

18/99

TESE DE  
MESTRADO

**CONSTRUÇÃO DE *WORMHOLES*  
UTILIZANDO CORREÇÃO  
QUÂNTICA  
DE EULER-HEISENBERG PARA  
A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA**

**CARLA RIBEIRO DA FONSECA**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1999.

DA FONSECA, Carla Ribeiro

Construção de *Wormholes* utilizando Correção Quântica de Euler-Heisenberg para a Eletrodinâmica Clássica. Rio de Janeiro, CBPF, 1999.

IX, 121 f.

Tese: Mestre em Ciências (Física)

1. Relatividade Geral            2. Eletrodinâmica

3. Condições de Energia       4. Teses

I. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

II. Título

## Meditation Under Stars

*What links are ours with orbs that are  
So resolutely far:  
The solitary asks, and they  
Give radiance as from a shield:  
Still at the death of day,  
The seen, the unrevealed.  
Implacable they shine  
To us who would of Life obtain  
An answer for the life we strain  
To nourish with one sign.  
Nor can imagination throw  
The penetrative shaft: we pass  
The breath of thought, who would divine  
If haply they may grow  
As Earth; have our desire to know;  
If life comes there to grain from grass,  
And flowers like ours of toil and plain:  
Has passion to beat bar,  
Win space from cleaving brain;  
The mystic link attain,  
Whereby star holds on star.*

*Those visible immortals beam  
Allurement to the dream:  
Ireful at human hungers brook  
No question in the look.  
For ever virgin to our sense,  
Remote they wane to gaze intense:  
Prolong it, and in ruthlessness they smite  
The beating heart behind the ball of sight  
Till we conceive their heavens hoar,  
Those lights they raise but sparkles frore,  
And Earth, our blood-warm Earth, a shuddering  
prey  
To that frigidty of brainless ray.*

*Yet space is given for breath of thought  
Beyond our bounds when musing: more  
When to that musing love is brought,  
And love is asked of love's wherefore.  
'Tis Earth's, her gift; else have we nought:  
Her gift, her secret, here our tie.  
And not with her and yonder sky?  
Bethink you: were it Earth alone  
Breeds love, would not her region be  
The sole delight and throne  
Of generous Deity?  
(...)*

GEORGE MEREDITH

*Aos meus pais Ilda e Manoel  
e ao meu marido Mario.*

## Agradecimentos

A Mário Novello, primeiramente por ter me concedido o privilégio de ser orientada por uma figura tão ilustre no cenário científico do país, cuja liderança é de vital importância na manutenção e desenvolvimento da ciência brasileira. Segundo, por ter me apresentado a este tema tão fascinante. A atenção e a paciência dispensadas em todas as nossas estimulantes discussões foram e estão sendo decisivas no meu amadurecimento profissional.

À Regina Célia Arcuri, minha orientadora e amiga, agradeço os meus primeiros anos de formação científica e a minha introdução neste maravilhoso universo da Cosmologia, desde a graduação, "alfabetizando-me" em Relatividade Geral; por estar sempre disposta para as discussões científicas (ou não), pelo respeito às minhas variadas atividades e interesses, pelas palavras de estímulo nas horas mais necessárias. Meu eterno agradecimento sobretudo pela confiança depositada em mim.

A José Martins Salim, pela orientação em uma dada etapa do trabalho, pelo apoio, atenção e disposição com os quais sempre me recebeu. O interesse demonstrado em nossas discussões foi indispensável para o avanço deste trabalho.

À Luciane Freitas, pelo carinho e atenção dispensados, principalmente em "apuros burocráticos" durante a graduação.

Aos amigos Renato Klippert, Martha Christina Motta e Vítório De Lorenci, pelo apoio e colaboração, fundamentais nos estágios iniciais da tese; pela experiência e conhecimentos compartilhados em grande parte durante conversas de corredor e discussões durante os "pequenos seminários". A minha profunda admiração por amigos tão dedicados, talentosos e apaixonados pelo trabalho. A sua postura profissional e competência servem de inspiração.

Aos colegas Marcelo Lima, Ronaldo Rodrigues, Ronaldo (mineiro), Gustavo Dourado, Paulo Trajtenberg e, por algum tempo, Manoel, com os quais compartilhei espaço físico e idéias.

Aos meus colegas de pós-graduação Márcia Moutinho, Martin Makler, Leonardo Machado, Robson, Winder, Christine, Álvaro e tantos outros, para não citar toda a família composta pelos alunos do CBPF, que têm demonstrado grande preocupação com o futuro da Ciência e Tecnologia no país e têm se esforçado para melhorar as nossas condições de trabalho.

À Myriam Simões Coutinho, pela paciência, solicitude e competência com as quais nos auxilia e tenta tornar a burocracia o menos complicada possível.

À toda equipe do CBPF: pessoal da biblioteca, da computação (CAT), da xerox, secretários de departamento, enfim, todos aqueles cujo suporte foi necessário para a elaboração deste trabalho.

Aos coordenadores da CFC - Professor Omar Caride e Professor Francisco Caruso - agradeço o apoio.

Aos meus pais e ao meu irmão, agradeço o apoio e incentivo permanentes, nos mais variados campos de interesse, tolerando as minhas "excentricidades" científicas e musicais, e principalmente, pelo incentivo ao meu desejo de seguir uma carreira acadêmica.

Ao meu amigo Hugo Bronz Cavalcanti, companheiro de vida e por algum tempo colega de profissão, pelo suporte técnico, além do emocional e psicológico, tão caros em todos esses anos de formação.

Aos amigos Júlio, Ana, Vânia, Rosana e Lícius, companheiros de estrada e com os quais compartilhei bons momentos.

Ao meu marido, Mario Barbatti, com o qual cultivo nossa devoção pelas artes, música, filosofia e ciência (além da culinária); pela dedicação e amor a mim devotados nestes anos de união. Sua presença e apoio constantes foram decisivos na elaboração desta tese, seja ao checar o manuscrito, ou dar suporte técnico, ou mesmo não me deixando esmorecer nos momentos mais críticos.

Ao CNPq, pela bolsa concedida durante todo o período de preparação deste trabalho. Este apoio financeiro é indispensável para a viabilização da atividade científica, e espero que mais e mais pessoas tenham a mesma oportunidade ao escolher uma formação científica.

## Resumo

Apresentamos uma revisão sobre os tipos de *wormholes*. Discutimos também as condições para a formação e manutenção dessas estruturas no espaço-tempo, concentrando-nos na violação de algumas das condições de energia que tipicamente ocorre na região da garganta ou próxima à ela em qualquer *wormhole* genérico. A análise das características dos *wormholes* pode ser implementada simplesmente em termos da geometria local na região da garganta do *wormhole*. Estes *wormholes*, que são estáticos e apresentam simetria esférica, podem permitir a transmissão de sinais entre duas regiões do espaço-tempo espacialmente separadas.

Sabendo que a teoria quântica permite a violação de algumas das condições de energia clássicas, o que por sua vez permitiria a formação de estruturas tais como os *wormholes*, baseamos o nosso tratamento em uma abordagem semi-clássica, isto é, acrescentamos uma correção quântica de primeira ordem à ação efetiva da eletrodinâmica de Maxwell, calculada por Euler e Heisenberg. Este termo não-linear quebra a invariância por transformação de dualidade. Finalmente, nos concentramos na obtenção de uma nova classe de soluções que descrevem *wormholes* construídos a partir da ação efetiva modificada. Analisamos os casos onde empregamos um campo magnético puro ou um campo elétrico puro. Os resultados obtidos indicam que podemos construir e manter um *wormhole* somente por meio de um campo magnético, introduzido de acordo com a Lagrangeana não-linear de Euler-Heisenberg. Concluímos que a existência de tais *wormholes* está confinada ao domínio microscópico, o que está de acordo com o que encontramos na literatura.

## Abstract

We present a review of the types of wormholes. We also discuss the necessary conditions for the formation and maintenance of these structures in space-time, focusing on some of the violations of the energy conditions that typically occur at or near the throat of any generic wormhole. This is a major feature which follows the existence of such structure. This analysis can be accomplished simply in terms of the local geometry at the mentioned region. These wormholes, which are static and possess spherical symmetry, can permit two-way transmission of signals between two spatially separated regions of space-time. Since it is known that quantum theory permits the violation of some of the classical energy conditions, which in turn may allow the formation of wormholes, we base our treatment on a semi-classical approach, that is, we add a first-order quantum correction to the effective action of Maxwell electrodynamics, due to Euler and Heisenberg. This non-linear term is responsible for breaking the invariance under duality transformation. Finally, we focus on a new class of solutions which describes wormholes constructed from the modified effective action. We analyze the cases for magnetic and electric fields, and we show that a wormhole can be maintained only by means of a magnetic field introduced according to the Euler-Heisenberg non-linear Lagrangean. We conclude that such wormholes can be created, but they are confined to the microscopic realm. This result is in good agreement with what is found in the literature on wormholes.



## NOTAÇÃO, CONVENÇÕES E DEFINIÇÕES

Índices gregos variam de 0 a 3

Índices latinos variam de 1 a 3

Simetrização e anti-simetrização:

$$\begin{aligned}T_{(\mu\nu)} &:= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \\ T_{[\mu\nu]} &:= \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})\end{aligned}$$

Métrica de Minkowski (em coordenadas cartesianas):

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

Derivação usual:

$$\varphi_{,\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$$

Derivação covariante:

$$\begin{aligned}V_{;\beta}^\alpha &:= V_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha V^\gamma \\ V_{\alpha;\beta} &:= V_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma\end{aligned}$$

Símbolo de Christoffel de primeira espécie:

$$\Gamma_{\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta} + g_{\beta\delta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta})$$

Símbolo de Christoffel de segunda espécie:

$$\Gamma_{\beta\delta}^\mu = g^{\mu\delta}\Gamma_{\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\delta,\beta} + g_{\beta\delta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta})$$

Tensor de Riemann:

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\rho - \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\rho + \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta\Gamma_{\beta\delta}^\rho - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta\Gamma_{\gamma\delta}^\rho$$

Identidade de Ricci:

$$(\nabla_\gamma\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\gamma)V^\alpha = -R^\alpha_{\rho\beta\gamma}V^\rho$$

Simetrias do Tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= R_{\gamma\delta\alpha\beta} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} &= 0\end{aligned}$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

Escalar de Ricci:

$$R := R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R^{\mu}_{\mu}$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$$

Derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_{\xi}V^{\alpha} = \xi^{\beta}\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - V^{\beta}\frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

Equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu},$$

onde  $\kappa := 8\pi G$  ( $c \equiv 1$ ).

Equação de Jacobi:

$$A^{\alpha} = \frac{D^2\xi^{\alpha}}{D\tau^2} = h^{\alpha}_{\lambda} \left( R^{\lambda}_{\mu\beta\nu} V^{\mu} V^{\nu} \xi^{\beta} + \dot{V}^{\lambda}_{;\beta} - \dot{V}^{\lambda} \dot{V}_{\beta} \right) h^{\beta}_{\gamma} \xi^{\gamma}$$

se o observador for geodésico, a equação se reduz a

$$A^{\alpha} = \frac{D^2\xi^{\alpha}}{D\tau^2} = R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} V^{\mu} V^{\nu} \xi^{\beta},$$

onde  $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_{\mu}V_{\nu}$  é o operador projetor.

Parte de um vetor  $Z^{\mu}$  ortogonal a  $V^{\mu}$ :

$$\perp Z^{\mu} := h^{\mu}_{\nu} Z^{\nu}$$

Definição de *espaço-tempo*:

*Um espaço-tempo é uma variedade quadri-dimensional dotada de uma métrica Lorentziana (pseudo-Riemanniana). A métrica deve ter assinatura Lorentziana (pseudo-Riemanniana) definida por (+, -, -, -). Referimo-nos sempre ao espaço-tempo como tendo (3+1) dimensões.*

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>2. UM POUCO DE HISTÓRIA</b>	<b>10</b>
2.1 A ponte de Einstein-Rosen	10
2.1.1 A ponte neutra	11
2.1.2 A ponte “quase-carregada”	13
2.2 O <i>wormhole</i> de Wheeler	14
2.3 O <i>wormhole</i> de Kerr	16
2.3.1 O caso $M > a$	18
2.3.2 O caso $M < a$	20
2.4 O <i>wormhole</i> de Morris-Thorne	21
<b>3. A DEFINIÇÃO DE WORMHOLE</b>	<b>24</b>
3.1 Caracterização de um <i>wormhole</i>	25
3.2 Considerações gerais	29
3.2.1 O horizonte de eventos ou horizonte absoluto	30
3.2.2 O horizonte de Cauchy	31
3.3 Tipos de <i>wormholes</i>	31
3.4 <i>Wormholes</i> Lorentzianos	32
3.4.1 <i>Wormholes</i> permanentes ou quase-permanentes	33
3.4.2 <i>Wormholes</i> transientes	34
3.4.3 <i>Wormholes</i> macroscópicos e microscópicos	35
3.4.4 <i>Wormholes</i> atravessáveis	35
3.5 <i>Wormholes</i> Euclidianos	35
3.6 Censura topológica	36
<b>4. O MODELO DE MORRIS-THORNE</b>	<b>39</b>
4.1 As propriedades básicas	39
4.2 A forma da métrica	41
4.3 O comportamento na garganta	43
4.4 Os tensores de curvatura	46
4.5 As equações de Einstein	48
4.6 Exemplos específicos	51
4.6.1 Soluções que apresentam forças de maré nulas	51
4.6.2 Solução com um corte radial finito para a densidade de matéria	52
4.6.3 Soluções com a matéria exótica limitada à garganta	53
<b>5. O MODELO ELETROMAGNÉTICO</b>	<b>55</b>
5.1 A forma da métrica	55
5.2 A geometria espacial de um <i>wormhole</i>	56
5.3 Os tensores de Riemann e Einstein	58
5.4 As componentes do tensor momentum-energia	60
5.4.1 As correções quânticas de Euler-Heisenberg	61
5.4.2 Para o caso do campo magnético	62
5.4.2.1 O tensor momento-energia para o campo magnético	62
5.4.2.2 As equações de Einstein	63
5.4.2.3 Condição de energia para vetores nulos	69

5.4.3 Para o caso do campo elétrico .....	71
5.4.3.1 O tensor momento-energia para o campo elétrico .....	71
5.4.3.2 As equações de Einstein .....	72
<b>6. CONCLUSÃO .....</b>	<b>77</b>
<b>Apêndice A. Equação do desvio de Jacobi e equação de Raychaudhuri .....</b>	<b>85</b>
A.1 Introdução .....	85
A.2 Definições .....	86
A.2.1 Observador .....	86
A.2.2 Tensor de projeção .....	89
A.2.3 Distância relativa .....	91
A.2.4 Velocidade relativa .....	92
A.3 Equação do desvio de Jacobi .....	96
A.4 Relação com os parâmetros cinemáticos - a equação de Raychaudhuri .....	97
<b>Apêndice B. Cálculo da equação de movimento a partir de uma Lagrangeana .....</b>	<b>100</b>
B.1 A Lagrangeana para o campo eletromagnético .....	100
B.2 Cálculo da equação de movimento .....	102
B.3 As componentes do tensor momentum-energia .....	103
B.3.1 Primeiro caso: monopólo magnético .....	103
B.3.2 Segundo caso: monopólo elétrico .....	106
<b>Apêndice C. As condições de energia .....</b>	<b>113</b>
C.1 Definições .....	113
C.1.1 A condição de energia para vetores tipo-nulo .....	114
C.1.2 A condição fraca de energia .....	114
C.1.3 A condição forte de energia .....	115
C.1.4 A condição dominante de energia .....	115
C.1.5 A condição de energia média para vetores tipo-nulo .....	116
C.1.6 A condição fraca de energia média .....	117
C.1.7 A condição forte de energia média .....	117
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>118</b>

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

Podemos afirmar que dois dos grandes sucessos da física do século XX são a teoria da Relatividade Geral de Einstein (RG) e a Teoria Quântica de Campos (TQC), quando aplicada à descrição do comportamento das partículas elementares. Isso deve-se em parte ao fato de que ambas tenham resistido às provas impostas pela verificação experimental. Portanto, em seus domínios de aplicabilidade, essas teorias, dentro da perspectiva do Modelo Padrão das partículas elementares, constituem uma excelente descrição da realidade física.

Infelizmente, as tentativas de unificação da gravitação com a Teoria Quântica de Campos provou ser uma tarefa difícil e improdutiva ao longo dos anos, devido às inconsistências resultantes dessas tentativas, à dificuldade de compreensão do significado físico dessa unificação, e mesmo do ponto de vista operacional e matemático.

Em relação à gravitação, temos que a Relatividade Geral consiste primeiramente de uma teoria que descreve essa interação, permitindo-nos entender a “força” da gravidade em termos da estrutura geométrica do espaço-tempo. Entretanto, esta não é a única interação de longo alcance que ocorre na física clássica. Devemos considerar ainda as forças eletromagnéticas, que equiparam-se em intensidade às forças gravitacionais. Porém, o agente das forças eletromagnéticas, isto é, o campo eletromagnético, não pode ser explicado pela Relatividade Geral clássica como um fenômeno geométrico. Dessa forma, várias tentativas que visam a inclusão da teoria do campo eletromagnético na estrutura de uma RG estendida foram empreendidas. Uma das idéias mais atraentes neste sentido é aquela concebida por Weyl (1918, 1922) e Eddington (1923). Eles buscavam a introdução de potenciais eletromagnéticos como

quantidades geométricas que determinassem a lei de transplante de uma escala de comprimento entre diferentes pontos, e a comparação de unidades de comprimento em diferentes direções no mesmo ponto. Para isso, seria necessário associar o potencial eletromagnético com algum tipo de distorção do comprimento do espaço-tempo [Adler, 65].

Einstein dedicou seus últimos anos ao desenvolvimento de uma teoria unificada do eletromagnetismo e da gravitação, que permitisse descrevê-los em termos de um tensor métrico. Para isso, ele foi levado a considerar o tensor métrico como sendo anti-simétrico, o que lhe permitiu obter apenas o número suficiente de novas variáveis de campo que descrevessem o campo eletromagnético.

Embora houvesse um esforço no sentido do desenvolvimento de uma teoria unificada dessas duas interações, uma vez que muitos físicos acreditavam que a descrição clássica mais apropriada das partículas elementares fosse aquela resultante da combinação de singularidades com um campo eletromagnético-gravitacional, uma teoria tal que nos satisfizesse da mesma maneira como a teoria da gravitação de Einstein não chegou a ser desenvolvida.

Já em relação à teoria quântica, temos que o casamento entre as leis de Maxwell do eletromagnetismo e a mecânica quântica rendeu-nos a chamada Eletrodinâmica Quântica: sabe-se que existe uma não-linearidade quântica dos campos eletromagnéticos, que é consequência do princípio de incerteza. Isso possibilita a criação de um par elétron-pósitron por dois fótons, e o desaparecimento deste par que segue à sua criação. Neste processo, ocorre a emissão de dois fótons diferentes. Tal processo é o espalhamento da luz pela luz [Jackson, 83]. Estes resultados foram obtidos pela primeira vez em 1935, por Euler e Kockel [Jackson, 83]. Observa-se que no limite clássico, ou seja, no qual  $\hbar \rightarrow 0$ , estes efeitos não-lineares podem ser desprezados.

As correções quânticas para a eletrodinâmica de Maxwell foram calculadas por Heisenberg

e Euler [Heisenberg, 36]. Basicamente, parte-se de uma densidade Lagrangeana para a eletrodinâmica que apresenta uma correção de primeira ordem dada em termos de um parâmetro quântico. Como a eletrodinâmica clássica de Maxwell origina universos singulares, tal correção prova ser bastante útil para evitar o aparecimento de uma singularidade no universo [Novello, 98], e de singularidades em geral, que será um dos resultados discutidos nesta tese.

Neste trabalho, trataremos dos *wormholes*, ou buracos de minhocas, mais especificamente os do tipo Lorentziano. De maneira bastante resumida, podemos dizer que trata-se de atalho no espaço e no tempo, cuja estrutura é análoga àquela de uma dobra ou distorção espacial e temporal.

Mesmo não havendo qualquer evidência experimental direta da existência desses objetos, acredita-se que eles possam ter sido criados em regiões onde há predominância de campos gravitacionais intensos, que promoveriam a existência de uma topologia não-trivial, devida à própria natureza altamente curvada da variedade do espaço-tempo nesta região [Visser, 96]. Embora a existência dessas estruturas seja altamente especulativa, ainda assim podemos encontrar argumentos razoáveis que sugerem sua possível existência em escala microscópica, ou seja, na ordem de grandeza do comprimento de Planck ( $10^{-35}m$ ) [Roman, 24]. Especula-se que uma tal estrutura pudesse ter sido formada em um estágio inicial da formação do universo através de flutuações quânticas (a natureza dessas flutuações continua vaga). E como seria possível a sua existência em tamanho característico no domínio clássico? A resposta possível, de natureza também altamente especulativa, seria através do mecanismo de inflação das flutuações quânticas de um campo escalar, que é considerado por alguns como o mecanismo ao qual atribui-se a formação de galáxias [Roman,93 , Blau, 87].

*Wormholes*, assim como outras estruturas relacionadas com a idéia de viagens

intergalácticas, ou seja, dobras espaciais e temporais, além de máquinas do tempo, sempre povoaram o imaginário popular. Isso pode ser observado através das inúmeras histórias de ficção científicas (que tem como principal precursora *The Time Machine* de H. G. Wells, escrita no século passado), onde intrépidos viajantes se deslocam e se comunicam por regiões distantes da galáxia e no tempo, a velocidades ultra-relativísticas. Porém, essa especulação relegada ao sabor da fantasia dá origem a várias distorções e inconsistências, já que o assunto não tem sido seriamente abordado, do ponto de vista físico e matemático, com exceção dos trabalhos de Novikov, Novello e Thorne.

Aqui, obviamente, daremos um enfoque completamente diferente, pois pretendemos investigar os aspectos físicos e matemáticos por trás da concepção de *wormholes*. Usaremos como base para isso a teoria clássica de Einstein para a gravitação (RG), aliada a algumas noções de eletrodinâmica quântica. O nosso objetivo no presente trabalho foi o de obter, dentro de uma estrutura clássica, uma solução de um *wormhole* estático, construído a partir de campos vetoriais, mais precisamente, dos campos elétrico e magnético. Para que uma tal classe de *wormholes* seja considerada “atravessável” (num sentido que será definido mais à frente), faz-se necessário que exiba certas propriedades, tais como: a ausência de horizontes (que funcionam como uma membrana de “mão-única”, ou seja, permitem apenas a entrada, e não a saída), existência de pequenas forças de maré, tempo de trânsito finito para quaisquer observadores, e a ausência de fluxos de radiação intensos produzidos por singularidades, como veremos mais adiante.

A principal característica de um *wormhole* é a existência de um raio mínimo, denominado *garganta*. Esta habilidade do *wormhole* permanecer aberto é garantida pela existência de alguma forma de matéria ou campo que apresente tensão radial. Em outras palavras: este



material manteria as paredes do *wormhole* gravitacionalmente separadas. Tal matéria recebeu o nome sugestivo de matéria “exótica” [Thorne,94 , Morris, 88]. Assim como o material exótico necessário deve empurrar as paredes do *wormhole* para fora, ele deve gravitacionalmente empurrar os raios de luz contidos em um feixe, afastando-os uns dos outros. Colocando de outro modo, essa matéria exótica deve funcionar como uma “lente desfocalizadora”, fazendo com que os raios de luz sejam divergentes. Porém, essa característica leva diretamente à violação de certas condições de energia que são consideradas como satisfeitas por um tensor momentum-energia. Aprendemos das equações de campo de Einstein que para que se evite a focalização gravitacional dos feixes de raios luminosos, o material exótico que sustenta o *wormhole* deve apresentar uma densidade de energia média negativa, vista pelo feixe de luz que passa através dele [Morris, 88 , Thorne, 94]. Como a gravitação, isto é, a curvatura do espaço-tempo, é produzida pela massa, e como massa e energia são equivalentes, isso nos leva a considerar que a força de gravidade é produzida por qualquer forma de energia. Se tomarmos a densidade de energia do material no interior do *wormhole*, medida por um feixe de luz, isto é, medida por um observador que esteja movendo-se através de um *wormhole* à velocidade da luz ou próxima a esta, e tomar a média da densidade de energia ao longo da trajetória dos raios de luz, a densidade de energia média que obtemos como resultado deve ser negativa, de maneira que o material seja capaz de desfocalizar o feixe de luz e manter o *wormhole* aberto - esta é a condição para que o material seja “exótico”.

Com base no que tem sido apresentado na literatura, adotamos uma abordagem orientada por um processo de “engenharia”, ou seja, consideramos a existência de uma geometria do espaço-tempo apropriada, e então calculamos o tensor de Riemann associado a esta geometria. Para construir o tensor momentum-energia da matéria de forma a produzir o *wormhole*,

consideramos a ação efetiva para a eletrodinâmica com uma correção quântica de primeira ordem de Euler-Heisenberg [Heisenberg, 36], associada a um campo magnético e outra a um campo elétrico. Usando as equações de campo de Einstein, chegamos à conclusão de que apenas tal configuração de campos não era suficiente: um fluido de matéria que exibe certas propriedades deveria ser adicionado para que pudéssemos garantir a consistência das equações obtidas. Descobrimos que tal *wormhole* pode ser construído e mantido por um campo magnético, porém trata-se de uma estrutura em escala quântica.

A princípio, pensávamos que a solução para o campo elétrico seria análoga àquela obtida para o caso magnético, já que as densidades magnética e elétrica satisfazem a uma equação de continuidade que apresentam a mesma forma para ambos os casos. Se considerarmos uma dada transformação de dualidade para os campos magnético e elétrico e se as fontes desses campos forem transformadas da mesma forma, temos que as equações generalizadas de Maxwell mostram-se invariantes por uma transformação dual [Jackson, 83]. Contudo, não foi isto o observado: a construção e a consequente manutenção de *wormholes* por um campo elétrico puro não é possível, já que não conseguiu-se reproduzir o comportamento exótico que requer-se da matéria para que a sustentação de um *wormhole* seja possível. Isso nos leva a acreditar que isso se deve à quebra da invariância sob transformação dual causada pela adição do termo  $F^2$  na ação efetiva.

Façamos um breve resumo a respeito da organização desta tese.

No Capítulo 2, traçaremos um breve histórico do conceito de *wormhole*, desde *F. Lamm* em 1916, passando pela ponte de Einstein-Rosen e pelo *wormhole* de Wheeler, até os dias de hoje, com o florescimento do interesse por essas estruturas tão peculiares, que foi iniciado pelo artigo de Morris e Thorne de 1988 [Morris, 88b], e que representa o marco para o renascimento da

investigação desses objetos.

No Capítulo 3, serão introduzidas as linhas teóricas gerais do sistema de *wormhole*, com base em alguns aspectos da Relatividade Geral.

No Capítulo 4, nos dedicaremos à análise do *wormhole* do tipo Morris-Thorne (MT), que serviu de base para a construção do nosso próprio *wormhole*.

No Capítulo 5, apresentaremos o nosso modelo de *wormhole*, assim como as condições de validade deste.

