

15/99

TESE DE
MESTRADO

**Espaços-tempos Tipo Gödel em
Teoria de Gravitação com Matéria
Induzida**

HECTOR LENY CARRION SALAZAR

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 1999

Dedicatória

Masa

Al fin de la batalla, y muerto el combatiente, vino hacia él un hombre y le dijo: “No mueras, te amo tanto!” Pero el cadáver ay! siguió muriendo.

Se le acercaron dos y repitiéronle: “No nos dejes! Valor! Vuelve a la vida!” Pero el cadáver ay! siguió muriendo.

Acudieron a él veinte, cien, mil, quinientos mil, clamando: “Tánto amor, y no poder nada contra la muerte!” Pero el cadáver ay! siguió muriendo.

Le rodearon millones de individuos, con un ruego común: “Quédate, hermano!” Pero el cadáver ay! siguió muriendo.

Entonces, todos los hombres de la tierra le rodearon; les vio el cadáver triste, emocionado; incorporóse lentamente abrazó al primer hombre; echóse a andar ...

Cesar Vallejo

A Sarah, minha família e todas aquelas pessoas que me deram apoio e força enquanto realizava este trabalho.

Agradecimentos

Ao CNPQ pela bolsa concedida.

Ao meu orientador Marcelo Rebouças pelas discussões, orientação e ajuda na conclusão desta tese.

A Antonio Teixeira, German Gomeró e a Armando Bernui pela paciência e ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

A Myriam Simões Coutinho, secretária de CFC pela cooperação durante o período de 1997 até hoje.

A Rodolfo Casana Sifuentes, Vera Ferreira, Rodrigo Villaroel, e a todos meus amigos e colegas do CBPF.

Ao pessoal da Biblioteca do CBPF, pessoal da CFC, pessoal do DCP, a secretária do DCP senhora Rosângela.

Resumo

Variedades tipo Gödel generalizadas e pentadimensionais são examinadas à luz do problema de equivalência formulada por E. Cartan. As condições necessárias e suficientes para a homogeneidade local destas variedades pentadimensionais são deduzidas. Encontra-se que estas variedades estão localmente caracterizadas por três parâmetros essenciais m^2 , w , κ . Idênticas tríadas (m^2, w, κ) correspondem a variedades 5D localmente equivalentes. Determina-se um conjunto irreduzível de métricas tipo Gödel 5D generalizadas isometricamente não equivalentes e localmente homogêneas. Uma classificação destas variedades baseada nos parâmetros essenciais é apresentada. Determina-se os campos vetoriais de Killing e suas correspondentes álgebras de Lie para cada classe. Demonstra-se que às variedades 5D tipo Gödel generalizadas admitem grupos maximais de isometria G_r com $r = 7$, $r = 9$, ou $r = 15$ dependendo dos parâmetros essenciais. A violação de causalidade em todas as classes de variedades tipo Gödel homogêneas é examinada. Encontra-se que nas três primeiras classes de variedades tipo Gödel homogêneas a causalidade pode ser violada. Determina-se a única solução tipo Gödel 5D generalizada da teoria de matéria induzida da gravitação. Em conexão com o teorema de Campbell e os trabalhos recentes se discute a existência de uma solução não-causal 5D tipo Gödel da teoria com MI.

Summary

Five-dimensional generalized Gödel-type manifolds are examined in the light of the equivalence problem techniques, as formulated by E. Cartan. The necessary and sufficient conditions for local homogeneity of these 5D manifolds are derived. The local equivalence of these homogeneity Riemannian manifolds is studied. It is found that they are characterized by three essential parameters m^2 , w , κ : identical triads (m^2, w, κ) correspond to locally equivalent 5D manifolds. An irreducible set of isometrically nonequivalent 5D locally homogeneous Riemannian generalized Gödel-type metrics is exhibited. A classification of these manifolds based on the essential parameters is presented, and the Killing vector fields as well as the corresponding Lie algebra of each class are determined. It is shown that the generalized Gödel-type 5D manifolds admit maximal group of isometry G_r with $r = 7$, $r = 9$, or $r = 15$ depending on the essential parameters m^2 , w , κ . The breakdown of causality in all these classes of homogeneous Gödel-type manifolds is also examined. It is found that in three out of the six irreducible classes causality can be violated. The unique generalized Gödel-type solution of the induced matter (IM) field equations is found. In connection with a theorem of Campbell and recent works the existence of a noncausal generalized Gödel-type solution of the induced matter (IM) theory is discussed.

