Weyl, para a métrica de RT. Note ainda que, na zona de radiação, isto é para $r \rightarrow \infty$, todos tendem ao vetor k^A , dado em (2.57).

2.3.2 RT em regime perturbativo

Conforme já indicamos anteriormente, intencionamos usar RT como modelo para descrição de sistemas isolados que irradiam ondas gravitacionais. Uma primeira indicação de que isto pode ser feito consiste justamente nas soluções linearizadas obtidas por Newman-Foster, [7]. Estes autores perturbaram as equações de RT, (2.49), de modo que a solução de ordem zero corresponde a um espaço-tempo de Schwarzschild, e a solução em primeira ordem de perturbação corresponde a uma verdadeira perturbação da métrica de Schwarzschild de tipo

algebricamente mais geral, com presença de ondas gravitacionais.

Desta forma, vamos definir perturbações do tipo RT como perturbações das equações (2.49). Nos casos discutidos neste trabalho, vamos verificar que as soluções de ordem zero e as soluções perturbadas são, em geral, algebricamente distintas, as de ordem zero sendo algebricamente mais restritas que as perturbadas. Além disso, o espaço-tempo associado à solução perturbada pode sempre ser considerado como uma verdadeira perturbação do espaço-tempo de ordem zero, no sentido de que os invariantes de curvatura do primeiro caso são perturbações dos invariantes de curvatura do segundo.

Por exemplo, conforme chamamos atenção na secção (2.3), a solução de Schwarzschild atrasada é uma subclasse de RT para a qual $P(u, x, y)$ é da forma (2.54). Assim uma pequena perturbação do tipo RT, em Schwarzschild corresponde à escolha,

$$P(u, x, y) = P_1(u, x, y) P_0(x, y) \quad (2.61)$$

sendo P_0 dado por (2.54), e P_1 um termo de perturbação. Desprezando termos da ordem de P_1^2 nas equações (2.49), encontramos então a referida solução linearizada de Newman. Adiante discutiremos tal solução.

Em vista de discutir outras classes de soluções das métricas de RT, estaremos mais interessados em considerar a subclasse de RT na qual $P(u, x, y)$ independe de uma das coordenadas espaciais, y por exemplo. Iremos ainda explicitar o setor bidimensional (x, y) em termos de coordenadas esféricas (θ, ϕ) . Definindo:

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)} \right) \\ y &= \phi \end{cases} \quad (2.62)$$

teremos,

$$dx = \frac{d\theta}{\sin(\theta)} \quad (2.63)$$

e o setor bidimensional (x, y) em (2.44) se escreverá como,

$$d\sigma^2 = \frac{1}{P^2}(dx^2 + dy^2) = \frac{1}{P^2} \frac{1}{\sin(\theta)^2} (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \quad (2.64)$$

Definindo uma nova função Ω tal que,

$$P(u, \theta)^{-1} := \Omega(u, \theta) \sin(\theta) \quad (2.65)$$

teremos, neste sistema de coordenadas assim fixado, que a família de Robinson-Trautman será caracterizada pelo elemento de linha,

$$dS^2 = V(u, r, \theta) du^2 + 2 dudr - r^2 \Omega^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \quad (2.66)$$

onde

$$V(u, r, \theta) = \lambda(u, \theta) + B(u)/r + 2r \Omega(u, \theta)_u / \Omega(u, \theta) \quad (2.67)$$

A base (2.45) fica agora restrita à forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} N^0 = du \\ N^1 = V/2 du + dr \\ \theta^2 = r\Omega d\theta \\ \theta^3 = r \sin(\theta)\Omega d\phi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_{(0)}^\mu = \delta_0^\mu - V/2 \delta_1^\mu \\ e_{(1)}^\mu = \delta_1^\mu \\ e_{(2)}^\mu = (1/r\Omega) \delta_2^\mu \\ e_{(3)}^\mu = (1/r \sin(\theta)\Omega) \delta_3^\mu \end{array} \right. \quad (2.68)$$

As equações de Einstein, no vazio, (2.49), fornecem então as seguintes equações transformadas para as funções restantes $\{\lambda(u, \theta), B(u), \Omega(u, \theta)\}$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \Omega^{-2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\sin(\theta) \frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right)_\theta \right\} \\ B_u + 3B\Omega_u/\Omega &= -\Omega^{-2} (\lambda_\theta \sin(\theta))_\theta / (2 \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (2.69)$$

Podemos, então, perturbar as equações de RT, (2.66), da seguinte forma:

$$\begin{cases} \Omega(u, \theta) &= \kappa(\theta) (1 + \varepsilon y(\theta) N(u)) \\ \lambda(u, \theta) &= g(\theta) + \varepsilon w(\theta) N(u) \\ B(u) &= \chi(u) + \varepsilon Z(u) \end{cases} \quad (2.70)$$

onde ε é um parâmetro pequeno. O correspondente elemento de linha será,

$$\begin{aligned} dS^2 &= \{g + \varepsilon w N + [\chi + \varepsilon Z] / r + 2\varepsilon r y N_u\} + \\ &+ 2du dr - r^2 \kappa^2 (1 + \varepsilon y N)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Deste modo, as equações de campo, (2.69), impõem por separação de variáveis, que:

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \chi(u) = -2M_0 + c u \quad (2.72)$$

e ainda,

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} Z_u / N = b_0 \\ 3\chi N_u / N + 2\chi_u = a_0 \end{cases} \quad (2.73)$$

onde (M_0, c, a_0, b_0) são constantes. As equações de Einstein angulares restantes, em ordem zero e um de ε , serão:

$$O(\varepsilon^0) \rightarrow \begin{cases} \{\sin(\theta)\kappa_\theta / \kappa\}_\theta / \sin(\theta) = 1 - g \kappa^2 \\ \{\sin(\theta)g_\theta\}_\theta / \sin(\theta) = -2c\kappa^2 \end{cases} \quad (2.74)$$

$$O(\varepsilon^1) \rightarrow \begin{cases} \{\sin(\theta)y_\theta\}_\theta / \sin(\theta) = -\kappa^2 (w + 2g y) \\ \{\sin(\theta)w_\theta\}_\theta / \sin(\theta) = -2\kappa^2 (b_0 + a_0 y) \end{cases} \quad (2.75)$$

A natureza física da perturbação

Ao introduzirmos as perturbações através das funções presentes na métrica podemos, em princípio, estar restringindo o tipo algébrico do tensor de Weyl para estas soluções perturbadas do tipo (2.70). Se assim fosse o espaço-tempo perturbado não admitiria o mesmo número de direções nulas principais do tensor de Weyl que genericamente RT possui. Podemos, entretanto, constatar que tais perturbações são do tipo RT, observando os escalares associados às componentes do tensor de Weyl na base de tetradas. No atual sistema de coordenadas, este possui as seguintes componentes não nulas:

$$\begin{aligned}
 W_{0101} &= -W_{2323} = -2W_{0212} = -2W_{0313} = B/r^3 \\
 W_{0102} &= -W_{0323} = -\lambda_\theta / (2r^2\Omega) \\
 W_{0202} &= -W_{0303} = D(u, \theta)/r + A(u, \theta)/r^2
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

sendo,

$$\begin{cases}
 A(u, \theta) = \left\{ \lambda_{\theta\theta} - \lambda_\theta \cot g(\theta) - 2\lambda_\theta \frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right\} / (4\Omega^2) \\
 D(u, \theta) = \left\{ \left(\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right)_\theta - \left(\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right) \cot g(\theta) - \left(\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right)^2 \right\}_u / (2\Omega^2)
 \end{cases} \tag{2.77}$$

onde estamos assumindo a mesma base (2.68), no sistema de coordenadas definido em (2.62).

A contribuição relevante em nossa discussão é a presença ou não do setor radiativo do tensor de Weyl, isto é, a presença ou não da função $D(u, \theta)$ acima. Usando então o esquema de perturbação (2.70) e usando que $\{\kappa, g, y, w\}$ satisfazem as equações angulares (2.74) e (2.75), a quantidade $D(u, \theta)$, terá a forma:

$$D(u, \theta) = -\varepsilon \frac{N_u}{\kappa^2} \left\{ \left(gy + \frac{w}{2} \right) \kappa^2 + y_\theta \left(\frac{\kappa_\theta}{\kappa} + \cot g(\theta) \right) \right\} + O(\varepsilon^2) \tag{2.78}$$

Vemos, portanto que o espaço-tempo resultante não é radiativo em ordem zero, e a estrutura algébrica do tensor de Weyl nesta ordem é menos geral que a do espaço-tempo genérico de RT. Quando consideramos a primeira ordem de perturbação, aparece então o

termo do tipo N de Petrov que “restaura” a estrutura algébrica genérica do tensor de Weyl para a métrica de RT.

2.3.3 Condições de analiticidade e as soluções para a métrica de RT.

As condições de existência e unicidade das soluções das equações de RT foram objeto de grande interesse nos últimos anos, principalmente nos trabalhos de Schmidt, [29], Rendall, [30], Chruściel e Sigleton, [31]. Tendo sido este problema inicialmente discutido por Schmidt [29], este estabeleceu o teorema que garante a existência da solução da equação de RT em $S^2 \times (u_0 + \delta u)$, para dados iniciais fornecidos sobre uma superfície $S^2 \times u_0$, isto é, a existência de solução localmente no tempo. Tal discussão, entretanto, depende fortemente da hipótese de analiticidade das funções, assumidas C^∞ , as quais os valores iniciais são fornecidos em $S^2 \times u_0$. Neste contexto a solução obtida por Newman e Foster, [7], é a solução das equações de RT linearizadas sobre um espaço não perturbado de Schwarzschild. As contribuições posteriores ao trabalho de Schmidt, dadas por estes autores, asseguram a existência de soluções globalmente para todo tempo positivo, convergindo assintoticamente para Schwarzschild. Avaliaram também em que ordem C^k estes espaços-tempos podem ser estendidos através do horizonte de Schwarzschild, tendo sido mostrado que a extensão não pode ser feita de modo analítico em geral. Segundo mostraram, o comportamento da convergência das soluções de RT para Schwarzschild ocorre para dados iniciais arbitrariamente fortes (fora do regime linearizado das equações de RT) porém a suavidade dos dados iniciais permanece sendo um pressuposto básico em tais resultados. Iremos aqui, entretanto, relaxar tal hipótese de analiticidade, encarando a família de RT sob um outro ponto de vista.

Ao observar as equações de Einstein, (2.74) e (2.75), vemos que estas são invariantes pela operação de inversão $\theta \rightarrow \tilde{\theta} = \pi - \theta$. Isto significa que, se o par $\{\kappa(\theta), g(\theta)\}$ é solução de (2.74), então o par $\{\kappa(\pi - \theta), g(\pi - \theta)\}$ também o é. Tais pares de soluções serão, em geral, singulares em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Entretanto, sempre podemos escolher as funções-solução de modo que sejam singulares em apenas um ponto ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$). Deste modo, se

$\{\kappa(\theta), g(\theta)\}$ é uma solução singular apenas em $\theta = \pi$, então $\{\kappa(\pi - \theta), g(\pi - \theta)\}$ será uma solução singular apenas em $\theta = 0$. Denotaremos, então, por $\{\kappa^+, g^+\}$ o par de soluções que é singular em $\theta = \pi$ e por $\{\kappa^-, g^-\}$ o par singular em $\theta = 0$.

Se tomarmos soluções deste tipo para o sistema de equações (2.74), o sistema (2.75) herdará as mesmas características sendo o par $\{y^+, w^+\}$, associados às soluções $\{\kappa^+, g^+\}$, singular apenas em $\theta = \pi$ e o par $\{y^-, w^-\}$, associados às soluções $\{\kappa^-, g^-\}$, singular apenas em $\theta = 0$. Tais soluções são, evidentemente, patológicas exibindo linhas de singularidade quer em $\theta = 0$, quer em $\theta = \pi$, e tornando difícil a interpretação física de um tal modelo.

