

99/2

Tese de Doutorado

Vórtices Autoduais do Modelo  
Maxwell-Chern-Simons-Higgs  
com Acoplamento Não-mínimo.

Marcony Silva Cunha

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Departamento de Campos e Partículas  
Rio de Janeiro, Janeiro de 1999

VÓRTICES AUTODUAIS DO MODELO  
MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS COM



1999/02

C972

\*020822\*

Tese de Doutorado

**Vórtices Auto-duais do Modelo  
Maxwell-Chern-Simons-Higgs  
com Acoplamento Não-mínimo.**

Marcony Silva Cunha

Tese submetida ao Departamento de Campos e Partículas,  
como requisito para obtenção do grau de Doutor em Física.

**Banca Examinadora:**

José Abdalla Helayël Neto  
Orientador

Hugo R. Christiansen  
Co-orientador

José Luiz Matheus Valle

Oswaldo Monteiro del Cima

Nami Fux Svaiter

Sebastião Alves Dias

Tese Aprovada em 19 de Janeiro de 1999

*Para Lucas, meu  
filho.*

## Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a minha esposa pela sua enorme paciência ao longo desses três anos de tese.

Por falar em paciência, não posso esquecer a grande pessoa humana do Prof. Helayel, meu orientador, que entendeu minhas idas e vindas Rio/Fortaleza. Sem ele essa tese não seria possível.

Ao grande amigo e co-orientador Hugo que, a meu ver, se superou no seu modo de ser para aturar meus deslizes.

Aos meus bons amigos da Góis Monteiro, Ozemar Ventura e Raul Vallejos, que tornaram minha estada no Rio mais agradável enquanto estava distante da minha família.

Aos amigos da sala 319, André Penna Firme e Mauro Negrao, pela amizade e companheirismo.

A todos os alunos da ala C (DCP), em especial ao amigos Álvaro (ALMA) Nogueira e Leon Manssur pelo companheirismo e profissionalismo

Ao grande amigo Álvaro, o maluco (no bom sentido) pelos momentos engraçados. “Isso quer dizer...”

A Prof. e amigo Tião pela extrema coerência de pensamento. Seu único defeito é ser flamenguista.

Ao grande Amigo vascaíno Marcello Barbosa, grande aliado contra os flamenguistas.

A Beth e Rosângela pelo grande profissionalismo e atenção que sempre dispensaram a minha pessoa.

Ao amigo Sidou, pela presença e amizade constantes durante o período que estive escrevendo a tese.

Ao laboratório de Física de Nuvens (LFNM) da Universidade Federal do Ceará na pessoa do Prof. Parente que cedeu um dos micros do laboratório para a digitação da tese.

Ao Prof. e amigo Carlos Alberto (UFC) pela presença constante ao longo desses últimos 7 anos de vida acadêmica.

Ao Departamento de Campos e Partículas (DCP/CBPF) onde realizei minha tese.

Ao CNPq pelo importante suporte financeiro.

## Resumo

Neste trabalho construímos uma versão supersimétrica do modelo Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) com um termo de acoplamento não-mínimo entre a matéria e um potencial de gauge  $2$ -*forma*. Reduzimos dimensionalmente o modelo (de quatro para três dimensões) e, após algumas identificações convenientes entre seus campos, identificações essas que preservam a supersimetria existente, obtemos um modelo supersimétrico  $N=2$ . A parte bosônica do modelo  $N=2$  é precisamente o modelo Maxwell-Chern-Simons (MCS) com um termo de momento magnético anômalo em cuja análise estamos interessados. A partir de um campo escalar auxiliar, advindo da supersimetria, conseguimos encontrar o potencial de Higgs correspondente a fase de Bogomol'nyi do modelo. As equações autoduais resultantes são válidas para quaisquer valores da constante de acoplamento não-mínimo, em contraste com estudos anteriores. Para o caso crítico,  $g = g_c$ , onde a lei de Gauss e de primeira ordem, encontramos explicitamente vórtices topológicos e não-topológicos para o modelo. Nesse caso, no limite onde a massa topológica é infinita, o potencial comporta-se como o potencial de Higgs típico do modelo Chern-Simons (CS) puro, como esperado.

## Abstract

In this work we built up a supersymmetric version of the Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) model with nonminimal coupling between matter and a 2-form gauge potential in  $D=4$ . By means of a dimensional reduction procedure, we obtain a  $N=2$ -supersymmetric model with anomalous magnetic moment interaction. This result comes about after some convenient identifications among the fields that preserve the existent supersymmetry. The bosonic part of the final system is the Maxwell-Chern-Simons (MCS) model with anomalous coupling which we are interested in.

Starting from a scalar auxiliary field coming from supersymmetry, we obtain the Higgs potential needed to achieve the Bogomol'nyi limit of the model. The resulting self-dual equations, which are first order, are valid for any value of the anomalous coupling. For a critical coupling,  $g = g_c$ , where the Gauss law reduces to first order, we find topological and nontopological vortex solutions in contrast to previous approaches. For large topological masses, the obtained potential behaves like the typical Higgs potential of the pure Chern-Simons (CS) model as expected.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
Índice . . . . .	iv
Lista de Figuras . . . . .	vi
Lista de Tabelas . . . . .	vii
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Relações de Bogomol'nyi e Supersimetria</b>	<b>6</b>
<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1 Relações de Bogomol'nyi . . . . .	8
1.1.1 Vórtices de Nielsen-Olesen . . . . .	8
1.1.2 O modelo Chern-Simons-Higgs . . . . .	11
1.2 Explicando a relação entre a supersimetria e o limite de Bogomol'nyi . . . . .	14
<b>2 Supersimetria N=2 e o modelo Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo</b>	<b>16</b>
<b>Introdução</b>	<b>17</b>
2.1 A ação supersimétrica N=1-D=4 . . . . .	18
2.2 Redução dimensional de D=4 para D=3 . . . . .	24
2.3 O modelo N=2 em D=3 . . . . .	26

<b>3 Vórtices autoduais</b>	<b>32</b>
<b>Introdução</b>	<b>33</b>
3.1 O modelo não-mínimo . . . . .	34
3.2 As equações autoduais do movimento . . . . .	36
3.3 O acoplamento anômalo crítico . . . . .	38
3.4 Análise das soluções autoduais . . . . .	40
<b>Conclusões Gerais</b>	<b>50</b>
<b>Perspectivas</b>	<b>52</b>
<b>Apêndice (Notações e convenções sobre supersimetria em 4D)</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

3-1	O campo escalar $R(r)$ e o campo de gauge $a(r)$ na fase topológica. Os valores das constants $c_n$ são fixados pela forma dos campos no infinito: $c_1 = 0.1066$ , $c_2 = 9.1190 \times 10^{-3}$ , $c_3 = 4.726 \times 10^{-4}$ , para $\gamma = 2$ . . . . .	45
3-2	O campo magnético $B$ como função de $r$ para $n = 1, 2, 3$ e $\gamma = 2$ na fase topológica. A estrutura do vórtice é anelar como no caso dos vórtices de Chern-Simons puro. . . . .	46
3-3	O campo magnético $B$ na fase topológica para $n = 1$ e alguns valores de $\gamma = \frac{\kappa}{\hbar v}$ . . . . .	46
3-4	O campo de Higgs $R(r)$ na fase não topológica para $n = 0$ e alguns valores de $b_0$ . . . . .	47
3-5	O campo de gauge $a(r)$ na fase não topológica para $n = 0$ e alguns valores de $b_0$ . . . . .	47
3-6	O campo magnético $B(r)$ na fase não topológica para $n = 0$ e alguns valores de $b_0$ . Sua estrutura é semelhante a um tubo de fluxo. . . . .	48
3-7	O campo de Higgs $R(r)$ na fase não topológica para $n = 1$ e alguns valores de $b_1$ . . . . .	48
3-8	O campo de gauge $a(r)$ na fase não topológica para $n = 1$ e alguns valores de $b_1$ . . . . .	49
3-9	O campo magnético $B(r)$ como função de $r$ para $n = 1$ e alguns valores de $b_1$ na fase não topológica. Os vórtices são anelares como no setor topológico.	49

# Lista de Tabelas

3.1	Alguns valores de $c_n$ para $n = 1, 2, 3$ e $\gamma = 1.5, 2.0, 4.0$ . . . . .	42
3.2	Valores de $b_n^{\max}$ e $-(a_n^\infty)_{\max}$ para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . . . . .	44

# Introdução

Nesta Tese tratamos com soluções de equações não-lineares em três dimensões, os chamados vórtices. Os modelos tratados aqui são invariantes de gauge sendo que consideramos a inclusão de um acoplamento não-mínimo com a matéria.

Em 4 dimensões vemos o aparecimento desse tipo de acoplamento, primeiramente com a razão giromagnética do elétron, uma correção que envolve a constante de estrutura fina  $\alpha = \frac{1}{137}$ . Nesse caso, podemos escrever  $g = \delta - 2$  onde  $\delta$  é o momento magnético do elétron e  $g$  é o acoplamento não-mínimo que, neste caso, chamamos de momento magnético anômalo do elétron.

Esse tipo de acoplamento foi generalizado como sendo

$$g\psi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi.$$

Essa generalização foi importante porque posteriormente se descobriu que a álgebra do grupo  $SO(2,1)$  permitia acoplamentos desse tipo mesmo para partículas escalares, ou seja, partículas que não possuem spin podem apresentar um momento magnético anômalo em 3D [1, 2].

Ainda em 4D, sabe-se da existência do problema de se considerar o núcleo atômico pontual para o cálculo das funções de onda de elementos hidrogenóides. A equação de Dirac nos diz que a energia para esse tipo de átomo é  $E \sim 1/\sqrt{1 - Z\alpha}$ . Isso quer dizer que para núcleos com número atômico  $Z > 137$  a energia se torna complexa. Uma das saídas encontradas foi considerar o núcleo finito (considerando-o homogêneo ou com as cargas positivas distribuídas superficialmente sobre uma esfera oca do tamanho do raio

nuclear). O problema então é calcular as funções-de-onda nas regiões dentro e fora do núcleo e depois obrigá-las a serem iguais no raio nuclear.

Outra solução para o problema foi proposta em [3, 4]. Eles conseguiram mostrar que levando-se em conta a contribuição do momento anômalo do elétron (com um modelo de núcleo pontual), pode-se obter funções-de-onda regulares e valores de energia fisicamente aceitáveis para  $Z > 137$  (sobre esse assunto, veja também [5]).

Efeitos essencialmente planares tem despertado muito a atenção dos físicos nos últimos anos, por isso o interesse em  $(2+1)D$ , *i.e.*, o interesse em trabalhar em teorias construídas em  $3D$  ou dimensionalmente reduzidas para  $3D$ , a partir de dimensões superiores. Por exemplo, é bem conhecido que o termo de Chern-Simons pode descrever os chamados *anyons*<sup>1</sup>, os quais são responsáveis pela estatística fracionária [8, 9, 10, 11] e pelo efeito Hall Quântico Fracionário [12]<sup>2</sup>, permitindo a existência de autovalores fracionários (sendo os autovalores semi-inteiros casos particulares) para o operador de spin. Nesse contexto, Carrington e Kunstater [13] sugeriram que a inclusão do dipolo anômalo em teorias com o termo de Chern-Simons poderia gerar alguma contribuição para o spin fracionário. Seguindo essa sugestão, Nobre (95) observou que tal fenômeno realmente ocorre [15].

Sabemos, entretanto, que tal acoplamento traz problemas quanto a sua renormalizabilidade e a maioria dessas teorias que tratam do assunto não são, por isso, renormalizáveis. Há, contudo, a possibilidade de acoplar a corrente minimamente conservada à intensidade de campo eletromagnético, sendo que o acoplamento não-mínimo funciona como a constante de acoplamento. Neste caso, mostrou-se que esse tipo de modelo é renormalizável pelo menos a um *loop* [14].

Contudo, mesmo para modelos que não são renormalizáveis, podemos trabalhar dentro de certo limite de validade tratando esses modelos como teorias efetivas o que, a nosso ver, é suficiente para validar nosso esforço em entender melhor esse tipo de acoplamento.

---

<sup>1</sup>*Anyons* ideais são descritos como tubos de fluxo magnético localizados. Veja, por exemplo, Wilczek (1981) [6, 7].

<sup>2</sup>O físico R.B. Laughlin foi agraciado com o prêmio Nobel de Física em 1998 pela explicação, a partir de *anyons*, do efeito Hall Quântico Fracionário.

O que vamos estudar aqui envolve o acoplamento não-mínimo em modelos com termos topológicos. Nossa motivação é, principalmente, encontrar vórtices topológicos nesses modelos com possibilidade de *anyons*.

A lei de Gauss, originalmente, é uma equação diferencial de segunda ordem mas, para manter um comportamento topológico a distâncias de interação de longo alcance (entre partículas carregadas no plano), precisamos torná-la de primeira ordem[2]. Isto pode ser conseguido quando consideramos o modelo de Chern-Simons (CS) puro, *i.e.*, sem a presença do termo de Maxwell. Por outro lado, não se aceita como correto dizer que apenas o termo CS seja responsável pela dinâmica de partículas em 3D. Por isso, se quisermos modelos considerados mais realísticos devemos incluir o termo de Maxwell. A dificuldade nesse caso é que sua inclusão eleva a lei de Gauss de volta de primeira para segunda ordem, aparentemente destruindo a possibilidade de se ter *anyons* na teoria. Esse tipo de problema é contornado quando se inclui o termo de acoplamento não-mínimo.

Mostra-se que, quando se escolhe um valor especial para essa constante de acoplamento,  $g = g_c$ , a lei de Gauss reduz-se novamente à primeira ordem [2, 16, 17] e as equações de Bogomol'nyi, obtidas considerando-se um valor mínimo para a energia, produzem soluções de vórtice autodual. Vemos, entretanto, que na literatura tais soluções com esse acoplamento não são topológicas [17, 18, 19]. Objetivamos aqui, por isso, reverter esse panorama encontrando, principalmente, soluções topológicas para um modelo que envolva os termos de Maxwell e Chern-Simons e o acoplamento não-mínimo.

No capítulo 1 tratamos das relações de Bogomol'nyi em modelos com vórtices topológicos, a saber: o modelo Higgs Abelian e o modelo Chern-Simons-Higgs. O primeiro possui vórtices neutros, os chamados vórtices de Nielsen-Olesen; o segundo possui vórtices carregados. Nosso enfoque sobre o segundo modelo é impor as equações autoduais, no limite de energia mínima, e obter o potencial de Higgs de sexta ordem como consequência dessa imposição. Isso, a nosso ver, revela-se interessante quando não se conhece, a priori, o potencial adequado à autodualidade. Na última seção do capítulo falamos da ligação entre as relações de Bogomol'nyi e a supersimetria observando os trabalhos de Hlousek e Spector [20, 21].

No capítulo 2 obtemos a extensão supersimétrica  $N = 1$  do modelo Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond com a matéria acoplada não minimamente a um potencial de gauge 2-forma, em 4 dimensões. Após uma redução dimensional conveniente de (3+1) para (2+1) dimensões ficamos com um modelo com duas supersimetrias que contém os termos de Maxwell e Chern-Simons [22]. Esse modelo final abre a possibilidade para a obtenção de soluções topológicas (e não-topológicas) no caso do acoplamento não-mínimo com a matéria. Aqui chamamos a atenção da importância de termos o modelo supersimétrico  $N = 2$  explicitamente. Nessa situação, de supersimetria estendida  $N = 2$ , o modelo nos fornece todas as interações entre os campos que dificilmente seriam encontradas de outra maneira e, ainda, condições para encontrar o limite de Bogomol'nyi do modelo juntamente com as equações autoduais.

No capítulo 3 encontramos vórtices autoduais no modelo Maxwell-Chern-Simons (MCS) com interações de momento magnético anômalo entre a matéria e o campo de gauge, em 3D. Esse modelo é a parte bosônica do modelo MCS supersimétrico do capítulo anterior. O potencial de Higgs que satura o limite de Bogomol'nyi é obtido através do campo auxiliar, advindo da conexão de gauge supersimétrica, tomando-o na camada-de-massa; esse potencial admite soluções topológicas e não-topológicas sendo que as equações autoduais obtidas admitem solução para quaisquer valores da constante não-mínima. Em particular, escolhemos um valor especial para essa constante,  $g = g_c$ , valor esse que reduz a lei de Gauss a primeira ordem, para encontrar os vórtices mostrando que os mesmos possuem uma estrutura mais rica do que aqueles encontrados na literatura até então.