Conteúdo

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Summary	iv
Índice	v
1 Problema de Equivalência	7
1.1 Introdução	7
1.2 Problema de Equivalência Local	8
1.2.1 Teorema de Cartan	9
1.3 Equivalência Local de Variedades	11
1.3.1 O Teorema de Equivalência	13
1.3.2 Escalares de Cartan e o Grupo de Isometria	18
1.4 Algoritmo de Karlhede	19
2 Homogeneidade de Espaços-tempos Riemannianos Tipo Gödel em 5D	23
2.1 Introdução	23
2.2 Homogeneidade Local e Métricas Irredutíveis	25
2.3 Violação de Causalidade	33
2.4 Campos Vetoriais de Killing	35

3	Soluções Tipo Gödel na Teoria de Gravitação com Matéria Induzida	49
3.1	Introdução	49
3.2	Teoria de Gravitação com Matéria Induzida	51
3.3	Soluções Tipo Gödel em Gravitação com MI	54
A	O Sistema de Computação Algébrica SHEEP/CLASSI	65
A.1	Sistema Classi/Sheep	65
A.2	Arquivos de Programas para Espaços-tempos 5D Tipo Gödel	74

Introdução

Na teoria da relatividade geral (TRG) as equações de campo se apresentam na forma

$$G_{\alpha\beta} = k T_{\alpha\beta} , \quad (1)$$

e relacionam a geometria do espaço-tempo com sua fonte. O ente matemático utilizado para representar o espaço-tempo (coleção de todos os eventos) é um par (M, g) , onde M é uma variedade conexa quadridimensional e g é uma métrica localmente Lorentziana definida sobre a variedade. Entretanto a relatividade geral não prescreve as variadas formas de matéria-energia e recorre a outros ramos da física para construção do tensor energia-momentum $T_{\alpha\beta}$. Neste sentido, a teoria da relatividade geral não é uma teoria fechada, a separação entre o campo gravitacional e sua fonte tem sido considerado como um fato indesejável na TRG [1, 2].

Kaluza e Klein [3, 4, 5], na década de 20, abordaram o problema da unificação da teoria de gravitação com o eletromagnetismo, construindo uma única teoria em 5 dimensões, dando início a uma importante linha de pesquisa na história da física, que são as grandes teorias de unificação. Wesson [6, 7, 8] propôs uma teoria de gravitação tipo Kaluza-Klein em 5 dimensões não compactificada, com uma dimensão extra proporcional à massa em repouso. Em 1990 Wesson e co-autores [9, 10] propuseram uma nova teoria de gravitação, na mesma linha da antiga idéia de Einstein [1] de *geometrização da matéria*, em que a matéria e a maneira como ela determina a geometria do espaço-tempo são tratados do

ponto de vista de uma teoria puramente geométrica penta-dimensional, com equações de campo dadas por

$$\widehat{G}_{AB} = 0. \quad (A, B = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

Nesta teoria de gravitação em 5D pode-se considerar que as equações de campo (2) fornecem curvatura ao espaço-tempo e matéria em 4D. Pode-se mostrar que sempre é possível reescrever as quinze equações de campo (2) como um conjunto de equações tais que dez delas são exatamente as equações de campo de Einstein (1) com um tensor de energia-momentum $T_{\alpha\beta}$ induzido em (1+3)-D dado por

$$8\pi G T_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_{\beta}(\partial_{\alpha}\phi)}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left[\frac{\partial_4\phi \partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi} - \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta}) + g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\gamma} \partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} + \frac{g_{\alpha\beta}}{4} (\partial_4 g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} + (g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta})^2) \right],$$

onde as letras gregas denotam índices quadridimensionais, e variam de 0 a 3, $g_{44} \equiv \varepsilon \phi^2$ com $\varepsilon^2 = \pm 1$, $\partial_{\alpha}\phi \equiv \partial\phi / \partial x^{\alpha}$, $\partial_4 \equiv \partial / \partial x^4$, ∇_{α} denota a derivada covariante usual em 4D.

