

Tese de  
Mestrado

Teoria das Nucleações em Teoria Quântica  
de Campos à Temperatura Zero e Finita:  
Aplicação ao Modelo  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$

Gabriel Flores Hidalgo

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, fevereiro de 1999.

## Resumo

Calculamos a taxa de decaimento do falso vácuo à temperatura zero e a taxa de nucleação a temperatura finita no modelo  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$ . Fazendo uso da aproximação conhecida como de parede fina (“thin-wall approximation”), obtivemos a solução para o “bounce”. Em seguida avaliamos a ação Euclideana no “bounce” e na mesma aproximação calculamos o modo negativo responsável pela instabilidade do falso vacuo.

## Abstract

We evaluate both the vacuum decay rate at zero temperature and the finite temperature nucleation rate for the  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$  model. Using the so called thin-wall approximation, we obtain the bounce solution for the model, evaluate the Euclidean action in the bounce and in the same approximation we compute the negative mode responsible for the instability of the false vacuum.

*Aos meu pais,  
por tudo o que significam para mim.*

## Agradecimentos

Aos que contribuíram e contribuem na minha formação profissional e pessoal:

- Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao CBPF por ter me permitido ser um dos seus alunos e à CAPES pelo apoio financeiro.
  - Ao meu orientador Nami F. Svaiter e a o meu co-orientador Rudnei O. Ramos.
  - A minha família, que sempre me deram o seu apoio.
  - A turma da sala 503A: Andre Massaferi, Eduardo Tonini, Martin Makler, Raphael De Paola, Robson Rodrigues, e Sergio Santini.
  - A “Peruchada” : Rodolfo Casana Sifuentes, “al corchito” Guillermo Cuba Castillo, Rafael Pujada Bermudez, “al gato” Luis Peche Puertas, Fernando Vizcarra Siguas, Onofre Rojas Santos, Moises Rojas Leyva, Marco Flores Rivera, Javier solano Salinas, German Gomero Ferrer, Johana Chirinos Diaz, Gino Janampa Añaños, Dalbert Sanchez Candela e Javier Gomez Romero.
  - Aos amigos que não se esqueceram de mim: Omar Usuriaga Najera, Javier Paucar Jauregui, Angela Barra Barrera, Alcides Maldonado Quispe e Sandra Guzman Calcina.
- A todos eles o meu muito obrigado.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Taxa de decaimento em teoria quântica de campos à temperatura zero</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Taxa de decaimento em mecânica quântica ( $D = 1$ ) . . . . .	10
2.2.1	O caso de uma integral simples . . . . .	14
2.2.2	O ponto de sela em mecânica quântica . . . . .	16
2.2.3	A contribuição de configurações “multi-bounce” . . . . .	21
2.3	O caso da teoria quântica de campos . . . . .	23
2.3.1	O “bounce” em teoria quântica de campos . . . . .	24
2.3.2	Os autovalores nulos . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Taxa de decaimento em teoria quântica de campos à temperatura finita</b>	<b>29</b>
3.1	Introdução . . . . .	29
3.2	O formalismo geral . . . . .	31
3.3	Calculo dos determinantes . . . . .	34
<b>4</b>	<b>O calculo da taxa de decaimento no modelo <math>(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3</math> à temperatura zero</b>	<b>38</b>
4.1	Introdução . . . . .	38
4.2	A solução do “bounce” na aproximação de parede fina . . . . .	39
4.3	Calculo do determinante funcional . . . . .	43
4.3.1	O potencial efetivo a um “loop” . . . . .	45
4.3.2	Os autovalores $E_{\text{wall}}^2(i)$ . . . . .	46
4.4	A validade da aproximação . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Taxa de decaimento no modelo <math>(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3</math> à temperatura finita</b>	<b>50</b>
5.1	Introdução . . . . .	50
5.2	O “bounce” a altas temperaturas na aproximação de parede fina . . . . .	51
5.3	As correções térmicas à taxa de decaimento . . . . .	52
5.4	Os autovalores $E_{\text{wall}}^2(i)$ . . . . .	54
5.5	A validade da aproximação . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>58</b>
<b>A</b>		<b>60</b>

# Lista de Figuras

2.1	A energia potencial em função da posição para uma partícula com um falso estado fundamental. . . . .	7
2.2	$U(\varphi)$ , no caso de uma teoria de campo que possui um falso vácuo. . . . .	8
2.3	(a) A energia potencial de uma partícula que possui um verdadeiro estado fundamental; (b) A energia potencial do caso (a) com sinal negativo. . . . .	13
2.4	(a) $f(x, \alpha)$ em função de $x$ complexo para $\alpha < 0$ ; (b) Os contornos de integração onde a integral é convergente, no caso em que $\alpha < 0$ . . . . .	15
2.5	O potencial da Fig. 2.1 com sinal negativo. . . . .	16
2.6	Forma qualitativa do bounce. . . . .	17
2.7	Uma configuração “multi-bounce” . . . . .	22
2.8	A energia potencial para o análogo mecânico da eq. (2.62). . . . .	26
3.1	Soluções da eq. (3.5) a diferentes regimes de temperatura. . . . .	33
4.1	$U(\varphi)$ para valores dos parâmetros $m$ , $\lambda$ e $\sigma$ que satisfazem a eq. (4.3) . . . . .	39
4.2	$U(\varphi)$ como sendo a diferença entre $\frac{\sigma}{6!}\varphi^2(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2$ (curva <i>I</i> ) menos $\gamma\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}$ (curva <i>II</i> ). . . . .	41
4.3	$\varphi_{\text{wall}}$ em função de $\rho$ . . . . .	42

# Capítulo 1

## Introdução

A partir dos anos 70 cresceu bastante o interesse pelas consequências cosmológicas das teorias de grande unificação. Há dois grandes motivos para este interesse: em primeiro lugar, estas teorias (em particular o modelo padrão) podem dar uma solução ao problema da assimetria barionica do universo [1]-[2]. Em segundo lugar, é claro que o estudo futuro das propriedades das partículas elementares na faixa de energias da ordem de 15 GeV, necessário para o estudo completo das teorias de grande unificação, ainda não puderam ser feitos com a ajuda dos experimentos de raios cósmicos, nem com a construção de novos aceleradores. Por conseguinte, além de alguns experimentos sobre o decaimento do proton, uma das mais grandes fontes de informação para as teorias de grande unificação são o estudo das consequências cosmológicas destas teorias.

Uma etapa necessária no estudo dos processos físicos no universo primordial é o estudo das transições de fase com quebras de simetrias. Diversas quebras, segundo às teorias de grande unificação, devem ter acontecido durante o esfriamento do universo nas etapas primordiais da sua evolução [3]. Uma teoria de transição de fase com quebra de simetria, é de principal importancia, por exemplo, para a teoria cosmológica da produção da assimetria barionica [2]. Em conexão com isto, é de particular importancia o estudo da

cinemática da transição de fase, *i.e.*, a velocidade à qual acontece a transição de fase.

As transições de fase são bastante familiares da matéria condensada. Uma mesma substância química dependendo da temperatura  $T$ , e da pressão  $P$ , pode ficar em diferentes estados de fase. O exemplo típico é a água. A partir da equação de estado desta substância (no presente caso uma equação que relaciona a temperatura, pressão e densidade) podemos desenhar o chamado diagrama de fase. Teremos um sólido um líquido ou um gás dependendo dos valores de  $T$  e  $P$ . No diagrama de fase, os estados de fase diferentes estão separados por linhas de transição de fase de primeira e de segunda ordem.

Numa transição de fase de primeira ordem, duas fases diferentes podem coexistir à temperatura crítica. O comportamento do sistema, perto de uma transição de fase de primeira ordem é irregular. Por exemplo, a densidade do sistema sofre uma mudança descontínua quando a linha de transição de fase é atravessada. Uma das características de uma transição de fase de primeira ordem é o seu calor latente. Outra característica é, que ele pode se dar com “super-cooling” ou com “super-heating”. Por exemplo, a água pode existir em fase líquida um pouco acima dos  $100^{\circ}\text{C}$  em um estado meta-estável.

As transições de fase de segunda ordem ou transições de fase contínuas são suaves, contrário às de primeira ordem. Não existe calor latente de transição, mas o calor específico tem um comportamento irregular à temperatura crítica.

Em alguns casos as transições de fase de primeira e segunda ordem estão associados à quebra ou restauração de alguma simetria do estado fundamental. Por exemplo, no caso da transição de fase gás→líquido, temos uma quebra de invariância translacional e rotacional.

Em particular, o nosso interesse são as transições de fase de primeira ordem, já que

neste caso os sistemas apresentam fases de estado meta-estáveis. Uma transição de fase de primeira ordem se dá mediante a formação de bolhas da nova fase (a fase estável) dentro da fase meta-estável. Por exemplo, quando um gás é esfriado, bolhas da fase líquida são formadas dentro da fase vapor. Se o raio  $r$  da bolha formada for muito pequeno então esta colapsa, pois a energia volumétrica (proporcional a  $-r^3$ ; negativa pelo fato de que o sistema vai desde um estado de energia maior para outro menor) é menor que a energia superficial (proporcional a  $r^2$ ) e desta maneira a pressão interna será menor que a tensão superficial da bolha. Então, só bolhas de raio suficientemente grandes sobreviverão para depois se expandir. Ao final da transição de fase diferentes bolhas colidem e o volume inteiro é transformado numa nova fase, a fase líquida. Uma situação similar acontece na teoria eletrofraca no contexto do mecanismo da assimetria barionica do universo [2].

Um dos problemas fundamentais da cosmologia moderna é o problema da assimetria barionica do universo. Na natureza existem diferentes tipos de partículas elementares. Algumas partículas são neutras, algumas possuem carga elétrica. A grosso modo, podemos dividir as partículas elementares em dois grandes grupos: partículas e antipartículas. Estes dois grupos tem cargas (elétrica, leptônica, barionica, etc) opostas. As propriedades das partículas e antipartículas são muito similares; embora tenham cargas opostas, as suas massas, spins e vidas médias são iguais. Então, por que o nosso universo consiste de matéria e não de anti-matéria?. Além disso, por que não vemos uma considerável quantidade de anti-matéria no universo. Este é o problema da assimetria barionica ou problema da bariogênese do universo.

Uma possível solução ao problema da bariogênese é dada pelo modelo eletrofraco padrão, pois ele possui as três características necessárias para o aparecimento da assime-

tria barionica nas etapas primordiais do nosso universo [4]: Não conservação do numero barionico [5], violação das simetrias  $C$  e  $CP$  e a quebra do equilíbrio térmico. O modelo eletrofraco padrão baseia-se no grupo de gauge  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes SU(1)$ . O grupo  $SU(3)$  descreve a interação forte,  $SU(2)$  é o chamado grupo fraco, e  $U(1)$  é conhecido como o grupo de hipercarga. O eletromagnetismo aparece como resultado da quebra do grupo  $SU(2) \otimes SU(1)$  em  $U(1)_{EM}$ . O conteúdo de partículas do modelo padrão é: 3 familias fermiônicas, 1 escalar de Higgs, 3 bosons vetorias massivos, e o foton. Para que a produção da assimetria barionica seja apreciável no universo primordial é preciso que a transição de fase se de com esfriamento; então, a transição de fase terá que ser de primeira ordem. A altas temperaturas, no diagrama de fase do modelo eletro-fraco padrão temos uma linha de transição de fase de primeira ordem, que separa a fase simetrica ( nesta fase, a conservação do número barionico é violada) da fase de simetria quebrada (ou fase de Higgs; nesta fase, o número barionico é conservado). Então, na transição de fase: fase simetrica  $\rightarrow$  fase de Higgs; bolhas da nova fase, a fase de Higgs, aparecem espontaneamente dentro do mar da fase simetrica. Se o raio da bolha formada for suficientemente grande, esta se expandira, e no final da transição de fase bolhas formadas em diferentes pontos colidem levando o universo todo a uma nova fase, a fase de Higgs, onde a matéria dominará sob a antimatéria. Uma etapa importante no estudo da cinetica deste processo físico é o calculo da taxa de nucleação (ou taxa de decaimento da fase meta-estável) das bolhas da fase de Higgs (a fase estável).

O decaimento da fase meta-estável é devido a flutuações térmicas e quânticas. Em geral, a altas temperaturas as flutuações térmicas dominam enquanto que a baixas temperaturas dominarão as flutuações quânticas. A temperatura zero, o problema da taxa de

decaimento é simplesmente igual a taxa de tunelamento por uma barreira de potencial.

Além dos exemplos acima citados, o problema do cálculo da taxa de nucleação ou taxa de decaimento, aparece em diversas áreas, como por exemplo, no estudo das reações nucleares (decaimento alpha, fusão, fissão), na nucleação espontânea em sistemas de  $He^3/He^4$ , nas reações químicas, etc [6]. Em particular, o problema do tunelamento é de interesse teórico para o estudo do comportamento assintótico das séries perturbativas, tanto na mecânica quântica quanto na teoria quântica de campos [7].

O problema da determinação da taxa de nucleação na matéria condensada é um problema bem conhecido na mecânica estatística clássica, e de longa história [8]. A versão moderna foi desenvolvido por Langer numa série de artigos dedicados ao estudo de sistemas meta-estáveis [9]. No caso da teoria quântica de campos a temperatura zero, o estudo da taxa de decaimento do estado meta-estável (ou segundo Coleman, o falso vácuo) foi iniciado com o trabalho de Voloshin *et al.* [10], e posteriormente desenvolvido por Callan e Coleman nos finais dos anos 70 [11]. No caso da teoria quântica de campos a temperatura finita, as correções térmicas à taxa de decaimento foi considerada primeiro por Linde [12].

Nesta tese vamos considerar a determinação da taxa de decaimento da fase meta-estável (ou falso vácuo) na teoria quântica de um campo escalar com auto-interação<sup>1</sup> que possui um estado meta-estável (ou falso vácuo). No capítulo II, seguindo o formalismo de Callan e Coleman [11] deduzimos a taxa de decaimento do estado meta-estável (o vácuo falso) a temperatura zero para uma teoria de campo escalar em  $D$  dimensões espaço-temporais. No capítulo III, seguindo a referência [13], incluímos os efeitos da

---

<sup>1</sup>No caso da teoria de um campo escalar interagindo com um campo fermiônico, o problema pode ser reduzido a uma teoria efetiva de um campo escalar depois de integrar sobre os graus de liberdade fermiônicos[13].

temperatura na taxa de decaimento no regime de altas temperaturas . Nos capitulos IV e V, utilizando o formalismo dos capítulos II e III respetivamente, calculamos a taxa de decaimento do estado meta-estável a temperatura zero e finita no modelo  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)$  em  $D = 3$ . Finalmente, conclusões são dadas no capítulo VI.

# Capítulo 2

## Taxa de decaimento em teoria quântica de campos à temperatura zero

### 2.1 Introdução

Neste capítulo daremos uma breve introdução ao formalismo desenvolvido para o estudo de sistemas meta-estáveis. Desta forma, vamos considerar o movimento de uma partícula num potencial  $V(x)$ , do tipo mostrado na Fig. 2.1. Classicamente, o sistema possui um estado de equilíbrio estável no ponto  $x = 0$ , onde a partícula fica em repouso. Entretanto, correções quânticas tornam este estado instável; na literatura ele é denominado um falso vácuo ou um falso estado fundamental.

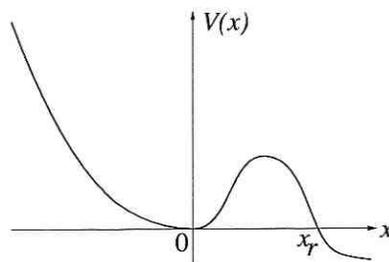


Figura 2.1: A energia potencial em função da posição para uma partícula com um falso estado fundamental.

