

08/99

**Estudo da Difusão de Hadrões e  
Muons na Atmosfera usando a  
Teoria dos Semigrupos.**

*Alcides da Silva Gomes*

**TESE DE DOUTORADO**

**CBPF**

**Rio de Janeiro, 1999**

ESTUDO DA DIFUSAO DE HADRONS E MUONS  
NA ATMOSFERA USANDO A TEORIA DOS



1999/08

G633

\*020988\*

# Dedicatória

*A meus pais*

*Octávio Gomes (in memorian)*

*Abigail da Silva Gomes*

*A meus filhos*

*Leonardo, Márcia, Marisa e Jaqueline*

*A meu grande amigo e orientador*

*Prof. Helio Manoel Portella*

*A meu amigo e companheiro de todas as horas e situações*

*Prof. José Maria Dias da Silva, do Instituto de Física da UFF.*

*À Prof. Dr<sup>a</sup> Neusa Amato do CBPF, pelas sugestões e grande ajuda na revisão deste trabalho.*

*Ao Prof. Dr. Luiz Carlos Santos Oliveira pela co-orientação e discussões durante a realização deste trabalho.*

*À professora Dr<sup>a</sup> Regina Helena Cezar Maldonado que criou o Grupo de Altas Energias no I. Física/UFF onde iniciei meus estudos sobre a Física de Raios Cósmicos.*

*Ao Carlos Eduardo Campos Lima pela grande cooperação na implementação de programas computacionais desta tese.*

*A Francisca Valéria Fortaleza Gomes e Maria do Socorro Costa do Vale pelo excelente trabalho de digitação e por suas disponibilidades durante a realização do trabalho.*

*A Myriam Simões Coutinho secretária de Ensino do CBPF, vascaína convicta, Lena secretária do DNE e a Neuma pela grande ajuda na parte burocrática.*

*A Neudetti e ao Damasceno da Secretaria do Departamento do Instituto de Física da UFF pela grandiosa amizade.*

*Para terminar, dedico este trabalho a todos aqueles que viram mas não acreditaram.*

# Resumo

As equações de difusão dos hadrons são integradas analiticamente usando a teoria dos semigrupos. Considerando que as seções de choque hadron-núcleo crescem com a energia como  $\sigma = \sigma_0 E^\alpha$ , e que o espectro de energia da radiação cósmica primária é da forma  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , as soluções gerais se reduzem a expressões simplificadas. A solução encontrada é comparada aos fluxos integrais de hadrons obtidos experimentalmente através da exposição de câmaras de emulsões nucleares em altitudes de montanha. Dessa comparação estima-se o valor médio do coeficiente de inelasticidade, que resulta ser  $\langle K \rangle = 0,63$  para um valor de  $\alpha = 0,06$  e de  $\sigma_0 = 300 \text{ mb}$ . O fluxo zenital de muons e a razão  $\mu^+/\mu^-$  são derivados a partir desses fluxos hadrônicos para quaisquer valores de energia e de ângulos zenitais. As soluções analíticas obtidas aparecem como expressões compactas em termos de operadores expansionais. Esses últimos são decompostos num produto de operadores exponenciais ordinários através da técnica de ordenação de operadores exponenciais desenvolvida por R. Feynman. Ao nível do mar, nossos resultados são comparados aos calculados por outros autores e aos obtidos experimentalmente. Os fluxos muônicos do presente trabalho são aproximadamente (3-6)% maiores que os obtidos por Lipari, e 5% menores que os encontrados por A.V. Butkevich. A diferença em relação aos dados experimentais é de 5%. A razão  $\mu^+/\mu^-$ , por nós calculada, na direção vertical, está em ótima concordância com a obtida pelos autores acima citados, porém desvia-se acentuadamente dos dados experimentais. Essa discrepância desaparece quando incluímos em nossos resultados os efeitos nucleares que aparecem nas reações núcleo-núcleo.

# Summary

We solve the one-dimensional diffusion equation for hadrons in the atmosphere using the semigroup theory. We show that the general solutions become simplified expressions when we assume a power-law dependence on energy for the  $p$ -air inelastic cross-section,  $\sigma = \sigma_0 E^\alpha$ , and for the primary energy spectrum,  $N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$ . Our solution is compared with the hadron fluxes of emulsion chamber data: we find a good consistency, with an average inelasticity around  $\langle K \rangle = 0.63$ , with the best fit of the coefficient  $\alpha = 0.06$ . We also calculated the zenithal muon flux originated by a hadronic shower in the atmosphere. These muon intensities and the muon charge ratio  $\mu^+/\mu^-$  are expressed in terms of Expansional Operators; these operators are decomposed into a product of some simple exponential by using the Feynman-like procedure of ordered exponential operators. Our calculations of the muon spectra and the charge ratio  $\mu^+/\mu^-$  are based on the continuous energy loss approximation and for a general type of atmosphere.

Our muon flux at sea level agrees very well with the experimental data and with others analytical calculations (Lipari, Butkevich). Our vertical charge ratio of muons at sea level is also compared with experimental data and with results of the authors mentioned above.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>A Componente Hadrônica da Radiação Cósmica</b>	<b>7</b>
2.1	Equação de Difusão dos Nucleons na Atmosfera . . . . .	8
2.2	Equação de Difusão dos Mésons na Atmosfera . . . . .	11
2.3	Caso Particular . . . . .	14
2.4	Comparação com Dados Experimentais . . . . .	16
<b>3</b>	<b>A Componente Muônica da Radiação Cósmica</b>	<b>27</b>
3.1	Equação de Difusão dos Hadrons na Atmosfera . . . . .	29
3.2	Equação de Difusão dos Muons na Atmosfera . . . . .	32
3.3	Caso Particular . . . . .	35
3.4	Comparação com dados experimentais . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Razão <math>\mu^+/\mu^-</math></b>	<b>49</b>
4.1	Equações de Difusão dos Neutrons e Protons . . . . .	51

4.2	Equações de Difusão dos Pions Carregados na Atmosfera . . . . .	54
4.3	Equações de Difusão dos Kaons Carregados ( $K^\pm$ ) na Atmosfera . . . . .	57
4.4	Comparação com Dados Experimentais . . . . .	62
5	Discussões e Conclusões	68
Apêndice A - Montagem da Equações de Difusão dos Nucleons e dos		
	Mésons ( $\pi^\pm, k^\pm$ )	73
Apêndice B – Resolução da Equação de Difusão dos Mésons $M$ Usando A		
	Teoria do Semigrupos	77
Apêndice C – Operador Expansional		
		83
Apêndice D – Modelo para a Atmosfera Terrestre		
		92
Referências		
		98

## Legendas das Figuras

**Figure 2.1** – Seção de Choque Inelástica das reações  $p$ -núcleo de ar em função da energia. Dados experimentais são das referências [29] para  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  e  $\blacklozenge$ , [30] para  $\circ$ . Quatro linhas cheias são mostradas na figura para  $a = 0; 0,03; 0,06$  e  $0,10$  da fórmula  $\sigma(E) = 300(E/TeV)^a$ .

**Figure 2.2** – Espectro Integral de Hadrons em Chacaltaya. ( $\bullet$  ref. [24]). As três linhas mostradas na figura representam o fluxo integral de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $a = 0; 0,06; 0,10$ .

**Figure 2.3** – Espectro Integral de Hadrons em Kanbala. ( $\bullet$  ref. ([24])). As três linhas representam o fluxo de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $a = 0; 0,06; 0,10$ .

**Figure 2.4** – Espectro Integral de Hadrons em Fuji. ( $\bullet$  ref. ([24])). As três linhas da figura são os fluxos integrais de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $a = 0; 0,06; 0,10$ .

**Figure 2.5** – Espectro Integral de Hadrons em Chacaltaya. ( $\bullet$  ref. ([24])). A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos os fluxos foram calculados para  $a = 0,06$ .

**Figure 2.6** – Espectro Integral de Hadrons em Kanbala. ( $\bullet$  ref. ([24])). A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos os fluxos são para  $a = 0,06$ .



**Figure 2.7 – Espectro Integral de Hadrons em Fuji.** (• ref. ([24])). A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos são calculados para  $a = 0,06$ .

**Figure 3.1 – Perda de Energia dos muons na atmosfera.**

A linha pontilhada corresponde a cálculos feitos por Osborne – ref. [51]. As demais são cálculos realizados por Maeda – ref. [38] e usados em nossos cálculos.

**Figure 3.2 – Relação Geométrica entre o ângulo zenital  $\theta$  na profundidade  $t_0$  e o ângulo zenital  $\theta^*(t)$  na profundidade  $t$ .**  $R_T$  é o raio da Terra e  $h(t)$  é a altura da profundidade atmosférica  $t$  ao nível de detecção  $t_0$ .

**Figure 3.3 – Fluxo Vertical de muons ao nível do mar.**

•Allkofer et al. – Ref. [41]; — Fluxo calculado neste trabalho com ionização e decaimento do muon; - - - Fluxo calculado sem considerar perdas por ionização e decaimento.

**Figure 3.4 – Fluxo Vertical de muons ao nível do mar.**

Comparação entre os fluxos verticais de muons ao nível do mar.

•Allkofer et al. – Ref. [41]; — Fluxo de muons calculado por P. Lipari – Ref. [42];  
- - - Fluxo de muons calculado neste trabalho.

Figure 3.5 - Fluxo zenital de muons ao nível do mar ( $\theta = 89^0$ ).

•Matsumo et al. - Ref. [43]; — Fluxo de muons calculado por P. Lipari - Ref. [42];  
- - - Fluxo de muons calculado neste trabalho.

Figure 3.6 - Razão das contribuições dos decaimentos do  $K^\pm$  e do  $\pi^\pm$  para o fluxo de muons ao nível do mar, para  $\theta = 0$ .

▲L. Volkova - Ref. [44]; •P. Lipari - Ref. [42]; ■ - Nossos Cálculos.

Figure 3.7 - Fluxo Horizontal de muons ao nível do mar para três valores dos ângulos zenitais. •  $\cos(\theta) = 0$ ; ▲  $\cos(\theta) = 0.4$ ; ■  $\cos(\theta) = 1.0$

Figura 4.1 - Razão  $n/p$  versus profundidade atmosférica.

(a) Cálculo efetuado por P. Lipari - Ref. [42]; (b) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley - Ref. [45]; (c) Resultado de nossos cálculos.

Figura 4.2 - Razão  $\mu^+ / \mu^-$  - ao nível do mar para  $\theta = 0$ .

•MARS, ▲ Alkofer et al., et al., ▲ Baxendale et al. e ■ Ashley II et al. - Ref. [48]; a) Cálculo feito por P. Lipari - Ref. [42]; b) Resultado do presente cálculo; c) Cálculo feito por D.P. Bhattacharyya - Ref. [49]; d1) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley - Ref. [45] - Alternativa 1; d2) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley - Ref. [45] - Alternativa 2.

Figura 4.3 - Razão  $\mu^+ / \mu^-$  ao nível do mar para  $\theta = 89^0$ ; — Cálculos efetuados por P. Lipari - Ref. [42]; — Resultado do presente cálculo.

# Capítulo 1

## Introdução

O desenvolvimento dos chuviros de partículas na atmosfera terrestre originados da interação entre núcleos (ou nucleons) da radiação cósmica primária com núcleos dos elementos químicos presentes na atmosfera, tem sido estudado desde inícios da década de 30.

O número médio de partículas secundárias que surgem numa cascata em diferentes profundidades atmosféricas, com diferentes ângulos zenitais e dentro de um intervalo de energia, é obtido resolvendo-se as equações de difusão dessas partículas na atmosfera. Suponhamos que se conheça o número médio de partículas e suas distribuições de energia em uma profundidade atmosférica  $t$ . Consideremos um elemento “ $dt$ ” suficientemente pequeno de modo que ao atravessá-lo a partícula não sofra interação ou colida uma única vez. As distribuições de energia e o número médio de partículas em  $(t + dt)$  podem, então, ser obtidos. A relação entre o número de partículas em  $t$  e em  $t + dt$  é expressa

matematicamente pela equação de difusão dessas partículas na atmosfera.

O objetivo deste trabalho é resolver analiticamente as equações de difusão dos hadrons no ar, e a partir delas, derivar o fluxo de muons ao nível do mar.

Um núcleo da radiação cósmica primária interage com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera produzindo um número muito grande de partículas secundárias das quais os píons são a maioria. Na região de energia de centenas de  $GeV$  até  $150 TeV$  os píons correspondem a cerca de 70% do total das partículas secundárias [1]. A medida que a energia aumenta outras partículas secundárias como kaons, lambdas, hyperons etc. vão se tornando importantes na obtenção correta dos fluxos dos hadrons e dos muons em diferentes profundidades atmosféricas.

As partículas neutras, em sua maioria, desintegram-se em fótons que vão originar a cascata eletromagnética, enquanto que as partículas carregadas interagem sucessivamente perdendo energia que é usada na produção de novos hadrons. Quando estas ficam com energia aproximadamente igual à sua constante de desintegração no ar, elas então decaem em muons, que por interagirem fracamente com a matéria vão constituir a grande maioria de partículas ao nível do mar.

O desenvolvimento da Eletrodinâmica Quântica permitiu que a componente eletromagnética fosse exaustivamente estudada e explicada por vários autores. Em 1937, Carlson e Oppenheimer [2] e independentemente Bhabha e Heitler [3] obtiveram soluções aproximadas para os fluxos de elétrons e fótons usando as seções de choque para a formação de pares e de *bremstrahlung* calculadas por Bethe-Heitler [4]. Logo a seguir, Landau e

Rumer [5], usando a transformada de Mellin pela primeira vez, obtiveram a solução exata das equações integro-diferenciais que descrevem a cascata eletromagnética desprezando, entretanto, o termo da perda de energia dos elétrons por ionização.

A partir desse trabalho, a transformada de Mellin tornou-se a ferramenta matemática usual na obtenção dos fluxos das diferentes componentes da radiação cósmica secundária.

O método da transformada de Mellin, entretanto, fornece soluções reais representadas por uma integral de contorno no plano complexo e que só pode ser avaliada exatamente em alguns casos particulares. Em casos mais gerais deve-se usar alguns métodos de aproximação para estimar tal integral, como por exemplo, o Método do Ponto de Sela.

Em fins da década de 40, começaram a surgir os primeiros trabalhos teóricos sobre componente nuclearmente ativa da radiação cósmica [6, 7]. Estes trabalhos resolveram as equações integro-diferenciais que descrevem a difusão dos hadrons no ar, usando a transformada de Mellin, e obtiveram soluções exatas para o problema. Nesses cálculos, o espectro de energia da radiação cósmica primária foi considerado da forma  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , o livre percurso médio de interação dos hadrons no ar suposto constante e as distribuições de energia das partículas secundárias foram consideradas como funções homogêneas das energias das partículas secundárias e primárias na interação.

Na década de 70, F.M. Castro [8, 9] resolveu as equações da difusão dos hadrons na atmosfera usando o método das aproximações sucessivas e obtendo as mesmas soluções encontradas pelos autores citados anteriormente. A vantagem do método matemático por ele empregado é que as soluções são colocadas na forma de uma série podendo-se

verificar facilmente, na maioria dos casos, a convergência da solução. Ele ainda conseguiu generalizar os resultados anteriores, considerando um espectro primário na forma de uma função contínua, positiva e limitada,  $G(E)$ .

H.M. Portella [10], posteriormente, obteve soluções exatas para o fluxo de nucleons levando-se em conta a variação da seção de choque hadron-núcleo com a energia, mostrando ainda que a lei que governa a interação dos nucleons na atmosfera é binomial.

J. Bellandi Filho [11], também conseguiu obter soluções alternativas usando o Método das Expansões de Feynman.

O objetivo deste trabalho é mostrar que a teoria dos semi grupos pode, também, ser usada para resolver as equações integrais que descrevem a difusão dos hadrons no ar, obtendo-se soluções formais que em alguns casos particulares fornecem as soluções encontradas por outros autores [12, 13]. O processo de decomposição das expansões desenvolvido por R. Feynman [14] foi também empregado em nossos cálculos com o objetivo de obter soluções particulares do problema.

Atualmente, há várias simulações que permitem obter o número de partículas e as distribuições angulares e de energia das diferentes componentes da radiação cósmica secundária, em diferentes profundidades atmosféricas, para vários ângulos zenitais e dentro de um intervalo de energia. Os métodos analíticos, entretanto, são ainda muito usados, pois, permitem obter com grande precisão as relações entre os fluxos de hadrons com os de muons e de neutrinos e permitem também o estudo sistemático da influência dos diferentes parâmetros e distribuições sobre os fluxos das várias componentes da radiação cósmica.

Assim sendo, um cálculo analítico rigoroso é de grande utilidade na obtenção do fluxo de muons que será posteriormente usado no cálculo dos fluxos dos neutrinos atmosféricos. O estudo desses neutrinos atmosféricos é, atualmente, de grande interesse, devido à discrepância existente entre as razões  $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$  calculadas teoricamente, e as obtidas experimentalmente com detectores de Cerenkov. Nos chamados “Eventos Contidos”, a razão  $R_{\text{exp}}/R_{\text{teo}}$  é aproximadamente 0,54 no *IMB3* e 0,60 para *Kamiokande*[15].

A influência do espectro de energia e da composição química da radiação cósmica primária, das seções de choque das interações hadron-núcleo, do modelo da atmosfera, do coeficiente de inelasticidade e dos efeitos geomagnéticos sobre o fluxo de muons, é de fundamental importância para se poder estudar, com a precisão requerida, a discrepância acima mencionada.

Este trabalho tem duas finalidades principais:

- a) Um cálculo rigoroso dos fluxos de hadrons e de muons que serão utilizados na obtenção do fluxo dos neutrinos atmosféricos, com o intuito de se estudar a Anomalia dos Neutrinos Atmosféricos.
- b) Esses fluxos muônicos calculados ao nível do mar, serão usados como ponto de partida no estudo de suas difusões em rochas. Esses cálculos serão usados na obtenção do “Event-Rate” do detector *Micro-Urca* que está em fase de implantação no *IME/RJ*.

Além desses dois objetivos principais, esses fluxos muônicos bem como a razão  $\mu^+/\mu^-$  podem ser usados na obtenção de informações sobre a composição química e o espectro

de energia da radiação cósmica primária. Uma estimativa da energia do primário que originou o fluxo de muons ao nível do mar, bem como em experimentos subterrâneos, é também uma das possibilidades permitidas pelos cálculos apresentados neste trabalho.

A influência das partículas de grande sabor como charme, beleza, etc., no fluxo de muons se faz sentir para energias acima de  $80 \text{ TeV}$  [16]. Um cálculo mais rigoroso sobre essas influências, pode também ser feito a partir de nossos resultados. Este trabalho de doutoramento se dividiu em dois tópicos essenciais.

- Obtenção do coeficiente de inelasticidade dos nucleons através da comparação entre nossos cálculos e fluxos integrais de hadrons obtidos com câmaras de Emulsões Nucleares em altitudes de montanha [17]. Esse resultado é mostrado em detalhes no capítulo 2.
- Obtenção do fluxo zenital de muons e da razão  $\mu^+/\mu^-$  ao nível do mar para diferentes valores de energia e de ângulo zenital [18]. Nesses cálculos foram usados dois tipos de atmosfera. Para  $h \geq 11 \text{ Km}$  usamos a atmosfera isotérmica e para  $h < 11 \text{ Km}$  usamos a U.S. Standard. As influências das perdas de energia dos muons no ar e da curvatura da Terra sobre os fluxos muônicos foram também estimadas. O resultado do coeficiente de inelasticidade obtido no capítulo 2 é usado no cálculo do fluxo dos muons e da razão  $\mu^+/\mu^-$  que aparecem nos capítulos 3 e 4.



## Capítulo 2

# A Componente Hadrônica da Radiação Cósmica

As interações hadrônicas a altas energias ( $E_{lab} \geq 1\text{TeV}$ ) serão estudadas, aqui, através das equações integro-diferenciais do tipo Volterra que descrevem a difusão dos hádrons na atmosfera terrestre. Como resultado dessas interações (nucleons e núcleos da radiação cósmica primária com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera) formam-se hadrons (produção múltipla). Essa produção múltipla teoricamente prevista pela primeira vez por Gleb Wataghin em 1940 é geralmente estudada com a ajuda de modelos fenomenológicos como por exemplo *Scaling* de Feynman [19], *Dual Parton Model* [20], *Quark-Gluon String Model* [21], *Fireball Model* [22] ou através de resultados obtidos em aceleradores, extrapolados para a região de energia dos raios cósmicos.

Neste capítulo as equações de difusão dos nucleons e dos mésons na atmosfera serão integradas com o uso do método dos Semigrupos, e nossos resultados serão comparados com, os fluxos integrais de hadrons obtidos com câmaras de emulsões nucleares e chumbo em altitudes de montanha. Dessa comparação consegue-se estudar algumas características das interações hadrônicas a altas energias, como o crescimento com a energia da seção de choque inelástica dessas interações, o valor médio do coeficiente de inelasticidade, *etc.*

Um nucleon (ou núcleo) da radiação cósmica primária interage com núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera ( $N_2, O_2$ ) produzindo uma quantidade muito grande de hadrons (nucleons, antinucleons, pions, kaons, partículas charmosas, *etc.*) dos quais 70% são pions (na região de energia  $1 \text{ TeV} \leq E_{lab} \leq 100 \text{ TeV}$ ) [1]. Os pions carregados antes de decaírem em muons interagem novamente produzindo novos hadrons constituindo a cascata hadrônica enquanto que os pions neutros decaem instantaneamente ( $\tau \cong 10^{-16} \text{ s}$ ) em dois fótons que vão produzir a cascata eletromagnética.

## 2.1 Equação de Difusão dos Nucleons na Atmosfera

A equação integrodiferencial que descreve a difusão dos nucleons na atmosfera é:

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\frac{N(t, E)}{\lambda(E)} + \int_E^\infty \frac{N(t, E')}{\lambda(E')} f_{NN}(E, E') \frac{dE'}{E'} \quad (2.1)$$

A solução desta equação deve satisfazer a condição de contorno

$$N(0, E)dE = G(E)dE \quad (2.2)$$

onde  $G(E)dE$  representa o espectro diferencial de energia dos nucleons no topo da atmosfera ( $t = 0$ ). A função  $G(E)$  é suposta ser contínua, positiva e limitada no intervalo  $I = [E, \infty)$  para  $E \geq 0$ .

$\lambda(E)$  é o livre percurso médio de interação dos nucleons na atmosfera ( $g/cm^2$ ).

$f_{NN}(E, E')$  representa a distribuição de elasticidade ( $\eta = E/E'$ ) dos nucleons secundários com energia  $E$  originados de um nucleon de energia  $E'$ .

$N(t, E)dE$  é o fluxo diferencial de nucleons com energia entre  $E$  e  $E + dE$  na profundidade atmosférica inclinada  $t$ .

Colocando a equação (2.1) em termos de  $\eta = E/E'$  obtemos

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\frac{N(t, E)}{\lambda(E)} + \int_0^1 \frac{N(t, E/\eta)}{\lambda(E/\eta)} f_{NN}(\eta) d\eta/\eta \quad (2.3)$$

O primeiro termo do lado direito representa o fluxo de nucleons que desaparecem no intervalo  $dt$ . O segundo termo é o fluxo dos nucleons que interagem uma única vez em  $dt$  chegando à profundidade de  $t + dt$  com energia  $E$ .

A montagem dessa equação é mostrada no Apêndice A.

Essa equação tem sido solucionada através do método da Transformada de Mellin [5, 6, 7] que apresenta o inconveniente de trabalhar no plano complexo, onde somente em alguns casos especiais podem ser integradas exatamente.

Como já mencionado na introdução deste capítulo vamos usar o método dos semi-

grupos que já foi utilizado em alguns problemas de Física, como por exemplo, na Mecânica Quântica, na transmissão de calor, *etc.*

Para resolver a equação (2.3) vamos introduzir o operador  $\hat{A}_N$  na forma

$$\hat{A}_N N(t, E) = - \left( 1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma} \right) \frac{N(t, E)}{\lambda(E)} \quad (2.4)$$

onde  $\hat{\sigma}$  é um operador usado previamente por F.M.O. Castro [8] para resolver a difusão dos nucleons na atmosfera para  $\lambda = \text{constante}$  e é definido como:

$$\hat{\sigma} N(t, E) = \frac{N(t, E/\eta)}{\eta} \quad (2.5)$$

para  $\eta \geq \eta_{min} > 0$ .