As cinco equações restantes (uma equação de onda e quatro leis de conservação) são automaticamente satisfeitas por qualquer solução das equações no vácuo (2). Desta forma, não somente a matéria, mas também seu papel na determinação da geometria do espaço-tempo pode ser considerada com tendo uma origem pentadimensional geométrica. Esta abordagem unifica o campo gravitacional com sua fonte num contexto geométrico 5D. Esta versão da TRG estendida a 5D é conhecida como a teoria de gravitação com matéria induzida (MI). A referência [11] contém uma revisão dos recentes trabalhos relacionados a esta teoria com MI, e também inclui uma extensa lista de referências para o leitor interessado. Os fatos mais importantes desta teoria e suas implicações astrofísicas e cosmológicas foram examinados nos trabalhos [13] – [30].

Na TRG a estrutura causal do espaço-tempo 4D tem localmente a mesma natureza do espaço-tempo da relatividade especial, isto significa que vale localmente a causalidade

dade. A questão global, entretanto, é deixada em aberto. Em larga escala, a violação de causalidade não está excluída, e atualmente é bem conhecido que existem soluções das equações de campo de Einstein que possuem anomalia causal, isto é, que admitem curvas tipo tempo fechadas. A solução exata encontrada por Gödel em 1949 [31], é um exemplo de espaço-tempo da TRG em 4D que não exclui linhas de universo tipo tempo fechadas. De fato, o caráter Lorentziano da teoria conduz apenas à validade local do *princípio de causalidade*. Devido a inusitada propriedade de permitir a violação de causalidade, o modelo de Gödel tem uma reconhecida importância e portanto tem sido objeto de vários trabalhos de investigação. Para uma listagem bibliográfica sobre os modelos cosmológicos tipo Gödel com matéria em rotação e anomalia causal na TRG ver as referências [32] - [52] e em outras teorias de gravitação ver [53] - [59]. Dois artigos recentes se referem a espaços-tempos tipo Gödel pentadimensionais. Primeiro na referência [59] se investiga as propriedades geométricas das variedades Riemannianas pentadimensionais que possuem uma métrica tipo Gödel 5D como uma extensão imediata da métrica tipo Gödel 4D da TRG. Um dos resultados é a obtenção de um conjunto irredutível de métricas tipo Gödel isometricamente não equivalentes e localmente homogêneas em 5D. Mostra-se que em todas as classes de variedades com métrica tipo Gödel geometricamente homogêneas à exceção da classe *IV* existe quebra de causalidade. Como não foi usada nenhuma equação particular de campo, os resultados de [59] valem para qualquer teoria de gravidade Kaluza-Klein em 5D. No segundo artigo [60] discute-se a possibilidade de que as variedades espaço-temporais tipo Gödel 5D sejam soluções da teoria de gravidade “espaço-tempo-massa” (teoria de gravidade ETM) e da teoria de gravidade com matéria induzida, ou seja, a questão se estas teorias admitem ou não como solução as famílias não causais de métricas tipo Gödel estudadas na referência [59]. Mostra-se em particular que a teoria de gravidade com MI exclui as geometrias tipo Gödel 5D estudadas na ref. [59], como

solução de suas equações de campo.