Entretanto, como na região equatorial ambos os conjuntos $\{+\}$ e $\{-\}$ são regulares podemos ajustar as constantes de integração de modo a “colar” continuamente, através de $\theta = \pi/2$, os dois conjuntos de soluções. Poderemos, deste modo, pensar nos conjuntos de soluções $\{(\kappa^+, g^+), (y^+, w^+)\}$ e $\{(\kappa^-, g^-), (y^-, w^-)\}$ como sendo os ramos de uma única solução, das equações de Einstein, contínua para todo valor de θ :

$$\{\kappa, g, y, w\} = \begin{cases} \{\kappa^+, g^+, y^+, w^+\} & , \text{ para } 0 < \theta < \pi/2 \\ \{\kappa^-, g^-, y^-, w^-\} & , \text{ para } \pi/2 < \theta < \pi \end{cases} \quad (2.79)$$

onde assumimos $\{\kappa^+, g^+, y^+, w^+\}(\pi/2) = \{\kappa^-, g^-, y^-, w^-\}(\pi/2)$.

Evitamos, com tal procedimento, as linhas de singularidades nos polos, mas devemos entretanto notar que pelo menos parte das funções em (2.79), apresentará descontinuidades em alguma ordem de derivação. Assim o preço a ser pago para evitarmos as linhas de singularidade é o da perda de analiticidade das funções sobre as quais iremos fornecer os dados iniciais a serem propagados pelas equações de RT.

Tal situação aponta a possibilidade de introduzirmos novas soluções para a família de RT linearizada, através da quebra de analiticidade das funções que serão propagadas pelas equações de RT. Evidentemente o apelo a uma solução como esta, só poderá se justificar se

formos capazes de implementar alguma física nova e coerente no modelo.

Isto, de fato, poderá ser feito, como mostraremos no capítulo que segue, discutindo como se dá a imersão do plano equatorial de RT no espaço-tempo-ambiente e as soluções que daí surgirão.

Capítulo 3

Camada equatorial na métrica de RT

3.1 O plano equatorial da família de RT

Conforme indicamos na secção (2.3.3), o plano equatorial da subclasse de espaços-tempos de RT lá discutida, poderia ser tomado como superfície de junção para os ramos de eventuais soluções das equações de RT, com funções não analíticas. Soluções desta natureza teriam que ser entendidas atribuindo ao plano equatorial algum caráter físico que tornasse justificável a sua condição de superfície privilegiada, através da qual duas classes, $\{f^+, f^-\}$, de soluções do vazio com linhas de singularidades são “coladas” através do plano para produzir uma nova solução, F , contínua e não singular. A questão é, então, como implementar isto?

Em outros contextos este é, certamente, um problema familiar. Sabemos que, em qualquer teoria física, é necessário implementar condições de junção sobre os campos, ou potenciais, quando estes atravessam uma interface entre dois meios. Fisicamente estas superfícies representam em geral distribuições da fonte dos campos em questão, e as condições de junção

sobre os campos nos fornecem vínculos adicionais, os quais os campos devem respeitar ao atravessar a superfície em questão.

Assim é que descrevemos, por exemplo, na teoria eletromagnética, como os campos se comportam ao atravessarem uma superfície de separação entre dois meios dielétricos, postos em contato. Neste contexto sabemos que as componentes normais dos vetores deslocamento elétrico e campo magnético sofrem um salto descontínuo através da interface de separação entre os meios, se densidades superficiais de carga (ρ_{Σ}) e corrente (j_{Σ}) externas estiverem aí presentes, de modo que,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{n}}^+ - D_{\mathbf{n}}^- &= \rho_{\Sigma} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{n}}^+ - \mathbf{H}_{\mathbf{n}}^- &= j_{\Sigma} \end{aligned}$$

do mesmo modo ocorrendo, se os dois meios são o vazio (dielétricos com $\epsilon = \epsilon_0$) separados em dois domínios por uma fina camada de carga e/ou corrente.

Nestes contextos estes problemas são relativamente simples, pois estamos sempre trabalhando no espaço plano, onde sempre há um sistema de coordenadas global e bem definido, **a priori**.

Na teoria da relatividade geral, contudo, este problema se torna mais delicado porque a suavidade do potencial gravitacional, $g_{\mu\nu}$, é determinada não somente pela suavidade das condições físicas, mas também pela suavidade do sistema de coordenadas que intencionamos usar para descrever o espaço-tempo. Em Schwarzschild, por exemplo, a superfície definida pelo raio de Schwarzschild, $r = 2m$, é bem comportada fisicamente, embora a métrica seja aí singular no sistema de coordenadas esféricas usual. Temos assim que dispor de uma ferramenta eficaz para que saibamos separar as discontinuidades que carregam informações da física do sistema em questão, daquelas que são discontinuidades espúrias devido ao uso de um “mau” sistema de coordenadas para descrever a superfície em questão.

É neste cenário que se insere o formalismo originalmente desenvolvido por Lanczos, O’Brien e Synge e Lichnerowicz, [12, 13, 14], no qual superfícies de discontinuidade são caracterizadas de um modo invariante, puramente geométrico, através da curvatura extrínseca

associadas à tais superfícies. Tal abordagem foi posteriormente colocada em seu formato atual por Israel [15], e constitui a ferramenta adequada ao tratamento de problemas nos quais o espaço-tempo é constituído por domínios distintos, os quais podem ser interpretados como partes de um mesmo sistema total, separado por uma fina camada material. Conforme os trabalhos de Israel, é possível definir um tensor momento-energia da camada, através da curvatura extrínseca da superfície que caracteriza a camada. Faremos, então, uso dos conceitos desenvolvidos por estes autores para discutir a natureza da imersão do plano equatorial de RT no espaço total e discutir que física poderia estar aí presente.

3.2 O tensor energia-momentum da camada

Conforme Israel, [15], podemos definir o tensor energia-momentum, para uma camada como a descrita acima pela expressão,

$$\tilde{T}_{ab} = [K_{ab}]_{\Sigma} - g_{ab} [g^{cd}K_{cd}]_{\Sigma} \quad (3.1)$$

onde os índices $\{a, b, \dots\}$ estão associados às coordenadas intrínsecas da superfície em questão e

$$K_{ab} := -\tilde{e}^{\mu}_{(a)} n_{\mu;\nu} \tilde{e}^{\nu}_{(b)} \quad (3.2)$$

é a curvatura extrínseca associada à hipersuperfície. Os vetores $\{\tilde{e}_{(a)}\}$ constituem uma base intrínseca da hipersuperfície em questão e o vetor \mathbf{n} é o vetor unitário normal a mesma. Este tensor assim definido é, por construção, identicamente conservado covariantemente sobre a camada:

$$\tilde{T}^{ab}{}_{;b} := \tilde{T}^{ab}{}_{;\mu} \tilde{e}^{\mu}_{(b)} + \tilde{\gamma}^a{}_{bc} \tilde{T}^{bc} + \tilde{T}^{ab} \tilde{\gamma}^c{}_{bc} = 0 \quad (3.3)$$

Inspecionando então a métrica de RT na forma (2.66) vemos que sobre a hipersuperfície

$(^3)\Sigma : \theta = \pi/2$, podemos definir a seguinte base intrínseca:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}^\mu_{(0)} = \delta^\mu_{(0)} - \tilde{V}/2 \delta^\mu_{(1)} \\ \tilde{e}^\mu_{(1)} = \delta^\mu_{(1)} \\ \tilde{e}^\mu_{(3)} = 1/(\tilde{\Omega} r) \delta^\mu_{(3)} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

de modo que,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^0 = e^{(0)}_\mu dx^\mu = du \\ \tilde{N}^1 = e^{(1)}_\mu dx^\mu = \tilde{V}/2 du + dr \\ \tilde{\theta}^3 = e^{(3)}_\mu dx^\mu = \tilde{\Omega} r d\phi \end{array} \right. , \quad (3.5)$$

onde $\tilde{V} = \tilde{V}(u, r) = V(u, r, \pi/2)$, etc.

Esta base coincide com três dos vetores de base em (2.68), a saber $\{e^\mu_{(0)}, e^\mu_{(1)}, e^\mu_{(3)}\}$, tomados em $\theta = \pi/2$.

O vetor normal unitário, à hipersuperfície $(^3)\Sigma$ é dado por,

$$n^\mu = -e^\mu_{(2)}|_\Sigma = -1/(\tilde{\Omega} r) \delta^\mu_{(2)} \quad (3.6)$$

onde $e^\mu_{(2)}$ é o vetor $A = 2$ em (2.68), tomado em $\theta = \pi/2$.

Assim, de acordo com (3.2), vemos que,

$$K_{ab} = -\tilde{\gamma}_{b2a} = -\{\tilde{\gamma}_{b2a}\}_\Sigma \quad (3.7)$$

Assim, as componentes não nulas de K_{ab} , em (3.7), serão,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{00} = -\tilde{\gamma}_{020} = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\tilde{\Omega}} \left(\frac{V_\theta}{2} \right) \right\}_\Sigma \\ K_{33} = -\tilde{\gamma}_{323} = \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\Omega_\theta}{\tilde{\Omega}} \right) \right\}_\Sigma \end{array} \right. \quad (3.8)$$

ou

$$K_{ab} = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\Omega} \left(\frac{V_\theta}{2} \right) \right\}_\Sigma \delta_a^0 \delta_b^0 + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right) \right\}_\Sigma \delta_a^3 \delta_b^3 \quad (3.9)$$

o traço, K , é dado por,

$$K = -K_{33} = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\Omega} \left(\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right) \right\}_\Sigma \quad (3.10)$$

Deste modo, de acordo com (3.1), o tensor energia-momentum da superfície equatorial será,

$$\tilde{T}_{ab} = -\frac{1}{2r\tilde{\Omega}} [V_\theta]_\Sigma \delta_a^0 \delta_b^0 + \frac{1}{r\tilde{\Omega}^2} [\Omega_\theta]_\Sigma \left(\delta_a^0 \delta_b^1 + \delta_a^1 \delta_b^0 \right) \quad (3.11)$$

ou

$$\tilde{T}^{ab} = -\frac{1}{2r\tilde{\Omega}} [V_\theta]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b + \frac{1}{r\tilde{\Omega}^2} [\Omega_\theta]_\Sigma \left(\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b \right) \quad (3.12)$$

Lembrado então que $V(u, r, \theta)$ está definido por (2.67) teremos então que este tensor energia-momentum será composto das seguintes partes:

$$\tilde{T}^{ab} = \tilde{T}_{(1)}^{ab} + \tilde{T}_{(2)}^{ab} + \tilde{T}_{(3)}^{ab} \quad (3.13)$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{(1)}^{ab} = -\frac{1}{2r\tilde{\Omega}} [\lambda_\theta]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b \\ \tilde{T}_{(2)}^{ab} = -\frac{1}{\tilde{\Omega}} \left[\left(\frac{\Omega_u}{\tilde{\Omega}} \right)_\theta \right]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b \\ \tilde{T}_{(3)}^{ab} = \frac{1}{r\tilde{\Omega}^2} [\Omega_\theta]_\Sigma \left(\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b \right) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Temos agora que modelar este problema, encontrando qual fonte material poderia ser responsável por esta contribuição de energia e momentum, sobre o plano equatorial. É digno de nota, entretanto, que até o presente momento não estamos discutindo quais funções tem efetivamente primeiras derivadas descontínuas e/ou derivadas segundas mistas descontínuas, através do plano equatorial, isto é, não temos ainda meios de avaliar a natureza particular da

não analiticidade das funções $(\tilde{\lambda}, \tilde{\Omega})$. Ao discutirmos as soluções particulares das equações de RT com funções não analíticas, veremos que, dependendo do caso, parte dos termos $T_{(i)}^{ab}$, em (3.14), poderá estar ausente.