Por fim, no Capítulo 6, analisaremos os resultados obtidos, delineando as perspectivas futuras e as linhas de trabalho possíveis, tomando como base o presente trabalho.

Nos Apêndices, o leitor encontrará os detalhes de cálculos do tensor momentum-energia e alguns conceitos gerais importantes que foram omitidos no decorrer dos capítulos.

## Capítulo 2

# UM POUCO DE HISTÓRIA

### 2.1 A ponte de Einstein-Rosen

Em 1916, um ano após a formulação final de Einstein de suas equações de campo, o físico vienense Ludwig Flamm reconheceu que a solução de Schwarzschild das equações de Einstein representava um *wormhole* [Flamm, 16].

Outras especulações podem ser extraídas das publicações de caráter filosófico de Weyl, oriundas do ano de 1928. Porém, uma abordagem mais séria do ponto de vista matemático pode ser atribuída ao artigo de Einstein e Rosen datado de 1935 [Einstein, 35]. Neste artigo, chamado “The particle problem in general relativity”, os autores se propunham a investigar a possibilidade de existência de uma teoria atômica da matéria e da eletricidade que pudesse excluir singularidades do campo, fazendo uso apenas da métrica  $g_{\mu\nu}$  da Relatividade Geral e do campo  $\varphi_\mu$  da teoria de Maxwell. Em outras palavras, pretendiam construir um modelo geométrico para uma “partícula” física elementar que fosse finita em todos os pontos e não apresentasse singularidades. É claro que o termo *wormhole* ainda não havia sido criado, de forma que Einstein e Rosen desenvolveram a discussão em termos de uma “ponte” conectando duas folhas idênticas que constituíam a representação matemática do espaço físico. A partícula seria representada por esta ponte.

Einstein esteve por algum tempo confuso em relação às noções de partícula e de teoria de campo. Mesmo no domínio clássico, ele estava incomodado com a questão de como um objeto

singular que apresentasse o caráter de partícula pudesse estar à mesma altura da noção de uma teoria de campo contínua como a gravitação. Ele explicitamente rejeitava a possibilidade de que partículas materiais pudessem ser consideradas como singularidades do campo, pois segundo ele “a singularidade traz tanta arbitrariedade à teoria que realmente anula as suas leis.(...) Dessa forma, se fosse admitido que singularidades representassem partículas, teríamos um caso de duas partículas não aceleradas pela sua interação gravitacional, o que certamente seria excluído fisicamente. ” [Einstein, 35]

O modelo particular por eles construído é hoje considerado equivocado, mas a forma com que ele falha é muito interessante, pois antecipam muitas das idéias que surgiram na física nos anos subsequentes. Neste artigo, eles discutem dois tipos de “pontes”: uma neutra e a outra “quase-carregada”. Apresentamos a seguir uma breve discussão dos resultados por eles obtidos.

### **2.1.1 A ponte neutra**

A ponte neutra é simplesmente o resultado de uma mudança de coordenadas apropriada aplicada à solução de Schwarzschild, fazendo com que a singularidade desta solução desapareça. Durante a época em que Einstein desenvolvia os seus trabalhos, os físicos não faziam a distinção entre as noções de *singularidade de coordenada* e *singularidade física*, assim como o comportamento da geometria de Schwarzschild na vizinhança do horizonte de eventos não era totalmente compreendida. Para muitos, o horizonte era a própria singularidade, ou seja, a singularidade era considerada por muitos em  $r = 2m$ , e não em  $r = 0$ .

O que se pode dizer hoje a respeito da descoberta de Einstein e de Rosen é que esta reduz-se à observação de que alguns sistemas de coordenadas naturalmente cobrem apenas as duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo estendido de Schwarzschild. A região interior, que

contém a singularidade da curvatura, não pode ser coberta pela ponte de Einstein-Rosen ou por sistemas de coordenadas isotrópicos.

Vamos seguir o procedimento adotado no artigo. Considerando-se a solução esfericamente simétrica de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + (1 - 2m/r) dt^2, \quad (2.1)$$

para  $r > 2m$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Ao substituirmos  $r$  por uma nova variável, definida por

$$u^2 = r - 2m, \quad (2.2)$$

obtem-se

$$ds^2 = -4(u^2 + 2m) du^2 - (u^2 + 2m)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{u^2}{u^2 + 2m} dt^2, \quad (2.3)$$

com  $u \in (-\infty, +\infty)$ . Esta mudança de coordenadas elimina a região que contém a singularidade de coordenada definida por  $r \in [0, 2m)$ , e cobre duplamente a região assintoticamente plana, definida por  $r \in [2m, +\infty)$ . A região próxima a  $u = 0$  é interpretada como sendo uma ponte que conecta a região assintoticamente plana próxima a  $u = +\infty$ , com a região assintoticamente plana próxima a  $u = -\infty$ . Para que possamos melhor perceber isso, se considerarmos uma superfície esférica definida por  $u = \text{constante}$ , a área dessa superfície será  $A(u) = 4\pi (2m + u^2)^2$ . Esta área será mínima se  $u = 0$ , ou seja,  $A(0) = 4\pi (2m)^2$ . Define-se (a parte da geometria mais estreita) como sendo a “garganta”, ou, se usarmos o termo moderno, esta região será o *wormhole*.

A construção de Einstein-Rosen não utiliza  $m < 0$ . Ela requer a existência de um horizonte para que se possa impor a transformação de coordenada. A solução de Schwarzschild para massa negativa apresenta uma singularidade nua, portanto não há horizonte. Na região  $u = 0$ , interpretada como sendo a ponte, temos, segundo a transformação de coordenadas dada pela

[eq. (2.2)],  $r = 2m$ .

Como resultado dessas observações, temos que a “ponte neutra de Einstein-Rosen ” (também conhecida como *wormhole* de Schwarzschild) é idêntica à parte da máxima extensão da geometria de Schwarzschild. Logo, o comportamento no interior da ponte será idêntico àquele do buraco negro, isso porque a coordenada  $u$  não é uma coordenada apropriada no horizonte. Caso se tente cruzar o horizonte, indo de  $u = +\varepsilon$  a  $u = -\varepsilon$  por exemplo, a partícula será forçada a afastar-se da região definida pela coordenada  $u$  e será levada diretamente à singularidade.

### 2.1.2 A ponte “quase-carregada”

A análise desta ponte é feita a partir da solução de Reissner-Nordström, que descreve um buraco negro eletricamente carregado de massa  $m$  e carga  $Q$ . Em coordenadas de Schwarzschild, temos

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - 2m/r + Q^2/r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.4)$$

Para construir a ponte a partir dessa solução, Einstein e Rosen descobriram que seria necessário trocar o sinal do tensor momentum-energia do campo eletromagnético, de maneira que a densidade de energia no campo eletromagnético fosse negativa. Esta geometria não será mais aquela de Reissner-Nordström, sendo dada, em coordenadas de Schwarzschild, por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - 2m/r - \epsilon^2/r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5)$$

Tomando  $m = 0$ , a métrica é reduzida à forma

$$ds^2 = -\frac{1}{1 - \epsilon^2/r^2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{\epsilon^2}{r^2}\right) dt^2. \quad (2.6)$$

Fazendo-se então a mudança de coordenada

$$u^2 = r^2 - \epsilon^2, \quad (2.7)$$

temos como resultado

$$ds^2 = \frac{u^2}{u^2 + \epsilon^2} dt^2 - du^2 - (u^2 + \epsilon^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.8)$$

Essa geometria representa um objeto sem massa e quase-carregado, cuja densidade de energia é negativa em todos os pontos. Einstein e Rosen gostariam de interpretar esse objeto como sendo um “elétron”. Há ainda um horizonte em  $r = \epsilon$ ,  $u = 0$ .

A razão para que ocorra essa deformação da teoria é que para  $m = 0$ , a solução de Reissner-Nordström constitui uma singularidade nua. Não há horizonte, portanto a construção de uma ponte não é possível. A mudança de caráter dada por  $Q^2 \rightarrow -\epsilon^2$ , que corresponde à atribuição de um valor puramente imaginário à carga elétrica, tem por objetivo evitar o aparecimento de uma singularidade nua. Este problema surge do fato de que  $m < |Q|$ . Como a massa de elétron é  $m_e = 9,1093897(54) \times 10^{-31} kg$ , enquanto que  $|Q| = |e| = m_Q = 1,859358 \times 10^{-9} kg$  (em unidades geometrodinâmicas), temos que a razão entre a massa e a carga é  $m_e/|e| \approx 10^{-22}$ .

## 2.2 O wormhole de Wheeler

Um período de pelo menos vinte anos, após o trabalho de Einstein e Rosen, passou, sem que houvesse qualquer demonstração de interesse por problemas desta natureza, até que em 1955, Wheeler apresentou-nos o seu trabalho sobre os “géons” [Wheeler, 55]. Os géons são soluções das equações de campo combinadas de Einstein-Maxwell (gravidade + eletromagnetismo).

A palavra “géon” foi inventada pelo próprio Wheeler para denotar uma “entidade eletromagnético-gravitacional” [Visser, 96]. Hoje, o significado dos géons pode ser melhor pensado em termos de um “quase-sóliton eletromagnético-gravitacional instável” [Visser, 96]. Conforme vemos em seu artigo de 1955, Wheeler observou que podemos considerar uma



métrica que seja aproximadamente plana em seu todo, exceto em duas regiões muito afastadas, conectadas duplamente. Esta conexão é o que podemos hoje chamar de *wormhole*.

Além disso, as observações de Wheeler servem de base para a construção de um modelo de carga clássica, que possui uma densidade de carga nula em todos os pontos do espaço. Com isso, apresenta-se dois caminhos possíveis a serem seguidos. Uma das possibilidades é a de que, ao considerar a existência de uma tal configuração de túneis, a investigação de sua dinâmica clássica seria possível. Por outro lado, a análise dos processos gravitacionais quânticos que pudessem gerar tais configurações também constituiria objeto de investigação. Wheeler resolveu então explorar as duas possibilidades. O caminho “clássico” conduziu-o, juntamente com Misner, ao artigo intitulado “Classical physics as geometry: gravitation, electromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved space-time” [Wheeler, 55]. Já o caminho “quântico” o levou ao conceito de “espuma espaço-temporal”. A discussão que apresentaremos a seguir estará limitada à discussão clássica.

O artigo de 1957 escrito por Wheeler e Misner [Misner, 57] tinha o objetivo de fornecer a explicação para carga e o eletromagnetismo em geral em termos topológicos [Schutz, 80]. Para tanto, a geometria Riemanniana das variedades que apresentam topologia não-trivial foi investigada. Este projeto grandioso foi um dos primeiros a fazer uso da topologia abstrata e formas diferenciais em física. O ponto de vista dos autores pode ser resumido através da frase “Física é geometria”. Foi através desse mesmo artigo que a palavra *wormhole* foi introduzida na comunidade científica, assim como conceitos tais como “carga sem carga” ou “massa sem massa”. Hoje, sabemos que a concepção clássica de “carga sem carga” não funciona da mesma forma que era empregada quando foi originalmente concebida, pois classicamente os túneis colapsarão para formar os *wormholes*, e a topologia, outrora interessante, ficaria agora

escondida atrás de horizontes de evento.

## 2.3 O wormhole de Kerr

Em 1963, o matemático neo-zelandês Roy Kerr publicou um artigo no qual exibiu uma solução das equações de Einstein que parecia descrever a curvatura do espaço-tempo na região exterior de uma estrela girante.

Esta foi a primeira solução para esse sistema de que se tem notícia na literatura. Entretanto, como Sciama explicou, esta era uma solução muito especial, pois certamente não poderia explicar *todas* as estrelas girantes [Thorne, 94]. Isso se deve ao fato desse tipo de estrela apresentar inúmeras propriedades, tais como complicadas formas e movimento dos seus gases internos, ao contrário da solução de Kerr, onde as formas da curvatura de seu espaço-tempo eram muito suaves e demasiadamente simples para que pudessem corresponder às estrelas girantes típicas. De qualquer forma, essa solução representou um começo.

Após um ano, foi matematicamente mostrado (por Brandon e Carter) que a solução de Kerr descrevia um buraco negro girante, e não uma estrela girante (descoberta essa também feita, independentemente, por Roger Penrose e por Robert Boyer e Richard Lindquist). Na metade dos anos setenta, Carter e outros prosseguiram na investigação e assim ainda mostraram que esta solução não apenas descreve um tipo especial de buraco negro girante, mas também buracos negros girantes que possam existir.

As propriedades físicas de um buraco negro girante estão incorporadas na matemática da solução de Kerr, e Carter, ao analisá-la, descobriu exatamente quais seriam essas propriedades. Uma das mais interessantes é um turbilhão com uma aparência de tornado que o buraco negro

cria no espaço ao redor, que é originado pelo fato do buraco arrastar o espaço à sua volta, forçando-o a girar de maneira a produzir este redemoinho. A velocidade com que é girado fica maior quanto mais próximo se está do centro do tornado. Bem distante do núcleo, a rotação se dá vagorosamente. No horizonte, o espaço está firmemente preso, e assim é rotacionado na mesma proporção em que o horizonte gira. Este turbilhão do espaço exerce inevitável influência sobre o movimento das partículas que caem no interior do buraco negro.

Além de criar um turbilhão no espaço, esse movimento de rotação do buraco negro também deforma o seu horizonte, da mesma forma que a rotação da Terra deforma a distância entre o Equador e os pólos terrestres. De forma semelhante, as forças centrífugas fazem com que o horizonte do buraco seja inflado à altura do seu equador. Se o buraco não gira, o seu horizonte é esférico, se o movimento de rotação for muito rápido, o seu horizonte ficará proporcionalmente inflado. Se esse movimento ficar demasiadamente rápido, as forças centrífugas poderão estilhaçar o horizonte. Logo, há algum tipo de razão de rotação máxima para a qual o buraco mantém a sua estrutura [Thorne, 94].

Da mesma forma que as soluções de Schwarzschild e de Reissner-Nordström nos conduzem a modelos de *wormholes*, também a solução de Kerr levou-nos à descoberta de um novo tipo de *wormhole*.

A métrica de Kerr corresponde a um objeto em rotação que possui massa  $M$  e momento angular  $L$ . Para que se tenha uma idéia simplificada de como essa geometria é gerada, vamos impor as equações de campo da Relatividade Geral para o vácuo, e se tomarmos uma massa pontual e fizermos com que ela gire em torno de um eixo qualquer, então o objeto não mais permanecerá como um ponto, pois a massa terá que se redistribuir na forma de um anel de matéria que apresenta o movimento de rotação. O “raio” desse anel será dado por [cf. Møller,

72 , Carmelli, 82]:

$$a = \frac{L}{Mc}. \quad (2.9)$$

O buraco no meio do anel corresponderia a uma passagem para outro universo, isto é, para outras regiões assintoticamente planas do espaço-tempo [Morris, 88b , Visser, 96].

A geometria global do espaço-tempo de extensão máxima depende de cada um dos casos que se tem, ou seja, depende do fato de  $M > a$ ,  $M = a$  ou  $M < a$ . Vamos discutir brevemente os casos em que  $M > a$  e  $M < a$ , já que o caso onde  $M = a$  descreve um buraco negro extremo, cuja análise não será de interesse aqui.

### 2.3.1 O caso $M > a$

Se  $M > a$ , a solução de Kerr corresponde a um buraco negro rotacionalmente deformado. Muitas das características do buraco negro de Schwarzschild persistem, como, por exemplo, a existência de um horizonte de eventos. Porém, características completamente novas são observadas, como a existência de uma *ergoregião*.

Antes de seguirmos, vejamos algumas definições importantes [cf. Visser, 96]:

Define-se *ergosfera* como a superfície na qual o vetor de Killing de translação temporal,  $K^\mu \equiv (\partial/\partial t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , é nulo, ou seja,  $g_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0$ . Nessa região, os cones de luz “tombam” na direção de  $\phi$  (coordenada azimutal) crescente até uma certa distância, de forma que os fótons e partículas são forçados a orbitar a fonte na mesma direção de sua rotação [D’Inverno, 95]. A *ergoregião* é definida como sendo a região compreendida entre o horizonte de evento e a ergosfera. Para o caso em que não há rotação, a ergosfera coincide com o horizonte de evento e a ergoregião encolhe até o seu volume nulo.

Nas coordenadas de Boyer-Lindquist, a métrica de Kerr apresenta a seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.10)$$

onde

$$\rho^2(r, \theta) \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta; \quad (2.11)$$

$$\Delta(r) \equiv r^2 - 2Mr + a^2. \quad (2.12)$$

Os horizontes interno e externo ocorrem nos dois pontos onde a função  $\Delta(r) = 0$ , ou seja

$$r_{\pm} \equiv M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (2.13)$$

Estes horizontes são semelhantes aos horizontes interno e externo da solução de Reissner-Nordström.

A construção em termos da ponte de Einstein-Rosen é possível. Para tanto, utiliza-se apenas a solução para o horizonte mais externo, uma vez que esta solução se aplica somente à região fora do buraco. Como ocorre nas soluções de Schwarzschild e de Reissner-Nordström, a construção de um *wormhole* a partir da solução de Kerr mostra-se inapropriada no que diz respeito à transversabilidade, pois estas passagens de Kerr apresentam “horizontes de Cauchy”, que são altamente instáveis se sujeitos a pequenas perturbações: a radiação que as atravessa se tornará cada vez mais energética, apresentando um *desvio para o azul* infinito à medida que se acumula na parte mais interna do horizonte de evento. Isso fará com que haja um aumento das forças de maré, que selarão estas passagens, convertendo-as em singularidades físicas [Morris, 88, Visser, 96].

### 2.3.2 O caso $M < a$

Para este caso, o horizonte de evento desaparece. Como resultado, tem-se uma singularidade nua. A máxima extensão da geometria revela-se simples, pois consiste de duas regiões assintoticamente planas, cada uma com topologia  $\mathfrak{R}^4$ , que são cuidadosamente mutiladas da forma em que vamos descrever a seguir. Em cada fatia espacial dada por  $t$  contante, remove-se um disco definido por  $z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ . Une-se então o topo do disco removido no universo 1 ao fundo do disco removido no universo 2, e o topo do disco removido do universo 2 ao fundo do disco removido no universo 1. A singularidade em forma de anel localiza-se em  $x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0$ . A métrica, nas coordenadas de Kerr-Schild, é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[ dt + \frac{zdz}{r} + \frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} \right]^2, \quad (2.14)$$

onde

$$r^2 = \frac{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)^2 + 4a^2z^2}}{2}, \quad (2.15)$$

o que representa uma massa  $M$ , com momentum angular  $L = Ma$  apontando na direção do eixo  $z$ .

Tratando-se de uma singularidade nua, infelizmente não a encontramos escondida atrás de um horizonte de evento. Segundo a conjectura da “censura cósmica” singularidades nuas não podem ser fisicamente construídas a partir de condições iniciais razoáveis [veja Seção 3.6].

Podemos ainda citar uma outra característica perturbadora do wormhole de Kerr, que consiste na existência de curvas do tipo-tempo fechadas próximas à singularidade.

## 2.4 O wormhole de Morris-Thorne

Pelo menos trinta anos passaram-se entre o trabalho de Wheeler, apresentado em 1957, e o renascimento dos *wormholes*, devido ao trabalho de Morris e Thorne publicado em 1988 [Morris, 88b]. Muitos outros assuntos foram objetos de investigação durante esse período, porém pouco desse esforço foi direcionado aos *wormholes* do tipo Lorentziano. Tópicos de interesse, tais como a quantização da Gravitação, o desenvolvimento da própria Cosmologia Clássica Padrão, isto é, o modelo de *Big-bang*, a busca de soluções exatas para as equações de campo da Relatividade Geral ocuparam lugar de destaque na investigação científica durante estas três últimas décadas. Durante este período, os *wormholes* foram considerados como meras curiosidades matemáticas, e por isso relegados a segundo plano.

Embora esses tópicos continuem a ocupar grande parte da pesquisa devotada à área de Gravitação e Cosmologia, observamos, nos últimos anos, um considerável interesse no assunto de *wormholes* “atravessáveis”. Esse renascimento dos *wormholes* pode ser atribuído ao artigo seminal escrito por Morris e Thorne, intitulado “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity” [Morris, 88b].

Os autores, Morris e Thorne, perceberam que havia uma solução razoavelmente simples para as equações de Einstein, e que constitui na verdade uma nova classe de soluções, que não havia sido notada pelos pesquisadores. Essa solução descrevia um *wormhole*. Verificou-se que a abertura da garganta, que caracteriza a existência dos *wormholes*, poderia ser mantida com o que foi denominado “matéria exótica”: para evitar com que a garganta colapsasse, essa matéria “exótica” deveria ser capaz de manter uma tensão radial, para fora, de intensidade comparável à pressão no centro de uma estrela de neutrons [Morris, 88b , Freedman, 89]. De

fato, a tensão deveria exceder a densidade total de energia do próprio *wormhole*. Isso significa que o *wormhole* teria densidade de energia negativa.

Ainda, segundo esse mesmo modelo de *wormhole*, somente a manutenção da abertura da garganta não seria suficiente, pois qualquer observador ou sinal que atravessasse a garganta teria que ser capaz de viajar sob essa enorme pressão no interior do *wormhole* sem que fosse esvaçado. Thorne e Morris descobriram duas maneiras para contornar este problema.

É claro que tudo isso parece fantástico e vago, e ainda não existe maneira conhecida que permita um *wormhole* aparecer naturalmente. Morris e Thorne não se preocuparam com isso: os detalhes de construção e manutenção da estrutura ficariam a cargo de uma “civilização arbitrariamente avançada” [Morris, 88b].

Thorne e Morris nada encontraram nas leis da Física que pudesse proibir a existência de um *wormhole* atravessável. Mesmo que formas clássicas de matéria obedeçam a condição fraca de energia, ou seja, aquela que impõe que a densidade de energia deve ser positiva para quaisquer observadores (cf. Apêndice C), sabemos que campos quânticos podem gerar localmente densidades de energia negativas, que podem ser arbitrariamente grandes em um dado ponto [Ford, 96].

*Wormholes* atravessáveis são vistos normalmente como objetos topológicos e que ocorrem em espaço-tempos múltiplamente conectados. A classe desses objetos apresentada por Morris e Thorne é ainda mais restrita, pois requer tanto simetria esférica exata como a existência de duas regiões assintoticamente planas no espaço-tempo [Hochberg, 97]. Para que possa lidar com esta classe de *wormholes* (denominada intra-universal), a análise de Morris e Thorne deve estar sujeita a um procedimento de aproximação onde os dois extremos do *wormhole* estão forçados a existir na mesma região assintoticamente plana. A existência de uma ou mais regiões



assintoticamente planas é um ingrediente essencial na abordagem desses pesquisadores.

Daremos detalhes consideráveis a respeito das propriedades geométricas e gravitacionais dessas classes de *wormhole* mais adiante [Capítulo 4], e assim teremos a oportunidade de analisar com mais atenção o modelo proposto por Morris e Thorne, que serve de base para a construção do nosso modelo e de vários outros apresentados na literatura [Kim, 96 , Roman, 93 , Visser, 97 , Vollick, 97].

## Capítulo 3

### A DEFINIÇÃO DE WORMHOLE

Tradicionalmente, os *wormholes* foram vistos como objetos distintos dos buracos negros, de maneira que estes assuntos foram tratados separadamente na literatura, excetuando, é claro, o casos do *wormhole* de Schwarzschild (que não é estável) e a ponte de Einstein-Rosen, que consiste simplesmente em uma escolha não conveniente do sistema de coordenadas no espaço-tempo de Schwarzschild. No entanto, podemos citar aqui alguns dos aspectos comuns que caracterizam essas duas estruturas diferentes. A análise que segue está essencialmente baseada na abordagem de Visser [Visser, 96, Visser, 97].

Primeiramente, chamamos a atenção para o fato de que os *wormholes* atravessáveis, caso existam, podem apresentar uma intensa influência não-perturbativa sobre os horizontes de evento dos buracos negros. Fundamentalmente, isto ocorre porque o horizonte de evento é definido de uma maneira global, de forma que pequenas mudanças na geometria, uma vez que elas possuam todo o tempo do universo para que se propaguem para o infinito nulo futuro, podem afetar de maneira considerável o horizonte de evento.

Outro ponto importante a ser ressaltado é que espera-se que a região próxima a qualquer singularidade de curvatura esteja sujeita a grandes flutuações na métrica. Se considerarmos a imagem do espaço-tempo atribuída a Wheeler, a região próxima à singularidade de curvatura deveria estar repleta de *wormholes*. Se esta for uma singularidade do tipo-espaço<sup>1</sup>, isto

<sup>1</sup> Como exemplo de singularidade do tipo-espaço podemos citar a que aparece na solução de Schwarzschild: no diagrama do espaço-tempo em duas dimensões da solução de Kruskal, observamos que as geodésicas nulas radiais que entram e saem estão representadas por linhas retas. Uma geodésica tipo-tempo que atravessa o horizonte de eventos ( $r = 2m$ ) é compelida à singularidade futura em  $r = 0$ . A coordenada radial  $r$  considerada uma função de  $t'$  e  $x'$  é determinado pela equação  $t'^2 - x'^2 = -(r - 2m)e^{\frac{r}{2m}}$ . Logo, um valor de  $r$  determina duas hipersuperfícies. Em duas dimensões, o espaço-tempo é limitado por duas hipérbolas que representam a singularidade intrínseca em  $r = 0$ , e são denominadas singularidade passada e singularidade futura, respectivamente. A singularidade futura é do tipo espaço [D'Inverno, 95].

é, se consideramos essa singularidade do tipo-espaço antes de levarmos os *wormholes* em consideração, então os *wormholes* podem conectar regiões que de outra forma estariam fora do cone de luz uma da outra, e assim levaria ao transporte de informação em uma direção efetivamente do tipo-espaço. Ainda devemos analisar a maneira com que a informação será transportada através do horizonte de evento. Isso representa uma cômoda tentativa de contornar o paradoxo de informação do buraco negro.

Além das flutuações que ocorrem próximas à singularidade de curvatura, também espera-se encontrar consideráveis efeitos sobre o valor esperado da métrica devido à polarização gravitacional do vácuo. Como esse fenômeno tipicamente viola as condições de energia, ele poderia fazer com que esperássemos encontrar uma “perfuração” que conduzisse à outra região assintoticamente plana. Em outras palavras, isso seria equivalente a esperar que as singularidades apresentassem um mecanismo que permitisse a sua transformação em gargantas de *wormholes*.

### 3.1 Caracterização de um wormhole

Vamos agora nos ater ao conceito de *wormhole* e à descrição das propriedades físicas e matemáticas desses objetos, mais especificamente, daqueles aos quais atribuímos o adjetivo “atravessável”. Nos concentraremos na região próxima à garganta desta estrutura. Um dos aspectos mais importantes que caracterizam um *wormhole* é a violação de algumas das condições de energia, em particular, a violação da condição de energia para vetores do tipo-nulo [Apêndice C], *na região da garganta ou próxima a esta*. As violações da condição de energia foram primeiramente descobertas no modelo de *wormholes* estáticos e

com simetria esférica do tipo Morris-Thorne, porém o resultado é genérico, pois trata-se de uma característica confirmada pelo teorema de censura topológica [cf. Friedman, 93], que será visto mais adiante. Entretanto, há várias outras classes de geometrias que poderiam ser razoavelmente classificadas como *wormholes* [Visser, 97]. Essas classes apresentam topologia trivial ou não possuem qualquer região assintoticamente plana, ou ainda podem exibir essas duas características. Um exemplo simples de um *wormhole* que não apresenta uma região assintoticamente plana é constituído por dois espaço-tempos fechados tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), conectados por um estreito “pescoço”. Um outro exemplo simples de topologia trivial é constituído por um único espaço-tempo tipo FRW conectado a um espaço-tempo tipo Minkowski ordinário, por meio de um estreito pescoço. Apresentaremos, mais adiante, a “taxonomia” geral dos exemplares de *wormhole*.