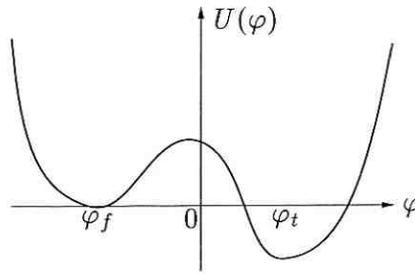


Figura 2.2:  $U(\varphi)$ , no caso de uma teoria de campo que possui um falso vácuo.

Uma situação similar acontece em teoria quântica de campos. Desta forma, vamos considerar a teoria de um campo escalar com densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi), \quad (2.1)$$

onde  $U(\varphi)$  tem a forma mostrada na Fig. 2.2. A teoria clássica possui dois estados de equilíbrio espacialmente homogêneos,  $\varphi = \varphi_t$  e  $\varphi = \varphi_f$ . Como o estado  $\varphi = \varphi_t$  é o único estado clássico de mais baixa energia, na teoria quântica correspondera ao vácuo da teoria. O estado  $\varphi = \varphi_f$ , ao nível clássico é um estado de equilíbrio estável. Entretanto, quânticamente este estado se torna meta-estável, devido a possibilidade de tunelamento pela barreira de potencial. Conseqüentemente, o estado  $\varphi = \varphi_f$  é denominado na literatura um falso vácuo. Neste capítulo estudaremos a taxa de decaimento (probabilidade de decaimento por unidade de tempo) deste falso vácuo numa teoria de um campo escalar em  $D = (d + 1)$  dimensões espaço-temporais. Por motivos didáticos, consideraremos em primeiro lugar o caso  $D = 1$ , *i.e.*, mecânica quântica. Em seguida generalizaremos o formalismo para  $D > 1$ , *i.e.*, teoria quântica de campos.

Em mecânica quântica, num sistema isolado, a densidade de probabilidade de se encontrar uma partícula ao redor do ponto  $x$ , é

$$\mathcal{P}(x) = \psi^*(x, t) \psi(x, t) = |\psi(x)|^2. \quad (2.2)$$

Esta quantidade é independente do tempo. Se considerarmos o caso de uma partícula em um potencial do tipo da Fig. 2.1, o qual no tempo  $t = t_0$ , esta se encontra situada ao redor do ponto  $x = 0$ ; então por efeitos quânticos esta partícula pode tunelar pela barreira de potencial e ser encontrada no ponto  $x = x_r$ , num tempo  $t = t_0 + t_r$  ( $t_r$  é indeterminado). Desta forma, a densidade de probabilidade de se encontrar a partícula ao redor do ponto  $x = 0$ , terá que diminuir com o tempo. Mas segundo (2.2), ele é independente do tempo. Isto é devido ao fato de termos <sup>1</sup>

$$\psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt}. \quad (2.3)$$

Concluimos que, a densidade de probabilidade pode diminuir com o tempo se e somente se a energia tiver uma parte imaginária. Neste caso teríamos

$$\mathcal{P}(x) = |\psi(x)|^2 e^{-\Gamma t}, \quad (2.4)$$

onde  $\Gamma$ , a taxa de decaimento, é definida como:

$$\Gamma = -2\text{Im}E. \quad (2.5)$$

O fato da energia ter uma parte imaginária está relacionado às condições de fronteira do problema. Uma discussão detalhada deste fato pode ser encontrado no livro de Blatt e Weisskopf [14].

Na mecânica quântica usando-se a aproximação semi-clássica, pode se obter facilmente a parte imaginária da energia (a taxa de decaimento) mediante a solução da equação de Schrödinger pelo método WKB. Como o nosso propósito é generalizar o resultado à teoria quântica de campos, na próxima seção deduziremos a taxa de decaimento mediante o método das integrais de trajetória de Feynman. Na seção 2.3 generalizaremos estes

---

<sup>1</sup>Ao longo desta tese trabalhamos no sistema natural de unidades:  $\hbar = c = k_B = 1$ .

resultados à teoria quântica de um campo escalar em  $D = (d + 1)$  dimensões espaço-temporais.

## 2.2 Taxa de decaimento em mecânica quântica ( $D = 1$ )

Vamos considerar o movimento de uma partícula de massa unitária num potencial unidimensional  $V(x)$ . Podemos determinar o espectro de energia a partir da versão Euclideana (tempo imaginário,  $\tau = it$ ) da integral de trajetória de Feynman. Cálculos conhecidos nos dão:

$$\langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{-S_E(x)}. \quad (2.6)$$

No lado esquerdo da eq. (2.6),  $|x_i\rangle$  e  $|x_f\rangle$  são os autovetores das posições iniciais e finais da partícula,  $H$  é o Hamiltoniano e  $T$  é um número positivo. Expandindo o lado esquerdo da eq. (2.6) no conjunto completo de auto-estados de energia,

$$H | E_n \rangle = E_n | E_n \rangle, \quad (2.7)$$

temos

$$\langle x_f | e^{-TH} | x_i \rangle = \sum_n e^{-E_n T} \langle x_f | E_n \rangle \langle E_n | x_i \rangle. \quad (2.8)$$

Para  $T$  muito grande a eq. (2.8) se transforma em

$$\langle x_f | e^{-TH} | x_i \rangle \approx e^{-E_0 T} \langle x_f | E_0 \rangle \langle E_0 | x_i \rangle. \quad (2.9)$$

Assim, para  $T$  muito grande o termo dominante na eq. (2.8) vai nos fornecer a energia e a função de onda do estado ligado de mais baixa energia. No lado direito da eq. (2.6),  $\mathcal{D}x$ , denota a integração funcional sobre todas as funções  $x(\tau)$ , que satisfazem as condições de fronteira:  $x(-T/2) = x_i$  e  $x(T/2) = x_f$ ; e  $S_E$  é a ação Euclideana,

$$S_E(x) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[ \frac{1}{2} \dot{x}^2(\tau) + V(x) \right], \quad (2.10)$$

onde  $\dot{x}$ , denota a derivada de  $x$  respeito de  $\tau$ . Se escolhermos algum  $\bar{x}(\tau)$ , o qual satisfaz as condições de fronteira, então, uma função geral que satisfaz as condições de fronteira pode ser escrito como sendo:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \bar{x}(\tau) + \eta(\tau) \\ x(\tau) &= \bar{x}(\tau) + \sum_n x_n(\tau), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde os  $x_n$ 's formam um conjunto completo de funções ortonormais reais que se anulam nas fronteiras, *i.e.*:

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau x_n(\tau)x_m(\tau) = \delta_{nm}, \quad (2.12)$$

$$x_n(\pm T/2) = 0. \quad (2.13)$$

O lado direito da equação (2.6) pode ser avaliado usando-se a aproximação Gaussiana (limite semiclássico,  $\hbar$  muito pequeno ou  $S_E(x) \gg 1$ ). Neste caso a integral funcional (2.6) é dominada pelo ponto estacionário,  $\bar{x}(\tau)$ , da ação Euclideana,

$$\frac{\delta S_E}{\delta \bar{x}} = \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} - V'(\bar{x}) = 0 \quad (2.14)$$

onde o apóstrofo significa derivação respeito de  $x$ . Por enquanto, por simplicidade vamos supor que só existe um ponto estacionário. Se existirem outros pontos estacionários teremos que somar a contribuição de cada uma delas à integral funcional (2.6). Então, expandindo  $S_E$  ao redor de  $\bar{x}(\tau)$  e substituindo (2.11) em (2.6), obtemos na aproximação semi-clássica:

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle &\simeq \int \mathcal{D}\eta e^{-S_E(\bar{x}) - \int d\tau_1 \frac{\delta S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1)} \eta(\tau_1) - \frac{1}{2} \int \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1) \delta \bar{x}(\tau_2)} \eta(\tau_2)} \\ &= e^{-S_E(\bar{x})} \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int \int d\tau_1 d\tau_2 \eta(\tau_1) \frac{\delta^2 S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1) \delta \bar{x}(\tau_2)} \eta(\tau_2)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde tomamos  $\mathcal{D}x = \mathcal{D}\eta$ , pelo fato da eq. (2.11) ser uma translação no espaço funcional  $x(\tau)$ . A segunda derivada funcional de  $S_E$ , avaliada em  $\bar{x}(\tau)$  é:

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta \bar{x}(\tau_1) \delta \bar{x}(\tau_2)} = \left[ -\partial_{\tau_1}^2 + V''(\bar{x}) \right] \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (2.16)$$

Se escolhermos os  $x_n$ 's na eq. (2.11) como sendo as autofunções do operador  $[-\partial_{\tau}^2 + V''(\bar{x})]$ , ou seja,

$$\left[ -\partial_{\tau}^2 + V''(\bar{x}) \right] x_n(\tau) = \lambda_n x_n(\tau), \quad (2.17)$$

então, fazendo uso das eqs. (2.11), (2.12) e (2.17) em (2.15), obteremos um produto de integrais Gaussianas:

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle &\simeq N e^{-S_E(\bar{x})} \int \prod_n da_n e^{-\frac{1}{2} \sum_n \lambda_n a_n^2} \\ &= N e^{-S_E(\bar{x})} \int \prod_n \lambda_n^{-1/2} \\ &= N e^{-S_E(\bar{x})} \det \left[ -\partial_{\tau}^2 + V''(\bar{x}) \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde  $N$  é um fator de normalização (o Jacobiano da transformação (2.11)) o qual não depende dos  $a_n$ 's pelo fato da transformação ser linear nos  $a_n$ 's. Note que em (2.18) estamos supondo que todos os autovalores  $\lambda_n$  são positivos.

A eq. (2.14) pode ser interpretada como a equação do movimento de uma partícula de massa unitária num potencial *menos*  $V(x)$ . Assim,

$$E_E = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{x}), \quad (2.19)$$

a “energia” da partícula, é uma constante do movimento. Isto pode ser usado para determinar as características qualitativas das soluções da eq. (2.14) por simples inspeção.

Considere o caso do potencial mostrado na Fig. 2.3-a. No caso em que  $x_i = x_f = 0$ , da Fig. 2.3-b pode se ver que a única solução que cumpre as condições de fronteira é a

solução trivial,  $x = 0$ . Para esta solução,  $S_E = 0$ . Se definirmos  $\omega^2 = V''(0)$ ; então, um calculo mostra que para  $T$  muito grande [15],

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle &\simeq N[\det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega T/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De fato, isto nos fornece a energia correta do estado fundamental,  $E_0 = \omega/2$ , no caso do oscilador harmônico unidimensional.

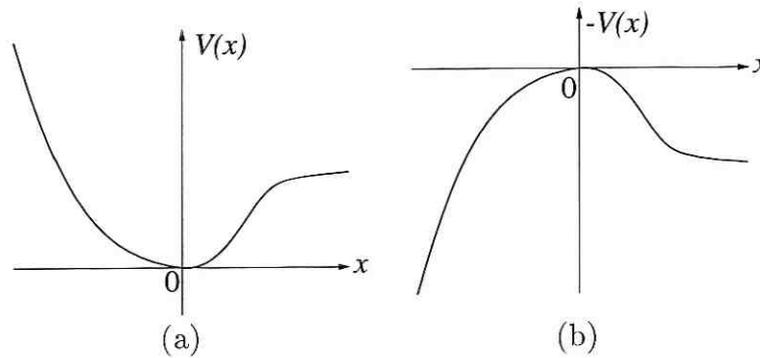


Figura 2.3: (a) A energia potencial de uma partícula que possui um verdadeiro estado fundamental; (b) A energia potencial do caso (a) com sinal negativo.

Agora, se considerarmos o potencial da Fig. 2.1; pode se ver que a integral funcional (2.6) é divergente. Mas na seção anterior vimos que neste caso, uma partícula cuja posição inicial se encontra ao redor do ponto de equilíbrio clássico,  $x = 0$ , tem uma probabilidade não nula de atravessar a barreira de potencial (a taxa é proporcional a parte imaginária da sua energia, eq (2.5)). Então, a pergunta natural é: como gerar uma parte imaginária para a energia? Como calcular esta quantidade se a integral funcional (2.6) é claramente divergente? A resposta é: por meio de uma extensão analítica. Isto é, deformamos o contorno de integração no espaço funcional  $x(\tau)$ , de tal forma que a integral funcional (2.6) seja mantida convergente ainda para um potencial do tipo que se mostra na Fig. 2.1.

Nas próximas seções faremos esta extensão analítica da forma mais intuitiva possível. Para um tratamento rigoroso ver [16].

Desta forma vamos considerar o caso de uma integral simples que tem as características do potencial da Fig. 2.1.

### 2.2.1 O caso de uma integral simples

Considere a integral simples,

$$J(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f(x,\alpha)}, \quad (2.21)$$

onde

$$f(x, \alpha) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3!}\theta(\text{Re}(x))x^3, \quad (2.22)$$

onde  $\theta$  é a função degrau.

A integral (2.21) é convergente para  $\text{Re}(\alpha > 0)$ , e se considerarmos  $\alpha$  real, positivo e muito menor do que um, a integral  $J$  será dominada pelo ponto estacionário (o mínimo de  $f$ )  $x = 0$ ; então,

$$J(\alpha) \sim 1, \quad (2.23)$$

e as correções para a expressão anterior podem ser obtidas mediante uma expansão perturbativa em séries de potências de  $\alpha$ .

Para  $\text{Re}(\alpha) < 0$ , a integral (2.21) não é convergente, mas pode ser definida mediante extensão analítica. Isto é, partindo da integral (2.21) com  $\alpha > 0$ , fazemos uma rotação tanto no plano complexo  $\alpha$  (levando  $\alpha$  desde o eixo real positivo até o eixo real negativo) quanto no plano complexo  $x$  (rotando o contorno de integração), mantendo  $\text{Re}(\alpha x^3) > 0$  (note-se que neste caso só precisamos girar o contorno de integração para  $x > 0$ , Fig. 2.4-a). A quantidade  $\alpha$  pode ser girada tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário.

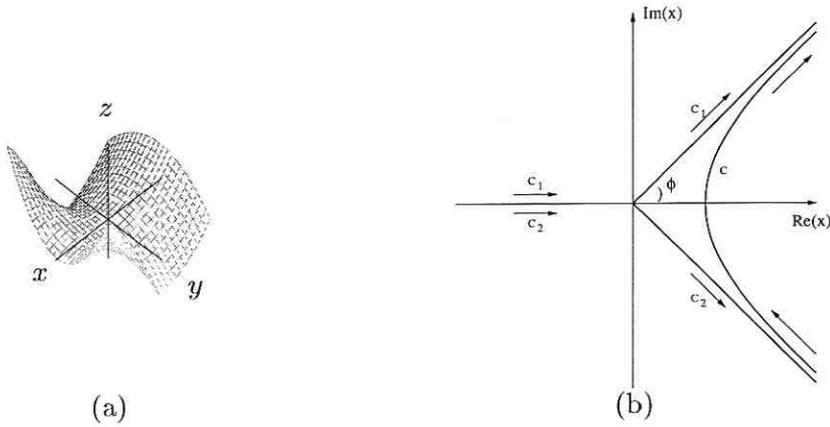


Figura 2.4: (a)  $f(x, \alpha)$  em função de  $x$  complexo para  $\alpha < 0$ ; (b) Os contornos de integração onde a integral é convergente, no caso em que  $\alpha < 0$ .