Antes de passarmos à identificação da natureza física de cada contribuição $T_{(i)}^{ab}$, vejamos mais detalhadamente como se dão os balanços de energia sobre a camada equatorial, no sentido de averiguar de que modo estas partes interagem entre si.

3.3 Leis de conservação.

Por construção, o tensor energia-momentum definido por (3.1) é intrinsecamente conservado, conforme (3.3). O mesmo não é, em geral, verdade para as partes $T_{(i)}^{ab}$, em (3.14). A razão de termos separado o tensor energia-momentum na forma particular (3.13), está relacionada ao modo pelo qual a lei de conservação opera entre estes termos no presente caso. O cálculo explícito da divergência de cada termo, em (3.14), fornece,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{T}_{(1)}^{ab}{}_{;b} = 0 \\ \tilde{T}_{(2)}^{ab}{}_{;b} = \tilde{j}_{(2)}^a \\ \tilde{T}_{(3)}^{ab}{}_{;b} = \tilde{j}_{(3)}^a \end{array} \right. \quad (3.15)$$

onde

$$\tilde{j}_{(3)}^a = -\tilde{j}_{(2)}^a = \frac{1}{r\tilde{\Omega}} \left[\left(\frac{\Omega u}{\Omega} \right)_{\theta} \right]_{\Sigma} \delta_1^a \quad (3.16)$$

Este resultado nos indica que existem pelo menos dois tipos de fonte material na camada, as quais não estão interagindo entre si. Uma responsável pela contribuição $\tilde{T}_{(1)}^{ab}$, que se conserva separadamente, e a segunda responsável pelas contribuições $\tilde{T}_{(2)}^{ab} + \tilde{T}_{(3)}^{ab}$, que também se conserva separadamente.

3.4 A natureza material da camada.

3.4.1 Neutrinos radiais.

A parte $T_{(1)}^{ab}$ do tensor (3.12) pode ser modelada por neutrinos radiais, presentes apenas no plano equatorial. Vamos considerar a equação de Dirac-Weyl na subvariedade $\Sigma^{(3)} : \theta = \frac{\pi}{2}$ do espaço-tempo de RT.

A base (3.5) fornece uma tríade natural de vetores (3.4) para expandir $\Sigma^{(3)}$. Nesta base a equação de Dirac-Weyl se escreve como,

$$-i \gamma^a \nabla_a \psi = -i \gamma^a \left(e_{(a)}^\mu \partial_\mu - \Gamma_a \right) \psi = 0 \quad (3.17)$$

onde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

e

$$\Gamma_a = -\frac{1}{4} \gamma_{bca} \gamma^b \gamma^c \quad (3.19)$$

são os coeficientes de Fock-Ivanenko.

Como estamos em base semi-nula, a métrica local de Minkowski se escreve como,

$${}^{(3)}\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

e deste modo as matrizes de Dirac-Pauli,

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = {}^{(3)}\eta^{ab} \mathbf{1}_2 \quad (3.21)$$

estarão em uma representação singular, haja visto que nesta representação,

$$(\gamma^0)^2 = (\gamma^1)^2 = 0 \quad (3.22)$$

Assumimos então a seguinte representação para as matrizes de Dirac-Pauli:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^1 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^3 &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tomando então a base (3.4) e expandindo então a equação (3.17) encontramos,

$$\begin{cases} (\psi_2)_u - \frac{1}{2}\tilde{V}(\psi_2)_r + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{\Omega}_u}{\tilde{\Omega}} - \frac{1}{2r}\tilde{V} - \frac{1}{2}\tilde{V}_r\right)\psi_2 = 0 \\ (\psi_1)_r + \frac{1}{2r}\psi_1 = 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

donde encontramos a seguinte solução:

$$\psi = \frac{b}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

onde $b = b(u)$ é uma função arbitrária de u . A corrente associada a tais neutrinos,

$$j^a = \bar{\psi}\gamma^a\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^a\psi \quad (3.26)$$

é dada, no caso da solução (3.25), por,

$$j^a = \frac{2\bar{b}b}{r} \delta_1^a \quad (3.27)$$

Trata-se de uma corrente de neutrinos radiais saindo da região de campo forte, sobre a camada, haja visto que esta corrente aponta na mesma direção e sentido do vetor de base $\tilde{e}_{(1)} = \frac{\partial}{\partial r}$, definido em (3.4).

O tensor energia-momentum dos neutrinos radiais

O tensor energia-momentum dos neutrinos, é dado por,

$$T_{ab} = i \left\{ \bar{\psi} \gamma_{(a} \nabla_{b)} \psi - \nabla_{(a} \bar{\psi} \gamma_{b)} \psi \right\} \quad (3.28)$$

onde,

$$\begin{cases} \nabla_a \psi &= e_{(a)}^\mu (\partial_\mu \psi) - \Gamma_a \psi \\ \nabla_a \bar{\psi} &= e_{(a)}^\mu (\partial_\mu \bar{\psi}) + \bar{\psi} \Gamma_a \end{cases} \quad (3.29)$$

Tomando então a base (3.4) bem como a solução (3.27), encontramos o seguinte tensor energia-momentum associado aos neutrinos radiais:

$$T_{ab} = 2i \frac{(\bar{b}b_u - \bar{b}_u b)}{r} \delta_a^0 \delta_b^0 \quad (3.30)$$

ou

$$T^{ab} = 2i \frac{(\bar{b}b_u - \bar{b}_u b)}{r} \delta_1^a \delta_1^b \quad (3.31)$$

Comparando o tensor energia-momentum (3.31), acima, com $T_{(1)}^{ab}$, em (3.14), vemos que aquele setor do tensor momentum energia da camada pode ser modelado pela presença destes neutrinos radiais, que provocam o salto descontínuo da primeira derivada da função

$\lambda(u, \theta)$, ao passar por $\theta = \pi/2$. Teríamos então:

$$\frac{[\lambda_\theta]_{\underline{y}}}{2\tilde{\Omega}} = -2i (\bar{b}b_u - \bar{b}_u b) \quad (3.32)$$

3.4.2 Strings radiais.

Para modelar o setor $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$ assumimos tratar-se de um gás de strings com densidade de energia ρ_S . Podemos usar o tratamento desenvolvido por Letelier, [21], para strings clássicos, e usar a seguinte prescrição para o tensor de energia momentum a este associado,

$$\tilde{T}^{ab} = \rho_S \frac{\tilde{\Sigma}^{ac} \tilde{\Sigma}^b{}_c}{\sqrt{-\gamma}} \quad \text{onde, } \tilde{\Sigma}^{ac} = -\tilde{\Sigma}^{ca} \quad (3.33)$$

O tensor $\tilde{\Sigma}^{ac}$ representa a cinemática do fluido e provém da lei de conservação:

$$(\rho_S \tilde{\Sigma}^{ab})_{;b} := (\rho_S \tilde{\Sigma}^{ab})_{;\mu} \tilde{e}^\mu{}_{(b)} + \tilde{\gamma}^a{}_{bc} (\rho_S \tilde{\Sigma}^{bc}) + (\rho_S \tilde{\Sigma}^{ab}) \tilde{\gamma}^c{}_{bc} = 0 \quad (3.34)$$

devendo satisfazer, ainda, a condição de normalização,

$$\tilde{\Sigma}^{ab} \tilde{\Sigma}_{ab} = 2\gamma \quad (3.35)$$

Devido a simetria da camada, assumimos que a única componente não nula de $\tilde{\Sigma}^{ab}$ é $\tilde{\Sigma}^{01}$. Deste modo, a partir da definição (3.33), bem como da condição de normalização, o tensor energia momentum terá a forma,

$$\tilde{T}^{ab} = \rho_S \sqrt{-\gamma} (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) \quad (3.36)$$

Usando então a lei de conservação, encontramos que,

$$\rho_S \sqrt{-\gamma} = \frac{\rho_0}{r\tilde{\Omega}} \quad (3.37)$$

onde ρ_0 é uma constante.

Deste modo poderíamos modelar o setor $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$ por um gás de strings radiais que se conservam. Neste caso, identificando (3.37) com o coeficiente de $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$ em (3.14), viria,

$$\rho_0 = \frac{[\Omega_\theta]_\Sigma}{\tilde{\Omega}}. \quad (3.38)$$

Acontece, entretanto, que o tensor $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$, definido em (3.14), não é conservado em geral, de acordo com (3.15). Deste modo, poderíamos modelar o setor $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$ por strings radiais conservados somente se $\tilde{j}_{(3)}^a$, em (3.16), fosse nulo na solução.

Outra possibilidade seria considerar que em geral, gás de strings também não se conserva de modo que a condição (3.34) é violada do seguinte modo:

$$(\rho_S \tilde{\Sigma}^{ab})_{;b} = \tilde{j}_{(3)}^a = \frac{1}{r\tilde{\Omega}} \left[\left(\frac{\Omega_u}{\Omega} \right)_\theta \right]_\Sigma \delta_1^a \quad (3.39)$$

Neste caso, a dependência radial da quantidade $\rho_S \sqrt{-\gamma}$ permanece a mesma de (3.37), sendo agora dada por:

$$\rho_S \sqrt{-\gamma} = \frac{[\Omega_\theta]_\Sigma}{r\tilde{\Omega}^2} \quad (3.40)$$

Com esta solução acima para $\rho_S \sqrt{-\gamma}$, o tensor (3.36) e $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$, definido em (3.14), são então o mesmo objeto. O preço a pagar é neste caso, o de introduzir dissipação no gás de strings.

O setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, dado em (3.14), não foi, por nós, modelado por algum tipo de fonte material específica, permanecendo com o “status” de um fluido genérico. Curioso, entretanto, notar

que $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$ corresponde a um tensor momentum energia de fluido nulo, havendo indicações de que a sua presença, na camada, está intimamente ligada à presença de radiação gravitacional no espaço-tempo, como sugerem as soluções que iremos exibir.

Capítulo 4

Soluções de Robinson-Trautman

Conforme discutimos previamente dependendo dos requisitos de analiticidade das funções angulares em RT, temos a possibilidade de introduzir classes de soluções cujo conteúdo físico é bastante distinto de um caso para outro. Discutiremos, então, neste capítulo algumas possibilidades de soluções com funções angulares regulares ou com a introdução de uma camada no plano equatorial e a consequente quebra de analiticidade das funções angulares.

4.1 As soluções em ordem zero.

De acordo com o nosso esquema de perturbação podemos separar as soluções das equações em ordem zero de ε , dadas por (2.72) e (2.74), em duas classes: aquela cujas soluções angulares são analíticas ($c = 0$) e aquelas cujas soluções angulares são não analíticas ($c \neq 0$).

4.1.1 Os modos com $c = 0$.

No caso $c = 0$, se tomarmos o sub-espaço $(u, r) = (u_0, r_0)$ compacto, as funções-solução do sistema de equações angulares, (2.74), poderão, então, ser tomadas iguais a unidade:

$$g(\theta) = \kappa(\theta) = 1 \quad (4.1)$$

e ainda, de acordo com (2.72),

$$\chi(u) = -2M_0 \quad (4.2)$$

Deste modo as soluções em order zero serão, neste caso, Schwarzschild ou Minkowski ($M_0 = 0$).