Em ambos os artigos [59, 60] a família de métricas tipo Gödel 5D discutidas são tais que as seções $u = cte$ (u é a coordenada extra) são as métricas tipo Gödel 4D [40, 39]. Na verdade, o elemento de linha utilizado em [59, 60] não depende da quinta coordenada u , portanto, em relação à teoria de gravidade com MI uma equação de estado tipo radiação é uma hipótese subjacente a ambos os artigos. Entretanto, é conhecido que a dependência da métrica 5D com relação à coordenada extra é necessária para assegurar que a teoria com matéria induzida permita a indução de matéria de tipo geral em 4D (ou seja a equação de campo da TRG com fonte arbitrária de matéria) [11].

Neste trabalho de tese, examinamos algumas propriedades geométricas de uma classe *generalizada* de variedades 5D com métrica tipo Gödel em que a métrica depende explicitamente da quinta coordenada, generalizando os resultados da referência [59]. Além disto, buscamos saber se a teoria de gravidade de matéria induzida formulada por Wesson e co-autores [9, 10] admite as variedades com métrica generalizada tipo Gödel como soluções de sua equação de campo, generalizando desta forma os resultados da ref. [60]. A seguir mostraremos a forma como foi organizado este trabalho de tese.

No capítulo primeiro fazemos uma revisão da abordagem do problema de equivalência, formulada originalmente por E. Cartan [64]. Esta abordagem permite saber, por exemplo se duas variedades Riemannianas n -dimensionais são ou não localmente isométricas, questão importante em nosso trabalho. Primeiro apresentamos a formulação do problema de equivalência. Depois mostramos a solução deste problema feita por E. Cartan. Por último apresentamos a abordagem de Karlhede [66] - [69] que pode ser utilizada para resolver o problema de equivalência local entre duas variedades Riemannianas, de modo que, com um número finito de passos pode-se decidir pela equivalência ou não das variedades (para outras aplicações ver as referências [70, 71]).

No capítulo dois estudamos uma família de variedades pentadimensionais com uma métrica tipo Gödel *generalizada*, discutimos as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade local destas variedades, e também determinamos um conjunto irreduzível de métricas homogêneas deste tipo, isometricamente não equivalentes, dividindo deste modo estas variedades em classes disjuntas dependendo dos valores dos parâmetros κ , m^2 e w . Discutimos ainda a existência ou não de circunferências tipo tempo fechadas para cada uma das classes de variedades apresentadas. Encontramos os geradores infinitesimais do grupo de isometria (campos vetoriais de Killing) para cada uma destas classes de variedades 5D tipo Gödel, assim como a álgebra de Lie associada a cada grupo de isometria.

No capítulo três examinamos se a teoria de gravitação com MI admite como solução das equações de campo as geometrias das classes de métricas generalizadas do tipo Gödel 5D discutidas no capítulo dois. Discutimos também se há ou não violação de causalidade local para a única solução encontrada da teoria de gravitação com MI

No apêndice A.1 faremos um resumo das principais características do sistema de computação algébrica CLASSI/SHEEP, sistema este desenvolvido por I. Frick, J. Åman, M. A. H. MacCallum e outros [61]. Ele é útil em cálculos que são usuais na TRG, tais como cálculo de conexões, curvaturas e a determinação das equações de Killing em base coordenada ou em base não-coordenadas. Em nosso caso serão úteis no capítulo três, também fazemos um resumo dos comandos principais deste sistema de computação algébrica e sua utilidade.

No apêndice A.2 apresentamos a listagem dos arquivos dos programas que escrevemos, utilizando o sistema de computação algébrica CLASSI/SHEEP, para o cálculo do tensor de curvatura e a derivada covariante do tensor de curvatura em base de pântadas, e para encontrar as equações de Killing na base de pântadas.

Os resultados principais deste trabalho de tese foram condensados num artigo científico

publicado na revista Journal of Mathematical Physics [89].