Apresentamos então uma discussão detalhada das soluções. Encontramos soluções assintóticas com as quais calculamos alguns valores exatos para o fluxo magnético quando este não é quantizado, como é o caso para as soluções não-topológicas. Para as soluções topológicas o fluxo é quantizado, sendo um múltiplo da vorticidade. Apresentamos, finalmente, as soluções numéricas mostrando vórtices topológicos e não-topológicos para diversos valores da vorticidade  $n$  e de  $g_c$  [23]. Neste caso,  $g = g_c$ , esses vórtices apresentam uma estrutura semelhante a dos vórtices do modelo de Chern-Simons puro (sem o termo de Maxwell) sendo, como dissemos, modificados pela presença do momento anômalo.

Após o capítulo 3 apresentamos as Conclusões Gerais sobre o trabalho e as perspectivas abertas por ele.

Finalmente, apresentamos um apêndice com as principais convenções e notações usadas ao longo desse trabalho.

# Capítulo 1

## Relações de Bogomol'nyi e Supersimetria

Neste capítulo falamos sobre limite de Bogomol'nyi e de sua relação com a supersimetria. Fazemos uma revisão do limite de Bogomol'nyi no modelo Higgs Abeliano, o qual possui soluções de vórtice neutro. Revisamos também o modelo Chern-Simons Higgs onde, impondo o limite de Bogomol'nyi para a energia, consideramos a imposição da autodualidade para a obtenção do potencial de Higgs que satisfaz a tal limite.

# Introdução

O teorema de Nöether é a base para a dedução de quantidades conservadas que possuem significado físico de importância, entretanto cargas topológicas são quantidades tais que as leis de conservação associadas não dependem das equações de movimento, ou em outras palavras, do teorema de Nöether. Sólitons, por exemplo, são soluções de equações de movimento não-lineares que possuem cargas topológicas e, examinando alguns modelos, encontramos algumas características especiais. Em particular, encontramos que a energia de tal configuração de campo é limitada pela magnitude de alguma quantidade topológica conservada  $Q$ , ou seja,

$$E \geq |Q|. \quad (1.1)$$

Em segundo lugar, as configurações de campo que satisfazem tal limite, isto é,  $E = Q$ , são uma classe de soluções de equações de primeira ordem que satisfazem as equações de movimento. Estas são obtidas através do teorema de Nöether que, por sua vez, traduz as simetrias da Lagrangiana. Em outras palavras, isso quer dizer que essas novas equações de primeira ordem não representam novas simetrias da Lagrangiana porquanto que as mesmas já estão embutidas nas equações do movimento. A desigualdade (1.1) é referenciada como o limite de Bogomol'nyi [24] da teoria sendo que as equações de primeira ordem que a satisfazem são chamadas equações de Bogomol'nyi ou equações de autodualidade. As relações de Bogomol'nyi compreendem as equações auto-duais e o limite (1.1).

Trabalhos anteriores mostram a existência de uma relação entre o limite de Bogomol'nyi

mol'nyi e a supersimetria estendida<sup>1</sup>, a saber: essa extensão supersimétrica produz o potencial de Higgs necessário para encontrar o limite de Bogomol'nyi da teoria. Uma explicação para a relação entre a existência do limite de Bogomol'nyi para teorias com supersimetria estendida foi dado por Hlousek e Spector [21] em (1992) [20]; eles afirmam que, em (2+1) e (3+1) dimensões, uma teoria supersimétrica N=1 com carga topológica automaticamente possui uma supersimetria estendida e um limite de Bogomol'nyi (sendo a carga central da supersimetria estendida igual a carga topológica da teoria) [21, 20]. A seguir, trataremos mais detalhadamente estas questões.

## 1.1 Relações de Bogomol'nyi

*Vórtice* é a denominação usada para soluções solitônicas ou topológicas com simetria radial no espaço em (2+1) dimensões. O modelo Higgs Abelianamente apresenta vórtices não-carregados investigados pela primeira vez por Nielsen e Olesen em 1973 [27] e, independentemente, em 1990 Jackiw e Weinberg [28] e Hong *et al* [29] mostram a existência de vórtices autoduais no modelo de Chern-Simons<sup>2</sup>. Como exemplo das relações de Bogomol'nyi, estudamos abaixo as soluções de ambos os modelos.

### 1.1.1 Vórtices de Nielsen-Olesen

A densidade Lagrangiana do modelo Higgs Abelianamente é a seguinte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^*D_\mu\phi - U \quad (1.2)$$

onde  $\phi$  é um campo escalar complexo e o potencial de Higgs  $U$  é escolhido tal que

$$U = \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2.$$

---

<sup>1</sup>Veja, por exemplo, [25] e posteriormente [26] em (1994).

<sup>2</sup>Para uma descrição detalhada sobre sólitons veja [30].

Definimos ainda a derivada covariante  $D_\mu$  como

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \quad (1.3)$$

sendo que usamos a métrica  $\eta^{\mu\nu} = (+ - -)$ . A equação do movimento para o campo de gauge é facilmente calculada dando como resultado

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (1.4)$$

onde a corrente conservada  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$  é dada por

$$J^\mu = -\frac{ie}{2} (\phi^* D^\mu\phi - \phi D^\mu\phi^*). \quad (1.5)$$

O tensor densidade de energia-momentum relacionado a (1.2) pode ser calculado variando a ação no espaço curvo com respeito à métrica  $g_{\mu\nu}$  e depois tomando  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ . Podemos mostrar, então, que  $T_{\mu\nu}$  é dado por:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}F^\alpha_\nu + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*D_\nu\phi + D_\nu\phi^*D_\mu\phi) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (1.6)$$

A componente  $T_{00}$  integrada em todo o espaço fornece a energia positiva definida relacionada a (1.2), a saber:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2}(B^2 + \mathbf{E}^2) + \frac{1}{2}(D_0\phi)^2 + \frac{1}{2}D_i\phi^*D_i\phi + \frac{e^2}{8}(|\phi|^2 - v^2)^2 \right\}. \quad (1.7)$$

Podemos escolher consistentemente, para o modelo em questão,  $A_0 = 0$ <sup>3</sup> e ainda, para as configurações estáticas que estamos interessados, nenhum campo deve depender do tempo. Por tanto, fazendo uso da seguinte relação (que pode ser verificada substituindo

---

<sup>3</sup>Para soluções estáticas, escolher  $A_0 = 0$  implica em  $\rho = 0$ . Podemos verificar isso calculando a componente  $J^0$  de (1.5). Ou seja, nossos vortices não possuem carga elétrica. Na realidade, isso só pode ser feito porque essa escolha de gauge satisfaz a equação do movimento para  $A_0$ , ou seja, a Lei de Gauss [componente temporal de (1.4)].

a definição 1.5):

$$\frac{1}{2}D_i\phi^*D_i\phi = \frac{1}{2}|(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \pm \frac{1}{2e}\varepsilon_{ij}\partial_i J_j \mp \frac{e}{2}B|\phi|^2, \quad (1.8)$$

reescrevemos a equação para a energia [eq.(1.7)] da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2)]^2 \pm \frac{e}{2} B (|\phi|^2 - v^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp \frac{e}{2} B |\phi|^2 \right\} \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \pm \frac{e}{2} v^2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2x (-B) + \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2} [B \mp \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2)]^2 + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \right\} \\ &\quad \pm \left( -\frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a componente vetorial de  $J^\mu$  (1.5). Note que reescrevemos a energia como sendo a soma de quantidades positivas mais um termo que vem a ser interpretado como o fluxo de campo magnético, ou seja,

$$\Phi_B = - \int_{-\infty}^{\infty} d^2x B.$$

Uma vez que estamos interessados somente em configurações de energia finita, a integral de linha da corrente vetorial deve se anular. Isso se deve às componentes espaciais da derivada covariante que se anulam no infinito. Assim, podemos escrever

$$\mathcal{E} \geq \frac{e}{2} v^2 |\Phi_B|. \quad (1.10)$$

Esse é o limite de Bogomol'nyi da teoria e ele é atingido quando os campos obedecem as seguintes equações de autodualidade (também conhecidas como *equações de Bogomol'nyi*):

$$B = \pm \frac{e}{2} (|\phi|^2 - v^2) \quad (1.11)$$

$$D_1\phi = \mp iD_2\phi \quad (1.12)$$

onde o sinal superior (inferior) corresponde a um valor positivo (negativo) de  $\Phi_B$ .

No limite de Bogomol'nyi os vórtices não interagem [31] e, no caso específico dos vórtices de Nielsen-Olesen, também não possuem carga elétrica ( $\rho = 0$ ) [27].

### 1.1.2 O modelo Chern-Simons-Higgs

Diferentemente dos vórtices de Nielsen-Olesen, os vórtices no modelo de Chern-Simons (CS) são eletricamente carregados e, além disso, o potencial de Higgs agora é de sexta ordem. Um potencial desse tipo cria condições também para soluções não-topológicas embora, neste caso, o fluxo magnético não seja quantizado [28, 29, 32, 25].

Vamos aqui adotar um procedimento ligeiramente diferente da seção anterior, *i.e.*, vamos deixar que as equações de autodualidade indiquem o potencial de Higgs ( $U$ ) que satisfaça o limite de Bogomol'nyi. Embora simples, tal procedimento pode ajudar na predição de potenciais para modelos que admitam autodualidade.

O modelo de Chern-Simons Higgs tem como densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\kappa\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu F_{\nu\rho} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^*D_\mu\phi - U \quad (1.13)$$

A equação do movimento para o campo de gauge nesse caso fica:

$$\kappa F^\mu = J^\mu \quad (1.14)$$

onde  $F^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho}$  e  $J^\mu$  é o mesmo que em (1.5).

A componente zero da equação do movimento é a lei de Gauss, nesse caso modificada pelo termo de Chern-Simons, *i.e.*,

$$-\kappa B = \rho \quad (1.15)$$

que integrada em todo o espaço fornece uma relação entre o fluxo magnético e a carga topológica mostrando que, nesse caso, os vórtices são carregados. Matematicamente,

$$|\Phi_B| = |Q|/\kappa. \quad (1.16)$$

O tensor energia-momentum relacionado a (1.13) é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi^*D_\nu\phi + D_\nu\phi^*D_\mu\phi) - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (1.17)$$

Notemos que não aparece explicitamente nenhuma contribuição do termo de Chern-Simons para  $T_{\mu\nu}$  uma vez que esse termo é topológico e não depende da métrica [33]. A energia é dada simplesmente por:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} d^2x \left\{ \frac{1}{2}|D_0\phi|^2 + \frac{1}{2}D_i\phi^*D_i\phi + U \right\}. \quad (1.18)$$

Como na seção anterior, podemos reescrever a energia tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \int d^2x \left\{ \frac{1}{2|\phi|^2} \left| \phi^*D_0\phi \mp i\sqrt{2U|\phi|^2} \right|^2 \pm \frac{\sqrt{2U}}{e} \frac{J_0}{|\phi|} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp \frac{\epsilon}{2} B |\phi|^2 \right\} \mp \frac{1}{e} \oint_{r \rightarrow \infty} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Note que o segundo termo na equação acima força o campo magnético  $B (= -J_0/\kappa)$  a se anular sempre que  $\phi$  o faz. Tal situação é responsável por manter os campos dentro de uma região toroidal e não como nos vórtices de Nielsen-Olesen, onde os campos são mais intensos no centro do vórtice. Esse termo é fisicamente relevante por estabilizar as soluções não-topológicas do modelo<sup>4</sup>. Como estamos interessados em soluções que possuam o limite de Bogomol'nyi e fluxo de campo magnético como limite da energia, acrescentamos o termo  $\pm \frac{\epsilon}{2} B(v^2 - v^2)$  à equação acima, tal que a reescrevemos como (já sem a integral de linha):

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{ev^2}{2} |\Phi_B| + \int d^2x \left\{ \frac{1}{2|\phi|^2} \left| \phi^*D_0\phi \mp i\sqrt{2U|\phi|^2} \right|^2 \pm \frac{\sqrt{2U}}{e} \frac{J_0}{|\phi|} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} |(D_1 \pm iD_2)\phi|^2 \mp \frac{\epsilon}{2} B (|\phi|^2 - v^2) \right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

<sup>4</sup>Podemos comparar esse termo com  $\kappa^2 B^2/4e^2|\phi|^2$  obtido por Jackiw *et al* [28, 32] para um potencial de Higgs de sexta ordem. Na realidade, reobtemos esse termo quando consideramos configurações de energia mínima.

Impondo as seguintes condições de autodualidade:

$$\begin{aligned}\phi^* D_0 \phi &= \pm i \sqrt{2|\phi|^2 U} \\ D_1 \phi &= \mp i D_2 \phi\end{aligned}\tag{1.21}$$

e usando (1.15) ficamos com

$$\mathcal{E} = \frac{e}{2} v^2 |\Phi_B| \pm \int d^2x \left( \frac{e}{2} (v^2 - |\phi|^2) - \sqrt{\frac{2U}{|\phi|^2}} \kappa \right) B.\tag{1.22}$$

Para configurações de campo não-triviais ( $B(x) \neq 0$ ) atingimos o limite de Bogomol'nyi,  $\mathcal{E} = \frac{e}{2} v^2 |\Phi_B|$ , quando

$$U(|\phi|^2) = \frac{e^4}{8\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2\tag{1.23}$$

Esse é o potencial de Higgs considerado na literatura [28, 29, 32, 34] para se encontrar vórtices no modelo. A primeira eq. (1.21) pode ser manipulada para produzir uma condição de autodualidade em termos de  $J_0$ , *i.e.*,

$$J_0 = \pm e \sqrt{2|\phi|^2 U}.\tag{1.24}$$

Assim, usando mais uma vez (1.15), o potencial como dado em (1.23) substituído acima implica em

$$B = \pm \frac{e^3}{2\kappa^2} |\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2),\tag{1.25}$$

que está de acordo com a literatura [28, 29, 32, 34]. Note ainda que nesse modelo surge um vínculo sobre o campo de gauge, a saber,  $A_0$  está relacionado ao campo magnético por meio de (1.15) tal que, usando a componente temporal de (1.5), ficamos com:

$$A_0 = \frac{\kappa}{e^2} \frac{B}{|\phi|^2}.\tag{1.26}$$

Isso implica, é claro, que a escolha do gauge de radiação ( $A_0 = 0$ ) neste caso é proibida.

Esse modelo possui soluções do tipo vórtice topologicamente estáveis para as quais

$|\phi| \rightarrow v$  quando  $x \rightarrow \infty$  e também soluções não-topológicas para as quais  $\phi \rightarrow 0$  assintoticamente (veja [28, 29, 32, 25, 34]).

## 1.2 Explicando a relação entre a supersimetria e o limite de Bogomol'nyi

É conhecido que a álgebra de supersimetria estendida impõe uma relação entre a energia e a carga central de qualquer configuração de campo [35, 36]. Em (2+1) dimensões as supercargas  $\mathcal{Q}_\alpha^L$  são espinores reais de duas componentes, onde  $\alpha$  é um índice espinorial e  $L, M = 1, 2$  são índices internos de supersimetria. A relação de comutação entre as cargas da álgebra estendida é [35, 36, 37]:

$$\{\mathcal{Q}_\alpha^L, \mathcal{Q}_\beta^M\} = 2\delta^{LM}P_{\alpha\beta} + C\varepsilon^{LM}\varepsilon_{\alpha\beta} \quad (1.27)$$

onde  $P_{\alpha\beta}$  é o biespinor de energia-momentum que comuta com os geradores da supersimetria.

Sendo o comutador acima hermitiano, seu traço é positivo semi-definido. Como consequência,

$$M \geq |C| \quad (1.28)$$

onde  $M$  é o autovalor do operador de Casimir<sup>5</sup> do grupo de Poincaré correspondente à massa de repouso. A desigualdade acima tem a forma de um limite de Bogomol'nyi, mas surge para qualquer carga central em uma álgebra de supersimetria com ou sem carga topológica.

Portanto, se temos em nossa teoria uma carga topológica, esperamos que exista um

---

<sup>5</sup>Por definição, um operador que comuta com todos os elementos de um grupo de Lie é dito ser um operador de Casimir daquele grupo; o Casimir é então o autovalor desse operador [38]. Sendo  $P^2$  o operador de Casimir, tendo como autovalor  $M^2$ , as representações irredutíveis da álgebra de supersimetria são de massas iguais.

limite de Bogomol'nyi, tal que

$$M \geq |\Phi|$$

a menos de uma constante multiplicativa, sendo  $\Phi$ , em geral, um fluxo de campo magnético<sup>6</sup>. Em teorias com carga topológica, vemos que esse fluxo é proporcional à carga topológica como, por exemplo, na seção anterior onde encontramos que  $\Phi = Q/\kappa$ . Sendo assim, podemos escrever

$$M \geq |Q| \tag{1.29}$$

a menos de constantes. Isso quer dizer que a extensão supersimétrica desses modelos com carga topológica, que apresentam limite de Bogomol'nyi acima, obedecem à equação (1.27) como consequência de podermos ter uma corrente topológica conservada independente das equações de movimento e podermos associar, a essas correntes, cargas topológicas que fazem o papel de  $\mathcal{Q}_\alpha^2$  [20].