4.1.2 Os modos com $c \neq 0$.

Para o caso $c \neq 0$, as funções-solução do sistema de equações (2.74) serão, em geral, singulares em $\theta = \{0, \pi\}$. Conforme discutimos anteriormente, podemos escolher funções-solução que sejam regulares em θ abrindo mão da analiticidade de tais soluções, o que implica (fisicamente) em introduzir uma camada de matéria ${}^{(3)}\Sigma : \theta = \frac{\pi}{2}$. Assumindo que as soluções angulares de (2.74) são analíticas em c , temos então as seguintes soluções para c pequeno:

$$\begin{cases} g(\theta)^\pm = 1 + c\{-1 + 2\Delta(\theta)^\pm\} \\ (\kappa^2(\theta))^\pm = 1 - 2c \Delta(\theta)^\pm \end{cases} \quad (4.3)$$

e onde,

$$\Delta(\theta)^\pm = \ln(1 \pm \cos(\theta)) \quad (4.4)$$

O par $\{g^+(\theta), \kappa^+(\theta)\}$ descreve a região $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, enquanto que o par $\{g^-(\theta), \kappa^-(\theta)\}$ descreve a região $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Ambos os ramos da solução se “colam” no plano equatorial

de modo que a métrica seja contínua através do plano equatorial, isto é,

$$g^+(\theta)|_{\Sigma} = g^-(\theta)|_{\Sigma} \quad \kappa^+(\theta)|_{\Sigma} = \kappa^-(\theta)|_{\Sigma} \quad (4.5)$$

As primeiras derivadas de tais funções não podem ser descritas por funções contínuas. O cálculo explícito sobre cada ramo de $\{g^\pm(\theta), \kappa^\pm(\theta)\}$, dadas em (4.3), fornece:

$$[g_\theta]_{\Sigma} = [(\kappa^2)_\theta]_{\Sigma} = -4c \quad (4.6)$$

Deste modo, introduzimos a camada material cujo tensor momentum energia estará associado às descontinuidades das funções acima. Podemos avaliar qual é o conteúdo material desta camada em ordem zero de ε , tomando as expressões obtidas em (3.14), que fornecerão o seguinte:

$$\tilde{T}_{(1)}^{ab} = -\frac{[g_\theta]_{\Sigma}}{2r} \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon) \quad (4.7)$$

$$\tilde{T}_{(2)}^{ab} = O(\varepsilon) \quad (4.8)$$

$$\tilde{T}_{(3)}^{ab} = \frac{[\kappa_\theta]_{\Sigma}}{r} (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) + O(\varepsilon) \quad (4.9)$$

Deste modo a camada material fica modelada por neutrinos radiais, através da identificação de (4.7) com (3.31), e por strings radiais, através da identificação de (4.9) com (3.36). Ambos se conservam identicamente, separadamente, e não há radiação gravitacional nesta ordem, no modelo, de acordo com (2.78).

4.2 Soluções em primeira ordem.

4.2.1 A solução de Foster-Newman.

A família de RT fornece um bom guia para tratarmos de perturbações da solução atrasada de Schwarzschild, de modo que o sistema irradie ondas gravitacionais formando um horizonte aparente assintoticamente. Para isto consideremos a métrica de RT perturbada, na forma de (2.71). Tomando então a solução de Schwarzschild como solução do sistema em ordem zero, de acordo com (4.1) e (4.2), teremos que o espaço-tempo perturbado é da forma:

$$dS^2 = \{1 + \varepsilon w N + [-2M_0 + \varepsilon Z(u)]/r + 2\varepsilon r y N_u\} du^2 + \\ + 2du dr - r^2 [1 + \varepsilon y N]^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \quad (4.10)$$

As equações de Einstein restantes, serão dadas por (2.73),

$$\begin{cases} -6M_0 N_u/N = a_0 \\ Z_u/N = b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = N_0 \exp(-a_0 u/6M_0) \\ Z = Z_0 - (6b_0 M_0/a_0) N_0 \exp(-a_0 u/6M_0) \end{cases} \quad (4.11)$$

onde $(a_0, M_0 \neq 0)$ e as constantes (N_0, Z_0) dependem das condições iniciais do problema que serão discutidas adiante.

As equações angulares, (2.75), serão,

$$\begin{cases} y_{\theta\theta} + y_{\theta} \cot g(\theta) + 2y + w = 0 \\ w_{\theta\theta} + w_{\theta} \cot g(\theta) + 2a_0 y + 2b_0 = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Assumindo novamente a regularidade destas funções em θ poderemos tomar soluções

na forma de superposições de polinômios de Legendre. Teremos, então, a solução dada por,

$$w = \sum_{l \geq 2} w_l \quad y = \sum_{l \geq 2} y_l \quad (4.13)$$

onde,

$$\begin{cases} a_0 = a_l = 2[l(l+1)/2] [l(l+1)/2 - 1] \\ w_l = 2b_0/a_l + w_l^0 P_l(\cos(\theta)) \\ y_l = -b_0/a_l + [l(l+1)/2a_l] w_l^0 P_l(\cos(\theta)) \end{cases} \quad (4.14)$$

onde a condição $a_0 \neq 0$ introduz um limite inferior para os autovalores, l , associados aos polinômios de Legendre desta solução, de modo que $l \geq 2$.

Soluções deste tipo podem ser obtidas para o caso em que as funções originais $\{\lambda(u, \theta)\}$ e $\{\Omega(u, \theta)\}$ dependem do ângulo azimutal ϕ , seguindo então o mesmo esquema de perturbação usado em (2.70), com $g = \kappa = 1$ e $\chi(u) = -2M_0$:

$$\begin{cases} \Omega(u, \theta, \phi) = 1 + \varepsilon y(\theta, \phi) N(u) \\ \lambda(u, \theta, \phi) = 1 + \varepsilon w(\theta, \phi) N(u) \\ B(u) = -2M_0 + \varepsilon Z(u) \end{cases}$$

A solução assim obtida consistiria fundamentalmente em substituímos na solução anterior $P_l \rightarrow Y_{l,m}$. Esta solução com dependência azimutal é aquela obtida originalmente por Foster e Newman, [7].

4.2.2 Perturbação na camada equatorial.

Discutiremos as soluções perturbadas, em ordem um de ε , a partir da solução com camada no plano equatorial, já discutida em ordem zero de ε , da secção (4.1.2). Para discutirmos este caso tomemos a expressão do tensor energia momentum de Israel, previ-

amente exibido em (3.14), no regime perturbativo de RT. De acordo com (3.14) e (2.70), teremos em geral,

$$\tilde{T}_{(1)}^{ab} = - \left\{ \frac{[g_\theta]_\Sigma}{2\kappa r} + \varepsilon N \frac{\{[w_\theta]_\Sigma - y [g_\theta]_\Sigma\}}{2\kappa r} \right\} \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon^2) \quad (4.15)$$

$$\tilde{T}_{(2)}^{ab} = -\varepsilon N_u \frac{[y_\theta]_\Sigma}{\kappa} \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon^2) \quad (4.16)$$

$$\tilde{T}_{(3)}^{ab} = \left\{ \frac{[\kappa_\theta]_\Sigma}{\kappa^2 r} + \varepsilon N \frac{\{\kappa [y_\theta]_\Sigma - y [\kappa_\theta]_\Sigma\}}{\kappa^2 r} \right\} (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) + O(\varepsilon^2) \quad (4.17)$$

Notemos que no esquema perturbativo, o primeiro termo $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$ já é de ordem ε . Passemos então à discussão da solução do sistema.

Temos agora a determinar, de acordo com (2.73) e (2.75), duas funções (N, Z) , funções de u , e duas funções angulares (w, y) , que dependem das soluções em ordem zero (κ, g) , de acordo com,

$$\begin{cases} y_{\theta,\theta} + y_\theta \cot g(\theta) &= -\kappa^2 (w + 2g y) \\ w_{\theta,\theta} + w_\theta \cot g(\theta) &= -2\kappa^2 (b_0 + a_0 y) \end{cases} \quad (4.18)$$

Assumindo que as funções (κ, g) são dadas por (4.3), temos então as seguintes soluções para o par (y, w) , para c pequeno:

$$y(\theta)^\pm = -c \tilde{b}_0 (1/2 + \Delta(\theta)^\pm) \quad w(\theta)^\pm = 2c \tilde{b}_0 \Delta(\theta)^\pm \quad (4.19)$$

e,

$$b_0 = c \tilde{b}_0 \quad a_0 = c \tilde{a}_0, \quad (4.20)$$

sendo $(\tilde{b}_0, \tilde{a}_0)$ parâmetros indeterminados e Δ^\pm definida por (4.4).

Nesta solução, todas as funções angulares (κ, g, y, w) apresentam descontinuidade nas

primeiras derivadas, proporcionais à descontinuidade $[\Delta_\theta]_{\mathbf{x}}$. Sendo assim, modelamos os setores $\tilde{T}_{(1)}^{ab}$, dado em (4.15), e $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$, dado em (4.17), por neutrinos e strings respectivamente. Neste caso, entretanto, conforme mencionamos no capítulo (3) os strings não podem se conservar, trocando corrente com o setor descrito por $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, dado em (4.16), e que agora está presente, em razão de termos $[y_\theta]_{\mathbf{x}} \neq 0$.

A presença de radiação gravitacional neste modelo, de acordo com (2.78), dependerá exclusivamente de $N(u)$ depender, de fato, de u . Observando a equação (2.73) teremos, neste caso:

$$\begin{cases} Z_u &= c \tilde{b}_0 N \\ 3\chi(u) N_u/N &= c (\tilde{a}_0 - 2) \end{cases} \quad (4.21)$$

onde $\chi(u)$ é dada em (2.72).

Deste modo, há ondas gravitacionais no modelo para $\tilde{a}_0 \neq 2$.

Se $\tilde{a}_0 = 2$, este será um modelo essencialmente igual ao modelo com camada de matéria, sem radiação gravitacional, discutido anteriormente na secção (4.1.2), em ordem zero de ε . Nestes modelos sem radiação gravitacional, novamente o setor modelado por strings, dado por $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$, se conserva e o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, dado em (4.16), novamente desaparece.

Deste modo, embora não tenhamos obtido sucesso em modelar o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, vemos que este é o responsável, nestes modelos, por introduzir tanto dissipação no setor de strings da camada quanto ondas gravitacionais no espaço-tempo. É a presença da corrente de troca entre os strings e o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$ que promove o comportamento radiativo do espaço-tempo.

4.2.3 Perturbação tipo RT em Minkowski

Há nestes modelos uma situação particular, para a qual chamamos agora a atenção. Assumindo como solução em ordem zero de ε o espaço-tempo de Minkowski,

$$c = M_0 = 0 \Rightarrow \chi(u) = 0, \quad \kappa = g = 1 \quad (4.22)$$

O elemento do linha (2.71) corresponderá a perturbações do tipo RT, sobre o espaço de Minkowski.

Vamos entretanto, tomar este caso com respeito ao tempo adiantado em vez de retardado. Isto equivale a fazer $u \rightarrow -u$ no elemento de linha (2.71) que agora se escreve como:

$$dS^2 = \{1 + \varepsilon w N + \varepsilon Z(u)/r - 2\varepsilon r y N_u\} du^2 + \quad (4.23)$$

$$-2du dr - r^2 [1 + \varepsilon y N]^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2)$$

Podemos considerar que, neste caso, a perturbação é devida a presença da camada em ordem um de ε . De acordo com (2.73) e (2.75), as equações perturbadas são agora:

$$Z_u/N = b_0 \quad (4.24)$$

e

$$\begin{cases} \{\sin(\theta)y_\theta\}_\theta / \sin(\theta) = -(w + 2y) \\ \{\sin(\theta)w_\theta\}_\theta / \sin(\theta) = -2b_0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Temos agora uma situação na qual a função $N(u)$ é arbitrária, sendo tipo função informação do sistema. Quanto ao setor angular podemos tomar novamente funções não analíticas como soluções das equações (4.25), dadas por,

$$w(\theta)^\pm = b_0 + 2b_0\Delta(\theta)^\pm \quad y(\theta)^\pm = -b_0 - b_0 \Delta(\theta)^\pm \quad (4.26)$$

onde Δ^\pm está definida em (4.4).