Usando as definições (2.4) e (2.5) na equação (2.3) obtemos

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\hat{A}_N N(t, E) \quad (2.6)$$

cuja solução é

$$N(t, E) = e^{-\hat{A}_N t} N(0, E) \quad (2.7)$$

Os operadores  $G_t = e^{-t\hat{A}}$ , para  $t \geq 0$ , são elementos do semigrupo  $\{G_t\}$  [10] com

$$\begin{aligned} G_t G_r &= G_{(t+r)} \quad t, r \geq 0 \\ G_{t=0} &= \mathbb{I} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $G_0$  é o operador identidade e  $\hat{A}$  são os geradores desse semigrupo. O operador  $\hat{A}$  é a soma de 2 operadores

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\lambda(E)} \quad \text{e} \quad \hat{A}_2 = \left( \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma} \right) \frac{1}{\lambda(E)} \quad (2.9)$$

Em geral esses operadores não comutam e só no caso especial  $\lambda(E) = \lambda = \text{constante}$  temos

$$e^{(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)} = e^{\hat{A}_1} \cdot e^{\hat{A}_2} \quad (2.10)$$

Para o caso geral devemos considerar a ordem dos fatores no desenvolvimento da  $\exp(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$  numa série de potências

$$G_t = e^{-t(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} (\hat{A}_1 + \hat{A}_2)^n \quad (2.11)$$

## 2.2 Equação de Difusão dos Mésons na Atmosfera

A equação de difusão dos mésons,  $M(t, E)$ , na atmosfera é descrita pela equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t, E)}{\partial t} = & -\frac{M(t, E)}{\lambda_M(E)} + \int_E^{\infty} \frac{M(t, E')}{\lambda_M(E')} f_{MM}(E, E') \frac{dE'}{E'} + \\ & + \int_E^{\infty} \frac{N(t, E')}{\lambda(E')} f_{NM}(E, E') \frac{dE'}{E'} - \\ & - \frac{M(t, E)}{\lambda_{\text{dec}}(\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}))} \end{aligned} \quad (2.12)$$

com a condição de contorno

$$M(0, E) = 0 \quad (2.13)$$

O 1<sup>o</sup> termo do lado direito da equação (2.12) representa os mésons que desaparecem em  $dx$ , os 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> termos representam os fluxos de mesons originados das colisões méson-méson e nucleon-méson e o 4<sup>o</sup> termo representa os mésons que desaparecem em  $dx$  por decaimento em muons.

O 4<sup>o</sup> termo pode ser desprezado em relação aos demais, pois, nossos cálculos serão comparados aos fluxos integrais de hadrons obtidos com câmaras de emulsões nucleares expostas em altitudes de montanha que tem uma  $E_{limiar} \simeq 1\text{TeV}$ .  $\lambda_M(E)$  é o livre percurso médio de interação dos mésons na atmosfera ( $g/cm^2$ ),  $f_{NM}(E, E')$  e  $f_{MM}(E, E')$  são, respectivamente, os espectros dos mésons produzidos nas interações nucleon-núcleo de ar e méson-núcleo do ar e  $M(t, E)dE$  representa o fluxo de mésons com energia entre  $E$  e  $E + dE$  na profundidade atmosférica inclinada  $t(g/cm^2)$ .

Considerando que a lei do Scaling seja válida nessa região de energia, a equação (2.12) com a condição de contorno (2.13) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t, E)}{\partial t} &= -\frac{M(t, E)}{\lambda_M(E)} + \int_0^1 \frac{N(t, E/x)}{\lambda(E/x)} f_{NM}(x) \frac{dx}{x} + \\ &+ \int_0^1 \frac{M(t, E/x)}{\lambda_M(E/x)} f_{MM}(x) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$M(0, E) = 0 \quad (2.15)$$

onde  $x$ , é a variável de Feynman que para altas energias pode ser colocada como  $x \sim E/E'$ .

Como no caso da equação de difusão dos nucleons, a fim de resolver a equação (2.14) vamos introduzir os operadores

$$\hat{B}_N N(t, E) = \left( \int_0^1 f_{NM}(x) dx \hat{\sigma}_N \right) \frac{N(t, E)}{\lambda(E)} \quad (2.16)$$

$$\hat{B}_M M(t, E) = - \left( 1 - \int_0^1 f_{MM}(x) dx \hat{\sigma}_M \right) \frac{M(t, E)}{\lambda_M(E)} \quad (2.17)$$

$\hat{B}_N$  e  $\hat{B}_M$  acima definidos operam somente na variável,  $E$ , e tem para domínio o conjunto de funções positivas  $N(t, E)$  e  $M(t, E)$  contínuas e limitadas com respeito a  $E$  no intervalo  $0 < E_{min} < E < \infty$ .

Se supormos que  $\frac{1}{\lambda_M(E)}$  pertence ao mesmo domínio de  $\hat{\sigma}_M$ , a equação (2.14) toma a forma

$$\frac{\partial M(t, E)}{\partial t} = \hat{B}_N N(t, E) + \hat{B}_M M(t, E) \quad (2.18)$$

A solução formal da equação de operadores (2.14) que satisfaz a condição de contorno (2.15) é

$$M(t, E) = \int_0^t e^{-(t-z)\hat{B}_M} \hat{B}_N N(z, E) dz \quad (2.19)$$

De maneira análoga ao apresentado para o caso dos nucleons os operadores  $\hat{H}_t = e^{-t\hat{B}_M}$  para  $t \geq 0$  são os elementos do semigrupo  $\{H_t\}$ . Os geradores  $\hat{B}_M$  desse semigrupo são a soma de 2 operadores  $\hat{B}_{M_1} = -\frac{1}{\lambda_M(E)}$  e  $\hat{B}_{M_2} = \left( \int_0^1 f_{MM}(x) dx \hat{\sigma}_M \right) \frac{1}{\lambda_M(E)}$  [10].

Esses operadores geralmente não comutam e devemos novamente considerar a ordem dos fatores na expansão de  $\hat{H}_t$  numa série de potencias.

## 2.3 Caso Particular

Considerando, agora, que o espectro de energia dos raios cósmicos primários tem a forma  $G(E)dE = N_0E^{-(\gamma+1)}dE$  e que os livres percursos médios dos nucleons e mesons decrescem com a energia nas formas  $\lambda(E) = \lambda_0E^{-\alpha}$  e  $\lambda_M(E) = \lambda_{M_0}E^{-\alpha}$  (onde a dependência com a energia dos livres percursos médios dos nucleons e mésons é suposta a mesma), as soluções (2.7) e (2.19) ficam

$$N(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{t}{\lambda(E)} \right)^n I_N(\gamma, \alpha, n) N(0, E) \quad (2.20)$$

com

$$I_N(\gamma, \alpha, n) = \prod_{j=1}^n \left( 1 - \langle \eta^{\gamma-\alpha_j} \rangle \right) \quad (2.21)$$

e

$$\langle \eta^{\gamma-\alpha_j} \rangle = \int_0^1 f_{NM}(\eta) d\eta \cdot \eta^{\gamma-\alpha_j} \quad (2.22)$$

$$M(t, E) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dz (-1)^k \frac{(t-z)^k}{k!} \left( \hat{B}_M \frac{1}{\lambda_M(E)} \right)^k \cdot \hat{B}_N N(t, E) \quad (2.23)$$

onde,  $\hat{B}_N N(t, E)$  é a razão de produção dos mésons secundários originados da reação nucleon-núcleo do ar e é representado por

$$\hat{B}_N N(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{z^n}{\lambda(E)^{n+1}} I_N(\gamma, \alpha, n) Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) \cdot N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (2.24)$$

onde  $Z_{NM}(\gamma, \alpha, n)$  é o espectro de energia dos mésons originados das interações nucleon-núcleo do ar. Para  $\lambda(E) = \lambda_0 E^{-\alpha}$  ele assume a forma

$$Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) = \int_0^1 x^{\gamma-(n+1)\alpha} f_{NM}(x) dx \quad (2.25)$$



Se  $\lambda(E)$  e  $\lambda_M(E)$  tiverem a mesma dependência funcional com a energia [23] assim  $\lambda_M(E) = \omega_M \lambda(E)$  com  $\omega_M = \text{constante}$  a expressão (2.23) assume a forma simplificada:

$$M(t, E) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dz \frac{(-1)^k (-1)^n}{k! n!} \left( \frac{t-z}{\lambda_M(E)} \right)^k \cdot \left( \frac{z}{\lambda(E)} \right)^n Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) I_N(\gamma, \alpha, n) I_{MM}(\gamma, \alpha, k, n) \cdot \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda(E)} \quad (2.26)$$

onde

$$I_{MM}(\gamma, \alpha, k, n) = \prod_{i=1}^k (1 - \langle x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} \rangle) \quad (2.27)$$

com

$$\langle x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} \rangle = \int_0^1 f_{MM}(x) x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} dx \quad (2.28)$$

A obtenção da expressão (2.26) é mostrada em detalhes no Apêndice B. No caso especial quando  $\alpha = 0$  as expressões (2.21), (2.25) e (2.27) tomam a forma

$$I_N(\gamma, \alpha, n) = (1 - \langle \eta^\gamma \rangle)^n, \quad (2.29)$$

$$Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) = \int_0^1 f_{NM}(x) x^\gamma dx \quad (2.30)$$

e

$$I_{MM}(\gamma, \alpha, n, k) = \int_0^1 f_{MM}(x) x^\gamma dx \quad (2.31)$$

e as expressões (2.20) e (2.26) reduzem-se àquelas correspondentes ao caso de  $\lambda$  e  $\lambda_M$  constantes.

$$N(t, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L}. \quad (2.32)$$

e

$$M(t, E) = \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)} Z_{NM}}{\lambda} \frac{e^{-t/L_M} - e^{-t/L}}{\frac{1}{L} - \frac{1}{L_M}} \quad (2.33)$$

onde,  $L$  e  $L_M$  são os livres percursos médios de absorção dos nucleons e mésons na atmosfera.

## 2.4 Comparação com Dados Experimentais

Nesta seção apresentaremos uma comparação entre os fluxos integrais de hádrons (nucleons + pions) por nós obtidos e os correspondentes fluxos encontrados experimentalmente com câmaras de emulsões nucleares em Chacaltaya ( $t = 540 \text{ g/cm}^2$ ), Fuji ( $t = 650 \text{ g/cm}^2$ ) e Kanbala ( $t = 520 \text{ g/cm}^2$ ) [24].

Para efetuarmos essa comparação necessitamos levar em conta alguns elementos essenciais que entram no cálculo dos fluxos como por exemplo, inelasticidade dos raios  $\gamma$ , distribuição de elasticidade dos nucleons, espectro de energia dos raios cósmicos primários, distribuição de energia dos pions secundários e crescimento com a energia da seção de choque inelástica nucleon-núcleo do ar. A seguir vamos tecer considerações sobre cada um dos elementos acima mencionados.

### a) Inelasticidade dos raios $\gamma$

Nos experimentos com câmaras de emulsões nucleares, os hádrons são detectados como chuviscos de elétrons. Assim, as energias medidas são convertidas em energias dos hádrons

por

$$E_h \times K_\gamma = E_{obs}. \quad (2.34)$$

onde  $K_\gamma$  é a inelasticidade média dos raios  $\gamma$ . Vamos usar o valor  $K_\gamma = 0.25$  [25].

### b) Distribuição de elasticidade dos nucleons

A distribuição de elasticidade dos nucleons na atmosfera usada em nossos cálculos será representada pela forma arbitrária  $f_{NN}(\eta) = (1 + \beta)(1 - \eta)^\beta$  no intervalo de  $0 - 1$  [26]. A distribuição uniforme corresponde ao caso  $\beta = 0$ .

### c) Espectro de Energia dos Raios Cósmiticos Primários

No topo da atmosfera os prótons constituem a maioria das partículas da radiação cósmica. O número de núcleos presentes nessa radiação não pode, entretanto, ser desprezado.

Em nossos cálculos vamos usar o espectro primário apresentado por Bhattacharyya [27], que analisou dados experimentais obtidos com câmaras de emulsões nucleares expostas em balões. Os nucleons que constituem os núcleos são supostos interagirem independentemente com os núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera (Modelo da Superposição). O espectro de nucleons no topo da atmosfera encontrado pelo autor é  $N(0, E) = 2,24E^{-2.7}(cm^2.s.st.GeV/nucleon)^{-1}$ .

#### d) Distribuição de energia fracionária dos pions secundários

Nós vamos considerar em nossos cálculos que somente os pions contribuem para o fluxo integral de hadrons negligenciando as partículas de frações menores como mésons pesados, antinucleons *etc.*

Os espectros de energia desses pions calculado no sistema de laboratório,  $f_{NM}(x)$  e  $f_{MM}(x)$  são obtidos de dados de aceleradores [28] assumindo uma produção onde vale a lei de *Scaling*. As expressões desses espectros são:

$$f_{NM}(x) = 1.04 \frac{1-x}{x} e^{-5x}$$

para  $N + ar \rightarrow \pi^\pm + X$  e

$$f_{MM}(x) = \frac{1.3}{x} \left(1 + \frac{x}{0.45}\right)^{-3} + \frac{0.16}{x} e^{2(x-1)} \quad (2.35)$$

para  $\pi^\pm + ar \rightarrow \pi^\pm + X$ .

Ambas as distribuições são obtidas para um só estado do pion carregado produzido nas interações.

### e) Seção de Choque Inelástica ( $p$ -ar)

Várias formas funcionais tem sido propostas para representar o comportamento do crescimento da seção de choque com a energia. Em nossos cálculos vamos usar a seguinte dependência funcional

$$\sigma = \sigma_0(E/\text{TeV})^\alpha ,$$

com  $\sigma_0 = 300mb$

Na figura 2.1 as seções de choque inelásticas das interações entre prótons e núcleos de elementos químicos presentes na atmosfera são plotadas em função da energia. Os dados são de experimentos de chuviros atmosféricos extensos [29] e de aceleradores [30]. Os últimos dados, as seções de choque ( $p - p$ ) e ( $\bar{p} - p$ ) são convertidas em  $\sigma(p\text{-ar})$  pela fórmula empírica de Hillas [31]. Quatro curvas aparecem na figura para quatro valores diferentes do coeficiente  $\alpha = 0,03, 0,04, 0,06$  e  $0,10$ . O melhor ajuste se dá para  $\alpha = 0,06$  e  $\sigma_0 = 300mb$ .

As figuras (2.2), (2.3) e (2.4), mostram a comparação de nossa solução com os fluxos integrais de hadrons medidos em Chacaltaya ( $t = 540 \text{ g/cm}^2$ ), Kanbala ( $t = 520 \text{ g/cm}^2$ ) e Fuji ( $t = 650 \text{ g/cm}^2$ ), respectivamente. Três curvas são desenhadas nas figuras para  $\alpha = 0, 0,06$  e  $0,10$  e considerando uma distribuição de elasticidade dos nucleons uniforme no intervalo de 0 a 1 ( $\langle K = 0,5 \rangle$ ). Vemos que os dados experimentais se encontram entre as curvas de  $\alpha = 0,06$  e  $0,10$  se afastando do melhor valor de  $\alpha = 0,06$ , que melhor representa  $\sigma$ .

As figuras (2.5), (2.6) e (2.7) mostram o mesmo tipo de comparação onde aparecem

duas curvas. Ambas são calculadas para  $\alpha = 0,06$ , porém, para 2 valores diferentes do coeficiente de inelasticidade médio ( $\langle K \rangle = 0,5$  e  $\langle K \rangle = 0,63$ ). Das figuras nós observamos que o melhor ajuste se dá para  $\langle K \rangle = 0,63$  e para  $\alpha = 0,06$ .

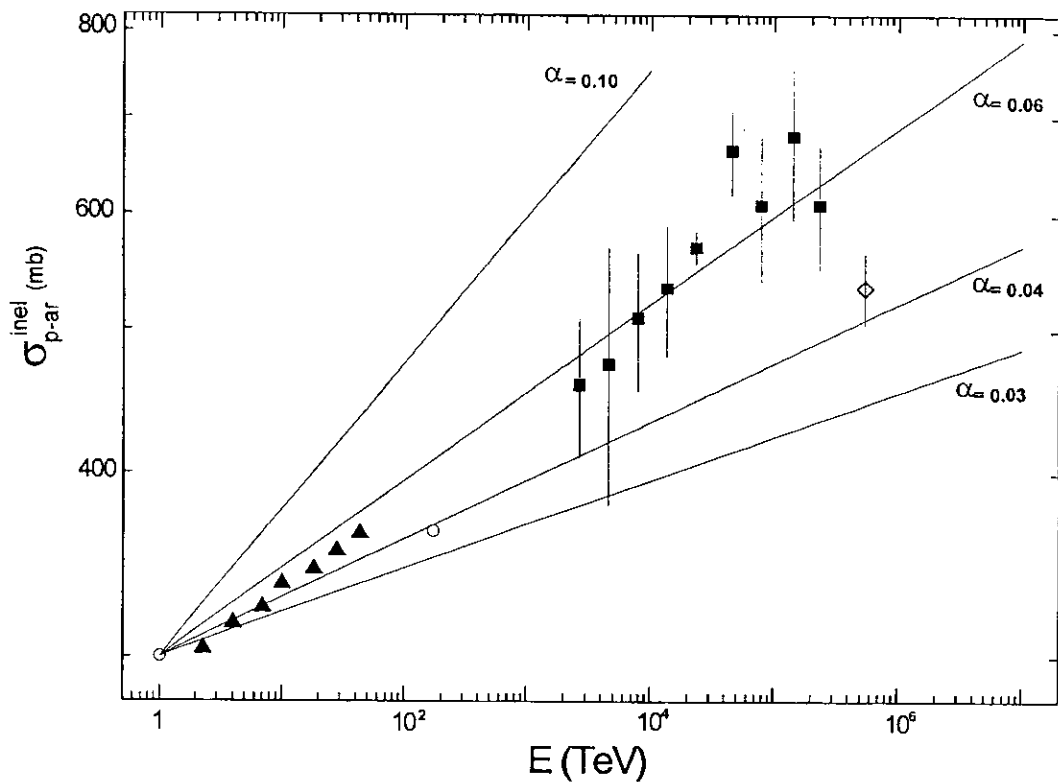


Figura 2.1

Seção de Choque Inelástica das reações  $p$ -núcleo de ar em função da energia. Dados experimentais são das referências [29] para  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  e  $\blacklozenge$ , [30] para  $\circ$ . Quatro linhas cheias são mostradas na figura para  $\alpha = 0,03$ ;  $0,04$ ;  $0,06$  e  $0,10$  da fórmula  $\sigma(E) = 300(E/TeV)^\alpha$ .

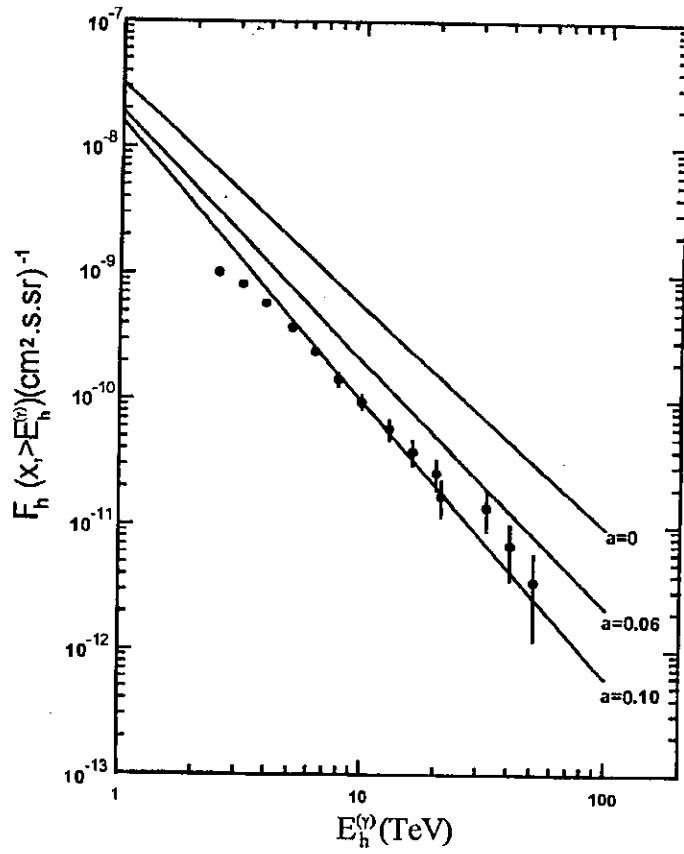


Figura 2.2

Espectro Integral de Hadrons em Chacaltaya. ( $\bullet$  ref. [24]).

As três linhas mostradas na figura representam o fluxo integral de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $\alpha = 0; 0,06; 0,10$ .

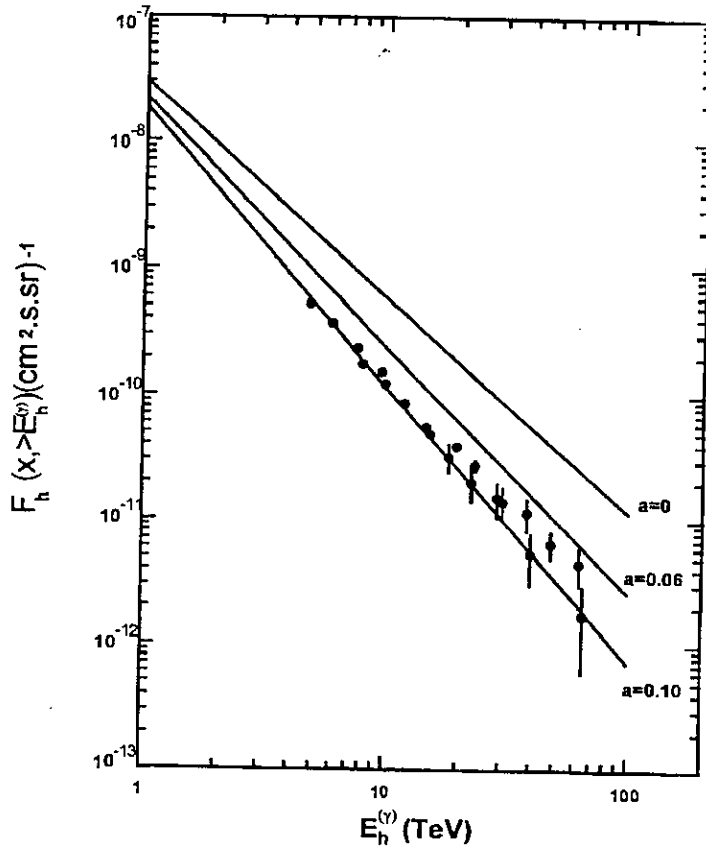


Figura 2.3

Espectro Integral de Hadrons em Kanbala. ( $\bullet$  ref. ([24])). As três linhas representam o fluxo de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $\alpha = 0; 0,06; 0,10$ .



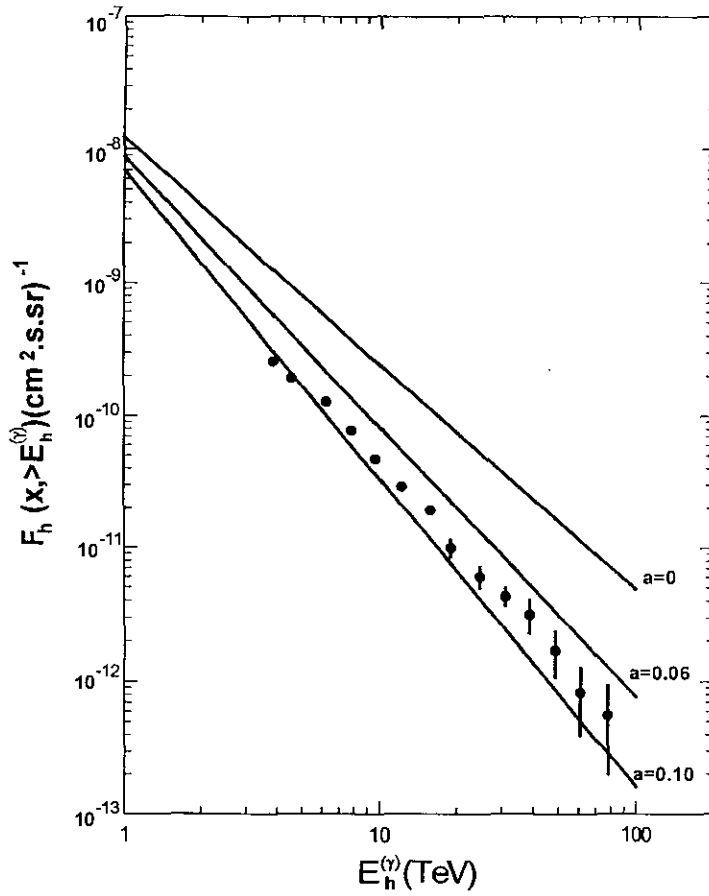


Figura 2.4

Espectro Integral de Hadrons em Fuji. ( $\bullet$  ref. ([24])). As três linhas da figura são os fluxos integrais de hadrons para  $\langle k \rangle = 0,5$  com  $\alpha = 0; 0,06; 0,10$ .