Teremos então, dependendo do sentido da rotação,

$$\alpha \rightarrow e^{i\pi} \alpha, \quad x \rightarrow e^{-i\phi}, \quad J(\alpha + i0) = \int_{C_1} e^{-f(x,\alpha)} \quad (2.24)$$

ou

$$\alpha \rightarrow e^{i\pi} \alpha, \quad x \rightarrow e^{-i\phi}, \quad J(\alpha - i0) = \int_{C_2} e^{-f(x,\alpha)}, \quad (2.25)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$ , são os contornos de integração que mostramos na Fig. 2.4-b, onde  $\phi$  esta definido no intervalo:

$$\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{2} \quad (2.26)$$

Para  $\alpha$  negativo, além do ponto estacionário trivial,  $x = 0$ , existe outro ponto estacionário (não trivial) em  $x = -\frac{2}{\alpha}$ . Este ponto é conhecido como o ponto de sela. Pode se provar que para  $\alpha \ll 1$ ,  $J(\alpha + i0)$  e  $J(\alpha - i0)$  são ainda dominados pelo ponto estacionário trivial,

$$\exp\left(f\left(-\frac{2}{\alpha}\right)\right) = \exp\left(-\frac{2}{3\alpha^2}\right) \ll 1. \quad (2.27)$$

Finalmente, subtraindo (2.25) de (2.24), obtemos

$$J(\alpha + i0) - J(\alpha - i0) = 2ImJ(\alpha) = \int_{C_1 - C_2} e^{-f(x,\alpha)}. \quad (2.28)$$

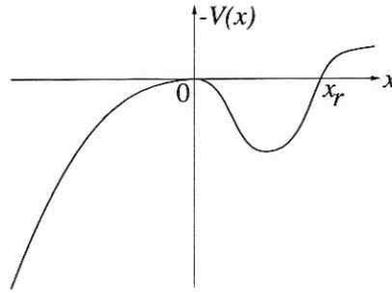


Figura 2.5: O potencial da Fig. 2.1 com sinal negativo.

Pelo fato das integrais nas curvas  $C_1$  e  $C_2$  terem o mesmo valor no eixo real negativo, e fazendo uso do teorema da integral de Cauchy; pode se tomar como contorno de integração equivalente a  $(C_1 - C_2)$ , a curva  $C$  que passa pelo ponto de sela,  $x = \frac{-2}{\alpha}$ . Sob esta curva o ponto dominante na integral (2.28) é agora o ponto de sela,  $x = -\frac{2}{\alpha}$ ; pois a contribuição do ponto estacionario trivial,  $x = 0$  se anula.

### 2.2.2 O ponto de sela em mecânica quântica

No caso da integral funcional (2.6), os pontos estacionários são as soluções da eq. (2.14). A eq. (2.19) nos permite conhecer as características qualitativas destas soluções. Se considerarmos o caso do potencial da Fig. 2.1; com  $x_i = x_f = 0$ , da Fig. 2.5 podemos ver que alem da solução trivial,  $\bar{x} = 0$ , temos a solução não trivial,  $\bar{x} = x_b(\tau)$  (o qual é conhecido na literatura com o nome de “bounce”), que descreve o movimento de uma partícula que tendo iniciado o seu movimento no ponto  $x = 0$  com velocidade zero, se move na direção do ponto de retorno,  $x_r$ , e depois de ter atingido este ponto volta para a sua posição inicial,  $x = 0$ . Pode ser provado que o período  $T$  deste movimento é infinito [17]. Isto é, o “bounce” cumpre a seguinte condição:

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} x_b(\tau) = 0. \tag{2.29}$$

Na Fig. 2.6 se mostra a forma qualitativa do “bounce”. Onde temos definido o centro do

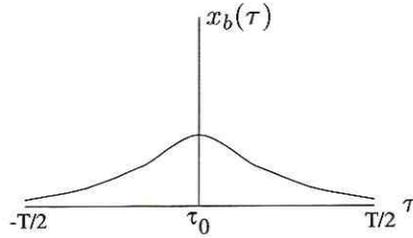


Figura 2.6: Forma qualitativa do bounce.

“bounce”,  $\tau = \tau_0$ , como sendo o “tempo” ao qual a partícula atinge o ponto de retorno; ou seja o “tempo” na qual a velocidade é nula. O centro do “bounce” pode ser tomado arbitrariamente, pois para  $T \rightarrow \infty$ ,

$$S_E[x_b(\tau + \tau_0)] = S_E[x_b(\tau)], \quad (2.30)$$

*i.e.*, a ação Euclideana é translacionalmente invariante.

Como já discutimos, a integral funcional (2.6) não é convergente para um potencial do tipo da Fig. 2.1. Como no caso da integral (2.21) para valores negativos de  $\alpha$ , podemos definir mediante extensão analítica a integral funcional (2.6) para um potencial do tipo da Fig. 2.1. Isto é, partindo de um potencial como o mostrado na Fig. 2.3-a, para o qual a integral funcional (2.6) esta bem definida, então, girando algum parâmetro (no caso da integral simples este parâmetro foi  $\alpha$ ) do qual dependa o potencial, o levamos ate a forma do potencial mostrado na Fig. 2.1. Para que a integral funcional seja mantida convergente, também giramos o contorno de integração no espaço funcional  $x(\tau)$ . No caso da integral funcional, ao se fazer a rotação do contorno de integração, devemos também assegurar que  $Re(\dot{x}^2) > 0$ , pois a parte cinetica,  $\int \dot{x}^2$ , favorece a existencia de trajetórias suaves e garante a existência do limite contínuo para a integral de trajetória discreta.

Após a extensão analítica, fazendo-se uso das eqs. (2.18), (2.20) e somando as contribuições dos pontos de sela trivial,  $\bar{x} = 0$ , e não trivial,  $\bar{x} = x_b$ ; obtemos, na aproximação

semi-clássica, no caso em que  $x_i = x_f = 0$ , a seguinte expressão para a integral funcional (2.6):

$$\begin{aligned} \langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle &\simeq N e^{-S_E(0)} (\det[-\partial_\tau^2 + V''(0)])^{-1/2} + N e^{-S_E(x_b)} (\det[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)])^{-1/2} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} + N e^{-S_E(x_b)} (\det[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)])^{-1/2}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde agora o segundo termo da expressão anterior deve ser entendida como uma quantidade definida mediante extensão analítica.

Na verdade, da mesma forma que para o caso da integral simples da seção 2.2.1, teremos duas expresões do tipo (2.31) dependendo do sentido em que se faça a rotação no plano complexo do parâmetro do qual dependa o potencial. Se subtrairmos uma destas expressões da outra, como no caso da integral simples, obteremos:

$$\begin{aligned} 2i \text{Im} \langle x_f | e^{-HT} | x_i \rangle &\simeq N e^{-S_E(x_b)} (\det[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)])^{-1/2} \\ &= N e^{-S_E(\bar{x})} \int \prod_n da_n e^{-\frac{1}{2} \sum_n \lambda_n a_n^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde os  $\lambda_n$ 's são soluções da equação de autovalores (2.17), com  $\bar{x} = x_b$ . É facil ver que  $\dot{x}_b$  é uma solução de (2.17) com autovalor  $\lambda_1$  igual a zero. Isto pode ser provado derivando (2.14) com respeito de  $\tau$ ,

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{d^2 x_b}{d\tau^2} - V'(x_b) \right] = \left[ -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) \right] \dot{x}_b = 0. \quad (2.33)$$

A autofunção  $x_1$ , normalizada de acordo a (2.12) é

$$x_1(\tau) = (S_E(x_b))^{-1/2} \dot{x}_b(\tau). \quad (2.34)$$

Isto segue-se do fato de que a “energia” da partícula é nula e então

$$S_E(x_b) = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[ \frac{1}{2} \dot{x}_b^2(\tau) + V(x_b) \right] = \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \dot{x}_b^2(\tau). \quad (2.35)$$

Pelo fato de termos  $\lambda_1 = 0$ , em (2.32), ao integrar sobre  $a_1$  obteremos um resultado divergente. Como é conhecido, a presença do modo zero é devido à simetria translacional da ação Euclideana (ver eq. (2.30)), isto é, a posição do centro do “bounce”,  $\tau_0$ , pode ser escolhido arbitrariamente. Por outro lado, temos que o período,  $T$ , do movimento é muito grande (estritamente falando ele é infinito). Então, teremos que procurar uma forma de relacionar o infinito que aparece devido ao modo nulo com  $T \rightarrow \infty$ . Isto é feito mediante o chamado método das coordenadas coletivas [17, 18, 19]. Para fazer isto escrevemos (2.32) como

$$2iIm \langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle \simeq N e^{-S_E(x_b)} \int da_1 \int \prod_{n \neq 1} da_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{n \neq 1} \lambda_n a_n^2}. \quad (2.36)$$

Agora, o centro do “bounce” é arbitrário, pode ficar em qualquer ponto entre  $-T/2$  e  $T/2$ . Se mudarmos a variável de integração  $a_1$  por outra variável proporcional à localização do centro do “bounce”, teremos conseguido o nosso objetivo de relacionar o infinito devido ao modo zero com  $T \rightarrow \infty$ . Tendo em conta a simetria translacional de  $S_E$ , podemos escrever (2.11) como

$$x(\tau) = x_b(\tau - \tau_0) + \eta(\tau - \tau_0), \quad (2.37)$$

o qual, também pode ser escrito como

$$x(\tau + \tau_0) = x_b(\tau) + \eta(\tau) = x_b(\tau) + \sum_n a_n x_n(\tau). \quad (2.38)$$

Multiplicando (2.38) por  $x_1(\tau)$ , integrando e utilizando (2.34) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau x(\tau + \tau_0) x_1(\tau) &= \int_{-T/2}^{T/2} d\tau \left[ x_b(\tau) + \sum_n a_n x_n(\tau) \right] x_1(\tau) \\ &= \frac{1}{2} (S_E(x_b))^{-1/2} x_b^2(\tau) \Big|_{-T/2}^{T/2} + a_1 \\ &= a_1, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde o primeiro termo do segundo membro se anula devido a periodicidade de  $x_b(\tau)$ . A eq. (2.40) prova que  $a_1$  é uma função de  $\tau_0$ , isto é

$$a_1 = a(\tau_0). \quad (2.40)$$

Então, podemos fazer uma mudança de variável de integração ( $a_1$  pela variável  $\tau_0$ ) onde temos que calcular o Jacobiano da transformação,  $a_1 \rightarrow \tau_0$ . Considere uma variação infinitesimal em (2.38) devido a uma variação no coeficiente do modo zero,  $a_1$ . Isto é

$$\delta x(\tau + \tau_0) = \delta a_1 x_1(\tau) = \delta a_1 (S_E(x_b))^{-1/2} \frac{dx_b(\tau)}{d\tau}. \quad (2.41)$$

A equação anterior também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta x(\tau + \tau_0) &= x(\tau + \tau_0 + \delta\tau_0) - x(\tau + \tau_0) \\ &\simeq \delta\tau_0 \frac{dx(\tau + \tau_0)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Então, igualando (2.41) e (2.43), e utilizando (2.38) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\tau_0 \frac{dx(\tau + \tau_0)}{d\tau} &= \delta a_1 (S_E(x_b))^{-1/2} \frac{dx_b(\tau)}{d\tau} \\ &= \delta a_1 (S_E(x_b))^{-1/2} [\dot{x}(\tau + \tau_0) - \dot{\eta}(\tau)] \simeq \delta a_1 (S_E(x_b))^{-1/2} \frac{dx(\tau + \tau_0)}{d\tau}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde na ultima parte desprezamos o termo proporcional a  $\eta\delta\eta$ , o qual é consistente com a aproximação semi-clássica na qual estamos trabalhando. De (2.43) obtemos o Jacobiano da transformação,  $a_1 \rightarrow \tau_0$ , como sendo

$$\frac{da_1(\tau_0)}{d\tau_0} \simeq (S_E(x_b))^{1/2}. \quad (2.44)$$

Agora podemos reescrever (2.36) como

$$\begin{aligned} 2iIm \langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle &\simeq N e^{-S(x_b)} (S_E(x_b))^{1/2} \int_{-T/2}^{T/2} d\tau_0 \int \prod_{n \neq 1} da_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{n \neq 1} \lambda_n a_n^2} \\ &= N T e^{-S(x_b)} (S_E(x_b))^{1/2} [\det '[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)]]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde o apóstrofo no determinante significa que o modo nulo foi excluído.

O modo de autovalor zero é proporcional a  $\dot{x}_b(\tau)$  ( ver eq. (2.34)) o qual tem um zero em  $\tau = \tau_0$ . Desta forma  $x_1$  tem um nodo e não é a autofunção do mais baixo autovalor. A autofunção sem nodos,  $x_0$ , deve ter o autovalor mais baixo [20], isto é,  $\lambda_0 < 0$ . Pelo fato de  $\lambda_0$  ser negativo, ao integrar na eq. (2.45) sobre  $a_0$  (onde estamos supondo extensão analítica), obteremos a parte imaginária de  $\langle 0|e^{-HT}|0 \rangle$ ; isto é,

$$\pm \int_{-i\infty}^{+i\infty} da_0 e^{-\lambda_0 a_0^2} = \pm i \left( \frac{\pi}{|\lambda_0|} \right)^{1/2}, \quad (2.46)$$

onde os sinais dependem da ordem em que se subtraem as duas quantidades do tipo (2.31).

O sinal positivo é o unico que possui uma interpretação física.

Em (2.45) o fator de normalização,  $N$ , é obtido da eq. (2.20). Isto é,  $N$  é obtido do caso em que o potencial é quadrático em  $x$ . De outro lado, na expressão (2.45) temos integrado em  $da_1$  e assim, em (2.45) temos uma integral Gaussiana a menos do que em (2.20):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} da e^{-\frac{1}{2}a^2} = \sqrt{2\pi}, \quad (2.47)$$

então, se fizermos a normalização com o valor  $N$ , obtido da eq. (2.20), teremos que dividir a expressão (2.45) pelo fator  $\sqrt{2\pi}$ . Fazendo isto e usando (2.46) com o sinal positivo, obtemos:

$$Im \langle 0|e^{-HT}|0 \rangle \simeq \frac{1}{2} T \left( \frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-T\omega/2} \left( \frac{S_E(x_b)}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' [-\partial_\tau^2 + V''(x_b)]}{\det [-\partial_\tau^2 + \omega^2]} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-S_E(x_b)}, \quad (2.48)$$

onde estamos tomando agora o valor absoluto do determinante dos operadores.

### 2.2.3 A contribuição de configurações “multi-bounce”

Na seção anterior, consideramos a contribuição dos pontos de sela,  $\bar{x} = 0$  e  $\bar{x} = x_b$

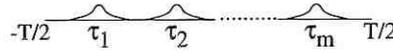


Figura 2.7: Uma configuração “multi-bounce”

para a integral funcional (2.6). Estes pontos de sela são soluções exatas da eq. (2.14). Em geral, a eq. (2.14) é não linear em  $\bar{x}$ ; então, uma combinação linear de bounces não é uma solução de (2.14). Mas pode se tomar como solução aproximada de (2.14) a soma de  $m$  bounces cujos centros estão suficientemente afastados, isto é, uma configuração onde cada “bounce” ocupa um intervalo de “tempo” muito grande, e onde também o intervalo entre eles (onde  $x \approx 0$ ), é muito grande (uma configuração deste tipo é conhecido como solução “multi-bounce”). Uma configuração deste tipo é mostrado na Fig. 2.7, onde temos  $m$  bounces com centros em  $\tau_1, \dots, \tau_m$ ; e,  $T/2 > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_m > -T/2$ . O nosso proposito é incluir a contribuição destes pontos de sela aproximados na expressão (2.18).

Na eq. (2.18), para uma configuração de  $m$  bounces, a ação vai ficar multiplicada por  $m$ ,

$$S_E(0 + \sum_m [x_b(\tau - \tau_m) + 0]) \approx m S_E(x_b), \quad (2.49)$$

pois os “bounces” estão o suficientemente afastados como para serem considerado independentes (aproximação de gas ideal).