Hlousek e Spector afirmaram que qualquer teoria supersimétrica com uma carga topológica em (2+1) e (3+1) dimensões possui um limite de Bogomol'nyi (1.29) bem como uma equação de Bogomol'nyi em forma de supermultiplete [21]. Segundo eles, isso é devido a presença automática de uma álgebra de supersimetria estendida (1.27) nas teorias supersimétricas com uma carga topológica e, ainda mais, que essa carga topológica (1.29), com as devidas normalizações, é exatamente a carga central da teoria (1.28). Esses fatos foram primeiro observados em modelos particulares por Olive e Witten (1978) [39] e Lee *et al* (1990) [25].

---

<sup>6</sup>Veja a seção anterior, onde  $M = \mathcal{E}$  (em unidades de  $\hbar=c=1$ )

## Capítulo 2

# Supersimetria $N=2$ e o modelo Maxwell-Chern-Simons com acoplamento não-mínimo

Neste capítulo, construímos uma versão supersimétrica do modelo Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (CSKR) com um termo de acoplamento não-mínimo com a matéria em quatro dimensões. Adotando um procedimento de redução dimensional, baseado no formalismo desenvolvido por Scherk, obtemos um termo de Chern-Simons genuíno (diagonal em três dimensões) com supersimetria estendida  $N=2$ .

# Introdução

Modelos de gauge supersimétricos planares vêm sendo bastante investigados nestes últimos anos em vista das várias propriedades interessantes que esses modelos exibem. Entre suas características mais relevantes, podemos assinalar que eles possuem massa invariante de gauge [40, 41, 42], são finitos no limite ultravioleta [43, 44, 45, 46] e ainda que possuem uma conexão entre a supersimetria estendida e a existência de soluções solitônicas autoduais [26]

Alguns anos atrás, um modelo Maxwell-Chern-Simons (MCS) com momento magnético anômalo foi proposto [2] onde equações autoduais (equações de Bogomol'nyi) puderam ser encontradas e configurações de vórtice apareceram quando certas relações entre os parâmetros do modelo foram estabelecidas [17, 47, 19]. Comumente se afirma que existe uma relação entre o aparecimento da autodualidade e a extensão supersimétrica  $N = 2$  do modelo [20].

Nesse sentido, P. Navrátil [48] apresentou um modelo MCS  $N = 2$  com as características acima. O trabalho recai sobre uma escolha especial de parâmetros a fim de estender a supersimetria. Nesse capítulo também objetivamos uma versão estendida desse modelo, entretanto, ao invés de escrevermos nossa ação diretamente em  $(2 + 1)$  dimensões e vincularmos seus parâmetros para atingirmos a supersimetria  $N = 2$ , primeiro formulamos o modelo  $N = 1$  em  $D = 4$  dimensões sem tais vínculos acrescentando um termo BF [49, 50, 51]. Tendo em vista uma interação como a que estamos tratando em  $D = 3$ , consideramos a matéria acoplada não minimamente a um potencial de gauge *2-forma* em  $D = 4$  com independência completa entre as constantes de acoplamento. Após uma redução dimensional conveniente da ação em campos componentes de  $(3 + 1)$

para  $(2 + 1)$  dimensões, ficamos com um modelo de gauge  $N = 2$  com um termo de Chern-Simons e com interação não mínima com o setor de matéria sem vínculos nas constantes de acoplamento.

Como discutimos adiante, nosso processo de redução dimensional tem que ser complementado por identificações convenientes de alguns campos, identificações essas que não quebram as supersimetrias do modelo. Isso é necessário para assegurar que um termo de Chern-Simons genuíno apareça em três dimensões.

## 2.1 A ação supersimétrica $N=1-D=4$

Campos vetoriais de gauge e a 2-forma de gauge são, de acordo com o conteúdo dos supercampos da supersimetria  $N=1, D=4$ , acomodados em um supermultiplete escalar real e em um supermultiplete espinorial quiral, respectivamente. Neste sentido, iniciamos com a seguinte ação em supercampos:

$$S_{4D} = \int d^4x d^2\theta \left\{ -\frac{1}{8} \mathcal{W}^a \mathcal{W}_a + d^2\bar{\theta} \left[ -\frac{1}{2} \mathcal{G}^2 + \frac{1}{2} m \mathcal{V} \mathcal{G} + \frac{1}{16} \bar{\Phi} e^{2h\mathcal{V}} \Phi e^{4g\mathcal{G}} \right] \right\}, \quad (2.1)$$

onde  $m$  é um parâmetro de massa,  $h$  e  $g$  são constantes de acoplamento e  $\Phi$ ,  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{V}$  são respectivamente um supercampo escalar complexo quiral, uma intensidade de supercampo e uma superconexão de gauge:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{(-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu)} (\varphi(x) + \theta^a \chi_a(x) + \theta^2 S(x)), \quad \bar{D}_a \Phi = 0, \\ \mathcal{W}^a &= -\frac{1}{4} \bar{D}^2 D^a \mathcal{V}, \\ \mathcal{V} &= C(x) + \theta^a b_a(x) + \bar{\theta}_{\dot{a}} \bar{b}^{\dot{a}} + \theta^2 H(x) + \bar{\theta}^2 H^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta} A_\mu + \\ &\quad \theta^2\bar{\theta} \left( \bar{\lambda} - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu b(x) \right) + \bar{\theta}^2\theta \left( \lambda - \frac{i}{2} \sigma^\mu \partial_\mu \bar{b}(x) \right) + \theta^2\bar{\theta}^2 \left( \Delta(x) - \frac{1}{4} \square C(x) \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aqui  $D_a$  e  $\bar{D}_{\dot{a}}$  são derivadas covariantes de supersimetria

$$D_a = \partial_a - i\sigma_{a\dot{a}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu$$

$$\bar{D}_{\dot{a}} = -\partial_{\dot{a}} + i\theta^a \sigma_{a\dot{a}}^\mu \partial_\mu. \quad (2.3)$$

e  $\mathcal{G}$  é definido em termos de um supercampo espinorial quiral,

$$\mathcal{G} = \frac{i}{8} \left( D^a \Sigma_a - \bar{D}_{\dot{a}} \bar{\Sigma}^{\dot{a}} \right)$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma_a = & \psi_a(x) + \theta^b \Omega_{ba}(x) + \theta^2 \left[ \xi_a(x) + i\sigma_{a\dot{a}}^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{a}}(x) \right] - i\theta \sigma^{\mu\bar{\theta}} \partial_\mu \psi_a(x) \\ & - i\theta \sigma^\mu \bar{\theta} \theta^b \partial_\mu \Omega_{ba}(x) - \frac{1}{4} \theta^2 \bar{\theta}^2 \square \psi_a(x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

tal que  $\bar{D}_{\dot{a}} \Sigma_a = 0$ .

As representações irredutíveis do grupo de Lorentz, que estão contidas em  $\Omega_{ba}(x)$ , podem ser separadas como segue:

$$\Omega_{ba} = \epsilon_{ba} \rho(x) + (\sigma^{\mu\nu})_{ba} \mathcal{B}_{\mu\nu}(x),$$

sendo  $\rho(x)$  e  $\mathcal{B}_{\mu\nu}(x)$  campos complexos definidos como:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= P(x) + iM(x), \\ \mathcal{B}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{4} \left[ B_{\mu\nu}(x) - i\tilde{B}_{\mu\nu}(x) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

com

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^{\alpha\beta}(x). \quad (2.6)$$

Definido dessa maneira,  $\mathcal{B}_{\mu\nu}$  exhibe sua natureza autodual:

$$\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}_{\mu\nu} = i\mathcal{B}_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Quanto a  $B_{\mu\nu}$ , ele é uma 2-forma a qual, no modelo Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond

(CSKR) [52, 53]<sup>1</sup>, aparece explicitamente quando projetamos a eq.(2.1) em componentes (por isso nos referimos a  $\mathcal{G}$  como um multiplete tensorial [55]) O papel dos outros campos componentes introduzidos acima se torna claro depois. Por hora vamos mencionar que o número de graus de liberdade não é, na verdade, tão grande quanto parece. Para exemplificar, sabemos que tanto  $\Phi$  como  $\Sigma_a$  são supercampos quirais e a superconexão  $\mathcal{V}$  quando sujeita ao gauge de Wess-Zumino toma a forma:

$$\mathcal{V} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \theta^2\bar{\theta}\lambda + \bar{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\bar{\theta}^2\Delta(x). \quad (2.8)$$

Entretanto, anteriormente o escrevemos em sua forma mais geral (2.2) somente porque algumas das variações de supersimetria exibem explicitamente os campos compensadores. Como é usual, a intensidade de campo  $F_{\mu\nu}$  junto com o gaugino  $\lambda$  e o campo auxiliar  $\Delta$  são encontradas apenas numa representação da álgebra de supersimetria. De fato, o uso de uma expressão completa para  $\mathcal{V}$  torna mais fácil a tarefa de determinar as propriedades das transformações de supersimetria dos campos componentes e nos permite encontrar as identificações de campos necessárias para formular uma teoria de Chern-Simons em 3D. Notemos também que, na ação, o supercampo espinorial (2.4) aparece somente através de  $\mathcal{G}$ , o qual carrega metade dos graus de liberdade de  $\Sigma_a$ . Em outras palavras,  $\psi_a$  não aparece, de  $\rho$  aparece somente a componente  $M$  e, da mesma maneira,  $B_{\mu\nu}$  aparece somente através de  $\tilde{G}_\mu$  tornando claro quais são os graus de liberdade relevantes.

A expansão em campos componentes de  $\mathcal{G}$  é:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & -\frac{1}{2}M + \frac{i}{4}\theta^a\xi_a - \frac{i}{4}\bar{\theta}_{\dot{a}}\bar{\xi}^{\dot{a}} + \frac{1}{2}\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\tilde{G}_\mu \\ & + \frac{1}{8}\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\bar{\xi}^{\dot{a}} - \frac{1}{8}\theta^2\sigma_{a\dot{a}}^\mu\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\xi^a - \frac{1}{8}\theta^2\bar{\theta}^2\Box M, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde  $G_{\mu\nu\kappa}$  e seu dual,  $\tilde{G}_\mu$ , são dados por:

$$G_{\alpha\mu\nu} = \partial_\alpha B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \partial_\nu B_{\alpha\mu},$$

---

<sup>1</sup>Os modelos de Cremmer-Scherk e Kalb-Ramond são duais no sentido que possuem a mesma equação master, como está mostrado na ref. [54] através de redução dimensional.

$$\tilde{G}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G^{\nu\alpha\beta}. \quad (2.10)$$

Quando tomamos o superpotencial espinorial  $\Sigma_a$  no gauge de Wess-Zumino, a parametrização descrita acima para  $\mathcal{G}$  tem uma certa vantagem no sentido de que os graus individuais de liberdade carregados por  $\Sigma_a$  podem ser agrupados em combinações convenientes para que correspondam somente aos campos físicos.

Antes de analisarmos a ação (2.1) em termo dos campos componentes, notemos que o acoplamento entre a matéria e os campos de gauge exhibe a exponencial usual do superpotencial  $\mathcal{V}$ , bem como uma exponencial do supercampo  $\mathcal{G}$ . Essa última tem mais conseqüências uma vez que carrega campos componentes invariantes de gauge que podem aparecer na ação em todas as ordens e não podem ser reabsorvidas por redefinições dos campos, como é o caso do campo  $M$  que aparece na expansão de  $\mathcal{G}$ .

Finalmente, escrevemos abaixo  $S_{4D}$  em componentes:

$$\begin{aligned} S_{4D} = & \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{3!} G_{\mu\alpha\beta} G^{\mu\alpha\beta} + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\mu \partial_\nu B_{\alpha\beta} \right. \\ & + 2\Delta^2 + \frac{i}{2} \bar{\Lambda} \Gamma^\mu \partial_\mu \Lambda + \partial_\mu M \partial^\mu M + \frac{i}{4} \bar{\Xi} \Gamma^\mu \partial_\mu \Xi + im \bar{\Lambda} \Gamma_5 \Xi - 4m M \Delta \\ & + e^{-2gM(x)} \left[ \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi^* + \frac{i}{4} \bar{X} \Gamma^\mu \nabla_{\mu 5} X - \frac{g^2}{2} \partial_\mu M (\bar{X} \Gamma_L \Gamma^\mu \Xi \varphi^* + \bar{\Xi} \Gamma_L \Gamma^\mu X \varphi) \right. \\ & + \frac{g}{2} (\bar{\Xi} \Gamma^\mu \Gamma_R X \nabla_\mu \varphi + \bar{X} \Gamma_L \Gamma^\mu \Xi \nabla_\mu \varphi^*) - i \frac{g^2}{4} |\varphi|^2 \bar{\Xi} \Gamma^\mu \partial_\mu \Xi - \frac{g^2}{4h} \bar{\Xi} \Gamma_5 \Gamma^\mu \mathcal{J}_\mu \Xi \\ & + |\varphi|^2 (2h\Delta + igh \bar{\Lambda} \Gamma_5 \Xi - g^2 \partial_\mu M \partial^\mu M) - h(\varphi \bar{\Lambda} \Gamma_R X + \varphi^* \bar{\Lambda} \Gamma_L X) \\ & \left. + \left( S - \frac{ig}{2} \bar{X} \Gamma_L \Xi + \frac{g^2}{4} \bar{\Xi} \Gamma_L \Xi \varphi \right) \left( S^* + \frac{ig}{2} \bar{X} \Gamma_R \Xi + \frac{g^2}{4} \bar{\Xi} \Gamma_R \Xi \varphi^* \right) \right] \left. \right\}, \quad (2.11) \end{aligned}$$

onde organizamos os campos fermiônicos para formarem espinores de Majorana de quatro componentes da seguinte maneira:

$$\Xi(x) \equiv \begin{pmatrix} \xi_a(x) \\ \bar{\xi}^{\dot{a}}(x) \end{pmatrix}, \quad X \equiv \begin{pmatrix} \chi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \bar{\lambda}^{\dot{a}} \end{pmatrix},$$

e a corrente  $\mathcal{J}_\mu$  sendo dada por

$$\mathcal{J}_\mu = -\frac{i\hbar}{2} (\varphi^* \nabla_\mu \varphi - \varphi \nabla_\mu \varphi^*), \quad (2.12)$$

com

$$\nabla_\mu \varphi = \left( \partial_\mu + ihA_\mu + ig\tilde{G}_\mu \right) \varphi. \quad (2.13)$$

Ainda na ação aparece uma derivada covariante acoplada com  $\Gamma_5$  que é dada por

$$\nabla_{\mu 5} X = \left( \partial_\mu - ihA_\mu \Gamma_5 - ig\tilde{G}_\mu \Gamma_5 \right) X. \quad (2.14)$$

É interessante ver que os três primeiros termos da Lagrangiana (2.11) formam a parte bosônica do modelo CSKR e, veremos nas seções seguintes, que o termo misto que envolve  $A_\mu$  e  $B_{\mu\nu}$  pode ser manipulado para produzir o termo CS usual em 3D. Notemos que o primeiro termo entre colchetes é a parte cinética que corresponde ao acoplamento não-mínimo da matéria escalar com os campos de gauge do modelo CSKR. Esses quatro termos definem uma teoria de gauge invariante e serão cuidadosamente analisados já que servem de guia para conectar ambos os grupos de gauge, presentes no modelo através de  $A_\mu$  e  $B_{\mu\nu}$ .

Como estamos interessados em escrever espinores de quatro componentes, escolhemos a seguinte representação para matrizes  $\Gamma^\mu$  em (3+1)D:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{ab}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que a ação é independente de tal escolha. Na próxima seção adotamos uma representação de Majorana para fazermos a redução dimensional.