Capítulo 1

Problema de Equivalência

1.1 Introdução

Na Relatividade Geral o princípio da covariância estabelece que as leis físicas devem ser expressas como equações tensoriais e permanecem válidas sob transformações arbitrárias de coordenadas, implicando na inexistência de referenciais privilegiados. Esta arbitrariedade na escolha dos referenciais dá origem a problemas práticos, como distinguir efeitos físicos reais de efeitos de coordenadas. Este problema pode ser visto como parte de um outro, que é o de decidir quando duas soluções exatas das equações de campo da TRG, aparentemente distintas, são localmente equivalentes, i.e representam o mesmo campo gravitacional em coordenadas diferentes — *o problema de equivalência*. Para abordar este problema do ponto de vista da física, é necessária uma descrição invariante do campo gravitacional, isto é, a partir de alguma métrica em algum sistema de coordenadas, gostaríamos de obter uma completa descrição do campo gravitacional independente do sistema de coordenadas. Neste capítulo vamos ver que é possível obter certos escalares, no sentido de que eles são invariantes sob transformações gerais de coordenadas. Portanto, com estes escalares pode-se descrever localmente o espaço-tempo de uma maneira independente das

coordenadas.

Sabemos dos trabalhos de E. Cartan que uma variedade Riemanniana n -dimensional é completamente caracterizada pelo tensor de curvatura e suas $n(n+1)/2$ primeiras derivadas covariantes [67, 64, 71]. As componentes nas bases não-coordenadas destes objetos são escalares sob transformações de coordenadas, embora elas possam mudar sob rotações das bases não-coordenadas. Entretanto, a escolha de uma base não-coordenada (ou base de tetradas no caso quadridimensional) num ponto da variedade é também arbitrária. Logo, podemos dizer que em um certo sentido as possíveis bases não-coordenadas constituem uma simetria da geometria. Assim podemos pensar que as componentes numa base não-coordenada do tensor de curvatura e suas derivadas covariantes podem ser úteis na descrição das propriedades locais da geometria, independente do sistema local de coordenadas, podem ser úteis no estudo e interpretação das soluções de equações de campo das teorias geométricas da gravitação, como por exemplo a TRG. São úteis também no problema de equivalência e se quisermos determinar se duas variedades Riemannianas são localmente equivalentes, temos que comparar dois conjuntos de invariantes, consistindo cada um do tensor de curvatura e um número finito de suas derivadas covariantes, e as variedades serão ditas equivalentes se, e somente se, estes invariantes são compatíveis. Contudo estes invariantes estão expressos em diferentes sistemas de coordenadas, portanto eventualmente podem parecer diferentes e é necessário ter em conta este fato para resolver o problema de equivalência.

1.2 Problema de Equivalência Local

A conexão e a métrica podem ser introduzidas como estruturas independentes numa variedade diferenciável. Na TRG, contudo, a conexão é determinada pela métrica, assim por exemplo, numa base coordenada a conexão é dada através dos símbolos de Christoffel.

O campo gravitacional fica completamente determinado pela métrica g (explicitamente com as componentes $g_{\mu\nu}$ numa dada base), que é determinada a partir das equações de campo de Einstein. Do ponto de vista matemático é totalmente irrelevante se a geometria representa ou não um espaço-tempo ou seja, se a métrica é solução das equações de alguma teoria da gravitação [65]

Vamos dar alguns exemplos para entender melhor o problema de equivalência.

- Um cone e um cilindro são localmente euclidianos, e portanto eles são localmente equivalentes. Note-se porém que globalmente eles não são equivalentes.
- Seja (M, ρ) uma variedade Riemanniana com métrica ρ e com elemento de linha

$$ds^2 = \rho_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv dx^2 + dy^2,$$

seja (N, σ) outra variedade Riemanniana com métrica σ e com elemento de linha

$$ds^2 = \sigma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

As duas variedades Riemannianas são obviamente localmente equivalentes, de vez que as transformações $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, levam as componentes da métrica ρ nas componentes da métrica σ .

Um exemplo menos familiar necessita uma maneira sistemática de deduzir a equivalência ou não de duas variedades. Na prática existe um procedimento para decidir a equivalência local ou não de duas variedades e usualmente chamamos este procedimento de técnica do problema de equivalência.