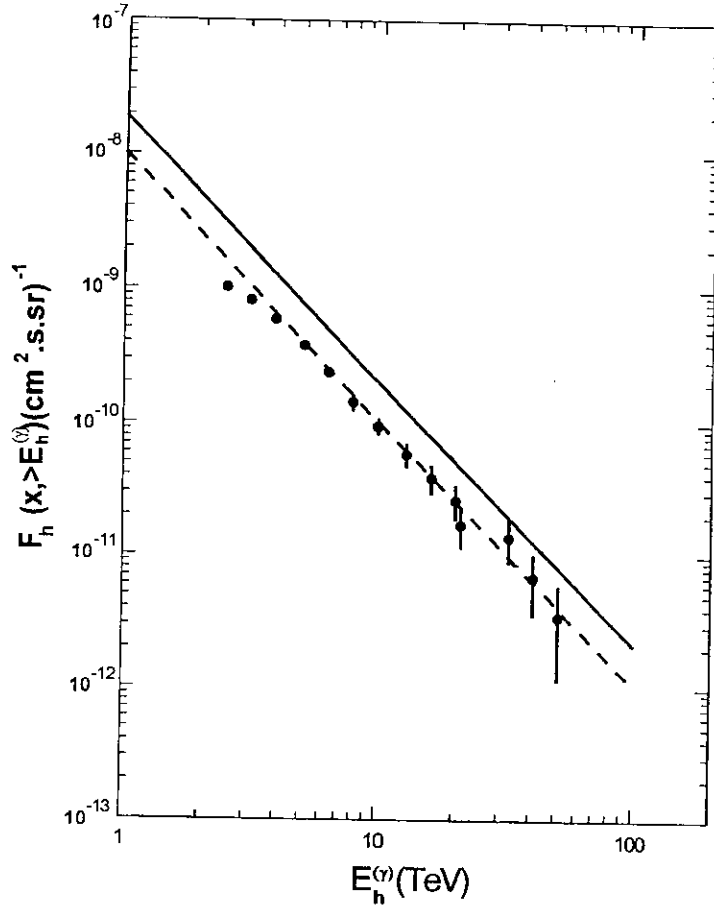


Figura 2.5

Espectro Integral de Hadrons em Chacaltaya.(• ref. ([24])).

A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos os fluxos foram calculados para  $\alpha = 0,06$ .

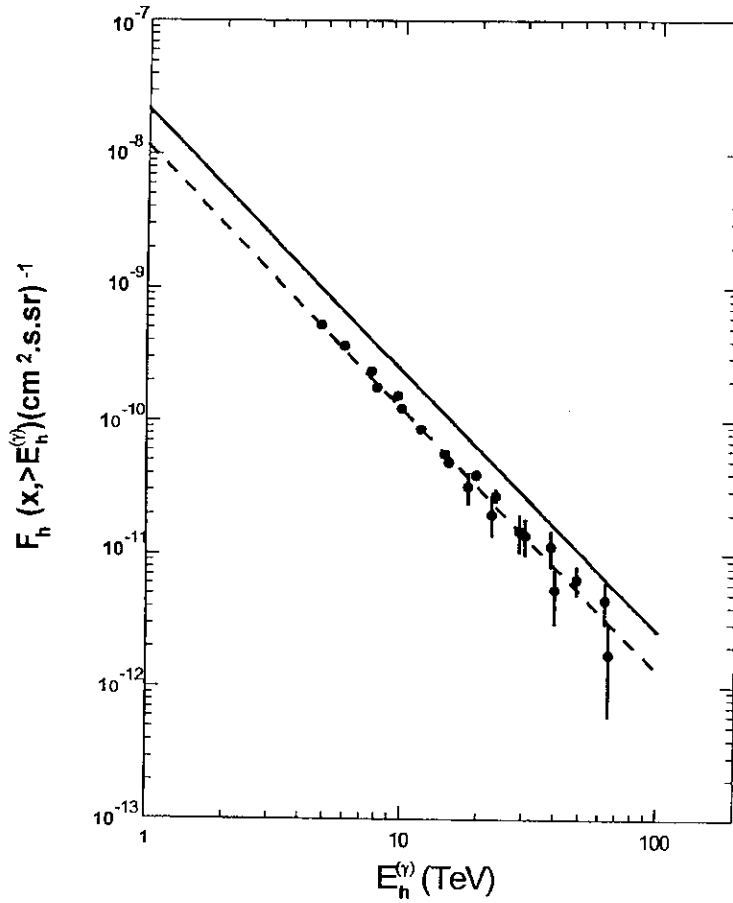


Figura 2.6

Espectro Integral de Hadrões em Kanbala. (• ref. ([24])).

A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos os fluxos são para  $\alpha = 0,06$ .

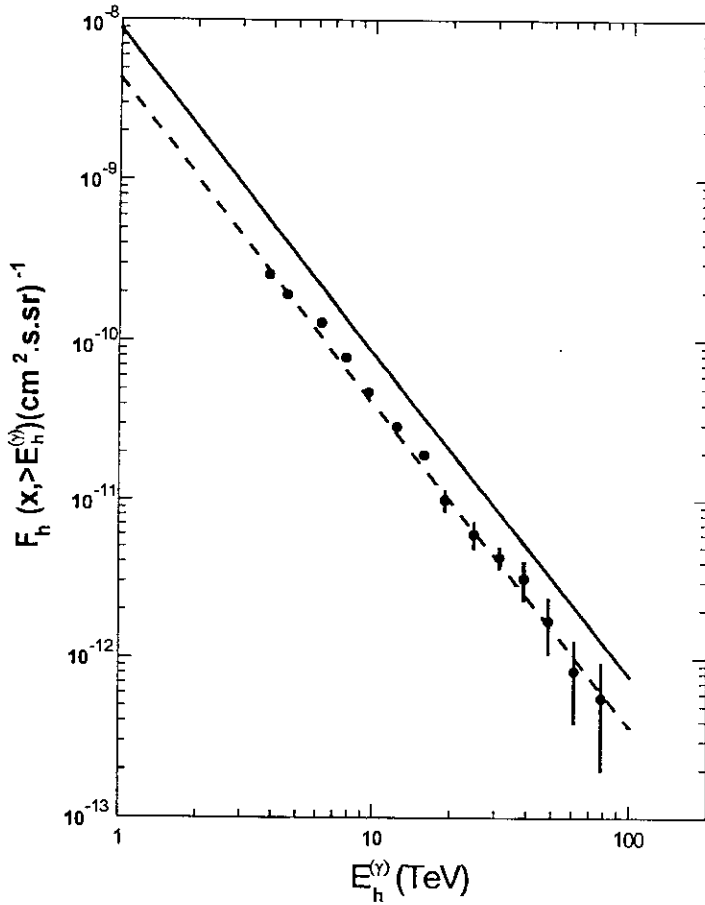


Figura 2.7

**Espectro Integral de Hadrons em Fuji.** (• ref. ([24])). A linha cheia representa o fluxo calculado para  $\langle k \rangle = 0,5$  e a linha tracejada é o mesmo fluxo para  $\langle k \rangle = 0,63$ . Ambos são calculados para  $\alpha = 0,06$ .

## Capítulo 3

# A Componente Muônica da Radiação Cósmica

Em 1935, H. Yukawa formulou sua teoria mesônica para explicar a estabilidade nuclear considerando que os nucleons que constituíam o núcleo atômico dos elementos químicos se mantinham unidos pela troca de um quantum que desempenhava o mesmo papel que o dos fótons no caso da Eletrodinâmica Quântica. Esses quanta foram chamados na época, de “Mesotrons” e atualmente eles são conhecidos como pions.

A partir desta teoria, houve uma procura intensa dos físicos experimentais com objetivo de observar tal partícula.

Em 1937, C. Anderson e S. Neddermeyer [32] e independentemente Street e Stevenson [33] descobriram uma partícula com massa maior que a dos elétrons e que eles associaram ao Mesotron de Yukawa. Devido a sua fraca interação com a matéria, mostrou-

se que os mésons de Anderson não poderiam ser aqueles de Yukawa.

Em 1942, Sakata, Inoue e Tanikawa [34] criaram a teoria do “par de mésons” que foi posteriormente desenvolvida por R. Marshack e H. Bethe na qual o méson de Yukawa deveria decair no de Anderson constituindo assim o núcleo da nova teoria.

Somente em 1947, Lattes, Occhialini e Powell [35], expondo placas de emulsões nucleares durante 1 mês nos Montes Pirineus, descobriram os mésons  $\pi$ . Nas chapas fotográficas se via claramente a trajetória de uma partícula que, chegando ao repouso, dava origem a uma outra com alcance médio de 600 microns.

Hoje em dia se sabe que as partículas descobertas por Anderson são na realidade os muons (leptons) e não mésons e são originados através do decaimento dos mésons em diferentes altitudes atmosféricas.

As principais fontes de muons na atmosfera são os  $\pi^\pm$ ,  $k^\pm$ ,  $k_L^0$ ,  $D^0$ ,  $D^\pm$  etc. Dependendo da energia do méson alguns decaimentos podem ser desprezados face aos demais.

A baixas energias  $E_{lab} \leq 500 \text{ GeV}$  os principais decaimentos são:

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

$$k^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$$

À medida que a energia aumenta, outros decaimentos vão se tornando importantes e contribuindo significativamente para o fluxo de muons.

Os muons ao atravessarem a atmosfera perdem energia principalmente por ionização, formação de pares, *bremsthralung* e reações nucleares e também podem decair através do

processo:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \bar{\nu}_e(\nu_e)$$

Esse decaimento se torna bastante viável quando a energia do muon atinge um valor próximo a 1  $GeV$  que é a constante de decaimento do muon no ar. Por ter um tempo de decaimento de  $10^{-6}s$ , eles são praticamente estáveis para os padrões da Física de Partículas Elementares e também são extremamente penetrantes por ter seções de choque para as interações com núcleos que constituem o ar bem pequenas.

Assim, ao nível do mar ou em laboratórios subterrâneos, os muons são as partículas dominantes da Radiação Cósmica Secundária.

Como os muons são partículas carregadas são “relativamente” fáceis de serem detectadas e atualmente existem um grande número de resultados experimentais sobre fluxos muônicos para diferentes ângulos zenitais e também em diferentes faixas de energia.

### 3.1 Equação de Difusão dos Hadrons na Atmosfera

Num trabalho anterior, H.M. Portella [36], mostrou que o fluxo dos muons ao nível do mar é muito pouco influenciado (cerca de 5%) pelas variações com a energia das seções de choque dos hadrons no ar. Assim as equações de difusão dos hadrons podem ser extremamente simplificadas, considerando que essas seções de choque sejam independentes da energia. Entretanto, as equações de difusão dos mésons apresentadas no capítulo 2 devem, agora, incluir um termo que leve em conta os decaimentos desses mésons nos

muons.

As equações de difusão dos nucleons e mésons na atmosfera são, portanto

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\frac{N(t, E)}{\lambda} + \int_0^1 \frac{N(t, E/\eta)}{\lambda} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t, E, \theta^*)}{\partial t} &= -\frac{M(t, E, \theta^*)}{\lambda_M} - m_M \frac{M(t, E, \theta^*)}{c\beta\tau_M E \rho(t, \theta^*)} + \int_0^1 \frac{N(t, \frac{E}{x})}{\lambda} f_{NM}(x) \frac{dx}{x} \\ &+ \int_0^1 \frac{M(t, \frac{E}{x}, \theta^*)}{\lambda_M} f_{MM}(x) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $m_M, \tau_M$  são, respectivamente, a massa de repouso e a meia-vida de decaimento do méson  $M$ ,  $t$  é a profundidade atmosférica inclinada ao longo da direção formando um ângulo  $\theta^*$  com a vertical,  $\frac{c\beta E \tau_M \rho(t, \theta^*)}{m_M}$  é o comprimento do decaimento do méson  $M$  em muons no ar ( $g/cm^2$ ).

As soluções dessas equações dependem do tipo de atmosfera considerado e também do valor do ângulo zenital. Para ângulos zenitais maiores que  $60^\circ$ , o efeito da curvatura da Terra deve ser levado em conta e nesse caso o ângulo de produção é diferente daquele da detecção do muon.

Introduzindo os operadores.

$$\hat{A}_{NN}(t, E) = -\left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \frac{N(t, E)}{\lambda} \quad (3.3)$$

$$\hat{A}_{MM}(t, E) = \left(1 - \int_0^1 f_{MM}(x) dx \hat{\sigma}_M\right) \frac{M(t, E)}{\lambda_M} \quad (3.4)$$

$$\hat{B}_{NN}(t, E) = \left(\int_0^1 f_{NM}(x) dx \hat{\sigma}_N\right) \frac{N(t, E)}{\lambda} \quad (3.5)$$



e

$$\hat{G}_M M(t, E) = g_M(E, t, \theta^*) M(t, E) \quad (3.6)$$

e definindo os operadores  $\sigma$  de maneira idêntica ao da ref. [8].

$$\hat{\sigma}_i F_i(t, E, \theta^*) = \frac{F_i\left(t, \frac{E}{x}, \theta^*\right)}{x}, \quad i = N \text{ ou } M \quad (3.7)$$

com  $g_M(E, t, \theta^*)$  sendo o comprimento de decaimento do meson  $M$  no ar, as equações diferenciais (3.1) e (3.2) se transformam nas equações de operadores

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\hat{A}_N N(t, E) \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial M(t, E, \theta^*)}{\partial t} = -\hat{A}_M M(t, E, \theta^*) + \hat{G}_M M(t, E, \theta^*) + \hat{B}_N N(t, E) \quad (3.9)$$

As soluções dessas equações estão sujeitas às condições de contorno

$$N(0, E) = G(E) \quad (3.10)$$

$$M(0, E, \theta^*) = 0 \quad (3.11)$$

As soluções das equações (3.8) e (3.9) sujeitas as condições (3.10) e (3.11) são respectivamente

$$N(t, E) = e^{-t\hat{A}_N} G(E) \quad (3.12)$$

e

$$M(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[ \int_z^t (\hat{A}_M + \hat{G}_M) dz' \right] \hat{B}_N N(t, E) dt \quad (3.13)$$

onde

$$\text{Exp} \left( \int_z^t (\hat{A}_M + \hat{G}_M(z')) dz' \right)$$

é a expansional, definida pela soma das múltiplas integrais ordenadas [14]. A definição e as principais propriedades das expansionais aparecem no Apêndice C.

Tendo-se obtido os fluxos dos nucleons e dos mésons em diferentes profundidades atmosféricas  $t$ , com energia entre  $E$  e  $E + dE$  e com ângulo zenital  $\theta^*$ , pode-se, agora, calcular o fluxo diferencial de muons. Note que a profundidade atmosférica  $t$  aqui definida é a chamada “slant depth”, e medida do topo da atmosfera para baixo ao longo da direção de chegada do nucleon ou do méson considerado.

### 3.2 Equação de Difusão dos Muons na Atmosfera

A equação que descreve a difusão dos muons na atmosfera é escrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(t, E, \theta)}{\partial t} &= -\hat{G}_\mu \mu(t, E, \theta) + \frac{\partial \beta(E)}{\partial t} \mu(t, E, \theta) + \\ &+ \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \hat{G}_M M(t, E, \theta^*) f_{M\mu}(E, E') dE' \end{aligned} \quad (3.14)$$

As funções  $\mu(t, E, \theta)$  estão sujeitas à condição inicial

$$\mu(0, E, \theta) = 0 \quad (3.15)$$

onde

$\mu(t, E, \theta) dE$  é o fluxo diferencial de muons com energia entre  $E$  e  $E + dE$ , na profundidade

$t$  medida ao longo da direção  $\theta$  da partícula.

O primeiro termo do lado direito da eq. (3.14) representa o decaimento dos muons em eletrons, o segundo termo as perdas de energia dos muons no ar e o terceiro a produção de muons devido ao decaimento dos mésons  $M$  no ar.

Em nossos cálculos consideramos que as perdas de energia do muon no ar ocorram continuamente, ou seja, as flutuações serão negligenciadas. Assim a perda de energia dos muons no ar pode ser colocada na forma

$$\beta(E) = a + bE \quad (3.16)$$

onde,  $a$ , representa a perda de energia do muon por ionização que é considerada constante e  $bE$  representa as as perdas médias por *bremstrahlung*, formação de pares e interações nucleares.

A solução da equação inhomogênea a derivadas parciais (3.14), sujeita a condição de contorno (3.15) é

$$\mu(t, E, \theta) = \mu_{hom}(t, E, \theta) + \mu_{part}(t, E, \theta) \quad (3.17)$$

onde

$$\mu_{hom}(t, E, \theta) = \mu(t = 0, \varepsilon(t - t_0), \theta^*) \exp \left[ b(t - t_0) - \int_Z^t \frac{dz}{g_\mu(\varepsilon, z, \theta^*(z))} \right] \quad (3.18)$$

com  $g_\mu(\varepsilon, z, \theta^*(z))$  sendo o autovalor do operador  $\hat{G}_\mu$ .

$$\begin{aligned} \mu_{part} = & \left\{ \int_0^t \exp \left[ b(t - z_1) - \int_{z_1}^t \frac{dz}{g_\mu(\varepsilon, z, \theta^*(z))} \right] \right\} \cdot \\ & \cdot H(\varepsilon(E, t - z_1), z_1, \theta^*(z_1)) dz_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Devido a (3.15) a expressão (3.18) se anula. Assim a solução da eq. (3.14) sujeita a condição (3.15) é

$$\mu(E, t, \theta) = \left\{ \int_0^t \exp \left[ b(t - z_1) - \int_{z_1}^t \left( \frac{m_\mu c^2}{\tau_\mu c} \right) \frac{dz \sec \theta^*(z)}{\varepsilon((t - z), E) \rho(z)} \right] \right\} \cdot H(\varepsilon((t - z), E), z_1, \theta^*(z_1)) dz_1 \quad (3.20)$$

onde

$$\varepsilon((t - z_1), E) = E e^{b(t-z_1)} + \left( e^{b(t-z_1)} - 1 \right) \frac{a}{b} \quad (3.21)$$

e

$$H(\varepsilon((t - z_1), E), z_1, \theta^*(z_1)) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE_M (BR)_M \hat{G}_M M(z_1, E_M, \theta^*) \cdot f_{M \rightarrow \mu}(\varepsilon, E_M) \quad (3.22)$$

A função  $H$  representada pela equação (3.22) é a fonte de muons provenientes dos decaimentos dos mesons  $M$  no ar.  $(BR)_M$  é o “branching ratio” do méson  $M$ , ao decair em muons, e  $f_{M \rightarrow \mu}(\varepsilon, E_M)$  é o espectro de energia dos muons.

Esse espectro, e também os limites da integração  $E_{min}, E_{max}$  são obtidos da cinemática relativística [37].

A equação (3.21) determina a energia  $\varepsilon(E, t - t_0)$  que um muon deve ter no nível  $t_0$  para chegar ao nível  $t$  com energia  $E$ , como resultado da perda de energia do muon ao atravessar a profundidade  $(t - t_0)$  da atmosfera.

### 3.3 Caso Particular

Considerando que o espectro de energia da radiação cósmica primária pode ser escrito na forma,  $G(E) = N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , então, a equação (3.12) fica,

$$N(t, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L} \quad (3.23)$$

onde

$$L = \frac{\lambda}{1 - \langle \eta^\gamma \rangle} \text{ é o livre percurso médio de absorção dos nucleons no ar} \quad (3.24)$$

e

$$\langle \eta^\gamma \rangle = \int_0^1 \eta^\gamma f(\eta) d\eta \quad (3.25)$$

com

$$\langle \eta \rangle = \int_0^1 \eta f(\eta) d\eta \quad (3.26)$$

sendo  $\langle \eta \rangle$  o valor médio do coeficiente de elasticidade dos nucleons no ar.

Na expressão (3.13), os operadores  $\hat{A}_M$  e  $\hat{G}_M$  não comutam entre si; assim devemos usar a propriedade da decomposição das expansionais, desenvolvida por Feynman [14],

$$\begin{aligned} M(t, E, \theta^*) &= \int_0^t \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \text{Exp} \left[ \int_{z'}^t \hat{A}_M dz'' \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \hat{G}_M \text{Exp} \left[ \int_t^{z'} \hat{A}_M dz'' \right] \right\} \text{Exp} \left[ \int_z^t \hat{A}_M dz' \right] \cdot \hat{B}_N N(z, E) dz \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como os operadores  $\hat{A}_M$  só atuam na energia, independentemente da profundidade atmosférica, então

$$\text{Exp} \left[ \int_a^b \hat{A}_M dz \right] = e^{(b-a)\hat{A}_M} \quad (3.28)$$

Sabendo que

$$\hat{B}_N N(z, E) = \frac{Z_{NM}}{\lambda} N(z, E) \quad (3.29)$$

a expressão (3.27) pode ser colocada na forma

$$M(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} \left[ \int_z^t e^{(t-z')\hat{A}_M} \hat{G}_M e^{-(t-z')\hat{A}_M} dz' \right] \cdot e^{-(t-z)/L_M(\gamma)} \frac{z_{NM}}{\lambda} e^{-\frac{z}{L(\gamma)}} N_0 E^{-(\gamma+1)} dz \quad (3.30)$$

onde  $\left(-\frac{1}{L(\gamma)}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{L_M(\gamma)}\right)$  são os autovalores dos operadores  $\hat{A}_N$  e  $\hat{A}_M$  respectivamente e

$$z_{NM}(\gamma) = \int_0^1 x^\gamma f_{NM}(x) dx \quad (3.31)$$

é o espectro de energia dos mésons  $M$  produzidos nas reações nucleon-núcleo.

Usando a propriedade das expansionais do Apêndice C e levando em conta a atuação dos operadores  $\hat{A}_M$  na função da energia  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , a expansional da equação (3.30), fica

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left\{ \int_z^t \left( e^{(t-z')\hat{A}_M} \hat{G}_M e^{-(t-z')\hat{A}_M} \right) dz' \right\} N_0 E^{-(\gamma+1)} = \\ & = \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \hat{G}_M e^{(t-z')(\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma+1))} \right\} N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\hat{A}_M(\gamma)$  e  $\hat{A}_M(\gamma+1)$  são operadores com auto-valores  $\left(-\frac{1}{L_M(\gamma)}\right)$  e  $\left(-\frac{1}{L_M(\gamma+1)}\right)$  respectivamente.

Expandindo a exponencial de (3.32) numa série de potências e considerando somente

os dois primeiros termos da série, pois

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{L_M(\gamma+n)} - \frac{1}{L_M(\gamma+n-1)} \right) < \left( \frac{1}{L_M(\gamma+n-1)} - \frac{1}{L_M(\gamma+n-2)} \right) \ll \\ \dots & \left( \frac{1}{L_M(\gamma+1)} - \frac{1}{L_M(\gamma)} \right) \ll 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \hat{G}_M(z') e^{(t-z')(\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma+1))} \right\} N_0 E^{-(\gamma+1)} = \\ = & \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \left[ \hat{G}_M(z') + \hat{G}_M(z')(t-z') (\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma+1)) \right] \right\} N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Usando novamente a propriedade da decomposição para fatorizar a expressão (3.34) e chamando

$$\hat{T}_M(t, z) = \text{Exp} \left( \int_z^t dz' \hat{G}_M(z') \right)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} & \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \hat{G}_M(z') e^{(t-z')(\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma+1))} \right\} N_0 E^{-(\gamma+1)} = \\ = & \text{Exp} \left\{ \int_z^t dz' \hat{T}_M(t, z') \hat{G}_M(z') (t-z') (\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma+1)) \right. \\ & \left. \hat{T}_M^{-1}(t, z') \right\} \hat{T}_M(t, z) N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Expandindo a expansional numa série de potências, (expressão (C.6) do Apêndice C) e considerando só os 2 primeiros termos, o fluxo zenital de mesons fica

$$\begin{aligned}
M(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz \frac{z_{NM}}{\lambda} e^{-(t-z)/L_M(\gamma)} e^{-z/L(\gamma)} \cdot \\
&\cdot \left( \hat{T}_M(t, z) + \int_z^t \hat{T}_M(t, z') \hat{G}_M(z')(t - z') (\hat{A}_M(\gamma) - \hat{A}_M(\gamma + 1)) \cdot \right. \\
&\cdot \left. \hat{T}_M(z', z) \right) \cdot N_0 E^{-(\gamma+1)} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

O autovalor do operador  $\hat{G}_M(z)$  depende da densidade da atmosfera,  $\rho(t, \theta^*)$  e de  $(1/E)$ . Como o ângulo  $\theta^*$  também é função de  $t$ , só em alguns casos especiais a expansional pode ser transformada na exponencial. Se a atmosfera for considerada isotérmica e linear a expansional é uma exponencial simples.