Abaixo escrevemos as variações de supersimetria dos campos em termos de espinores de quatro componentes:

$$\delta\varphi = \varepsilon^a \chi_a,$$

$$\begin{aligned}
\delta\chi_a &= 2\varepsilon_a S - 2i\sigma_{a\dot{a}}^\mu \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} D_\mu \varphi, \\
\delta S &= -i\bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} D_\mu \chi_a + 2h\bar{\lambda}_{\dot{a}} \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \varphi;
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\xi}^{\dot{a}} - \frac{i}{2} \varepsilon^a \xi_a, \\
\delta \xi_a &= 2\sigma_{a\dot{a}}^\mu \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \left( \partial_\mu M - i\tilde{G}_\mu \right), \\
\delta \tilde{G}^\mu &= \frac{i}{2} \varepsilon^b (\sigma^{\mu\nu})_b{}^a \partial_\nu \xi_a + \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{b}} (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \partial_\nu \bar{\xi}^{\dot{a}};
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\delta A^\mu &= \varepsilon^a \sigma_{a\dot{a}}^\mu \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \lambda_a, \\
\delta \lambda_a &= 2\varepsilon_a \Delta + \frac{i}{2} \sigma_{a\dot{b}}^\nu \bar{\sigma}^{\mu\dot{b}b} \varepsilon_b F_{\mu\nu}, \\
\delta \Delta &= -\frac{i}{2} \varepsilon^a \sigma_{a\dot{a}}^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}_{\dot{a}} - \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} \partial_\mu \lambda_a.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Está claro acima que o primeiro e segundo grupos de equações formam respectivamente duas representações irredutíveis da álgebra de supersimetria enquanto que o último, juntamente com o termo

$$\delta F_{\mu\nu} = \varepsilon^a \sigma_{[a\dot{a}} \partial_{\mu]} \bar{\lambda}^{\dot{a}} - \bar{\varepsilon}_{\dot{a}} \bar{\sigma}^{\dot{a}a} \partial_{[\mu]} \lambda_a, \tag{2.18}$$

encerram outra representação. Por outro lado,  $A_\mu$  transforma-se com os campos compensadores  $b$  e  $\bar{b}$  mas podemos sempre escolher o gauge de Wess-Zumino para eliminá-los. De fato, não tem nenhuma importância exibir as transformações supersimétricas dos campos compensadores já que eles são nulos nesse gauge.

Abaixo escrevemos as variações dos campos em termos dos espinores de quatro componentes:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \bar{\mathcal{E}} \Gamma_L X \\
\delta X &= 2(S - i\Gamma^\mu D_\mu \varphi^*) \Gamma_L \mathcal{E} + 2(S^* - i\Gamma^\mu D_\mu \varphi) \Gamma_R \mathcal{E} \\
\delta S &= -i\bar{\mathcal{E}} \Gamma^\mu \Gamma_L D_\mu X + 2h\bar{\mathcal{E}} \Gamma_R \Lambda \varphi
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma_5 \Xi \\
\delta \Xi &= 2\Gamma^\mu \left( \Gamma_5 \partial_\mu M - i\tilde{G}_\mu \right) \mathcal{E} \\
\delta \tilde{G}^\mu &= \frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma^{\mu\nu} \partial_\nu \Xi
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\delta F_{\mu\nu} &= \bar{\mathcal{E}} \Gamma^{[\nu} \Gamma_5 \partial^{\mu]} \Lambda \\
\delta \Lambda &= 2\Delta \mathcal{E} - \frac{i}{2} \Gamma_5 \Gamma^\mu \Gamma^\nu F_{\nu\mu} \mathcal{E} \\
\delta \Delta &= -\frac{i}{2} \bar{\mathcal{E}} \Gamma^\mu \partial_\mu \Lambda,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$\mathcal{E}$  sendo o parâmetro (infinitesimal) espinorial de Majorana da transformação supersimétrica, dado por:

$$\mathcal{E} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_a \\ \bar{\varepsilon}^{\dot{a}} \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Redução dimensional de D=4 para D=3

A partir de agora identificamos os índices de Lorentz quadridimensionais por  $\hat{\mu} = 0, 1, 2, 3$ , enquanto que no espaço-tempo tridimensional,  $\mu = 0, 1, 2$ .

Vamos primeiro realizar a redução dimensional do setor bosônico da ação (2.11). Para isso, exigimos que os campos em D=3 sejam independentes da coordenada  $x_3$  [56, 57], *i.e.*,

$$\partial_3(\text{campos}) = 0. \tag{2.22}$$

Por outro lado, assumimos que a componente  $\hat{\mu} = 3$  dos campos vetoriais do espaço D=4 são tomadas como campos escalares independentes no espaço D=3. Nesse caso, a invariância de Poincaré SO(3,1) está sendo quebrada em um produto direto da invariância de Poincaré SO(2,1) e um fator U(1). Assim,  $A_\mu$  está na representação vetorial do grupo de Lorentz e é um singlete desse grupo U(1) associado, enquanto que  $A_3$  fica sendo um campo escalar independente. Os graus de liberdade relevantes (fora da camada-de-massa) de  $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  são  $B_{\mu\nu}$  e  $B_{\mu 3}$ . Portanto, no espaço tridimensional fazemos as seguintes

identificações:

$$\begin{aligned}
N &\equiv A^3, \quad B^\mu \equiv B^{3\mu}, \quad B^{\mu\nu} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\rho} Z_\rho, \\
\partial_\mu Z^\mu &= -\tilde{G}^3, \quad \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu = G^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

com  $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \equiv \varepsilon^{3\mu\nu\rho}$ . Em vista disso, na redução dimensional os termos bosônicos reduzem-se da maneira abaixo:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6} G_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} G^{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}} &\longrightarrow -\frac{1}{2} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \partial_\mu Z^\mu \partial_\nu Z^\nu, \\
-\frac{1}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\longrightarrow -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N, \\
m\varepsilon_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}\hat{\lambda}} A^{\hat{\mu}} \partial^{\hat{\nu}} B^{\hat{\rho}\hat{\lambda}} &\longrightarrow 2m\varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu B^\rho + 2mN \partial_\mu Z^\mu, \\
\nabla_\mu \phi^* \nabla^\mu \phi &\longrightarrow \nabla_\mu \phi^* \nabla^\mu \phi - (hN - g\partial_\mu Z^\mu)^2 |\varphi|^2.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Em relação à redução dimensional do setor fermiônico, devemos mencionar que sempre se pode construir uma representação da álgebra de Clifford na forma de um produto tensorial de matrizes de dimensão menor. Usando  $\Gamma^{\hat{\mu}}$  para as matrizes de Dirac em 4D e  $\gamma^\mu$  em 3D, uma escolha conveniente para essas matrizes é a seguinte:

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & -\gamma^\mu \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando  $\gamma^0 \equiv \sigma_y$ ,  $\gamma^1 \equiv i\sigma_x$ , e  $\gamma^2 \equiv i\sigma_z$ , temos uma representação de Majorana tanto em D=4 quanto em D=3. Dessa maneira, um espinor de Majorana em D=4 é real e se divide em um dubleto de espinores de Majorana em D=3.

Antes de reduzirmos o setor fermiônico, notemos que nesta representação os graus de liberdade relevantes dos espinores de quatro componentes se reorganizam segundo

$$\begin{aligned}
X &\rightarrow (\chi, \omega) \\
\Xi &\rightarrow (\xi, \zeta)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\Lambda \rightarrow (\lambda, \eta),$$

o que possibilita a formação dos seguintes espinores de Dirac de duas componentes em 3D:

$$\begin{aligned} X_{\pm} &= \chi \pm i\omega \\ \Xi_{\pm} &= \xi \pm i\zeta \\ \Lambda_{\pm} &= \lambda \pm i\eta \end{aligned} \tag{2.26}$$

Isto é, os férmions de Majorana de duas componentes (por exemplo,  $\chi$  e  $\omega$ ) correspondentes a cada espinor em 4D (por exemplo,  $X$ ) tornam-se completamente independentes após a redução para 3D e, além disso, na ação reduzida eles aparecem como espinores de Dirac na forma particular indicada acima (2.26). De maneira análoga, o parâmetro infinitesimal de supersimetria quebra em dois espinores desassociados

$$\mathcal{E} \rightarrow (\varepsilon, \delta) \longrightarrow \varepsilon_{\pm} = \varepsilon \pm i\delta, \tag{2.27}$$

revelando a existência de duas supersimetrias no modelo reduzido.

## 2.3 O modelo N=2 em D=3

Em termos dos campos bosônicos e dos campos férmions de Dirac definidos acima em D=3, a ação tridimensional fica:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3D} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + 2m\varepsilon^{\mu\nu\alpha}A_{\mu}\partial_{\nu}B_{\alpha} + 2\Delta^2 + (\partial_{\mu}Z^{\mu})^2 \right. \\ &+ \frac{i}{2}\bar{\Lambda}_{-}\not{\partial}\Lambda_{-} + \frac{i}{4}\bar{\Xi}_{-}\not{\partial}\Xi_{-} + \frac{i}{2}m(\bar{\Lambda}_{+}\Xi_{-} - \bar{\Lambda}_{-}\Xi_{+}) + \frac{1}{2}\partial_{\mu}N\partial^{\mu}N \\ &- 4mM\Delta + 2mN\partial_{\mu}Z^{\mu} + \partial_{\mu}M\partial^{\mu}M + e^{-2gM}\left[\nabla_{\mu}\varphi\nabla^{\mu}\varphi^{*} - (hN - g\partial_{\mu}Z^{\mu})^2\varphi\varphi^{*} \right. \\ &+ \frac{1}{4}(hN - g\partial_{\mu}Z^{\mu})\bar{X}_{+}X_{+} + \frac{i}{8}(\bar{X}_{-}\not{\nabla}_{-}X_{-} + \bar{X}_{+}\not{\nabla}_{+}X_{+}) \\ &\left. + \frac{g}{4}\left[(\bar{\Xi}_{-}\gamma^{\mu}X_{-} + \bar{X}_{+}\gamma^{\mu}\Xi_{+})\nabla_{\mu}\varphi - i(\bar{\Xi}_{-}X_{-}\varphi + \bar{X}_{-}\Xi_{-}\varphi^{*})(hN - g\partial_{\mu}Z^{\mu})\right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g^2}{4}\partial_\mu M (\bar{X}_-\gamma^\mu\Xi_-\varphi^* + \bar{\Xi}_-\gamma^\mu X_-\varphi) - i\frac{g^2}{8}\varphi^*\varphi (\bar{\Xi}_-\not{\partial}\Xi_- + \bar{\Xi}_+\not{\partial}\Xi_+) \\
& + \frac{g^2}{4h} \left( \frac{1}{2}(\bar{\Xi}_-\gamma^\mu\mathcal{J}_\mu\Xi_- - \bar{\Xi}_+\gamma^\mu\mathcal{J}_\mu\Xi_+) + \bar{\Xi}_-\Xi_-h(hN - g\partial_\mu Z^\mu)\varphi\varphi^* \right) \\
& + |\varphi|^2 \left( 2h\Delta + \frac{igh}{2}(\bar{\Lambda}_+\Xi_- - \bar{\Xi}_-\Lambda_+) - g^2\partial_\mu M\partial^\mu M \right) - \frac{h}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) \\
& + \left[ S - \frac{ig}{4}\bar{X}_-\bar{\Xi}_+ + \frac{g^2}{8}\varphi\bar{\Xi}_-\bar{\Xi}_+ \right]^2 \Bigg\}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Podemos ver na expressão acima o “termo de Chern-Simons” misto, muito embora não se saiba todo seu significado físico. Ainda assim podemos dizer que o setor bosônico caracteriza uma teoria de gauge estatística que preserva a paridade e que, eventualmente, pode estar relacionada com a supercondutividade à temperatura finita [58, 59]. Neste ponto, devemos chamar a atenção para o campo  $Z_\mu$ , dual da 2-forma  $B_{\mu\nu}$  em três dimensões. Seu termo cinético não é construído de uma intensidade de campo da maneira usual, como é o caso dos campos de gauge vetoriais ordinários. Sua transformação Abelianiana

$$\delta Z_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{[\nu}\xi^{\rho]}$$

mostra que sua parte transversa pode ser anulada por uma escolha de gauge (isso se deve ao fato que apenas sua parte longitudinal se propaga fora da camada-de-massa). Esse tipo de campo não corresponde a qualquer excitação física e, ainda mais, o campo de gauge 2-forma  $B_{\mu\nu}$  associado não apresenta graus de liberdade on-shell em  $D=3$ . Assim, apesar do termo cinético de  $Z_\mu$  propagar apenas a sua parte longitudinal, não se corre o risco de presença de ghosts no espectro, já que nenhuma dinâmica esta associada ao campo  $Z$ . De fato, na aproximação de campos livres, a dinâmica de  $Z$  é completamente determinada pela propagação do escalar físico  $N$ .

Mais à frente encontramos um resultado interessante vindo de uma inspeção mais detalhada da Langrangiana (2.28) e das transformações supersimétricas, sugerindo uma identificação simples entre alguns dos vários campos presentes no modelo. Na verdade, como propomos a seguir, a divergência de  $Z_\mu$ ,  $\tilde{G}_3$ , será identificada como a componente

auxiliar do supercampo de gauge em 3D. Agora, vamos apresentar as transformações de supersimetria que atuam sobre os campos 3D. O multiplete escalar transforma-se como:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_-X_+, \\
\delta S &= -\frac{i}{2}\bar{\varepsilon}_+(\not{D} - ihN)X_+ + h\bar{\varepsilon}_+\Lambda_-\varphi, \\
\delta X_+ &= 2S\varepsilon_+ + 2(hN\varphi - i\not{D}\varphi)\varepsilon_-, \\
\delta X_- &= 2S^*\varepsilon_- + 2(hN\varphi^* - i\not{D}\varphi^*)\varepsilon_+;
\end{aligned} \tag{2.29}$$

as transformações do multiplete vetorial são dadas por:

$$\begin{aligned}
\delta N &= -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_+\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\Lambda_-), \\
\delta\Lambda_\pm &= (2\Delta + i\not{\partial}N)\varepsilon_\pm \pm \gamma_\mu\tilde{F}^\mu\varepsilon_\pm, \\
\delta\Delta &= -\frac{i}{2}(\bar{\varepsilon}_+\not{\partial}\Lambda_+ + \bar{\varepsilon}_-\not{\partial}\Lambda_-), \\
\delta\tilde{F}^\mu &= -\frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}_+\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Lambda_+ - \bar{\varepsilon}_-\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Lambda_-),
\end{aligned} \tag{2.30}$$

e, finalmente, as componentes do multiplete tensorial se transformam de acordo com:

$$\begin{aligned}
\delta M &= \frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_+\Xi_- - \bar{\varepsilon}_-\Xi_+), \\
\delta\Xi_\pm &= \pm 2(\not{\partial}M + i\partial_\mu Z^\mu)\varepsilon_\mp - 2i\gamma_\mu\tilde{G}^\mu\varepsilon_\mp, \\
\delta(\partial_\mu Z^\mu) &= \frac{1}{4}(\bar{\varepsilon}_+\not{\partial}\Xi_- - \bar{\varepsilon}_-\not{\partial}\Xi_+), \\
\delta\tilde{G}^\mu &= -\frac{i}{4}(\bar{\varepsilon}_-\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Xi_+ + \bar{\varepsilon}_+\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda\partial_\nu\Xi_-).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Essas transformações mostram por um lado que  $S_{3D}$  é na verdade supersimétrica N=2 e, por outro lado, elas exibem a chave para obter a Lagrangiana de Chern-Simons tornando manifestos os graus de liberdade para realizar a álgebra de supersimetria estendida.

Uma vez que as leis de transformação N=2 foram obtidas, vamos demonstrar que a ação (2.28) pode ser convenientemente manipulada para nos dar um sistema mais familiar, a saber, a extensão supersimétrica do modelo MCS não-mínimo.

A primeira tentativa natural é associar os dois campos vetoriais de gauge procurando o correspondente fermiônico sem, no entanto, quebrar nenhuma das duas supersimetrias. Fazendo isso chegamos a conclusão que, identificando simplesmente  $A_\mu$  com  $B_\mu$  ( $A_\mu \equiv B_\mu$ ), podemos completar as identificações restantes:

$$N \equiv -M, \quad \Delta \equiv -\frac{1}{2}\tilde{G}^3, \quad \Lambda_\pm \equiv \pm\frac{i}{2}\Xi_\mp \quad (2.32)$$

atingindo assim a conexão entre os dois grupos de gauge iniciais e obtendo, dessa maneira, o modelo MCS supersimétrico  $N = 2$  com acoplamento não-mínimo. Como os dois grupos de gauge se transformam identicamente sob uma transformação de simetria, podemos identificá-los sem quebrar a supersimetria.

A identificação entre  $A_\mu$  e  $B_\mu$  é para ser entendida como parte de nosso ansatz de redução dimensional. Devemos ter mente que nosso objetivo aqui é obter um termo de Chern-Simons genuíno. Isso pode ser feito já com a ação, contanto que nenhuma inconsistência apareça nas transformações de supersimetria para os campos componentes. A álgebra de supersimetria resulta ser consistente com esse ansatz e pode ser visto comparando as eqs. (2.30) e (2.31) juntamente com as identificações (2.32). Chamamos a atenção para o seguinte fato: a não identificação entre  $A_\mu$  e  $B_\mu$  produziria dois modos físicos, a saber, um vetor sem massa e um vetor massivo. Assim, a redução com e sem a identificação desses potenciais leva a dois modelos inequivalentes. Nosso ansatz trabalha no sentido de fazer um mapeamento entre os modelos.