Agora para o determinante da eq. (2.18), da mesma forma que para a ação, temos,

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega T/2} K^m, \quad (2.50)$$

onde  $K$  é obtido comparando (2.31) com (2.50) no caso em que  $m = 1$ .

Finalmente, como foi feito no caso de um “bounce”; na eq. (2.18) teremos que integrar sob a localização dos “bounces”:

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau \int_{-T/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-T/2}^{\tau_{m-1}} d\tau_m = \frac{T^m}{m!}. \quad (2.51)$$

Isto é feito para eliminar os infinitos que aparecem devido à presença dos modos nulos.

Então, a contribuição de uma configuração de  $m$  “bounces” à expressão (2.18), é:

$$\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} \frac{(Ke^{-S_E(x_b)}T)^m}{m!}. \quad (2.52)$$

Quando  $m = 1$ , (2.52) é igual ao segundo termo do segundo membro da eq. (2.31). Então de (2.52) e (2.48) obtemos para a parte imaginária de  $K$ , o seguinte:

$$ImK = \frac{1}{2} \left(\frac{S_E(x_b)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det'[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)]}{\det[-\partial_\tau^2 + \omega^2]} \right|^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.53)$$

Agora, somando-se sobre todas as configurações possíveis de “multi-bounces”,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ; obtemos para (2.18) a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle &\simeq \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega T/2} \frac{(Ke^{-S_E(x_b)}T)^m}{m!} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\omega T/2 + Ke^{-S_E(x_b)}T). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Das eqs. (2.9) e (2.54) obtemos a energia do estado fundamental,

$$E_0 = \omega/2 - Ke^{-S_E(x_b)}, \quad (2.55)$$

e finalmente, substituindo as eqs. (2.55) e (2.53) em (2.5), obtemos a taxa de decaimento do falso estado fundamental:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -2ImE_0 \\ &= \left(\frac{S_E(x_b)}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det'[-\partial_\tau^2 + V''(x_b)]}{\det[-\partial_\tau^2 + V''(0)]} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-S_E(x_b)} [1 + O(\hbar)]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

## 2.3 O caso da teoria quântica de campos

Agora vamos repetir todo o formalismo apresentado, no caso da teoria quântica de campos. Desta forma vamos investigar uma teoria de campo escalar massivo,  $\varphi(x)$ , em

um espaço-tempo  $D = (d + 1)$  dimensional. A ação Euclideana neste caso é

$$S_E(\varphi) = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + U(\varphi) \right], \quad (2.57)$$

onde  $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$ . Considere-se o caso em que  $U(\varphi)$  tem a forma mostrada na Fig. 2.2, isto é, uma teoria de campo escalar que possui um falso vácuo. Como discutimos, este falso vacuo é um estado meta-estável. Ele pode decair da mesma forma que o falso estado fundamental da mecânica quântica, isto é, tunelando a barreira de potencial.

Assim, a situação é muito parecida ao caso da mecânica quântica, com as seguintes diferenças. Em primeiro lugar; no presente caso temos uma teoria em  $D$  dimensões, então a equação que descreve o bounce neste caso não é mais a simples equação (2.14), mas

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x^{i2}} - U'(\varphi) = 0, \quad (2.58)$$

onde o apostrofo significa a derivação respeito de  $\varphi$ . Em segundo lugar; neste caso, além da simetria translacional no tempo imaginário,  $\tau$ , temos  $d$  simetrias traslacionais no espaço, então, teremos não apenas um mas  $D$  autovalores nulos. Em terceiro lugar; no caso da mecânica quântica, é fato conhecido que a segunda derivada funcional da ação Euclideana avaliada no “bounce” tem um e somente um autovalor negativo. A questão é: isto ainda é verdade no presente caso? Finalmente; sempre que trabalhamos com uma teoria quântica de campos relativísticos aparecerão divergências ultravioletas. Nos capítulos seguintes trataremos estes pontos com mais detalhes. Especificamente, estudaremos o problema dos autovalores negativos assim como a renormalização das divergências ultravioletas.

### 2.3.1 O “bounce” em teoria quântica de campos

A equação (2.58) é uma equação diferencial parcial de segundo grau cuja solução deve ser determinada após a imposição de certas condições de fronteira. No caso da mecânica

quântica unidimensional, foi visto que o período do “bounce”, cujo movimento começa no ponto  $x = 0$  é infinito (ver eq. (2.29)). Então, como uma extensão do caso mecânico-quântico, temos para a condição de fronteira em  $\tau$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_b(\tau, \vec{x}) = \varphi_f, \quad (2.59)$$

onde  $\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ . De outro lado, da mesma forma que no caso da mecânica quântica, pode se escolher o centro do “bounce” em qualquer ponto. Escolhemos este ponto como sendo  $\tau = 0$ , então

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.60)$$

Agora precisamos de alguma condição de fronteira no espaço,  $\vec{x}$ . A ação Euclideana,  $S_E$ , avaliada no “bounce” deve ser finita. Para que isto seja possível é necessário que:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi_b(\tau, \vec{x}) = \varphi_f. \quad (2.61)$$

Esta ultima condição é fisicamente consistente com o seguinte fato. O estado homogêneo  $\varphi = \varphi_f$ , decai no estado  $\varphi = \varphi_t$  (estável). Se num certo instante inicial o sistema se encontrava na fase homogênea  $\varphi = \varphi_f$ , então, num tempo posterior algumas regiões do espaço estarão na fase  $\varphi = \varphi_t$ . Isto é, as flutuações quânticas fazem aparecer espontaneamente regiões do verdadeiro vácuo em qualquer ponto do espaço e longe destas regiões o falso vácuo fica não perturbado.

Agora, entre todas as soluções possíveis da eq. (2.58) com as condições de fronteira (2.59)-(2.61), aquela que minimiza a ação Euclideana,  $S_E$ , é aquela solução a qual é invariante sob rotações Euclidianas  $D$ -dimensionais; isto é, aquela que possui simetria  $O(D)$  [21]. A eq. (2.58) para um  $\varphi_b$  com simetria  $O(D)$  fica como:

$$\frac{d^2 \varphi_b}{d\rho^2} + \frac{d}{\rho} \frac{d\varphi_b}{d\rho} = U'(\varphi_b), \quad (2.62)$$

força de atrito o qual é inversamente proporcional ao tempo. Segundo a eq. (2.67) a partícula inicia o seu movimento com velocidade igual a zero. Mostremos que se escolhermos adequadamente a posição inicial, então, num tempo infinito a partícula atingirá o repouso no ponto  $\varphi = \varphi_f$ . Da eq. (2.62) segue-se que

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 - U(\varphi_b) \right] = -\frac{2}{\rho} \left( \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 \leq 0, \quad (2.68)$$

o qual significa que a partícula perde energia. Então, se escolhermos a posição inicial da partícula à esquerda do ponto  $\varphi = \varphi_1$  (Fig. 2.8), a partícula jamais atingirá o ponto  $\varphi = \varphi_f$ .

Agora, para  $\varphi$  muito perto de  $\varphi_t$ , podemos linearizar a eq. (2.62) e obter

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \mu^2 \right] (\varphi_b(\rho) - \varphi_t) = 0, \quad (2.69)$$

onde  $\mu^2 = U(\varphi_t)$ . A solução da eq. (2.69) é

$$\varphi_b(\rho) - \varphi_t = (\varphi_b(0) - \varphi_t) \frac{\sinh(\mu\rho)}{\mu\rho}. \quad (2.70)$$

Desta forma, se escolhermos a posição inicial da partícula o suficientemente perto do ponto  $\varphi = \varphi_t$ , então a partícula poderá ficar por um tempo,  $\rho = \bar{\rho}$ , muito grande perto desse ponto. Mas para um tempo suficientemente grande a força de atrito pode ser desprezada na eq. (2.62). E se a força de atrito é desprezada, então a partícula atingirá a posição  $\varphi = \varphi_f$ , num tempo finito  $\rho = \bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}$ . Então, por continuidade: existe uma posição inicial, a qual fica entre  $\varphi_1$  e  $\varphi_t$ , para a qual a partícula atingirá o repouso no ponto  $\varphi = \varphi_f$ , num tempo  $\rho \rightarrow \infty$ . Desta forma provamos que o sistema de eqs. (2.62)-(2.67) sempre admite um bounce de simetria  $O(3)$ .

### 2.3.2 Os autovalores nulos

No caso da mecânica quântica unidimensional, a segunda derivada funcional da ação

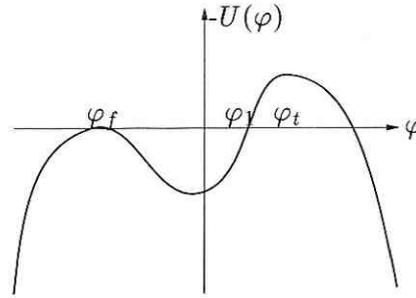


Figura 2.8: A energia potencial para o análogo mecânico da eq. (2.62).

onde

$$\rho = (\tau^2 + \vec{x}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.63)$$

as condições (2.59)-(2.61) ficam numa simples equação:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \varphi_b(\rho) = \varphi_f, \quad (2.64)$$

e a eq. (2.57) fica como

$$S(\varphi_b) = s_D \int_0^\infty d\rho \rho^d \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 + U(\varphi_b) \right], \quad (2.65)$$

onde

$$s_D = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_d \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{d-1} \theta_d. \quad (2.66)$$

Também precisamos que

$$\frac{d\varphi_b}{d\rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad (2.67)$$

de outra forma,  $\varphi_b$  poderia ser singular no origem de coordenadas (veja eq. (2.62)).

Examinemos as eqs. (2.62)-(2.67) e mostremos que elas sempre admitem como solução, um bounce  $O(D)$  invariante. Mostremos isto no caso  $D = 3$ .

De forma análoga a que fizemos no caso da eq. (2.14), se interpretarmos  $\varphi_b$  como a posição de uma partícula e  $\rho$  como o tempo, então a eq. (2.62) é a equação do movimento de uma partícula que se move num potencial *menos*  $U$  e sobre a qual age uma “peculiar”

Euclideana avaliada no “bounce” tem um autovalor nulo, cuja autofunção,  $x_1$ , é proporcional a  $dx_b/d\tau$ . Agora, em  $D$  dimensões existirão  $D$  autofunções de autovalor nulo proporcionais a  $\partial_\mu \varphi_b$ . Então, ao se fazer a integração sob os modos nulos (isto é, ao se fazer a integração sob o centro do bounce) obteremos um infinito proporcional ao tempo imaginário e ao volume total do espaço;  $VT$ , onde  $V$  é o volume da seção espacial. O fator de proporcionalidade  $(S_E/2\pi)^{1/2}$  que aparece no caso da mecânica quântica unidimensional é, no presente caso  $(S/2\pi)^{D/2}$ . Então, como uma generalização do caso da mecânica quântica, eq. (2.56), podemos escrever para a taxa de decaimento do falso vácuo por unidade de volume a seguinte expressão:

$$\Gamma/V = \left( \frac{S_E(\varphi_b)}{2\pi} \right)^{\frac{D}{2}} \left| \frac{\det' [-\partial^2 + U''(\varphi_b)]}{\det [-\partial^2 + U''(\varphi_f)]} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-S_E(\varphi_b)} \quad (2.71)$$

onde  $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$  e o apóstrofo no determinante significa que estamos omitindo os autovalores nulos.

Ao escrever a expressão (2.71) fizemos a suposição que a segunda derivada funcional da ação Euclideana avaliada no “bounce” tem só um autovalor negativo. Isto, no caso da mecânica quântica é sempre verdade. Num capítulo posterior, na aproximação conhecida como de “parede fina” (thin wall approximation) provaremos que isto também é verdade no presente caso.

# Capítulo 3

## Taxa de decaimento em teoria quântica de campos à temperatura finita

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior estudamos uma teoria de um campo escalar com densidade Lagrangeana dada pela eq. (2.1), onde  $U(\varphi)$  tem a forma mostrada na Fig. 2.2. O falso vácuo (ou fase meta-estável) decai como já vimos mediante tunelamento pela barreira devido a flutuações quânticas. Agora, se fizermos interagir o sistema com um banho térmico teremos dois processos que contribuem para o decaimento: flutuações quânticas e flutuações térmicamente induzidas. A baixas temperaturas é obvio que o mecanismo dominante será o das flutuações quânticas, e a taxa de decaimento neste caso será aproximadamente igual a eq. (2.71). A altas temperaturas é de se esperar que o mecanismo dominante seja o das flutuações térmicas<sup>1</sup>.

A fase meta-estável  $\varphi = \varphi_f$ , decai mediante a formação de bolhas da fase estável dentro da fase meta-estável (bubble nucleation). Isto é, se inicialmente o sistema se encontrava na fase meta-estável  $\varphi = \varphi_f$ , então num tempo posterior apareceram regiões da fase estável

---

<sup>1</sup>Um exemplo onde isto não se cumpre pode ser encontrado em [22].

(bolhas da fase estável) onde  $\varphi = \varphi_t$ . Usando a nomenclatura de matéria condensada temos uma transição de fase de primeira ordem. Por exemplo, vamos supor que o gráfico da Fig. 2.2 represente a energia livre de uma certa substância em função da sua densidade (neste caso o campo  $\varphi$  representa a densidade da substância) a uma temperatura perto da transição de fase vapor→líquido. Neste caso a fase meta-estável é a fase de gasosa, pois ele tem maior energia livre que a fase líquida. Devido a flutuações termicamente induzidas, na fase gasosa podem aparecer espontaneamente pequenas regiões da fase estável, isto é, pequenas bolhas da fase líquida. Agora, a energia potencial destas bolhas tem duas partes; uma parte volumétrica, negativa e proporcional ao volume da bolha  $\sim -r^3$  e outra parte superficial proporcional à superfície da bolha  $\sim r^2$ . Se o raio da bolha formada for muito pequeno, a energia superficial dominará sobre a energia volumétrica, a tensão superficial será maior que a pressão interna da bolha e, então a bolha formada sumirá. Concluímos que somente bolhas de raio suficientemente grandes são estáveis. Depois que a bolha da fase líquida é formada estávelmente, ela cresce até ocupar tudo o volume disponível (nesta descrição simplificada não estamos levando em conta que duas bolhas formadas podem colidir; estamos na aproximação de bolhas independentes), transformando a fase meta-estável (vapor) na fase estável (líquido). A mesma situação acontece no caso da teoria quântica do campo escalar que estamos considerando.

Em seguida deduziremos a taxa de decaimento da fase meta-estável numa teoria de campo escalar em  $D = (d + 1)$  dimensões, o qual interage com um banho térmico. Por questões de simplicidade estaremos interessados no regime de altas temperaturas.

## 3.2 O formalismo geral

No capítulo anterior ao calcularmos a taxa de decaimento do falso vácuo usamos a definição,  $\Gamma = -2\text{Im}E_0$ , onde  $E_0$  é a energia do falso vácuo. A temperatura finita existe uma relação semelhante entre a taxa de decaimento da fase meta-estável e a sua energia livre. Esta relação foi estabelecida por Langer [9] numa serie de artigos dedicados ao estudo de sistemas meta-estáveis. Esta relação é:

$$\Gamma_\beta = \frac{|E_-|}{\pi T} \text{Im}\mathcal{F}, \quad (3.1)$$

onde  $E_-^2$ , é o análogo do autovalor negativo do capítulo anterior,  $T$  é a temperatura e  $\mathcal{F}$  é a energia livre do sistema.