Antes, porém, de começarmos a empreender uma análise mais profunda de uma garganta estática genérica, precisamos definir exatamente o que entendemos por *wormhole*. Há uma elegante caracterização geométrica da existência e localização da garganta dessa estrutura. Esta caracterização é desenvolvida em termos de uma hipersuperfície de área mínima, sujeita a uma condição que denominaremos *condição de desfocalização*, dada simplesmente em termos de argumentos geométricos. Esta condição generaliza a análise feita por Morris e Thorne.

De acordo com Hochberg e Visser [Hochberg, 98], caracterizamos um *wormhole* em virtude de sua garganta, que é definida ao requerer-se que na garganta a área da seção reta de um feixe de raios de luz que passam ortogonalmente através da referida garganta tenha um mínimo local estritamente não-nulo. Esta noção é implementada ao se definir primeiramente uma hipersuperfície tipo-espaço dada em termos das coordenadas denotadas por  $x$  (entenda-se  $x^\mu$ ),  $\Sigma(u(x))$ , onde  $u(x)$  são as coordenadas nulas definidas em hiperplanos ortogonais à

congruência de geodésicas nulas. Para cada congruência de geodésicas nulas podemos definir a *expansão* ( $\theta$ ), o *cisalhamento* ( $\sigma^{\alpha\beta}$ ) e a *vorticidade* ( $\varpi^{\alpha\beta}$ ), de forma completamente análoga àquela apresentada na maioria dos textos de referência [Ellis, 71 , Hawking, 73]. Com isso, temos uma equação de Raychaudhuri para cada congruência de geodésicas nulas, que apresenta a seguinte forma [Hawking, 73]:

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \varpi^{\alpha\beta}\varpi_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta, \quad (3.1)$$

onde  $k^\alpha$  é o vetor tipo-nulo ortogonal à hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma(u(x))$ .

Tomando  $\Sigma \equiv \Sigma(0)$ , definimos a área em termos da métrica bidimensional  $\gamma_{\mu\nu}$  induzida na hipersuperfície  $\Sigma$  segundo

$$A[\Sigma(u(x))] = \int_{\Sigma(u(x))} \sqrt{\det \gamma_{\mu\nu}(x, u(x) = 0)} dx^2. \quad (3.2)$$

Se a hipersuperfície  $\Sigma$  é considerada a garganta, devemos primeiramente impor que  $A[\Sigma] > 0$ .

Devemos ainda considerar a existência de alguma vizinhança aberta, denotada por  $U$ , em torno da função nula  $u(x) = 0$ , de tal forma que

$$\frac{\delta A}{\delta u}|_{(u=0)} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\delta^2 A}{\delta u^2}|_{(u=0)} \geq 0. \quad (3.4)$$

A hipersuperfície  $\Sigma$  é uma garganta com respeito à congruência de geodésicas nulas à qual nos referimos anteriormente caso a expansão desta seja nula em todos os pontos na garganta, ou seja, se

$$\theta = 0; \quad (3.5)$$

e se em todos os pontos da garganta a expansão congruência nula satisfaça a condição (simples) de *desfocalização*:

$$\frac{d\theta}{du} \geq 0. \quad (3.6)$$

Somente esta condição já é suficiente para provar a violação da condição fraca de energia para vetores nulos. Isso é feito ao aplicarmos a equação de Raychaudhuri, usando o fato de que a vorticidade é automaticamente nula para qualquer congruência ortogonal de geodésicas, e que  $\sigma^2 > 0$ . Além disso, se empregarmos que por def inição temos  $\theta = 0$ , e a condição dada pela [eq. (3.6)] na garganta, imediatamente concluímos que

$$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0, \quad (3.7)$$

onde devemos utilizar o mesmo vetor nulo empregado na def inição da garganta. Ao aplicarmos as equações de Einstein, obtemos

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \leq 0, \quad (3.8)$$

de forma que a condição de energia fraca para vetores tipo-nulo é violada ou está na iminência de o ser na garganta do *wormhole*. Para que possamos obter um resultado em termos de uma condição mais forte, devemos substituir a desigualdade fraca dada pela [eq. (3.6)] por uma outra mais exata. Essencialmente, isso significa que

$$\frac{d\theta}{du} > 0, \quad (3.9)$$

resultando em

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta < 0. \quad (3.10)$$

A prova matemática disso requer detalhes técnicos mais sofisticados, que nos permitem justificar a substituição da desigualdade fraca por outra mais precisa [veja Hochberg, 98], e que ocorre de uma forma ou de outra em todas as discussões técnicas das violações das condições de energia em *wormholes* atravessáveis. É devido a essas complicações técnicas que a frase “na garganta ou próximo a ela” aparece em quase toda a literatura disponível sobre o assunto.

Tendo esta def inição em mente, podemos desenvolver alguns teoremas sobre a existência

de matéria “exótica” na garganta do *wormhole*. Estes teoremas constituem uma generalização do resultado original obtido por Morris e Thorne, ao mostrar que a condição nula de energia é genericamente violada em alguns pontos ou próximo à superfície que contém a garganta. Deveríamos tomar estes resultados como complementares ao teorema de censura topológica. Basicamente, este teorema nos diz que em um espaço-tempo que contenha um *wormhole* atravessável, a condição nula de energia média deve ser violada ao longo de algumas (não todas) geodésicas nulas, porém este teorema não nos fornece muitas informações sobre onde estas violações ocorrem [Visser, 96]. Confirmaremos, mais tarde, que algumas dessas violações das condições de energia estão concentradas no local esperado, ou seja, na garganta (ou próximo a esta) [Capítulo 4, Seção 4.5]. A análise que apresentaremos a seguir, sendo puramente local, não fará uso de muitas considerações técnicas com relação à característica assintoticamente plana, infinitos nulos futuro e passado, além de outros ingredientes necessários para o teorema de censura topológica.

Resumindo, as violações das condições de energia na garganta do *wormhole* são inevitáveis. Muitas tentativas que são feitas ao construir-se tal objeto sem que ocorra a violação das condições de energia apenas são possíveis quando essas violações são escondidas em algum campo subsidiário, ou ainda ao escondê-las em algum ponto da análise [Visser, 97].

## 3.2 Considerações gerais

Antes, porém, de avançarmos na análise dos diferentes tipos de *wormholes*, devemos definir alguns dos termos com os quais estaremos lidando no decorrer deste trabalho. Primeiramente, temos os chamados horizontes, que são construções teóricas que qualitativamente exibem duas

características principais [D’Inverno, 92]:

1. O comportamento característico de uma membrana de “mão-única”, que permite a passagem de luz e de matéria apenas em uma direção (passagem das curvas tipo-tempo ou nulas direcionadas para o futuro, da região externa para a região interna, e não o contrário).

2. Representa um limite para todos os eventos que podem ser observados, em princípio, por observadores externos, pois a coordenada que apresenta o caráter temporal, denotada por  $t$ , não mais se mostra apropriada para a descrição do movimento de partículas-teste.

Há pelo menos cinco tipos de horizontes interessantes que ocorrem em Relatividade Geral, e que são tipicamente associados com campos gravitacionais fortes, embora possamos ter um campo gravitacional forte sem que haja horizontes [Visser, 96]. Vamos agora definir alguns deles: o horizonte de eventos e o horizonte de Cauchy.

### 3.2.1 O horizonte de eventos ou horizonte absoluto

Podemos defini-lo somente para um espaço-tempo que contenha pelo menos uma região assintoticamente plana.

**Definição 1** *Para cada região assintoticamente plana, o horizonte de eventos futuro / passado associado é definido como o contorno da região a partir do qual curvas causais (isto é, curvas tipo-tempo ou tipo-nulo) podem alcançar o infinito nulo futuro / passado.*

A determinação do horizonte de eventos futuro / passado requer o conhecimento da geometria do espaço-tempo arbitrariamente em direção ao futuro, pois uma vez atrás do horizonte de eventos, nada podemos dizer em relação à partícula, já que aí ela estará confinada, sem que possa emergir.



### 3.2.2 O horizonte de Cauchy

Os horizontes de Cauchy estão associados com o início de imprevisibilidade. Supomos que para uma dada hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$  haja alguns dados iniciais nela especificados. Esses dados iniciais podem estar relacionados com posições e velocidades de partículas, alguma configuração de campo ou ainda a geometria espacial e sua taxa de variação temporal. Pode-se então resolver certas equações de movimento para que se possa obter previsões únicas para alguma região específica, conhecida como o domínio de dependência de  $\Sigma$ . O contorno do domínio de dependência é o horizonte de Cauchy da hipersuperfície  $\Sigma$ . Formalmente, podemos definir o horizonte de Cauchy como:

**Definição 2** *Para uma hipersuperfície tipo-espaço  $\Sigma$ , o horizonte de Cauchy futuro associado é definido como sendo o contorno da região a partir da qual todas as curvas causais (curvas do tipo-tempo ou tipo-milo) direcionadas ao passado interceptam  $\Sigma$ .*

Passaremos, a seguir, para a definição de *wormhole* e as diferentes formas sob as quais pode se apresentar.

### 3.3 Tipos de wormholes

Vamos abandonar a perspectiva histórica e considerar uma visão mais abrangente da “taxonomia” dos *wormholes*. Estes objetos podem se apresentar sob várias classes, porém as maiores subdivisões são aquelas que se referem às classes de *wormholes* Lorentzianos e os Euclidianos. Essa classificação refere-se meramente ao fato da variedade na qual o *wormhole* se encontra ser Lorentziana (isto é, uma variedade pseudo-Riemanniana), ou ser

realmente Riemanniana (ou seja, aquela que apresenta a assinatura da métrica Euclideana). Experimentalmente, notamos que a chamada “física real” ocorre em variedades com a assinatura Lorentziana, e por isso vamos nos ater a esta classe de soluções de *wormhole*.

Adotaremos a seguinte definição de *wormhole* [cf. Visser, 96]:

**Definição 3** *Um ‘wormhole’ é qualquer região compacta do espaço-tempo com um contorno topologicamente simples, mas com um interior topologicamente não-trivial.*

### 3.4 Wormholes Lorentzianos

Os *wormholes* Lorentzianos podem ser classificados em pelo menos dois tipos:

1. *Wormhole inter-universal*, ou seja, aqueles que conectam o “nosso” universo a um “outro” universo.
2. *Wormhole intra-universal*, ou seja, aqueles que conectam duas regiões distantes de um mesmo universo.

Os *wormholes* inter-universais em princípio permitiriam a troca de informação entre os vários universos, enquanto que os *wormholes* intra-universais conectam duas regiões distantes de um único universo, podendo funcionar como um meio através do qual informação poderia ser enviada a distâncias que compreendem vários anos-luz: tal *wormhole* Lorentziano “auto-conectado” é um método que permitiria contornar a barreira da velocidade da luz [Visser, 96].

A diferença entre essas duas classes de *wormhole* surge ao nível da geometria e topologia globais. A física localmente descrita, próximo à garganta da estrutura, não depende do tipo de conexão entre universos ou regiões. Se um observador estivesse fazendo medições locais, estando confinado na vizinhança de um *wormhole*, não seria capaz de afirmar se

estaria viajando para um outro universo, ou se estaria viajando para uma região do mesmo universo do qual saíra [Visser, 96]. Isso é uma vantagem em termos operacionais, já que permite concentrarmo-nos no comportamento local perto da garganta do objeto, sem que nos preocupemos com aspectos globais, que podem ser adiados para análises futuras. Como resultado desse procedimento, temos que os *wormholes* são descritos por meio de uma física “plausível”: os wormholes são, com certeza, objetos estranhos e peculiares, mas pelo menos localmente não parecem violar os princípios físicos básicos.

Ainda dentro dessa classe mais geral de *wormholes*, temos ainda as variedades “permanentes” (ou “quase-permanentes”) e as “transientes”, cada uma delas apresentando as suas versões inter-universais e intra-universais. Cada sub-espécie ainda surge nas variedades “macroscópica” e “microscópica” [Visser]. A seguir, apresentamos a definição para cada uma dessas características.

### **3.4.1 Wormholes permanentes ou quase-permanentes**

Ao fatiarmos uma determinada região do espaço-tempo em hipersuperfícies do tipo-espaço, e pensarmos em cada uma dessas fatias como uma variedade Riemanniana tridimensional que exibe um *wormhole*, logo podemos considerar que tal *wormhole* existe durante um certo intervalo de tempo. Usaremos o termo quase-permanente, ou simplesmente permanente para designar este objeto. Esse tipo de wormhole é essencialmente um objeto tridimensional que existe por uma duração de tempo da métrica finita não-nula.

A existência de um *wormhole* verdadeiramente permanente, distinto daquele que denominamos quase-permanente, não viola qualquer dos teoremas sobre mudança de topologia clássicos. Por outro lado, a criação e/ou destruição dos *wormholes* quase-permanentes viola

esses teoremas, impondo uma mutilação da Relatividade Geral. Como exemplo disso, podemos citar as chamadas variedades “Lorentziana em quase todos os lugares” ou ainda as violações de causalidade [Visser, 96].

Uma definição mais técnica do tipo de *wormhole* analisado é dada a seguir [Visser, 96].

**Definição 4** *Se um espaço-tempo Lorentziano contém uma região compacta  $\Omega$ , e se a topologia de  $\Omega$  é da forma  $\Omega \sim \mathfrak{R} \times \Sigma$ , onde  $\Sigma$  é uma trivariiedade tipo espaço com topologia não-trivial ( $\Sigma$  é o “espaço”, enquanto  $\mathfrak{R}$  é o “tempo”), cujo contorno tem topologia na forma  $\partial\Sigma \sim S^2$ , então a região  $\Omega$  contém um wormhole quase-permanente intra-universal.*

Os wormholes quase-permanentes do tipo inter-universais são mais difíceis de se descrever. Não se pode simplesmente basear em argumentos puramente topológicos para que possamos caracterizá-los.

### 3.4.2 Wormholes transientes

Os *wormholes* que constituem esta classe são basicamente aqueles que surgem e desaparecem sem que apresentem, mesmo localmente, uma estrutura topológica da forma  $\Omega \sim \mathfrak{R} \times \Sigma$ . Esta classe de objetos é intrinsecamente quadridimensional.

Qualquer região compacta  $\Omega$ , com contorno  $\partial\Omega \sim S^3$ , que contém topologia não-trivial é com certeza um *wormhole* transiente intra-universal. Por hipótese, a topologia de  $\Omega$  não é certamente da forma  $\mathfrak{R} \times \Sigma$ . Já um wormhole transiente do tipo inter-universal tipicamente tem uma região “ativa” com topologia  $\Omega \sim \mathfrak{R} \times S^3$ , e o contorno dessa região é dado por  $\partial\Omega \sim S^3 \cup S^3$ .

Esta classe de wormholes, pelo fato de não satisfazerem os teoremas de mudança de topologia clássicos, impõe a mutilação da Relatividade Geral Clássica para que permita

processos de mudança de topologia.

### 3.4.3 Wormholes macroscópicos e microscópicos

Podemos ainda dividir, de forma grosseira, os *wormholes* em *macroscópicos* e *microscópicos*.

Essa designação dependerá do tamanho da região ativa relativamente à escala de Planck.

### 3.4.4 Wormholes atravessáveis

Vamos defini-los, por hora, como sendo aqueles *wormholes* do tipo Lorentziano que são quase-permanentes e macroscópicos, e que por isso revelam-se apropriados para a passagem de objetos macroscópicos ou a transmissão de sinais entre duas regiões do espaço-tempo separadas espacialmente.

## 3.5 Wormholes Euclidianos

Esta classe não é de interesse imediato para o nosso trabalho, por isso não pretendemos nos deter em muitos detalhes na descrição destes. Os *wormholes* Euclidianos têm despertado um considerável interesse no campo da física de partículas, além, é claro, no campo da Relatividade. Eles são até mesmo a base para a tentativa de Coleman [Coleman, 88] em explicar o problema da constante cosmológica, considerando que o seu caráter “apóia-se sobre a dinâmica dos *wormholes* Euclidianos”. [Visser, 96].

Em princípio, não há coisa alguma que os impeça de ser quase-permanentes e que tenham uma topologia  $\Omega \sim \mathfrak{R} \times \Sigma$ , sendo  $\mathfrak{R}$  uma coordenada de tempo “imaginária” e  $\Sigma$  uma topologia espacial não-trivial, porém os objetos desse tipo são raramente considerados [Visser, 96].

Esta classe de *wormholes* é tipicamente transiente. Pensamos neles como existindo “instantaneamente” no campo gravitacional. Muitos dos modelos dessa classe de objetos considerados na literatura exibem a simetria  $O(4)$ . De fato, tipicamente  $M \sim \mathfrak{R} \times S^3$ , com  $\mathfrak{R}$  sendo uma variável radial Euclideana.

Ao passar para a assinatura Euclideana, deve-se restringir a classe de variedades em questão considerando que há a compatibilidade com a existência de uma métrica Lorentziana, caso contrário, deve-se esperar a perda de vários dos teoremas de mudança de topologia.

### 3.6 Censura topológica

Os tipos de *wormholes* atravessáveis considerados apresentam em comum o fato de ter simetria esférica, o que nos permite manter tratável a análise dessas estruturas convenientemente. Porém, um *wormhole* geral deveria ser assimétrico, deveria exibir uma garganta arbitrariamente longa e possivelmente uma geometria dependente do tempo. Isso complicaria demasiadamente a análise do modelo, e exigiria a utilização do que se denomina *técnicas globais*. Para esta análise, seguiremos aqui essencialmente o tratamento apresentado em [Visser, 96]. Um dos resultados principais é o que segue:

1. *Em qualquer espaço-tempo “razoável” que contenha um ‘wormhole’ atravessável, a condição nula de energia média é violada para pelo menos uma geodésica nula inextensível.*

Veremos que o modelo de Morris-Thorne, assim como outros, satisfazem esta afirmação [Capítulo 4]. Várias provas disso podem também ser encontradas na literatura, apresentando maior ou menor rigor.

Uma outra afirmação equivalente, de acordo com Friedman, Schleich e Witt [Friedman, 93],

é a seguinte:

2. *Se um espaço-tempo “razoável” satisfaz a condição de energia nula média em todas as geodésicas nulas inextensíveis, então este espaço-tempo não contém qualquer wormhole atravessável.*

Enunciaremos, a seguir, o teorema da censura topológica.

**Teorema 1** *Em qualquer espaço-tempo assintoticamente plano e globalmente hiperbólico, tal que toda geodésica nula inextensível satisfaça a condição nula de energia média, toda curva causal do infinito nulo passado para o infinito nulo futuro é deformável para a curva causal trivial.*

Devemos esclarecer alguns pontos técnicos: entendemos aqui por *assintoticamente plana* a região que se encontra a grande distância da região altamente curvada, onde o comportamento do espaço-tempo é aquele característico do espaço-tempo de Minkowski. Já a condição do espaço-tempo ser *globalmente hiperbólico* requer que esse espaço-tempo seja bem comportado em termos da causalidade, ou seja, apresente uma topologia da forma  $M \sim \mathfrak{R} \times \Sigma$ , não tendo curvas causais fechadas. Quanto à *curva causal trivial*, ou seja, aquela que tem uma superfície de Cauchy  $\Sigma$ , entendemos como sendo aquela que estende-se do infinito nulo passado para o infinito nulo futuro através de um infinito tipo-espaço.

De acordo com a conjectura de censura cósmica (atribuída a Penrose), singularidades que se formam em direção ao futuro de uma superfície com dados iniciais regulares estão escondidas atrás de horizontes de eventos. Estando correta, a conjectura sugere que quaisquer estruturas topológicas colapsarão para dentro do horizonte de um conjunto de buracos negros. Este colapso é muito rápido de forma que não permite que observadores atravessem a garganta de *wormholes* associados às soluções de buracos negros exatas e analiticamente estendidas.

Consequentemente, somos levados a uma conjectura de censura topológica, ou seja, a de que nenhum observador que se encontra na região exterior de um buraco negro tem tempo para investigar a topologia do espaço-tempo [Friedman, 93].

A prova desse teorema é altamente técnica, e foge ao escopo do nosso trabalho apresentá-la aqui. No entanto, o que deve ser apreendido desse teorema é o fato de que, ao considerarmos globalmente a condição de energia nula média, isso impede qualquer prova ativa da topologia do espaço. O teorema não garante que a topologia do espaço  $\Sigma$  seja trivial, porém mostra que é impossível se enviar um sinal luminoso através de qualquer topologia não-trivial que possa estar presente. No entanto, a existência dos *wormholes* é permitida, mas não a dos atravessáveis. O que é mais importante neste teorema é que ele fornece uma definição matemática geral precisa de um *wormhole*.

Para finalizarmos, vejamos um outro teorema.

**Teorema 2** *Qualquer espaço-tempo contendo um wormhole atravessável tanto pode (1) não ser globalmente hiperbólico, ou (2) é tal que exista pelo menos uma geodésica nula inextensível na qual a condição fraca de energia média seja violada.*

Notemos, com isso, que não é exatamente verdadeiro o fato de que todas as geodésicas nulas que passam através do *wormhole* violem a condição fraca de energia. O que esse teorema nos diz é que pelo menos uma delas viola a condição de energia.



## Capítulo 4

# O MODELO DE MORRIS-THORNE

### 4.1 As propriedades básicas

Os sistemas de *wormholes* que vimos no Capítulo 2, como, por exemplo, a ponte de Einstein-Rosen, apresentam-se inapropriados para servirem de um meio pelo qual informação seja transportada. A maioria deles exhibe horizontes de evento, ou se mostram instáveis no que diz respeito à capacidade de permanecerem abertos, ou ainda apresentam forças de maré muito intensas. Assim sendo, Morris e Thorne apresentaram um modelo de um sistema de *wormhole* atravessável para o qual impuseram as características desejáveis que a solução deveria apresentar. Esses autores apresentaram pela primeira vez a prova original que mostra a necessidade de violação das condições de energia [cf. Apêndice C] que se tem mencionado. É mostrado, em seu trabalho seminal, que essas violações devem ocorrer na garganta do *wormhole* ou próximo a ela. De acordo com a análise desses autores, densidades de energia negativas podem ser obtidas ao se sustentar o *wormhole* com um tipo de matéria que viola as condições de energia. Esse tipo de matéria é denominado matéria “exótica”.

O procedimento usual tem sido aquele que começa pela escolha da Lagrangeana para os campos de matéria que supomos que seja apropriada para a manutenção do espaço-tempo do *wormhole*. Calcula-se, então, o tensor energia-momento. Em seguida, resolvemos as equações de Einstein. Finalmente, verificamos a presença de singularidades de curvatura na geometria obtida.

Morris e Thorne adotaram um método diferente deste, que seria uma abordagem orientada por um processo de “engenharia”. Eles consideraram a existência de uma geometria ajustável bem comportada, calcularam os tensores de curvatura associados com esta geometria e usaram as equações de Einstein para deduzir a distribuição de energia do tensor energia-momentum. Checaram ainda se a distribuição obtida apresentava propriedades fisicamente razoáveis ou se violava qualquer princípio físico. O sistema que tinham em mãos mostrava-se compatível com os princípios físicos conhecidos, embora o comportamento da matéria que sustentava a garganta exibisse um comportamento peculiar.

A classe de *wormholes* obtida por Morris e Thorne requer simetria esférica, além de outras características que sugerem critérios para a classificação de uma tal estrutura como um *wormhole*, bem como critérios para a utilização dessas estruturas. São elas as seguintes:

1. Para que seja um *wormhole*, como já vimos, a solução deve apresentar uma garganta, caracterizada pela existência de uma hipersuperfície de área mínima, que conecta duas regiões do espaço-tempo assintoticamente planas. A existência de uma ou mais regiões assintoticamente planas é essencial nesse modelo, pois considera-se que as “bocas” da estrutura, ou seja, as aberturas que permitem o acesso ao interior, assim como a saída, estejam localizadas nestas regiões.

2. Não deve haver horizontes, pois eles impediriam a passagem de “mão-dupla” através do *wormhole*.

3. As forças gravitacionais de maré experimentadas por um observador devem ser pequenas. Requer-se que a aceleração da gravidade seja da mesma ordem de grandeza do valor medido na Terra.

4. O tempo de trânsito necessário através do *wormhole* deve ser finito, medido pelo

observador que efetua a viagem, assim como pelos observadores externos.

5. A solução deve ser estável quanto a quaisquer perturbações.

6. A matéria e os campos que geram a curvatura do espaço-tempo para a construção do *wormhole* devem ter um tensor momentum-energia fisicamente razoável, o que poderia minimizar a violação das condições de energia.

Faremos, a seguir, uma revisão da solução de Morris-Thorne (MT), onde apresentaremos alguns detalhes matemáticos e o procedimento geral de construção da solução, que será seguido mais tarde para a construção do nosso próprio modelo de *wormhole*. Alguns casos particulares serão apresentados ao final.

## 4.2 A forma da métrica

Para simplificar a análise, os autores consideraram uma geometria de espaço-tempo independente do tempo, sem rotação e esfericamente simétrico, dada pela métrica (por hora, adotaremos a assinatura da métrica empregada pelos autores)

$$dS^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta) d\varphi^2. \quad (4.1)$$

Podemos destacar alguns detalhes dessa geometria:

a. Temos dois sistemas de coordenadas que cobrem toda a extensão entre  $(-\infty, r_o]$  e  $[r_o, +\infty)$ . Cada sistema cobre um universo, e os dois sistemas de coordenadas se unem em  $r_o$ , onde temos a garganta do *wormhole*.

b. Espera-se que a coordenada  $t$  seja convenientemente contínua ao se atravessar a garganta, ou seja,  $\Phi_+(r_o) = \Phi_-(r_o)$ .

c. As funções arbitrárias e ajustáveis de  $r$  apenas,  $\Phi_{\pm}(r)$  e  $b_{\pm}(r)$ , são, respectivamente, a

função “lapso de tempo” e a “função de forma”.

d. A circunferência própria de um círculo com raio fixo  $r$  é dada por  $2\pi r$ . A coordenada  $r$  decresce de  $+\infty$  para um valor mínimo  $r_o$ , que representa a localização da garganta do *wormhole*, onde  $b(r_o) = r_o = b_o$ , para então crescer novamente desse valor mínimo até  $+\infty$ . Assim como ocorre para um *wormhole* do tipo Schwarzschild, a coordenada  $r$  não é bem comportada na garganta. Por isso, exige-se que a *distância radial própria*, dada por

$$l(r) = \pm \int_{r_o}^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - b_{\pm}(\tilde{r})/\tilde{r}}} \quad (4.2)$$

seja finita em todos os pontos. Como  $0 \leq 1 - b(r)/r \leq 1$ , a distância própria é maior ou igual à distância de coordenada:  $|l(r)| \geq r - r_o$ . A distância própria decresce de  $l = +\infty$  para zero na garganta, e depois de zero para  $l = -\infty$  no “outro lado” do *wormhole*.

e. Requer-se que o limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b_{\pm}(r) = b_{\pm} \quad (4.3)$$

seja finito para que a geometria espacial apresente um limite assintótico apropriado. Se compararmos com a métrica de Schwarzschild, isso implica que  $b_{\pm} = 2GM_{\pm}$ . Isso não é tão estranho, já que permite-se que a massa do *wormhole* seja diferente dependendo do universo onde o observador está localizado, ou seja, as bocas do *wormhole* podem possuir massas diferentes.

f. Como é desejável que a geometria do espaço-tempo exiba um comportamento assintótico plano apropriado, é necessário que os limites

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{\pm}(r) = \Phi_{\pm} \quad (4.4)$$

existam e sejam finitos, embora a exigência de que  $\Phi_+(\infty) = \Phi_-(\infty)$  não tenha sido imposta.