Há ainda um outro ponto que merece ser comentado mais uma vez em relação a identificação dos campos. O modelo original quadridimensional exibe dois fatores  $U(1)$  e o aparecimento do potencial vetorial extra  $B_\mu$  no modelo reduzido compõe uma simetria adicional, cujo parâmetro escalar vem da redução do parâmetro vetorial da simetria Abelian da *2-forma* em quatro dimensões, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \delta B^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \partial^{\hat{\mu}}\xi^{\hat{\nu}} - \partial^{\hat{\nu}}\xi^{\hat{\mu}} \\ \delta B^{3\mu} &= -\partial^\mu\beta \end{aligned}$$

sendo  $\beta \equiv \xi^3$  um parâmetro escalar. Caso não tivéssemos identificado os potenciais, o modelo tridimensional apresentaria uma simetria  $[U(1)]^3$ . Com nosso ansatz, essa simetria para o modelo reduzido mantém ainda uma invariância  $U(1) \times U(1)$ . Claramente, essa identificação impõe também o mesmo entre os parâmetros associados às simetrias Abelianas ligadas a  $A_\mu$  e a  $B_\mu$ , *i.e.*,  $\alpha = \beta$  (sendo  $\delta A_\mu = -\partial_\mu \alpha$ ). Na verdade, a simetria residual do modelo 3D é na realidade uma simetria  $U(1)$  simples, já que podemos fazer uma escolha de gauge sobre  $Z_\mu$  e eliminá-lo de tal forma que os campos de matéria não tenham carga relativa a invariância  $U(1)$  associada a esse potencial de gauge.

A fim de obter a ação 3D com os fatores cinéticos usuais é conveniente redefinir os supercampos e as constantes de acoplamento da eq. (2.1) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V}/\sqrt{3}, & \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}/\sqrt{3} \\ h &\rightarrow \sqrt{3}h, & g &\rightarrow \sqrt{3}g, & m &\rightarrow \frac{3}{4}\kappa. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Feito isso, a eq.(2.1) torna-se:

$$S_{4D} = \int d^4x d^2\theta \left\{ -\frac{1}{24} \mathcal{W}^\alpha \mathcal{W}_\alpha + d^2\bar{\theta} \left[ -\frac{1}{6} \mathcal{G}^2 + \frac{1}{8} \kappa \mathcal{V} \mathcal{G} + \frac{1}{16} \bar{\Phi} e^{2h\mathcal{V}} e^{4g\mathcal{G}} \Phi \right] \right\} \quad (2.34)$$

nos dando os termos da ação N=2 supersimétrica do modelo MCS com acoplamento não-mínimo:

$$\begin{aligned} S_{MCS}^{N=2} &= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} A_\mu \partial_\nu A_\alpha + 2\Delta^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N + 2\kappa N \Delta \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \bar{\Lambda}_- (i\bar{\not{\partial}} + \kappa) \Lambda_- + e^{2gN} [\nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi^* - (hN - 2g\Delta)^2 |\varphi|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (hN - 2g\Delta) X_+ X_+ + \frac{i}{8} (\bar{X}_- \not{\nabla}_- X_- + \bar{X}_+ \not{\nabla}_+ X_+) \\ &\quad + \frac{ig}{2} (\bar{\Lambda}_+ \not{\nabla} \varphi X_- - h.c.) - \frac{g}{2} (hN - 2g\Delta) (\bar{\Lambda}_+ X_- \varphi + h.c.) \\ &\quad - \frac{ig^2}{2} \partial_\mu N (\bar{X}_- \gamma^\mu \Lambda_+ \varphi^* - \bar{\Lambda}_+ \gamma^\mu X_- \varphi) - i\frac{g^2}{2} \varphi^* \varphi (\bar{\Lambda}_+ \not{\partial} \Lambda_+ + \bar{\Lambda}_- \not{\partial} \Lambda_-) \\ &\quad + \frac{g^2}{h} \left( \frac{1}{2} (\bar{\Lambda}_+ \gamma^\mu \mathcal{J}_\mu \Lambda_+ - \bar{\Lambda}_- \gamma^\mu \mathcal{J}_\mu \Lambda_-) + \bar{\Lambda}_+ \Lambda_+ h (hN - 2g\Delta) |\varphi|^2 \right) \\ &\quad \left. + |\varphi|^2 (2h\Delta + 2gh\bar{\Lambda}_+ \Lambda_+ - g^2 \partial_\mu N \partial^\mu N) \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar}{2}(\varphi\bar{\Lambda}_+X_- + \varphi^*\bar{X}_-\Lambda_+) + \left[ S + \frac{g}{2}\bar{X}_-\Lambda_- - \frac{g^2}{2}\varphi\bar{\Lambda}_+\Lambda_- \right]^2 \Bigg\}, \quad (2.35)$$

onde agora

$$\nabla_\mu\varphi = \left( \partial_\mu + ihA_\mu + ig\tilde{F}_\mu \right) \varphi. \quad (2.36)$$

Note que essa última redefinição (2.33) muda somente os fatores multiplicativos dos termos cinéticos e de massa topológica mas não dos termos de interação.

Concluindo este capítulo, ressaltamos que a estratégia adotada para a construção do modelo Abelian de Maxwell-Chern Simons com supersimetria estendida N=2 consistiu na formulação do modelo Abelian em D=4, com uma supersimetria simples, e sua posterior redução dimensional para três dimensões. Poderíamos ter adotado o ponto de vista de construir o modelo N=2 diretamente em D=3, porém tal processo envolveria uma análise bem mais complicada de vínculos no superespaço. Os dois métodos são equivalentes, a menos de redefinições de campos. Assim sendo, a primeira estratégia parece-nos mais objetiva.

# Capítulo 3

## Vórtices auto-duais

Neste capítulo encontramos vórtices auto-duais no modelo Maxwell-Chern-Simons com momento magnético anômalo. Desenvolvido o modelo supersimétrico  $N=2$  no capítulo anterior através do nosso ansatz de redução dimensional, seu setor bosônico apresenta uma classe de equações de movimento de primeira ordem conhecidas como equações de Bogomol'nyi, as quais, juntamente com o potencial de Higgs encontrado a partir do campo auxiliar da superconexão de gauge, originam soluções que apresentam fases topológicas e não-topológicas com estruturas solitônicas bem definidas.

# Introdução

A Como foi mencionado na Introdução desta tese, alguns anos atrás, foi proposto um modelo Maxwell-Chern-Simons com uma interação adicional devida ao momento magnético anômalo [2, 1], no qual são encontradas configurações auto-duais do tipo vórtice sempre que relações convenientes entre os parâmetros do modelo sejam obedecidas [60]. Um fato importante que surge da análise de modelos dessa natureza é uma relação entre a propriedade de auto-dualidade e a extensão supersimétrica, relação essa realizada por meio de uma conexão entre a carga central do modelo estendido e a existência de números quânticos conservados [20]. Muito embora uma razão fundamental para esta conexão não tenha sido dada até agora, em certos casos parece ser inevitável encontrar a extensão supersimétrica  $N=2$  de um dado modelo bosônico a fim de obter um potencial de Higgs adequado e condições de Bogomol'nyi compatíveis com as equações de Euler-Lagrange.

Nesse sentido, no capítulo anterior, conseguimos encontrar um modelo MCS supersimétrico  $N=2$  com acoplamento não-mínimo. Nossa estratégia consistiu na formulação de um modelo de gauge  $N=1-D=4$  com um termo BF, livre de vínculos sobre as constantes de acoplamento<sup>1</sup>. Após uma redução dimensional conveniente da ação em componentes de  $(3+1)$  para  $(2+1)$  dimensões, obtivemos um modelo de Maxwell-Higgs  $N=2-D=3$  com um termo de Chern-Simons e uma interação de momento magnético com o setor de matéria.

Adotando esse procedimento, criamos a possibilidade de manusear livremente os

---

<sup>1</sup>Nosso procedimento é para ser comparado com o da ref. [48] que, por sua vez, recai sobre uma escolha especial de parâmetros a fim de ter uma supersimetria estendida construída diretamente em  $D=3$  dimensões. Vínculos similares são também necessários para encontrar uma extensão  $N=2$  do modelo Maxwell Higgs [26] e Chern-Simons Higgs [25].

parâmetros do modelo, permitindo-nos obter soluções topológicas autoduais mesmo no regime crítico para as constantes de acoplamento [25, 26, 17, 48]. No presente capítulo encontramos as equações de Bogomol'nyi e o potencial de Higgs necessários para permitir vórtices autoduais, topológicos e não-topológicos, num modelo MCS acoplado não minimamente, o que é o principal resultado no capítulo. A análise de uma ampla variedade de configurações de sólitons autoduais é apresentada no final do mesmo.

### 3.1 O modelo não-mínimo

No capítulo anterior apresentamos a Lagrangiana supersimétrica N=2 (eq. 2.35). Ela exhibe, em sua parte bosônica, o modelo MCS não minimamente acoplado que vamos analisar aqui. Esse acoplamento se faz necessário para nosso propósito principal de encontrar uma fase topológica na teoria. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}G\partial_\mu M\partial^\mu M + e^{2gM}\nabla_\mu\varphi\nabla^\mu\varphi^* + \frac{\kappa}{2}A_\mu F^\mu \\ & + \{2\Delta^2 - 2\kappa M\Delta + \eta\Delta - e^{2gM}|\varphi|^2 [(eM + 2g\Delta)^2 + 2e\Delta]\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo que definimos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu\varphi &= (\partial_\mu - ieA_\mu - igF_\mu)\varphi \\ G(\varphi) &= 1 - 2g^2e^{2gM}|\varphi|^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, por conveniência, escrevemos  $h \rightarrow -e$  e  $g \rightarrow -g$ ; o termo  $\eta\Delta$  corresponde ao termo de Fayet-Iliopoulos que incluímos na Lagrangiana a fim de permitir a quebra espontânea da simetria de gauge [37]. A seguir, encontramos o potencial de Higgs correspondente a Lagrangiana 3.1 necessário à obtenção das relações de Bogomol'nyi.

A equação do movimento para o campo auxiliar  $\Delta$  é

$$\Delta = \frac{e}{4G} \left( 2e^{2gM}|\varphi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e}M + 4ge^{2gM}|\varphi|^2 M \right) \quad (3.3)$$

onde escolhemos  $\eta = ev^2$ . Substituindo a equação acima no termo entre chaves na eq. (3.1) obtemos o seguinte potencial de Higgs:

$$U = \frac{e^2}{8G} \left( 2e^{2gM} |\varphi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M + 4ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right)^2 + e^2 M^2 e^{2gM} |\varphi|^2 \quad (3.4)$$

que depende de dois campos escalares:  $M$  (real) e  $\varphi$  (complexo). De volta à Lagrangiana (3.1), a escrevemos como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} G \partial_\mu M \partial^\mu M + e^{2gM} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi^* + \frac{\kappa}{2} A_\mu F^\mu - U \quad (3.5)$$

a qual terá um papel importante em nossa discussão. Primeiramente vamos definir as seguintes correntes:

$$\begin{aligned} H_\mu &= -\frac{ie}{2} (\varphi^* D_\mu \varphi - \varphi D_\mu \varphi^*) \\ \mathcal{J}_\mu &= -\frac{ie}{2} (\phi^* \nabla_\mu \phi - \phi \nabla_\mu \phi^*) \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde  $\phi$  é um escalar complexo parametrizado em termos de  $M$  e  $\varphi$  como dado abaixo,

$$\phi = \sqrt{2} e^{gM} \varphi. \quad (3.7)$$

Como discutiremos na próxima seção, o campo escalar  $\phi$  é identificado como o campo físico em termos do qual os vórtices são especificados. Em termos deste campo, a equação do movimento para o campo de gauge pode ser escrita como:

$$\partial_\mu F^{\mu\rho} + \kappa F^\rho = \mathcal{J}^\rho + \frac{g}{e} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu \mathcal{J}_\nu \quad (3.8)$$

onde a componente temporal determina a “Lei de Gauss” modificada

$$\partial_i E_i + \kappa B + \frac{g}{e} \varepsilon_{ij} \partial_i \mathcal{J}_j + \mathcal{J}_0 = 0. \quad (3.9)$$

Os modos invariantes de gauge são agora de curto alcance devido ao termo de massa

topológica resultante da equação acima. Por isso, o primeiro termo acima tem uma integral que, quando tomada em todo o espaço, se anula. O terceiro termo corresponde a uma integral de caminho num circuito fechado, de raio infinito, que também se anula para configurações de energia finita. Por conseguinte, teremos que a carga das soluções de vórtice está relacionada com um fluxo magnético diferente de zero por:

$$Q = \kappa \Phi_B, \quad (3.10)$$

onde  $\Phi_B \equiv - \int d^2x B$ .

## 3.2 As equações autoduais do movimento

O funcional energia correspondente a Lagrangiana (3.5) é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} G (B^2 + E^2) + \frac{1}{2} G \partial_0 M \partial_0 M + \frac{1}{2} G \partial_i M \partial_i M \right. \\ \left. + e^{2gM} D_0 \varphi D_0^* \varphi + e^{2gM} D_i \varphi D_i \varphi^* + U \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

a qual podemos reorganizar da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} G \left( B \mp \frac{e}{2G} \left( 2e^{2gM} |\varphi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M + 4ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right) \right)^2 \right. \\ \pm eB \left( e^{2gM} |\varphi|^2 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{\kappa}{e} M + ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right) + \frac{1}{2} G (E_i \pm \partial_i M)^2 \\ \mp GE_i \partial_i M + e^{2gM} \left( |D_0 \varphi \mp ieM \varphi|^2 \pm 2MH_0 + |(D_1 \pm iD_2) \varphi|^2 \right. \\ \left. \pm \frac{1}{e} \varepsilon_{ij} \partial_i H_j \mp eB |\varphi|^2 + \frac{1}{2} G \partial_0 M \partial_0 M \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Note que o termo não-mínimo que estava incluído na derivada  $\nabla_\mu$ , embora agora não estando explicitamente escrita na equação acima, tem um efeito implícito através de  $G(\varphi)$ . Os termos lineares em  $F_\mu$  não estão presentes na energia porque são independentes da métrica.

A procura do limite de Bogomol'nyi para a energia produz as equações autoduais de uma maneira natural,

$$\begin{aligned}
B \mp \frac{e}{2G} \left( 2e^{2gM} |\varphi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M + 4ge^{2gM} |\varphi|^2 M \right) &= 0 \\
E_i \pm \partial_i M &= 0 \\
D_0 \varphi \mp ieM\varphi &= 0 \\
(D_1 \pm iD_2) \varphi &= 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Usando as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e} e^{2gM} \varepsilon_{ij} \partial_i H_j &= \frac{1}{2e} \varepsilon_{ij} \partial_i \mathcal{J}_j + \frac{1}{2e} \partial_i E_i - \frac{g}{e} \varepsilon_{ij} (\partial_i M) \mathcal{J}_j - 2g^2 e^{2gM} |\varphi|^2 E_i \partial_i M \\
2e^{2gM} H_0 &= \mathcal{J}_0 - ege^{2gM} |\varphi|^2,
\end{aligned}$$

integrando por partes e retirando os termos de superfície, finalmente obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{ev^2}{2} |\Phi_B| + \int d^2x \left\{ \pm M \left( \mathcal{J}_0 + \frac{g}{e} \varepsilon_{ij} \partial_i \mathcal{J}_j + \kappa B + \partial_i E_i \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} G \partial_0 M \partial_0 M \pm \frac{1}{2e} \varepsilon_{ij} \partial_i \mathcal{J}_j \pm \frac{1}{2e} \partial_i E_i \right\}.
\end{aligned}$$

Se, por um lado, os dois últimos termos desaparecem sempre que integrados em todo o espaço, por outro podemos usar a Lei de Gauss [eq. (3.9)] e, considerando configurações estáticas, atingimos, então, o limite inferior para a energia, ou seja,  $\mathcal{E} = \frac{ev^2}{2} |\Phi_B|$ .