1.2.1 Teorema de Cartan

Teorema 1 *Sejam dois conjuntos de n 1-formas linearmente independentes $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n\} \in T_p^*(M)$ e $\{\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \dots, \tilde{\omega}^n\} \in T_q^*(M)$. Então existe um difeomorfismo local F tal que $q = F(p)$ e $\omega^A|_p = \tilde{\omega}^A|_q$, onde $A = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow$ o sistema de equações algébricas*

(1.1) são compatíveis

$$\begin{aligned}
\tilde{C}^A_{BC}(F(p)) &= C^A_{BC}(p), \\
\tilde{C}^A_{BC;M_1}(F(p)) &= C^A_{BC;M_1}(p), \\
\tilde{C}^A_{BC;M_1M_2}(F(p)) &= C^A_{BC;M_1M_2}(p), \\
&\vdots \\
\tilde{C}^A_{BC;M_1M_2\dots M_q}(F(p)) &= C^A_{BC;M_1M_2\dots M_q}(p).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Este sistema de equações está formado pelos objetos C^A_{BC} e suas derivadas covariantes na base não-coordenada, o ponto e vírgula indica derivada covariante na base não-coordenada. Portanto, M_1, M_2, \dots, M_q são índices de derivadas covariantes. Os coeficientes em cada membro da equação (1.1) são obtidos através do cálculo das derivadas exteriores

$$d\omega^A = \frac{1}{2} C^A_{BC}\omega^B \wedge \omega^C, \tag{1.2}$$

onde

$$C^A_{BC} = -C^A_{CB}, \tag{1.3}$$

e além

$$\begin{aligned}
dC^A_{BC} &= C^A_{BC;M_1}\omega^{M_1}, \\
dC^A_{BC;M_1} &= C^A_{BC;M_1M_2}\omega^{M_2},
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente, ver [66, 78].

A derivada covariante de ordem $(q + 1)$ é a derivada de ordem mais baixa que é funcionalmente dependente do conjunto $\{C^A_{BC}, C^A_{BC;M_1}, \dots, C^A_{BC;M_1M_2\dots M_q}\}$, que contém apenas derivadas até a ordem $q - 1$, considerando que cada derivada contribui pelo menos

¹As funções f_i são ditas funcionalmente independentes se suas diferenciais df_i são linearmente independentes, neste caso não se pode escrever uma das funções em termos das outras.

com uma nova função independente, obtemos o limite $(q + 1) \leq n$, onde n é o número de coordenadas de M . O leitor interessado na prova do teorema de Cartan pode ver as referências de E. Cartan [64] ou Karlhede [66].

1.3 Equivalência Local de Variedades

A idéia básica para resolver o problema local de equivalência entre duas variedades Riemannianas consiste em comparar um conjunto suficiente de quantidades invariantes sob transformações de coordenadas obtidas respectivamente das métricas e que, da comparação destas quantidades, possibilitem decidir pela equivalência ou não destas variedades [64] – [68].

Cartan mostrou que, estas quantidades invariantes que necessitamos são o tensor de Riemann e suas derivadas covariantes. Uma maneira heurística e simples de ver que isso é possível é a seguinte : Seja M uma variedade Riemanniana, seja (U, φ) uma carta local de M tal que $p, p_0 \in U$, $\bar{x} = \varphi(p)$ é a coordenada local de p e $\bar{x}_0 = \varphi(p_0)$ é a coordenada local de p_0 , e que para todo p_0 , $g_{AB}(p_0)$ é uma métrica Minkowskiana, ou seja $g_{AB}(p_0) = \eta_{AB} = (+, -, -, -, -, \dots -)$. Então pode-se mostrar que

$$g_{AB}(\bar{x}) = g_{AB}(\bar{x}_0) - \frac{1}{3} R_{ABCD}(\bar{x}^C - \bar{x}_0^C)(\bar{x}^D - \bar{x}_0^D) + \dots(\text{série de potências})(\bar{x}^F - \bar{x}_0^F)\dots, \quad (1.4)$$

com função de R_{ABCD} e suas derivadas covariantes como coeficientes, onde $\bar{x}_0 = \varphi(p_0)$ [68].