Isso significa que o tempo pode fluir de maneira diferente em cada um dos universos.

- g. As componentes da métrica devem ter, pelo menos, as primeira e segunda derivadas em  $r$ .
- h. Embora não seja essencial para a definição de *wormhole*, considera-se a simetria sob troca de regiões assintoticamente planas, ou seja,  $\pm \rightarrow \mp$ . Isso significa que  $\Phi_+(r) = \Phi_-(r)$  e  $b_+(r) = b_-(r)$ .
- i. Espera-se que a diminuição do campo se dê de forma rápida conforme o afastamento radial ocorra, de tal forma que o limite assintótico seja verificado, logo

$$b/r \rightarrow 0 \text{ e } \Phi \rightarrow 0 \text{ conforme } r \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

### 4.3 O comportamento na garganta

Um recurso bastante útil para a análise de geometrias que possam exibir *wormholes* e para a visualização dessas estruturas é a construção de diagramas de imersão. Para isso, escolhemos a geometria de um espaço tridimensional em um dado tempo fixo  $t$ . Como a geometria é esfericamente simétrica, pode-se tomar simplesmente uma fatia equatorial definida por  $\theta = \pi/2$ . O elemento de linha que descreve tal superfície é obtido quando atribuímos  $t = \text{constante}$  e  $\theta = \pi/2$  e substituímos estes valores na [eq. (4.1)], sendo dado por

$$dS^2 = (1 - b/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.6)$$

A seguir, constrói-se, em um espaço Euclidiano tridimensional, uma superfície bidimensional com a mesma geometria dada pela fatia definida pela [eq. (4.6)]. Assim, torna-se possível a visualização desta superfície como se esta tivesse sido removida do espaço-tempo de origem e fosse imersa no espaço Euclidiano [Misner, 73]. Escolhe-se as coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$

para a descrição deste espaço Euclidiano, o que nos dá como a métrica desse espaço

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (4.7)$$

Como a superfície imersa exibirá simetria axial, poderá ser descrita pela função  $z(r)$ .

Podemos escrever a [eq.(4.7)] como

$$dS^2 = dr^2 \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] + r^2 d\varphi^2. \quad (4.8)$$

Se agora identificarmos as coordenadas  $(r, \varphi)$  com aquelas que descrevem o espaço-tempo do *wormhole*, também  $(r, \varphi)$ , veremos que o elemento de linha dado pela [eq.(4.8)] será igual ao elemento de que descreve a fatia equatorial dada pela [eq.(4.6)] caso a função  $z(r)$  satisfaça a condição

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

A superfície descrita pela função [eq.(4.9)] pode ser representada graficamente, e sua forma será definida pela função  $b(r)$ . O comportamento desta função na garganta é particularmente interessante. Se analisarmos a [eq.(4.9)], observamos que

$$\frac{dr}{dz} = \pm \sqrt{\frac{r}{b} - 1}. \quad (4.10)$$

Se calcularmos a derivada segunda em relação a  $z$ , teremos:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{dr}{dz} \right) = \frac{dr}{dz} \left[ \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dz} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{dr}{dz} \right)^2 \right], \quad (4.11)$$

que resulta em

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{b - b'r}{2b^2}. \quad (4.12)$$

Como  $r = r_o = b_o$  é um mínimo na garganta e cresce com o afastamento em relação a esta, a superfície de imersão deve apresentar um comportamento similar àquele de uma desfocalização, e que descreve uma condição denominada condição de “flare-out” [cf. Morris,

88b]. Matematicamente, isso é reproduzido quando a condição

$$\frac{d^2r}{dz^2} > 0 \quad (4.13)$$

é satisfeita na garganta ou próximo à ela. Pela [eq. (4.12)], temos uma outra versão para esta condição de mínimo, dada por

$$\frac{b - b'r}{2b^2} > 0, \text{ quando } r = b = b_o. \quad (4.14)$$

Analisando esta condição na garganta, temos que

$$\left. \frac{b - b'r}{2b^2} \right|_{r_o} = \frac{1}{2b_o} [1 - b'_+(r_o)] = \frac{1}{2b_o} [1 - b'_-(r_o)]. \quad (4.15)$$

Isso significa que na garganta temos

$$b'_+(r_o) = b'_-(r_o). \quad (4.16)$$

Além disso, como  $r(z)$  é um mínimo na garganta, espera-se que

$$\frac{d^2r}{dz^2} \geq 0, \quad (4.17)$$

fornecendo a desigualdade fraca dada por

$$b'_\pm(r_o) \leq 1. \quad (4.18)$$

A mesma análise pode ser aplicada à função de lapso. Calculamos a sua derivada em relação a  $z$ :

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{dr}{dz} \left( \frac{d\Phi}{dr} \right) = \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Phi'. \quad (4.19)$$

Agora, calculando a segunda derivada, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dz^2} &= \left( \frac{dr}{dz} \right) \frac{d}{dr} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right) = \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \frac{d}{dr} \left( \sqrt{1 - \frac{b}{r}} \Phi' \right) \\ &= \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \Phi'' + \frac{1}{2r} \left( \frac{b}{r} - b' \right) \Phi'. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Se analisarmos essa derivada segunda na garganta, ou seja, para  $r = r_o$  (que nos dá  $b(r_o) = b_o$ ),

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}\Big|_{r_o} = \frac{1}{2b_o} [1 - b'_+(r_o)] \Phi'_+(r_o) = \frac{1}{2b_o} [1 - b'_-(r_o)] \Phi'_-(r_o), \quad (4.21)$$

que resulta em

$$\Phi'_+(r_o) = \Phi'_-(r_o). \quad (4.22)$$

## 4.4 Os tensores de curvatura

Para a determinação dos tensores de curvatura, por conveniência escolheu-se trabalhar em uma base de tetradas inercial  $\{e^A_\alpha\}$  em cada ponto da variedade, onde as 1-formas diferenciáveis escolhidas  $\theta^A = e^A_\alpha dx^\alpha$  [cf. Soares, 80] são dadas por

$$\begin{aligned} \theta^0_{(0)} &= e^0_{(0)} dt = e^\Phi dt; \\ \theta^1_{(1)} &= e^1_{(1)} dr = (1 - b/r)^{-\frac{1}{2}} dr; \\ \theta^2_{(2)} &= e^2_{(2)} d\theta = r d\theta; \\ \theta^3_{(3)} &= e^3_{(3)} d\varphi = r \text{sen}\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nesta base, os coeficientes da métrica,  $\eta_{AB} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ , assumem a forma padrão (métrica do espaço-tempo da Relatividade Especial):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Isso permite escrever a métrica [eq. (4.1)] como

$$dS^2 = \theta^A \theta^B \eta_{AB}. \quad (4.25)$$

Com isso, as componentes não-nulas do tensor de Riemann são:



$$R_{101}^0 = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{-\Phi'' - (\Phi')^2\right\} + \frac{1}{2r^2} (b'r - b); \quad (4.26)$$

$$R_{202}^0 = R_{303}^0 = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r}; \quad (4.27)$$

$$R_{212}^1 = R_{313}^1 = \frac{1}{2r^3} (b'r - b); \quad (4.28)$$

$$R_{323}^2 = \frac{b}{r^3}. \quad (4.29)$$

Com exceção das componentes relacionadas com estas por simetria, todas as outras componentes são nulas.

A partir das componentes do tensor de Riemann, podemos calcular o tensor de Ricci  $R_{AB}$  e o escalar de curvatura  $R$ , dados por

$$R_{ACB}^C = R_{AB}, \quad (4.30)$$

$$R = \eta^{AB} R_{AB}, \quad (4.31)$$

que nos permite obter as componentes do tensor de Einstein ( $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}R$ ) diferentes de zero

$$G_{00} = \frac{b'}{r^2}; \quad (4.32)$$

$$G_{11} = -\frac{b}{r^3} + 2\left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi'}{r}; \quad (4.33)$$

$$G_{22} = G_{33} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)}\right). \quad (4.34)$$

Se calcularmos os valores das componentes do tensor de Riemann na garganta, isto é, para  $r = r_o$ , encontraremos:

$$R^0_{101]r_o} = -\frac{1}{2r_o} [1 - b'(r_o)] \Phi'(r_o); \quad (4.35)$$

$$R^1_{212]r_o} = R^1_{313]r_o} = -\frac{1}{2r_o^2} [1 - b'(r_o)]; \quad (4.36)$$

$$R^2_{323]r_o} = \frac{1}{r_o^2}. \quad (4.37)$$

Enquanto que todas as outras são nulas excetuando, novamente, todas as outras a estas relacionadas por simetria. Podemos observar, com base na análise sobre a continuidade das funções  $\Phi(r)$  e  $b(r)$ , que as componentes do tensor de Riemann também apresentam-se contínuas através da garganta, como esperado. Para o tensor de Einstein, obtém-se, no que diz respeito à continuidade, o mesmo resultado:

$$G_{00]r_o} = \frac{b'(r_o)}{r_o^2}; \quad (4.38)$$

$$G_{11]r_o} = -\frac{1}{r_o^2}; \quad (4.39)$$

$$G_{22]r_o} = G_{33]r_o} = \frac{1 - b'(r_o)}{2r_o} \left( \Phi' + \frac{1}{r_o} \right). \quad (4.40)$$

## 4.5 As equações de Einstein

As únicas componentes não-nulas do tensor energia-momentum são aquelas diagonais, às quais atribui-se símbolos especiais. Assim:

$$T_{00} = \rho(r); T_{11} = -\tau(r); T_{22} = T_{33} = p(r). \quad (4.41)$$

Como os vetores da base são aqueles que descrevem observadores estáticos, cada uma dessas componentes tem uma interpretação física simples, dada em termos de medidas que esses observadores estáticos poderiam fazer, ou seja,  $\rho(r)$  é a densidade total de energia (em unidades de  $g/cm^3$ ),  $\tau$  é o negativo da tensão radial por unidade de área (medida em  $dyn/cm^2$ ), e  $p(r)$  é a pressão medida nas direções laterais, isto é, direções ortogonais à direção radial. Quando se trata de um “fluido perfeito”, temos que  $p = -\tau$ .

Podemos escrever as equações de Einstein que daí resultam

$$\rho = \frac{b'}{\kappa r^2}; \quad (4.42)$$

$$\tau = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{b}{r^3} - 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \right]; \quad (4.43)$$

$$p = \frac{1}{\kappa} \left\{ \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left[ \Phi'' + \left( \Phi' - \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{1}{2r^2} (b'r - b) \left( \Phi' + \frac{1}{r} \right) \right\}. \quad (4.44)$$

Essas equações ainda podem ser convenientemente escritas sob a forma

$$b' = \kappa \rho r^2; \quad (4.45)$$

$$\Phi' = \frac{b - \kappa \tau r^3}{2r^2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right)}; \quad (4.46)$$

$$\tau' = (\rho - \tau) \Phi' - 2 \frac{(p + \tau)}{r}. \quad (4.47)$$

A primeira equação [eq.(4.45)] pode ser facilmente integrada:

$$b(r) = b(r_o) + \kappa \int_{r_o}^r \rho(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}. \quad (4.48)$$

Observamos por meio dessa última expressão que a função de forma tem uma interpretação direta com a distribuição de energia no interior do *wormhole*.

Calculando as [eq.(4.42)], [eq.(4.43)] e [eq.(4.44)] na garganta, temos

$$\rho(r_o) = \frac{b'_o}{\kappa r_o^2}; \quad (4.49)$$

$$\tau(r_o) = \frac{1}{\kappa r_o^2}; \quad (4.50)$$

$$p(r_o) = \frac{1 - b'(r_o)}{2r_o} \left( \Phi' + \frac{1}{r_o} \right). \quad (4.51)$$

Podemos combinar a [eq.(4.42)] com a [eq.(4.43)] da seguinte maneira:

$$\kappa(\rho - \tau) = \frac{1}{r^2} \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \quad (4.52)$$

Porém, sabemos que na garganta

$$\left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r} \Big|_{r_o} = 0. \quad (4.53)$$

Reescrevendo a [eq.(4.52)], temos

$$\kappa(\rho - \tau) = -\frac{1}{r^3} (b - b'r) + 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r}. \quad (4.54)$$

Em especial na garganta, essa expressão fica simplesmente

$$\kappa(\rho - \tau) \Big|_{r_o} = -\frac{1}{r_o^3} (b - b'r) \Big|_{r_o}. \quad (4.55)$$

Pela condição de existência de um mínimo, dada pela [eq.(4.14)], deduzimos que

$$(\rho_o - \tau_o) < 0, \quad (4.56)$$

onde  $\rho_o$  e  $\tau_o$  são, respectivamente, os valores que a densidade de energia e a tensão radial assumem na garganta. Temos, então, a violação das condições de energia, uma vez que

$$\tau_o > \rho_o. \quad (4.57)$$

Este vínculo sobre o tipo de matéria significa que na garganta a tensão radial deve exceder a densidade total de energia. A matéria que exhibe tal propriedade é denominada matéria “exótica”. Essa peculiaridade apresenta alguns problemas, especialmente pelas implicações nas medidas feitas por observadores que possam estar se movendo através do *wormhole*, já que eles podem medir valores negativos para a densidade de energia. Para atenuar este problema, pode-se apelar para a construção de um *wormhole* que demande uma pequena quantidade de matéria exótica,

ou ainda que a matéria exótica esteja distribuída em uma camada muito fina na região da garganta, estando envolta por matéria normal. Isso limitaria a violação da condição de energia em uma região mínima. Alguns exemplos específicos que fazem uso dos recursos descritos serão apresentados a seguir.

## 4.6 Exemplos específicos

### 4.6.1 Soluções que apresentam forças de maré nulas

Uma classe simples de soluções é obtida ao impormos que  $\Phi = 0$  para qualquer valor da coordenada  $r$ , o que corresponde a forças de maré nulas. Assim:

$$b = b(r); \Phi = 0; \quad (4.58)$$

$$\rho(r) = \frac{b'}{\kappa r^2}; \quad (4.59)$$

$$\tau(r) = \frac{b}{\kappa r^3}; \quad (4.60)$$

$$p(r) = \frac{(b'r - b)}{2\kappa r^3}; \quad (4.61)$$

$$z(r) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1}}; \quad (4.62)$$

$$\frac{b - b'r}{\kappa r^3} = \tau(r) - \rho(r) > 0. \quad (4.63)$$

A função de forma  $b(r)$  que gera estas soluções deve satisfazer as condições dadas pelo limite assintótico. Em especial, dois exemplos interessantes são

$$b(r) = \sqrt{b_0 r}; \quad (4.64)$$

$$b(r) = \frac{4}{3}b_0 - \frac{1}{3}b_0(b_0/r)^2. \quad (4.65)$$

Para essas duas funções, a matéria encontra-se em toda a extensão que vai da garganta para a região onde  $r \rightarrow \infty$ , e é exótica em todos os pontos. Como a densidade, tensão e pressão lateral são funções de potências de  $r$  inversas, elas tendem assintoticamente a zero conforme  $r \rightarrow \infty$ , de forma que estando-se suficientemente distante da garganta os campos de matéria serão fracos.

#### 4.6.2 Solução com um corte radial finito para a densidade de matéria

Esta será um dos tipos de soluções nas quais a matéria exótica está confinada a uma região finita em torno do *wormhole*. Para tanto, usa-se uma solução que apresenta forças de maré nulas e que descreve o interior de uma superfície limitada por um raio  $R_S$ , e que é unida a uma solução exterior de Schwarzschild. Escolhe-se

$$b(r) = b_o \left( \frac{r}{b_o} \right)^{1-\eta}, \text{ com } 0 < \eta = \text{constante} < 1; \quad (4.66)$$

$$\Phi = \Phi_o = \text{constante}, \text{ para } b_o \leq r < R_S. \quad (4.67)$$

Com esta forma para a solução interior, as componentes do tensor energia-momentum serão dadas por

$$\rho(r) = \frac{(1-\eta)b(r)}{\kappa r^3}; \quad (4.68)$$

$$\tau(r) = \frac{\rho(r)}{(1-\eta)}; \quad (4.69)$$

$$p(r) = \frac{\eta\rho(r)}{2(1-\eta)}. \quad (4.70)$$

Essa solução satisfaz todas as exigências que classificam a geometria quanto à existência de um *wormhole*: exibe uma garganta em  $r = b_o$  e não apresenta horizonte de eventos, pois  $\Phi = \text{constante}$ .

### 4.6.3 Soluções com a matéria exótica limitada à garganta

Pode-se confinar a matéria exótica a uma região arbitrariamente pequena na garganta. Um exemplo de tal solução é:

$$b(r) = b_o [1 - (r - b_o)/a_o]^2 \text{ e } \Phi(r) = 0, \text{ para } b_o \leq r \leq b_o + a_o; \quad (4.71)$$

$$b(r) = \Phi(r) = 0 \text{ para } r \geq b_o + a_o. \quad (4.72)$$

Em  $b_o < r < b_o + a_o$  o material deve apresentar

$$\rho(r) = \left[ \frac{2(-b_o/a_o)}{\kappa r^2} \right] \left[ 1 - \frac{(r - b_o)}{a_o} \right] < 0; \quad (4.73)$$

$$\tau(r) = b_o \frac{\left[ 1 - \frac{(r - b_o)}{a_o} \right]^2}{\kappa r^3}; \quad (4.74)$$

$$p(r) = \frac{1}{2} [\tau(r) - \rho(r)]; \quad (4.75)$$

enquanto que para  $r \geq b_o + a_o$  o espaço-tempo é plano e vazio, pois  $\rho = \tau = p = 0$ .

Qualquer que seja a circunferência do *wormhole* na garganta, dada por  $2\pi b_o$ , ao escolhermos  $a_o$  arbitrariamente pequeno a matéria exótica fica confinada a uma região de espessura também arbitrariamente pequena, dada por  $\Delta\ell = \pi a_o$ , e cujo volume é  $4\pi^2 b_o^2 a_o$ . Porém, quando impomos que  $\rho > 0$ , a matéria exótica não pode mais estar confinada a uma região arbitrariamente pequena. Uma estratégia para se obter um *wormhole* que apresente um máximo de confinamento para a matéria exótica seria a seguinte: permite-se, primeiramente, que a matéria exótica domine a região central do *wormhole* em torno da garganta, e deve-se utilizar uma quantidade suficiente desta matéria para que possamos obter uma desfocalização de tamanho considerável, dada em termos da função  $z(r)$ . Esta região exótica seria então unida a uma região de matéria quase-exótica (ou seja, aquela matéria cujo tensor energia-momentum obedeça todas as condições de energia, mas esteja no limiar de violá-las). Por último, em um

raio suficientemente grande  $R_S$  de tal forma que as forças gravitacionais de Schwarzschild sejam pequenas, devemos utilizar uma camada superficial de espessura  $\Delta R$  condizente com a solução exterior de Schwarzschild para o vácuo. Entretanto, não é possível obter uma desfocalização considerável em escalas pequenas (menores que o tamanho da garganta,  $b_o$ ) sem que a densidade de energia seja negativa.



## Capítulo 5

# O MODELO ELETROMAGNÉTICO

### 5.1 A forma da métrica

Em nosso modelo, seguiremos basicamente o procedimento adotado por Morris e Thorne. Adotaremos um espaço-tempo genérico estático (ou seja, independente do tempo e sem rotação, mais tecnicamente, simétrico por uma reversão temporal) e com simetria esférica. Uma tal geometria pode ser apresentada, sem perda de generalidade, na forma canônica

$$dS^2 = N^2(r)dt^2 - g_{rr}(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.1)$$

Esperamos poder especificar a forma funcional de  $N(r)$  e  $g_{rr}(r)$  de tal maneira que os cálculos realizados a seguir, bem como a interpretação física, sejam relativamente simples. Se a geometria não contém um horizonte de evento, é conveniente escolhermos

$$N^2(r) = e^{2\Phi(r)}, \quad (5.2)$$

$$g_{rr}(r) = \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (5.3)$$

Esta é a forma da métrica escolhida por Morris e Thorne em sua análise de sistema de *wormhole* esfericamente simétrico e atravessável. Ela revela-se igualmente útil para examinar a estrutura interna de estrelas e planetas esfericamente simétricos.

Com isso, a geometria adotada é dada por

$$dS^2 = e^{2\Phi} dt^2 - dr^2/(1 - b/r) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.4)$$

As funções  $\Phi(r)$  e  $b(r)$  são duas funções arbitrárias de  $r$ , como vimos no modelo de Morris-

Thorne, que estarão vinculadas às propriedades que se espera que o *wormhole* apresente para que assim o consideremos atravessável, elas estão ligadas ao *redshift* gravitacional (função de lapso) e com a forma espacial do *wormhole*, respectivamente.

## 5.2 A geometria espacial de um wormhole

Como vimos, o *wormhole* é uma estrutura que possui duas entradas chamadas de “bocas”, que estão conectadas por um túnel (o *wormhole* propriamente dito), o qual chamamos de “garganta”, que conecta duas regiões diferentes do espaço-tempo. Aqui, estamos interessados naqueles que sejam *atravessáveis*, ou seja, aqueles que permitam a passagem de corpos macroscópicos através de sua garganta de maneira segura e em um intervalo de tempo finito (tanto para aquilo ou aquele que o atravesse, como para observadores externos). A principal característica de um *wormhole* é a existência de um *raio mínimo* (raio da garganta). Esta exigência é manifestada ao se fixar uma condição de mínimo (que envolve a função  $b(r)$ ). Veremos mais tarde que esta é a condição que impõe vínculos à matéria necessária para gerar o *wormhole*.

Para que se possa visualizar o *wormhole* e impor à métrica certas condições necessárias para a descrição do mesmo, recorre-se ao uso de *diagramas de imersão*. O fato de o *wormhole* ser estático vincula a geometria do espaço-tempo em termos da 3-geometria do espaço em uma fatia a um tempo fixo, assim como impõe restrições à maneira como esta 3-geometria é imersa no espaço-tempo. Em especial, como a nossa geometria é esfericamente simétrica, podemos tomar uma fatia equatorial, caracterizada por  $\theta = \pi/2$ . O elemento de linha desta fatia, para  $t = cte$  e  $\theta = \pi/2$ , será

$$dS^2 = - \left[ dr^2 / (1 - b/r) + r^2 d\varphi^2 \right]. \quad (5.5)$$

Queremos construir, em um espaço Euclidiano tridimensional, uma superfície bidimensional que tenha a mesma geometria apresentada por essa fatia. Isso quer dizer que queremos visualizar tal fatia tirando-a do espaço-tempo e imergindo-a no espaço Euclidiano. Este espaço Euclidiano no qual imergimos a fatia será dado nas coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\varphi$  e  $z$ . Dessa forma, a métrica desse espaço será dada por

$${}^{(3)}dS^2 = -(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2). \quad (5.6)$$

Reescrevamos a [eq. (5.6)] como

$${}^{(3)}dS^2 = -dr^2 \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] - r^2 d\varphi^2. \quad (5.7)$$

Comparando a [eq. (5.7)] com a [eq. (5.5)], podemos identificar as coordenadas  $(r, \varphi)$  do espaço-tempo do *wormhole* com as mesmas coordenadas do espaço no qual foi-se imersa a fatia:

$$\left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] = 1 / (1 - b/r). \quad (5.8)$$

Logo, a função  $z = z(r)$  que descreve a superfície de imersão deve satisfazer

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (5.9)$$

Essa função vai caracterizar a forma como a função  $b(r)$  irá modelar o *wormhole*.

Esperamos que esse *wormhole* funcione como uma ponte entre duas regiões do espaço assintoticamente planas. Isso significa que na proximidade dessas superfícies o raio da

garganta será um ponto de mínimo a partir do qual passará a se expandir. Na garganta, teremos  $r = b = b_o$ . Neste ponto, a derivada da função  $z(r)$  diverge, como pode ser visto através da [eq. (5.9)]. Podemos representar o inverso desta função, isto é,  $dr/dz$ , graficamente, em vez da função original. Ao invertermos, temos que essa derivada é zero na garganta do *wormhole*. De acordo com as noções elementares de cálculo diferencial, isto significa que este ponto pode constituir um ponto de máximo ou mínimo. Espera-se que a garganta permaneça aberta, ou seja, sempre haverá um raio mínimo, o que vai garantir a existência e manutenção desta garganta, que é a característica básica de um *wormhole*. Sendo assim, a sua derivada segunda deve satisfazer a condição

$$\frac{d^2r}{dz^2} > 0 \implies \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{b - br}{2b^2} > 0, \quad (5.10)$$

na garganta ( $r = b = b_o$ ) ou bem perto dela.