Para encerrar esta seção, vamos expressar as equações autoduais e o potencial de Higgs em termos do campo  $\phi$ ; fazendo isso, obteremos expressões mais úteis para nossos propósitos futuros. Assim, as eq<sup>s</sup>. (3.13) ficam

$$\begin{aligned}
B \mp \frac{e}{2G} \left( |\phi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e} M + 2g|\phi|^2 M \right) &= 0 \\
A_0 \pm M &= 0 \\
\nabla_1 \phi \pm i\nabla_2 \phi &= 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e o potencial de Higgs é reescrito como:

$$U = \frac{e^2}{8G} \left( |\phi|^2 - v^2 + \frac{2\kappa}{e}M + 2g|\phi|^2M \right)^2 + \frac{e^2}{2}M^2|\phi|^2, \quad (3.15)$$

Notemos que, para  $g = 0$ , a equação acima fornece o potencial de Higgs do modelo MCS mínimo como dado pela Lagrangiana supersimétrica encontrada na ref.[60], como esperado. É importante notar que o sistema tem dois mínimos degenerados, ou seja, uma fase simétrica para a qual  $|\phi| = v$ ,  $M = 0$  e uma fase assimétrica onde  $\phi = 0$ ,  $M = ev^2/2\kappa$ .

### 3.3 O acoplamento anômalo crítico

Vamos analisar agora um valor muito especial do acoplamento anômalo, a saber,

$$g_c = -e/\kappa, \quad (3.16)$$

para o qual as equações do movimento (3.8) reduzem-se a primeira ordem, como no modelo Chern-Simons puro (sem o termo de Maxwell)<sup>2</sup>. É importante salientar que esse valor é o mesmo que foi fixado para obter um modelo MCS não-mínimo supersimétrico N=2 em D=3, como fez a ref.[48], entretanto, somente um potencial de Higgs simétrico,  $\phi^2$ , é encontrado produzindo, apenas, soluções não-topológicas (veja também [17]).

Assim, para  $g = g_c$  temos

$$\mathcal{J}_\mu = \kappa F_\mu \quad (3.17)$$

da qual a componente temporal é:

$$\kappa \left( 1 - \frac{e^2}{\kappa^2} |\phi|^2 \right) B = e^2 A_0 |\phi|^2. \quad (3.18)$$

Mostraremos agora que, em nosso modelo, podemos fazer tal escolha,  $g = g_c$ , sem vin-

---

<sup>2</sup>Essa escolha produz o que chamamos estatística fracionária, a qual descreve *anyons*. Veja, por exemplo, [2, 1] e suas referências.

cularmos o potencial a uma fase puramente simétrica. Encontraremos também vórtices topológicos, contrastando com tentativas anteriores [17, 48].

Usando  $A_0 = \mp M$  [veja eq.(3.14)] e definindo  $\gamma$  por meio de  $\kappa = \gamma ev$  (com  $\gamma \geq 1$  para configurações de energia finita) temos

$$B = \mp \gamma ev M \frac{|\phi|^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2}. \quad (3.19)$$

Por outro lado, as relações de autodualidade (3.13) fornecem também

$$B = \pm \frac{ev^2}{2} \frac{|\phi|^2 - v^2}{\gamma^2 v^2 - |\phi|^2} \gamma^2 \pm \gamma ev M.$$

Assim, para  $v$  definido como o valor máximo de  $|\phi|$ , podemos combinar as equações acima para obter

$$\begin{aligned} M &= -\frac{(|\phi|^2 - v^2)}{2\gamma v} \\ B &= \pm \frac{e}{2} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)}{(\gamma^2 v^2 - |\phi|^2)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Note que o campo  $M$  desacopla dos outros campos, *i.e.*, pode ser escrito apenas em termos do campo de Higgs,  $\phi$ . Outra característica interessante do modelo bosônico que encontramos é que ele apresenta, também no caso crítico, fases topológicas e não-topológicas, a saber:

$$U = \frac{e^4}{8} \frac{|\phi|^2 (|\phi|^2 - v^2)^2}{\kappa^2 - e^2 |\phi|^2} \quad (3.21)$$

Note que para  $\kappa \rightarrow \infty$  ( $\gamma \gg 1$ ), ele comporta-se como o potencial de Higgs típico do modelo de Chern-Simons puro [25], como esperado.

### 3.4 Análise das soluções autoduais

Assumindo uma simetria máxima (axial), adotamos o seguinte ansatz para encontrar os vórtices autoduais compatíveis com a condição de energia mínima:

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta) &= vR(r)e^{in\theta} \\ \mathbf{A}(r) &= \frac{\hat{\theta}}{er} [a(r) - n],\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde  $R$  e  $a$  são funções de  $r$ , e  $n$  é um inteiro indicando a carga topológica do vórtice. Então, o campo magnético fica

$$B = \frac{1}{er} a'$$

o que implica para o fluxo

$$\Phi_B = \frac{2\pi}{e} [a(0) - a(\infty)]$$

Uma vez que temos, em coordenadas polares,

$$\partial_1 \pm i\partial_2 = e^{\pm i\theta} \left( \partial_r \pm \frac{i}{r} \partial_\theta \right),$$

as eq<sup>s</sup>. (3.14) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{R^2}{\gamma^2}\right) \frac{dR}{dr} \mp \frac{a}{r} R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{da}{dr} \mp \frac{R^2 (R^2 - 1)}{(\gamma^2 - R^2)} &= 0,\end{aligned}\tag{3.23}$$

onde usamos (3.20) junto com uma redefinição da coordenada  $r$ , a saber,  $r \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{ev} r$ .

As condições de contorno no infinito resultam da condição de energia finita, enquanto que para evitar um comportamento singular escolhemos adequadamente os valores na origem. Em outras palavras, na fase *topológica* impomos  $R(\infty) = 1$  e  $a(\infty) = 0$  para uma vorticidade  $n$  que não seja a trivial ( $n \neq 0$ ). Sob essas condições, a partir de (3.23)

Tabela 3.1: Alguns valores de  $c_n$  para  $n = 1, 2, 3$  e  $\gamma = 1.5, 2.0, 4.0$ .

$\gamma \backslash n$	1	2	3
1.5	$1.7948 \times 10^{-1}$	$2.0538 \times 10^{-2}$	$1.4206 \times 10^{-3}$
2.0	$1.0664 \times 10^{-1}$	$9.1194 \times 10^{-3}$	$4.7256 \times 10^{-4}$
4.0	$2.8118 \times 10^{-2}$	$1.1979 \times 10^{-3}$	$3.1004 \times 10^{-5}$

$$a(r) \simeq n - c_n r^{n+1}, \quad (3.28)$$

sendo  $c_n = 2(n+1)/r_0^{n+1}$ . Esta última relação é obtida expandindo a eq.(3.26) em torno de  $r = 0$ ; entretanto, os valores numéricos precisos das constantes  $c_n$  são determinados pela forma dos campos no infinito e não na origem. Para encontrá-los, resolvemos numericamente as equações autoduais por meio de um procedimento iterativo dando um valor inicial para  $c_n$  que é corrigido cada vez que impomos  $R \rightarrow 1$  e  $a \rightarrow 0$ , simultaneamente, no infinito (ver Tabela 3.1). Algumas soluções estão mostradas na fig.1 para os casos  $n = 1, 2, 3$ . Notemos a estrutura anelar dos vórtices topológicos apresentada pelo campo magnético  $B$  (veja fig.2 e fig.3) que é semelhante a apresentada pelo modelo de Chern-Simons puro [28]. As configurações para  $n < 0$  estão relacionadas com as de  $n > 0$  pela transformação  $a \rightarrow -a$  e  $R \rightarrow R$ .

Vamos analisar agora o setor *não-topológico* do modelo. Neste caso  $v$  não é mais um parâmetro relevante (já que o campo de Higgs é nulo no infinito), mas podemos, por outro lado, usar o mesmo ansatz (3.22) com  $v = \kappa/e$  ( $\gamma = 1$ ). Neste caso, o sistema de equações diferenciais torna-se mais simplificado

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{da}{dr} &= \mp R^2 \\ \frac{dR}{dr} &= \pm \frac{aR}{r(1-R^2)}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

embora admita ainda soluções solitônicas. A forma dessas soluções é análoga àquelas encontradas com o potencial  $\phi^2$  considerado na ref. [17], muito embora, em nosso caso, a

fase simétrica do potencial surja de  $U = \frac{e^2}{8}|\phi|^2 \left( \frac{\kappa^2}{e^2} - |\phi|^2 \right)$  e as estruturas solitônicas não sejam, obviamente, idênticas. Devemos mencionar, no entanto, que na situação presente, diferentemente do trivial  $|\phi|^2 = 0$ , um valor de vácuo  $|\phi|^2 = \frac{\kappa^2}{e^2}$  não é fisicamente aceitável porque o fluxo magnético, e conseqüentemente a energia, seria divergente.

Para as soluções não-topológicas, vemos em (3.29) que para  $r$  grande, onde vale  $(1 - R^2) \simeq 1$ , a equação de segunda ordem para o campo  $R(r)$  torna-se novamente uma equação de Liouville tal que as soluções assintóticas são análogas a (3.26) e (3.27). Uma vez que para esse tipo de solução somos obrigados a impor  $R(\infty) = 0$ , de (3.27) obtemos  $N^\infty = -(a_n^\infty + 1)$ , ou seja, temos uma relação entre a constante  $N$  e  $a_n(\infty)$  na região onde vale a aproximação de Liouville, *i.e.*, para  $r$  grande; os valores  $a_n(\infty)$  são encontrados numericamente. Na origem, configurações de sólitons que não sejam singulares têm que satisfazer a  $nR(0) = 0$  e  $a(0) = n$ , simultaneamente. Vamos distinguir entre as duas seguintes possibilidades.

Por um lado, a ausência de vorticidade ( $n = 0$ ) implica que  $R(0) = b_0$  é um parâmetro contínuo restringido entre 0 e 1. Esta restrição é para garantir a validade da eq.(3.25) para todo  $r$  evitando singularidades.

Quando  $b_0 \rightarrow 0$ , podemos assumir que a aproximação de Liouville é válida para todo  $r$  e então da eq.(3.27) calculamos  $a_0^\infty$  usando apenas o fato que  $a(0) = 0$ . Isso nos fornece  $N$  válido para  $r$  qualquer, isto é,  $N^\infty = N$  e por conseguinte nos dá  $(a_0^\infty)_{\min} = -2$  como um resultado analítico. Quando  $b_0 \rightarrow 1$ , não podemos mais usar (3.27) na origem para calcular  $a_0^\infty$  o que nos obriga a calculá-lo numericamente. De fato, obtemos  $(a_0^\infty)^{\max} = -1.83$  (veja as figs. 4,5,6 e a Tabela 2). Nas figs. 4-6 podemos ver a estrutura de tubo de fluxo dos sólitons para  $n = 0$ , com o valor do campo magnético máximo na origem.

Por outro lado, para vorticidades diferentes da trivial ( $n \neq 0$ ),  $R(r)$  tem que ser zero na origem. Mais uma vez podemos usar (3.27) resultando novamente em  $N = n + 1$ . Assim, para  $r \simeq 0$  temos:

$$R(r) \simeq b_n r^n$$

$$a(r) \simeq n - b_n r^{n+1}$$

Tabela 3.2: Valores de  $b_n^{\max}$  e  $-(a_n^\infty)_{\max}$  para  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ .

$n$	$b_n^{\max}$	$-(a_n^\infty)_{\max}$
0	1.0000	1.8300
1	$3.4648 \times 10^{-1}$	2.5484
2	$5.9971 \times 10^{-2}$	3.5210
3	$6.2389 \times 10^{-3}$	4.5112
4	$4.6720 \times 10^{-4}$	5.5069
5	$2.6900 \times 10^{-5}$	6.5011

mas, em contraste com o caso topológico, as constantes  $b_n$  são agora parâmetros contínuos, limitados entre  $0 < b_n \leq b_n^{\max}$ . Para  $b_n \simeq 0$ ,  $R(r) \ll 1$  tal que aproximação de Liouville é válida em toda parte, por isso podemos obter analiticamente um limite inferior para  $a(\infty)$ , a saber:  $(a_n^\infty)_{\min} = -(n + 2)$ . Obtemos, numericamente, os valores máximos de  $b$ ,  $b_n^{\max}$ , e por conseguinte  $(a_n^\infty)_{\max}$ , como está ilustrado na Tabela 2.

Do que foi dito acima podemos concluir que, na fase não-topológica, o fluxo magnético não é quantizado sendo, ao contrário, limitado entre dois valores para cada vorticidade  $n$ , ou seja,

$$2(n - (a_n^\infty)_{\max}) \leq \frac{e}{\pi} \Phi_B \leq 4(n + 1).$$

Como podemos ver na Tabela 2, os valores assintóticos do campo de gauge permanecem limitados tendendo a  $-(n + \frac{3}{2})$  enquanto que o fluxo magnético se aproxima do limite  $(4n + 3)\frac{\pi}{e}$  quando  $n$  cresce.

Na fig. 9, vemos a estrutura anelar dos vórtices não-topológicos, com o máximo do campo magnético fora da origem como acontece na fase topológica do modelo. Note que o raio dos vórtices para  $b_n^{\max}$ , juntamente com sua distância à origem, são mínimos para um dado  $n$ , enquanto que o campo de Higgs apresenta uma forma semelhante atendo-se ao valor máximo  $R = 1$ .

Esperamos, com a análise feita neste capítulo, ter levantado e elucidado propriedades da estrutura de vórtices do modelo estendido N=2. Seria interessante reconsiderarmos

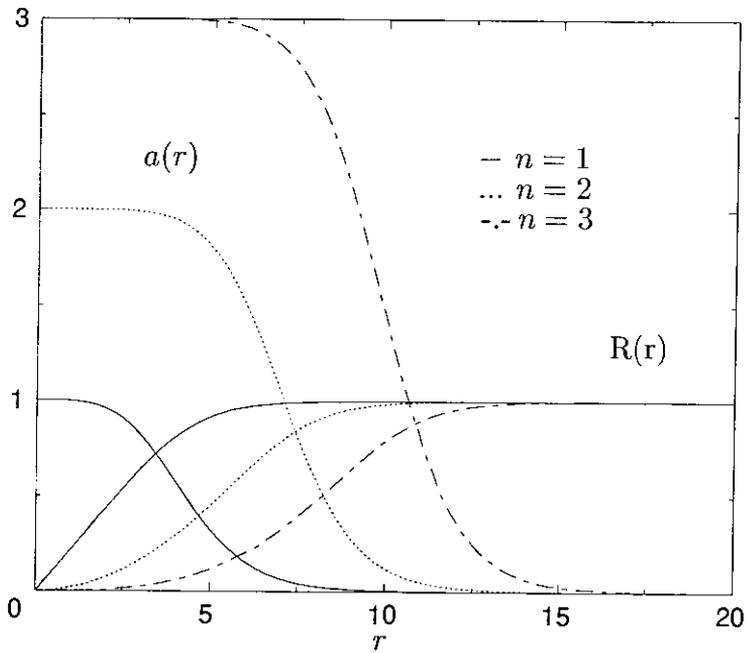


Figura 3-1: O campo escalar  $R(r)$  e o campo de gauge  $a(r)$  na fase topológica. Os valores das constants  $c_n$  são fixados pela forma dos campos no infinito:  $c_1 = 0.1066$ ,  $c_2 = 9.1190 \times 10^{-3}$ ,  $c_3 = 4.726 \times 10^{-4}$ , para  $\gamma = 2$ .

este modelo sem a identificação dos potenciais  $A_\mu$  e  $B_\mu$ , isto é, o modelo com um setor mais rico de campos de gauge. A possível interferência entre os vórtices associados a dois potenciais distintos poderia nos revelar aspectos bastante peculiares da estrutura da teoria mais geral.

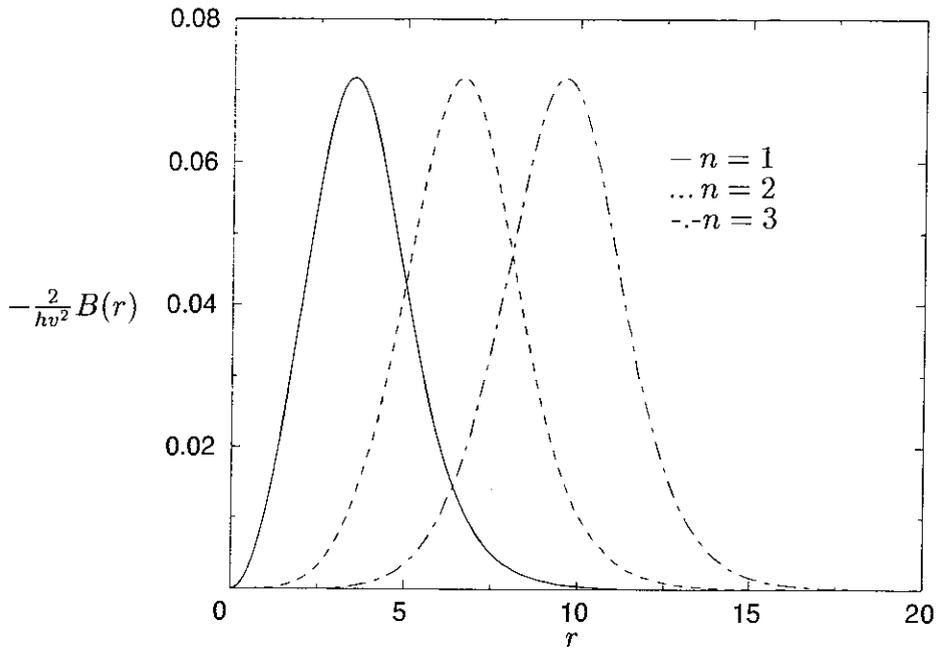


Figura 3-2: O campo magnético  $B$  como função de  $r$  para  $n = 1, 2, 3$  e  $\gamma = 2$  na fase topológica. A estrutura do vórtice é anelar como no caso dos vórtices de Chern-Simons puro.