A energia livre de um sistema esta relacionado como a sua função de partição,  $Z$ , pela seguinte relação

$$\mathcal{F} = -T \ln Z, \quad (3.2)$$

onde a função de partição do sistema, no caso de uma teoria de campo escalar é [23]

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S_E(\varphi)}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathcal{D}\varphi$  denota a integração funcional sobre todos os campos periodicos no tempo imaginário. Isto é, sobre todos os campos que cumprem  $\varphi(\tau, \vec{x}) = \varphi(\tau + \beta, \vec{x})$ , com  $\beta = 1/T$ ; e  $S_E$ , a ação Euclideana é:

$$S_E(\varphi) = \int_0^\beta d\tau \int d^d \vec{x} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + U(\varphi) \right]. \quad (3.4)$$

Como no caso do capítulo anterior calculamos a função de partição do sistema na aproximação Gaussiana, isto é, expandimos a integral funcional (3.3) ao redor do seu ponto de

sela,  $\bar{\varphi}$ , que obedece à eq.

$$\frac{\delta S_E(\varphi)}{\delta \bar{\varphi}} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \tau^2} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^{i2}} - U'(\bar{\varphi}) = 0. \quad (3.5)$$

A equação anterior tem que ser resolvida com as condições: de fronteira,  $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\tau, \vec{x}) = \varphi_f$ , de tal forma que a ação (3.4) seja finita no ponto de sela; e com a condição de periodicidade no tempo imaginário,  $\varphi(0, \vec{x}) = \varphi(\beta, \vec{x})$ .

A temperatura zero, a taxa de decaimento do falso vácuo é dado pela eq. (2.71) e o “bounce”, solução não trivial da eq. (3.5), tem simetria  $O(D)$  [21] (veja Fig. 3.1-a). A baixas temperaturas,  $T \ll r(0)^{-1}$  (onde  $r(0)$  é o raio da bolha a temperatura zero), o “bounce” tem periodicidade igual a  $\beta$ , e tem a forma mostrada na Fig. 3.1-b. A temperaturas do ordem  $T \sim r(0)^{-1}$  o “bounce” tem a forma mostrada na Fig. 3.1-c. A altas temperaturas,  $T \gg r(0)^{-1}$ , o “bounce” tem simetria  $O(d)$ , Fig. 3.1-d. Desta discussão concluímos que a simetria do “bounce” se reduz desde uma simetria “esférica”, a temperatura zero, até uma simetria “cilíndrica”, a altas temperaturas. Então, a altas temperaturas o “bounce” é praticamente independente do tempo imaginário  $\tau$  [12]. Desta forma a eq. (3.5) para o “bounce” a altas temperaturas fica como:

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{d-1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - U(\bar{\varphi}) = 0. \quad (3.6)$$

O qual deve ser resolvido com a condição de fronteira:  $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(r) = \varphi_f$  e  $\frac{d\bar{\varphi}}{dr}|_{r=0} = 0$ , onde  $r = |\vec{x}|$ .

Então, podemos escrever um campo geral,  $\varphi$ , que cumpre as condições de fronteira e periodicidade como sendo:

$$\varphi(\tau, \vec{x}) = \bar{\varphi}(r) + \eta(\tau, \vec{x}), \quad (3.7)$$

onde embora o ponto de sela não dependa do tempo imaginário, as flutuações,  $\eta$ , de-

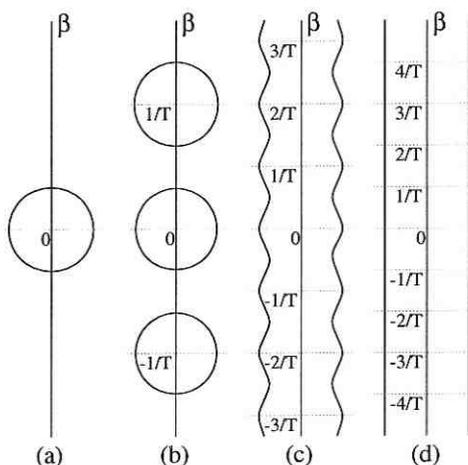


Figura 3.1: Soluções da eq. (3.5) a diferentes regimes de temperatura.

pendem. Agora podemos calcular a função de partição,  $Z$ , expandindo em (3.3) a ação Euclideana ao redor do ponto de sela até ordem quadrática e logo fazendo a integração Gaussiana ao redor das flutuações,  $\eta$ . Fazendo isto obtemos:

$$\begin{aligned}
 Z(\bar{\varphi}) &\approx e^{-S_E(\bar{\varphi})} \int \mathcal{D}\eta e^{-\int_0^\beta \int d^d \vec{x} \frac{1}{2} \eta [-\partial^2 + U''(\bar{\varphi})] \eta} \\
 &= N e^{-S_E(\bar{\varphi})} \left( \det[-\partial^2 + U''(\bar{\varphi})] \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

onde  $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$  e  $N$  é uma constante de normalização o qual pode ser obtido da mesma forma que no capítulo anterior.

A eq. (3.8) é a contribuição de uma solução da eq. (3.6) à função de partição. Além de termos soluções exatas; a solução trivial,  $\bar{\varphi} = \varphi_f$ , e o “bounce”,  $\bar{\varphi} = \varphi_B$ ; temos também as configurações “multi-bounce” (já discutidos na seção 2.2.3), os quais são soluções aproximadas da equação (3.6). Então, para calcularmos a função de partição teremos que somar as contribuições das soluções exatas e aproximadas: do ponto de sela trivial, do “bounce” e de todas as configurações “multi-bounce” possíveis. Fazendo isto

em forma análoga ao capítulo anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} Z &\approx Z(\varphi_f) + Z(\varphi_f) \left[ \frac{Z(\varphi_B)}{Z(\varphi_f)} \right] + Z(\varphi_f) \frac{1}{2!} \left[ \frac{Z(\varphi_B)}{Z(\varphi_f)} \right]^2 + \dots \\ &= Z(\varphi_f) \exp \left[ \frac{Z(\varphi_B)}{Z(\varphi_f)} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $Z(\varphi_f)$  e  $Z(\varphi_B)$  são dados pela eq. (3.8). Então, usando (3.9) e (3.2) em (3.1),

obtemos para a taxa de decaimento da fase meta-estável,  $\Gamma$ , a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Gamma_\beta &= \frac{|E_-|}{\pi} \text{Im} \ln \left( Z(\varphi_f) \exp \left[ \frac{Z(\varphi_B)}{Z(\varphi_f)} \right] \right) \\ &= \frac{|E_-|}{\pi} \text{Im} \left[ \frac{Z(\varphi_B)}{Z(\varphi_f)} \right] \\ &= \frac{|E_-|}{\pi} e^{-\Delta S_E} \text{Im} \left[ \frac{\det[-\partial^2 + U''(\varphi_B)]}{\det[-\partial^2 + U''(\varphi_f)]} \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$\Delta S_E = S_E(\varphi_B) - S_E(\varphi_f). \quad (3.11)$$

Agora, como o “bounce” é independente de  $\tau$  e de simetria  $O(d)$ , a ação Euclideana avaliada no “bounce” fica como:

$$\begin{aligned} S_E(\varphi_B) &= \int_0^\beta d\tau \int d^d \vec{x} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_B \partial_\mu \varphi_B + U(\varphi_B) \right] \\ &= \frac{1}{T} s_d \int dr r^{d-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_B}{dr} \right)^2 + U(\varphi_B) \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$s_d = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1} \sin \theta_2 \sin^2 \theta_3 \dots \sin^{d-1} \theta_{d-1}. \quad (3.13)$$

### 3.3 Cálculo dos determinantes

De forma semelhante ao capítulo anterior, pode-se mostrar que o operador diferencial,  $[-\partial^2 + U''(\varphi_B)]$ , tem  $d$  autofunções proporcionais a  $\partial_i \varphi_B$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ ; com autovalores

nulos. Em (3.10) podemos jogar fora estes autovalores nulos da mesma forma que no capítulo anterior. Ao se fazer isto, obteremos o fator  $L(S_E/2\pi)^{1/2}$  ( $L$  é o comprimento numa certa direção do  $d$ -espaço) por cada autovalor nulo. Também, como no capítulo anterior, vamos supor que o operador  $[-\partial^2 + U''(\varphi_B)]$  tem só um autovalor negativo,  $E_-^2 < 0$ .

A equação de autovalores para os operadores diferenciais que aparecem na equação (3.10) é dado por

$$[-\partial^2 + U''(\varphi_B)]\Psi_B(i) = \epsilon_B^2(i)\Psi_B(i), \quad (3.14)$$

$$[-\partial^2 + U''(\varphi_f)]\Upsilon_f(j) = \epsilon_f(j)^2\Upsilon_f(j). \quad (3.15)$$

Pelo fato de  $\varphi_B$  e  $\varphi_f$  não dependerem do tempo imaginário,  $\tau$ ; nas equações de autovalores podemos fazer separação de variáveis, ou escrever as autofunções como sendo

$$\Psi_B(\tau, \vec{x}) = e^{i\omega_n\tau}\psi_B(\vec{x}), \quad (3.16)$$

$$\Upsilon_f(\tau, \vec{x}) = e^{i\omega_n\tau}v_f(\vec{x}), \quad (3.17)$$

e substituindo as expressões anteriores em (3.14),(3.15) obtemos:

$$\left[ -\sum_{\mu=1}^d \partial_\mu^2 + U''(\varphi_B) \right] \psi_B(i) = E_B(i)^2 \psi_B(i), \quad (3.18)$$

$$\left[ -\sum_{\mu=1}^d \partial_i^2 + U''(\varphi_f) \right] v_f(j) = E_f(j)^2 v_f(j), \quad (3.19)$$

onde  $E^2 = (\epsilon^2 - \omega_n^2)$ . E pela condição de periodicidade no tempo imaginário, teremos que  $\omega_n = 2\pi n/\beta$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Então, para os determinantes em (3.10) podemos escrever

$$\mathcal{R} = \left[ \frac{\det[-\partial^2 + U''(\varphi_B)]}{\det[-\partial^2 + U''(\varphi_f)]} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_j [E_f^2(j) + \omega_n^2]}{\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \prod_i [E_B^2(i) + \omega_n^2]} \right] \\
 &= \exp \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\prod_j E_f^2(j) \prod_{n=1}^{\infty} \prod_j [\omega_n^2 + E_f^2(j)]^2}{\prod_{n=-\infty}^{+\infty} [\omega_n^2]^d \prod_{n=-\infty}^{+\infty} [\omega_n^2 + E_-^2]^2 \prod_i' E_B^2(i) \prod_{n=1}^{\infty} \prod_i' [\omega_n^2 + E_B^2(i)]^2} \right], \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

na equação anterior temos separados o modo negativo,  $E_-^2$ , e os  $d$  modos nulos. Os  $d$  modos nulos,  $n = 0$ , como já foi dito, são jogados fora da mesma forma que no capítulo anterior, dando origem ao fator  $V(S_E/2\pi)^{d/2}$ , onde  $V$ , é o volume do  $d$ -espaço. Os apóstrofes nos produtórios significam que temos separado o modo negativo e os  $d$  modos nulos. Fazendo uso da relação

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{y^2}{n^2} \right] = \frac{\sinh(\pi y)}{\pi y}, \quad (3.21)$$

em (3.20), é fácil mostrar que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= V \left( \frac{S_E(\varphi_B)}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left[ \left( \sum_i' - \sum_j \right) \ln \beta + \left( \sum_j - \sum_i' - d - 1 \right) \ln \prod_{n=1}^{\infty} \omega_n^4 + \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left[ \frac{\sin(|E_-|\beta/2)}{(|E_-|\beta/2)} \right] + \sum_j \left( \frac{\beta}{2} E_f(j) + \ln[1 - e^{-E_f(j)\beta/2}] \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \sum_i' \left( \frac{\beta}{2} E_B(i) + \ln[1 - e^{-E_B(i)\beta/2}] \right) - \ln(E_-^2)^{1/2} \right] \\
 &= A(T) \exp \left[ \sum_j \left( \frac{\beta}{2} E_f(j) + \ln[1 - e^{-E_f(j)\beta/2}] \right) + \right. \\
 &\quad \left. - \sum_i' \left( \frac{\beta}{2} E_B(i) + \ln[1 - e^{-E_B(i)\beta/2}] \right) \right], \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

onde temos usado o fato que  $\Sigma$  tem  $(d+1)$  autovalores a mais do que  $\Sigma'$ , isto é,  $(\Sigma - \Sigma') = (d+1)$ ; e  $A(T)$  é dado por

$$A(T) = V \left( \frac{S_E(\varphi_B)}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{T^{(d+1)}}{i|E_-|} \left[ \frac{|E_-|}{2T} \right] \left[ \sin \left( \frac{|E_-|}{2T} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) em (3.10), obtemos a taxa de decaimento da fase meta-estável por unidade de volume:

$$\frac{\Gamma_\beta}{V} = B(T) \left( \frac{E(\varphi_B)}{2\pi T} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left[ -\frac{\Delta F(T)}{T} \right] \quad (3.24)$$

onde

$$B(T) = \frac{T^{d+1}}{\pi} \left[ \frac{\frac{|E_-|}{2T}}{\sin\left(\frac{|E_-|}{2T}\right)} \right], \quad (3.25)$$

$$F(T) = \frac{\Delta E}{T} + \sum_j \left( \frac{\beta}{2} E_f(j) + \ln[1 - e^{-E_f(j)\beta/2}] \right) - \sum_i' \left( \frac{\beta}{2} E_B(i) + \ln[1 - e^{-E_B(i)\beta/2}] \right), \quad (3.26)$$

$$\Delta E = E(\varphi_B) - E(\varphi_f), \quad (3.27)$$

e

$$E(\varphi) = s_d \int_0^\infty dr r^{d-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + U(\varphi) \right] \quad (3.28)$$

é a energia na configuração  $\varphi$ .

## Capítulo 4

# O calculo da taxa de decaimento no modelo $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$ à temperatura zero

### 4.1 Introdução

Vamos considerar o modelo de um campo escalar em três dimensões espaço-temporais com ação Euclideana

$$S_E(\varphi) = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + U(\varphi) \right], \quad (4.1)$$

com

$$U(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\sigma}{6!} \varphi^6. \quad (4.2)$$

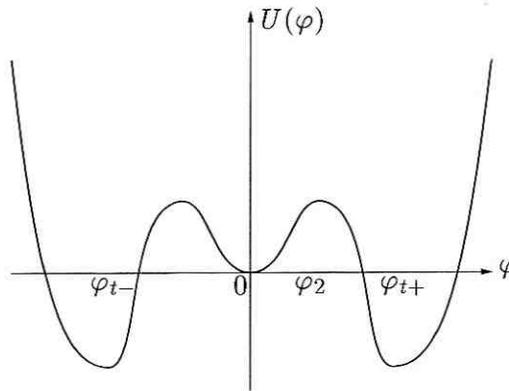
No regime em que os parâmetros são tais que

$$m^2 > 0, \lambda < 0, \sigma > 0 \text{ e } \left[ \left( \frac{\lambda}{3!} \right)^2 - 4m^2 \frac{\sigma}{5!} \right] > 0, \quad (4.3)$$

$U(\varphi)$  têm três mínimos relativos  $\varphi_{t\pm}$  e  $\varphi_f$  (ver Fig. 4.1); os quais tem os seguintes valores

$$\varphi_f = 0 \text{ e } \varphi_{t\pm} = \pm \left( -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{3!} \frac{5!}{\sigma} \left( 1 + \sqrt{1 - 4m^2 \frac{\sigma}{5!} \left( \frac{3!}{\lambda} \right)^2} \right) \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Para valores destes parâmetros o sistema pode exibir uma transição de fase de primeira ordem. O estado da teoria quântica de campos para o qual  $\varphi = \varphi_{t\pm}$  representa o vácuo


 Figura 4.1:  $U(\varphi)$  para valores dos parâmetros  $m$ ,  $\lambda$  e  $\sigma$  que satisfazem a eq. (4.3)

da teoria. O estado para o qual  $\varphi = \varphi_f$ , é um estado de equilíbrio ao nível clássico, mas flutuações quânticas tornam este estado instável. Ele pode decair até o estado  $\varphi = \varphi_{t\pm}$  tunelando a barreira de potencial. O estado  $\varphi = \varphi_f$  é um falso vácuo.