### 5.3 Os tensores de Riemann e Einstein

De posse deste elemento de linha, avançamos ao passo seguinte, que é o de calcular as componentes do tensor de Einstein. Diferentemente da abordagem de Morris-Thorne, resolvemos fazê-lo não em termos de um sistema de coordenadas ortonormal co-movente, mas realizando-o trivialmente com a ajuda de um programa de cálculo algébrico apropriado (utilizamos extensivamente o MAPLE V - Release 4). Obtemos então:

1. Os símbolos de Christoffel de segunda espécie:

$$\Gamma_{tr}^t = \Phi', \quad (5.11)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{(r - b)\Phi'e^{2\Phi}}{r}, \quad (5.12)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{(b'r - b)}{r(r-b)}, \quad (5.13)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -(r-b), \quad (5.14)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -(r-b) \sin^2 \theta, \quad (5.15)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad (5.16)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (5.17)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad (5.18)$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad (5.19)$$

2. As componentes não-nulas do tensor de Riemann:

$$R_{trtr} = \frac{-e^{2\Phi}}{(r-b)} \left[ \Phi''(r-b) + (\Phi')^2(r-b) - \frac{\Phi'}{2}(b' - b/r) \right], \quad (5.20)$$

$$R_{t\theta t\theta} = -(r-b)\Phi' e^{2\Phi}, \quad (5.21)$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -(r-b)\Phi' e^{2\Phi} \sin^2 \theta, \quad (5.22)$$

$$R_{r\theta r\theta} = -\frac{1}{2} \frac{b'r - b}{(r-b)}, \quad (5.23)$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{(b'r - b)}{(r-b)}, \quad (5.24)$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -r \sin^2 \theta. \quad (5.25)$$

Com as componentes do tensor de Riemann calculamos as componentes do tensor de Ricci e do escalar de Ricci (de acordo com a convenção que adotamos - para detalhes veja a lista de convenções em anexo, nas páginas iniciais da tese) - com as quais obtemos as seguintes componentes não-nulas do tensor de Einstein:

$$G_{tt} = -\frac{e^{2\Phi} b'}{r^2}, \quad (5.26)$$

$$G_{rr} = \frac{\{2r\Phi'b + b - 2\Phi'r^2\}}{r^2(r-b)}, \quad (5.27)$$

$$G_{\theta\theta} = -\left[ \frac{\Phi'}{r} + \frac{\Phi'(b-b'r)}{2r(r-b)} + \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{(b-b'r)}{2r^2(r-b)} \right], \quad (5.28)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta G_{\theta\theta}. \quad (5.29)$$

## 5.4 As componentes do tensor momentum-energia

Sabemos que os campos de matéria clássicos não permitem a violação das condições de energia, em especial da condição de energia que estamos tratando, ou seja, aquela para os vetores tipo-nulo. Porém, admite-se que certos efeitos quânticos conduzem a violações das condições de energia que são experimentalmente verificadas. Embora estas violações observadas existam apenas no domínio quântico, alguns autores argumentam que podemos considerar que essas violações quânticas sejam suficientes para permitir a criação de *wormholes*, e que estes podem emergir desses domínios microscópicos caracterizados pela escala de Planck, evoluindo por meio da expansão cósmica [Kim, 96], ou por um processo inflacionário [Roman, 93]. Com isso, a discussão sobre matéria “exótica” e sobre a violação local de uma ou mais condições de energia geralmente envolve efeitos quânticos, tais como o efeito Casimir ou o “squeezed vacuum” [Visser, 96]. Hochberg e Kephart apresentaram uma solução para *wormholes* fazendo uso de um tipo de matéria construída a partir de estados de vácuo espremido da luz, que possui o tensor energia-momentum acoplado com a gravidade [Hochberg, 91].

Em um outro trabalho [Novello, 98], foi mostrado que as correções quânticas para as

equações de movimento da eletrodinâmica clássica permitem o aparecimento de uma densidade de energia e de uma pressão negativas finitas. Essas correções quânticas para a eletrodinâmica de Maxwell foram calculadas por Heisenberg e Euler [Heisenberg, 36]. Ao considerar a invariância de gauge, eles obtiveram uma ação efetiva que poderia descrever o fenômeno de criação de pares elétron-pósitron. Essas modificações da eletrodinâmica de Maxwell podem ser induzidas por diferentes processos: podem ter se originado de modificações do vácuo atribuídas a vários agentes externos ou de uma resposta não-linear de um meio dielétrico.

Com base no referido trabalho, vamos construir um *wormhole* a partir da ação efetiva obtida para a correção quântica de primeira ordem da eletrodinâmica. Veremos que isso é possível, já que para determinados valores da coordenadas  $r$  podemos ter densidade de energia e pressão negativas, o que viola a condição de energia para vetores tipo-nulos. Calcularemos dois casos distintos: no primeiro, consideraremos apenas um campo magnético, no segundo, o mesmo cálculo é feito, mas desta vez examinaremos a solução com um campo elétrico.

#### 5.4.1 As correções quânticas de Euler-Heisenberg

A ação efetiva para a eletrodinâmica devido à correções quânticas foi calculada por Euler e Heisenberg [Heisenberg, 36]. O cálculo da correção em primeira ordem fornece a densidade Lagrangeana efetiva descrita por

$$L = -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 + \frac{7}{16}\mu(F^*)^2, \quad (5.30)$$

na qual

$$\mu \doteq \frac{2}{45}\alpha^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^3 \frac{1}{m_e c^2}, \quad (5.31)$$

onde  $\alpha$  é a constante de estrutura fina. Se tratarmos estas correções quânticas como uma teoria

de campos clássica efetiva, obtém-se o tensor energia-momentum modificado, dado por

$$T_{\mu\nu} = -4L_F F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} - (L_{F^*} F^* - L)g_{\mu\nu}. \quad (5.32)$$

Os detalhes de cálculo foram omitidos neste capítulo, mas podem ser encontrados no Apêndice B. Aqui,  $F = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  e  $F^* = F^*_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  são os invariantes construídos a partir do tensor eletromagnético e de seu dual, e  $L_F$  é a derivada da Lagrangeana  $L$  com respeito ao invariante  $F$ , da mesma forma definida para o invariante  $F^*$ .

## 5.4.2 Para o caso do campo magnético

### 5.4.2.1 O tensor momento-energia para o campo magnético

O tensor momentum-energia total será dado por

$$T_{\mu\nu}^{total} = T_{\mu\nu}^{mag} + \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{mag}$  será a parte relacionada com a configuração de campo atribuída a um monopólo magnético, e  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  estará relacionada com um fluido cujas propriedades sejam fisicamente razoáveis. Terá como componentes:

- o tensor  $T_{\mu\nu}^{total}$ :

$$T_0^{0total} = \rho, \quad (5.34)$$

$$T_1^{1total} = p_r = -\tau, \quad (5.35)$$

$$T_2^{2total} = T_3^{3total} = p_\perp. \quad (5.36)$$

- o tensor  $T_{\mu\nu}^{mag}$ :

$$T_0^{0mag} = \frac{1}{2}H_o^2 r^{-4} - \mu H_o^4 r^{-8}, \quad (5.37)$$



$$T_1^{1mag} = \frac{1}{2}H_o^2r^{-4} - \mu H_o^4r^{-8}, \quad (5.38)$$

$$T_2^{2mag} = T_3^{3mag} = \frac{1}{2}H_o^2r^{-2} - 3\mu H_o^4r^{-6}. \quad (5.39)$$

Quanto às componentes desse fluido, vamos determiná-las a partir das equações de Einstein.

Por hora, vamos tomá-las como sendo

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{\rho}, \quad (5.40)$$

$$\tilde{T}_1^1 = \tilde{p}_r = -\tilde{\tau}, \quad (5.41)$$

$$\tilde{T}_2^2 = \tilde{T}_3^3 = \tilde{p}_\perp. \quad (5.42)$$

#### 5.4.2.2 As equações de Einstein

Podemos agora exibir as equações de campo de Einstein, dadas por

$$G_\nu^\mu = -\kappa T_\nu^\mu. \quad (5.43)$$

Ao combinarmos os valores das componentes, teremos então o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{b'}{r^2} = \kappa \left\{ \frac{1}{2}H_o^2r^{-4} - \mu H_o^4r^{-8} + \tilde{\rho} \right\}, \quad (5.44)$$

$$\frac{2r\Phi'(r-b) - b}{r^3} = -\kappa \left\{ \frac{1}{2}H_o^2r^{-4} - \mu H_o^4r^{-8} - \tilde{\tau} \right\}, \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} & (1 - b/r) \left[ \Phi'/r + \frac{\Phi'(b-b'r)}{2r(r-b)} + \Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{(b-b'r)}{2r^2(r-b)} \right] \\ = & -\kappa \left\{ \frac{1}{2}H_o^2r^{-2} - 3\mu H_o^4r^{-6} + \tilde{p}_\perp \right\}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Ao tomarmos a [eq. (5.44)], obtemos o valor de  $b(r)$  por simples integração. Temos que levar em conta as restrições impostas pela condição dada pela [eq. (5.10)]:

$$\begin{aligned}
b(r) &= \int_{b_o}^r \kappa \left\{ \frac{1}{2} H_o^2 R^{-4} - \mu H_o^4 R^{-8} + \tilde{\rho} \right\} R^2 dR \\
&= \kappa \left[ \frac{1}{2} H_o^2 (r^{-1} - b_o^{-1}) - \frac{\mu}{5} H_o^4 (r^{-5} - b_o^{-5}) \right] \\
&\quad + \kappa \int_{b_o}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Devemos, para obter a função  $b(r)$  explicitamente, atentar para o fato de que na garganta do *wormhole*,  $r = b(r) = b_o$ . Dessa forma, vamos considerar que

$$\int_{b_o}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR = \rho_o r^n, \tag{5.48}$$

onde o valor de  $n$  será determinado de acordo com as equações. Considerando o valor que deve ter a função  $b(r)$  na garganta, para que isso seja possível, temos que

$$\rho_o = \frac{(b_o)^{1-n}}{\kappa}. \tag{5.49}$$

Substituindo a [eq.(5.48)] e a [eq.(5.49)] na [eq.(5.47)], obtemos

$$\begin{aligned}
b(r) &= -\kappa \left[ \frac{1}{2} H_o^2 (r^{-1} - b_o^{-1}) - \frac{\mu}{5} H_o^4 (r^{-5} - b_o^{-5}) \right] \\
&\quad + (b_o)^{1-n} r^n.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

De posse desta função, podemos determinar a função  $z(r)$ , definida pela [eq. (5.9)], e representá-la graficamente (figura 1).

Observando o gráfico da função  $z(r)$ , descrita em termos da função de forma  $b(r)$  de acordo com a [eq. (5.9)], verificamos a existência de um raio mínimo a partir do qual ocorre a *desfocalização*, ou seja, o crescimento do raio com o afastamento em relação à garganta. Temos exatamente, pelo estudo dessa função bem comportada, o perfil condizente com aquele que deve ser apresentado por um *wormhole*, isto é, a formação de uma garganta.

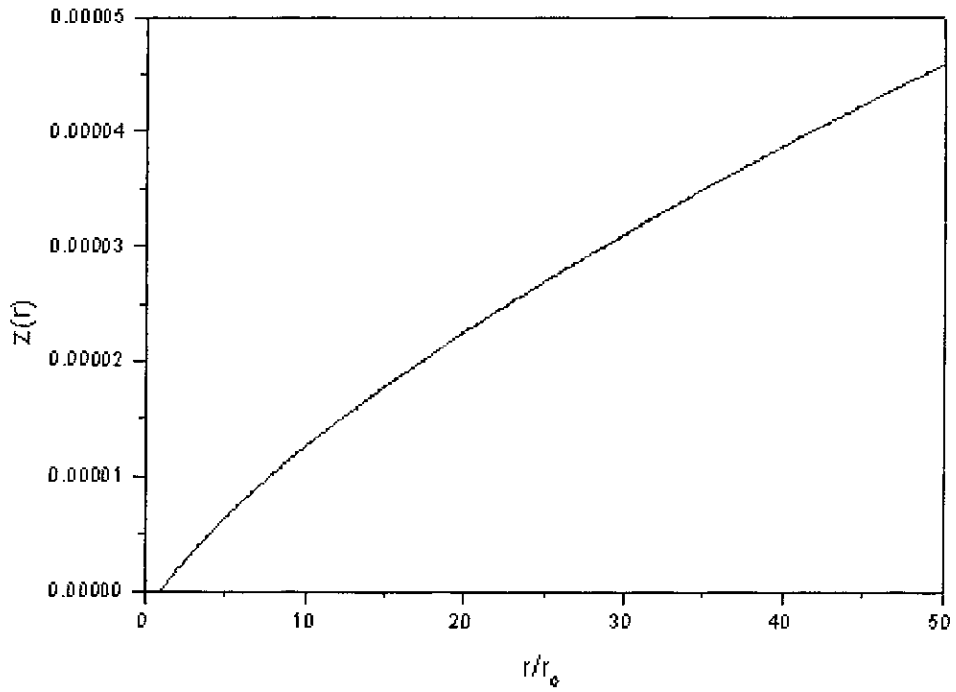


FIGURA 1: função  $z(r)$ , dada em unidades arbitrárias. Esta função nos dá o perfil do *wormhole*, e a representação gráfica nos permite observar o seu comportamento, principalmente na região próxima à garganta.

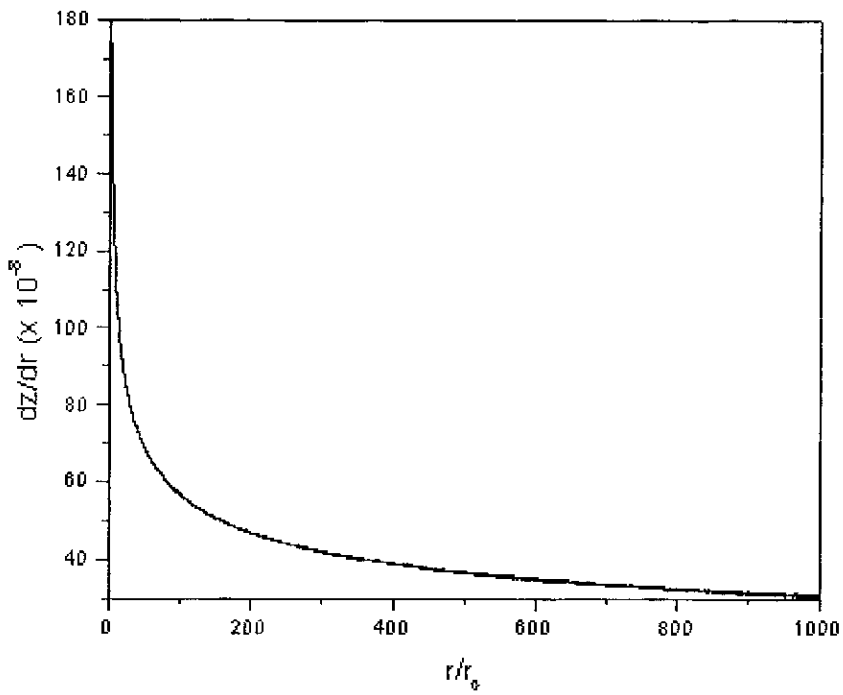


FIGURA 2: derivada da função  $z(r)$ .

Se examinarmos a derivada desta função, em especial no limite assintótico ( f igura 2), podemos observar que com o afastamento radial, temos que as regiões muito afastadas da garganta apresentam-se assintoticamente planas.

A versão tridimensional da f igura 1, considerando a simetria azimutal (isto é, fazendo-se a rotação em torno do eixo  $z$ ), é representada na f igura 3.

Analisemos agora a [eq. (5.45)]. Se impusermos que

$$\frac{2r\Phi'(r-b) - b}{r^2} = 0, \quad (5.51)$$

teremos que

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}H_o^2r^{-4} - \mu H_o^4r^{-8}. \quad (5.52)$$

Ao impormos que  $-\tilde{\tau} > 0$  na garganta ou próximo, a relação

$$b_o^4 < 2\mu H_o^2, \text{ em } r = b_o \quad (5.53)$$

deve ser satisfeita. Da [eq. (5.51)], obtemos

$$\Phi'(r-b) = b/2r \quad (5.54)$$

Def inindo

$$e^{2\Psi} := 1/(1 - b/r) = -g_{rr}, \quad (5.55)$$

e derivando ambos os lado em relação a  $r$ , temos

$$\Psi'(r-b) = \frac{(b'r - b)}{2r} = \frac{b'}{2} - \frac{b}{2r}. \quad (5.56)$$

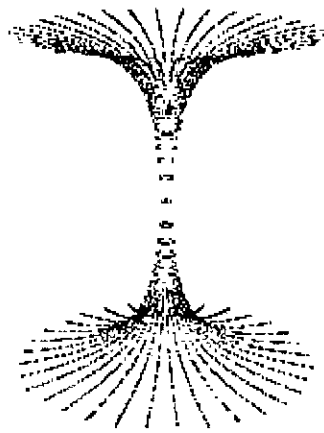


FIGURA 3: diagrama de imersão para o *wormhole*, caracterizado pela função  $z(r)$  encontrada para o caso de campo magnético. Este diagrama representa a geometria de uma hipersuperfície tipo-espaço ( $t = \text{constante}$ ), para a qual fixamos  $\theta = \pi/2$ , para a região onde a coordenada  $r$  encontra-se entre  $(+\infty, b_o]$  e  $[b_o, -\infty)$ .

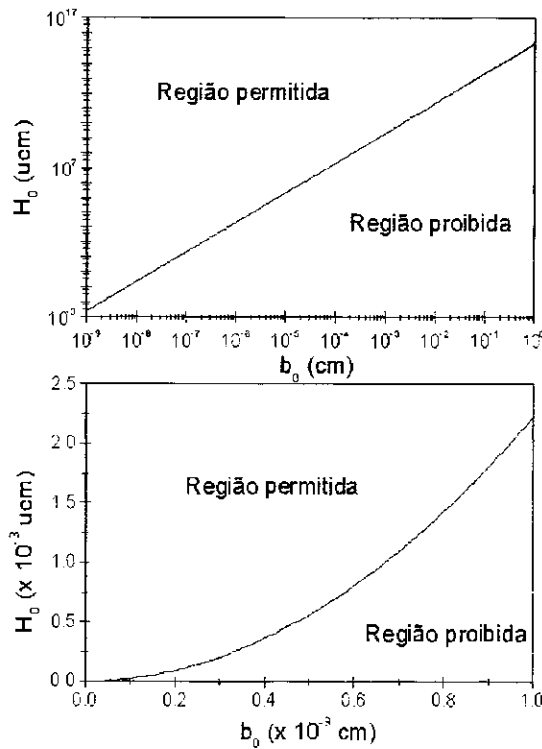


FIGURA 4: diagramas  $H_o \times b_o$ . Esses diagramas fornecem os valores máximos para o raio mínimo da garganta de acordo com a intensidade da carga do monopólo magnético  $H_o$ . Esta carga é dada em unidades gaussianas, e  $1 \text{ ucm}$  (unidade de carga magnética) equivale à carga necessária para induzir um campo de  $1 \text{ G}$  a uma distância de  $1 \text{ cm}$ .

Pela [eq.(5.54)], podemos escrever

$$\Psi'(r-b) = \frac{b'}{2} - \Phi'(r-b). \quad (5.57)$$

Integrando,

$$\Psi = \int \frac{b'}{2(r-b)} dr - \Phi + const. \quad (5.58)$$

Assim, podemos escrever a componente  $g_{oo}$  como

$$e^{2\Phi} = C e^{-2\Psi} e^{\int \frac{b'}{(r-b)} dr}. \quad (5.59)$$

Pela condição [eq. (5.10)], ao substituirmos a expressão que achamos para  $b(r)$ , obtemos

$$\kappa \left\{ H_o^2 r^{-1} - \frac{6}{5} \mu H_o^4 r^{-5} + \rho_o r^n (1-n) - \frac{H_o^2}{2} b_o^{-1} + \frac{\mu}{5} H_o^4 b_o^{-5} \right\} > 0, \quad (5.60)$$

isso devendo ocorrer para  $b(r=r_o=b_o) = b_o$ . Assim,

$$\kappa \left\{ \frac{H_o^2 b_o^{-1}}{2} - \mu H_o^4 b_o^{-5} + \rho_o b_o^n (1-n) \right\} > 0, \quad (5.61)$$

que ao ser multiplicado por  $2b_o^5$  dá

$$H_o^2 b_o^4 - 2\mu H_o^4 + 2\rho_o b_o^{n+5} (1-n) > 0. \quad (5.62)$$

Dividindo-se por  $H_o^2$ , teremos

$$b_o^4 + \frac{2\rho_o b_o^{n+5} (1-n)}{H_o^2} > 2\mu H_o^4. \quad (5.63)$$

No entanto, temos pela condição dada por [eq.(5.53)] e considerando  $\rho_o > 0$  que

$$\frac{2\rho_o b_o^{n+5} (1-n)}{H_o^2} > 0. \quad (5.64)$$

Como  $b_o > 0$ , então, para que esta condição seja satisfeita é necessário que o valor de  $n$  satisfaça

a seguinte condição:

$$n < 1. \quad (5.65)$$

Devemos lembrar, ainda, que como estamos considerando a matéria comum, cuja densidade é dada por  $\tilde{\rho}$ , fisicamente razoável, é desejável que  $n > 0$ , pois assim

$$\tilde{\rho}(r) = n \frac{(b_0)^{1-n}}{\kappa} r^{n-3} > 0. \quad (5.66)$$

Essa densidade de energia seria definida positiva e, como a potência de  $r$  é  $n - 3 < 0$ , no limite em que  $r \rightarrow \infty$  ela seria desprezível, o que caracterizaria um comportamento assintoticamente plano esperado.

Para diferentes valores da carga  $H_0$ , podemos determinar os valores máximos que o raio mínimo  $b_0$  da garganta pode apresentar ( figura 4). A região de validade do gráfico é aquela que se encontra acima da curva. Qualquer ponto nesta região está relacionado com um *wormhole* com certo valor para o raio mínimo de sua garganta.

### 5.4.2.3 Condição de energia para vetores nulos

Conforme [Apêndice A, Hawking, 73], a equação de Raychaudhuri para geodésicas nulas fornece

$$\frac{d\hat{\theta}}{dS} = R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu - 2(\hat{\sigma}^2 - \hat{\omega}^2) - \frac{1}{2}\hat{\theta}^2, \quad (5.67)$$

onde  $\hat{\theta}$  é a expansão de feixe de geodésicas nulas. O que temos aqui é a equação para a taxa de variação da área da hipersuperfície bidimensional, tomada em uma das fatias espaciais com tempo constante. O *cisalhamento* é simbolizado por  $\hat{\sigma}$ , enquanto que a vorticidade é representada por  $\hat{\omega}$ . Tomando o *cisalhamento* e a vorticidade como sendo nulos, a equação se reduz a

$$\frac{d\hat{\theta}}{dS} = R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu - \frac{1}{2}\hat{\theta}^2. \quad (5.68)$$

Porém, a área bidimensional mínima ocorre justamente na garganta do *wormhole*. Dessa forma, na garganta  $\hat{\theta} = 0$ , mas para que ocorra a existência de um raio mínimo, devemos ter

$$\frac{d\hat{\theta}}{dS} \geq 0, \quad (5.69)$$

levando a

$$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (5.70)$$

Isto constitui uma violação da condição de energia nula. Impondo esta condição às equações de Einstein, teremos o seguinte resultado:

$$G_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -\kappa T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (5.71)$$

de maneira que

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0. \quad (5.72)$$

Se tomarmos o vetor nulo dado por

$$k^\mu = \xi^2 (e^\beta, -e^\alpha, 0, 0), \quad (5.73)$$

para o qual lembramos que

$$e^\alpha = e^\Phi, \quad (5.74)$$

$$e^\beta = \sqrt{1 - \frac{b}{r}}, \quad (5.75)$$

tem-se simplesmente

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu &= T_{00}k^0k^0 + T_{11}k^1k^1 + 2T_{01}k^0k^1 \\ &= T_{00}k^0k^0 + T_{11}k^1k^1 = \xi^4(T_{00}e^{2\beta} + T_{11}e^{2\alpha}) \\ &= \xi^4(T_0^0e^{2\beta}g_{00} + T_1^1e^{2\alpha}g_{11}) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Para qualquer valor de  $\xi$  teremos

$$\rho - p_r \leq 0. \quad (5.77)$$



### 5.4.3 Para o caso do campo elétrico

#### 5.4.3.1 O tensor momento-energia para o campo elétrico

De maneira análoga ao que foi feito para o caso do monopólo magnético, escreveremos as componentes do tensor momento-energia da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu}^{total} = T_{\mu\nu}^{elet} + \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (5.78)$$

onde  $T_{\mu\nu}^{elet}$  será a parte relacionada com a configuração do campo atribuída a um monopólo elétrico, e  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  estará relacionada com um fluido que apresenta propriedades físicas razoáveis.

Assim, suas componentes não-nulas serão:

•o tensor  $T_{\mu\nu}^{total}$ .

$$T_0^0 total = \rho, \quad (5.79)$$

$$T_1^1 total = p_r = -\tau, \quad (5.80)$$

$$T_2^2 total = T_3^3 total = p_{\perp}. \quad (5.81)$$

•o tensor  $T_{\mu\nu}^{elet}$ .

$$T_0^0 elet = e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ E^2 + 4\mu E^4 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right] + \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right], \quad (5.82)$$

$$T_1^1 elet = e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ E^2 + 4\mu E^4 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right] + \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right], \quad (5.83)$$

$$T_2^2 elet = T_3^3 elet = - \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right]. \quad (5.84)$$

As componentes do fluido serão determinadas a partir das equações de Einstein. Como foi

feito para o caso magnético, tomamos esta componentes na forma geral dada por

$$\tilde{T}_0^0 = \tilde{\rho}, \quad (5.85)$$

$$\tilde{T}_1^1 = \tilde{p}_r = -\tilde{\tau}, \quad (5.86)$$

$$\tilde{T}_2^2 = \tilde{T}_3^3 = \tilde{p}_\perp. \quad (5.87)$$

### 5.4.3.2 As equações de Einstein

Vamos escrever as equações de campo de Einstein:

$$G_\nu^\mu = -\kappa T_\nu^\mu \text{ total}, \quad (5.88)$$

que nos fornecem o conjunto de equações que se seguem

$$\frac{b'}{\kappa r^2} = e^{-\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ E^2 + 4\mu E^4 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \right] + \quad (5.89)$$

$$- \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right] + \tilde{\rho},$$

$$\frac{[2\Phi' r (r - b) - b]}{\kappa r^3} \quad (5.90)$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) - 3\mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right] + \tilde{\tau},$$

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left\{ \frac{\Phi'}{r} + \Phi'' + \frac{(b - b'r)}{2r^3 \left(1 - \frac{b}{r}\right)} + \Phi'^2 + \frac{\Phi' (b - b'r)}{2r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right)} \right\} \quad (5.91)$$

$$= -\kappa \left\{ - \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right) + \mu E^4 e^{-4\Phi} \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 \right] + \tilde{p}_r \right\}.$$

Espera-se que a solução satisfaça as seguintes condições gerais de transversabilidade:

•na garganta:

$$(b - b'r)|_{r=r_o=b_o} > 0, \quad (5.92)$$

• $b(r = r_o = b_o) = b_o$ , o que assegura a existência de uma garganta (raio mínimo),

• $\Phi(r)$  deve ser finito em todas as regiões.