Temos, deste modo, uma camada em ordem um de ε na qual o parâmetro b_0 estará associado à quantidades intrínsecas à camada (analogamente ao papel de c na solução em ordem zero vista anteriormente), através das quantidades.

$$[w_\theta]_\Sigma = -2[y_\theta]_\Sigma = -4b_0 \quad (4.27)$$

Usando a base de tétradas exibida em (4.2.4), temos que o tensor energia-momentum da camada é agora dado por,

$$\tilde{T}_{(1)}^{ab} = -\varepsilon N \frac{[w_\theta]_\Sigma}{2r} \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon^2) \quad (4.28)$$

$$\tilde{T}_{(2)}^{ab} = \varepsilon N_u [y_\theta]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon^2) \quad (4.29)$$

$$\tilde{T}_{(3)}^{ab} = \varepsilon N \frac{[y_\theta]_\Sigma}{r} (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) + O(\varepsilon^2) \quad (4.30)$$

O setor $\tilde{T}_{(1)}^{ab}$ permanesse identicamente conservado, sendo modelado pelos neutrinos, que agora entram através da camada. O cálculo da corrente de neutrinos fornece, formalmente, o mesmo resultado (3.27):

$$j^a = \frac{2\bar{b}b}{r} \delta_1^a \quad (4.31)$$

Entretanto, de acordo com (A.3) o vetor de base $\bar{e}_{(1)} = -\frac{\partial}{\partial r}$ entra através da camada. Deste modo, como dissemos, os neutrinos entram através da camada. Assim o setor $\tilde{T}_{(1)}^{ab}$ fica modelado por neutrinos através da identificação de (4.28) com (3.31).

O setor $\tilde{T}_{(3)}^{ab}$ pode ainda ser modelado por um gás não conservativo de strings radiais, identificando (4.30) com (3.36).

Novamente vemos que a presença do setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, nesta solução, esta unicamente associada à presença de ondas gravitacionais no espaço-tempo ($N_u \neq 0$), de acordo com (2.78). Novamente é a presença da corrente de troca entre os strings e o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$ o fator responsável pelo comportamento radiativo do espaço-tempo.

Chamamos finalmente atenção para o seguinte aspecto presente neste modelo: o termo de massa, $\varepsilon Z(u)/r$, presente na métrica (4.23), está relacionado à função arbitrária $N(u)$, de acordo com a equação (4.24). Como a função $N(u)$ é arbitrária podemos tomá-la como sendo uma função C^∞ , de suporte compacto, que represente um único "pulso", durante o intervalo $-\delta \leq u \leq \delta$, onde δ é uma quantidade positiva. Por exemplo $N(u)$ poderia ser

da forma:

$$N(u) = \begin{cases} \exp \{-\delta^2 / [\delta^2 - u^2]\} & , \text{para } |u| \leq \delta \\ 0 & , \text{para } |u| \geq \delta \end{cases} \quad (4.32)$$

Deste modo, de acordo com (4.24), a função $Z(u)$ cresce a partir de zero, em $u = -\delta$, estabilizando-se em um valor constante para $u \geq \delta$. Ainda, a equação para o horizonte aparente $V(u, r, \theta) = 0$, fornece:

$$r = -\varepsilon Z(u) + O(\varepsilon^2) = -\varepsilon b_0 \int_{-\delta}^{\delta} N(u) du + O(\varepsilon^2)$$

Assim, vemos que para $u \geq \delta$ forma-se um horizonte aparente cujo raio é dado pelo valor final, constante, da função $Z(u \geq \delta)$. Este raio será uma quantidade positiva se a constante b_0 for negativa.

4.2.4 Considerações finais.

De acordo com os resultados apresentados, as soluções de espaços-tempos tipo RT, radiativos, com camada de matéria no plano equatorial sempre apresentam o termo $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, dado em (3.14). Queremos aqui discutir se tal propriedade é intrínseca aos modos radiativos com camada ou não.

Para tal propósito, assumimos como solução em ordem zero de ε aquela da camada, sem radiação gravitacional no espaço-tempo, vista na secção (4.1.2), caracterizada pelo par de funções angulares (κ^\pm, g^\pm) , dadas em (4.3). Daí, então, discutiremos a estrutura das equações em ordem um de ε , dadas por (2.75).

Um aspecto que devemos antes salientar é o seguinte: observando as expressões para para o tensor energia momentum da camada em ordem um de ε , dadas em (4.15), (4.16) e (4.17), esperamos que as descontinuidades associadas às primeiras derivadas de quaisquer das funções do problema sejam finitas. Caso contrário não poderíamos interpretar $(^3)\Sigma$:

$\theta = \frac{\pi}{2}$ como uma fina camada material (haveriam densidades infinitas). De fato, tanto nas soluções de ordem zero (4.3), de ordem um em (4.19), ou ainda em (4.26), anteriormente apresentadas, as descontinuidades nas primeiras derivadas são constantes. Deste modo, assumimos que os saltos descontínuos das primeiras derivadas de quaisquer funções-solução do tipo camada fina são finitos.

Tomemos, então, agora as equações para (y, w) , dadas em (2.75):

$$\begin{cases} y_{\theta,\theta} + y_{\theta} \cot g(\theta) &= -(\kappa^{\pm})^2 (w + 2(g^{\pm}) y) \\ w_{\theta,\theta} + w_{\theta} \cot g(\theta) &= -2(\kappa^{\pm})^2 (b_0 + a_0 y) \end{cases} \quad (4.33)$$

onde (κ^{\pm}, g^{\pm}) são, como dissemos, as soluções (4.3).

Tomando-se a descontinuidade do par de equações (4.33), através do plano equatorial, usando o fato de que (κ, g, y, w) são contínuas através desta superfície, e que as eventuais descontinuidades das primeiras derivadas de quaisquer das funções sejam finitas, vemos que,

$$[y_{\theta,\theta}]_{\Sigma} = [w_{\theta,\theta}]_{\Sigma} = 0 \quad (4.34)$$

e, deste modo, podemos ter as situações:

- Embora as funções angulares (y, w) não apresentem descontinuidades em suas segundas derivadas, estas podem apresentá-las em primeiras derivadas. De fato, este é justamente o caso das soluções exibidas em (4.19).
- Suponhamos que existam soluções para as quais as funções (y, w) tenham primeiras derivadas contínuas. Neste caso, de acordo com (4.34), estas serão automaticamente contínuas até segunda ordem de derivação. Entretanto, derivando o sistema (4.33) em θ e tomando-lhe a descontinuidade, vemos que $([y_{\theta,\theta,\theta}]_{\Sigma}, [w_{\theta,\theta,\theta}]_{\Sigma})$ são proporcionais à $([\kappa_{\theta}]_{\Sigma}, [g_{\theta}]_{\Sigma})$. Deste modo, em tais soluções, o par (y, w) apresentaria descontinuidade apenas a partir das terceiras derivadas, não contribuindo para a camada. Consequentemente, a camada material equatorial, associada a uma solução com tais

características, não apresentaria o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$, dado em (4.16), haja visto que teríamos $[y_\theta]_{\Sigma} = 0$, na ordem de perturbação considerada.

Neste caso, a camada seria modelada exclusivamente por neutrinos radiais e strings radiais mesmo com a presença de ondas gravitacionais. O tensor momentum-energia para esta camada seria, de acordo com (4.15), (4.16) e (4.17),

$$\tilde{T}_{(1)}^{ab} = -(1 - \varepsilon yN) \left\{ \frac{[g_\theta]_{\Sigma}}{2\kappa r} \right\} \delta_1^a \delta_1^b + O(\varepsilon^2) \quad (4.35)$$

$$\tilde{T}_{(2)}^{ab} = O(\varepsilon^2) \quad (4.36)$$

$$\tilde{T}_{(3)}^{ab} = (1 - \varepsilon yN) \left\{ \frac{[\kappa_\theta]_{\Sigma}}{\kappa^2 r} \right\} (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) + O(\varepsilon^2) \quad (4.37)$$

Deste modo setor $\tilde{T}_{(1)}^{ab}$, dado em (4.35) poderia ser modelado por neutrinos radiais, de acordo com (3.31), enquanto que o setor (4.37) poderia ser modelado por strings radiais, de acordo com (3.36).

Esta é uma situação, conforme chamamos atenção no capítulo (3), na qual os strings não se conservariam em geral. Entretanto devido a natureza particular destas possíveis soluções que estamos aqui discutindo ($[y_\theta]_{\Sigma} = 0$), a dissipação seria uma quantidade em $O(\varepsilon^2)$ e, portanto, o gás de strings seria conservado até a ordem de validade da solução. Embora não tenhamos exibido uma solução com tais características, o sistema poderia em princípio apresentar tal comportamento que é compatível com as equações do problema.

Finalmente resumizamos em uma tabela as soluções aqui exibidas das equações de RT, perturbadas em ε , dependendo das funções solução serem C^∞ ou C^ω :

$O(\varepsilon^0)$	C^∞		C^0
	<i>Minkowski</i>	<i>Schwarzschild</i>	<i>Schwarzschild + camada</i>
$O(\varepsilon^1)$	C^0	C^∞	C^0
	<i>camada + rad.grav.</i>	Foster-Newman	<i>camada + rad.grav.</i>

Conclusão

Consideramos que as propriedades “naturais” do campo gravitacional, que permitem estabelecer uma noção formalmente precisa de radiação gravitacional são aquelas apresentadas no presente trabalho, em perfeita analogia com as propriedades do campo de radiação eletromagnético. Não intencionamos, entretanto, sugerir que tais ferramentas permitam esgotar o cenário que a teoria da Relatividade Geral tem a fornecer sobre a radiação gravitacional.

Nas abordagens de Bondi-Sachs um grande avanço na compreensão dos processos de emissão de radiação gravitacional por fontes espacialmente localizadas foi alcançado. Entretanto, jamais se exibiu, tanto quanto sabemos, alguma métrica que seja solução exata das equações de Einstein no vácuo, que seja algebricamente geral e que exiba o comportamento do “Peeling-off”. Tal abordagem permanece, deste modo, assentada sobre as expansões em potências inversas, no parâmetro afim radial nulo (ou na distância de luminosidade), do tensor de curvatura e das equações de campo, que nos permite obter informações do sistema apenas em caráter aproximado, através da expansão multipolar. Além disto, há outros aspectos da questão que não estão naturalmente contemplados em tal abordagem como o problema da energia carregada pelas ondas.

Fisicamente, qualquer fenômeno radiativo está ligado a algum processo de transporte de energia. Na teoria da Relatividade Geral, entretanto, torna-se difícil tratar conceitualmente o problema da radiação gravitacional sob esta perspectiva, devido à falta de disponibilidade de um tensor energia-momento para a gravitação. Tal dificuldade é bem conhecida e

sua origem reside na natureza íntima dos processos gravitacionais regidos pelo princípio da equivalência. Entretanto, certos autores abordaram o problema da radiação gravitacional justamente por este prisma, remetendo-o ao problema de definir um tensor (ou pseudo-tensor) de energia-momentum para o campo gravitacional e, a partir disto, definir o noção de radiação gravitacional. Embora estes aspectos do problema não tenham sido discutidos por nós no presente trabalho, há extensa literatura seguindo esta linha de abordagem como podemos encontrar, por exemplo, em Zakharov, [34].

Acreditamos que um cenário plenamente satisfatório para discussão do problema da radiação gravitacional seria aquele que contemplasse em um mesmo formalismo as diversas propriedades esperadas das ondas gravitacionais (estar associada ao tensor de Weyl tipo- N , corresponder a algum processo de transporte de “energia gravitacional” bem definido e, ainda, exibir a natureza quadrupolar do potencial gravitacional, em algum sistema de coordenadas convenientemente definido, como prevê a teoria linearizada) ou, alternativamente, que nos permitisse eventualmente assegurar o caráter espúrio de alguns dos resultados conhecidos. Deste modo, aspectos um tanto desconexos, obtidos por abordagens distintas, convergiriam para um mesmo cenário, tornando conceitualmente sólida, sob os vários aspectos do problema, a noção de radiação no contexto da teoria da Relatividade Geral.

Neste sentido, acreditamos que a obtenção de soluções exatas permanece como uma etapa importante na compreensão dos processos radiativos gravitacionais. Com efeito tais soluções permitiriam “conectar” os diversos aspectos do problema, fornecendo um modelo concreto que enriquecesse nossa intuição sobre o que esperar do comportamento radiativo do campo gravitacional segundo a Relatividade Geral. A ênfase dada, neste trabalho, ao espaço-tempo de Robinson-Trautman foi norteadada por esta perspectiva.