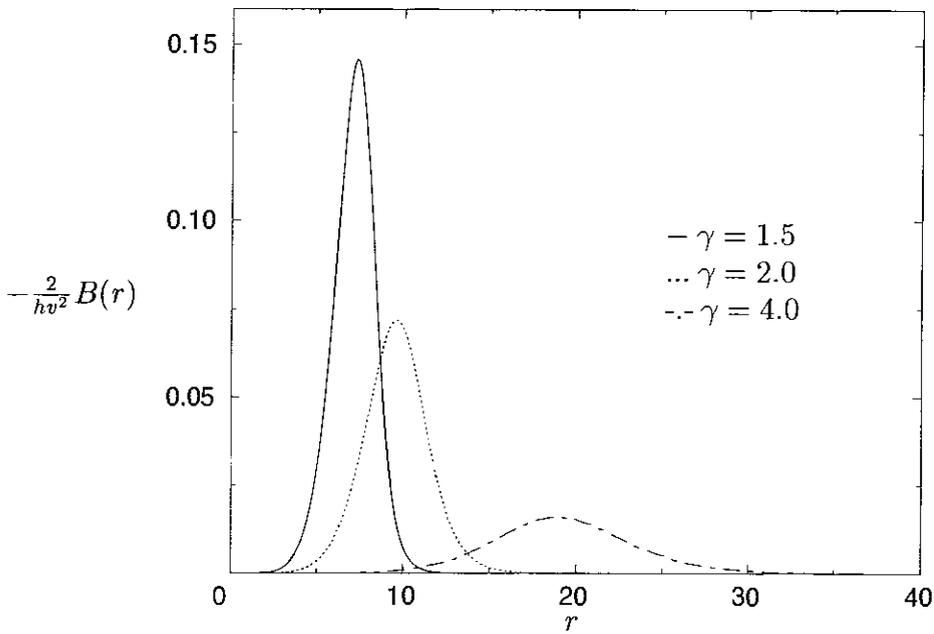


Figura 3-3: O campo magnético  $B$  na fase topológica para  $n = 1$  e alguns valores de  $\gamma = \frac{\kappa}{\hbar v}$ .

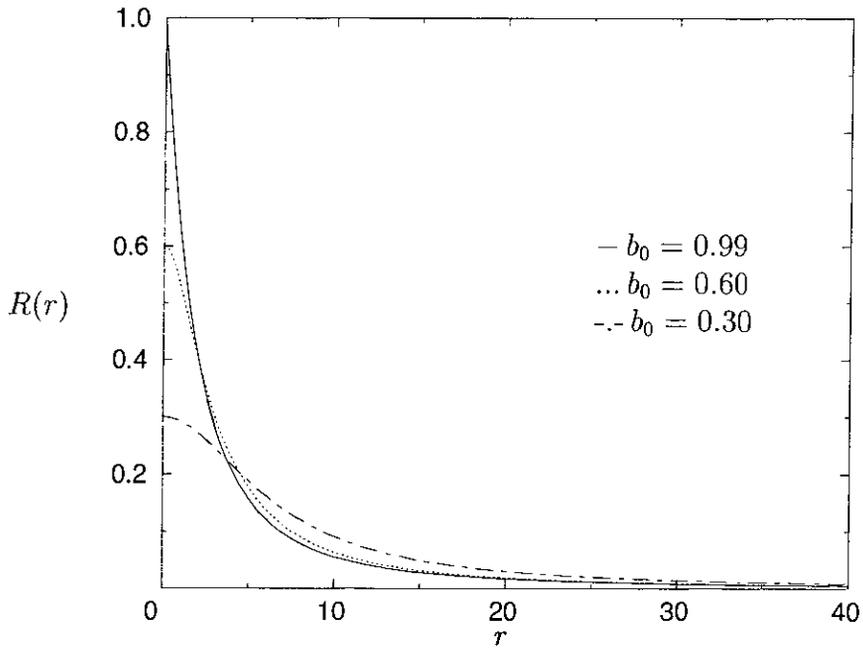


Figura 3-4: O campo de Higgs  $R(r)$  na fase não topológica para  $n = 0$  e alguns valores de  $b_0$ .

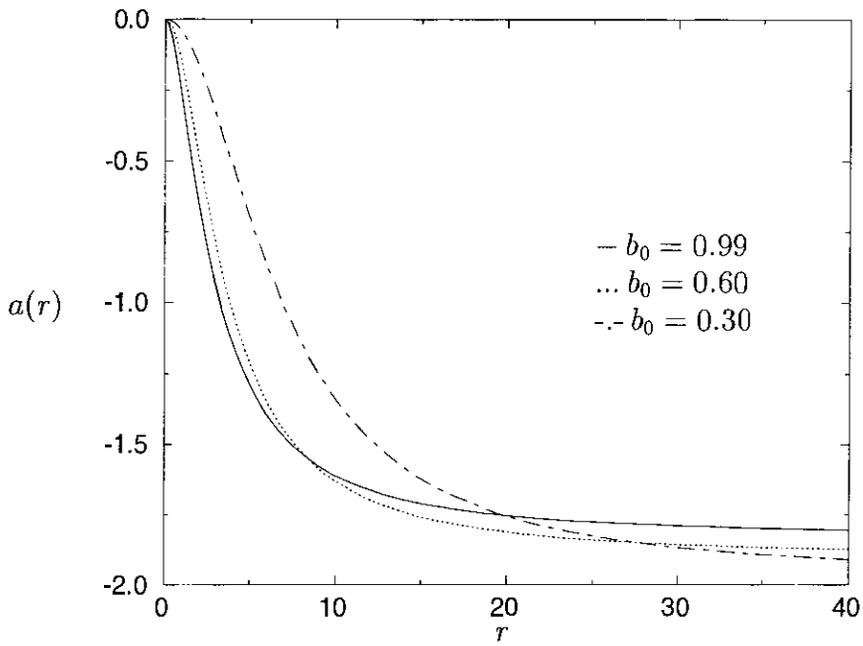


Figura 3-5: O campo de gauge  $a(r)$  na fase não topológica para  $n = 0$  e alguns valores de  $b_0$ .

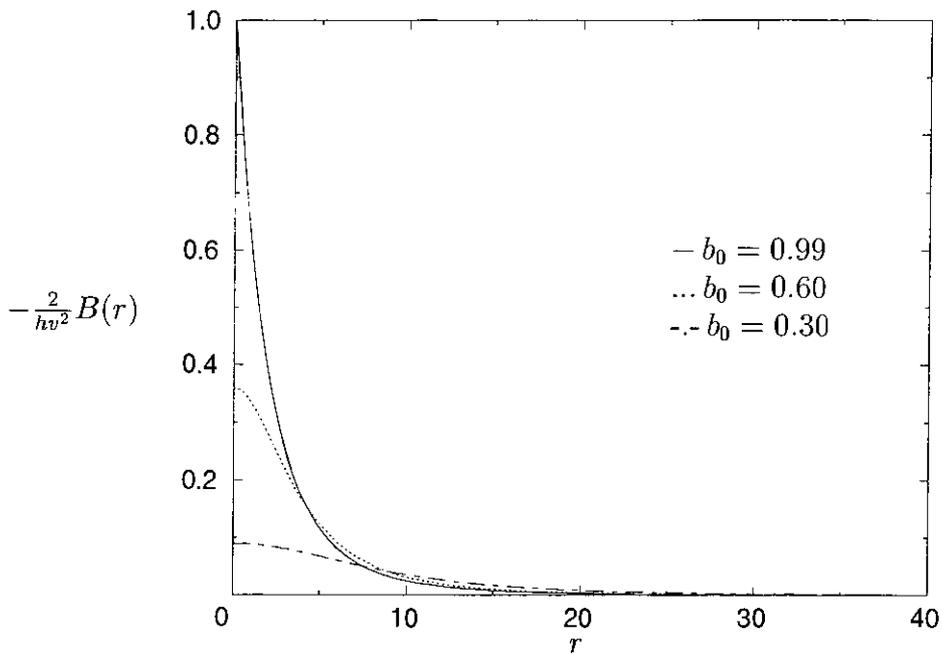


Figura 3-6: O campo magnético  $B(r)$  na fase não topológica para  $n = 0$  e alguns valores de  $b_0$ . Sua estrutura é semelhante a um tubo de fluxo.

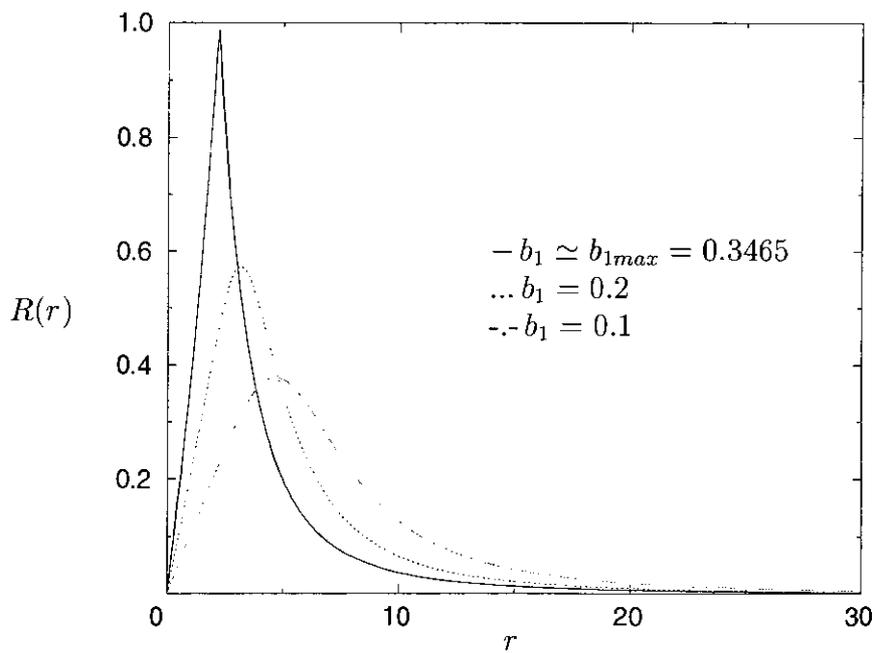


Figura 3-7: O campo de Higgs  $R(r)$  na fase não topológica para  $n = 1$  e alguns valores de  $b_1$ .

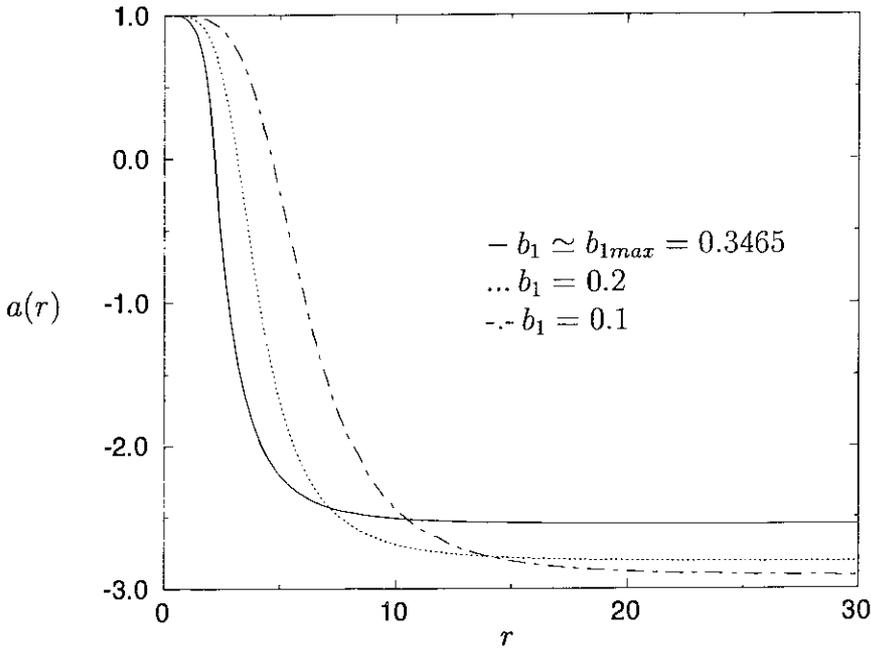


Figura 3-8: O campo de gauge  $a(r)$  na fase não topológica para  $n = 1$  e alguns valores de  $b_1$ .

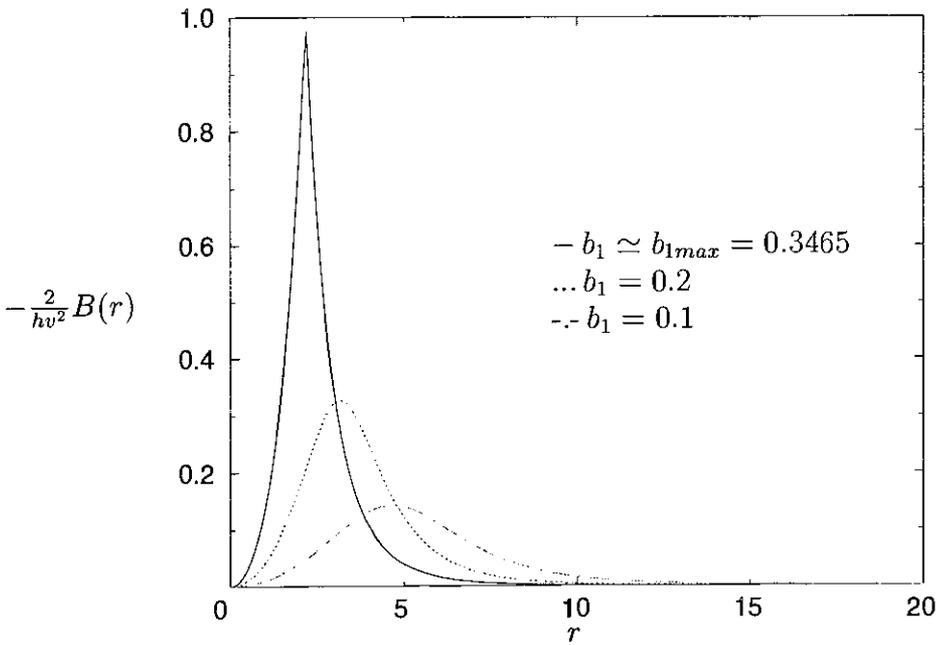


Figura 3-9: O campo magnético  $B(r)$  como função de  $r$  para  $n = 1$  e alguns valores de  $b_1$  na fase não topológica. Os vórtices são anelares como no setor topológico.

# Conclusões Gerais

Apresentamos o modelo CSKR supersimétrico com um acoplamento não-mínimo entre a matéria e um potencial de gauge  $\mathcal{L}$ -forma e, através de uma redução dimensional a partir de  $D=4$ , obtemos um modelo  $BF^3$  supersimétrico  $N=2$  em  $D=3$  dimensões. Após uma identificação conveniente entre alguns campos do modelo, sem com isso quebrar quaisquer das duas supersimetrias, nos foi possível obter uma extensão supersimétrica  $N=2$  do sistema MCS com interações de momento magnético anômalo.

Em relação aos resultados da ref.[48], onde o autor estende a supersimetria na ausência de um campo escalar neutro, afirmamos que nosso procedimento fornece um modelo  $N=2$  contendo tal campo “extra”  $N$  [*c.f.* eq.(2.24)] como uma consequência natural da redução dimensional. Assim, sua presença é bem justificada, ou seja, ele aparece como resultado dessa redução dimensional do setor de gauge, sendo que sua ausência leva apenas a soluções não-topológicas no modelo MCS. Não necessitamos também impor inicialmente que todos os campos tenham a mesma massa. A razão é que, em nosso caso, construímos a ação  $N=2-D=3$  com multipletos de gauge e de matéria independentes. Na referência acima citada, por sua vez, o modelo é formulado em termos de um único multipletto de gauge.