Conforme a [eq.(B-63)] que se encontra no Apêndice, temos

$$E(r) \approx \frac{4Q}{r^2} e^{(\alpha+\beta)} \left( 1 - 4\mu \frac{Q^2}{r^4} \right), \quad (5.93)$$

onde

$$e^{\alpha+\beta} = \frac{e^\Phi}{\left( 1 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Vamos reescrevê-la, usando para isso a substituição

$$\tilde{Q} = 4Q, \quad (5.94)$$

assim,

$$E(r) \approx \frac{\tilde{Q}}{r^2} \frac{e^\Phi}{\left( 1 - \frac{b}{r} \right)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right). \quad (5.95)$$

Usaremos isto nas equações de Einstein, dadas pelas [eqs.(5.26)], [eq.(5.27)] e [eq.(5.28)]. Isso

nos dá como resultado as expressões que seguem:

$$\frac{b'}{\kappa r^2} = \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 + \tilde{\rho}, \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} & \frac{[2\Phi' r (r - b) - b]}{\kappa r^3} \\ &= - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 + \tilde{p}_r \right\}, \\ & \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \left\{ \frac{\Phi'}{r} + \Phi'' + \frac{(b - b'r)}{2r^3 \left( 1 - \frac{b}{r} \right)} + \Phi'^2 + \frac{\Phi' (b - b'r)}{2r^2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right)} \right\} \\ &= -k \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 - \frac{\mu\tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 + \tilde{p}_\perp \right\}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Analisaremos a primeira destas equações [eq.(5.96)]:

$$\frac{b'}{r^2} = k \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 + \tilde{\rho} \right\}. \quad (5.99)$$

Determinamos

$$b' = k \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q'^2}{r^2} \left( 1 - \mu \frac{Q'^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{3\mu Q'^4}{r^6} \left( 1 - \mu \frac{Q'^2}{4r^4} \right)^4 \right\} + kr^2 \tilde{\rho}, \quad (5.100)$$

logo o valor da função  $b(r)$  poderá ser obtido ao resolvermos a integral:

$$b(r) = k \int_{r_0}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR + k \int_{r_0}^r \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{R^2} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4} \right)^2 + \frac{3\mu \tilde{Q}^4}{R^6} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4} \right)^4 \right\} dR. \quad (5.101)$$

Na segunda equação, consideramos o caso particular [eq.(5.97)]

$$\frac{[2\Phi' r (r - b) - b]}{kr^3} = 0,$$

tal qual feito para o caso de monopólo magnético. Isso é reduzido a

$$2\Phi' r (r - b) - b = 0,$$

o que leva à nova expressão

$$\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{3\mu \tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 + \tilde{p}_r = 0. \quad (5.102)$$

Com esta mesma condição, ainda teremos

$$\Phi'^2 = \frac{b^2}{4r^2 (r - b)^2}, \quad (5.103)$$

$$\Phi''(r - b) = \frac{(b'r - b)}{2r^2} - \Phi'(1 - b'), \quad (5.104)$$

que ao serem substituídas na terceira equação, nos permite reescrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{bb'}{4r^2(r - b)} = k \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^2 + \frac{\mu \tilde{Q}^4}{r^8} \left( 1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4r^4} \right)^4 \right\} - k \tilde{p}_\perp. \quad (5.105)$$

Porém, retornemos [eq.(5.101)]:

$$b(r) = k \int_{r_0}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR \quad (5.106)$$

$$+k \int_{r_o}^r \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{R^2} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4}\right)^2}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\frac{3\mu\tilde{Q}^4}{R^6} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4}\right)^4}_{\text{termo 2}} \right\} dR.$$

Iremos expandir os termos destacados:

$$\frac{Q'^2}{R^2} \left(1 - \mu \frac{Q'^2}{4R^4}\right)^2 = \frac{Q'^2}{R^2} \left(1 - \mu \frac{Q'^2}{2R^4} + O(\mu^2)\right). \quad (5.107)$$

Como adotamos desde o início de nossos cálculos uma expansão de primeira ordem em  $\mu$ , vamos apenas considerar

$$\frac{\tilde{Q}^2}{R^2} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4}\right)^2 \approx \frac{\tilde{Q}^2}{R^2} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{2R^4}\right). \quad (5.108)$$

Da mesma forma procedemos com o segundo termo destacado:

$$\begin{aligned} \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{R^6} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{4R^4}\right)^4 &= \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{R^6} \left(1 - \mu \frac{\tilde{Q}^2}{R^4} + O(\mu^2) + O(\mu^3) + O(\mu^4)\right) \\ &\approx \frac{3\mu\tilde{Q}^4}{R^6}. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Voltando à integral

$$\begin{aligned} b(r) &= k \int_{r_o}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR \\ &\quad + k \int_{r_o}^r \left[ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{R^2} + \frac{11}{4} \frac{\mu\tilde{Q}^4}{R^6} \right] dR, \end{aligned} \quad (5.110)$$

o segundo termo dessa integral é relativamente fácil de ser calculado:

$$\begin{aligned} &k \int_{r_o}^r \left[ \frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{R^2} + \frac{11}{4} \frac{\mu\tilde{Q}^4}{R^6} \right] dR \\ &= -k \left\{ \frac{\tilde{Q}^2}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) + \frac{11}{20} \mu \tilde{Q}^4 \left( \frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_o^5} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Para que possamos obter a função  $b(r)$  explicitamente, vamos considerar mais uma vez, conforme a [eq.(5.48)],

$$k \int_{r_o}^r \tilde{\rho}(R) R^2 dR = k \rho_o r^n.$$

Teremos portanto

$$b(r) = -k \left\{ \frac{\tilde{Q}^2}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) + \frac{11}{20} \mu \tilde{Q}^4 \left( \frac{1}{r^5} - \frac{1}{r_o^5} \right) \right\} + k \rho_o r^n. \quad (5.112)$$

Analisamos a segunda equação, já com a condição imposta sobre o primeiro membro:

$$\tilde{p}_r = -\tilde{\tau} \approx -\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} - \frac{11}{4} \frac{\mu \tilde{Q}^4}{4r^8}. \quad (5.113)$$

Enquanto que a [eq.(5.105)] fica

$$\frac{bb'}{4r^2(r-b)} \approx -k \left\{ \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} + \frac{3}{4} \frac{\mu \tilde{Q}^4}{4r^8} \right\} - k \tilde{p}_\perp. \quad (5.114)$$

Temos, portanto, o valor da componente da pressão lateral:

$$\tilde{p}_\perp = -\frac{bb'}{4kr^2(r-b)} - \left\{ \frac{\tilde{Q}^2}{r^4} + \frac{3}{4} \frac{\mu \tilde{Q}^4}{4r^8} \right\}. \quad (5.115)$$

Ao impormos, pela violação da condição de energia nula, que

$$\tilde{p}_r = -\tilde{\tau} > 0$$

na garganta, ou seja, onde  $r = r_o = b_o$ , teremos, de acordo com a nova expressão proveniente da segunda equação,

$$\tilde{p}_r = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{Q}^2}{b_o^4} - \frac{11}{4} \frac{\mu \tilde{Q}^4}{4b_o^8} > 0. \quad (5.116)$$

Observamos que a solução com o campo elétrico não é possível, pois não há como fazer com que um dos termos troque de sinal e imponha este sinal negativo à densidade de matéria e à pressão, o que permitiria a violação da condição de energia fraca para vetores nulos. Isso se deve à quebra da invariância por transformação de dualidade, causada pela introdução do termo não-linear na ação efetiva. Teremos oportunidade de voltar a esta análise no capítulo que segue.

## Capítulo 6

# CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo sistemático das propriedades dos *wormholes*, e em especial nos concentramos no fato de que a manutenção de tal estrutura leva inevitavelmente à violação da condição fraca de energia para vetores do tipo-nulo. Essa análise nos permitiu construir um modelo de *wormhole* baseado na eletrodinâmica não-linear. Com base na discussão apresentada nos capítulos precedentes, relembremos os principais resultados obtidos, assim como analisaremos as perspectivas futuras.

Segundo a definição apresentada no Capítulo 3, vemos que a diferença básica entre um *wormhole* e um buraco negro é dada pelo fato deste último apresentar uma singularidade, ou seja, um ponto no qual todas as geodésicas são focalizadas. Um *wormhole* é caracterizado pela existência de uma garganta definida ao requerer-se que nesta a área da seção reta de um feixe de raios luminosos que a atravessam ortogonalmente apresenta um mínimo local não-nulo.

Se definirmos uma hipersuperfície do tipo-espaço  $\Sigma(u(x))$ , onde  $u(x)$  são as coordenadas nulas definidas em hiperplanos ortogonais à congruência de geodésicas nulas, e definindo para cada uma dessas congruências a expansão  $\theta$ , o tensor de cisalhamento  $\sigma^{\alpha\beta}$  e o tensor vorticidade  $\varpi^{\alpha\beta}$ , poderemos obter as equações que descrevem a propagação de cada uma dessas quantidades. Para nossa análise, no entanto, nos concentraremos na equação que nos fornece a variação da expansão: a equação de Raychaudhuri. Além disso, se considerarmos a garganta como sendo dada ao tomarmos  $\Sigma \equiv \Sigma(u(0))$ , e definindo a área em termos de uma métrica bidimensional induzida na superfície  $\Sigma$  conforme a [eq. (3.2)], impomos que esta área seja positiva, o que é equivalente a impor a existência de um ponto de mínimo. Matematicamente,

vimos que isso é feito ao impormos que (cf. [eq. (3.3)] e [eq. (3.4)] ):

$$\frac{\delta A}{\delta u}|_{(u=0)} = 0,$$

$$\frac{\delta^2 A}{\delta u^2}|_{(u=0)} \geq 0.$$

Sendo a expansão considerada nula em todos os pontos na garganta e a condição de desfocalização satisfeita, isto é, a condição dada pela [eq. (3.9)]

$$\frac{d\theta}{du} > 0$$

mostramos que a violação da condição de energia ocorre na garganta quando aplicamos à equação de Raychaudhuri.

Um outro ponto importante que deve ser considerado ao definirmos um *wormhole* é o fato de que essa violação da condição de energia pode ocorrer não somente na garganta, como também nas suas proximidades, pois ao considerarmos uma condição mais fraca, traduzida em termos da desigualdade dada pela [eq. (3.6)]

$$\frac{d\theta}{du} \geq 0,$$

o que leva ao resultado [eq. (3.8)]

$$T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \leq 0,$$

temos a violação das condições de energia em regiões próximas à garganta. Esta ambiguidade é resultante de um detalhe técnico na definição da desigualdade que expressa a condição de desfocalização das geodésicas.

Não pudemos deixar de notar que há uma classificação abrangente para os diferentes tipos de *wormholes*. Os critérios estão baseados no tipo de variedade considerada (Lorentziana ou Euclideana), sendo que aqueles que fazem parte da classe de *wormholes* do tipo Lorentziano ainda estão sujeitos à classificação de acordo com o tipo de conexão que realiza, isto é, se



conecta diferentes universos, recebendo a denominação de *inter-universal*, ou se conecta regiões distantes e distintas de um mesmo universo (são os chamados *intra-universais*), embora esta classificação apenas apareça ao nível da geometria e topologia globais, pois a física descrita localmente, ou seja, na região da garganta ou próxima a esta independe do tipo de conexão. Medições locais não permitiriam ao observador fazer a distinção entre as duas situações.

Nesta classe geral ainda podemos classificar os tipos de *wormholes* quanto à duração da estrutura na variedade, em termos temporais, como *permanentes* ou *transientes*, que por sua vez também são classificados em termos das suas dimensões, podendo ser *macroscópicos* ou *microscópicos*. Essa classificação é feita em relação à escala de Planck.

Ainda neste mesmo capítulo enunciamos o teorema da censura topológica, que basicamente nos diz que ao considerarmos globalmente a condição de energia nula média, isso nos impediria de investigar a topologia do espaço. Somos levados a essa censura topológica por meio de uma conjectura, denominada censura cósmica, que sugere que quaisquer estruturas topológicas colapsarão para dentro do horizonte de um conjunto de buracos negros. Esse colapso aconteceria de maneira rápida, de forma que aos observadores não seria permitida a travessia da garganta do *wormhole* associado a soluções exatas desses buracos negros considerados.

No Capítulo 4, fizemos um estudo detalhado do modelo de *wormhole* de Morris-Thorne (MT). Esta constitui a prova original da violação da condição fraca de energia que deve necessariamente ocorrer ao se manter a garganta de um *wormhole*. Este modelo é proveniente de uma abordagem caracterizada pela escolha de uma geometria bem comportada, ajustável, devido à introdução de duas funções arbitrárias na métrica ( $\Phi(r)$  e  $b(r)$ ), e que por conveniência é estática e apresenta simetria esférica. Daí seguem os cálculos dos tensores de curvatura associados com tal geometria, que são aplicados às equações de Einstein para que se possa

deduzir a distribuição de energia dada pelo tensor energia-momentum. Este sistema apresenta-se compatível com os princípios básicos da física, a não ser pelo comportamento peculiar da matéria que sustenta a garganta do *wormhole*.

Essa classe de *wormholes*, além de apresentar uma hipersuperfície de área mínima, que conecta duas regiões do espaço-tempo assintoticamente planas, de acordo com certas condições de contorno satisfeitas pela solução, é escolhida de tal forma a não exibir horizontes, além de possuírem pequenas forças gravitacionais. Para isso, impõe-se que a aceleração da gravidade seja da mesma ordem de grandeza do valor medido na Terra. Como exigências adicionais, requer-se que o tempo de trânsito através de uma tal estrutura seja finito, e que a estabilidade da solução quanto a perturbações de quaisquer naturezas esteja garantida.

Os autores do referido trabalho mostraram que a condição de existência de um mínimo estabelece um vínculo sobre o tipo de matéria, que pode ser expressado em termos do resultado [eq. (4.57)]

$$\tau > \rho,$$

ou seja, a tensão radial passa a ser superior a densidade total de energia. Para esse tipo de matéria que exibe tal propriedade o termo matéria “exótica” foi cunhado.

Os problemas que surgem por conta dessa peculiaridade aparecem especialmente nas medidas feitas por observadores que possam estar se movendo através do *wormhole*, pois estes, ao realizarem medidas da densidade de energia, podem encontrar valores negativos.

Com base no modelo MT, apresentamos no Capítulo 5 o nosso modelo de *wormhole*. Seguimos essencialmente o procedimento realizado por MT, ao adotarmos um espaço-tempo genérico, estático e com simetria esférica. Escolhemos convenientemente a métrica ajustável de MT, já que a arbitrariedade das funções que aparecem nos coeficientes das componentes

do tensor métrico nos permite a adequação às propriedades exibidas pelos *wormholes* e aos vínculos que aparecem por conta da existência da área mínima. Calculamos os tensores de curvatura associados à geometria escolhida. A partir daí, optamos por utilizar um tipo de campo de matéria que pudesse violar a condição de energia. Como sabemos que os campos de matéria clássicos não podem violar essas condições, e que certos efeitos quânticos conduzem à violação das condições de energia que podem ser experimentalmente verificadas (ainda que em escala quântica), consideramos que estas violações quânticas permitem a criação de *wormholes*.

As correções quânticas para as equações de movimento da eletrodinâmica clássica, calculadas por Euler e Heisenberg [Heisenberg, 36], permitem o aparecimento de uma densidade de energia e de pressão negativas finitas para determinados valores da coordenada  $r$ , combinados com determinados valores atribuídos aos coeficientes da expansão que aparece devido a essas correções. Assim, construímos um *wormhole* a partir da ação efetiva para as referidas correções quânticas.

Calculamos para dois casos distintos: o primeiro, tratamos do caso em que se tem um campo puramente magnético, e o segundo, para o caso de um campo puramente elétrico. Para o primeiro caso, relacionada com uma solução de monopólo magnético, obtemos o valor da função arbitrária  $b(r)$  pela integração da equação de Einstein, impondo como solução de contorno que na garganta do *wormhole*  $r = b(r_0) = b_0$ , o que expressa a existência de um raio mínimo. Esta função mostrou-se bem comportada e de acordo com o limite assintótico esperado.

Escolhendo uma solução particular para a equação, determinamos também a função  $\Phi(r)$ , e verificamos que no limite em que  $r \rightarrow \infty$ , esta função tende a zero, como  $b(r)$ . Temos, portanto, uma geometria assintoticamente plana. Isso significa que em regiões muito afastadas

do garganta do *wormhole*, temos o modelo de universo de Minkowski. Isso pode ser verificado ao analisarmos a figura 1 e a figura 2.

De acordo com o gráfico  $H_o \times b_o$  ( figura 4), que nos dá os valores para o raio mínimo de acordo com a intensidade da carga magnética, vemos que há um limite superior para o raio mínimo, o que era esperado. Aumentando-se a intensidade desta carga, temos o aumento do raio mínimo. Por exemplo, uma carga que induza um campo magnético de 1 G (campo na superfície terrestre) a uma distância de 1 cm não sustentaria um *wormhole* com uma garganta maior que  $10^{-8}$  cm (raio atômico), aproximadamente.

Quanto ao segundo caso, ou seja, aquele referente ao campo puramente elétrico, não pudemos implementar a construção de um *wormhole*, pois para este campo a violação da condição de energia não ocorre, uma vez que não há como fazer com que um dos termos troque de sinal, o que poderia resultar em valores negativos para a densidade de energia e para a pressão.

Por uma transformação de dualidade, podemos mostrar que as equações de Maxwell apresentam-se sob a mesma forma para o caso de uma carga magnética ou uma carga elétrica. É claro que ainda temos que lidar com a questão da possibilidade de que partículas apresentem cargas magnéticas, além das cargas elétricas. Porém, se apenas considerarmos que existam densidades de cargas e de corrente magnéticas, dadas por  $\rho_m$  e  $\vec{J}_m$ , respectivamente, juntamente com a densidade de cargas elétricas e de corrente elétrica,  $\rho_e$  e  $\vec{J}_e$ , as equações de Maxwell se apresentarão sob a seguinte forma [Jackson, 83]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 4\pi\rho_m, \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}_e, \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{J}_m. \quad (6.4)$$

A densidade de carga magnética e a densidade de corrente magnética podem, por hipótese, satisfazer a uma equação de continuidade de maneira análoga às densidades de carga e corrente elétricas. Das equações apresentadas acima, fica claro que a existência de cargas e correntes magnéticas conduziriam à observação das consequências eletromagnéticas. Se considerarmos a transformação de dualidade

$$\vec{E} = \vec{E}' \cos \xi + \vec{H}' \operatorname{sen} \xi, \quad (6.5)$$

$$\vec{H} = -\vec{E}' \operatorname{sen} \xi + \vec{H}' \cos \xi, \quad (6.6)$$

onde o ângulo  $\xi$  é um ângulo real, esta transformação deixa as formas quadráticas  $(\vec{E} \times \vec{H})$  e  $(E^2 + H^2)$  invariantes. Se transformarmos as fontes igualmente, teremos:

$$\rho_e = \rho'_e \cos \xi + \rho'_m \operatorname{sen} \xi, \quad (6.7)$$

$$\rho_m = -\rho'_e \operatorname{sen} \xi + \rho'_m \cos \xi, \quad (6.8)$$

$$\vec{J}_e = \vec{J}'_e \cos \xi + \vec{J}'_m \operatorname{sen} \xi, \quad (6.9)$$

$$\vec{J}_m = -\vec{J}'_e \operatorname{sen} \xi + \vec{J}'_m \cos \xi, \quad (6.10)$$

podemos demonstrar que as equações generalizadas de Maxwell [eq. (6.1) - eq. (6.4)] são invariantes por esta transformação de dualidade. Com isso, trata-se apenas de uma questão de convenção dizer que uma partícula possui uma carga elétrica mas não uma magnética.

No entanto, o termo não-linear, que aparece na ação efetiva decorrente da correção quântica das equações da eletrodinâmica de Maxwell, promove a quebra dessa invariância por transformação de dualidade. Daí o fato de que, ao considerarmos a solução para o campo elétrico puro, não conseguimos obter uma solução análoga àquela obtida para o caso

do monopólo magnético. Logo, isso nos leva à concluir que devido à quebra da invariância por transformação de dualidade, conseguimos distinguir as cargas elétrica e magnética e não podemos mais dizer que trata-se apenas de uma convenção a identificação da carga de uma partícula como sendo elétrica.

Como perspectivas futuras para a continuação do trabalho, pode ser feito um estudo mais detalhado quanto a processos de criação da *wormholes* em eras primordiais, uma vez que sabemos que em um domínio essencialmente quântico a formação de tais estruturas poderia ocorrer. Seria importante analisar questões quanto à estabilidade dessas estruturas, inclusive concentrando nos processos de construção de estruturas macroscópicas, seja através de processos de expansão ou mesmo de processos inflacionários. Esse estudo ainda poderia ser estendido no sentido de se investigar a prevenção de singularidades no universo.

Poderíamos investigar outros tipos de campo de matéria que pudessem satisfazer as propriedades da existência dos *wormholes*, inclusive utilizando campos escalares para isso.

Teríamos também que apresentar um estudo mais detalhado das características da solução quanto a aceleração gravitacional e as forças de maré, e quais condições estaria um observador sujeito, ao empreender a travessia da garganta.

# Apêndice A

## Equação do desvio de Jacobi e equação de Raychaudhuri

### A.1 Introdução

Na teoria geral da gravitação, o campo gravitacional é interpretado como sendo a manifestação da curvatura do espaço-tempo, que por sua vez é caracterizada pelo tensor de Riemann ( $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ ).

No entanto, segundo a sua interpretação geométrica, a variedade espaço-tempo apresenta localmente a topologia de um plano pseudo-euclidiano de dimensão 4. Isto é, em um determinado ponto da variedade podemos nos restringir a análise do espaço-tempo a partir do ponto de vista Minkowskiano. É claro que neste processo perdemos algumas características da geometria deste espaço-tempo, e haverá ocasiões em que se fará necessária a determinação das propriedades geométricas da variedade em questão. Para tanto, devemos recorrer a uma análise não-local, que por sua vez é viabilizada ao medirmos a *aceleração relativa* entre partículas vizinhas.

Havendo uma partícula deslocando-se em presença de um campo gravitacional teremos associada à ela uma curva dada por  $\gamma(s)$ , chamada de *linha de universo*, e que é definida na variedade espaço-tempo  $M_4$ . De acordo com alguns axiomas, consideraremos que as partículas teste seguem trajetórias tipo-tempo.

Porém, antes de determinamos a aceleração relativa entre partículas vizinhas devemos ser

capazes de medir quantidades tais como *distância* e, por extensão, *velocidade relativas*. É necessário, antes de mais nada, determinar a distância e o intervalo de tempo entre dois pontos quaisquer (digamos  $P$  e  $Q \in M_4$ ). Primeiramente, definimos velocidade e aceleração com base em um formalismo matemático adequado. Isso nos permitirá obter quantidades cujo significado físico das grandezas tenha correspondência com quantidades físicas da mecânica newtoniana.

Obtemos aqui a equação para o desvio geodésico através de uma análise cinemática de uma partícula teste localizada por um vetor  $Z^\alpha$ , o qual chamamos de *vetor conexão*. Esta partícula é vista por um observador cuja quadri-velocidade é  $V^\alpha$ . Como estamos interessados em grandezas tais como posição, velocidade e aceleração, vistas segundo o nosso observador, procuramos operá-las estando essas grandezas projetadas no espaço de repouso do referido observador.

Lidamos com uma variedade  $M_4$  pseudo-riemanniana de dimensão 4. A assinatura adotada para o tensor métrico é  $(+, -, -, -)$ . Todos os nossos objetos geométricos, isto é, os tensores com os quais estaremos trabalhando, serão representados pelas suas componentes relativas às bases canônicas  $(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  e  $dx^\alpha$ ) onde  $\{x^\alpha\}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) é um sistema de coordenadas arbitrário.

## A.2 Definições

### A.2.1 Observador

Sabemos que um sistema de coordenadas é apenas uma associação entre pontos em uma variedade e números que identifiquem biunivocamente esses pontos. É interessante que esses números arbitrários estejam relacionados com os observadores. Procuramos escolher, portanto, um *sistema de coordenadas fisicamente admissível*, ou seja, aquele sistema de coordenadas



que está mais proximamente associado a um observador, de maneira que uma das coordenadas meça o tempo e as outras meçam o espaço, sendo que o espaço de repouso local do observador co-móvel é aquele espaço medido por estas coordenadas de acordo com as possibilidades de sincronização [Sulik, 97]. Consideremos, primeiramente, a nossa variedade  $M$  e seja  $O$  uma superfície, tal que  $O \subset M$ . Uma congruência  $\gamma$  em  $O$  é uma família de curvas (geodésicas) tal que através de cada ponto  $p \in O$  passe precisamente uma única curva dessa família. Logo, as tangentes à congruência resultam em um *campo vetorial*  $\vec{V}$  em  $O$ , e cada campo vetorial contínuo gera uma congruência de curvas, por sua vez. Esta congruência é dita suave se o campo vetorial correspondente for suave.

Vamos considerar então uma congruência de geodésicas tipo-tempo, isto é, consideraremos a existência de um campo vetorial  $\vec{V}$  gerado pela congruência, definido em cada ponto do espaço-tempo, e que satisfaz a condição:

$$g(\vec{V}, \vec{V}) > 0, \quad (\text{A.1})$$

ou seja:

$$\begin{aligned} g(\vec{V}, \vec{V}) &= g\left(V^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, V^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = g(V^\alpha \bar{e}_\alpha, V^\beta \bar{e}_\beta) \\ &= V^\alpha V^\beta g(\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta) = V^\alpha V^\beta g_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Logo,  $g(\vec{V}, \vec{V}) = V^\alpha V^\beta g_{\alpha\beta} > 0$  e neste caso  $V^\alpha$  é tipo-tempo.

Em um determinado sistema de coordenadas local  $\{x^\alpha\}$  temos a equação paramétrica dessa superfície, dada por:

$$x^\alpha = x^\alpha(s, \tau). \quad (\text{A.3})$$

Consideramos aqui, sem perda de generalidade, que as geodésicas são parametrizadas pelo tempo próprio  $\tau$ , de forma que o campo vetorial  $V^\alpha$  esteja normalizado a unidade:

$$V^\alpha V_\alpha = 1, \quad (\text{A.4})$$

e ainda por  $s = s^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), parâmetro que identifica curvas distintas da congruência.

Definimos dois campos vetoriais na superfície:

- $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ , onde  $V^\alpha$  é o vetor tangente à geodésica tipo-tempo em cada ponto,
- $Z^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ , sendo  $Z^\alpha$  o *vetor conexão*, conectando duas curvas vizinhas na congruência.

O comutador de  $V^\alpha$  e  $Z^\alpha$  satisfaz a:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\vec{V}} Z)^\alpha &= [V, Z]^\alpha = V^\beta \partial_\beta Z^\alpha - Z^\beta \partial_\beta V^\alpha \\ &= \frac{dx^\beta(\tau, s^i)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{dx^\alpha}{ds} \right\} - \frac{dx^\beta(\tau, s^i)}{ds} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left\{ \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

já que as derivadas parciais comutam. Esta é a propriedade básica de um vetor conexão. Isto significa que transcorrido um mesmo intervalo de tempo próprio ao longo das linhas de universo dos observadores conectados por este vetor conexão, não há alteração deste vetor.