De acordo com os resultados obtidos, vimos que o mecanismo de extração de massa, por emissão de radiação gravitacional, aparece naturalmente na dinâmica destes modelos. Devemos, entretanto, chamar atenção para um último aspecto: sempre que nos referimos à “massa dependente do tempo”, no decorrer da discussão em Robinson-Trautman, tínhamos em mente o termo em $O(r^{-1})$ presente em g_{00} . Poder-se-ia argumentar que tal noção

de massa não é suficientemente precisa, principalmente se levarmos em conta o calibre temporal, presente em Robinson-Trautman, de acordo com (2.51) e (2.52), que permite tornar a função $B(u)$, presente em (2.67), uma constante. Entretanto se observarmos os escalares associados às componentes do tensor de Weyl, dados em (2.76), vemos que os “termos de massa”, em $O(r^{-3})$, permanecem dependentes do tempo mesmo quando fazemos $B(u) \rightarrow B_0$, pelo uso do calibre temporal. Esta é, deste modo, a motivação para atribuímos uma massa dependente do tempo ao espaço-tempo de Robinson-Trautman, sendo o uso do calibre temporal uma mera questão de opção. Diante disto, optamos por não fazer uso do calibre $B(u) \rightarrow B_0$ nos modelos, por nós, apresentados. Entretanto, esta discussão coloca a questão de como definir uma noção invariante de massa para o espaço-tempo de Robinson-Trautman. Acreditamos que a estrutura das equações de campo, conforme (2.69), bem como a forma dos escalares associados às componentes do tensor de Weyl, dados em (2.76), sugerem como definição para função de massa, invariante pelo calibre (2.51), a seguinte quantidade:

$$M(u, \theta) = -\frac{1}{2} B(u) \Omega(u, \theta)^3$$

Deste modo aqueles escalares associados às componentes do tensor de Weyl que são termos de massa, se escrevem, de acordo com (2.76), como:

$$W_{0101} = -W_{2323} = -2W_{0212} = -2W_{0313} = -2\frac{M(u, \theta)}{\bar{r}^3}$$

onde $\bar{r} = r \Omega$ é o novo parâmetro de distância, também invariante pela transformação de calibre (2.51).

Apêndice A : Objetos relacionados à métrica de RT

A métrica de Robinson-Trautann sem dependência azimutal é aquela usada na discussão das soluções com camada. Deste modo exibimos aqui as expressões dos objetos geométricos para estes espaços-tempos na base (2.68), no sistema de coordenadas (u, r, θ, ϕ) , definido em (2.62). Para efeito da discussão da solução com neutrinos entrando, radialmente, através da camada, exibiremos de forma conjunta os casos retardado (no qual aparece o termo $+dudr$ na métrica) e adiantado ($-dudr$).

$$dS^2 = V(u, r, \theta) du^2 \pm 2 dudr - r^2 \Omega^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$V(u, r, \theta) = V^\pm = \lambda(u, \theta) + B(u)/r \pm 2r \frac{\Omega_u}{\Omega} \quad (\text{A.2})$$

As bases associadas aos casos $\{\pm\}$ podem ser dadas, respectivamente por:

$$\left\{ \begin{array}{l} N^0 = du \\ N^1 = V^\pm/2 du \pm dr \\ \theta^2 = r \Omega d\theta \\ \theta^3 = r \sin(\theta) \Omega d\phi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^\mu_{(0)} = \delta_0^\mu \mp (1/2r) V^\pm \delta_1^\mu \\ e^\mu_{(1)} = \pm \delta_1^\mu \\ e^\mu_{(2)} = 1/(r\Omega) \delta_2^\mu \\ e^\mu_{(3)} = 1/(r\Omega \sin(\theta)) \delta_3^\mu \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

As equações de RT ficam escritas, conforme a escolha do sinal $\{\pm\}$, como,

$$\begin{aligned} \lambda &= \Omega^{-2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\sin(\theta) \frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right)_\theta \right\} \\ \pm B_u \pm 3B\Omega_u/\Omega &= -\Omega^{-2} (\lambda_\theta \sin(\theta))_\theta / (2 \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Os γ_{abc}

Os coeficientes de Rotação de Ricci não nulos são dados, nesta base, por,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_{010} = \pm V_r^\pm/2 & \gamma_{122} = \pm 1/r \\ \gamma_{020} = V_\theta^\pm/(2r\Omega) & \gamma_{133} = \pm 1/r \\ \gamma_{022} = \Omega_u/\Omega \mp V^\pm/2r & \gamma_{233} = \Omega_\theta/(r\Omega^2) + \cotg(\theta)/(r\Omega) \\ \gamma_{033} = \Omega_u/\Omega \mp V^\pm/2r & \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

O tensor momentum-energia da camada.

Inspecionando a base (A.3) vemos que a base intrínseca da camada ${}^{(3)}\Sigma : \theta = \pi/2$ pode ser dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^0 = du \\ \tilde{N}^1 = \tilde{V}^\pm/2 du \pm dr \\ \tilde{\theta}^3 = r \tilde{\Omega} d\phi \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{e}^\mu{}_{(0)} = (1, \mp \tilde{V}^\pm/2r, 0) \\ \tilde{e}^\mu{}_{(1)} = (0, \pm 1, 0) \\ \tilde{e}^\mu{}_{(3)} = (0, 0, 1/(r\tilde{\Omega})) \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

onde $\tilde{f} = \{f\}_\Sigma$

Inspecionando (A.5) vemos que a curvatura extrínseca à hipersuperfície ${}^{(3)}\Sigma$,

$$K_{ab} = -\gamma_{b2a}|_\Sigma, \quad (\text{A.7})$$

é dada por:

$$K_{ab} = \pm K_{ab} = \left\{ -\frac{1}{2r\Omega} V_\theta^\pm \delta_a^0 \delta_b^0 - \frac{1}{r\Omega} \frac{\Omega_\theta}{\Omega} \delta_a^3 \delta_b^3 \right\}_\Sigma \quad (\text{A.8})$$

Deste modo $T_{ab} = [K_{ab}] - g_{ab} [K]$, fornece,

$$\pm T^{ab} = \left\{ -\frac{1}{2r\Omega} [V_\theta^\pm] \delta_1^a \delta_1^b - \frac{1}{r\Omega} \left[\frac{\Omega_\theta}{\Omega} \right]_2 \delta_0^{(a} \delta_1^{b)} \right\}_\Sigma \quad (\text{A.9})$$

Observando que V^\pm está dado em (A.2), vemos que as partes constituintes do tensor momentum-energia, analogamente ao que foi feito no capítulo (3), serão:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm T_{(1)}^{ab} = \tilde{T}_{(1)}^{ab} = -\frac{1}{2r\tilde{\Omega}} [\lambda_\theta]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b \\ \pm T_{(2)}^{ab} = \pm \tilde{T}_{(2)}^{ab} = \mp \frac{1}{\tilde{\Omega}} \left[\left(\frac{\Omega_\theta}{\tilde{\Omega}} \right)_\theta \right]_\Sigma \delta_1^a \delta_1^b \\ \pm T_{(3)}^{ab} = \tilde{T}_{(3)}^{ab} = \frac{1}{r\tilde{\Omega}^2} [\Omega_\theta]_\Sigma (\delta_0^a \delta_1^b + \delta_1^a \delta_0^b) \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

e, deste modo, apenas o setor $\tilde{T}_{(2)}^{ab}$ é afetado pelo sinal $\{\pm\}$.

Apêndice B : Objetos relacionados à métrica de Bondi

Conforme já foi exibido no capítulo (2), assumimos uma base de tétradas semi-nula para a métrica de Bondi, tal que:

$$dS^2 = 2N^0 N^1 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2 \quad (\text{B.1})$$

e dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} N^0 = du \\ N^1 = V e^\beta / 2r du + e^\beta dr \\ \theta^2 = r e^N (d\theta - U du) \\ \theta^3 = r \sin(\theta) e^{-N} d\phi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^\mu_{(0)} = \delta^\mu_0 - V/2r \delta^\mu_1 + U \delta^\mu_2 \\ e^\mu_{(1)} = e^{-\beta} \delta^\mu_1 \\ e^\mu_{(2)} = e^{-N} / r \delta^\mu_2 \\ e^\mu_{(3)} = e^N / r \sin(\theta) \delta^\mu_3 \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

sendo $\{V, \beta, N, U\}$ são funções de (u, r, θ) . Deste modo teremos, nesta base, os seguintes escalares geométricos:

Os C_{abc}

$$\left\{ \begin{array}{l}
 C_{001} = \frac{1}{2} \frac{V_r}{r} - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{V \beta_r}{r} - \beta_u - \beta_\theta U \\
 C_{002} = \frac{1}{2} \frac{V_\theta e^\beta}{r^2 e^N} \\
 C_{202} = U_\theta + U N_\theta + N_u - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{V N_r}{r} \\
 C_{303} = -N_u - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{V N_r}{r} + \frac{U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - U N_\theta \\
 C_{012} = \frac{\beta_\theta}{r e^N} \\
 C_{212} = \frac{1}{e^\beta r} + \frac{N_r}{e^\beta} \\
 C_{313} = \frac{1}{e^\beta r} - \frac{N_r}{e^\beta} \\
 C_{323} = \frac{\cos(\theta)}{r e^N \sin(\theta)} - \frac{N_\theta}{r e^N}
 \end{array} \right. \quad (B.3)$$

Os γ_{abc}

Os coeficientes de Rotação de Ricci não nulos são dados, nesta base, por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{010} = \frac{1}{2} \frac{V_r}{r} - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{V \beta_r}{r} - \beta_u - \beta_\theta U \\ \gamma_{012} = \frac{1}{2} \frac{U_r r e^N}{e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta}{r e^N} \\ \gamma_{021} = \frac{1}{2} \frac{U_r r e^N}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta}{r e^N} \\ \gamma_{120} = \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta}{r e^N} - \frac{1}{2} \frac{U_r r e^N}{e^\beta} \\ \gamma_{020} = \frac{1}{2} \frac{V_\theta e^\beta}{r^2 e^N} \\ \gamma_{022} = U_\theta + U N_\theta + N_u - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{V N_r}{r} \\ \gamma_{033} = -N_u - \frac{1}{2} \frac{V}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{V N_r}{r} + \frac{U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - U N_\theta \\ \gamma_{122} = \frac{1}{e^\beta r} + \frac{N_r}{e^\beta} \\ \gamma_{133} = \frac{1}{e^\beta r} - \frac{N_r}{e^\beta} \\ \gamma_{233} = \frac{\cos(\theta)}{r e^N \sin(\theta)} - \frac{N_\theta}{r e^N} \end{array} \right. \quad (B.4)$$

Os R_{ab}

As componentes não nulas do tensor de Ricci são, divididas em quatro grupos de equações, que ficam caracterizadas nesta base do seguinte modo:

As equações de Superfície

$$R_{11} = -2 \frac{N_r^2}{(e^\beta)^2} + 2 \frac{\beta_r}{r (e^\beta)^2} \quad (B.5)$$

$$\begin{aligned}
 R_{12} = & \frac{1}{2} \frac{r e^N U_{r,r}}{(e^\beta)^2} + \left(2 \frac{e^N}{(e^\beta)^2} - \frac{1}{2} \frac{r e^N \beta_r}{(e^\beta)^2} + \frac{r e^N N_r}{(e^\beta)^2} \right) U_r + \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\beta_{r,\theta}}{e^\beta r e^N} + \frac{\beta_\theta}{e^\beta r^2 e^N} + 2 \frac{\cos(\theta) N_r}{e^\beta r e^N \sin(\theta)} - 2 \frac{N_\theta N_r}{e^\beta r e^N} + \frac{N_{r,\theta}}{e^\beta r e^N}
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} R_{22} + \frac{1}{2} R_{33} = & \frac{V_r}{r^2 e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{r^2 (e^N)^2 U_r^2}{(e^\beta)^2} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta) U_r}{e^\beta \sin(\theta)} + \\
 & - 2 \frac{U \cos(\theta)}{r e^\beta \sin(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{U_{r,\theta}}{e^\beta} - 2 \frac{U_\theta}{r e^\beta} + \\
 & + e^{-2N} \left(-1 + \frac{1}{2} \beta_{\theta,\theta} + \frac{1}{4} \beta_\theta^2 - N_{\theta,\theta} + 2 N_\theta^2 + \right. \\
 & \left. - N_\theta \beta_\theta + \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 3 \frac{N_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) / r^2
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