Nesse caso o primeiro termo da expressão (3.36) é a conhecida solução dos mésons, quando não se despreza o termo do decaimento dos mésons em muons.

A expressão (3.36) é substituída na expressão (3.22) para se obter a função  $H$  e esta na expressão (3.20) para se obter o fluxo de muons.

### 3.4 Comparação com dados experimentais

Os parâmetros e distribuições usados no capítulo 2 bem como a estimativa do coeficiente de inelasticidade feita naquele capítulo serão utilizados para se fazer uma comparação entre nossos cálculos e os fluxos de muons ao nível do mar.

Para se calcular numericamente esses fluxos necessita-se conhecer, além dos parâmetros e distribuições apresentadas no capítulos 2, a razão da perda de energia dos muons ao



atravessar a atmosfera terrestre. Ela é expressa pela relação

$$-\frac{dE}{dt} = a + bE \quad (3.37)$$

onde,  $a$  e  $b$  são funções que variam fracamente com a energia [38]. O primeiro termo,  $a$ , dá a contribuição da ionização e da excitação. O segundo termo,  $bE$ , representa as contribuições combinadas do *bremsstrahlung*, da formação de pares e das interações nucleares e pode ser expresso por ( $b = b_b + b_{FP} + b_{RN}$ ).

Para muons com energia menor que  $1 \text{ TeV}$  o mecanismo dominante é a ionização e a altas energias o segundo conjunto de processos é que domina.

Os valores médios de  $a$  e de  $b$  são obtidos da referência [38] e são

$$a = 2,50 \times 10^{-3} (\text{GeV g/cm}^2)^{-1}$$

$$b = 2,78 \times 10^{-6} (\text{g/cm}^2)^{-1}$$

A figura abaixo mostra os principais processos de perda de energia dos muons na atmosfera terrestre. Essa figura foi retirada da referência [38].

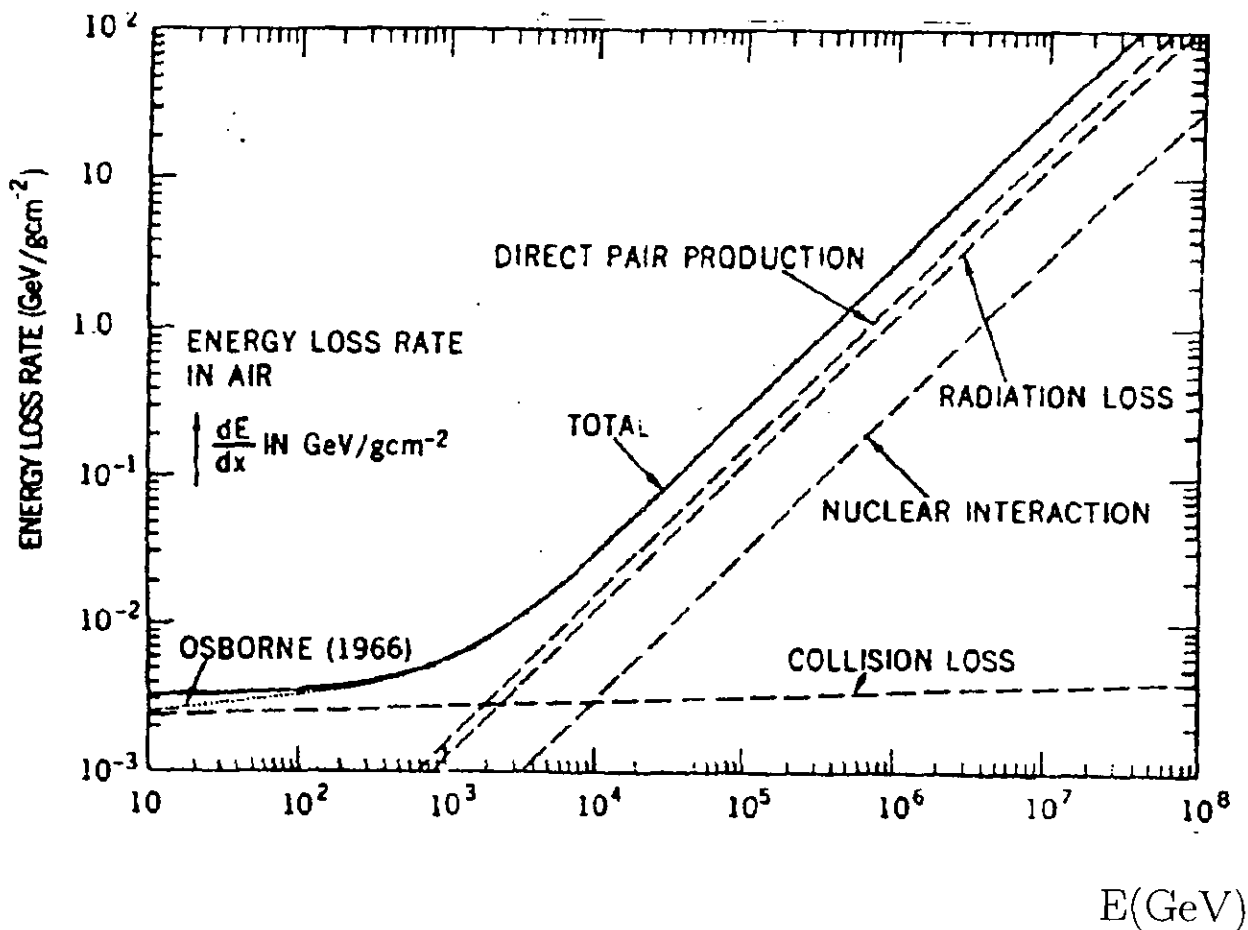


Figura 3.1

Perdas de Energia dos muons na atmosfera.

A linha pontilhada corresponde a cálculos feitos por Osborne – ref. [51]. As demais são cálculos realizados por Maeda – ref. [38] e usados em nossos cálculos.

Neste trabalho estamos considerando que a energia do muon é uma função bem definida da posição ao longo de sua trajetória, ou seja, que as perdas de energia ocorram de modo contínuo. Desse modo as flutuações não são incluídas em nossos cálculos.

A expressão (3.20) que representa o fluxo diferencial de muons pode ser escrita na forma

$$\mu(t, E, \theta) = \int_0^t H(\varepsilon((t-z), E), z_1, \theta^*(z_1)) \cdot W(t, z, E) \cdot e^{b(t-z_1)} dz_1 \quad (3.38)$$

A função  $W(t, z_1, E)$  representa a probabilidade de um muon produzido no nível  $z_1$  com energia  $\varepsilon(t, z_1)$  chegar ao nível  $t$  com energia  $E$ . Ela é expressa pela relação

$$W(t, E, z_1, \theta) = \exp \left[ - \int_{z_1}^t \frac{b_\mu \sec \theta^*(z) dz}{\rho(z) \varepsilon((t-z), E)} \right] \quad (3.39)$$

onde

$$b_\mu = \frac{m_\mu c^2}{c\tau_\mu} \text{ é a constante de decaimento do muon no ar } (b_\mu \cong 1 \text{ GeV}/c) \text{ e}$$

$$\cos \theta^*(z) = \left( 1 - \frac{\text{sen}^2 \theta}{\left( 1 + \frac{h(z)}{R_T} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Na expressão acima,  $\theta^*$  e  $\theta$  representam, respectivamente, os ângulos zenitais na produção e na detecção do muon. A função  $h(z)$  representa a altura do nível acima da superfície terrestre conforme mostra a figura 3.2 e  $R_T$  é o raio da Terra.

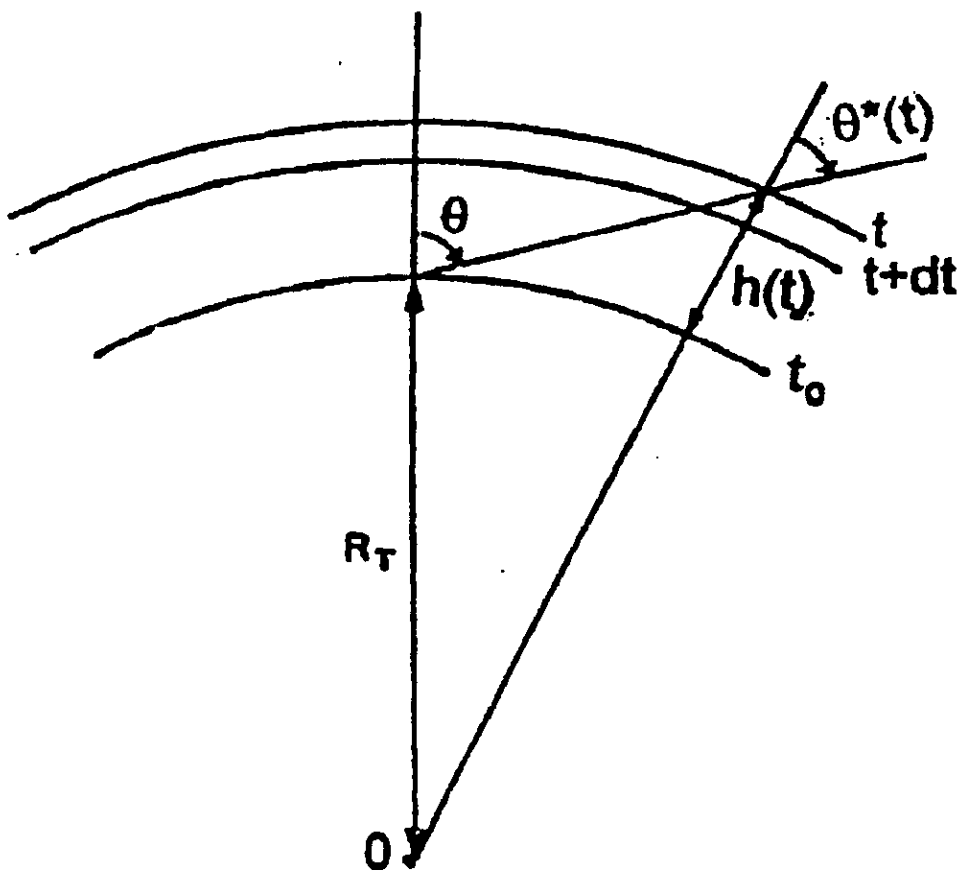


Figura 3.2

Relação Geométrica entre o ângulo zenital  $\theta$  na profundidade  $t_0$  e o ângulo zenital  $\theta^*(t)$  na profundidade  $t$ .  $R_T$  é o raio da Terra e  $h(t)$  é a altura da profundidade atmosférica  $t$  ao nível de detecção  $t_0$ .

As funções  $h(z)$  e  $\rho(z)$  dependem do local na atmosfera onde o muon é criado. Em nossos cálculos usamos para essas funções as parametrizações feitas por K. Maeda [38], e por Z. Elbert et. al. [40]. Elas são representadas pelas funções;

$$\rho(z) = \begin{cases} \frac{z}{h_0} & \text{para } z \leq z_t \text{ estratosfera} \\ cz^\beta & \text{para } z > z_t \text{ troposfera} \end{cases}$$

onde

$$h_0 = 6,344 \text{ km}$$

$$\beta = 0,81$$

$$c = 4,439 \times 10^{-6}$$

$$z_t = 230 \text{ g/cm}^2$$

e

$$h(z) = \begin{cases} 44,343 - 11,865.z^{0,190}, & z \geq z_t \\ 45,450 - 6,344 \ln z, & z \leq z_t \end{cases}$$

A profundidade atmosférica da tropopausa corresponde a uma altura  $h \simeq 11 \text{ km}$ .

Na atmosfera U.S. Standard,  $z \leq z_t$  a densidade  $\rho(z) = (c.z \cos \theta^*(z))^{0,81}$  e nesse caso  $z$  representa a profundidade atmosférica inclinada.

Uma apresentação mais detalhada sobre os modelos de atmosfera aparece no Apêndice D.

Para  $\theta^* \leq 60^\circ$ , o ângulo zenital na produção e na detecção dos muons são praticamente iguais e a curvatura da terra não é importante.

A figura (3.3) mostra uma comparação entre nossos cálculos e o fluxo vertical de muons obtido experimentalmente ao nível do mar [41]. Para energias menores que 100  $GeV$  os efeitos da ionização bem como do decaimento dos muons em eletrons tornam-se importantes e isso é mostrado no gráfico onde se calcula o fluxo de mésons com e sem ionização.

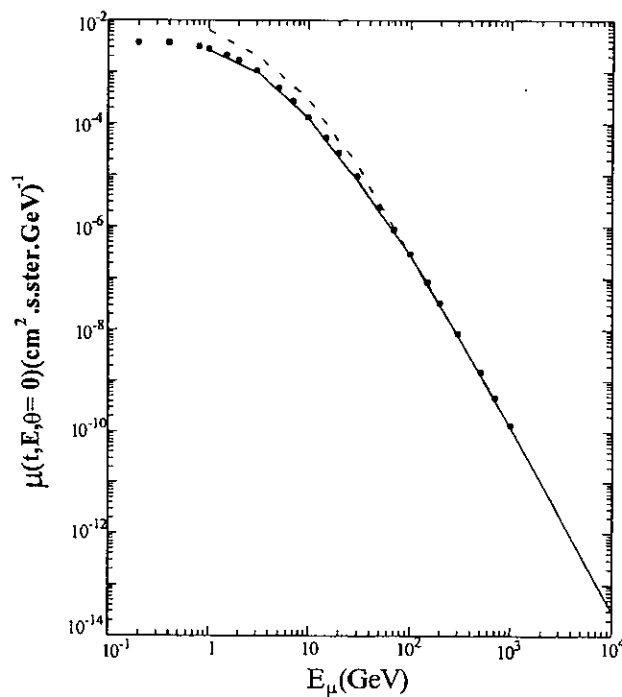


Figura 3.3

**Fluxo Vertical de muons ao nível do mar.**

- Allkofer et al. – Ref. [41]; — Fluxo calculado neste trabalho com ionização e decaimento do muon; - - - Fluxo calculado sem considerar perdas por ionização e decaimento.

A figura (3.4) mostra uma comparação entre o fluxo vertical de muons ao nível do mar por nós obtido e o calculado por P. Lipari [42]. Na figura aparece também o fluxo vertical de muons obtido experimentalmente por O.C. AllKofer et al[41]. Nossos cálculos confirmam resultados obtidos por P. Lipari mostrando que as aproximações por ele usadas são muito boas.

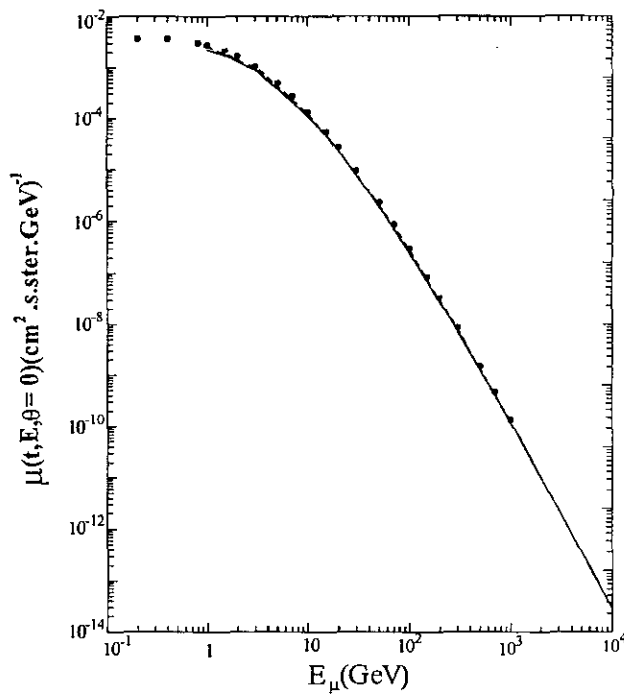


Figura 3.4

**Fluxo vertical de muons ao nível do mar.**

Comparação entre os fluxos verticais de muons ao nível do mar.

● Allkofer et al. - Ref. [41]; — Fluxo de muons calculado por P.

Lipari - Ref. [42]; - - - Fluxo de muons calculado neste trabalho.

A figura (3.5) mostra uma comparação entre os fluxos diferenciais de muons calculados teoricamente e os dados experimentais [43], para  $\theta = 89^\circ$ . Nosso cálculos [50] reproduzem muito bem os resultados experimentais. Na figura também aparecem cálculos feitos por P. Lipari [42] para  $\theta = 90^\circ$ .

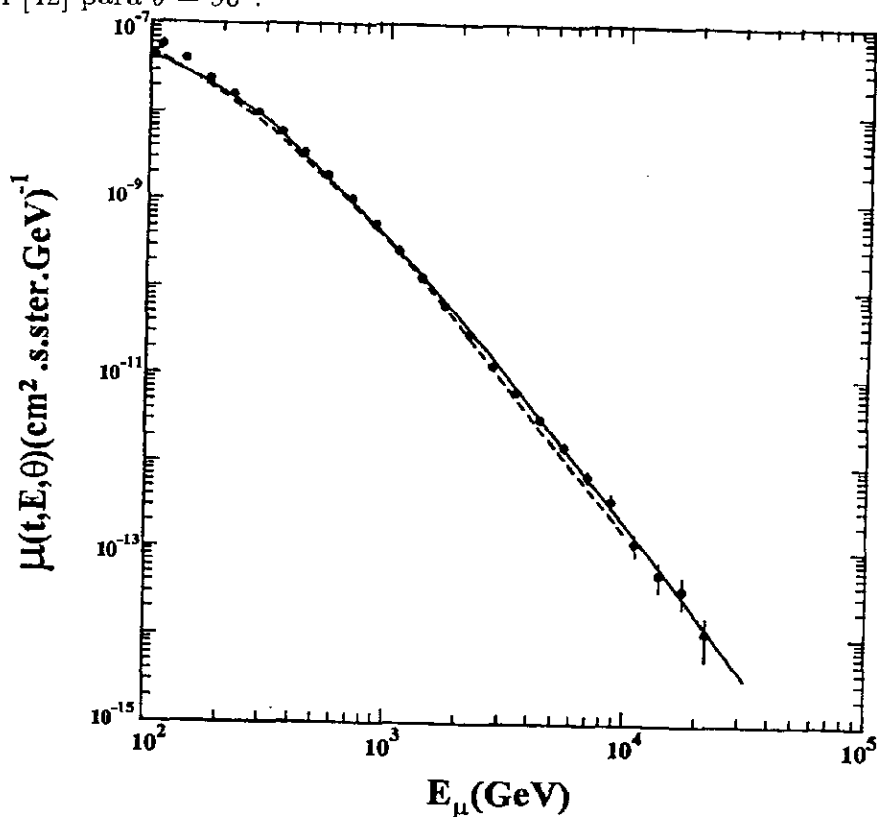


Figura 3.5

Fluxo zenital de muons ao nível do mar ( $\theta = 89^\circ$ ).

- Matsumo et al. - Ref. [43]; — Fluxo de muons calculado por P. Lipari - Ref. [42]; - - - Fluxo de muons calculado neste trabalho.



Uma comparação entre nossos cálculos e os obtidos por P. Lipari e L. Volkova [44], da razão dos muons vindos dos kaons pelos originados dos pions, é mostrada na figura (3.6). A figura mostra que a razão obtida por L. Volkova aumenta mais rapidamente que a por nós obtida e também aquela obtida por P. Lipari. Tal discrepância se deve principalmente aos espectros de energia dos pions e dos kaons secundários das interações nucleon-núcleo. L. Volkova usa valores maiores para os fatores  $Z$ . Os métodos analíticos empregados na resolução das equações de difusão dos hadrons na atmosfera são também, fator importante que levam a essa diferença.

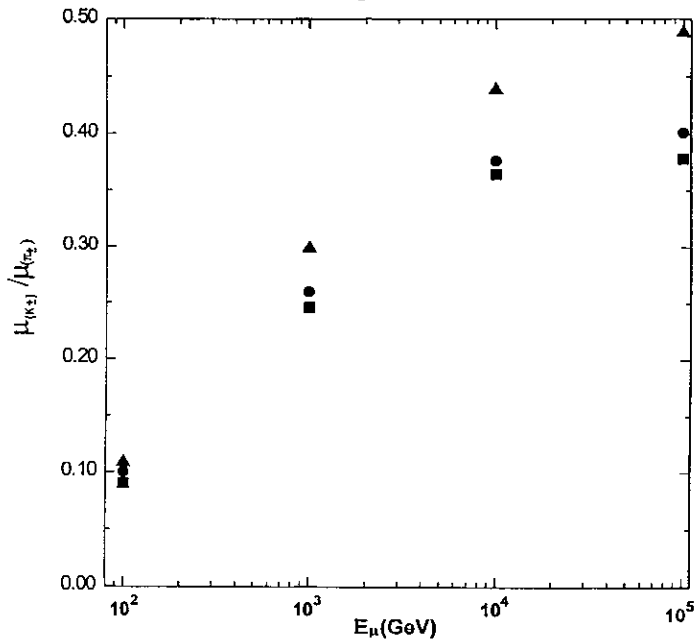


Figura 3.6

Razão das contribuições dos decaimentos do  $K^\pm$  e do  $\pi^\pm$  para o fluxo de muons ao nível do mar, para  $\theta = 0$ .

▲ L. Volkova - Ref. [44]; ● P. Lipari - Ref. [42]; ■ - Nossos Cálculos.

A figura (3.7) mostra o fluxo de muons para valores de  $\cos\theta$  (0; 0,4; 1,0).

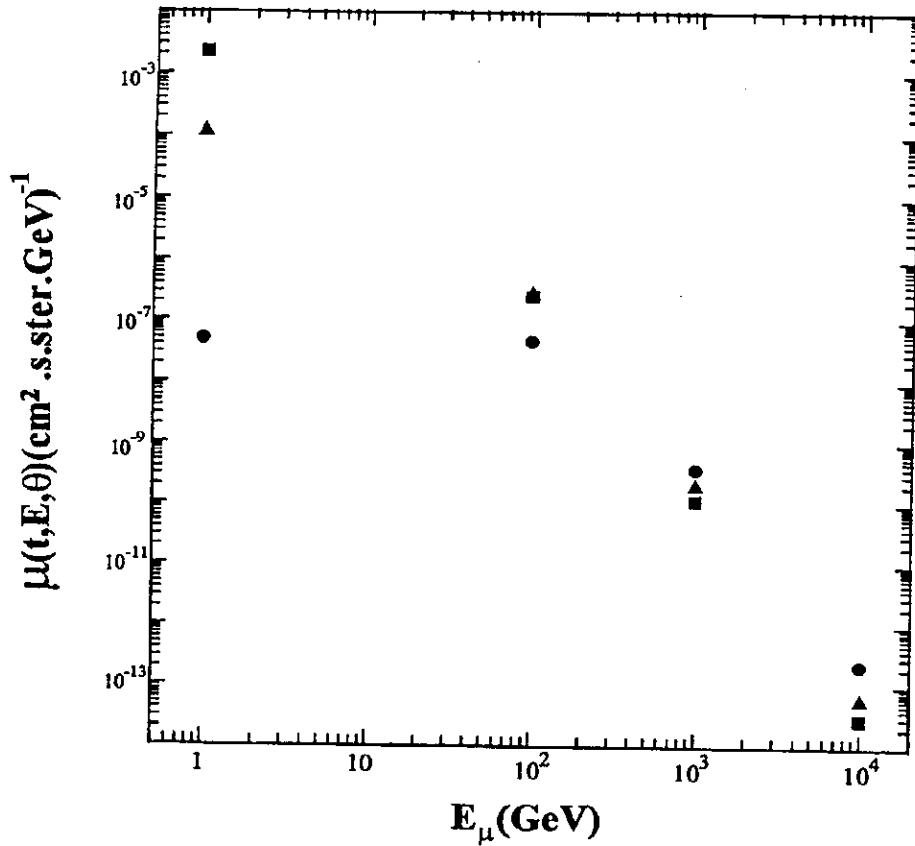


Figura 3.7

Fluxo de muons ao nível do mar para três valores dos ângulos zenitais.