Da equação (1.4) pode-se ver que a métrica é totalmente determinada em uma vizinhança de p_0 pelo tensor de curvatura e suas derivadas covariantes em p_0 , ver [64] – [67]. Portanto, uma primeira idéia para formar invariantes sob transformações de coordenadas seria pensar no tensor de curvatura de Riemann e de suas derivadas covariantes como por exemplo, os escalares $R^\mu{}_\mu$, $R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu;\sigma}R^{\mu\nu;\sigma}$ etc. Infelizmente estes escalares não

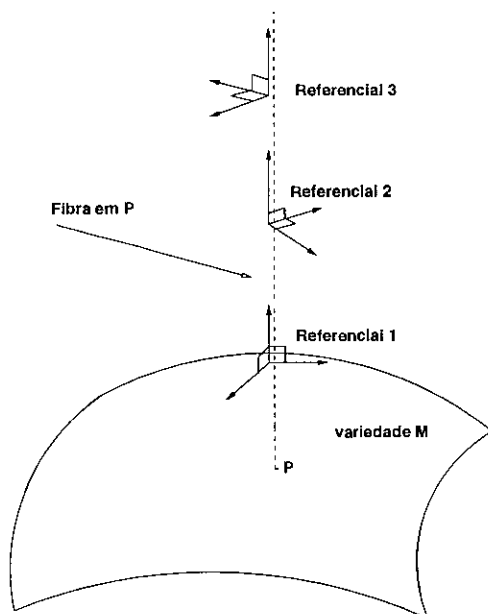
servem, porque existem variedades com curvatura local diferente de zero, onde todos estes escalares se anulam, e que são indistinguíveis (usando tais invariantes) de uma geometria plana. Um exemplo desse tipo se apresenta na referência [81]. Um método eficaz utiliza as componentes numa base não-coordenada de quantidades tensoriais em ambas variedades, conforme discutimos adiante.

O contexto mais adequado para resolver o problema de equivalência local entre variedades Riemannianas é dado pelo fibrado dos referenciais generalizados $B(M)$ definido numa variedade M e tal que $B(M) = \cup_{p \in M} B_p$, onde B_p é o conjunto de todos os referenciais generalizados no ponto $p \in M$, ou seja

$$B_p = \{Referencial1, Referencial2, Referencial3, \dots, Referencial..\}.$$

A transição de um referencial a outro é obtida através de um elemento do grupo $GL(n, \mathcal{R})$ (veja figura).

No caso particular em que todos os referenciais são ortogonais, temos por definição $F(M) = \cup_{p \in M} F_p$, onde F_p é o conjunto de todos os referenciais ortogonais admissíveis no ponto $p \in M$.



Estes referenciais são definidos pelas bases $\{\xi_A\}$, do seguinte modo :

$$\xi_A(p) = \xi_A^\mu(p) \partial_\mu |_p, \quad (1.5)$$

tal que $(A = 1, \dots, n)$. Por definição $\{\partial_\mu\} |_p = \{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\} |_p$ é um referencial especial chamado *base coordenada*. Em geral $\{\xi_A(p)\}$ chamam-se *bases não-coordenadas* no mesmo ponto p , no caso quadridimensional chamam-se *base de tetradas*². Em geral $\{\xi_A^\mu\} \in GL(n, \mathcal{R})$, na TRG a variedade base M (variedade espaço-temporal) é localmente Lorentziana, logo $\{\xi_A^\mu\} \in SO(n-1, 1)$. Neste caso a fibra F_p tem estrutura do grupo $SO(n-1, 1)$, logo a dimensão da variedade fibra F_p é igual à dimensão do grupo $SO(n-1, 1)$, isto é igual a $n(n-1)/2$. Observe que os referenciais ortogonais são definidos no mesmo ponto, e estão relacionados através de rotações. É por isso que $\{A, B, C, \dots\}$ são chamados índices de rotações. O fibrado $F(M)$ incorpora naturalmente a liberdade de rotações dos referenciais ortogonais generalizados. As coordenadas de $F(M)$ estão definidas pelas coordenadas $\{x^\mu = \varphi^\mu(p)\}$ de M e pelas coordenadas $\{\xi_A\}$ da fibra F_p .