Neste capítulo calculamos a taxa de decaimento do falso vácuo a temperatura zero na aproximação conhecida como de parede fina (“thin-wall approximation”). Na seção 4.2 escrevemos a solução para o “bounce” e avaliamos a ação Euclideana nesta solução. Na seção 4.3 consideramos as correções para a taxa de decaimento que vem do fator não exponencial, isto é, dos determinantes funcionais. No capítulo seguinte consideraremos as correções térmicas à taxa de decaimento.

## 4.2 A solução do “bounce” na aproximação de parede fina

Consideremos o caso em que a diferença entre a densidade de energia do falso vácuo e o verdadeiro vácuo é muito pequena comparado com a altura da barreira. Isto é, o caso em que  $\epsilon_0 = U(\varphi_f) - U(\varphi_t) \ll U(\varphi_2)$  (ver Fig. 4.1). Neste caso podemos escrever uma expressão geral para a solução do “bounce”.

Como foi dito na seção 2.3.1 a eq. (2.62) para o “bounce” pode ser interpretada como

a equação do movimento de uma partícula num potencial  $-U(\varphi)$  que sofre a influência de uma força de atrito inversamente proporcional ao tempo, onde  $\varphi$  faz o papel da posição e  $r$  faz o papel do tempo. Como já foi dito, se escolhermos a posição inicial da partícula suficientemente perto do ponto  $\varphi_t$  a partícula ficara ao redor deste ponto por um tempo muito grande (seja este tempo igual a  $\bar{\rho}$ ). Mas para um tempo muito grande podemos desprezar a força de atrito, e se desprezarmos a força de atrito a partícula atingira um ponto próximo a  $\varphi_f$  num intervalo de tempo  $\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}$ . E para um tempo maior que  $\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}$  a partícula atingira o ponto  $\varphi_f$ . Podemos então escrever aproximadamente para a solução do “bounce” a seguinte expressão:

$$\varphi_b(\rho) = \begin{cases} \varphi_t & 0 < \rho < \bar{\rho} - \Delta\bar{\rho} \\ \varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}) & \bar{\rho} - \Delta\bar{\rho} < \rho < \bar{\rho} + \Delta\bar{\rho} \\ \varphi_f & \bar{\rho} + \Delta\bar{\rho} < \rho < \infty \end{cases}, \quad (4.5)$$

onde  $\rho^2 = [\tau^2 + x_1^2 + x_2^2]$  e  $\varphi_{\text{wall}}$  satisfaz a eq. (2.62) sem o termo proporcional à inversa de  $\rho$ ;

$$\frac{d^2\varphi_{\text{wall}}}{d\rho^2} = U'(\varphi_{\text{wall}}). \quad (4.6)$$

Podemos interpretar a solução anterior para o “bounce” como uma configuração onde a fase estável  $\varphi_t$  esta dentro de uma bolha de raio  $\bar{\rho}$  separada da fase estável por uma parede de espessura  $2\Delta\bar{\rho}$ . No caso em que a diferença entre a densidade de energia do falso vácuo e o verdadeiro vácuo for muito menor do que a altura da barreira, a espessura da parede será muito pequena comparada com o raio da bolha. Escrevamos o nosso potencial da eq. (4.2) na forma

$$U(\varphi) = \frac{\sigma}{6!}\varphi^2(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2 - \gamma\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}, \quad (4.7)$$

onde

$$\varphi_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{6!}{\sigma}\frac{\lambda}{4!}, \quad (4.8)$$

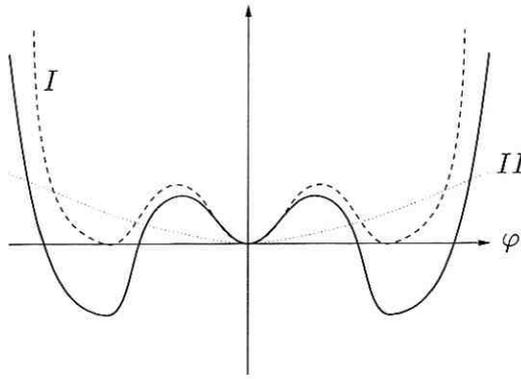


Figura 4.2:  $U(\varphi)$  como sendo a diferença entre  $\frac{\sigma}{6!}\varphi^2(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2$  (curva I) menos  $\gamma\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}$  (curva II).

e

$$\gamma = \frac{\varphi_0^2}{4} \left[ \frac{6!}{\sigma} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 - 2m^2 \right]. \quad (4.9)$$

Vemos que  $U(\varphi)$  é a soma de um potencial que tem três vácuos verdadeiros menos um potencial quadratico. Então, quando  $\gamma \rightarrow 0$ , teremos a aproximação de parede fina (ver Fig. 4.2). A eq. (4.6) pode ser integrado facilmente obtendo-se

$$\int_0^{\varphi_{\text{wall}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2U(\varphi)}} = \rho. \quad (4.10)$$

Agora substituindo (4.7) em (4.10) e desprezando o termo proporcional a  $\gamma$  obtemos

$$\int_0^{\varphi_{\text{wall}}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\frac{\sigma}{6!}\varphi(\varphi^2 - \varphi_0^2)}} = \rho. \quad (4.11)$$

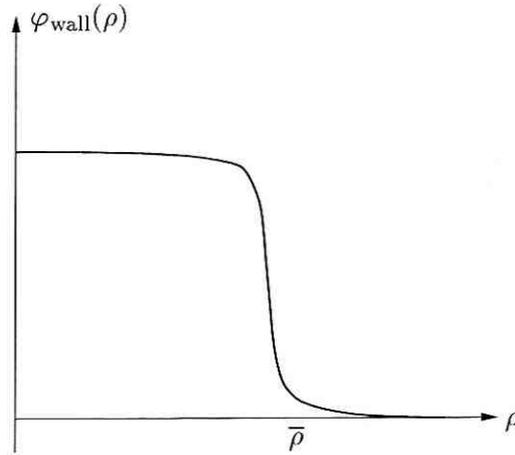
A integral anterior é facil de se resolver e a solução é de tal forma que

$$\varphi_{\text{wall}}^2(\rho) = \frac{\varphi_0^2}{1 + \exp\left(\sqrt{8\frac{\sigma}{6!}}\varphi_0^2\rho\right)}. \quad (4.12)$$

Esta solução é mostrada na Fig. 4.3.

Para a ação Euclideana (eq. (2.65)) podemos escrever na aproximação de parede fina a seguinte expressão:

$$S_E(\varphi_b) = 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_b}{d\rho} \right)^2 + U(\varphi_b) \right]$$


 Figura 4.3:  $\varphi_{\text{wall}}$  em função de  $\rho$ 

$$\begin{aligned}
 &= 4\pi \int_0^{\bar{\rho}-\Delta\bar{\rho}} d\rho \rho^2 U(\varphi_t) + 4\pi \int_{\bar{\rho}+\Delta\bar{\rho}}^{\infty} d\rho \rho^2 U(0) + \\
 &4\pi \int_{\bar{\rho}-\Delta\bar{\rho}}^{\bar{\rho}+\Delta\bar{\rho}} d\rho \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_{\text{wall}}}{d\rho} \right)^2 + U(\varphi_{\text{wall}}) \right]. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Pelo fato de  $\Delta\bar{\rho} \ll \bar{\rho}$ , na ultima integral da eq. (4.13) podemos tomar  $\rho \approx \bar{\rho}$  e obter assim

$$S_E(\varphi_b) \simeq -\frac{4}{3}\pi\epsilon_0\bar{\rho}^3 + 4\pi\bar{\rho}^2 S_0, \quad (4.14)$$

onde  $S_0$  é a densidade de energia superficial do “bounce”

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \int_{\bar{\rho}-\Delta\bar{\rho}}^{\bar{\rho}+\Delta\bar{\rho}} d\rho \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_{\text{wall}}}{d\rho} \right)^2 + U(\varphi_{\text{wall}}) \right] \\
 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} d\varphi \sqrt{2U(\varphi)} \approx \int_{\varphi_0}^0 d\varphi \sqrt{2\frac{\sigma}{6!}\varphi(\varphi^2 - \varphi_0^2)}, \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

onde desprezamos novamente o termo proporcional a  $\gamma$ . Avaliando a integral anterior obtemos

$$S_0 \simeq \frac{\varphi_0^4}{4} \sqrt{2\frac{\sigma}{6!}}. \quad (4.16)$$

Para determinar o raio crítico da bolha,  $\bar{\rho}_c$ , derivamos a eq. (4.14) respeito de  $\bar{\rho}$  e o igualamos a zero. Fazendo isto, obtemos

$$\bar{\rho}_c = 2\frac{S_0}{\epsilon_0}, \quad (4.17)$$

e substituindo a expressão anterior na eq. (4.14) obtemos

$$S_E(\varphi_b) \simeq \frac{16 S_0^3}{3 \epsilon_0^2} \pi. \quad (4.18)$$

Na próxima seção estudaremos as correções quânticas a um “loop” à expressão anterior.

### 4.3 Cálculo do determinante funcional

Vamos considerar a equação de autovalores para os operadores diferenciais que aparecem nos determinantes funcionais da eq. (2.71) em  $D = 3$ :

$$[-\square_E + U''(\varphi_b)]\psi(i) = E_b^2(i)\psi_b(i) \quad (4.19)$$

$$[-\square_E + U''(\varphi_f)]\psi(j) = E_f^2(j)\psi_f(j), \quad (4.20)$$

onde  $\square_E = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ,  $\varphi_f = 0$  e  $\varphi_b$  vem dado na aproximação de parede fina pela expressão (4.5). Então, em termos dos autovalores os determinantes que aparecem na eq.

(2.71) podem ser escritos como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \left[ \frac{\det' [-\square_E + U''(\varphi_b)]}{\det [-\square_E + U''(\varphi_f)]} \right]^{-1/2} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\det' [-\square_E + U''(\varphi_b)]}{\det [-\square_E + U''(\varphi_f)]} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\prod_i' E_b^2(i)}{\prod_j E_f^2(j)} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_i' \ln |E_b^2(i)| - \sum_j \ln E_f^2(j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Desde que na aproximação de parede fina, para  $\rho < (\bar{\rho} - \Delta\bar{\rho}) \approx \bar{\rho}$ , o bounce pode ser aproximado por uma configuração constante (veja eq. (4.5)), podemos escrever para  $\mathcal{K}$  a seguinte expressão:

$$\mathcal{K} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} \pi \bar{\rho}^3 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[ \frac{E_i^2(p)}{E_f^2(p)} \right] + \left( \sum_i' \ln |E_{\text{wall}}^2(i)| - \sum_j \ln E_f^2(j) \right) \right] \right\}, \quad (4.22)$$

onde  $p = (p_0, \vec{p})$ ,  $E_{t,f}^2(p) = [p^2 + U''(\varphi_{t,f})]$  e  $E_{\text{wall}}^2(i)$  são os autovalores do operador diferencial  $[-\square_E + U''(\varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]$ .

Em (4.22) a integral pode ser identificada como sendo a correção a um “loop” ao potencial clássico, enquanto que os termos restantes representam as correções quânticas devido às flutuações ao redor da parede do “bounce” [24].

Então, fazendo uso das eqs. (4.14) e (4.22) em (2.71), obtemos

$$\frac{\Gamma}{V_2} \simeq 2 \left( \frac{\Delta S_E}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{4}{3}\pi\bar{\rho}^3 \Delta U_{\text{eff}} - 4\pi\bar{\rho}^2 (\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1) \right], \quad (4.23)$$

onde  $\mathcal{S}_1$  é o termo que fornece as correções quânticas a um “loop” às flutuações ao redor da parede do “bounce”,

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{4\pi\bar{\rho}^2} \left( \sum_i ' \ln |E_{\text{wall}}^2(i)| - \sum_j \ln E_f^2(j) \right), \quad (4.24)$$

e

$$\Delta U_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}(\varphi_f) - U_{\text{eff}}(\varphi_t), \quad (4.25)$$

onde  $U_{\text{eff}}(\varphi)$  é o potencial efetivo a um “loop”. O fator 2 que aparece na eq. (4.23) vem do fato de termos dois vácuos verdadeiros. Isto é, o falso vácuo pode decair em qualquer um destes vácuos com a mesma probabilidade. Matematicamente isto pode ser entendido através da eq. (4.12), onde podemos ver que temos duas soluções para o “bounce” com sinais diferentes.

Então para calcular as correções quânticas a um “loop” temos que calcular o potencial efetivo a um “loop” e a quantidade  $\mathcal{S}_1$ . O cálculo do potencial efetivo a um “loop” não oferece dificuldade alguma, mas o cálculo de  $\mathcal{S}_1$  é muito complicado, pois para se efetuar esta tarefa temos que conhecer, em primeiro lugar, os autovalores  $E_{\text{wall}}^2(i)$  do operador diferencial  $[-\square_E + U''(\varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]$  e depois fazer a soma que aparece na eq.

(4.24). A continuação calculamos o potencial efetivo a um “loop” e depois estudaremos os autovalores do operador  $[-\square_E + U''(\varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]$ .

### 4.3.1 O potencial efetivo a um “loop”

O potencial efetivo a um “loop” é dado por [25]

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = U(\varphi) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[ \frac{p^2 + U''(\varphi)}{p^2 + m^2} \right]. \quad (4.26)$$

A divergência ultravioleta em (4.26) pode ser eliminada na forma usual. Integrando sob  $p_0$  e fazendo uso de um “cut-off” ultravioleta,  $\Lambda$ , para o momento espacial, obtemos

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = U(\varphi) - \frac{1}{12} \left[ \left( \mathbf{p}^2 + m^2 \right)^{3/2} \Big|_0^\Lambda - \left( \mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\sigma}{4!}\varphi^4 \right)^{3/2} \Big|_0^\Lambda \right]. \quad (4.27)$$

e fazendo uso da relação  $(1+x)^{3/2} = 1 + 3/2x + 3/8x^2 + \dots$ , obtemos para  $U_{\text{eff}}$  a expressão

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = U(\varphi) - \frac{1}{12} \left[ \left( m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\sigma}{4!}\varphi^4 \right)^{3/2} - m^3 - \frac{3}{2}Y(\Lambda) \left( \frac{\lambda}{2}\varphi^2 + \frac{\sigma}{4!}\varphi^4 \right) \right] + \mathcal{O}(1/\Lambda), \quad (4.28)$$

onde  $Y(\Lambda) = \Lambda^2 + m_r^2$ . Os termos divergentes em (4.28) são proporcionais a  $\varphi^2$  e  $\varphi^4$  mas não a  $\varphi^6$ . Então, a um “loop” só a massa,  $m$ , e a constante de acoplamento  $\lambda$  precisam ser renormalizados ( $\sigma_r = \sigma$ ). Fazendo uso da seguinte prescrição de renormalização:

$$m_r^2 = \left. \frac{d^2 U_{\text{eff}}(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} \quad (4.29)$$

e

$$\lambda_r = \left. \frac{d^4 U_{\text{eff}}(\phi)}{d\phi^4} \right|_{\phi=0} \quad (4.30)$$

e reescrevendo os parâmetros não renormalizados em termos dos renormalizados, obtemos para o potencial efetivo a um “loop” a seguinte expressão:

$$U_{\text{eff}}(\varphi) = U_r(\varphi) - \frac{1}{12} \left[ U_r''(\varphi)^{3/2} - m_r^3 - \frac{3}{4} m_r \lambda_r \varphi^2 - \frac{3\lambda_r^2}{32m_r} \varphi^4 - \frac{3m_r \sigma_r}{16} \varphi^4 \right], \quad (4.31)$$

onde  $U_r$  é o potencial clássico ( a “tree level”) expressado em termos dos parâmetros de massa e constantes de acoplamento renormalizados. Por conveniência de notação, de agora em diante vamos eliminar o sub-índice  $r$  das expressões e assumiremos que os parâmetros sem subíndice,  $m$ ,  $\lambda$  e  $\sigma$  são os parâmetros renormalizados. Então,  $\Delta U_{\text{eff}}$  pode ser escrito como ( $\varphi_f = 0$ )

$$\Delta U_{\text{eff}} = -U(\varphi_t) + \frac{1}{12} \left[ U'''(\varphi_t)^{3/2} - \frac{3}{4} m \lambda \varphi_t^2 - \frac{3\lambda^2}{32m} \varphi_t^4 - \frac{3m\sigma}{16} \varphi_t^4 \right], \quad (4.32)$$

onde  $\varphi_t$  é dado pela eq. (4.4).