•  $\cos(\theta) = 0$ ; ▲  $\cos(\theta) = 0.4$ ; ■  $\cos(\theta) = 1.0$

Nas figuras (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) usamos como fonte de muons somente pions e kaons carregados.

# Capítulo 4

## Razão $\mu^+/\mu^-$

A razão  $\mu^+/\mu^-$  ao nível do mar é usada frequentemente para se obter informações sobre o espectro de energia e a composição química da radiação cósmica primária e também sobre as interações nucleares que ocorrem na atmosfera terrestre. Ao nível do mar, o fluxo dos muons positivos é cerca de 30% maior que o fluxo dos muons negativos, e essa diferença é o reflexo do excesso de prótons sobre o de nêutrons no topo da atmosfera, e também na maior produção dos mesons carregados positivamente sobre os mesons negativos.

As assimetrias existentes nas razões  $\pi^+/\pi^-$ ,  $k^+/k^-$ ,  $\mu^+/\mu^-$ , etc, são funções não triviais da energia e do ângulo zenital e variam fracamente com a profundidade atmosférica.

A assimetria  $\pi^+/\pi^-$  é originada daquela que existe entre prótons e nêutrons no topo da atmosfera e também do fato  $Z_{p\pi^+} > Z_{p\pi^-}$ , o que é reflexo do conteúdo dos quarks de valência dos prótons e dos pions, onde  $Z_{p\pi^+}$  é o espectro de energia dos mesons  $\pi^+$  originados na interação ( $p + \pi^+$ ).

À medida que a energia cresce a influência dos kaons no fluxo dos muons e na razão  $\mu^+/\mu^-$  é muito importante, pois, a assimetria  $k^+/k^-$  é muito mais acentuada que a  $\pi^+/\pi^-$ . Isso é explicado pelo fato dos mesons  $k^-$  serem constituídos dos quarks  $(s, \bar{u})$  e assim não receberem nenhuma contribuição direta dos quarks de valência dos nucleons incidentes.

O principal problema no cálculo dos fluxos dos  $k^\pm$  surge quando se faz uma estimativa do espectro de energia dos kaons originados nas interações neutron-núcleo. As relações de simetria usadas para os nucleons e pions não são aplicadas aos kaons, isto é, não podemos supor que as funções de distribuições que descrevem a produção dos kaons por protons e neutrons sejam colocados na forma  $f_{pk^\pm}(x) = f_{nk^\mp}(x)$ , uma vez que o meson  $k^-$  não é antipartícula do  $k^+$ . M.G. Thompson and M.R. Whaley [45] usaram duas alternativas para o cálculo dos  $Z_{nk^\pm}$ . Na primeira eles admitiram que  $f_{pk^\pm} = f_{nk^\mp}$  como no caso dos pions e na segunda alternativa eles consideraram  $f_{pk^\pm} = f_{nk^\pm}$ . Os verdadeiros valores das funções  $f_{nk^\pm}$  devem se situar entre esses dois extremos. Em nossos calculos vamos considerar os valores das funções  $f_{pk^\pm}$  e  $f_{nk^\pm}$ , bem como das funções  $f_{\pi^\pm k^\pm}$  e  $f_{\pi^\mp k^\pm}$ , tabelados por P. Lipari [42] e calcular separadamente as contribuições dos protons e neutrons para o fluxo dos kaons.

Para se calcular a razão  $\mu^+/\mu^-$  devemos obter analiticamente as razões  $n/p$ ,  $\pi^+/\pi^-$  e  $k^+/k^-$ . Assim, além de usarmos as resultantes sobre os fluxos de nucleons e dos mesons do Capítulo 3, necessitaremos resolver equações similares às (3.1) e (3.2) para as funções  $\Delta(t, E) = p(t, E) - n(t, E)$  e  $\Delta_M(t, E, \theta^*) = M^+(t, E, \theta^*) - M^-(t, E, \theta^*)$  que refletem as diferenças existentes entre os fluxos de protons e neutrons e entre os fluxos dos mesons

positivos e dos negativos.

## 4.1 Equações de Difusão dos Neutrons e Protons

As equações de difusão dos protons e dos neutrons na atmosfera, desprezando a produção dos nucleons pelos antiprotons é,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(t, E) &= -\frac{p(t, E)}{\lambda} + \int_0^1 \frac{p(t, E/x)}{\lambda} f_{pp}(x) \frac{dx}{x} + \\ &+ \int_0^1 \frac{n(t, E/x)}{\lambda} f_{np}(x) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(t, E)}{\partial t} &= -\frac{n(t, E)}{\lambda} + \int_0^1 \frac{n(t, E/x)}{\lambda} \cdot f_{nn}(x) \frac{dx}{x} + \\ &+ \int_0^1 \frac{p(t, E/x)}{\lambda} f_{pn}(x) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde consideramos que os livres percursos médios dos protons e dos neutrons são iguais aos livres percursos médios dos nucleons ( $\lambda$ ).  $p(t, E)$  e  $n(t, E)$  são os fluxos dos protons e dos neutrons na profundidade inclinada  $t$  com energia entre  $E$  e  $E + dE$ , respectivamente.

Nessas equações os livres percursos médios foram considerados constantes independentes da energia e supondo válida a lei do *Scaling* nas interações hadron-núcleo.

As equações (4.1) e (4.2) são equivalentes às equações

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\frac{N(t, E)}{\lambda} + \int_0^1 \frac{N(t, E/x)}{\lambda} f_{NN}(x) \frac{dx}{x} \quad (4.3)$$

e

$$\frac{\partial \Delta(t, E)}{\partial t} = -\frac{\Delta(t, E)}{\lambda} + \int_0^1 \frac{\Delta(t, E/x)}{\lambda} f_{\Delta}(x) \frac{dx}{x} \quad (4.4)$$

onde,  $N(t, E)$  e  $\Delta(t, E)$  representam os fluxos de nucleons e diferença entre protons e neutrons na profundidade inclinada  $t$  com energia entre  $E$  e  $E + dE$  respectivamente. A equivalência entre as equações é mantida quando se usam as relações de simetria  $f_{pp}(x) = f_{nn}(x)$  e  $f_{pn}(x) = f_{np}(x)$ .

Introduzindo nas equações (4.3) e (4.4) os operadores

$$\hat{A}_N N(t, E) = - \left( 1 - \int_0^1 (f_{pp}(x) + f_{pn}(x)) dx \hat{\sigma}_N \right) / \frac{N(t, E)}{\lambda} \quad (4.5)$$

$$\hat{A}_\Delta \Delta(t, E) = - \left( 1 - \int_0^1 (f_{pp}(x) - f_{pn}(x)) dx \hat{\sigma}_\Delta \right) / \frac{\Delta(t, E)}{\lambda} \quad (4.6)$$

onde os operadores  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = N$  ou  $\Delta$ ) são definidos de maneira similar aos da expressão (3.7) do capítulo 3.

As equações (4.3) e (4.4) são escritas, agora, como

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\hat{A}_N N(t, E) \quad (4.7)$$

e

$$\frac{\partial \Delta(t, E)}{\partial t} = -\hat{A}_\Delta \Delta(t, E) \quad (4.8)$$

As funções  $N(t, E)$  e  $\Delta(t, E)$  devem satisfazer as condições iniciais

$$N(0, E) = p_0(E) + n_0(E) \quad (4.9)$$

$$\Delta(0, E) = p_0(E) - n_0(E) \quad (4.10)$$

com  $p_0$  e  $n_0$  representando os espectros de energia dos protons e neutrons no topo da atmosfera.

As soluções das equações (4.7) e (4.8) são:

$$N(t, E) = e^{-\hat{A}_N t} N(0, E) \quad (4.11)$$

$$\Delta(t, E) = e^{-\hat{A}_\Delta t} \Delta(0, E) \quad (4.12)$$

Considerando que  $p_0$  e  $n_0$  são proporcionais a  $E^{-(\gamma+1)}$  as soluções (4.11) e (4.12) podem ser escritas como

$$N(t, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L_N} \quad (4.13)$$

$$\Delta(t, E) = \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} e^{-t/L_\Delta} \quad (4.14)$$

com

$$L_N = \frac{\lambda}{1 - Z_{pp} - Z_{pn}} \quad (4.15)$$

e

$$L_\Delta = \frac{\lambda}{1 - Z_{pp} + Z_{pn}} \quad (4.16)$$

onde  $Z_{pp}$  e  $Z_{pn}$  representam o espectro de energia da interação proton-proton e proton-neutron, respectivamente.

Os fluxos de protons e neutrons são, portanto

$$p(t, E) = \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{2} \left( e^{-t/L_N} + \delta_0 e^{-t/L_\Delta} \right) \quad (4.17)$$

$$n(t, E) = \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{2} \left( e^{-t/L_N} - \delta_0 e^{-t/L_\Delta} \right) \quad (4.18)$$

com

$$\delta_0 = \frac{p_0 - n_0}{p_0 + n_0}$$

onde,  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$  e  $\delta_0$  representam o espectro de energia dos nucleons e o excesso de protons no topo da atmosfera, respectivamente.

## 4.2 Equações de Difusão dos Pions Carregados na Atmosfera

As equações de difusão dos pions carregados na atmosfera são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^\pm(t, E, \theta^*)}{\partial t} = & -\frac{\pi^\pm(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} - \hat{G}_\pi \pi^\pm(t, E, \theta^*) + \\ & + \int_0^1 \frac{\pi^\pm(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} f_{n^\pm \pi^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{\pi^\mp(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} \\ & \cdot f_{n^\mp \pi^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{p(t, E/x)}{\lambda} f_{p\pi^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{n(t, E/x)}{\lambda} f_{n\pi^\pm}(x) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Considerando, como no caso dos nucleons, as relações de simetria

$$f_{\pi^+\pi^+} = f_{\pi^-\pi^-}, \quad f_{\pi^-\pi^+} = f_{\pi^+\pi^-} \quad \text{e} \quad f_{p\pi^\pm} = f_{n\pi^\mp}. \quad (4.20)$$

A equação (4.19) é colocada na forma equivalente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(t, E, \theta^*)}{\partial t} = & -\frac{\pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} - \hat{G}_\pi \pi(t, E, \theta^*) + \int_0^1 \frac{\pi(t, E, /x, \theta^*)}{\lambda_\pi} (f_{\pi^+\pi^+} + f_{\pi^-\pi^+}) \frac{dx}{x} \\ & + \int_0^1 \frac{N(t, E/x)}{\lambda} (f_{p\pi^+} + f_{p\pi^-}) \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) = & -\frac{\Delta_\pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} - \hat{G}_\pi \Delta_\pi(t, E, \theta^*) + \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{\Delta_\pi(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} \\ & \cdot (f_{\pi^+\pi^+} - f_{\pi^-\pi^+}) + \int_0^1 \frac{\Delta(t, E/x)}{\lambda} (f_{p\pi^+} - f_{p\pi^-}) \end{aligned} \quad (4.22)$$



Essas equações são similares à equação (3.2). Definindo de maneira equivalente os operadores

$$\hat{A}_{\pi\Delta\pi}\Pi(t, E, \theta^*) = -\left(1 - \int_0^1 dx (f_{\pi^+\pi^+} \pm f_{\pi^-\pi^+}) \hat{\sigma}_\pi\right) / \frac{\Pi(t, E, \theta^*)}{\lambda_\pi} \quad (4.23)$$

$$\hat{B}_{N\Delta}N(t, E) = \left(\int_0^1 (f_{p\pi^+} \pm f_{p\pi^-}) dx \hat{\sigma}_N\right) / \frac{N(t, E)}{\lambda} \quad (4.24)$$

e

$$\hat{G}_\pi\Pi(t, E, \theta^*) = \frac{b_\pi\Pi(t, E, \theta^*)}{E\rho(t, \theta^*)} \quad (4.25)$$

sendo  $b_\pi$  a constante de decaimento do pion no ar, podemos obter as soluções

$$\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} (\hat{A}_\pi + \hat{G}_\pi) \hat{B}_N N(t, E) dt \quad (4.26)$$

e analogamente

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t \text{Exp} (\hat{A}_{\Delta\pi} + \hat{G}_\pi) \hat{B}_{\Delta} N(t, E) dx \quad (4.27)$$

Para um espectro primário na forma  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , obtem-se soluções análogas a eq. (3.36)

$$\begin{aligned} \pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz \frac{Z_{N\pi}}{\lambda} e^{-(t-z)/L_\pi(\gamma)} e^{-z/L(\gamma)} \cdot \\ &\cdot \left( \hat{T}_\pi(t, z) + \int_z^t dz' \hat{T}_\pi(t, z') \hat{G}_\pi(z')(t-z') (\hat{A}_\pi(\gamma) - \hat{A}_\pi(\gamma+1)) \hat{T}_\pi(z', z) \right) \cdot \\ &\cdot N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz Z'_{N\pi} e^{-(t-z)/L_{\Delta\pi}(\gamma)} e^{-z/L_{\Delta}(\gamma)} \cdot \left( \hat{T}_\pi(t, z) + \right. \\ &+ \left. \int_z^t dz' \hat{T}_\pi(t, z') \hat{G}_\pi(z') (t - z') \left( \hat{A}_{\Delta\pi}(\gamma) - \hat{A}_{\Delta\pi}(\gamma + 1) \right) \cdot T_\pi(z', z) \right) \cdot \\ &\cdot \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde

$$\hat{T}_\pi(t, z) = \text{Exp} \int_z^t dz' \hat{G}_\pi(z') \quad (4.30)$$

$$Z_{N\pi} = \int_0^1 x^\gamma (f_{p\pi+} + f_{p\pi-}) dx \quad (4.31)$$

e

$$Z'_{N\pi} = \int_0^1 x^\gamma (f_{p\pi+} - f_{p\pi-}) dx \quad (4.32)$$

Considerando somente o primeiro termo do segundo membro das equações (4.28) e (4.29) (aproximação de ordem zero) temos

$$\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{Z_{N\pi}}{\lambda} e^{-(t-z)/L_\pi(\gamma)} e^{-z/L(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z) N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (4.33)$$

$$\Delta_\pi(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \frac{Z'_{N\pi}}{\lambda} e^{-(t-z)/L_{\Delta\pi}(\gamma)} e^{-z/L_{\Delta}(\gamma)} \hat{T}_\pi(t, z) \Delta_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (4.34)$$

e os fluxos de  $\pi^\pm(t, E, \theta^*)$  são

$$\begin{aligned} \pi^\pm(t, E, \theta^*) &= N_0 E^{-(\gamma+1)} \frac{Z_{N\pi}}{\lambda} \left\{ \int_0^t dz e^{-(t-z)/L_\pi(\gamma)} e^{-z/L(\gamma)} T_\pi(t, z) \pm \right. \\ &\pm \left. \int_0^t dz e^{-(t-z)/L_{\Delta\pi}(\gamma)} \cdot e^{-z/L_{\Delta}(\gamma)} T_\pi(t, z) \cdot \frac{\Delta_0}{N_0} \frac{Z'_{N\pi}}{Z_{N\pi}} \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde

$$T_\pi(t, z) = 1 + \int_z^t dz_1 \frac{b_\pi}{E\rho(z, \theta^*)} + \int_0^t dz_1 \frac{b_\pi}{E\rho(z_1, \theta^*)} \cdot \int_z^{z_1} dz_2 \frac{b_\pi}{E\rho(z_2, \theta^*)} + \dots + \dots \quad (4.36)$$

e

$$\delta_\pi = \frac{Z'_{N\pi}}{Z_{N\pi}} = \frac{Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}}{Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}} \quad (4.37)$$

### 4.3 Equações de Difusão dos Kaons Carregados ( $K^\pm$ ) na Atmosfera

Analogamente, as equações que descrevem a difusão dos kaons carregados na atmosfera são

$$\begin{aligned} \frac{\partial K^\pm(t, E, \theta^*)}{\partial t} = & -\frac{K^\pm(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} - \hat{G}_K K^\pm(t, E, \theta^*) + \\ & + \int_0^1 \frac{K^\pm(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_K} f_{K^\pm K^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{K^\mp(t, E, \theta^*)}{\lambda_K} f_{K^\mp K^\pm}(x) \frac{dx}{x} \\ & + \int_0^1 \frac{\pi^\pm(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} f_{\pi^\pm K^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^t \frac{\pi^\mp(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} f_{\pi^\mp K^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \\ & + \int_0^1 \frac{p(t, E/x, \theta^*)}{\lambda} f_{pK^\pm}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{n(tE, /x, \theta^*)}{\lambda} f_{nK^\pm} \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como no caso dos pions, essa equação diferencial é equivalente ao sistema de 2 equações, uma para o fluxo total de kaons e outra para a diferença entre o fluxo dos  $K^+$  e o fluxo dos  $K^-$ .

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K(t, E, \theta^*)}{\partial t} &= -\frac{K(t, E, \theta^*)}{\lambda_k} - \hat{G}_k K(t, E, \theta^*) + \int_0^1 \frac{K(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_k} (f_{k+k^+} + \\
&+ f_{k-k^+}) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{\pi(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} (f_{\pi+k^+} + f_{\pi-k^+}) \frac{dx}{x} + \\
&+ \int_0^1 \frac{p(t, E/x)}{\lambda} (f_{pk^+} + f_{pk^-}) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{n(t, E/x)}{\lambda} (f_{nk^+} + f_{nk^-}) \frac{dx}{x}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta_k(t, E, \theta^*)}{\partial t} &= -\frac{\Delta_k(t, E, \theta^*)}{\lambda_k} - \hat{G}_k \Delta_k(t, E, \theta^*) + \int_0^1 \frac{\Delta_k(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_k} \\
&\cdot (f_{k+k^+} - f_{k-k^+}) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{\Delta_\pi(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_\pi} (f_{\pi+k^+} - f_{\pi-k^+}) \frac{dx}{x} + \\
&+ \int_0^1 \frac{p(t, E/x)}{\lambda} (f_{pk^+} - f_{pk^-}) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{n(t, E/x)}{\lambda} (f_{nk^+} - f_{nk^-}) \frac{dx}{x}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

onde usamos as relações de simetria que aparecem na referência [42]

$$f_{k+k^+} = f_{k-k^-} \quad , \quad f_{k-k^+} = f_{k+k^-} \quad , \quad f_{\pi+\pi^+} = f_{\pi-\pi^-} \quad , \quad f_{\pi-k^+} = f_{\pi+k^-}$$

As soluções para as equações (4.39) são

$$K(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \text{Exp}(\hat{A}_k + \hat{G}_k) \left[ \hat{B}_\pi \pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_p p(t, E) + \hat{B}_n n(t, E) \right] \tag{4.41}$$

e

$$\Delta_k(t, E, \theta^*) = \int_0^t dz \text{Exp}(\hat{A}_{\Delta_k} + \hat{G}_k) \left[ \hat{B}_{\Delta_\pi} \Delta_\pi(t, E, \theta^*) + \hat{B}_{\Delta_p} p(t, E) + \hat{B}_{\Delta_n} n(t, E) \right] \tag{4.42}$$

onde os operadores  $\hat{A}_k$ ,  $\hat{A}_\pi$ ,  $\hat{B}_p$ ,  $\hat{B}_n$ , são

$$\hat{A}_k K(t, E, \theta^*) = \left(1 - \int_0^1 (f_{k+k^+} + f_{k-k^+}) dx \hat{\sigma}_k\right) K(t, E, \theta^*) / \lambda_k \quad (4.43)$$

$$\hat{B}_\pi \pi(t, E, \theta^*) = \left(\int_0^1 (f_{\pi+k^+} + f_{\pi-k^+}) dx \hat{\sigma}_\pi\right) \pi(t, E, \theta^*) / \lambda_\pi \quad (4.44)$$

$$\hat{B}_p p(t, E) = \left(\int_0^1 (f_{pk^+} + f_{pk^-}) dx \hat{\sigma}_p\right) p(t, E) / \lambda \quad (4.45)$$

$$\hat{B}_n n(t, E) = \left(\int_0^1 (f_{nk^+} + f_{nk^-}) dx \hat{\sigma}_n\right) n(t, E) / \lambda \quad (4.46)$$

Os operadores  $\hat{A}_{\Delta_k}$ ,  $\hat{B}_{\Delta_\pi}$ ,  $\hat{B}_{\Delta_p}$ , e  $\hat{B}_{\Delta_n}$  são definidos analogamente substituindo-se índices e fluxos  $K$  por  $\Delta_k$ ,  $\Pi$  por  $\Delta_\pi$ ,  $p$  por  $\Delta_p$  e  $n$  por  $\Delta_n$ . Assim, a soma das funções de distribuições ( $f_{ij}$ ) deve ser substituída pela subtração dessas mesmas funções.

Procedendo de maneira análoga à realizada na obtenção do fluxo dos pions, e usando os resultados (4.17), (4.18), (4.33), (4.34) e (4.52) obtemos para os fluxos de  $K(t, E, \theta^*)$  e  $\Delta_k(t, E, \theta^*)$  as expressões,

$$\begin{aligned} k(t, E, \theta^*) = & \int_0^t dz e^{-(t-z)/L_k(\gamma)} \hat{T}_k(t, z) \cdot \left\{ \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{2\lambda} \left( e^{-z/L_N} \right. \right. \\ & \cdot (Z_{pk} + Z_{nk}) + \delta_0 e^{-z/L_\Delta} (Z_{pk} - Z_{nk}) + \int_0^z dz_1 \frac{Z_{N\pi}}{\lambda} \cdot \\ & \cdot e^{-(z-z_1)/L_\pi(\gamma)} e^{-z_1/L(\gamma)} \cdot \left[ \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda_\pi} (Z_{\pi+k^+}(\gamma) + Z_{\pi-k^+}(\gamma)) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{N_0 E^{-(\gamma)}}{\lambda_\pi} (Z_{\pi+k^+}(\gamma-1) + Z_{\pi-k^+}(\gamma-1)) \int_{z_1}^z \frac{b\pi}{\rho(z_2, \theta^*)} dz_2 \right] \right\} \quad (4.47) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta_k(t, E, \theta^*) &= \int_0^t dz e^{-(t-z)/L_{\Delta_k(\gamma)}} \hat{T}_k(t, z) \left\{ \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{2\lambda} \right. \\
&\quad \left. \left( e^{-z/L_N} (Z_{pk} - Z_{nk}) + \delta_0 e^{-z/L_{\Delta}} (Z_{pk} + Z_{nk}) \right) \right. \\
&+ \int_0^z dz_1 e^{-z_1/L_{\Delta}(\gamma)} \left[ \frac{\Delta_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda_{\pi}} C'_{N\pi} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \left( (Z_{\pi+k^+}(\gamma) - Z_{\pi-k^+}(\gamma)) + \frac{\Delta_0 E^{-(\gamma)}}{\lambda_{\pi}} (Z_{\pi+k^+}(\gamma-1) - Z_{\pi-k^+}(\gamma-1)) \right) \cdot \\
&\quad \left. \left. \int_{z_1}^z \frac{b_{\pi}}{\rho(z_2, \theta^*)} dz_2 \right] \right\} \quad (4.48)
\end{aligned}$$

onde

$$Z_{pk} = Z_{pk^+} + Z_{pk^-} \quad (4.49)$$

$$Z_{nk} = Z_{nk^+} + Z_{nk^-} \quad (4.50)$$

$$Z_{\pi^{\pm}K^{\pm}}(\gamma-1) = \int_0^1 x^{(\gamma-1)} f_{\pi^{\mp}K^{\pm}}(x) dx \quad (4.51)$$

A partir das equações (4.17) e (4.48) podemos obter os fluxos dos kaons  $K^{\pm}(t, E, \theta^*)$ ,

$$K^{\pm}(t, E, \theta^*) = K(t, E, \theta^*) \pm \Delta_K(t, E, \theta^*) \quad (4.52)$$

Com as expressões (4.17), (4.18), (4.35) e (4.52) pode-se agora, obter a razão  $\mu^+/\mu^-$  ao nível do mar para diferentes ângulos zenitais. De maneira análoga ao realizado por vários autores [42, 45] no cálculo da razão  $\mu^+/\mu^-$  serão desprezadas as perdas de energia e o decaimento dos muons em eletrons.