Estas três primeiras equações tem por soluções formais as respectivas integrais:

$$\beta = b(u, \theta) + \int N_r^2 r dr \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
 U = & l(u, \theta) + \lambda(u, \theta) \int \frac{e^\beta}{r^4 (e^N)^2} dr \\
 & - \int \frac{e^\beta \int r^2 \left(2 N_{r,\theta} - 4 N_r N_\theta + 4 \frac{N_r \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \beta_{r,\theta} + 2 \frac{\beta_\theta}{r} \right) dr}{(e^N)^2 r^4} dr
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
 V = & -2M(u, \theta) - \int e^\beta \left(-1 + \frac{1}{2} \beta_{\theta, \theta} + \frac{1}{4} \beta_\theta^2 - N_{\theta, \theta} + 2 N_\theta^2 - N_\theta \beta_\theta + \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right. \\
 & \left. - 3 \frac{N_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) / (e^N)^2 + \frac{1}{4} \frac{r^4 (e^N)^2 U_r^2}{e^\beta} + r \left(-2 \frac{U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 2 U_\theta \right) \\
 & + r^2 \left(-\frac{1}{2} U_{r, \theta} - \frac{1}{2} \frac{U_r \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \right) dr
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

onde, $\{M, \lambda, l, b\}$ são funções de integração que independem da variável radial, r . Deste modo, dada a função $N(u, r, \theta)$, poderíamos determinar $\beta(u, r, \theta)$ através da integral (B.8), a menos da função de integração $b(u, \theta)$. De posse do par (N, β) passamos à integral (B.9) e determinamos $U(u, r, \theta)$ a menos das funções de integração (λ, l) , funções de (u, θ) apenas. Conhecidas então (N, β, U) , obtemos a expressão para a última função a três variáveis do problema, que é a função $V(u, r, \theta)$, através de (B.10). As equações restantes fornecerão então vínculos adicionais sobre as funções de integração a duas variáveis restantes, bem como a dinâmica a qual estão sujeitas.

Deste modo, o conjunto restante das equações de Einstein é dado pelo seguinte.

A equação dinâmica

$$\begin{aligned}
 R_{33} = & \frac{1}{r^2 (e^N)^2} - \frac{V_r}{r^2 e^\beta} + \frac{N_r V_r}{r e^\beta} + \frac{V N_r}{r^2 e^\beta} - 2 \frac{N_{r, u}}{e^\beta} + \frac{\cos(\theta) U_r}{e^\beta \sin(\theta)} - 2 \frac{U N_{r, \theta}}{e^\beta} \\
 & - \frac{U_r N_\theta}{e^\beta} - \frac{\cos(\theta) \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2 \sin(\theta)} + \frac{N_\theta \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2} - 2 \frac{N_u}{r e^\beta} - 2 \frac{U N_\theta}{r e^\beta} + \frac{V N_{r, r}}{r e^\beta} \\
 & + 3 \frac{U \cos(\theta)}{r e^\beta \sin(\theta)} - \frac{N_r U \cos(\theta)}{e^\beta \sin(\theta)} + 3 \frac{\cos(\theta) N_\theta}{r^2 (e^N)^2 \sin(\theta)} - 2 \frac{N_\theta^2}{r^2 (e^N)^2} \\
 & + \frac{U_\theta}{r e^\beta} - \frac{N_r U_\theta}{e^\beta} + \frac{N_{\theta, \theta}}{r^2 (e^N)^2}
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

As condições suplementares

$$\begin{aligned}
 R_{02} = & \frac{N_{u,\theta}}{r e^N} + \frac{U}{r e^N} + \frac{1}{2} \frac{V_{r,\theta}}{r^2 e^N} - \frac{1}{2} \frac{\beta_{u,\theta}}{r e^N} - \frac{1}{2} \frac{V_\theta}{r^3 e^N} - \frac{1}{2} \frac{r e^N U_{r,u}}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{V_\theta \beta_r}{r^2 e^N} \\
 & - \frac{r e^N U_r U_\theta}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{r e^N \beta_u U_r}{e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{e^N V U_{r,r}}{e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{V \beta_{r,\theta}}{r^2 e^N} \\
 & - \frac{1}{4} \frac{e^N V \beta_r U_r}{e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{r e^N U U_{r,\theta}}{e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{U \beta_{\theta,\theta}}{r e^N} + \frac{1}{2} \frac{r e^N U \beta_\theta U_r}{e^\beta} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{e^N V N_r U_r}{e^\beta} - \frac{r e^N U N_\theta U_r}{e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{r e^N U \cos(\theta) U_r}{\sin(\theta) e^\beta} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{U \cos(\theta) \beta_\theta}{r \sin(\theta) e^N} + 3 \frac{U \cos(\theta) N_\theta}{r \sin(\theta) e^N} + 2 \frac{N_u \cos(\theta)}{r \sin(\theta) e^N} - \frac{\cos(\theta) V N_r}{r^2 \sin(\theta) e^N} \\
 & - 2 \frac{N_\theta^2 U}{r e^N} - 2 \frac{N_\theta N_u}{r e^N} + \frac{N_\theta V N_r}{r^2 e^N} - \frac{V_\theta N_r}{r^2 e^N} - \frac{1}{2} \frac{V N_{r,\theta}}{r^2 e^N} + \frac{U N_{\theta,\theta}}{r e^N} \\
 & - \frac{r e^N N_u U_r}{e^\beta} + \frac{e^N V U_r}{r e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{V \beta_\theta}{r^3 e^N}
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
 R_{00} = & \frac{1}{2} \frac{V U_{r,\theta}}{r} + \frac{1}{2} \frac{V_\theta \beta_\theta e^\beta}{r^3 (e^N)^2} - \frac{1}{2} \frac{U_\theta V \beta_r}{r} + \frac{U_\theta V N_r}{r} - \frac{U U_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{V U_r \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} - \frac{V N_r U \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + 2 \frac{V N_r U N_\theta}{r} - U_\theta^2 - 2 U_\theta N_u \\
 & - U U_{\theta,\theta} - \frac{1}{2} \frac{U \cos(\theta) V_r}{r \sin(\theta)} + U^2 - 2 N_u^2 + 2 \frac{N_u V N_r}{r} \\
 & + 2 \frac{N_u U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{V_\theta e^\beta N_\theta}{r^3 (e^N)^2} + \frac{3}{2} \frac{U \cos(\theta) V}{r^2 \sin(\theta)} + 2 \frac{U^2 \cos(\theta) N_\theta}{\sin(\theta)} \\
 & + \frac{U \cos(\theta) \beta_u}{\sin(\theta)} + \frac{U^2 \cos(\theta) \beta_\theta}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{U \cos(\theta) V \beta_r}{r \sin(\theta)} - \frac{V \beta_\theta U}{r^2} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{V_{\theta,\theta} e^\beta}{r^3 (e^N)^2} + \frac{1}{2} \frac{V_\theta e^\beta \cos(\theta)}{r^3 (e^N)^2 \sin(\theta)} + \frac{1}{2} \frac{V^2 \beta_r}{r^3} - \frac{V \beta_u}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{V^2 N_r^2}{r^2} \\
 & - 4 N_u U N_\theta - \frac{U_u \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 2 U U_\theta N_\theta + \frac{U V_\theta}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{U_\theta V_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{V_\theta U_r}{r} \\
 & + \frac{3}{2} \frac{U_\theta V}{r^2} + U_\theta \beta_\theta U - U_{u,\theta} + U_\theta \beta_u - 2 U^2 N_\theta^2 + \frac{V_u}{r^2}
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

A equação trivial

$$\begin{aligned}
 R_{01} = & -\frac{1}{2} \frac{r^2 (e^N)^2 U_r^2}{(e^\beta)^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta_\theta^2}{r^2 (e^N)^2} - \frac{1}{2} \frac{U_r \beta_\theta}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{V_{r,r}}{r e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{V_r \beta_r}{r e^\beta} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{V \beta_{r,r}}{r e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{V \beta_r}{r^2 e^\beta} - \frac{\beta_{r,u}}{e^\beta} - \frac{\beta_{r,\theta} U}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\beta_{\theta,\theta}}{r^2 (e^N)^2} - \frac{N_\theta \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2} - \frac{U_\theta}{r e^\beta} \\
 & - \frac{N_r U_\theta}{e^\beta} - 2 \frac{N_r U N_\theta}{e^\beta} - 2 \frac{N_r N_u}{e^\beta} + \frac{N_r^2 V}{r e^\beta} - \frac{1}{2} \frac{U_{r,\theta}}{e^\beta} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta) \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2 \sin(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta) U_r}{e^\beta \sin(\theta)} - \frac{U \cos(\theta)}{r e^\beta \sin(\theta)} + \frac{N_r U \cos(\theta)}{e^\beta \sin(\theta)}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

Os W_{abcd}

As componentes não nulas do tensor de Weyl, nesta base, são:

$$\begin{aligned}
 W_{0101} = & -\frac{1}{3} \frac{1}{r^2 (e^N)^2} - \frac{\cos(\theta) N_\theta}{r^2 (e^N)^2 \sin(\theta)} + \frac{2}{3} \frac{N_\theta^2}{r^2 (e^N)^2} - \frac{1}{3} \frac{N_{\theta,\theta}}{r^2 (e^N)^2} \\
 & - \frac{2}{3} \frac{N_r U \cos(\theta)}{e^\beta \sin(\theta)} - \frac{2}{3} \frac{V_r}{r^2 e^\beta} - \frac{2}{3} \frac{N_r^2 V}{r e^\beta} + \frac{1}{6} \frac{U_{r,\theta}}{e^\beta} + \frac{1}{3} \frac{N_\theta \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2} \\
 & + \frac{2}{3} \frac{N_r U_\theta}{e^\beta} + \frac{V}{e^\beta r^3} + \frac{4}{3} \frac{N_r U N_\theta}{e^\beta} + \frac{4}{3} \frac{N_r N_u}{e^\beta} - \frac{1}{3} \frac{r^2 (e^N)^2 U_r^2}{(e^\beta)^2} \\
 & - \frac{1}{6} \frac{\beta_{\theta,\theta}}{r^2 (e^N)^2} + \frac{1}{6} \frac{\cos(\theta) U_r}{e^\beta \sin(\theta)} - \frac{1}{6} \frac{\cos(\theta) \beta_\theta}{r^2 (e^N)^2 \sin(\theta)} - \frac{1}{6} \frac{U_r \beta_\theta}{e^\beta} + \frac{1}{6} \frac{V_{r,r}}{r e^\beta} \\
 & + \frac{1}{6} \frac{V_r \beta_r}{r e^\beta} + \frac{1}{6} \frac{V \beta_{r,r}}{r e^\beta} - \frac{1}{6} \frac{V \beta_r}{r^2 e^\beta} - \frac{1}{3} \frac{\beta_{r,u}}{e^\beta} - \frac{1}{3} \frac{\beta_{r,\theta} U}{e^\beta}
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
 W_{0102} = & \frac{1}{2} \frac{U N_\theta \beta_\theta}{r e^N} - \frac{1}{2} \frac{N_{u,\theta}}{r e^N} - \frac{1}{4} \frac{V N_r \beta_\theta}{r^2 e^N} - \frac{1}{2} \frac{U}{r e^N} + \frac{1}{4} \frac{V_{r,\theta}}{r^2 e^N} - \frac{1}{4} \frac{\beta_{u,\theta}}{r e^N} \\
 & - \frac{3}{4} \frac{V_\theta}{r^3 e^N} + \frac{1}{2} \frac{N_u \beta_\theta}{r e^N} - \frac{1}{4} \frac{r e^N U_{r,u}}{e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{V_\theta \beta_r}{r^2 e^N} - \frac{1}{2} \frac{r e^N U_r U_\theta}{e^\beta} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{r e^N \beta_u U_r}{e^\beta} + \frac{1}{8} \frac{e^N V U_{r,r}}{e^\beta} + \frac{1}{8} \frac{V \beta_{r,\theta}}{r^2 e^N} - \frac{1}{8} \frac{e^N V \beta_r U_r}{e^\beta} \\
 & - \frac{1}{4} \frac{r e^N U U_{r,\theta}}{e^\beta} - \frac{1}{4} \frac{U \beta_{\theta,\theta}}{r e^N} + \frac{1}{4} \frac{r e^N U \beta_\theta U_r}{e^\beta} + \frac{1}{2} \frac{e^N V N_r U_r}{e^\beta} \\
 & - \frac{r e^N U N_\theta U_r}{e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{r e^N U \cos(\theta) U_r}{\sin(\theta) e^\beta} - \frac{1}{4} \frac{U \cos(\theta) \beta_\theta}{r \sin(\theta) e^N} \\
 & - \frac{3}{2} \frac{U \cos(\theta) N_\theta}{r \sin(\theta) e^N} - \frac{N_u \cos(\theta)}{r \sin(\theta) e^N} + \frac{1}{2} \frac{\cos(\theta) V N_r}{r^2 \sin(\theta) e^N} + \frac{N_\theta^2 U}{r e^N} + \frac{N_\theta N_u}{r e^N} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{N_\theta V N_r}{r^2 e^N} + \frac{1}{4} \frac{V N_{r,\theta}}{r^2 e^N} - \frac{1}{2} \frac{U N_{\theta,\theta}}{r e^N} - \frac{r e^N N_u U_r}{e^\beta} + \frac{1}{4} \frac{e^N V U_r}{r e^\beta}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
 W_{0112} = & -\frac{1}{2} \frac{e^N U_r}{(e^\beta)^2} - \frac{r e^N N_r U_r}{(e^\beta)^2} - \frac{1}{2} \frac{N_r \beta_\theta}{r e^\beta e^N} - \frac{1}{4} \frac{r e^N U_{r,r}}{(e^\beta)^2} + \frac{1}{4} \frac{\beta_{r,\theta}}{e^\beta r e^N} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{r e^N \beta_r U_r}{(e^\beta)^2} + \frac{\cos(\theta) N_r}{e^\beta r e^N \sin(\theta)} - \frac{N_\theta N_r}{e^\beta r e^N} + \frac{1}{2} \frac{N_{r,\theta}}{e^\beta r e^N}
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
 W_{0202} = & \frac{1}{4} \frac{V U_{r,\theta}}{r} + \frac{1}{4} \frac{V_\theta \beta_\theta e^\beta}{r^3 (e^N)^2} - \frac{1}{4} \frac{U_\theta V \beta_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{U_\theta V N_r}{r} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{U U_\theta \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{1}{4} \frac{V U_r \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} + \frac{1}{2} \frac{V N_r U \cos(\theta)}{r \sin(\theta)} - \frac{1}{2} U_\theta^2 \\
 & - U_\theta N_u - \frac{1}{2} U U_{\theta,\theta} + \frac{1}{4} \frac{U \cos(\theta) V_r}{r \sin(\theta)} - \frac{1}{2} U^2 - \frac{N_u U \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\
 & - \frac{3}{4} \frac{U \cos(\theta) V}{r^2 \sin(\theta)} - \frac{U^2 \cos(\theta) N_\theta}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{U \cos(\theta) \beta_u}{\sin(\theta)} - \frac{1}{2} \frac{U^2 \cos(\theta) \beta_\theta}{\sin(\theta)} \\
 & + \frac{1}{4} \frac{U \cos(\theta) V \beta_r}{r \sin(\theta)} + \frac{1}{4} \frac{V_{\theta,\theta} e^\beta}{r^3 (e^N)^2} - \frac{1}{4} \frac{V_\theta e^\beta \cos(\theta)}{r^3 (e^N)^2 \sin(\theta)} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{U_u \cos(\theta)}{\sin(\theta)} - 2 U U_\theta N_\theta - \frac{1}{4} \frac{U_\theta V_r}{r} + \frac{1}{4} \frac{V_\theta U_r}{r} + \frac{3}{4} \frac{U_\theta V}{r^2} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{V^2 N_r}{r^3} + \frac{V N_{r,u}}{r} + U^2 N_\theta \beta_\theta + U N_\theta \beta_u + \frac{3}{2} \frac{N_u V}{r^2} - \frac{1}{4} \frac{V^2 N_{r,r}}{r^2} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{N_u V_r}{r} + \frac{1}{2} U_\theta \beta_\theta U - 2 U N_{u,\theta} - N_{u,u} - \frac{1}{2} U_{u,\theta} + N_u \beta_\theta U \\
 & + \frac{1}{2} \frac{V_u N_r}{r} + N_u \beta_u + \frac{1}{2} U_\theta \beta_u - \frac{1}{2} \frac{N_u V \beta_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{V U_r N_\theta}{r} + \frac{V U N_{r,\theta}}{r} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{U V_\theta N_r}{r} + \frac{1}{4} \frac{V^2 N_r \beta_r}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{V N_r \beta_u}{r} - \frac{1}{2} \frac{V N_r \beta_\theta U}{r} - \frac{1}{2} \frac{U N_\theta V_r}{r} \\
 & - \frac{1}{2} \frac{U N_\theta V \beta_r}{r} + \frac{3}{2} \frac{U N_\theta V}{r^2} - U^2 N_{\theta,\theta} - U_u N_\theta
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$W_{1212} = -2 \frac{N_r}{r (e^\beta)^2} - \frac{N_{r,r}}{(e^\beta)^2} + \frac{\beta_r N_r}{(e^\beta)^2} \tag{B.19}$$

$$W_{0212} = W_{0313} = \frac{1}{2} W_{2323} = -\frac{1}{2} W_{0101} \tag{B.20}$$

$$W_{0303} = -W_{0202} \tag{B.21}$$

$$W_{0323} = -W_{0102} \tag{B.22}$$

$$W_{1313} = -W_{1212} \tag{B.23}$$

$$W_{1323} = W_{0112} \tag{B.24}$$

Referências

- [1] Einstein (1916), Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss, 1:688.
Einstein (1918), Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss, 1:154.
- [2] Hadamard, J., **Equattions aux dérivées partielles et problme de Cauchy**, Hermann, (Paris, 1932)
Choquet-Bruhat, Y., DeWitt-Morette, C. and Dillard-Bleick, M.,
Analysis, manifolds and Physics, North-Holland, (1982)
- [3] Robinson, I. and Trautman, A. (1960). Phys.Rev.Let., 4, 431.
Robinson, I. and Trautman, A. (1961) Proc.Roy. Soc. A, **265**, 463.
- [4] Newman, E.T. and Unti, T. (1962). J.Math.Phys., **3**, 891.
- [5] Hogan, A.P. and Trautman, A., (1987) in **Gravitation and Geometry**
Rindler, W. and Trautman (Napoli Bibliopolis).
- [6] Isaacson, R. and Winicour, J. (1968) Phys.Rev. **168**, 1451.
- [7] Foster, J. and Newman, E.T. (1967), J.Math.Phys., **8**, 189.
- [8] Newman, E. and Penrose, R. (1962), J.Math.Phys., **3**, 566
- [9] Penrose, R. (1960), Ann.Phys.Princeton, **10**, 171-201.
- [10] Debever, R. (1959), Compt.Rend., **249**, 1324-1326.
Debever, R. (1964), Cah.Phys. **18**, 168-169, 303.

- [11] Petrov, A.Z., Sci. Not. Kazan State Univ. 114,55 (1954).
Petrov, A.Z., **Geometry and the theory of Relativity** (1958).
- [12] Lanczos, C. (1922), Ann. der Phys. 74, 518.
- [13] O'Brien, S. and Synge, J.L. (1952) Commun. Dublin Inst. Adv. Stud., **A**, 9.
- [14] Lichnerowicz, A. (1955), in **Théories Relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme**, (Paris, 1955).
- [15] Israel, W. Nuovo Cimento 44,1 (1966).
- [16] Trautman, A., Pirani F.A.E. and Bondi, H. (1964), **Lectures on General Relativity**, Brandeis 1964 Summer Institute in Theoretical Physics, vol **1**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [17] Kramer, D., Stephani, H., Herlt, E. and MacCallum, M. (1979), **Exact Solutions of Einstein's Field Equations**, Cambridge University Press.
- [18] Pirani F.A.E. (1957), Phys.Rev., **105** (3), 1089.
- [19] Soares, I.D., Oliveira, H.P., Bedran, M.L. and Calvão, M.O. (1996), Phys Rev D, 54, 3826
- [20] Novello, M., and Duarte de Oliveira, J. (1980) Gen.Rel.Grav., 12, **11**, 871
- [21] Letelier, P.S. (1979), Phys Rev D, **20**, 1294.
Letelier, P.S., in **II Escola Brasileira de Cosmologia e Gravitação**, ed. Novello, M. (CBPF, Rio de Janeiro, 1980).
- [22] Ehlers, J. and Sachs, R. (1959) Zs Phys. 155:498.
- [23] Sachs, R. and Bergmann, P.G. (1958) Phys. Rev. **112**, 674.
- [24] Sachs, R. (1961) Proc. Roy. Soc., **A**, **264**, 309.
- [25] Sachs, R. (1962) Proc. Roy. Soc., **A** **270**, 103 .

- [26] Bondi, H. Pirani F.E.A. and Robinson, I. (1959) Proc. Roy. Soc., A **251**, 519.
- [27] Rosen, N. (1937) Phys. Z. Sowjet, **12**, 366.
- [28] Bondi, H. , van der Burg, M.G.J. and Metzner, A. W.K. (1962) Proc. Roy. Soc. A, **269**, 21.
- [29] Schmidt, B.G. (1988) Gen. Rel. Grav., **20**, **1**, 65.
- [30] A.D. Rendall. (1988) Class. Quantum. Grav., **5**, 1339.
- [31] P.T. Cruściel (1991) Commun. Math. Phys., **137**, 289.
P.T. Cruściel (1992) Proc. Roy. Soc. London, **A436**, 299.
P.T. Cruściel and D.B. Singleton (1992) Commun. Math. Phys., **147**, 133.
- [32] Schutz, B.F., **A first course in general relativity**,
Cambridge Univ. Press, (1990).
- [33] Stewart, J., **Advanced general relativity**,
Cambridge Univ. Press, (1991).
- [34] Zakharov, V.D., **Gravitational waves in Einstein's theory**,
Halsted Press (Jerusalem-London , 1973).
- [35] Synge, J. L., **Relativity: the special theory**
ed. North-Holl. Publ. Comp., (Amsterdam, 1956).
- [36] **Gravitation: an introduction to current research**
ed. Witten, L., (Wiley, London/New York , 1962).

**“MODELOS COM EMISSÃO DE RADIAÇÃO
GRAVITACIONAL EM MÉTRICAS DE
BONDI-ROBINSON-TRAUTMAN”**

Marcelo Costa de Lima

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



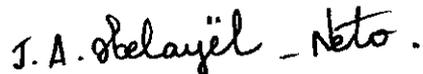
Ivano Damião Soares - Presidente



Murari Mohan Som



Patricio Anibal Letelier Sotomayor



José Abdalla Helayël-Neto



Mario Novello

Rio de Janeiro, 01 de abril de 1999