### 4.3.2 Os autovalores $E_{\text{wall}}^2(i)$

Agora voltemos ao problema dos autovalores,  $E_{\text{wall}}^2(i)$ , do operador  $[-\square_E + U''(\phi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]$ , o qual aparece na expressão para  $S_1$ . O calculo destes autovalores não é um problema simples de se resolver. De fato, só em poucos exemplos este problema tem uma solução analítica exata, como por exemplo para a solução de tipo “kink” no modelos  $(\lambda\varphi^4)_{D=2}$  [17]. Desafortunadamente, para o modelo que estamos estudando aqui, não podemos encontrar soluções analíticas. Entretanto, podemos fazer uma análise aproximada, e, em particular podemos encontrar explicitamente os modos zeros e negativos para o operador diferencial na configuração da parede do bounce. Fazendo uso da simetria esférica do “bounce”, podemos expressar a equação de autovalores:

$$[-\square_E + U''(\varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]\psi_i(\rho, \theta, \phi) = E_{\text{wall}}^2(i)\Psi_i(\rho, \theta, \phi)$$

na forma

$$\left[ -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{wall}}^2(\rho - \bar{\rho}) + \frac{\sigma}{4!} \varphi_{\text{wall}}^4(\rho - \bar{\rho}) \right] \psi_i(\rho) = E_{\text{wall}}^2(i)\psi_i(\rho), \quad (4.33)$$

onde  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Fazendo  $\psi_i(\rho) = \chi_i(\rho)/\rho$  and  $z = \rho - \bar{\rho}$ , obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{l(l+1)}{(z+\bar{\rho})^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2}\varphi_{\text{wall}}^2(z) + \frac{\sigma}{4!}\varphi_{\text{wall}}^4(z) \right] \chi_{n,l}(z) = E_{\text{wall}}^2(n,l)\chi_{n,l}(z). \quad (4.34)$$

Desde que  $\Delta\bar{\rho} \ll \bar{\rho}$ , podemos tomar  $l(l+1)/(z+\bar{\rho})^2 \approx l(l+1)/\bar{\rho}^2$  e então

$$\left[ -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\lambda}{2}\varphi_{\text{wall}}^2(z) + \frac{\sigma}{4!}\varphi_{\text{wall}}^4(z) \right] \chi_n(z) = \eta_n^2 \chi_n(z), \quad (4.35)$$

onde  $\eta_n$  é obtido de

$$E_{\text{wall}}^2(n,l) = \eta_n^2 + m^2 + \frac{l(l+1)}{\bar{\rho}^2}. \quad (4.36)$$

Sabe-se que o operador  $[-\square_E + U''(\phi_b(\rho))]$  tem três autovalores nulos como consequência da invariancia de traslação do bounce. Então, para  $l = 1$  e para o mais baixo valor de  $\eta_n$  (o qual pode ser escolhido como  $\eta_1$ ), teremos  $E_{\text{wall}}^2(1,1) = 0$ , com multiplicidade igual a  $2(1) + 1 = 3$ , e de (4.36) obtemos  $\eta_1^2 = -(m^2 + 2/\bar{\rho}^2)$ . Então, o autovalor mais baixo  $E_{\text{wall}}^2(1,0)$  (o autovalor negativo,  $E_-^2$ ) será igual a

$$E_-^2 = E_{\text{wall}}^2(1,0) = -2/\bar{\rho}^2, \quad (4.37)$$

com multiplicidade igual a  $2(0+1)=1$ , justo como se espera para o estado meta-estável; a existência de um e só um autovalor negativo [24].

Para avaliar os outros autovalores fazemos a seguinte mudança de variáveis  $w = \sqrt{\frac{\sigma}{6!}}\varphi_0^2 z$  e usamos (4.12) in (4.36). Desta forma obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dw^2} - \frac{24}{1+e^{\sqrt{8}w}} + \frac{30}{(1+e^{\sqrt{8}w})^2} \right] \chi_n(w) = \nu_n^2 \chi_n(w), \quad (4.38)$$

onde  $\nu_n^2 = \eta_n^2 6! / (\sigma\phi_0^4)$ . Podemos então expressar os autovalores do operador  $[-\square_E + U''(\varphi_{\text{wall}}(\rho - \bar{\rho}))]$  como

$$E_{\text{wall}}^2(n,l) = \phi_0^4 \frac{\sigma}{6!} \nu_n^2 + m^2 + \frac{l(l+1)}{\bar{\rho}^2}. \quad (4.39)$$

A eq. (4.38) é uma equação de autovalores o qual é puramente numérico, mas que não tem uma solução analítica conhecida.

## 4.4 A validade da aproximação

É importante conhecer a faixa na qual é válida a nossa aproximação. Temos feito duas aproximações: A aproximação semi-clássica e a aproximação de parede fina.

É fato conhecido que a aproximação semi-clássica ou aproximação Gaussiana é válido somente se as flutuações quânticas ao redor da trajetória clássica são pequenas, *i.e.*, se a ação Euclideana avaliada na trajetória clássica é muito maior que do que  $\hbar$ ,

$$S_E(\varphi_b) \gg 1. \quad (4.40)$$

Substituindo a expressão de  $S_E(\varphi_b)$  na aproximação de parede fina (eq. (4.18) em (4.40) temos

$$\frac{16 S_0^3}{3 \epsilon_0^2} \pi = \frac{\pi \varphi_0^{12} \sigma}{6 \epsilon_0^2 6!} \sqrt{2 \frac{\sigma}{6!}} \gg 1. \quad (4.41)$$

De outro lado temos que a aproximação de parede fina é válida quando a diferença entre a densidade de energia do falso vácuo e o verdadeiro vácuo é muito pequena comparado com a altura da barreira, *i.e.*,

$$\epsilon_0 = U(\varphi_f) - U(\varphi_t) \ll U(\varphi_2). \quad (4.42)$$

De (4.7) podemos escrever  $U(\varphi)$  como

$$U(\varphi) = \varphi_0^6 \frac{\sigma}{6!} \left( \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} \left( \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} - 1 \right)^2 - f \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2} \right), \quad (4.43)$$

onde

$$f = 1 - 2m^2 \frac{\sigma}{6!} \left( \frac{4!}{\lambda} \right)^2. \quad (4.44)$$

# Capítulo 5

## Taxa de decaimento no modelo $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$ à temperatura finita

### 5.1 Introdução

Neste capítulo vamos calcular a taxa de decaimento do falso vácuo à temperatura finita no modelo massivo  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$ . No regime de altas temperaturas a taxa de decaimento em  $D = 3$ , vem dado pela eq. (3.24) com  $d = 2$ ,

$$\frac{\Gamma_\beta}{V_2} = 2B(T) \frac{E(\varphi_B)}{2\pi T} \exp\left[-\frac{\Delta F(T)}{T}\right], \quad (5.1)$$

e onde agora, segundo as eqs. (3.25), (3.26), (3.28), (3.14) y (3.15) em  $d = 2$ ,

$$B(T) = \frac{T^3}{\pi} \left[ \frac{\frac{|E_-|}{2T}}{\sin\left(\frac{|E_-|}{2T}\right)} \right], \quad (5.2)$$

$$\Delta F(T) = \Delta E - \sum_j \left[ \frac{1}{2} E_f(j) + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta E_f(j)}) \right] + \sum_i' \left[ \frac{1}{2} E_B(i) + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta E_B(i)}) \right], \quad (5.3)$$

$$\Delta E = E(\varphi_B) - E(\varphi_f), \quad (5.4)$$

$$E(\varphi) = 2\pi \int_0^\infty dr r \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2 + U(\varphi) \right] \quad (5.5)$$

é a energia na configuração  $\varphi$ , e

$$[-\nabla^2 + U''(\varphi_{B,f})]\Psi_{B,f}(i) = E_{B,f}^2(i)\Psi_{B,f}(i), \quad (5.6)$$

De onde podemos escrever as expressões para  $\varphi_t$  y  $\varphi_2$  como

$$\varphi_t = \varphi_0 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{1 + 3f}}{3}} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \varphi_0 \sqrt{\frac{2 - \sqrt{1 + 3f}}{3}}; \quad (4.45)$$

e substituindo estes valores em (4.42), obtemos a condição de aplicabilidade da aproximação de parede fina,

$$f \ll \frac{1}{9} \quad \text{ou} \quad m^2 \frac{\sigma}{6!} \left( \frac{4!}{\lambda} \right)^2 \gg \frac{4}{9}. \quad (4.46)$$

Dentro desta aproximação podemos escrever para  $\epsilon_0$  a seguinte expressão

$$\epsilon_0 = -U(\varphi_t) = \frac{\varphi_0^6 \sigma}{27 \cdot 6!} \left( 18f - 2 + (2 + 6f)\sqrt{1 + 3f} \right) \approx \varphi_0^6 \frac{\sigma}{6!} \left( f + \frac{f^2}{3} \right), \quad (4.47)$$

e substituindo este valor em (4.41) temos

$$\frac{\pi}{6} \sqrt{2 \frac{6!}{\sigma}} \gg \left( f + \frac{f^2}{3} \right). \quad (4.48)$$

Temos então as duas condições para a aplicabilidade da nossa aproximação, eqs (4.46) e (4.48).

onde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ . O fator 2 que aparece em (5.1) é pelo fato de termos no nosso modelo dois mínimos verdadeiros. Desta forma a taxa de decaimento vai ficar multiplicado por 2.

Vemos então que para calcular a taxa de decaimento a temperatura finita temos que conhecer a solução para o “bounce”,  $\varphi_B$ , resolver a equação de autovalores (5.6) e depois fazer a soma destes autovalores. A seguir determinamos a forma do “bounce” dentro da aproximação de parede fina.

## 5.2 O “bounce” a altas temperaturas na aproximação de parede fina

O “bounce”,  $\varphi_B$ , a altas temperaturas é dado através da eq. (3.6), o qual em  $d = 2$ , fica como

$$\frac{d^2\varphi_B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_B}{dr} - U'(\varphi_B) = 0. \quad (5.7)$$

A eq. (5.7) é uma equação não linear cuja solução exata é possível só para determinados modelos. No nosso modelo não se conhece uma solução exata. Mas, como no capítulo anterior podemos escrever uma solução aproximada dentro da chamada aproximação de parede fina,

$$\varphi_B(r) = \begin{cases} \varphi_t & 0 < r < R - \Delta R \\ \varphi_{\text{wall}}(r - R) & R - \Delta R < r < R + \Delta R \\ \varphi_f & R + \Delta R < r < \infty \end{cases}, \quad (5.8)$$

onde  $\varphi_{\text{wall}}$  satisfaz a eq. (5.7) sem o termo proporcional a  $(1/r)$ ,

$$\frac{d^2\varphi_{\text{wall}}}{dr^2} - U'(\varphi_{\text{wall}}) = 0. \quad (5.9)$$

A eq. (5.9) é idêntica à eq. (4.6). Então a solução para  $\varphi_{\text{wall}}(r)$  vem dado pela eq. (4.12) com  $r$  substituindo  $\rho$ ,

$$\varphi_{\text{wall}}^2(r) = \frac{\varphi_0^2}{1 + \exp\left(\sqrt{8\frac{\sigma}{6!}}r\right)}, \quad (5.10)$$

onde  $\varphi_0$  é dado pela eq. (4.8).

Agora podemos calcular o termo  $\Delta E$ , o qual é o termo dominante na taxa de nucleação,

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2\pi \int_0^\infty dr r \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_B}{dr} \right)^2 + U(\varphi_B) \right] \\ &= 2\pi \int_0^{R-\Delta R} dr r U(\varphi_t) + 2\pi \int_{R+\Delta R}^\infty + \\ &\quad 2\pi \int_{R-\Delta R}^{R+\Delta R} dr r \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_{\text{wall}}}{dr} \right)^2 + U(\varphi_{\text{wall}}) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Como  $\Delta R \ll R$ , na última integral de (5.11) podemos tomar  $r \approx R$  e obter para  $\Delta E$ ,

$$\Delta E = -\pi\epsilon_0 R^2 + 2\pi R S_0, \quad (5.12)$$

onde,  $\epsilon_0 = [U(\varphi_f) - U(\varphi_t)] = -U(\varphi_t)$  e  $S_0$  é a densidade de energia superficial, dado pela eq. (4.15)

$$S_0 = \frac{\varphi_0^4}{4} \sqrt{2 \frac{\sigma}{6!}}. \quad (5.13)$$

Podemos determinar o raio crítico da bolha,  $R_c$ , minimizando a eq. (5.12), mas pelo fato das correções térmicas serem muito apreciáveis a altas temperaturas, é conveniente determinar o raio crítico da bolha a partir da expressão para  $\Delta F(T)$  na aproximação de parede fina. Isto será feito na seguinte seção.

### 5.3 As correções térmicas à taxa de decaimento

As correções quânticas e térmicas à taxa de decaimento são dados pelas somas que aparecem na expressão para  $\Delta F(T)$ . No contexto da aproximação de parede fina, podemos escrever (em forma análoga à seção 4.3) a seguinte expressão para  $\Delta F(T)$ :

$$\begin{aligned} \Delta F(T) &= \Delta E + \pi R^2 \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{2} E_t(\mathbf{p}) - \frac{1}{2} E_f(\mathbf{p}) \right] + T\pi R^2 \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[ \ln(1 - e^{-\beta E_t(\mathbf{p})}) \right. \\ &\quad \left. - \ln(1 - e^{-\beta E_f(\mathbf{p})}) \right] + \sum_i' \left[ \frac{\beta}{2} E_{\text{wall}}(i) + \ln(1 - e^{-\beta E_{\text{wall}}(i)}) \right] + \end{aligned}$$

$$-\sum_j \left[ \frac{\beta}{2} E_f(j) + \ln \left( 1 - e^{-\beta E_f(j)} \right) \right], \quad (5.14)$$

onde

$$E_{t,f}(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + U''(\varphi_{t,f})} \quad (5.15)$$

e  $E_{\text{wall}}^2(i)$  são os autovalores do operador  $[-\nabla^2 + U(\varphi_B(r - R_c))]$ .

Fazendo uso da eq. (5.12) podemos escrever  $\Delta F(T)$  como sendo

$$\Delta F(T) = -\pi \Delta U_{\text{eff}}(T) R^2 + 2\pi(S_0 + S_\beta)R, \quad (5.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{eff}} = & \epsilon_0 + \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + U''(\varphi_f)} - \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + U''(\varphi_t)} \right] + \\ & T \int \frac{d^2\mathbf{p}}{(\pi)^2} \left[ \ln \left( 1 - e^{-\beta E_f(\mathbf{p})} \right) - \ln \left( 1 - e^{-\beta E_t(\mathbf{p})} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

é, a menos de um sinal, o potencial efetivo a temperatura finita a um “loop”; e

$$S_\beta = \frac{T}{2\pi R} \left( \sum_i' \left[ \frac{\beta}{2} E_{\text{wall}}(i) + \ln \left( 1 - e^{-\beta E_{\text{wall}}(i)} \right) \right] - \sum_j \left[ \frac{\beta}{2} E_f(j) + \ln \left( 1 - e^{-\beta E_f(j)} \right) \right] \right) \quad (5.18)$$

é a correção a um “loop”, à densidade de energia superficial a temperatura finita.