Os valores dos fatores  $Z_{ij}$  e da razão  $n_0/p_0$  são os mesmos usados por P. Lipari [42]. No cálculo dos fatores  $Z_{ij}$  foram usados resultados de interações hadron-núcleo que é

de fundamental importância na estimativa correta das razões lepton/antilepton ao nível do mar. Trabalhos anteriores [45, 46, 47] usando os espectros de energia dos mesons secundários de reações nucleon-nucleon fornecem uma razão  $\mu^+/\mu^-$  superestimada.

O fluxo dos muons carregados provenientes dos decaimentos dos mesons ( $\pi^\pm$ ) e ( $k^\pm$ ) é

$$\mu^\pm(t, E, \theta) = \int_0^t dz \left\{ \int_{E_{min}}^{E_{max}} (BR)_\pi \hat{G}_\pi \pi^\pm(t, E', \theta^*) f_{\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm}(E, E') dE' \right. \\ \left. + \int_{E_{min}}^{E_{max}} (BR)_K \hat{G}_K K^\pm(t, E', \theta^*) f_{K^\pm \rightarrow \mu^\pm}(E, E') dE' \right\}$$

onde

$E'$  e  $E$  são as energias dos mesons ( $\pi^\pm$  ou  $k^\pm$ ) e do muon respectivamente;

$(BR)_\pi$  e  $(BR)_K$  são os “Branching Ratios” para os decaimentos dos pions e kaons em muons, respectivamente;

$\hat{G}_M$  é um operador cujo autovalor é  $g_M = \frac{b_M}{E' \rho(t, \theta^*)}$ , e representa o decaimento dos mesons  $M$  em muons;

$E_{min}$ ,  $E_{max}$  e  $f_{M \rightarrow \mu}$  são obtidos da cinemática relativística [38] com 2 partículas no estado final, e para este caso valem

$$E_{min} = E$$

$$E_{max} = E / (m_\mu / m_M)^2$$

e

$$f_{M \rightarrow \mu}(E, E') = \frac{1}{1 - \left(\frac{m_\mu}{m_M}\right)^2} \frac{1}{E'}$$

As razões  $\mu^+/\mu^-$  são calculadas para alguns valores de ângulos zenitais e para valores de energia no intervalo de 1 GeV e 10 TeV.

## 4.4 Comparação com Dados Experimentais

A razão  $\mu^+/\mu^-$  depende, principalmente, da razão entre os neutrons e protons no topo da atmosfera,  $\delta_0 = n_0/p_0$ , e também das razões  $\delta_M = \frac{Z_{pM^+} - Z_{pM^-}}{Z_{pM^+} + Z_{pM^-}}$ .

Para fazer a comparação entre nossos cálculos e a razão  $\mu^+/\mu^-$  ao nível do mar para  $\theta = 0$ , vamos utilizar os espectros de energia das partículas secundárias  $Z_{ij}$  ( $i = p, n, \pi^\pm, K^\pm$ ) ( $j = p, n, \pi^\pm, K^\pm$ ) e a razão  $\delta_0$  que constam na referência [42].

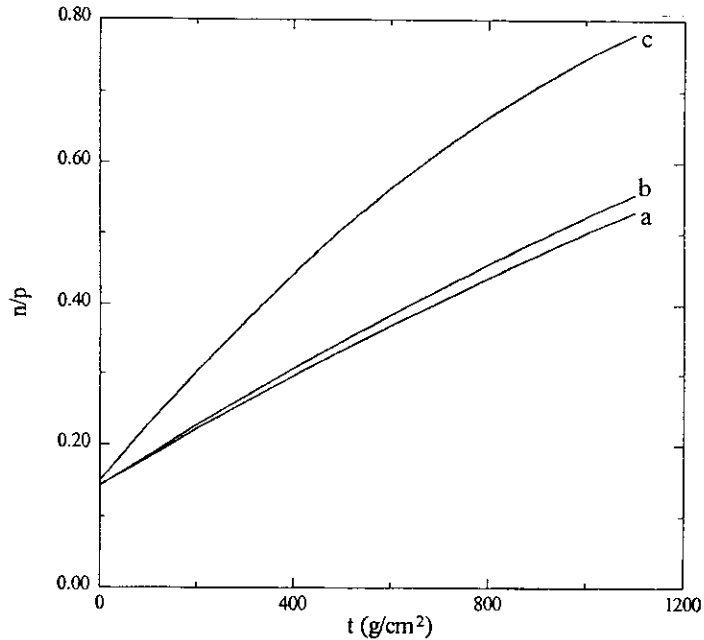


Figure 4.1

Razão  $n/p$  versus profundidade atmosférica.

- (a) Cálculo efetuado por P. Lipari – Ref. [42]; (b) Nosso cálculo;  
(c) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley – Ref. [45].



A figura (4.1) mostra o comportamento da razão  $n/p$  em função da profundidade atmosférica. Na figura aparecem duas curvas que representam esta razão calculadas com as distribuições de energia dos protons e neutrons e com os valores da razão  $n_0/p_0$  no topo da atmosfera de P. Lipari [42], e de M.G. Thomson e M.R. Whalley [45]. Na figura também é mostrado um cálculo por nós efetuado usando as mesmas distribuições de P. Lipari, porém, com um livre percurso médio dos nucleons no ar ( $\lambda = 80g/cm^2$ ) menor que o valor usado pelo autor ( $\lambda = 86g/cm^2$ ) na referência acima citada.

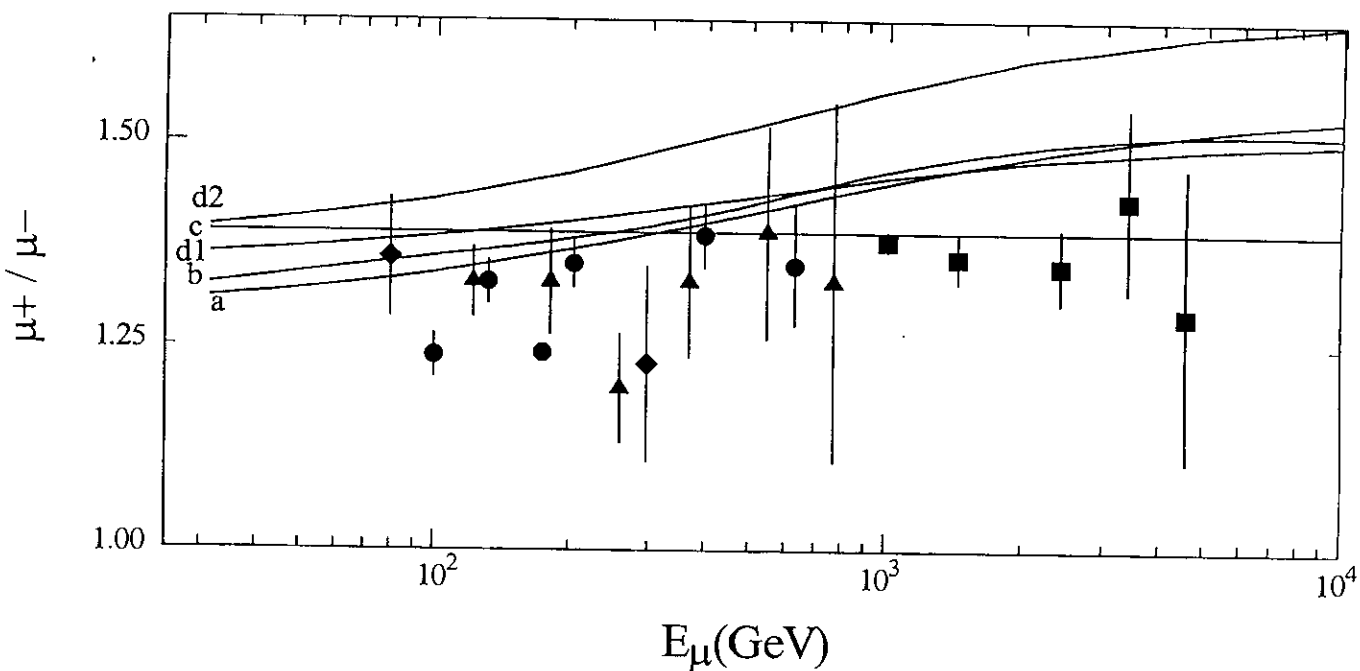


Figura 4.2

Razão  $\mu + / \mu -$  ao nível do mar para  $\theta = 0$ .

● MARS, ▲ Alkofer et al., et al., ▲ Baxendale et al. e ■ Ashley II et al. - Ref. [48]; a) Cálculo feito por P. Lipari - Ref. [42]; b) Resultado do presente cálculo; c) Cálculo feito por D.P. Bhattacharyya - Ref. [49]; d1) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley - Ref. [45] - Alternativa 1; d2) Cálculo efetuado por M.G. Thompson e M.R. Whalley - Ref. [45] - Alternativa 2.

A figura (4.2) mostra a razão  $\mu^+/\mu^-$  em função da energia do muon para  $\theta = 0$ . Nessa figura aparecem comparações entre os nossos cálculos e os realizados por P. Lipari [42], por M.G. Thomson e M.R. Whalley [45] e por D.P. Bhattacharyya [49]. Na figura também aparecem comparações entre os diversos cálculos teóricos e dados de quatro experiências [48].

Os cálculos realizados na ref. [45] são mostrados como duas curvas, as alternativas 1 e 2. Na alternativa 1, na produção dos kaons pelos neutrons foi suposta válida a relação  $Z_{pK^\pm} = Z_{nK^\pm}$  e na alternativa 2 consideramos a mesma lei de simetria usada para a produção dos pions  $Z_{pK^\pm} = Z_{nK^\mp}$ . A alternativa 2 é muito menos provável que a alternativa 1.

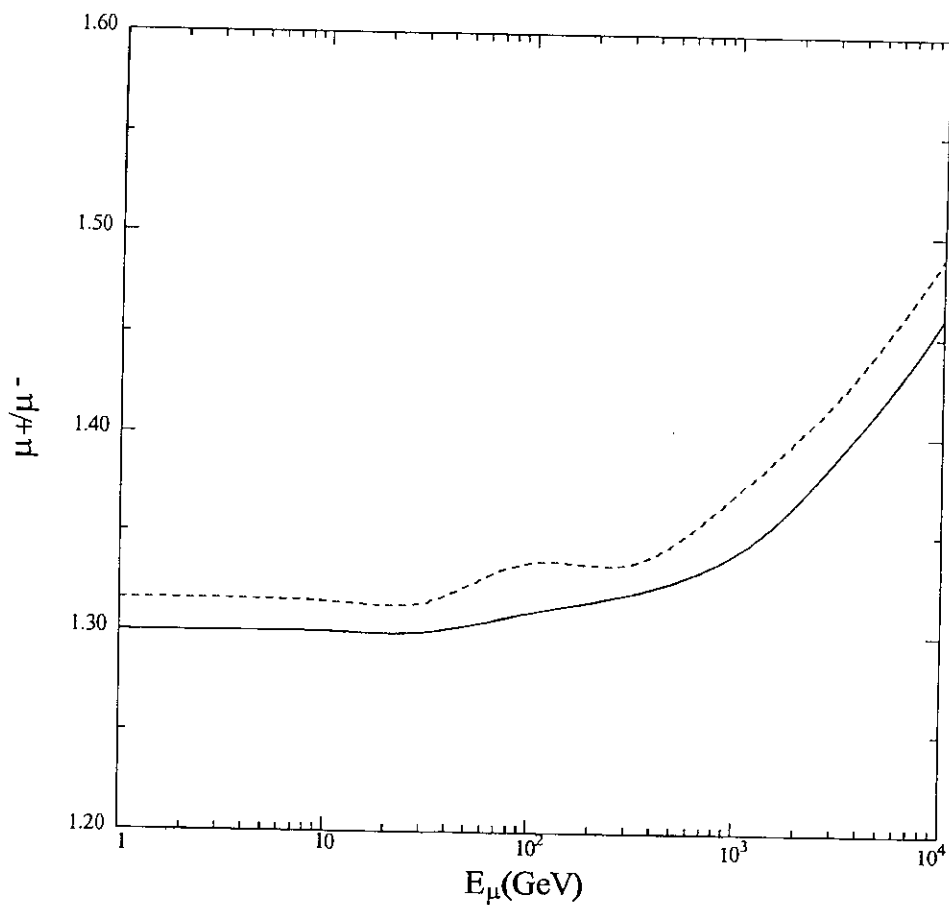


Figura 4.3

Razão  $\mu^+/\mu^-$  ao nível do mar para  $\theta = 89^\circ$ ;

— Cálculos efetuados por P. Lipari - Ref. [42]; - - - Resultado do presente cálculo.

A figura 4.3 mostra uma comparação entre nossos cálculos e os feitos por P. Lipari para a razão  $\mu^+/\mu^-$ . Nossos cálculos são feitos para  $\theta = 89^\circ$  e os de P. Lipari para  $\theta = 90^\circ$ .

Nas figuras (4.2) e (4.3) ignoramos as perdas de energia dos muons ao atravessar a atmosfera, pois, essas perdas afetam os  $\mu^+$  e  $\mu^-$  de maneira idêntica. Também desprezamos os decaimentos dos  $\mu^\pm$  em  $e^\pm(\nu_e, \nu_\nu)$ .

O resultado obtido na referência [45] superestima a razão  $\mu^+/\mu^-$ , pois, usa dados de reações ( $p - p$ ) e não das reações ( $p$ -núcleo). Além disso, o valor de  $Z_{pm}$  por ele usado é aproximadamente o dobro do utilizado por P. Lipari e utilizado em nossos cálculos.

Esses fatos contribuem para elevar a razão  $\mu^+/\mu^-$  para valores de 1.4 – 1.6 no intervalo de energia 100  $GeV$  a 10  $TeV$ .

O resultado de D.P. Bhattacharyya apresenta uma razão  $\mu^+/\mu^-$  praticamente constante em todo o intervalo de energia. Isto vem do fato dele não ter levado em conta a influência dos kaons ou ter usado nos cálculos um fator  $Z_{NK}$  muito pequeno. A 10 $GeV$  os muons originados do decaimento dos kaons são aproximadamente 10% dos muons originados dos pions, razão que chega a 34% a 5 $TeV$ .

# Capítulo 5

## Discussões e Conclusões

As equações de difusão dos hadrons são resolvidas analiticamente usando a Teoria dos Semigrupos e considerando o aumento, com a energia, da seção choque hadron-núcleo. As soluções são colocadas em formas compactas (expressões (2.7) e (2.19)) que se simplificam quando se considera que tanto o espectro dos raios cósmicos primários como as seções de choque hadron-núcleo variam com a energia na forma de potência. (expressões (2.20) e (2.26)).

Os fluxos integrais de hadrons em altitudes de montanha decrescem quando incluímos, em nossos cálculos, o crescimento da seção de choque com a energia e (ou) o decréscimo do coeficiente de elasticidade dos nucleons.

Através da comparação com os fluxos integrais de hadrons medidos com câmaras de emulsões nucleares em altitudes de montanha é possível se obter informações sobre as

interações hadrônicas a altas energias. Neste trabalho nós mostramos que na região de energia de 1 a 100 TeV o coeficiente de inelasticidade que ajusta nossos cálculos aos dados experimentais é  $\langle K \rangle = 0.63$ . Este resultado está de acordo com resultados obtidos de aceleradores e extrapolados para a região de Raios Cósmicos por Hillas [31].

A teoria dos semigrupos foi também usada para resolver as equações de difusão dos hadrons na atmosfera quando se leva em conta, também, o termo do decaimento dos mesons em muons. A solução encontrada foi colocada em termos de uma expansional e foi usado um procedimento desenvolvido por Feynman para ordenar os operadores exponenciais não comutativos que aparecem na solução.

Esse método permite que se utilize um espectro primário em sua forma mais geral (não simplesmente uma forma de potência da energia) e também independe do intervalo de energia e da profundidade atmosférica para os quais o cálculo é realizado.

A estimativa feita no capítulo 2 sobre o coeficiente de inelasticidade ( $\langle K \rangle \sim 0.63$ ) é utilizada na obtenção do fluxo zenital de muons e também na razão  $\mu^+/\mu^-$  calculados ao nível do mar. Como mencionado no início do capítulo 3, os livres percursos médios dos hadrons no ar foram considerados constantes, pois, a dependência com a energia dos mesmos tem pouca influência sobre os fluxos muônicos (3%-5%).

Nossos resultados estão em ótimo acordo com os fluxos zenitais de muons obtidos experimentalmente para  $\theta = 0^\circ$  (Allkofer et al. [41]) e  $\theta = 89^\circ$  (Experimento Mutron [43]). Eles, também, estão em completo acordo com os fluxos zenitais obtidos teoricamente por L. Lipari [42] e A.V. Butkevich [52].

Os fluxos muônicos obtidos por Lipari são, aproximadamente, 3% menores que nossos resultados e isso se deve ao fato que o coeficiente de inelasticidade usado pelo referido autor é menor que aquele por nós empregado, e também à existência de uma pequena diferença nos valores dos livres percursos médios dos nucleons no ar ( $86 \text{ g/cm}^2$  para P. Lipari e  $80 \text{ g/cm}^2$  dos nossos calculos). As diferenças nesses dois parâmetros conduzem a um fluxo de nucleons de P. Lipari maior, porém, um fluxo de mesons menor que os obtidos em nossos cálculos.

Nossos cálculos dão um fluxo de muons 6% menor que o resultado obtido por A.V. Butkevich. Esse resultado se deve a várias diferenças entre os dois cálculos (Modelo para a atmosfera terrestre, Modelo das Interações Hadrônicas, e valores bem diferentes para descrever a perda de energia dos muons no ar).

Devido à pequena diferença entre os nossos resultados e os obtidos por P. Lipari, podemos considerar que as aproximações feitas pelo referido autor podem ser usadas de maneira satisfatória para se obter os fluxos zenitais dos muons ao nível do mar e também para estudar a difusão dos muons que são detectados em experimentos subterrâneos e subaquáticos.

Na obtenção do fluxo dos neutrinos atmosféricos ( $500 \text{ MeV} \geq E \geq 3 \text{ GeV}$ ), um cálculo mais sofisticado que o apresentado por P. Lipari deve ser feito. Nesse cálculo devemos incluir um espectro primário com uma dependência da energia diferente da forma usual de potências, e efeitos geomagnéticos sobre o fluxo de muons que servem de base para o cálculo dos fluxos dos neutrinos.



A razão  $\mu^+/\mu^-$  por nós encontrada é menor que a obtida por M.G. Thomson and M.R Whalley [45], porém maior que a obtida por Lipari [42]. Ela, entretanto, se encontra acima dos dados experimentais, pois em nossos cálculos não foram incluídos resultados mais recentes sobre as interações núcleo-núcleo (só usamos os fatores  $Z_{ij}$  de reações próton-núcleo) e também não introduzimos correções, nesses fatores, do efeito EMC.

O aumento, com a energia, da diferença entre o fluxo de  $\mu^+$  em relação ao fluxo de  $\mu^-$ , que se deve ao crescimento da produção de kaons, é mostrado em nossos resultados e reproduzem os resultados de P. Lipari e também os dados experimentais.

A razão de muons vindos dos kaons em relação aqueles vindos dos pions aumenta de aproximadamente 10% para  $E = 100 \text{ GeV}$  até cerca de 40% em  $100 \text{ TeV}$ . A influência do decaimento dos kaons é muito maior quando se calcula os fluxos de neutrinos muônicos, chegando, segundo cálculos feitos por A.V. Butkevich e por P. Lipari, a aproximadamente 80% a altas energias.

Como as seções de choque inclusivas para a produção de kaons não são tão bem determinadas como as da produção dos pions, as incertezas que se obtém quando se calcula os fluxos dos neutrinos muônicos são muito mais acentuadas que as encontradas no cálculo dos fluxos muônicos.

Devido à precisão dos experimentos para a detecção dos muons ao nível do mar, podemos usar esses fluxos para estimar os fatores  $Z_{ij}$  para a produção dos kaons que servirão de base para o aprimoramento dos cálculos numéricos dos neutrinos atmosféricos.

Na continuação deste trabalho pretende-se estudar futuramente alguns tópicos que

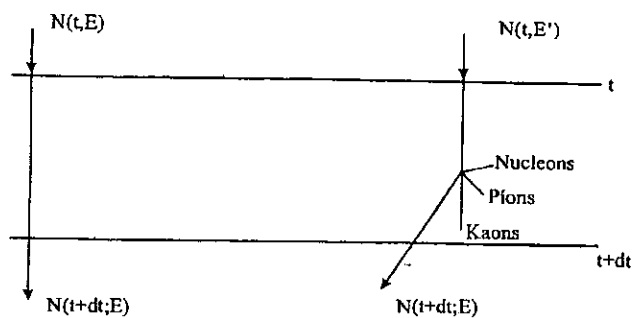
estão intimamente ligados aos cálculos aqui efetuados. Tais temas são:

- a) Obter a razão  $R = \frac{\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu}{\nu_e + \bar{\nu}_e}$  e comparar com os resultados encontrados em detectores subterrâneos. Estudar o problema da oscilação entre os diferentes sabores de neutrinos.
- b) Obter o “Event-Rate” do detector Micro-Urca que está em fase de montagem no IME/RJ. Para isso devemos resolver o problema da difusão dos muons em rochas, considerando as perdas de energia discretas dos muons.
- b) Estudar a produção de partículas com grande sabor usando dados sobre os fluxos muônicos obtidos ao nível do mar e em detectores subterrâneos. O aumento do fluxo de muons para energias acima de  $30 \text{ TeV}$  é relacionado ao decaimento das partículas charmosas e de outras partículas mais pesadas.
- c) Estudar a influência da composição química da radiação cósmica primária sobre os fluxos muônicos e obter informações sobre o espectro de energia dos raios cósmicos primários na região de energia  $E_0 \sim 10^{15} \text{ eV}$  (joelho da radiação cósmica primária).

# Apêndice A

## Montagem das Equações de Difusão dos Nucleons e dos Mésons ( $\pi^\pm, k^\pm$ )

O desenvolvimento das componentes nucleônica e mesônica na atmosfera podem ser descritas em primeira aproximação por uma equação integro diferencial do tipo Volterra. Vamos supor que para uma profundidade  $t$  da atmosfera, um nucleon ao atravessá-la entre  $t$  e  $t + dt$ , pode ou não sofrer uma interação com o núcleo do ar. Então, a probabilidade para que o nucleon sofra uma interação no elemento  $dt$  pode ser escrita como  $\frac{dt}{\lambda}$ .



Na figura um nucleon chega na profundidade  $t$  com energia  $E'$ , havendo uma chance deste interagir com núcleos de ar para dar origem a partículas secundárias com energia  $E$ , onde

$$E = \eta E'$$

e  $\eta$  sendo a elasticidade da interação que está relacionada a distribuição de energia dos nucleons secundários.

Então podemos escrever

$$N(t + dt, E)dE = \left(1 - \frac{dt}{\lambda}\right) N(t, E)dE + dE \int_E^\infty N(t, E') f_{NN}(E, E') \frac{dt}{\lambda} dE' \quad (\text{A.1})$$

onde  $N(t + dt, E)dE$  é o fluxo de nucleons em  $(t + dt)$  com energia entre  $E$  e  $E + dE$ , e  $f(E, E')dE$  é a distribuição de energia dos nucleons originados da interação.

Na equação (A.1), o primeiro termo do lado direito é o fluxo de nucleons que não sofrem interações no elemento  $dt$ , e o segundo se refere ao fluxo de nucleons que interagiram somente uma vez no elemento  $dt$ .