No capítulo 3, obtemos sólitons autoduais a partir do setor bosônico do modelo supersimétrico do capítulo 2. Este setor a que nos referimos contém o modelo MCS com acoplamento não-mínimo e, ainda a partir do campo auxiliar advindo da supersimetria, é possível encontrar o potencial de Higgs correspondente a esse modelo. Os setores to-

---

<sup>3</sup>Genuinamente, o termo  $BF$  é escrito em quatro dimensões. Mais apropriado, talvez, seria dizer termo de Chern-Simons misto.

pológicos e não-topológicos serão discutidos em detalhe.

Até onde sabemos, esta é a primeira vez que se obtém vórtices topológicos no modelo MCS não-mínimo. Analisando o setor não-topológico para alguns valores dos parâmetros do modelo notamos que, em contraste com os trabalhos na ref. [17], essa fase não-topológica não é dada simplesmente por um potencial  $\phi^2$  mas sim por uma função de quarta ordem  $|\phi|^2 \left( \frac{\kappa^2}{e^2} - |\phi|^2 \right)$ . Nossas soluções são então diferentes daquelas apresentadas em [17] embora sejam similares em forma.

A fim de comparar nossos resultados com trabalhos anteriores [48, 17], nos restringimos à análise do valor crítico do acoplamento não-mínimo, muito embora possamos ver que as eq.s (3.14) e (3.15) admitem, para  $g \neq g_c$ , uma fase topológica e uma fase não-topológica correspondente a soluções de vórtice autodual.

# Perspectivas

Enumeramos abaixo algumas perspectivas abertas por esta Tese.

- O modelo que contém o termo de Chern-Simons misto (com dois campos de gauge), advindo da redução dimensional, é supersimétrico  $N=2$  e esse fato sugere a existência de vórtices autoduais também para esse modelo.
- Calcular a contribuição do momento anômalo para o cálculo da carga central da álgebra de supersimetria estendida  $N=2$ .
- Averiguar como a quebra espontânea de supersimetria ( $N = 2 \rightarrow N = 1$ ) afeta a estrutura de vórtices. Espera-se perder a autodualidade e, então, obter vórtices diferentes.
- Estudar a estrutura de vórtices fora do caso crítico, isto é, ( $g \neq g_c$ ).
- Uma interessante continuação desse trabalho seria averiguar a aplicação desses vórtices, com contribuição do momento anômalo, à fenomenologia dos supercondutores do tipo II.
- Uma consequência natural ao que fizemos aqui é considerar a extensão não-Abeliana desse modelo.

# Apêndice (Notações e convenções sobre supersimetria em 4D)

“Supersimetria é um assunto de interesse considerável entre os físicos e matemáticos. Ela não só fascina por seu próprio mérito, mas há também uma convicção crescente que ela pode desempenhar um papel fundamental em física de partículas. Esta convicção está baseada em um resultado importante de Haag, Sohnius e Lopuszanski [61]. Eles provaram que a álgebra de supersimetria é a única álgebra de Lie graduada de simetrias da matriz  $S$  consistente com a teoria quântica de campos relativística.”

Wess&Bagger

## Álgebra espinorial

A notação que usamos ao longo desse trabalho é baseada nas refs. [35, 62]. Em quatro dimensões, a convenção de soma que usamos para espinores de duas componentes é a seguinte:

$$\begin{aligned}\psi\xi &= \psi^\alpha\xi_\alpha = -\psi_\alpha\xi^\alpha = \xi^\alpha\psi_\alpha = \xi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\xi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}\bar{\psi}\end{aligned}\tag{A.1}$$

A definição de  $\bar{\psi}\bar{\xi}$  é escolhida de tal maneira que

$$(\xi\psi)^\dagger = (\xi^\alpha\psi_\alpha)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\xi}\tag{A.2}$$

Para levantar e baixar índices espinoriais, usamos o tensor antissimétrico  $\varepsilon^{\alpha\beta}$  ( $\varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1$ ,  $\varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} = -1$ ,  $\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$ ),

$$\begin{aligned}\psi^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta, & \psi_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \\ \psi^{\dot{\alpha}} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}}, & \psi_{\dot{\alpha}} &= \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}}\end{aligned}\tag{A.3}$$

## Algumas relações espinoriais

$$\begin{aligned}\chi\sigma^\mu\bar{\psi} &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi \\ (\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger &= \psi\sigma^\mu\bar{\chi} \\ (\chi\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi)^\dagger &= \bar{\psi}\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\bar{\chi} \\ \theta^\alpha\theta^\beta &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \\ \theta_\alpha\theta_\beta &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\theta\theta \\ (\theta\xi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2}(\xi\psi)\theta\theta\end{aligned}\tag{A.4}$$

## A álgebra de supersimetria

A algebra de supersimetria é definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{Q}_\alpha^A, \bar{\mathcal{Q}}_\beta^B\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu\delta^{AB} \\ \{\mathcal{Q}_\alpha^A, \mathcal{Q}_\beta^B\} &= \{\bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}A}, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \\ [P_\mu, \mathcal{Q}_\alpha^A] &= [P_\mu, \bar{\mathcal{Q}}_{\dot{\alpha}A}] = 0 \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0\end{aligned}\tag{A.5}$$

Os índices gregos  $\alpha$  e  $\beta$  vão de 1 a 2 e denotam espinores de Weyl de duas componentes; os índices gregos  $\mu$  e  $\nu$  vão de 1 a 4 e identificam os quadrivetores de Lorentz. Os índices latinos maiúsculos referem-se ao espaço interno indo de 1 a  $N \geq 1$ . A álgebra com  $N=1$  é chamada álgebra de supersimetria enquanto que aquelas com  $N > 1$  são chamadas álgebras de supersimetria estendida.

# Geradores

Sendo a álgebra de supersimetria uma álgebra (graduada) de Lie, com parâmetros anticomutantes, podemos definir o elemento do grupo por

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}\}} \quad (\text{A.6})$$

O movimento no superespaço pode ser gerado pelos operadores diferenciais  $Q$  e  $\bar{Q}$ , tal que:

$$\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q} = \xi^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \right) + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu \bar{\epsilon}^{\dot{\beta}\alpha} \partial_\mu \right) \quad (\text{A.7})$$

De fato, esses operadores diferenciais, na verdade, são os geradores do grupo e satisfazem, tal como em (A.5), as seguintes relações de anticomutação:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Podemos ainda definir outros operadores diferenciais,  $D_\alpha$  e  $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ , derivadas covariantes de supersimetria, que comutam com  $Q_\alpha$  e  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ , a saber:

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

tal que

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \\ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

# Supercampos

“Os supercampos dão uma descrição elegante e compacta das representações de su-

persimetria, simplificam a adição e multiplicação das representações e são muito úteis na construção de Lagrangianas interagentes”

Os elementos do superespaço são representados por  $z = (x, \theta, \bar{\theta})$ , tal que os supercampos são função desses elementos da maneira seguinte:

$$F(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi + \theta\omega + \bar{\theta}\bar{\chi} + \theta\theta m + \bar{\theta}\bar{\theta}n + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d \quad (\text{A.11})$$

A lei de transformação para o supercampo é definida como:

$$\begin{aligned} \delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) = & \delta_\xi\phi + \theta\delta_\xi\omega + \bar{\theta}\delta_\xi\bar{\chi} + \theta\theta\delta_\xi m + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi n + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\delta_\xi A_\mu \\ & + \theta\theta\bar{\theta}\delta_\xi\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\delta_\xi\psi + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\xi d \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e, por definição,

$$\delta_\xi F(x, \theta, \bar{\theta}) = (\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}) F \quad (\text{A.13})$$

As leis de transformação para os campos componentes  $(\phi, \omega, \chi, \dots)$  podem ser encontradas confrontando as potências de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$  de (A.12) e (A.13).

Supercampos escalares que cumprem a condição

$$D_{\hat{\alpha}}\Phi = 0 \quad (\text{A.14})$$

são ditos serem quirais. De maneira geral, podemos escrever, para um campo escalar:

$$\Phi = \phi - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\phi + \theta\psi + \frac{i}{2}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\theta F. \quad (\text{A.15})$$

Para  $\Phi^\dagger$  vale a relação  $D_\alpha\Phi^\dagger = 0$ .

Supercampos ditos vetoriais, para esses valem a relação

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^\dagger. \quad (\text{A.16})$$

Um exemplo de supercampo vetorial é dado por (A.11), com os campos  $(\phi, \omega, \chi, m, \dots)$

convenientemente escolhidos para satisfazerem (A.16) [veja também eq.<sup>s</sup> (2.2) e (2.8)].

A intensidade de campo supersimétrica (superfield strength) é, como definida em (2.2), dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2 D^\alpha \mathcal{V} \\ \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}D^2 \bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{V}\end{aligned}\tag{A.17}$$

Esses supercampos são chirais

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{W}_\beta &= 0 \\ D_\alpha \bar{\mathcal{W}}_{\dot{\beta}} &= 0\end{aligned}\tag{A.18}$$

e invariantes de gauge.

## Matrizes $\sigma$ : algumas relações úteis

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} &= \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\beta\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^0 &= \sigma^0, \quad \bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3} \\ \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^\mu \bar{\sigma}_\mu^{\dot{\beta}\beta} &= -2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\ \text{Tr} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu &= 2\eta^{\mu\nu} \\ \text{Tr} \sigma^{\mu\nu} \bar{\sigma}^{\kappa\sigma} &= -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\kappa}) \\ \theta \sigma^\mu \bar{\theta} \theta \sigma^\nu \bar{\theta} &= \frac{1}{2} \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \eta^{\mu\nu}\end{aligned}$$

# Bibliografia

- [1] I.I. Kogan, Phys. Lett. **B262** (1991) 83.
- [2] J. Stern, Phys. Lett. **B265** (1991) 119.
- [3] C.A.S. Almeida, J. Auto-Neto, “Influência do momento de dipolo magnético anômalo do elétron em átomos de alto número atômico”, Tese de Mestrado, UFC, 1984.
- [4] C.A.S. Almeida, J. Auto-Neto, *Influence of the electron's anomalous magnetic dipole moment on high-atomic number atoms*, CBPF-NF-027/90.
- [5] W. T. Grandy, Jr. “Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields”, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] J. Goldstone, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 986.
- [7] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1144.
- [8] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 957.
- [9] F. Wilczek, A. Zee, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2250.
- [10] Y.H. Chen, F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. **B3** (1989), 117.
- [11] F. Wilczek, “Fractional Statistics and Anyon Superconductivity”, Word Scientific, Singapore, 1990.
- [12] R.B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 2677.
- [13] M.E. Carrington, G. Kunstatter, Phys. Rev. **D51** (1995) 1903.

- [14] M.E. Carrington, G. Kunstatter, Phys. Rev. **D50** (1994) 2830.
- [15] F.A.S. Nobre, “Influência do Termo de Pauli no Caráter Aniônico da Teoria de Chern-Simons Acoplada a Campos de Matéria”, Dissertação de Mestrado, UFC, 1995.
- [16] Y. Georgelin, J.C. Wallet, Mod. Phys. Lett **A7**, No. 13 (1992) 1149
- [17] M. Torres, Phys. Rev. **D46** (1992) R2295.
- [18] J. Escalona, M. Torres, A. Antillon, Mod. Phys. Lett. **A8**, No. 31 (1993) 2955.
- [19] T. A. Antillon, J. Escalona and M. Torres, Phys. Rev. **D55** (1997) 6327.
- [20] Z. Hlousek, D. Spector, Nucl. Phys. **B370** (1992) 143.
- [21] Z. Hlousek, D. Spector, Nucl. Phys. **B397** (1993) 173.
- [22] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *N=2 Maxwell-Chern-Simons models with anomalous magnetic moment coupling via dimensional reduction*, CBPF-NF-010/98, hep-th/9802096, Int. J. Mod. Phys. **A14** (1999) 147.
- [23] H.R. Christiansen, M.S. Cunha, J.A. Helayël-Neto, L.R.U. Manssur, A.L.M.A. Nogueira, *Self-dual vortices in a Maxwell-Chern-Simons model with non-minimal coupling*, CBPF-NF-034/98, hep-th/9805128, a ser publicado em Int. J. Mod. Phys. **A**.
- [24] E. B. Bogomol’nyi, Yad. Fiz. **24** (1976) 861 [Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976) 449].
- [25] C. Lee, K. Lee, E.J. Weinberg, Phys. Lett. **B243** (1990) 105.
- [26] J. Edelstein, C. Núñez, F. Schaposnik, Phys. Lett. **B329** (1994) 39.
- [27] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61** (1973) 45.
- [28] R. Jackiw, E.J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2234.

- [29] J. Hong, Y. Kim, P.Y. Pac, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 2230.
- [30] R. Rajaraman, "Solitons and Instantons. An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory", North Holland, 1982.
- [31] L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev. **D19** (1979) 4486.
- [32] R. Jackiw, K. Lee, E. J. Weinberg, Phys. Rev. **D42** (1990) 3488.
- [33] R. Jackiw, 'Physics geometry and Topology', editado por H.C. Lee NATO ASI Series B: Physics Vol. 238, Plenum Press, New York, 1990.
- [34] C. Lee, K. Lee, H. Min, Phys. Lett **B252** (1990) 79.
- [35] J. Wess, J. Bagger, 'Supersymmetry and Supergravity', Princeton University Press, 1983.
- [36] S.J. Gates, Jr., M.T. Grisaru, R. Roček, W. Siegel, 'Superspace *or* One Thousand and One Lessons in Supersymmetry', série Frontiers in Physics, The Benjamin/Cumings Publishing Company, Inc, 1983.
- [37] M.F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39.
- [38] Wu-Ki Tung, 'Group Theory in Physics', World Scientific, 1985.
- [39] D. Olive and E. Witten, Phys. Lett. **B78** (1978) 97.
- [40] R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. **D23** (1981) 2291.
- [41] J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185** (1981) 157.
- [42] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975.
- [43] A. Blasi, R. Collina, Nucl. Phys. **B345** (1990) 472;
- [44] F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet, S.P. Sorella, Nucl. Phys. **B346** (1990) 313.
- [45] A. Blasi, O. Piguet and S.P. Sorella, Nucl. Phys. **B356** (1991) 154.

- [46] C. Lucchesi, O. Piguet, Nucl. Phys. **B381** (1992) 281.
- [47] T. Lee, H. Min, Phys. Rev. **D50** (1994) 7738.
- [48] P. Navrátil, Phys. Lett. **B365** (1996) 119.
- [49] G.T. Horowitz, Commun. Math. Phys. **125** (1989) 417.
- [50] M. Blau, G. Thompson, Ann. Phys. **205** (1991) 130.
- [51] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, G. Thompson, Phys. Rep. **C209** (1991) 129.
- [52] E. Cremmer, J. Scherk, Nucl. Phys. **B72** (1974) 117.
- [53] M. Kalb, P. Ramond, Phys. Rev. **D9** (1974) 2273.
- [54] A. Khoudeir, *The Abelian topological mass mechanism from dimensional reduction*, hep-th/9712212.
- [55] V.E.R. Lemes, A.L.M.A. Nogueira, J.A. Helayël-Neto, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 3145.
- [56] L. Brink, J.H. Schwarz, J. Scherk, Nucl. Phys. **B121** (1977) 77.
- [57] J. Scherk, “Extended Supersymmetry and Extended Supergravity Theories, in Recent Developments in Gravitation”, Cargèse 1978, Edited by M. Lévy and S. Deser, Plenum Press.
- [58] N. Dorey, N.E. Mavromatos, Phys. Lett. **B266** (1991) 163
- [59] N. Dorey, N.E. Mavromatos, Nucl. Phys. **B386** (1992) 614.
- [60] B.-H. Lee, C. Lee, and H. Min, Phys. Rev. **D45** (1992) 4588.
- [61] R. Haag, J. Łopuszański, M. Sohnius, Nucl. Phys. **B288** (1975) 257.

**“VÓRTICES AUTODUAIS DO MODELO  
MAXWELL-CHERN-SIMONS-HIGGS  
COM ACOPLAMENTO NÃO MÍNIMO”**

*Marcony Silva Cunha*

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

*J. A. Helayël - Neto .*

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

*Hugo Christiansen*

Hugo Christiansen - Co-orientador

*João Luiz Matheus Valle*

José Luiz Matheus Valle

*Oswaldo Monteiro Del Cima*

Oswaldo Monteiro Del Cima

*Nami Fux Svaiter*

Nami Fux Svaiter

*Sebastião Alves Dias*

Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro, 19 de janeiro de 1999