Em (5.17); a primeira integral é claramente divergente, mas esta divergência pode ser eliminada na mesma forma que no capítulo anterior mediante a introdução de contratermos apropriados. O termo finito resultante (depois de termos feito a renormalização) vai nos dar a correção quântica (a menos de um sinal) ao potencial efetivo. A segunda integral em (5.17) é finita, este termo é a correção termica ao potencial efetivo. Agora, no regime de altas temperaturas, os efeitos térmicos dominam sob os efeitos quânticos e então podemos desprezar as correções quânticas frente as correções térmicas. Isto é, em (5.17) desprezamos a primeira integral comparada à segunda.

A segunda integral em (5.17) pode ser reduzida a integrais do tipo

$$I(t) = \int_0^\infty dx \left[ x \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+t^2}} \right) \right];, \quad (5.19)$$

o qual é calculado num apêndice. O resultado é

$$I(t) = I(0) + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \zeta(2n)}{n(n+1)(2\pi)^{2n}} (t^2)^{n+1}, \quad (5.20)$$

onde  $\zeta(n)$  são as funções Zeta de Riemman. Fazendo uso das eqs. (5.20) e (5.17) obtemos para  $\Delta F(T)$  o seguinte:

$$\Delta F(T) = -\pi (\epsilon_0 + C(\varphi_f) - C(\varphi_t)) R^2 + 2\pi (\mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\beta), \quad (5.21)$$

onde a altas temperaturas ( $t = \beta\sqrt{U'''(\varphi)}$ ) teremos

$$C(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left( U'''(\varphi)^{3/2} + \frac{T}{4} U'''(\varphi) - \frac{T}{4} U'''(\varphi) \ln(U'''(\varphi)) + \frac{T}{2} U'''(\varphi) \ln(T) - \frac{U'''(\varphi)^2}{96T} \right). \quad (5.22)$$

Agora, o que falta calcular é a quantidade  $\mathcal{S}_\beta$ , para o qual se precisa conhecer em primeiro lugar os autovalores  $E_{\text{wall}}^2(i)$  do operador diferencial  $[-\nabla^2 + U'''(\varphi_{\text{wall}}(r - R))]$ , e depois fazer a soma no índice  $i$ . Na seguinte seção consideramos o problema dos autovalores.

O raio crítico da bolha, agora dependente da temperatura,  $R_c(T)$ , pode ser obtido minimizando  $\Delta F(T)$ , isto é, a partir da equação

$$\left. \frac{\delta \Delta F(T)}{\delta r} \right|_{r=R_c(T)} = 0. \quad (5.23)$$

## 5.4 Os autovalores $E_{\text{wall}}^2(i)$

Os autovalores  $E_{\text{wall}}^2(i)$  do operador  $[-\nabla^2 + U'''(\varphi_{\text{wall}}(r - R))]$ , são determinados pela equação

$$[-\nabla^2 + U'''(\varphi_{\text{wall}}(r - R))]\Psi(i) = E_{\text{wall}}^2(i)\Psi(i). \quad (5.24)$$

Como  $\varphi_{\text{wall}}$  só depende de  $r$ , então podemos escrever a eq. (5.24) em coordenadas cilíndricas, e depois, fazendo uso do método de separação de variáveis ( $\Psi(r, \phi) = \psi(r)\Theta(\phi)$ ) teremos

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{s^2}{r^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{wall}}^2(r-R) + \frac{\sigma}{4!} \varphi_{\text{wall}}^4(r-R) \right] \psi_{n,s}(r) = E_{\text{wall}}^2(n,s) \psi_{n,s}(r), \quad (5.25)$$

onde,  $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  vem da simetria cilíndrica do problema. Fazendo  $\psi(r) = \chi(r)/r^{1/2}$  em (5.25), obtemos

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4s^2 - 1}{4r^2} + m^2 + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{wall}}^2(r-R) + \frac{\sigma}{4!} \varphi_{\text{wall}}^4(r-R) \right] \chi_{n,s}(r) = E_{\text{wall}}^2(n,s) \chi_{n,s}(r). \quad (5.26)$$

Da mesma forma que na seção (4.3.2), fazemos  $z = (r-R)$ ; e pelo fato de termos  $\Delta R \ll R$ , então a eq. (5.26) fica como

$$\left[ -\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\lambda}{2} \varphi_{\text{wall}}^2(z) + \frac{\sigma}{4!} \varphi_{\text{wall}}^4(z) \right] \chi_n(z) = \eta_n^2 \chi_n(z), \quad (5.27)$$

onde,  $\eta_n^2$  é agora obtido de

$$E_{\text{wall}}^2(n,s) = \eta_n^2 + m^2 + \frac{4s^2 - 1}{4R^2}. \quad (5.28)$$

O operador diferencial  $[-\nabla^2 + U''(\varphi_B)]$  tem dois autovalores nulos (devido a os modos traslacionais no espaço bidimensional). Em (5.28) a multiplicidade é dois para  $s \neq 0$  e um para  $s = 0$ . Então, para  $s = 1$  e o mais baixo valor de  $\eta_n$  (o qual denotamos como  $\eta_1$ ) teremos em (5.28) o autovalor nulo,  $E_{\text{wall}}^2(1,1) = 0$ , de onde obtemos  $\eta_1 = -[m^2 + \frac{3}{4R^2}]$ . Agora, substituindo em (5.28)  $s = 0$  e o valor de  $\eta_1$  obtemos o autovalor negativo  $E_-^2 = E_{\text{wall}}^2(1,0)$ ,

$$E_-^2 = -\frac{1}{R^2}. \quad (5.29)$$

Como na seção (4.3.2), fazendo  $w = \sqrt{\frac{\sigma}{6!}}\varphi_0^2 z$ , obtemos para os demais autovalores

$$E_{\text{wall}}^2(n, s) = \varphi_0^4 \frac{\sigma}{6!} \nu_n^2 + m^2 + \frac{4s^2 - 1}{4R^2}, \quad (5.30)$$

onde  $\nu_n$  são os mesmos da seção (4.3.2).

## 5.5 A validade da aproximação

Neste caso além da condição de aplicabilidade da aproximação de parede fina, eq. (4.46),

$$f \ll \frac{1}{9} \quad \text{ou} \quad m^2 \frac{\sigma}{6!} \left(\frac{4!}{\lambda}\right)^2 \gg \frac{4}{9}. \quad (5.31)$$

teremos que considerar a faixa da temperatura na qual é válida a aproximação do “bounce” de simetria esférica por o um “bounce” de simetria cilíndrica. Temos a condição

$$T \gg R_c(0)^{-1}. \quad (5.32)$$

Substituindo o raio crítico da bolha à temperatura zero, eq. (4.17), obtemos para a anterior condição

$$T \gg \varphi_0^2 \sqrt{2\frac{\sigma}{6!}} \left(f + \frac{f^2}{3}\right) \quad (5.33)$$

onde  $\nu a_0^2$  e  $f$  vem dados pelas eqs (4.8) e (4.44) respectivamente.

A taxa de decaimento do estado meta-estável calculado no presente capítulo é aplicável na faixa de temperaturas estabelecida pela eq. (5.33), mas que não seja tão grande de tal forma que invalide a nossa aproximação a um “loop”. A baixas temperaturas a taxa de decaimento pode ser razoavelmente aproximado pela taxa de decaimento a temperatura zero, eq. (4.23). Para temperaturas intermediárias entre estes dois limites o cálculo da taxa de decaimento é muito mais complicada, neste caso teríamos que resolver a equação para o “bounce” dependente do tempo imaginário e com condições periódicas de contorno

nesta variável. Na referencia [26] Aflleck tem mostrado, no caso da mecânica quântica simples, que o intervalo de temperatura que separa este dois limites é muito pequeno. Nos baseando neste resultado esperamos que os nossos resultados sejam validos numa ampla faixa da temperaturas tanto nas baixas temperaturas quanto nas altas.

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta tese estudamos em detalhe o fenómeno de nucleação de bolhas no modelo  $(\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \frac{\sigma}{6!}\varphi^6)_3$  à temperatura zero e finita. Na aproximação de parede fina, conseguimos encontrar a solução do “bounce” à temperatura zero e finita (no regime de altas temperaturas). Também obtivemos uma solução fechada para a ação Euclideana à temperatura zero e finita. Ao calcular o determinante funcional, à temperatura zero (finita), obtivemos duas contribuições: uma do interior da bolha e outra da sua parede. Interpretamos estas contribuições respetivamente, como sendo as correções quânticas (térmicas) a um “loop” do potencial clássico e as correções quânticas (térmicas) devido às flutuações ao redor da parede da bolha. A continuação fizemos o calculo a um “loop” do potencial efetivo a temperatura zero e finita. Finalmente, ainda na aproximação de parede fina, encontramos os modos negativos tanto a temperatura zero como a temperatura finita, mostrando que este modo é unico, como no caso da mecânica quântica ( $D = 1$ ).

Uma continuação natural desta tese é o estudo da taxa de nucleação de bolhas em sistemas fora do equilibrio térmico; *i.e.*, onde a taxa de decaimento depende do tempo. Para isto o formalismo do tempo imaginário não pode ser utilizado e deveremos fazer uso do formalismo do tempo real [27]. O problema da determinação da taxa de decaimento em

sistemas fora do equilíbrio térmico é um problema ainda em aberto e de grande interesse [28]. É claro que o estudo da taxa de decaimento em sistemas fora do equilíbrio é de importância fundamental, como por exemplo nos modelos cosmológicos, onde nas etapas primordiais o universo se encontra fortemente fora de equilíbrio térmico.

# Apêndice A

Avaliamos aqui a integral (5.19),

$$I(t) = \int_0^\infty dx \left[ x \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+t^2}} \right) \right]. \quad (\text{A.1})$$

Fazendo uso de

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(t)}{\partial(t^2)} &= \int_0^\infty dx \left[ x \frac{\partial}{\partial(t^2)} \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+t^2}} \right) \right] \\ &= \int_0^\infty dx \left[ x \frac{\partial}{\partial(x^2)} \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+t^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Integrando a expressão (A.2), obtemos

$$\frac{\partial I(t)}{\partial(t^2)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx^2 \frac{\partial}{\partial(x^2)} \ln \left( 1 - e^{-\sqrt{x^2+t^2}} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 - e^{-t} \right); \quad (\text{A.3})$$

de onde podemos escrever  $I(t)$  como sendo:

$$I(t) = I(0) - \frac{1}{2} \int_0^t d(t^2) \ln \left( 1 - e^{-t} \right) = I(0) - \int_0^t dt \left[ t \ln \left( 1 - e^{-t} \right) \right], \quad (\text{A.4})$$

o qual tambem pode ser escrito como

$$I(t) = I(0) - \int_0^t dt \left[ -\frac{t^2}{2} + t \ln(2) + t \ln \sinh \left( \frac{t}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Agora, fazendo uso da relação (3.21), com  $\frac{t}{2} = \pi y$ , obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(0) - \int_0^t \left[ -\frac{t^2}{2} + t \ln(2) + t \ln \left[ \frac{t}{2} \prod_{m=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{t^2}{(2\pi)^2 m^2} \right) \right] \right] \\ &= I(0) - \int_0^t \left[ -\frac{t^2}{2} + t \ln(t) \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{t^2}{(2\pi)^2 m^2} \right)^n \right] \\ &= I(0) + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \ln(t) + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \zeta(2n)}{n(n+1)(2\pi)^{2n}} (t^2)^{n+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\zeta(2n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^{2n}}. \quad (\text{A.7})$$

são as funções Zeta de Riemman.

# Referências

- [1] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 850.
- [2] V.A. Kusmin, M.E. shaposhnikov And I.I. Tkachev, Phys. Lett. **105B** (1981) 159.
- [3] A. Linde, Rep. Prog. Phys. **42** (1979) 489.
- [4] A.D. Sakharov, JETP Lett. **6** (1967) 24.
- [5] M.E. Shaposhnikov, Anomalous fermion number non-consevation, CERN preprint, CERN-TH.6304/92 (1992).
- [6] A.J. Leggett, S. Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **59** (1987) 1.  
R. Silbey and R.A. Harris, J. Phys. Chem. **93** (1989) 7062.
- [7] E. Brézin and G. Parisi, J. Stat. Phys. **19** (1978) 269.  
J.C. Le Guillon and J. Zinn-Justin eds., *Large-Order Behavior of Perturbation Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1990).  
Hiroshi Suzuki and Hirofumi Yasuta, hep-th/9709018.
- [8] J.D. Gunton, M. San Miguel and P.S. Sahni, *Phase Transition and Critical Phenomena*, edited by C. Domb and J.L. Lebowitz (Academic, London, 1983), Vol. 8.

- [9] J.S. Langer, *Ann. Phys. (N.Y.)* **41** (1967) 108; **54**, 258 (1969); *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 973.
- [10] M.B. Voloshin, I.Yu. Kobzarev and L.B. Okun, *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 644.
- [11] S. Coleman, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2929; C. Callan and S. Coleman, *ibid.* **16** (1977) 1762.
- [12] A. Linde, *Phys. Lett.* **70B** (1977) 306; *Nucl. Phys.* **B216** (1983) 421.
- [13] M. Gleiser, G. Marques and R. Ramos, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 1571.
- [14] J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (Capítulo VIII, Seção 9, Wiley, New York, 1952).
- [15] R.P. Feynman and A. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [16] Takashi Nakamura, Adrian Ottewill and Shin Takagi, *Ann. Phys.* **260** (1997) 9.
- [17] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (North-Holland, Amsterdam, Netherlands 1982).
- [18] Ashok Das, *Field Theory. A Path Integral Approach* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore, 1993).
- [19] Jean Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press. Oxford, 1996).
- [20] Albert Messiah, *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1964).

- [21] S. Coleman, V. Glasser and A. Martin, *Comm. Math. Phys.* **58** (1978) 211.
- [22] Stephen D.H. Hsu, *Phys. Lett. B* **294** (1992) 77.
- [23] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989).
- [24] N. J. Gunther, D. A. Nicole and D. J. Wallace, *J. Phys. A: Math. Gen.* **13** (1980) 1755 .
- [25] Mark Swanson, *Path Integrals and Quantum Processes* (Academic Press, INC. London, 1992).
- [26] Ian Affleck, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 388.
- [27] Michell Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996).
- [28] D. Boyanovsky, R. Holman and S. P. Kumar, *Phys. Rev. D* **56** (1997) 1958.  
D. Boyanovsky, R. Holman, D.S. Lee, J.P. Silva and A. Singh, *Nucl. Phys.* **B441** (1995) 595.

**“TEORIA DAS NUCLEAÇÕES EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS  
E TEMPERATURA ZERO E FINITA. UMA APLICAÇÃO DO MODELO  
 $(\lambda/4!\phi^4 + \sigma/6!\phi^6)^3$ ”**

**GABRIEL FLORES HIDALGO**

Tese apresentada no Centro Brasileiro de  
Pesquisas Física, fazendo parte da Banca  
examinadora os seguintes Professores:

Nami Fux Svaiter/CBPF

Rudnei de Oliveira Ramos/UERJ

Hugo Christiansen/CBPF

Adolfo Pedro Carvalho Malboisson/CBPF