Vamos supor que a distribuição de energia seja uma função homogênea das variáveis  $E$  e  $E'$ , tal que podemos escrevê-la como

$$f_{NN}(E, E')dE = f_{NN}(E/E') \frac{dE}{E'} \quad (\text{A.2})$$

Expandindo o termo  $N(t + dt, E)$  numa série de Taylor e considerando na expansão, somente a derivada parcial de primeira ordem temos

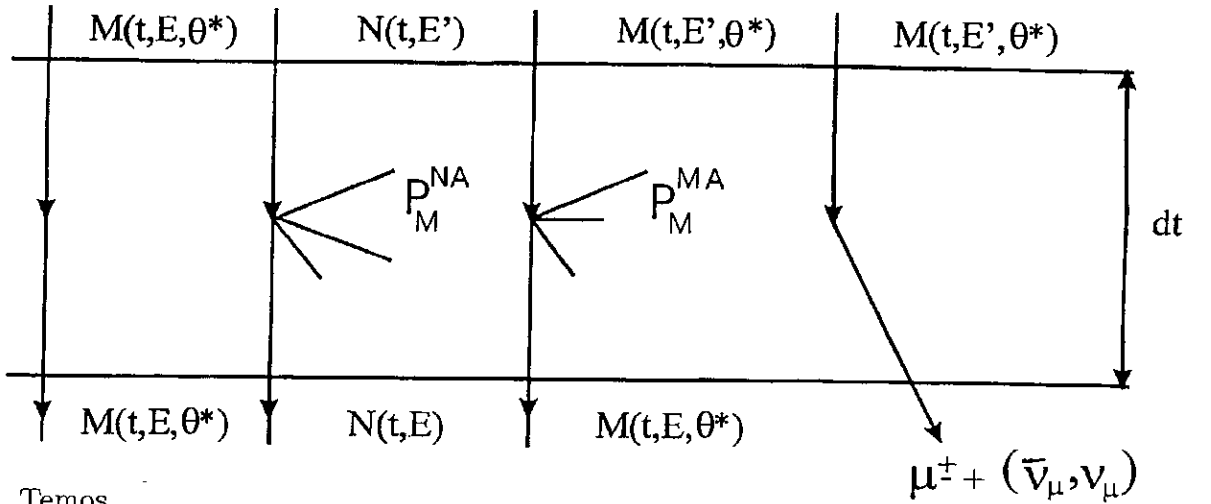
$$\begin{aligned}
N(t + dt, E) &= N(t, E) + \frac{\partial N(t, E)}{\partial t} dt + \dots = \\
&= \left(1 - \frac{dt}{\lambda}\right) N(t, E) + \int_0^1 N\left(t, \frac{E}{\eta}\right) \cdot \frac{d\eta}{\eta} \frac{dt}{\lambda} \quad (A.3)
\end{aligned}$$

Após algumas simplificações, temos

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t, E) = -\frac{1}{\lambda} N(t, E) + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 N\left(t, \frac{E}{\eta}\right) \cdot f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (A.4)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (A.4) corresponde aos nucleons que interagem em  $dt$ , chegando em  $t + dt$  com energia menor que  $E$  desaparecendo em  $dt$  (sumidouro). O segundo termo representa os nucleons que são produzidos em  $dt$  (fonte).

A equação de difusão dos mesons  $M(\pi^\pm, k^\pm)$  é obtida de maneira análoga e pictoricamente é mostrada no esquema abaixo.



$$\frac{\partial M(t, E, \theta^*)}{\partial t} = -\frac{M(t, E, \theta^*)}{\lambda_M} + \frac{M(t, E, \theta^*)}{\lambda_{dec}} + P_M^{NA}(t, E, \theta^*) + P_M^{MA}(t, E, \theta^*) \quad (A.5)$$

Na equação (A.5), o primeiro termo se refere à atenuação dos mesons na atmosfera. O segundo termo diz respeito ao decaimento dos mesons ( $\pi, k$ ) carregados em múons. Os demais correspondem à produção de píons carregados devido às interações nucleon-núcleo, meson-núcleo.

O meson lider sobrevivente da interação meson-núcleo é incluído no termo de produção dos mesons  $P_M^{MA}(t, E, \theta^*)$ .

As produções de mesons carregados, nas interações ( $N \rightarrow M, M \rightarrow M$ ), são dados por

$$P_M^{NA}(t, E) = \int_0^1 \frac{N(t, E/x)}{\lambda} f_{NM}(x) \frac{dx}{x} \quad (\text{A.6})$$

$$P_M^{MA}(t, E, \theta^*) = \int_0^1 \frac{M(t, E/x, \theta^*)}{\lambda_M} f_{MM}(x) \frac{dx}{x} \quad (\text{A.7})$$

onde  $x$  é variável de Feynman e a altas energias é igual a  $E/E'$ .

# Apêndice B

## Resolução da Equação de Difusão dos Mésons $M$ Usando A Teoria do Semigrupos

A equação de difusão dos nucleons na atmosfera, expressão (2.3) é

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\frac{N(t, E)}{\lambda(E)} + \int_0^1 \frac{N\left(t, \frac{E}{\eta}\right)}{\lambda(E/\eta)} f_{NN}(\eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (\text{B.1})$$

e para os mesons a expressão (2.14) é

$$\frac{\partial M(t, E)}{\partial t} = -\frac{M(t, E)}{\lambda_M(E)} + \int_0^1 \frac{M(t, E/x)}{\lambda_M(E/x)} f_{MM}(x) \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{N(t, E/x)}{\lambda(E/x)} f_{NM}(x) \frac{dx}{x} \quad (\text{B.2})$$

Definindo os operadores

$$\hat{A}_N = \left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \left(\frac{1}{\lambda(E)}\right) \quad (\text{B.3})$$

$$\hat{B}_N = \left(\int_0^1 f_{NM}(x) dx \hat{\sigma}_N\right) \left(\frac{1}{\lambda(E)}\right) \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{B}_M = \left(1 - \int_0^1 f_{MM}(x) dx \hat{\sigma}_M\right) \frac{1}{\lambda_M(E)} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{com } \hat{\sigma} F(t, E) = \frac{1}{x} F\left(t, \frac{E}{x}\right) \quad (\text{B.6})$$

Introduzindo o operador  $\hat{A}_N$  na equação (B.1) temos

$$\frac{\partial N(t, E)}{\partial t} = -\hat{A}_N F_N(t, E) \quad (\text{B.7})$$

A solução da eq. (B.7) é

$$N(t, E) = N(0, E)e^{-\hat{A}_N t} \quad (\text{B.8})$$

onde  $N(0, E)$  representa o fluxo de nucleons no tópo da atmosfera ( $t = 0$ ), que é escrito como

$$N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (\text{B.9})$$

Em termos dos operadores  $\hat{B}_N$  e  $\hat{B}_M$ , a equação de difusão dos mesons pode ser escrita como

$$\frac{\partial M(t, E)}{\partial t} = \hat{B}_M M(t, E) + \hat{B}_N N(t, E) \quad (\text{B.10})$$

A solução da equação (B.10) é

$$M(t, E) = \int_0^t e^{-\hat{B}_M(t-z)} \hat{B}_N N(z, E) dz \quad (\text{B.11})$$

Usando (B.8) na equação acima temos

$$M(t, E) = \int_0^t e^{-\hat{B}_M(t-z)} \hat{B}_N e^{-\hat{A}_N z} N(0, E) dz \quad (\text{B.12})$$

ou

$$M(t, E) = \int_0^t \sum_{k,n} z^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-1)^k}{k!} \hat{B}_M^k (t-z)^k \hat{B}_N \hat{A}_N^n N(0, E) dz \quad (\text{B.13})$$



Aplicando o operador  $\hat{A}_N^n$  na autofunção que representa o fluxo primário,  $N_0 E^{-(\gamma+1)}$ , obtemos

$$\hat{A}_N^n N(0, E) = \left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right)^n \left(\frac{1}{\lambda^n(E)}\right) N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (\text{B.14})$$

para,  $n = 0$

$$\hat{A}^0 N(0, E) = N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (\text{B.15})$$

para,  $n = 1$ ,

$$\hat{A}_N N(0, E) = \left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \frac{1}{\lambda(E)} N_0 E^{-(\gamma+1)} \quad (\text{B.16})$$

com

$$\lambda(E) = \lambda_0 E^{-\alpha} \quad (\text{B.17})$$

A expressão (B.16) fica

$$\hat{A}_N N(0, E) = \left(1 - \int_0^1 \eta^{\gamma-\alpha} f_{NN}(\eta) d\eta\right) \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda(E)} \quad (\text{B.18})$$

Para segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} \hat{A}_N^2 N(0, E) &= \hat{A}_N(\hat{A}_N N(0, E)) = \left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \cdot \\ &\left(1 - \int_0^1 f_{NN}(\eta) d\eta \hat{\sigma}\right) \left(\frac{1}{\lambda^2(E)}\right) N_0 E^{-(\gamma+1)} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

que resulta

$$\hat{A}_N^2 N(0, E) = \left(1 - \int_0^1 \eta^{\gamma-\alpha} f_{NN}(\eta) d\eta\right) \left(1 - \int_0^1 \eta^{\gamma-2\alpha} f_{NN}(\eta) d\eta\right) \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda^2(E)} \quad (\text{B.20})$$

Chamando a integral

$$\int_0^1 \eta^{\gamma-j\alpha} f_{NN}(\eta) d\eta = \langle \eta^{\gamma-j\alpha} \rangle \quad (\text{B.21})$$

o  $n$ -ésimo termo, por indução, é colocado na forma

$$\hat{A}_N^n N(0, E) = I_N(\gamma, \alpha, n) \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda(E)^n} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$I_N(\gamma, \alpha, n) = \prod_{j=1}^n (1 - \langle \eta^{\gamma-j\alpha} \rangle) \quad (\text{B.23})$$

e o fluxo de nucleons fica

$$N(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{t}{\lambda(E)} \right)^n I_N(\gamma, \alpha, n) N(0, E) \quad (\text{B.24})$$

A atuação do operador  $\hat{B}_N$  na expressão (B.24) resulta

$$B_N N(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{t^n}{\lambda(E)^{n+1}} \right) I_N(\gamma, \alpha, n) Z_{NM}(\gamma, n, \alpha) N(0, E) \quad (\text{B.25})$$

onde

$$Z_{NM}(\gamma, n\alpha) = \int_0^1 x^{\gamma-(n+1)\alpha} f_{NM}(x) dx . \quad (\text{B.26})$$

que representa o espectro de energia dos mesons secundários da colisão nucleon-núcleo de ar.

A aplicação de  $\hat{B}_M^k$  em (B.25) resulta

$$\begin{aligned} \hat{B}_M^k \hat{B}_N N(t, E) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n I_N(\gamma, \alpha, n) Z_{NM}(\gamma, n, \alpha) \cdot \\ &\cdot \left( 1 - \int_0^1 f_{NM}(x) dx \hat{\sigma}_M \right)^k \frac{N(0, E)}{(\lambda_M(E))^k \lambda(E)^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Em analogia aos cálculos feitos para se obter (B.25) podemos escrever a expressão (B.27) na forma

$$\hat{B}_M^k \hat{B}_N N(t, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n I_N(\gamma, \alpha, n) \cdot Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) \cdot \frac{N(0, E)}{\lambda_M(E)^k \lambda(E)^{n+1}} \cdot I_{MM}(\gamma, \alpha, k, n) \quad (\text{B.28})$$

onde

$$I_{MM}(\gamma, \alpha, k, n) = \prod_{i=1}^k \left(1 - \langle x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} \rangle\right) \quad (\text{B.29})$$

com

$$\langle x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} \rangle = \int_0^1 f_{MM}(x) dx x^{\gamma-\alpha(i+n+1)} \quad (\text{B.30})$$

e o fluxo mesônico pode ser escrito como

$$\begin{aligned} M(t, E) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t dz \frac{(-1)^k (-1)^n}{k! n!} \left( \frac{(t-z)}{\lambda_M(E)} \right)^k \cdot \left( \frac{z}{\lambda(E)} \right)^n \cdot \\ &\cdot \frac{N(O, E)}{\lambda(E)} Z_{NM}(\gamma, \alpha, n) I_{MM}(\gamma, \alpha, k, n) I_N(\gamma, \alpha, n) . \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Para  $\alpha = 0$ , as expressões (B.23), (B.26) e (B.29) ficam

$$I_N(\gamma, \alpha, n) = (1 - \langle \eta^\gamma \rangle) \quad (\text{B.32})$$

$$Z_{NM}(\alpha, n, \gamma) = \int_0^1 x^\gamma f_{NM}(x) dx \quad (\text{B.33})$$

e

$$I_{MM}(\alpha, n, \gamma, k) = (1 - \langle x^\gamma \rangle) \quad (\text{B.34})$$

e a expressão do fluxo mesônico resulta na expressão usualmente empregada para  $\lambda$  e  $\lambda_M$

constantes

$$M(t, E) = \frac{N_0 E^{-(\gamma+1)}}{\lambda} Z_{NM}(\gamma) \frac{e^{-t'/L_\pi} - \bar{e}^{t/L}}{1/L - 1/L_M} \quad (\text{B.35})$$

onde

$$L = \frac{\lambda}{1 - \langle \eta^\gamma \rangle} . \quad (\text{B.36})$$

e

$$L_M = \frac{\lambda_M}{1 - Z_{MM}} .$$

são, respectivamente, os livre percursos médios de absorção no ar dos nucleons e dos mesons.

# Apêndice C

## Operador Expansional

Uma discussão sucinta dos operadores expansionais e de suas principais propriedades será feita neste apêndice. Esses operadores aparecem neste trabalho como soluções das equações de difusão das partículas na atmosfera. Resolvendo as equações integro-diferenciais que descrevem a difusão das partículas na atmosfera, em sua forma de operadores, obtém-se soluções que são colocadas na forma de operadores exponenciais que geralmente não comutam entre si. Dessa maneira é necessário utilizar a técnica desenvolvida por Feynman [19], de ordenação temporal de operadores, e de grande uso na Mecânica Quântica, para se obter soluções das equações de difusão. Esses operadores exponenciais ordenados são chamados de Expansionais e são muito utilizados nesta tese.

A técnica da **decomposição** é um meio para se decompor qualquer operador expansional num produto de operadores exponenciais ordinários (que comutam entre si).

Neste trabalho foi feita uma adaptação do Método de Ordenação Temporal de Opera-

adores de Feynman para ordenação de operadores que dependem do parâmetro  $t(g/cm^2)$  que representa a profundidade atmosférica.

Em Mecânica Quântica, o estudo da evolução temporal de um sistema físico pode ser feito mediante duas representações equivalentes, a representação de Heisenberg e a de Schrödinger. Os operadores de uma representação são transformados para os da outra representação através de uma transformação de equivalência. O responsável por essa transformação é o operador de evolução temporal  $\hat{G}(\tau)$ . Assim,

$$\hat{A}(\tau) = \hat{G}(\tau)\hat{A}G^{-1}(\tau) \quad (C.1)$$

onde  $\hat{A}(\tau)$  é o operador  $\hat{A}$  na representação de Heisenberg, e  $\hat{A}$  é o mesmo operador na representação de Schrödinger. Nesta última representação,  $\hat{A}$  não apresenta dependência temporal explícita.

Considere um sistema físico onde o hamiltoniano dependa explicitamente do tempo. A equação para o operador  $\hat{G}(\tau)$  é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{G}(\tau) = \hat{H}(\tau)\hat{G}(\tau) \quad (C.2)$$

Em geral,  $[\hat{H}(\tau), \hat{H}(\tau')] \neq 0$  para  $\tau \neq \tau'$ . Assim, a solução dessa equação é colocada na forma de um expansional,

$$\hat{G}(\tau) = Exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau')d\tau' \right] \quad (C.3)$$

O símbolo  $Exp$  ( $E$  maiúsculo) é para diferenciar da exponenciação usual e pode ser

representado por uma expansão em múltiplas integrais.

$$\hat{G}(\tau) = 1 - \int_{\tau_0}^{\tau} \hat{H}(\tau') d\tau' + \int_{\tau_0}^{\tau} H(\tau') d\tau' \int_{\tau'}^{\tau} H(\tau'') d\tau'' - \dots \quad (\text{C.4})$$

### C-1) O MÉTODO DA ORDENAÇÃO DOS OPERADORES EXPANSIONAIS.

Seja  $H(\lambda)$  um operador que envolve um parâmetro real  $\lambda$  e que é composto por um número arbitrário de operadores sujeitos a regras de comutação bem definidas.

O operador da transformação gerado por  $H(\lambda)$ , correspondendo à transição do parâmetro  $\lambda$  de uma configuração inicial “a” até um estado final “b”, é definido pelo produto de infinitas aplicações de operadores de transformações infinitesimais  $(\mathbb{1} + d\lambda H(\lambda))$ , arranjados da direita para a esquerda, correspondendo a sucessão de ordenamento do parâmetro  $\lambda$  desde ‘a’ até ‘b’.

Como em geral  $[H(\lambda), H(\lambda')] \neq 0$ , deve-se tomar cuidado em expandir numa série de potências do gerador da transformação  $H(\lambda)$ . O operador expansional é definido como

$$T = \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] \quad (\text{C.5})$$

Aqui, como já mencionado anteriormente, o símbolo  $\text{Exp}$  ( $E$  maiúsculo) representa o expansional

$$T = \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}^{(n)} \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] \quad (\text{C.6})$$

onde, naturalmente

$$\text{Exp}^{(1)} \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \int_a^b d\lambda H(\lambda) \quad (\text{C.7})$$

e

$$\text{Exp}^{(n+1)} \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = \int_a^b d\mu H(\mu) \text{Exp}^{(n)} \left[ \int_a^c d\lambda H(\lambda) \right] \quad (\text{C.8})$$

Chamando

$$T(b, a) = \text{Exp} \left( \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right) \quad (\text{C.9})$$

podemos obter algumas principais propriedades desse operador.

Propriedades do Operador  $T(b, a)$

$$1) \quad T(a, a) = \mathbb{1} \quad (\text{C.10})$$

$$2) \quad T^{-1}(b, a) = \text{Exp} \left[ \int_b^a H(\lambda) d\lambda \right] = \text{Exp} \left[ - \int_a^b H(\lambda) d\lambda \right] \quad (\text{C.11})$$

Assim

$$3) \quad T(b, a) T^{-1}(b, a) = \mathbb{1} \quad (\text{C.12})$$

Também

$$4) \quad T(b, c) T(c, a) = T(b, a) \quad (\text{C.13})$$

e

$$5) \quad T^{-1}(b, a) T(b, c) = T(a, c) \quad (\text{C.14})$$

A álgebra dos Expansionais é completada com as regras de composição e decomposição obedecidas por esses operadores. Se o gerador  $H(\lambda)$  é a soma de dois operadores  $F(\lambda)$  e  $G(\lambda)$ , tal que  $[F(\lambda), G(\lambda)] \neq 0$ , então o expansional pode ser fatorizado como

$$\text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = \text{Exp} \left[ \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right] \text{Exp} \left[ \int_a^b \tilde{G}(\lambda) d\lambda \right] \quad (\text{C.15})$$



ou

$$Exp \left[ \int_a^b F(\lambda) + G(\lambda) \right] d\lambda = Exp \left[ \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right] Exp \left[ \int_a^b \bar{G}(\lambda) d\lambda \right] \quad (C.16)$$

A fim de determinar os dois operadores desconhecidos  $F(\lambda)$  e  $\bar{G}(\lambda)$  diferencia-se a expressão (C.15) em relação ao limite superior

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} Exp \left[ \int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] &= F(b) Exp \left[ \int_a^b (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] + \\ &+ G(b) Exp \left[ \int_a^b F(\lambda) + G(\lambda) \right] \equiv \\ &\equiv F(b) Exp \left( \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right) Exp \left( \int_a^b \bar{G}(\lambda) d\lambda \right) + \\ &+ Exp \left( \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right) \bar{G}(b) Exp \left( \int_a^b \bar{G}(\lambda) d\lambda \right) \end{aligned} \quad (C.17)$$

e ficamos com a expressão

$$G(b) Exp \left[ \int_a^b d\lambda (F(\lambda) + G(\lambda)) \right] = Exp \left( \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right) \bar{G}(b) \cdot Exp \left[ \int_a^b \bar{G}(\lambda) d\lambda \right] \quad (C.18)$$

Multiplicando (C.17) à esquerda por  $T_F(a, b)$  e à direita por  $T_{\bar{G}}(a, b)$  e substituindo  $b$  por  $\lambda$  obtem-se

$$\bar{G}(\lambda) = Exp \left[ \int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right] \cdot G(\lambda) Exp \left[ \int_a^\lambda d\mu (F(\mu) + G(\mu)) \right] \cdot Exp \left[ \int_\lambda^a d\mu \bar{G}(\mu) \right] \quad (C.19)$$

Usando (C.15) na (C.18) e as propriedades de operadores inversos obtem-se

$$\bar{G}(\lambda) = Exp \left[ \int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right] G(\lambda) Exp \left[ \int_a^\lambda F(\mu) d\mu \right] \quad (C.20)$$

Analogamente a expressão (C.16) pode ser reescrita como

$$\bar{F}(\lambda) = Exp \left[ \int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right] F(\lambda) Exp \left[ \int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right] \quad (C.21)$$

Assim as regras de decomposição das expansionais podem ser estabelecidas:

$$\begin{aligned}
& \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda [F(\lambda) + G(\lambda)] \right] = \text{Exp} \left[ \int_a^b F(\lambda) d\lambda \right] \cdot \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda \text{Exp} \left( \int_\lambda^b d\mu F(\mu) \right) \right. \\
& \cdot \left. G(\lambda) \text{Exp} \left( \int_b^\lambda F(\mu) d\mu \right) \right] \\
= & \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda \text{Exp} \left( \int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right) F(\lambda) \text{Exp} \left( \int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right) \right] \text{Exp} \left( \int_a^b d\lambda G(\lambda) \right)
\end{aligned} \tag{C.22}$$

onde  $F$  e  $G$  são sempre não comutáveis.

As regras de composição das expansionais também podem ser estabelecidas de maneira similar, e são colocadas na forma

$$\begin{aligned}
& \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda F(\lambda) \right] \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda G(\lambda) \right] \\
= & \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda \left\{ F(\lambda) + \text{Exp} \left[ \int_a^\lambda d\mu F(\mu) \right] \cdot G(\lambda) \cdot \text{Exp} \cdot \left[ \int_\lambda^a d\mu F(\mu) \right] \right\} \right] \tag{C.23}
\end{aligned}$$

$$= \text{Exp} \left[ \int_a^b d\lambda \left\{ G(\lambda) + \text{Exp} \left[ \int_b^\lambda d\mu G(\mu) \right] F(\lambda) \text{Exp} \left[ \int_\lambda^b d\mu G(\mu) \right] \right\} \right] \tag{C.24}$$

Com as expressões (C.23) e (C.24) completa-se uma álgebra necessária e suficiente para os operadores expansionais cujos geradores do grupo  $H(\lambda)$  não comutam com  $H(\lambda')$  quando  $\lambda \neq \lambda'$ .

## C-2) O OPERADOR EXPONENCIAL

Um caso particular dos expansionais surge quando  $[H(\lambda), H(\lambda')] = 0$ ; nesse caso o caráter de ordenação deixa de existir. O expansional se transforma no operador exponencial usual.

Assim a letra maiúscula  $E$  que representava o expansional se transforma na letra  $e$  minúscula que representa agora o operador exponencial

$$Exp \left[ \int d\lambda H(\lambda) \right] \rightarrow \exp \left[ \int d\lambda H(\lambda) \right] \quad (C.25)$$

A expressão (C.4) pode ser escrita trocando-se  $\tau, \tau', \tau''$ , etc por  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  etc respectivamente, e usando a definição (C-9),

$$T(b, a) = Exp \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = 1 + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) \cdot \int_a^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) + \int_a^b d\lambda_1 H(\lambda_1) \int_a^{\lambda_1} d\lambda_2 H(\lambda_2) \int_a^{\lambda_2} d\lambda_3 H(\lambda_3) + \dots \quad (C.26)$$

Chamando

$$H(\lambda_1)d\lambda_1 = dx_1 \quad ; \quad H(\lambda_2)d\lambda_2 = dx_2 \quad ; \quad \dots$$

a expressão (C.26) fica

$$T(b, a) = 1 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 \int_{g(a)}^{x_1} dx_2 + \int_{g(a)}^{g(b)} dx_1 \int_{g(a)}^{x_1} dx_2 \int_{g(a)}^{x_2} dx_3 + \dots \quad (C.27)$$

Se  $[H(\lambda_i), H(\lambda_j)] = 0$  para  $i = j$  ou  $i \neq j$ , a expressão (C.27) se transforma no operador exponencial ordinário

$$T(b, a) = \exp \left[ \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right] = e^{\int_a^b d\lambda H(\lambda)} \quad (C.28)$$

A transformação inversa para esse operador é

$$e^{\int_b^a d\lambda H(\lambda)} \equiv e^{-\int_a^b d\lambda H(\lambda)} \quad (\text{C.29})$$

ou seja

$$\left[ \exp \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right]^{-1} = \exp \left( - \int_a^b d\lambda H(\lambda) \right) \quad (\text{C.30})$$

Particularmente quando  $H(\lambda)$  é um operador constante, e assumindo  $a = 0$  e  $b = 1$ , obtem-se o tipo mais familiar de operador exponencial,

$$e^{\int_a^b d\lambda H(\lambda)} = e^{\int_0^1 d\lambda H} = e^H \quad (\text{C.31})$$

As regras de composição e decomposição para esses operadores exponenciais tornam-se

$$e^{F+G} = E^F \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda e^{-\lambda F} G e^{\lambda F} \right] = \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda e^{(1-\lambda)G} F e^{-(1-\lambda)G} \right] e^G \quad (\text{C.32})$$

e

$$\begin{aligned} e^F e^G &= \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda \left( F + e^{\lambda F} G e^{-\lambda F} \right) \right] = \\ &= \text{Exp} \left[ \int_0^1 d\lambda \left[ G + e^{-(1-\lambda)G} F e^{(1-\lambda)G} \right] \right] \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

A notação da expansional em (C.31) e (C.32) foi mantida porque apesar de  $H$  comutar com ele próprio,  $F$  e  $G$  não são necessariamente comutativos.