Dado um ponto na variedade, que chamaremos de  $P$ , é sempre possível encontrar coordenadas  $(ct^i, y^i)$  tais que  $P$  e uma vizinhança desse ponto sejam determinados pelas coordenadas  $(ct_o, y_o^i)$  e  $[c(t_o + \delta t), y_o^i + \delta y^i]$ . Essas coordenadas são definidas de tal maneira que o vetor  $\vec{V}$  tem por componentes<sup>2</sup>:

$$V^\alpha \doteq \frac{\delta_0^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \delta_0^\alpha. \quad (\text{A.6})$$

Essas coordenadas são denominadas *coordenadas co-moventes locais*. Sendo  $\{y^\alpha\}$  o sistema

<sup>2</sup> O asterisco indica que isso só é válido no sistema de coordenadas em questão.

de coordenadas co-moventes locais:

$\frac{dy^\alpha}{dS} = \delta_0^\alpha$ , de forma que vamos ter

$$\alpha = 0 : \frac{dy^0}{dS} = 1 \quad \therefore dy^0 = dS \implies y^0 = S, \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha = i, i = 1, 2, 3 \quad \therefore \frac{dy^i}{dS} = 0 \implies y^i = \text{constante}^3. \quad (\text{A.8})$$

## A.2.2 Tensor de projeção

Vamos introduzir um tensor construído com o campo vetorial  $\vec{V}$  definido em uma variedade riemanniana  $M_4$  e a métrica  $g_{\alpha\beta}$  do espaço-tempo dada a priori, através da definição:

$$h_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta, \quad (\text{A.9})$$

Este tensor definido como *tensor de projeção* projeta tensores no tri-espaço ortogonal a  $V^\alpha$  em qualquer ponto  $P$  da variedade e apresenta as seguintes propriedades que o caracterizam como um operador de projeção (considerando que  $\vec{V}$  está normalizado, ou seja,  $V^\alpha V_\alpha = 1$ ):

- é operador de projeção:

$$h^\alpha_\beta h^\beta_\gamma = (\delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta)(\delta^\beta_\gamma - V^\beta V_\gamma) = (\delta^\alpha_\gamma - V^\alpha V_\gamma) = h^\alpha_\gamma, \quad (\text{A.10})$$

- projeta ortogonalmente a  $V$ :

Seja  $\vec{x}$  um vetor arbitrário de  $M_4$  e  $\perp x^\alpha \equiv \hat{x}^\alpha \equiv h^\alpha_\beta x^\beta$  e sua projeção em  $V_\alpha$  é

$$V_\alpha \perp x^\alpha = V_\alpha h^\alpha_\beta x^\beta = V_\alpha (\delta^\alpha_\beta - V^\alpha V_\beta) x^\beta = 0, \quad (\text{A.11})$$

<sup>3</sup> Esta constante caracteriza a curva de congruência  $\gamma$  em questão.

- $h^\alpha_\alpha = 3$ ,
- é simétrico, ou seja,  $h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}$ ,
- o projetor  $h^\alpha_\beta$  determina um sub-espaço  $H \subset T_p$ , onde  $T_p$  é o espaço tangente gerado pelos vetores  $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ ,
- o tensor  $h^\alpha_\beta$  é a métrica do sub-espaço  $H$ , e permite a foliação do espaço-tempo localmente em uma parte puramente temporal e outra parte puramente espacial, o que nos leva a ter uma hiper-superfície tipo-espaço,
- para um observador com velocidade  $V^\alpha$  que está localizado em um ponto  $P \in M_4$  de coordenadas  $x^\alpha$ , a distância (topológica) a um ponto  $Q$  vizinho (também  $\in M_4$ ) de coordenadas  $x^\alpha + dx^\alpha$  será

$$\begin{aligned}
 dS^2 &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (h_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta) dx^\alpha dx^\beta \\
 &= h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (V_\alpha dx^\alpha)^2,
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

onde a distância entre dois pontos vizinhos em

1. um intervalo de tempo é dada por  $d\tau = V_\alpha dx^\alpha$ ,
2. espacialmente é dada por  $dl = [h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta]^{\frac{1}{2}}$ ,

• sendo  $d\tau$  uma 1-forma exata, os espaços locais determinados pelo tensor de projeção  $h_{\alpha\beta}$  mesclam-se formando uma hipersuperfície  $S \subset M_4$ , cuja métrica é o próprio  $h_{\alpha\beta}$ , que determina univocamente uma af inidade em  $S$ . Esta af inidade induzida em  $S$  por  $h_{\alpha\beta}$  é caracterizada pelas relações que se seguem:

$$h^\alpha_\beta h^\delta_\gamma (\nabla_\beta \perp x_\delta) \equiv \hat{\nabla}_\alpha \perp x_\gamma, \tag{A.13}$$

$$\hat{\nabla}_\alpha h_{\alpha\beta} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{\nabla}_{[\alpha} \hat{\nabla}_{\beta]} f = 0, \quad (\text{A.15})$$

onde  $f$  é um campo escalar arbitrário.

Os objetos  $V^\alpha$  e  $h_{\alpha\beta}$  são usados para decompor os objetos geométricos em suas partes paralela e ortogonal a  $V^\alpha$ , respectivamente. Dessa forma, obtemos a interpretação física desses mesmos objetos. Usualmente escolhe-se  $V^\alpha$  como a velocidade média da matéria presente no universo.

### A.2.3 Distância relativa

Com base nas definições anteriores, podemos definir agora o *vetor distância relativa* entre curvas vizinhas.

A distância (física) entre duas curvas vizinhas determinadas localmente por um observador em repouso em relação à partícula que tem por linha de universo a curva  $\gamma(\tau, s_o)$  vai ser a projeção do vetor conexão  $Z^\alpha$  no referencial da referida partícula. Isso será dado por:

$$\perp Z^\alpha = h^\alpha_\beta Z^\beta, \quad (\text{A.16})$$

que é a parte de  $Z^\alpha$  ortogonal a  $V^\alpha$ , a qual chamamos de *distância relativa*. Uma vez que:

$$(\mathcal{L}_{\vec{V}} Z)^\alpha = 0 \quad (\text{A.17})$$

e

$$\nabla_{\beta} V^{\alpha} = \partial_{\beta} V^{\alpha} + \Gamma_{\beta\epsilon}^{\alpha} V^{\epsilon} \quad (\text{A.18})$$

$$\nabla_{\beta} Z^{\alpha} = \partial_{\beta} Z^{\alpha} + \Gamma_{\beta\epsilon}^{\alpha} Z^{\epsilon} \quad (\text{A.19})$$

podemos reescrever o comutador de  $V^{\alpha}$  e  $Z^{\alpha}$  como:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\vec{V}} Z)^{\alpha} &= V^{\beta} \{ \nabla_{\beta} Z^{\alpha} - \Gamma_{\beta\epsilon}^{\alpha} Z^{\epsilon} \} - Z^{\beta} \{ \nabla_{\beta} V^{\alpha} - \Gamma_{\beta\epsilon}^{\alpha} V^{\epsilon} \} \\ &= V_{\beta}^{\beta} \nabla Z^{\alpha} - Z^{\beta} \nabla_{\beta} V^{\alpha} - V^{\beta} \Gamma_{\beta\epsilon}^{\alpha} Z^{\epsilon} + Z^{\epsilon} \Gamma_{\epsilon\beta}^{\alpha} V^{\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

e pela propriedade de simetria dos símbolos de Christoffel:

$$(\mathcal{L}_{\vec{V}} Z)^{\alpha} = V^{\beta} \nabla_{\beta} Z^{\alpha} - Z^{\beta} \nabla_{\beta} V^{\alpha} = 0. \quad (\text{A.21})$$

#### A.2.4 Velocidade relativa

Def inida a distância relativa, estamos em posição de definir o que seria uma *velocidade relativa*, obtida ao diferenciarmos a distância relativa em relação ao tempo próprio (derivada absoluta), e seguidamente projetando o resultado desta derivação na hipersuperfície  $H$  (já que as quantidades físicas “vistas” pelo observador no mundo “real” estão aí definidas). Isso é feito da seguinte forma:

- diferenciamos o vetor distância relativa:

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} (\perp Z^{\alpha}) &= (\perp Z^{\alpha})_{,\beta} V^{\beta} \\ &= (h^{\alpha}_{\gamma} Z^{\gamma})_{,\beta} V^{\beta} = h^{\alpha}_{\gamma,\beta} Z^{\gamma} V^{\beta} + h^{\alpha}_{\gamma} Z^{\gamma}_{,\beta} V^{\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

•projetamos em  $H$ :

$$\perp \frac{D}{D\tau}(\perp Z^\alpha) = h_\epsilon^\alpha (h_{\gamma,\beta}^\epsilon Z^\gamma V^\beta + h_\gamma^\epsilon Z_{,\beta}^\gamma V^\beta) = h_\epsilon^\alpha h_{\gamma,\beta}^\epsilon Z^\gamma V^\beta + h_\gamma^\alpha Z_{,\beta}^\gamma V^\beta, \quad (\text{A.23})$$

onde

$$\begin{aligned} h_\epsilon^\alpha h_{\gamma,\beta}^\epsilon Z^\gamma V^\beta &= (\delta_\epsilon^\alpha - V^\alpha V_\epsilon)(\delta_{\gamma,\beta}^\epsilon - V_{,\beta}^\epsilon V_\gamma - V^\epsilon V_{\gamma,\beta}) Z^\gamma V^\beta \\ &= -\dot{V}^\alpha V_\gamma Z^\gamma, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$h_\gamma^\alpha Z_{,\beta}^\gamma V^\beta = h_\gamma^\alpha V_{,\beta}^\gamma Z^\beta. \quad (\text{A.25})$$

Voltando ao segundo passo:

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{D\tau}(\perp Z^\alpha) &= h_\gamma^\alpha V_{,\beta}^\gamma Z^\beta - \dot{V}^\alpha V_\gamma Z^\gamma \\ &= h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta Z^\gamma - \dot{V}^\alpha V_\gamma Z^\gamma \\ &= (h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta - \dot{V}^\alpha V_\gamma) Z^\gamma \\ &= [h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta - h_\beta^\alpha V_{,\delta}^\beta V^\delta V_\gamma] Z^\gamma \\ &= [h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta - V_{,\delta}^\alpha V^\delta V_\gamma + V^\alpha V_\beta V_{,\delta}^\beta V^\delta V_\gamma] Z^\gamma \\ &= [h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta - V_{,\delta}^\alpha V^\delta V_\gamma] Z^\gamma = h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta Z^\gamma \\ &= h_\beta^\alpha V_{,\gamma}^\beta h_\delta^\gamma h_\epsilon^\delta Z^\epsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Def inimos:

$$h_\beta^\alpha h_\delta^\gamma V_{,\gamma}^\beta = V_{,\delta}^\alpha, \quad (\text{A.27})$$

donde obtemos

$$\perp \frac{D}{D\tau}(\perp Z^\alpha) = V_\beta^\alpha(\perp Z^\beta), \quad (\text{A.28})$$

que nos mostra que o vetor velocidade relativa está relacionado com o vetor distância relativa por uma transformação linear. A matriz desta transformação é o tensor  $V_\beta^\alpha$ . Podemos separá-lo em suas partes simétricas e anti-simétrica:

$$V_{\alpha\beta} = \varpi_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.29})$$

no qual:

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta (V_{\gamma,\delta} + V_{\delta,\gamma}), \quad (\text{A.30})$$

$$\varpi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta (V_{\gamma,\delta} - V_{\delta,\gamma}). \quad (\text{A.31})$$

A interpretação física do objeto  $V_{\alpha\beta}$  é a seguinte: se considerarmos a sub-família de geodésicas de um parâmetro dado por  $\gamma_s(\tau)$  na congruência, e definindo  $\eta^\alpha = \perp Z^\alpha = h_\beta^\alpha Z^\beta$  como o vetor desvio ortogonal de  $\gamma_o$  para esta sub-família.  $\eta^\alpha$  representa um deslocamento infinitesimal espacial de  $\gamma_o$  em relação a uma geodésica vizinha na sub-família. Temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{V}}(\perp Z^\alpha) &= \mathcal{L}_{\vec{V}}\eta^\alpha = 0 \therefore [V, \eta]^\alpha = V^\beta \partial_\beta \eta^\alpha - \eta^\beta \partial_\beta V^\alpha \\ &= 0 \Rightarrow V^\beta \partial_\beta \eta^\alpha = \eta^\beta \partial_\beta V^\alpha = V_\beta^\alpha \eta^\beta. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Assim,  $V_\beta^\alpha$  mede a falha de  $\eta^\alpha$  em ser transportado paralelamente ao longo da geodésica. Um observador na geodésica  $\gamma_o$  acharia que as geodésicas ao seu redor estariam sendo esticadas e giradas através de um mapeamento linear  $V_\beta^\alpha$ .



Podemos ainda decompor  $\theta_{\alpha\beta}$  em:

$$\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta, \quad (\text{A.33})$$

onde definimos:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta, \quad (\text{A.34})$$

$$\begin{aligned} \Theta &= g^{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\frac{1}{2}h_{\alpha}^{\gamma}h_{\beta}^{\delta}(V_{\gamma,\delta} + V_{\delta,\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}h^{\gamma\delta}(V_{\gamma,\delta} + V_{\delta,\gamma}) = V_{,\gamma}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Como o tensor  $\theta_{\alpha\beta}$  é a projeção de  $V_{\alpha,\beta}$  em  $H$ , temos que este só estará definido nesta hipersuperfície, sendo portanto perpendicular a  $V^{\beta}$ , de forma que:

$$\sigma_{\alpha\beta}V^{\beta} = 0, \quad (\text{A.36})$$

$$\varpi_{\alpha\beta}V^{\beta} = 0. \quad (\text{A.37})$$

A interpretação física de tais parâmetros (chamados de *parâmetros cinemáticos*) é a que se segue:

**Termo  $\Theta$**  : Este termo está relacionado com a variação da distância entre os observadores de forma independente da direção, sendo a medida da expansão média das geodésicas. Representa o *escalar de expansão isotrópica* do referencial.

**Termo  $\sigma_{\alpha\beta}$**  : Este termo está relacionado com a variação de distância assim como está com a variação de direção, influenciando de maneira não isotrópica. Este é o *tensor de cisalhamento*.

**Termo**  $\varpi_{\alpha\beta}$  : Este termo apenas é responsável pela alteração de direção, representando um movimento de rotação rígida, pois é a parte anti-simétrica do mapeamento linear  $V_{\alpha\beta}$ , sendo assim denominado *tensor de vorticidade*.

Isto quer dizer que uma esfera inicialmente vista no espaço tangente que será transportado ao longo de  $V^\alpha$  (por derivada de Lie) será distorcida em forma de um elipsóide cujos eixos principais dados pelos autovetores de  $\sigma_{\beta}^\alpha$ , com razão dada pelos autovalores de  $\sigma_{\beta}^\alpha$ .

A equação do desvio geodésico gera a taxa de variação de  $\Theta$ ,  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\varpi_{\alpha\beta}$  ao longo de cada geodésica da congruência. Estamos especialmente interessados na equação para a taxa de variação de  $\Theta$ , chamada de equação de Raychaudhuri, que será obtida a partir da equação do desvio de Jacobi, obtida a seguir.

### A.3 Equação do desvio de Jacobi

Podemos agora calcular a aceleração relativa. Isto é feito aplicando-se novamente o operador  $\perp \frac{D}{D\tau}$  à expressão obtida para a velocidade relativa:

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \perp Z^\alpha \right) &= \perp \frac{D}{D\tau} \{ h^\alpha_\beta V^\beta_{,\gamma} h^\gamma_\delta h^\delta_\epsilon Z^\epsilon \} \\ &= h^\alpha_\beta \left[ h^\beta_\gamma (h^\gamma_\delta Z^\delta)_{,\epsilon} V^\epsilon \right]_{,\mu} V^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

que, por sua vez, ao explicitarmos os cálculos e utilizarmos a identidade de Ricci, se reduz a:

$$\begin{aligned} \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp Z^\alpha \right) \right) &= \perp \frac{D}{D\tau} \left( \perp \frac{D}{D\tau} (\eta^\alpha) \right) \\ &= a^\alpha = h^\alpha_\lambda \left( R^\lambda_{\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu \eta^\beta + \dot{V}^\lambda_{,\beta} - \dot{V}^\lambda \dot{V}_\beta \right) h^\beta_\gamma \eta^\gamma \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Note que para um observador geodésico, isto é, aquele para o qual verificamos  $\dot{V}^\mu = 0$ , a equação acima se reduz a:

$$a^\alpha = h^\alpha_\lambda \left( R^\lambda_{\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu \eta^\beta \right) h^\beta_\gamma \eta^\gamma = R^\alpha_{\mu\beta\nu} V^\mu V^\nu \eta^\beta, \quad (\text{A.40})$$

que é a equação do desvio geodésico.

## A.4 Relação com os parâmetros cinemáticos - a equação de Raychaudhuri

Uma vez determinada as equações que descrevem a velocidade e aceleração relativas, vamos expressá-las em termos dos parâmetros cinemáticos. Com isso, poderemos obter a equação de Raychaudhuri, que nos descreve a taxa de variação do parâmetro de expansão ( $\Theta$ ) ao longo de uma curva geodésica. Vamos fazer isso para um observador genérico.

Havíamos definido anteriormente um objeto  $V_{\alpha\beta}$ , conforme a eq.(A-27):

$$\begin{aligned} V_\beta^\alpha &= h^\alpha_\mu h^\nu_\beta V^\mu_{,\nu} \\ &= V^\alpha_{;\beta} - \dot{V}^\alpha V_\beta. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Os parâmetros cinemáticos, por sua vez, foram obtidos a partir da decomposição deste objeto, de acordo com eq.(A-29), eq.(A-30) e eq.(A-31). Vamos calcular primeiramente a derivada absoluta desse objeto:

$$\frac{D}{DS} (V_{\alpha\beta}) = V_{\alpha\beta,\gamma} V^\gamma = (h_{\alpha\mu} h^\nu_\beta V^\mu_{,\nu}) = \left( V_{\alpha,\beta} - \dot{V}_\alpha V_\beta \right)_{,\gamma} V^\gamma, \quad (\text{A.42})$$

que se reduz a

$$\frac{D}{DS} (V_{\alpha\beta}) = V_{\alpha\beta,\gamma} V^\gamma = (V_{\alpha,\beta})_{,\gamma} V^\gamma = V_{\alpha,\beta,\gamma} V^\gamma \quad (\text{A.43})$$

se o observador é geodésico.

Ao usarmos a decomposição deste objeto em suas partes irreduzíveis, de acordo com:

$$V_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta + \sigma_{\alpha\beta} + \varpi_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.44})$$

teremos:

$$\begin{aligned} V_{\alpha,\beta,\gamma}V^\gamma &= \left( \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}\Theta + \sigma_{\alpha\beta} + \varpi_{\alpha\beta} \right)_{,\gamma} V^\gamma \\ &= \frac{1}{3} (h_{\alpha\beta,\gamma}\Theta + h_{\alpha\beta}\Theta_{,\gamma}) V^\gamma + \sigma_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma + \varpi_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Lembrando que pela identidade de Bianchi temos:

$$\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]}V^\gamma = R^\gamma_{\delta\alpha\beta}V^\delta, \quad (\text{A.46})$$

nos será permitido escrever o termo

$$V_{\alpha,\beta,\gamma} = R_{\alpha\mu\beta\gamma}V^\mu + V_{\alpha,\gamma,\beta}, \quad (\text{A.47})$$

que sendo substituído na eq.(A-45) nos fornece:

$$\begin{aligned} &R_{\alpha\mu\beta\gamma}V^\mu V^\gamma + V_{\alpha,\gamma,\beta}V^\gamma \\ &= \frac{1}{3} (h_{\alpha\beta,\gamma}\Theta + h_{\alpha\beta}\Theta_{,\gamma}) V^\gamma + \sigma_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma + \varpi_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

O primeiro termo da equação acima (que envolve o tensor de Riemann) ainda pode ser escrito de maneira diferente, uma vez que:

$$V_{\alpha,\gamma,\beta}V^\gamma = (V_{\alpha,\gamma}V^\gamma)_{,\beta} - V_{\alpha,\gamma}V^\gamma_{,\beta}. \quad (\text{A.49})$$

Dai, segue que:

$$\begin{aligned} &R_{\alpha\mu\beta\gamma}V^\mu V^\gamma + (V_{\alpha,\gamma}V^\gamma)_{,\beta} - V_{\alpha,\gamma}V^\gamma_{,\beta} \\ &= \frac{1}{3} \dot{\Theta} h_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \Theta \left( \dot{V}_\alpha V_\beta + V_\alpha \dot{V}_\beta \right) + \sigma_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma + \varpi_{\alpha\beta,\gamma}V^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Vamos calcular o traço desta equação:

$$g^{\alpha\beta} \left[ R_{\alpha\mu\beta\gamma}V^\mu V^\gamma + (V_{\alpha,\gamma}V^\gamma)_{,\beta} - V_{\alpha,\gamma}V^\gamma_{,\beta} \right] \quad (\text{A.51})$$

$$= \frac{1}{3} \dot{\Theta} h_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{3} \Theta g^{\alpha\beta} \left( \dot{V}_{\alpha} V_{\beta} + V_{\alpha} \dot{V}_{\beta} \right) + \sigma_{\alpha,\gamma}^{\alpha} V^{\gamma} + \varpi_{\alpha,\gamma}^{\alpha} V^{\gamma}.$$

Os objetos  $\sigma_{\alpha\beta}$  e  $\varpi_{\alpha\beta}$  não possuem traço, logo a expressão acima fica:

$$R^{\beta}_{\mu\beta\gamma} V^{\mu} V^{\gamma} + (V_{\alpha,\gamma} V^{\gamma})^{;\alpha} - (V_{\alpha,\gamma}) (V^{\gamma,\alpha}) = \dot{\Theta}, \quad (\text{A.52})$$

na qual substituímos:

$$(V_{\alpha,\gamma} V^{\gamma})^{;\alpha} = \left[ \left( \frac{1}{3} h_{\alpha\gamma} \Theta + \sigma_{\alpha\gamma} + \varpi_{\alpha\gamma} \right) V^{\gamma} \right]^{;\alpha} = 0, \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} (V_{\alpha,\gamma}) (V^{\gamma,\alpha}) &= \left( \frac{1}{3} h_{\alpha\gamma} \Theta + \sigma_{\alpha\gamma} + \varpi_{\alpha\gamma} \right) \left( \frac{1}{3} \Theta h^{\gamma\alpha} + \sigma^{\gamma\alpha} + \varpi^{\gamma\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{9} \Theta^2 h_{\alpha\gamma} h^{\gamma\alpha} + \frac{1}{3} \Theta h_{\alpha\gamma} \sigma^{\gamma\alpha} + \frac{1}{3} h_{\alpha\gamma} \Theta \varpi^{\gamma\alpha} \\ &\quad + \sigma_{\alpha\gamma} \frac{1}{3} \Theta h^{\gamma\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \sigma^{\gamma\alpha} + \sigma_{\alpha\gamma} \varpi^{\gamma\alpha} \\ &\quad + \varpi_{\alpha\gamma} \frac{1}{3} \Theta h^{\gamma\alpha} + \varpi_{\alpha\gamma} \sigma^{\gamma\alpha} + \varpi_{\alpha\gamma} \varpi^{\gamma\alpha} \\ &= \frac{1}{3} \Theta^2 + \sigma_{\alpha\gamma} \sigma^{\alpha\gamma} - \varpi_{\alpha\gamma} \varpi^{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

De volta à eq.(A-52):

$$R_{\mu\gamma} V^{\mu} V^{\gamma} - \frac{1}{3} \Theta^2 - \sigma_{\alpha\gamma} \sigma^{\alpha\gamma} + \varpi_{\alpha\gamma} \varpi^{\alpha\gamma} = \dot{\Theta}. \quad (\text{A.55})$$

Ao definirmos:

$$\sigma_{\alpha\gamma} \sigma^{\alpha\gamma} := 2\sigma^2 \geq 0 \quad (\text{A.56})$$

$$\varpi_{\alpha\gamma} \varpi^{\alpha\gamma} := 2\varpi^2 \geq 0 \quad (\text{A.57})$$

finalmente obtemos:

$$\dot{\Theta} = R_{\mu\gamma} V^{\mu} V^{\gamma} - \frac{1}{3} \Theta^2 - 2(\sigma^2 + \varpi^2), \quad (\text{A.58})$$

que é a equação de Raychaudhuri para um observador geodésico.

## Apêndice B

# Cálculo da equação de movimento a partir de uma Lagrangeana

### B.1 A Lagrangeana para o campo eletromagnético

Antes de estabelecermos o conjunto de equações de campo de Einstein, precisamos conhecer a forma do tensor momentum-energia, que por sua vez será obtido a partir de uma ação para o campo eletromagnético cuja forma genérica é dada por:

$$S = \int L \sqrt{-g} d^4x = \int \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 + \frac{7}{16}\mu (F^*)^2 \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$F = F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.2})$$

$$F^* = F^*_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.3})$$

Variamos a ação apenas em termos do invariante  $F$ , pois calcularemos para os campos elétrico e magnético separadamente, o que significa que o termo dado pelo invariante  $F^*$  e que em geral fornece  $\vec{E} \times \vec{H}$  se anula. Assim,

$$\delta S = \delta \int \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (\text{B.4})$$

o que nos dá

$$\delta S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 \right] + \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4}(\delta F) + \frac{\mu}{4}\delta(F^2) \right]. \quad (\text{B.5})$$

Fazemos então a variação em relação à métrica do espaço-tempo. Para garantir a clareza, vamos calcular essa variação por partes, dividindo-se a ação em dois termos distintos. O primeiro deles sendo dado por

$$\delta S_I = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 \right] = \int -\frac{1}{2}\sqrt{-g}(g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}) \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 \right], \quad (\text{B.6})$$

e o segundo por

$$\delta S_{II} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4}(\delta F) + \frac{\mu}{4}\delta(F^2) \right], \quad (\text{B.7})$$

para o qual calculamos

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} &= \frac{\delta(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta(F_{\alpha\beta}F_{\sigma\rho}g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho})}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\beta}F_{\sigma\rho} \frac{\delta(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho})}{\delta g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\beta}F_{\sigma\rho}(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\sigma}g^{\beta\rho} + g^{\alpha\sigma}\delta_{\mu}^{\beta}\delta_{\nu}^{\rho}) = \\ &-2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}, \\ \bullet \frac{\delta(F^2)}{\delta g^{\mu\nu}} &= 2F \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} = 2F(-2F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}) = -4F F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim, o tensor momentum-energia, obtido a partir da expressão

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (\text{B.8})$$

na qual substituímos os resultados obtidos nas equações acima, terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -(g_{\alpha\beta} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}}) \left[ -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 \right] \\ &+ 2 \left[ -\frac{1}{4} \frac{\delta F}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\mu}{4} \frac{\delta(F^2)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \\ &= -g_{\mu\nu}L - 4F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}L_F, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde definiu-se

$$L_F := -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}F. \quad (\text{B.10})$$

## B.2 Cálculo da equação de movimento

Tomemos novamente a Lagrangeana do campo eletromagnético:

$$L = -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2, \quad (\text{B.11})$$

que pode ser reescrita como

$$L = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta} + \frac{\mu}{4}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}F_{\epsilon\lambda}F_{\xi\kappa}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}g^{\xi\epsilon}g^{\kappa\lambda}. \quad (\text{B.12})$$

Temos ainda que

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (\text{B.13})$$

Logo, a Lagrangeana escrita em termos do vetor  $A^\mu$  é

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta} \\ & + \frac{\mu}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial_\epsilon A_\lambda - \partial_\lambda A_\epsilon)(\partial_\xi A_\kappa - \partial_\kappa A_\xi)g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}g^{\xi\epsilon}g^{\kappa\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Calculamos separadamente para cada um dos termos desta Lagrangeana

$$L_I = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (\text{B.15})$$

$$L_{II} = \frac{\mu}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F_{\epsilon\lambda}F^{\epsilon\lambda}. \quad (\text{B.16})$$



Variando em relação a  $\partial_\alpha A_\beta$ , já que esta é a única variável que aparece na Lagrangeana:

$$\frac{\partial L_I}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial L_{II}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2\mu F F^{\mu\nu}. \quad (\text{B.18})$$

Assim, teremos para as equações de Euler-Lagrange dadas por

$$\nabla_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0 \quad (\text{B.19})$$

o seguinte:

$$\nabla_\mu \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] = \nabla_\mu \left[ 4F^{\mu\nu} \left( -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} F \right) \right] = 0, \quad (\text{B.20})$$

que podemos reescrever, segundo a eq.(B-10), como

$$\nabla_\mu (F^{\mu\nu} L_F) = 0. \quad (\text{B.21})$$

## B.3 As componentes do tensor momentum-energia

### B.3.1 Primeiro caso: monopólo magnético

Tomamos como única componente diferente de zero do tensor de Maxwell a componente  $F_{23}$  (essa escolha caracteriza um monopólo magnético). Com isso, o escalar  $F$  será

$$\begin{aligned} F &= F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} F_{\rho\sigma} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} = F_{0\beta} F_{\rho\sigma} g^{0\rho} g^{\sigma\beta} + F_{i\beta} F_{\rho\sigma} g^{i\rho} g^{\sigma\beta} \\ &= F_{ij} F_{kl} g^{ki} g^{lj} = F_{23} F_{kl} g^{k2} g^{l3} + F_{32} F_{kl} g^{k3} g^{l2} \\ &= F_{23} F_{23} g^{22} g^{33} + F_{32} F_{32} g^{33} g^{22} = 2F_{23} F_{23} g^{22} g^{33}, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

já que a propriedade de anti-simetria

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (\text{B.23})$$

é verificada.