Concluindo este apêndice apresentamos uma fórmula de uso frequente em nossos cálculos

$$e^{-G} G e^F = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \quad (\text{C.34})$$

onde

$$G_0 = G \quad ; \quad G_n = \frac{1}{n!} [G_{n-1}, F] \quad (\text{C.35})$$

### C-3) ATMOSFERA ISOTÉRMICA PLANA

No capítulo 3 aparecem expansionais que em alguns casos particulares se transformam em exponenciais ordinárias.

Para ângulos zenitais menores que  $60^\circ$  e para uma atmosfera isotérmica, a expansional da expressão (3.36) se transforma numa exponencial ordinária,

$$\begin{aligned} T_M(t, t_0) = \text{Exp} \left[ \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E t \cos \theta} dt \right] &= 1 + \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E t_1 \cos \theta} dt_1 + \\ + \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E t_1 \cos \theta} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{b_M}{E t_2 \cos \theta} dt_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

onde,  $b_M$  é a constante de decaimento do meson  $M$  no ar,  $t$  é a profundidade atmosférica no plano de deteção e  $\theta$  é o ângulo zenital.

$$I_1 = \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt}{t} = \frac{b_M}{E \cos \theta} \ln(t/t_0) \quad (\text{C.37})$$

$$I_2 = \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt_1}{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt_2}{t_2} = \left( \frac{b_M}{E \cos \theta} \right)^2 \frac{\ln^2(t/t_0)}{2} \quad (\text{C.38})$$

e por indução o  $n$ -ésimo termo da expansão é

$$I_n = \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt_1}{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt_2}{t_2} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt_n}{t_n} = \left( \frac{b_M}{E \cos \theta} \right)^n \frac{\ln^n t/t_0}{n!} \quad (\text{C.39})$$

Assim, a expressão (C.37) torna-se

$$\text{exp} \left[ \int_{t_0}^t \frac{b_M}{E \cos \theta} \frac{dt}{t} \right] = e^{\frac{b_M}{E \cos \theta} \ln t/t_0} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{b_M}{E \cos \theta}} \quad (\text{C.40})$$

que é comum nos cálculos dos fluxos de muons.

# Apêndice D

## Modelo para a Atmosfera Terrestre

Quando se calcula os fluxos de diferentes partículas secundárias da radiação cósmica na atmosfera, é necessário se conhecer como a densidade varia com a altitude acima do nível do mar ou equivalentemente se estabelecer uma relação entre a profundidade atmosférica e a altitude.

O modelo usado neste trabalho foi desenvolvido por K. Maeda [38] baseado na chamada Atmosfera Padrão. Esse modelo é estabelecido a partir de três hipóteses fundamentais,

- a) A composição do ar não se altera com a altitude.
- b) A equação de estado que governa o ar é aproximadamente a de um gás ideal.
- c) A atmosfera está num equilíbrio hidrostático, ou seja,  $g\rho(h) = -\frac{dp(h)}{dh}$  ( $g$  é a aceleração da gravidade,  $p(h)$  é a pressão na altitude  $h$  e  $\rho(h)$  é a densidade atmosférica em  $h$ ).

O perfil da densidade atmosférica fica completamente definido pelo perfil da temperatura e pela profundidade atmosférica ao nível do mar  $x_0$ .

O ajuste de K. Maeda consiste em se escolher uma temperatura constante na Estratosfera ( $h \geq h_t$ ) e numa dependência linear na Troposfera ( $h \leq h_t$ ). A temperatura ao nível do mar é relacionada à temperatura na estratosfera através do gradiente da temperatura na troposfera ( $\Gamma$ ),  $T_0 = T_s - \Gamma h_t$ .

Os quatro parâmetros abaixo relacionados e o valor médio da massa molecular do ar definem completamente a atmosfera.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1030g/cm^2 ; T_s = -56,5^0C \\ \Gamma &= -\frac{dT}{dh} = 6,5^0C/km ; h_t = 11km \\ \langle m_{ar} \rangle &= 4,8 \times 10^{-23}g \end{aligned}$$

A densidade e a profundidade atmosférica em função da altitude em  $km$  são, então, dadas por

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 e^{-\frac{h}{h_0}} & \text{para } h \geq h_t \text{ isotérmica} \\ B(h_b - h)^\alpha & \text{para } h \leq h_t \text{ politrópica} \end{cases} \quad (D.1)$$

$$x(h) = \begin{cases} \rho_0 h_0 e^{-\frac{h}{h_0}} & h \geq h_t \\ A(h_b - h)^{\alpha+1} & h \leq h_t \end{cases} \quad (D.2)$$

A densidade pode também ser expressa em termos da profundidade atmosférica,

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x}{h_0} & ; x \leq x_t \text{ isotérmica} \\ cx^\beta & ; x \geq x_t \text{ politrópica} \end{cases} \quad (D.3)$$

As constantes que aparecem nas equações acima são dadas por

$$h_0 = \frac{T_s K_B}{g(m)} ; h_a = \frac{T_0 K}{g < m >} ; h_b = \frac{T_0}{\Gamma} \quad (D.4)$$

$$\alpha = \frac{h_b}{h_a} - 1 ; \beta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

$$\rho_0 = \frac{x_0}{h_b} e^{\frac{h_t}{h_0}} (\alpha + 1) \left(1 - \frac{h_t}{h_b}\right)^\alpha \quad (D.5)$$

$$A = \frac{x_0}{h_b h_a^\alpha} \left(\frac{h_0 - h_t}{h_b - h_t}\right)^\alpha$$

e

$$B = A(\alpha + 1) , C = \frac{B}{A^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}} , x_t = \rho_0 h_0 e^{\frac{-h_t}{h_0}} \quad (D.6)$$

O valor numérico das constantes são

$$h_0 = 6,34km ; x_t = 230g/cm^2 ; \rho_0 = 2,054 \times 10^{-3}g/cm^3$$

$$h_b = 44,33km ; A = 2,3 \times 10^{-6} , B = 1,2 \times 10^{-10}$$

$$C = 4,439 \times 10^{-6} ; \alpha = 4,25 \text{ e } \beta = 0,81$$

(D.7)



A Figura (D-1) mostra o comportamento da densidade atmosférica em função da altitude  $h$ .

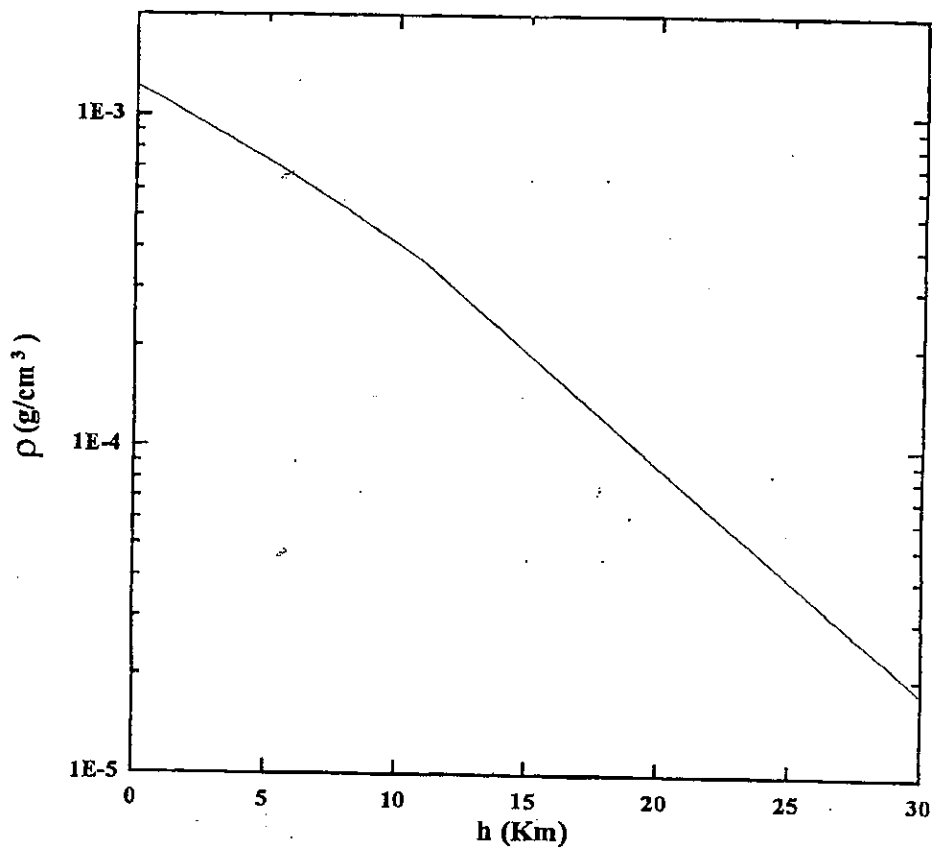
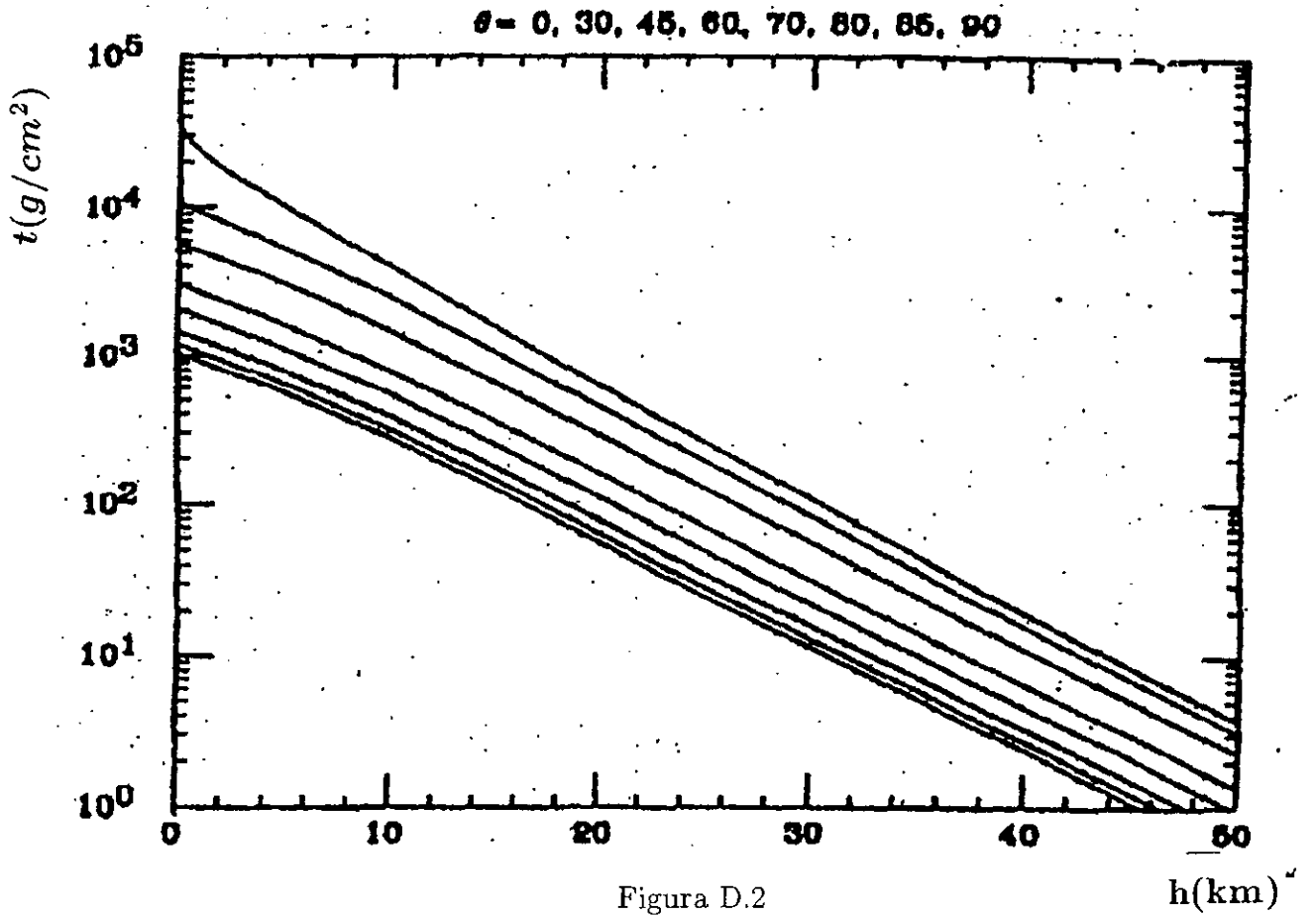


Figura D.1

Densidade do ar em função da altitude acima do nível do mar.

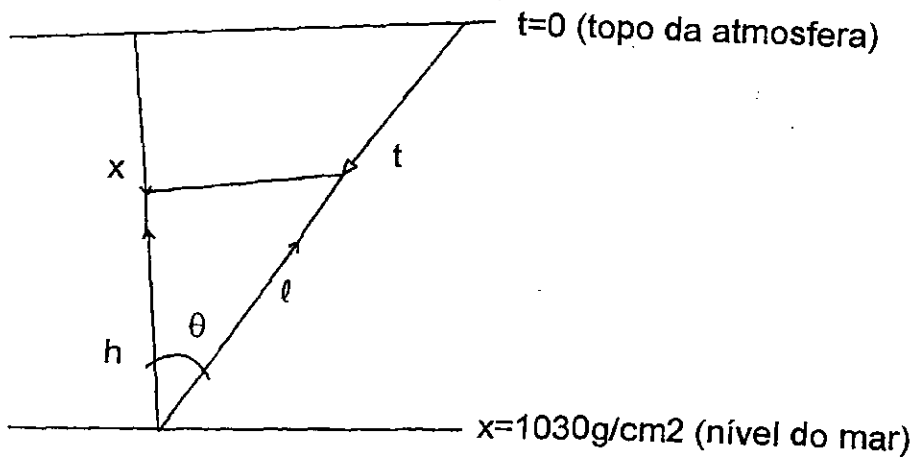
A Figura (D-2) mostra a relação entre a profundidade atmosférica inclinada ( $t$ ) em função da altitude  $h$ . Esse gráfico é obtido através da integral da densidade atmosférica,



Relação entre a altitude  $h$  acima do nível do mar e o “slant depth” para diferentes valores do ângulo zenital (ao nível do mar) eixo horizontal  $h(km)$ , eixo vertical  $t(g/cm^2)$  [38].

$$t(g/cm^2) = \int_{\ell}^{\infty} \rho(h) dl \quad (D.8)$$

e as grandezas físicas que aparecem em (D-8) estão relacionadas entre si através de uma visualização gráfica.



# Referências

- [1] J.G. Rushbrooke, 21<sup>a</sup> Int. Conf. on High Energy Phys., Paris (1982); CERN-EP (1982) 157.
- [2] J.F. Carlson e J.R. Oppenheimer, Phys. Rev. **51** (1937) 220.
- [3] H.J. Bhabha e W. Heitler, Proc. Roy. Soc. **A159**, (1937) 432.
- [4] H.A. Bethe e W. Heitler, Proc. Roy. Soc. **A146** (1934) 83.
- [5] L. Landau e G. Rumer, Proc. Roy. Soc. **A166** (1938) 213.
- [6] I.L. Rozental, Dok. Akad. Nauk. USSR **80** (1951) 731.  
Von P. Budini e G. Molière, Kosmische Strahlung, Springer-Verlag (1<sup>a</sup> edição) (1952) 367.  
S. Hayakawa, J. Nishimura e Y. Yamamoto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **32** (1964) 104.

- [7] Y. Pal e B. Peters, Mat. Fys. Medd. Dass. Vid. Selsk 32 (1964) 1.  
G. Brooke, P.J. Haymann, Y. Kamiya e A.W. Wolfendale, Proc. Phys. Soc. 83 (1964) 853.
- [8] F.M.O. Castro, An. Ac. Bras. Cien.49 (1977) 113.
- [9] F.M.O. Castro, An. Ac. Bras. Cien.51 (1979) 1; CBPF-NF-064 (1985).
- [10] H.M. Portella, F.M.O. Castro e N. Arata, J. Phys. G. 14 (1988) 1157, CBPF-NF-071 (1985).  
H.M. Portella e F.M.O. Castro, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Very High Energy Cosmic Ray (1988) 260.
- [11] J. Bellandi Filho, J.A. Chinellato, C. Dobrigkett, S.Q. Brunetto and A. Ohsawa, Hadronic J. 11 (1988) 1.
- [12] H.M. Portella, A.S. Gomes, R.H.C. Maldonado e N. Amato, J. Phys. A 31 (1998) 6861.
- [13] H.M. Portella, A.S. Gomes, R.H.C. Maldonado, C.E.C. Lima e N. Amato, XIX Encontro Nac. de Fis. Part. Campos (1998) – Caxambú/MG.
- [14] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367;  
R.P. Feynman, Phys. Rev. 84 (1951) 108.

- [15] K.S. Hirata et al. (Kamiokande-II Collaboration), Phys. Lett. B **280** (1992) 146.  
R. Becker-Szendy et al. (IMB Collaboration), Phys. Rev. D **46** (1992) 3720.
- [16] H.M. Portella, A.S. Gomes e R.H.C. Maldonado, American Phys. Institute 276 (1992) 505.
- [17] Ver ref. (12) e H.M. Portella, A.S. Gomes, R.H.C. Maldonado, N. Amato e C.E.C. Lima, Proc. of 25<sup>th</sup> ICRC **6** (1997) 137 a ser submetido ao J. Phys. G.
- [18] H.M. Portella, A.S. Gomes and R.H.C. Maldonado, Proc. 25<sup>th</sup> I.C.R.C. 6 (1997) 321, também apresentado no Encontro Nac. de Fis. de Part. e Campos (1997) 589.
- [19] R.P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415.
- [20] H.J. Mohring e J. Ranft, Z. Phys. C **52** (1991) 643.
- [21] B.A. Kaidalov, Phys. Lett. B **116** (1982) 459.  
L. Popova, N. Amato, H.M. Portella e R.H.C. Maldonado, Proc. XXIII ICRC (Calgary/Canadá), H.E. Session (1993) 148.
- [22] P. Ciok, T. Coghen, J. Gierula, R. Holynske, A. Jurak, M. Miesowicz, Nuovo Cimento **8** (1958) 166, **10** (1958) 741.
- [23] T.K. Gaisser, M. Shibata e J.A. Wrotniak, Workshop on Ray Interactions and High Energy Results (La Paz - Rio) (1982) 305.

- [24] Chacattaya Collaboration: – N.M. Amato and N. Arata, Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. on Very High Energy Cosmic Ray Interactions (Lodz) (1988) 49.  
Fuji Collaboration: M. Amenomori et al. Proc. 18<sup>th</sup> I.C.R.C. (Bangalore) **11** (1983) 57.  
Kanbala Collaboration: J.A. Ren et al., Proc. 19<sup>th</sup> I.C.R.C. (La Jolla) **6** (1985) 204.
- [25] M. AKashi et al., Nuovo Cimento A **65** (1981) 355.
- [26] J. Bellandi, J. Dias de Deus, J.A. Chinellato, C. Dobrigkett, and S.Q. Brunetto, Nuovo Cimento A **101** (1989) 897.
- [27] D.P. Bhattacharyya, Can. J. Phys. **61** (1983) 434.
- [28] J. Whitmore, Phys. Rep. **10** (1974) 273; I.V. Ajinenko et al., Z. Phys. C **35** (1987) 7; T. Kafka et al. Phys. Rev. D **16** (1977) 1261; W.M. Yager et al. Phys. Rev. D **16** (1977) 1294; F. Paub et al. Z. Phys. C **27** (1985) 211.
- [29] R.A. Nam et al., Proc. 18<sup>th</sup> I.C.R.C. (Bangalore) **5** (1983) 336; R.M. Baltrusaitis et al., Proc. of 19<sup>th</sup> I.C.R.C. (La Jolla) **6** (1985) 5; T. Hara et al., Proc. Int. Symp. on Cosmic Ray and Particle Physics (1984) 756.
- [30] U. Amaldi e K.R. Schubert, Nucl. Phys. B **166** (1980) 301; M. Bozzo et al., Phys. Lett. B **147** (1984) 392.
- [31] A.M. Hillas, Proc. 16<sup>th</sup> I.C.R.C. (Kyoto) **6** (1979) 13.

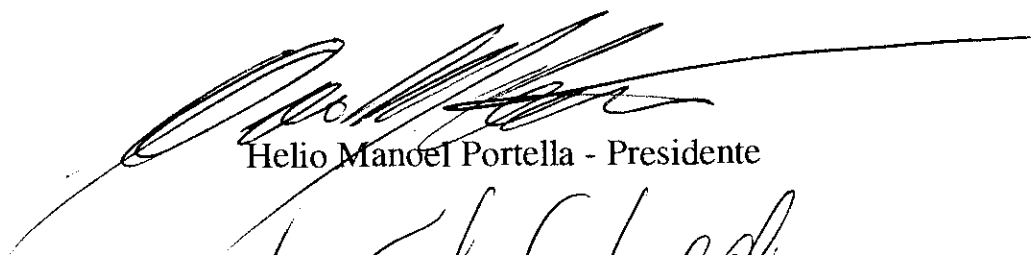
- [32] S.H. Neddermeyer e C.D. Anderson, *Phys. Rev.* **51** (1937) 884.
- [33] J.C. Street e E.C. Stenvenson, *Phys. Rev.* **52** (1937) 1003.
- [34] S. Sakata e T. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 143.  
 T. Tanikawa, *Rep. of Symp. on Meson Theory* (1943), *Prog. Theor. Phys.* **2** (1947) 220.
- [35] C.M. Lattes, G.P.S. Occhialini e C.F. Powell, *Nature* **160** (1947) 453; **160** (1947) 486.
- [36] H.M. Portella, R.H.C. Maldonado e C.E. Navia Ojeda, *Proc. of 21<sup>th</sup> I.C.R.C. (Adelaide)* **9** (1990) 232.
- [37] R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics*, publicado pela W.A. Benjamin, Inc. (1973).
- [38] K. Maeda, *Proc. of the VI Interamericana Seminar on Cosmic Ray* **4** (1970) 847.
- [39] K. Maeda, *Proc. of the 11<sup>th</sup> I.C.R.C. (Budapest)*, (1969) 139.
- [40] J.W. Elbert et al., *Phys. Rev. D* **12** (1975) 660.
- [41] O.C. AllKofer, K. Carstensen e W.D. Dau, *Phys. Lett. B* **36** (1971) 425.
- [42] P. Lipari, *Astroparticle Physics* **1** (1993) 195.
- [43] S. Matsuno et al., *Nutron Experiment*, *Phys. Rev. D* **29** (1984) 1.
- [44] L. Volkova, *Proc. of the First Gleb Wataghin School on High Energy Phenomenology (Campinas)* (1990) 103.



**“ESTUDO DA DIFUSÃO DE HADRONS E  
MUONS NA ATMOSFERA USANDO A TEORIA DOS  
SEMIGRUPOS”**

*Alcides da Silva Gomes*

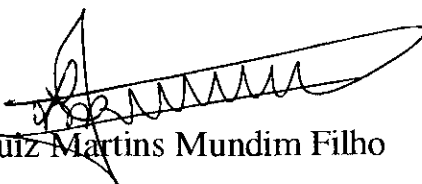
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Helio Manoel Portella - Presidente



Luiz Carlos Santos Oliveira – Co-orientador



Luiz Martins Mundim Filho



Alfredo Marques de Oliveira



Helio da Motta Filho

Rio de Janeiro, 26 de novembro de 1999