De acordo com as propriedades de anti-simetria, dadas pelas equações

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0, \quad (\text{B.24})$$

as equações internas que provêm destas propriedades nos fornecem a dependência da componente do tensor de Maxwell escolhida com as variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ , que é  $F_{23} = H_o (\text{sen } \theta)$ .

Sendo a métrica e a sua inversa respectivamente

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.25})$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.26})$$

podemos calcular o escalar  $F$  explicitamente:

$$\begin{aligned} F &= 2F_{23}F_{23}g^{22}g^{33} = 2(H_o \text{sen}\theta)(H_o \text{sen}\theta) \left(-\frac{1}{r^2}\right) \left(-\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\theta}\right) \\ &= 2(H_o \text{sen}\theta)^2 \left(\frac{1}{r^4 \text{sen}^2\theta}\right) = 2\frac{H_o^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Podemos agora escrever o tensor momentum-energia em termos do campo magnético (mais exatamente, em termos da carga do monopólo magnético  $H_o$ ). Partimos primeiramente da Lagrangeana, onde substituiremos o valor de  $F$  encontrado:

$$L = -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 = -\frac{1}{4} \left(2\frac{H_o^2}{r^4}\right) + \frac{\mu}{4} \left(2\frac{H_o^2}{r^4}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} + \mu\frac{H_o^4}{r^8}. \quad (\text{B.28})$$

Da mesma forma, calculamos  $L_F$ :

$$L_F = -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}F = -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2} \left( 2\frac{H_o^2}{r^4} \right) = -\frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4}. \quad (\text{B.29})$$

Temos então

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}L - 4F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha}L_F \\ &= -g_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} + \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) - 4F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} \left( -\frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= -g_{\mu\nu} \left( -\frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} + \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) + 4(F_{\mu 2}F_{\nu}^2 + F_{\mu 3}F_{\nu}^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Dessa forma, as componentes do tensor momentum-energia são

$$\begin{aligned} T_{00} &= g_{00} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) \\ &\quad + 4(F_{02}F_0^2 + F_{03}F_0^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= e^{2\alpha} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} T_{0i} &= g_{0i} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) + 4(F_{02}F_i^2 + F_{03}F_i^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= g_{11} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) + 4(F_{12}F_1^2 + F_{13}F_1^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= -e^{2\beta} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} T_{22} &= g_{22} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) + 4(F_{22}F_2^2 + F_{23}F_2^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^2} - 3\frac{\mu}{r^6}H_o^4, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

$$\begin{aligned} T_{33} &= g_{33} \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^4} - \mu\frac{H_o^4}{r^8} \right) + 4(F_{32}F_3^2 + F_{33}F_3^3) \left( \frac{1}{4} + \mu\frac{H_o^2}{r^4} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2}\frac{H_o^2}{r^2} - 3\frac{\mu}{r^6}H_o^4 \right) \text{sen}^2\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

### B.3.2 Segundo caso: monopólo elétrico

Neste segundo caso, tomaremos como a única componente diferente de zero do tensor de Maxwell a componente  $F_{10}$  (essa escolha caracteriza um monopólo elétrico, ou seja, um campo elétrico estático e esfericamente simétrico na direção  $\hat{r}$ ). Dessa forma, o cálculo do escalar  $F$  nos dará

$$\begin{aligned}
 F &= F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta} = F_{0\beta}F_{\rho\sigma}g^{0\rho}g^{\sigma\beta} + F_{i\beta}F_{\rho\sigma}g^{i\rho}g^{\sigma\beta} \\
 &= F_{0j}F_{\rho\sigma}g^{0\rho}g^{\sigma j} + F_{i0}F_{\rho\sigma}g^{i\rho}g^{\sigma 0} = F_{0j}F_{0k}g^{00}g^{kj} + F_{i0}F_{l0}g^{li}g^{00} \\
 &= F_{01}F_{01}g^{00}g^{11} + F_{10}F_{10}g^{11}g^{00} = 2F_{10}F_{10}g^{00}g^{11},
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

já que a propriedade de anti-simetria

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

é verificada. De acordo com as propriedades de anti-simetria obtidas através das equações internas que provêm de

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} = 0,$$

chegamos à dependência da componente do tensor de Maxwell escolhida com as variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$\partial_\alpha F_{10} + \partial_0 F_{\alpha 1} + \partial_1 F_{0\alpha} = 0. \tag{B.37}$$

Se  $\alpha = 0$

$$\partial_0 F_{10} + \partial_0 F_{01} + \partial_1 F_{00} = 0 \tag{B.38}$$

o que dará

$$\partial_0 F_{10} + \partial_0 F_{01} = 0 \therefore \partial_0 F_{10} = -\partial_0 F_{01}, \tag{B.39}$$

de forma que verificamos a anti-simetria desta componente. Fazendo-se o mesmo para  $\alpha = 1$  teremos:

$$\partial_1 F_{10} + \partial_0 F_{11} + \partial_1 F_{01} = 0 \therefore \partial_1 F_{10} = -\partial_1 F_{01}, \quad (\text{B.40})$$

onde também checamos a propriedade de anti-simetria da componente e sua possível dependência com a variável  $r$ . Passando a  $\alpha = 2$ , temos

$$\partial_2 F_{10} = 0, \quad (\text{B.41})$$

levando-nos à conclusão de que não há dependência na variável  $\theta$ . De maneira semelhante, verificamos para a variável  $\varphi$ , com  $\alpha = 3$ ,

$$\partial_3 F_{10} = 0. \quad (\text{B.42})$$

Logo, já podemos afirmar que a componente  $F_{10}$  não é função das coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$ , podendo no entanto ser função de  $t$  e  $r$ . Porém, como estamos apenas analisando o caso estático, ou seja, utilizamos uma métrica que não depende de  $t$ , isso nos leva à suposição que a componente  $F_{10}$  será apenas uma função de  $r$ :

$$F_{10} = E(r). \quad (\text{B.43})$$

Isso nos permite calcular o escalar  $F$ , de maneira semelhante à que foi feita para o caso do monopólo magnético:

$$F = 2F_{10}F_{10}g^{00}g^{11} = -2E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}. \quad (\text{B.44})$$

Vamos então escrever o tensor momento-energia em termos desse campo elétrico. Mais uma vez, partimos da Lagrangeana, onde substituímos o valor de  $F$  encontrado:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 = -\frac{1}{4}(-2E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}) + \frac{\mu}{4}(-2E^2 e^{-2(\alpha+\beta)})^2 \\ &= \frac{1}{2}E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)}, \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

donde seguimos com o cálculo de  $L_F$ :

$$\begin{aligned} L_F &= -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}F = -\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}(-2E^2e^{-2(\alpha+\beta)}) \\ &= -\frac{1}{4} - \mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Podemos obter as equações de movimento usando os resultados obtidos na seção anterior.

Essas equações são dadas por:

$$(L_F F^{\mu\nu})_{,\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} L_F F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \quad (\text{B.47})$$

que por sua vez fica:

$$(\sqrt{-g} L_F F^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \quad (\text{B.48})$$

Efetuada-se o somatório e lembrando que não há dependência em  $t$ , teremos para os diferentes valores de  $\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ):

• Se  $\mu = 0$ ,

$$(\sqrt{-g} L_F F^{0i})_{,i} = 0. \quad (\text{B.49})$$

Como a única componente não-nula de  $F^{\mu\nu}$  é  $F^{01} = g^{11} g^{00} F_{01}$ , já podemos eliminar termos da equação. Teremos apenas  $i = j = k = 1$ . Logo:

$$(\sqrt{-g} L_F F^{01})_{,1} = 0. \quad (\text{B.50})$$

• Se  $\mu = 1$ ,

$$(\sqrt{-g} L_F F^{1\nu})_{,\nu} = (\sqrt{-g} L_F F^{10})_{,0} = 0. \quad (\text{B.51})$$

já que não há dependência em  $t$ .

• Se  $\mu = 2$  ou  $\mu = 3$ , temos a equação identicamente zero, só restando as equações para  $\mu = 0$ .

Substituindo os termos na primeira equação, teremos:

$$[\sqrt{-g} L_F F_{01} g^{00} g^{11}]_{,1} \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ e^{(\alpha+\beta)} r^2 \operatorname{sen}\theta \left( -\frac{1}{4} - \mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right) (-e^{-2(\alpha+\beta)}) E \right]_{,r} \\
&= \left[ r^2 \operatorname{sen}\theta \left( \frac{1}{4} + \mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right) e^{-(\alpha+\beta)} E \right]_{,r} = 0.
\end{aligned}$$

Vamos tomar primeiramente o caso particular em que  $\mu = 0$ . Assim, a equação acima se reduz a:

$$\left[ \frac{r^2 e^{-(\alpha+\beta)} E}{4} \right]_{,r} = 0, \quad (\text{B.53})$$

cuja solução óbvia é

$$\left[ \frac{r^2 e^{-(\alpha+\beta)} E}{4} \right] = cte. \quad (\text{B.54})$$

Reescrevendo-a, teremos:

$$E(r) = \frac{Q e^{(\alpha+\beta)}}{r^2}, \quad (\text{B.55})$$

onde

$$Q = cte. \quad (\text{B.56})$$

Substituiremos esta solução na equação original, onde  $\mu \neq 0$ . Seguindo o mesmo procedimento:

$$\left[ r^2 \left( \frac{1}{4} + \mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right) e^{-(\alpha+\beta)} E \right] = cte, \quad (\text{B.57})$$

que vamos considerar como:

$$r^2 \left( \frac{1}{4} + \mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right) e^{-(\alpha+\beta)} E = cte = Q. \quad (\text{B.58})$$

Usando a solução obtida para o caso particular onde  $\mu = 0$  e a substituindo no termo em que  $E^2$  se encontra, teremos:

$$r^2 \left[ \frac{1}{4} + \mu \left( \frac{Q e^{(\alpha+\beta)}}{r^2} \right)^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right] e^{-(\alpha+\beta)} E = Q, \quad (\text{B.59})$$

donde:

$$e^{-(\alpha+\beta)} E r^2 \left[ \frac{1}{4} + \mu \frac{Q^2}{r^4} \right] = Q, \quad (\text{B.60})$$

e assim:

$$E(r) = \frac{Qe^{(\alpha+\beta)}}{\frac{r^2}{4} \left[ 1 + 4\mu \frac{Q^2}{r^4} \right]}. \quad (\text{B.61})$$

A seguir, usaremos a seguinte expansão, válida para  $x \approx 0$ :

$$(1 + kx)^{-1} = 1 - kx + (kx)^2 + O(x^3). \quad (\text{B.62})$$

Faremos isso com a equação acima, mas tomaremos, por coerência, somente até a primeira ordem de  $\mu$ , uma vez que estamos fazendo uma correção de primeira ordem na Lagrangeana.

Assim:

$$\left( 1 + 4\mu \frac{Q^2}{r^4} \right)^{-1} \approx 1 - 4\mu \frac{Q^2}{r^4}. \quad (\text{B.63})$$

Substituindo na [eq.(B-60)]:

$$E(r) \approx \frac{4Qe^{(\alpha+\beta)}}{r^2} \left( 1 - 4\mu \frac{Q^2}{r^4} \right). \quad (\text{B.64})$$

Com estes cálculos, estamos em posição de escrever as componentes do tensor momento-energia, dadas por:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ & F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \left[ 1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

onde

$$F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} = F_{\mu 0} F_{\nu}^0 + F_{\mu 1} F_{\nu}^1. \quad (\text{B.66})$$

Assim, as componentes serão:

• Se  $\mu = \nu = 0$ ,

$$\begin{aligned} T_{00} = & -g_{00} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ & \left[ F_{00} F_0^0 + F_{01} F_0^1 \right] \left[ 1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \right] \\ = & -e^{2\alpha} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$



$$e^{-2\beta} [E^2 + 4\mu E^4 e^{-2(\alpha+\beta)}].$$

•Se  $\mu = \nu = 1$ ,

$$\begin{aligned} T_{11} &= -g_{11} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ &F_{10} F_1^0 [1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}] \\ &= e^{2\beta} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ &-e^{-2\alpha} [E^2 + 4\mu E^4 e^{-2(\alpha+\beta)}]. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

•Se  $\mu = \nu = 2$ ,

$$\begin{aligned} T_{22} &= -g_{22} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ &[F_{20} F_2^0 + F_{21} F_2^1] [1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}] \\ &= r^2 \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

•Se  $\mu = \nu = 3$ ,

$$\begin{aligned} T_{33} &= -g_{33} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] \\ &= r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

•Se  $\mu = 0$  e  $\nu = i$ ,

$$\begin{aligned} T_{0i} &= -g_{0i} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ &[F_{00} F_i^0 + F_{01} F_i^1] [1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

•Se  $\mu = i$  e  $\nu = j$  ( $i \neq j$ ),

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -g_{ij} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + \\ &[F_{i0} F_j^0 + F_{i1} F_j^1] [1 + 4\mu E^2 e^{-2(\alpha+\beta)}] \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

$$= 0.$$

Teremos, portanto, somente as componentes diagonais do tensor momento-energia, que são as seguintes:

$$T_{00} = -e^{2\alpha} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + e^{-2\beta} [E^2 + 4\mu E^4 e^{-2(\alpha+\beta)}], \quad (\text{B.73})$$

$$T_{11} = e^{2\beta} \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right] + -e^{-2\alpha} [E^2 + 4\mu E^4 e^{-2(\alpha+\beta)}], \quad (\text{B.74})$$

$$T_{22} = r^2 \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right], \quad (\text{B.75})$$

$$T_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta \left[ \frac{1}{2} E^2 e^{-2(\alpha+\beta)} + \mu E^4 e^{-4(\alpha+\beta)} \right]. \quad (\text{B.76})$$

# Apêndice C

## As condições de energia

### C.1 Definições

De uma maneira geral, o tensor momentum-energia é o resultado de todas as contribuições dos inúmeros campos de matéria diferentes existentes no universo real. Sendo assim, tornar-se-ia impraticável a descrição exata do tensor momentum-energia mesmo que fosse do nosso conhecimento a forma detalhada de cada um desses campos e das equações de movimento que os descrevessem. Com efeito, o que observamos é o fato de que pouco sabemos a respeito do comportamento da matéria quando esta está sujeita a condições extremas de densidade e pressão. Dessa forma, somos levados a acreditar que ao desconhecermos o termo correspondente à descrição da matéria nas equações de Einstein, nada podemos dizer ao certo sobre a existência de possíveis singularidades no universo.

Porém, sabemos que para que um dado tensor momentum-energia seja considerado fisicamente razoável, é necessário que satisfaça algumas condições. Tais condições são suficientes para que provemos a existência de singularidades, sem que haja o conhecimento da forma exata do tensor momentum-energia. Tais condições são as condições de energia, que se apresentam em forma de desigualdades.

Há pelo menos sete tipos de condições de energia que são empregadas comumente ao se estudar a relatividade geral clássica. São elas: a condição de energia para vetores nulos, a condição fraca, a condição forte e a condição dominante, e ainda, a condição para vetores

nulos média, a condição fraca média e a condição forte média. Para que façamos uma breve análise de cada uma dessas condições, vamos considerar que o tensor momentum-energia seja do tipo Hawking-Ellis [Hawking, 73], classificado como de tipo I. Assim, em um sistema de coordenadas ortonormal conveniente, as componentes de um tensor momentum-energia do tipo I são dadas por

$$T^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

As componentes indicadas acima são a densidade de energia e as três principais pressões.

### C.1.1 A condição de energia para vetores tipo-nulo

Segundo esta condição, temos que para qualquer vetor nulo  $k^\mu$ , a seguinte condição deve ser satisfeita

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (\text{C.2})$$

Em termos das pressões principais, se considerarmos  $k^\mu = (1, -1, 0, 0)$ , podemos apresentar esta condição na forma

$$\rho + p_j \geq 0, \forall j. \quad (\text{C.3})$$

### C.1.2 A condição fraca de energia

A condição fraca de energia é análoga à condição nula, porém aplicamos esta a vetores tipo-tempo  $V^\mu$ . De acordo com esta condição, temos que qualquer vetor tipo-tempo  $V^\mu$  deve satisfazer

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (\text{C.4})$$

Sendo esta condição verdadeira para qualquer vetor tipo-tempo, deve levar à condição nula de energia por continuidade.

O significado físico dessa condição é o seguinte: a densidade de energia medida por qualquer observador tipo-tempo é positiva, o que é bastante razoável fisicamente.

Em termos das pressões principais, temos esta condição na seguinte forma:

$$\rho \geq 0, \text{ e } \forall j, \rho + p_j \geq 0. \quad (\text{C.5})$$

### C.1.3 A condição forte de energia

Pela condição forte de energia, temos que para qualquer vetor  $V^\mu$  tipo-tempo:

$$\left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (\text{C.6})$$

onde  $T$  é o traço ( $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ ) do tensor-momento energia. Por continuidade, a condição forte também nos leva à condição nula de energia, embora não implique, em geral, a condição fraca.

Em termos das pressões principais, temos

$$T = -\rho + \sum_j p_j, \quad (\text{C.7})$$

e assim

$$\forall j, \rho + p_j \geq 0, \text{ e } \rho + \sum_j p_j \geq 0. \quad (\text{C.8})$$

### C.1.4 A condição dominante de energia

A condição dominante impõe para qualquer vetor  $V^\mu$  tipo-tempo a condição

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0, \quad (\text{C.9})$$

onde  $T_{\mu\nu} V^\nu$  não é tipo-espaço.

Essa condição diz que a densidade de energia localmente medida é sempre positiva, e que o fluxo de energia é tipo-tempo ou nulo. A condição dominante implica na condição fraca de energia, e por isso também na condição nula de energia, mas não necessariamente leva à

condição forte de energia.

Em termos das pressões principais, podemos reescrevê-la:

$$\rho \geq 0, \text{ e } \forall j, p_j \in [-\rho, +\rho]. \quad (\text{C.10})$$

Isso nos permite interpretá-la da seguinte forma: a condição dominante é a condição fraca com a exigência adicional de que a pressão não deve exceder a densidade de energia. Isso é válido para todos os tipo conhecidos de matéria.

### C.1.5 A condição de energia média para vetores tipo-nulo

Diz-se que a condição nula de energia média é válida em uma curva  $\Gamma$  se

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} k^{\mu} k^{\nu} d\lambda \geq 0. \quad (\text{C.11})$$

Onde  $\lambda$  é um parâmetro afim generalizado da curva nula, cujo vetor tangente correspondente é denotada por  $k^{\mu}$ .

Para que possamos analisar esta condição em termos das pressões principais, vamos definir uma função de normalização  $\xi$ , e os cossenos de direção  $\cos \psi_i$ , de forma que

$$k^{\hat{\mu}} \equiv \xi (1, \cos \psi_i). \quad (\text{C.12})$$

Assim

$$\int_{\Gamma} \left( \rho + \sum_j \cos^2 \psi_j p_j \right) \xi^2 d\lambda \geq 0. \quad (\text{C.13})$$

Ao aplicarmos esta condição, comumente requer-se seja válida em uma classe apropriada  $\{\Gamma\}$  de geodésicas nulas inextensíveis.

### C.1.6 A condição fraca de energia média

Diz-se que a condição fraca de energia é válida em uma curva tipo-tempo  $\Gamma$  se

$$\int_{\Gamma} T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} ds \geq 0. \quad (\text{C.14})$$

Aqui,  $s$  denota a parametrização feita so usar-se o tempo próprio de uma curva tipo-tempo  $\Gamma$ , cujo vetor tangente correspondente é denotado por  $V^{\mu}$ . Com a escolha de  $s$  como o tempo próprio, temos

$$V^{\hat{\mu}} = \gamma (1, \beta \cos \psi_i). \quad (\text{C.15})$$

Assim, podemos escrever a condição na forma

$$\int_{\Gamma} \gamma^2 \left( \rho + \beta^2 \sum_j \cos^2 \psi_i p_j \right) ds \geq 0. \quad (\text{C.16})$$

Ao aplicarmos a condição acima, impõem-se que esta seja válida em alguma classe apropriada  $\{\Gamma\}$  de geodésicas tipo-tempo inextensíveis.

### C.1.7 A condição forte de energia média

Dizemos que essa condição é válida em uma curva tipo-tempo  $\Gamma$  se

$$\int_{\Gamma} \left\{ T_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} + \frac{1}{2} T \right\} ds \geq 0. \quad (\text{C.17})$$

Se colocarmos em termos das pressões principais, temos o vínculo aparecendo na forma

$$\int_{\Gamma} \left\{ \gamma^2 \left( \rho + \beta^2 \sum_j \cos^2 \psi_i p_j \right) - \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \sum_j p_j \right\} ds \geq 0 \quad (\text{C.18})$$

Caso  $\beta \rightarrow 1$ , então  $\gamma \rightarrow \infty$ , enquanto  $\gamma ds \rightarrow d\lambda$  e  $ds \rightarrow 0$ . Neste limite, esta condição se reduz à condição nula de energia média até um fator multiplicativo in f inito irrelevante.

- Phys. Rev. D **42**, 1057 (1990).
- [Hawking, 73] S. W. Hawking and G. R. F. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [Heisenberg, 36] W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [Hochberg, 91] D. Hochberg and T. W. Kephart, *Lorentzian wormholes from the gravitationally squeezed vacuum*, Phys. Lett. B **268**, 377 (1991).
- [Hochberg, 93] D. Hochberg and T. W. Kephart, *Wormhole Cosmology and the Horizon Problem*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2665 (1993).
- [Hochberg, 97] D. Hochberg and M. Visser, *Geometric structure of the generic static traversable wormhole throat*, Phys. Rev. D **56**, 4745 (1997).
- [Hochberg, 98] D. Hochberg and M. Visser, *The null condition in dynamic wormholes*, Pre-print (1998).
- [Jackson, 83] J. D. Jackson, *Eletrodinâmica Clássica*, Segunda edição, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1983).
- [Kim, 91] S. W. Kim and K. S. Thorne, *Do vacuum fluctuations prevent the creation of closed timelike curves?*, Phys. Rev. D **43**, 3929 (1991).
- [Kim, 96] S. W. Kim, *Cosmological model with a traversable wormhole*, Phys. Rev. D **53**, 6889 (1996).
- [Landau, 75] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of fields*, Fourth edition, Pergamon Press, Oxford (1975).
- [Misner, 57] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Classical physics as geometry: gravitation, eletromagnetism, unquantized charge, and mass as properties of curved empty space*, Ann. Phys. (NY) **2**, 525 (1957).



- [Misner, 73] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
- [Morris, 88a] M. S. Morris, K. S. Thorne and U. Yustsever, *Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition*, Phys. Rev. Lett. **61**, 1446 (1988).
- [Morris, 88b] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: a tool for teaching general relativity*, Am. J. Phys. **56**, 395-412 (1988).
- [Møller, 72] C. Møller, *The Theory of Relativity*, Second edition, Oxford University Press, Oxford (1972).
- [Novello, 80] M. Novello, *Cosmologia Relativística, in Anais da II Escola da Gravitação e Cosmologia do CBPF*, ed. M. Novello, Rio de Janeiro (1980).
- [Novello, 98] M. Novello, J. M. Salim, V. A. De Lorenci and R. Klippert, *Effective Lagrangian for Eletrodynamics and Avoidance of the Singular Origin of the Universe*, Notas de Física, CBPF-NF-043/98, CBPF, Rio de Janeiro (1998).
- [Ohanian, 76] H. C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Company, New York (1976).
- [Parker, 73] L. Parker and S. A. Fulling, *Quantized Matter fields and the Avoidance of Singularities in General Relativity*, Phys. Rev. D **7**, 2357 (1973).
- [Roman, 86] T. A. Roman, *Quantum stress-energy tensors and the weak energy condition*, Phys. Rev. D **33**, 3526 (1986).
- [Roman, 93] T. A. Roman, *Inflating Lorentzian wormholes*, Phys. Rev. D **47**, 1370 (1993).
- [Salim, 76] J. M. Salim, *Monopólos gravitacionais*, Tese de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro (1976).
- [Schutz, 85] B. F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press,

Cambridge (1985).

[Schutz, 95] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[Soares, 80] I. D. Soares, *O cálculo de formas diferenciais e a equação de Dirac em espaços curvos*, in *Anais da II Escola de Cosmologia e Gravitação do CBPF*, ed. M. Novello, Rio de Janeiro (1980).

[Sulik, 97] J. Sulik, *O conceito de sistema de referência em relatividade geral e algumas de suas aplicações*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro (1997).

[Tipler, 78] F. J. Tipler, *Energy conditions and space singularities*, *Phys. Rev. D* **17**, 2521 (1978).

[Visser, 89] M. Visser, *Traversable Wormholes: some simple examples*, *Phys. Rev. D* **39**, 3182 (1989).

[Visser, 96] M. Visser, *Lorentzian Wormholes - From Einstein to Hawking*, Springer-Verlag, New York (1996).

[Visser, 97] M. Visser and D. Hochberg, *Generic wormhole throats*, 1997, gr-cq/9710001, Proceedings of the Haifa Workshop: The Internal Structure of Black Holes and Spacetime Singularities.

[Vollick, 97] D. N. Vollick, *Maintaining a wormhole with a scalar field*, *Phys. Rev. D* **56**, 4724 (1997)

[Wheeler, 55] J. A. Wheeler, *Geons*, *Phys. Rev* **97**, 511 (1955).

**“CONSTRUÇÃO DE “WORMHOLES” UTILIZANDO CORREÇÃO QUÂNTICA DE EULER-HEISENBERG PARA A ELETRODINÂMICA CLÁSSICA”**

*Carla Ribeiro da Fonseca*

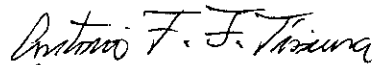
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Mário Novello - Presidente



Regina Celia Arcuri



Antonio Fernando da Fonseca Teixeira



Luiz Alberto Rezende de Oliveira - Suplente

Rio de Janeiro, 28 de janeiro de 2000