Neste contexto, a definição do problema de equivalência local pode ser reformulada, usando a linguagem de fibrados, como podemos ver na referência [72].

1.3.1 O Teorema de Equivalência

Vamos dar a seguir algumas definições úteis para entender o teorema de equivalência. Seja M a variedade Riemanniana, *base* do $F(M)$, onde $F(M)$ é o fibrado referencial de Lorentz, que é uma variedade diferenciável por construção, de dimensão $n(n+1)/2$.

Dado $u \in F(M)$ definimos a projeção π sobre M do seguinte modo :

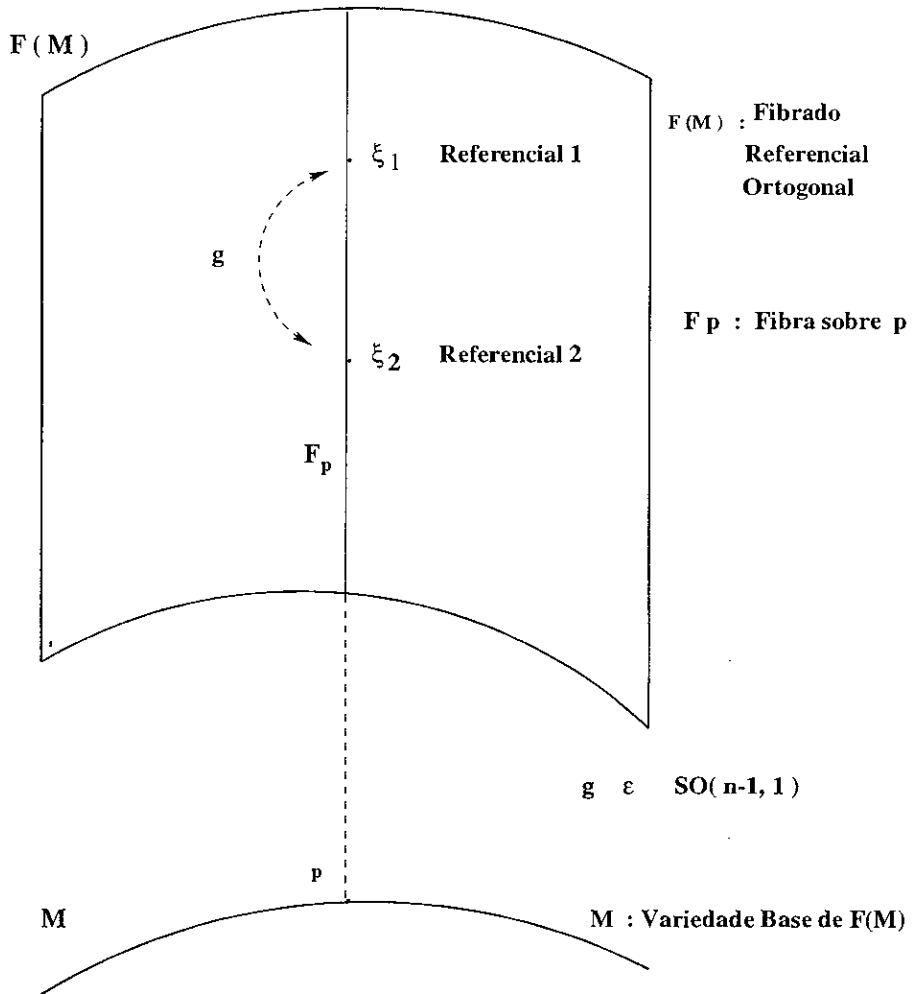
$$\pi : F(M) \longrightarrow M \quad (1.6)$$

²Na verdade $\{\partial_\mu\} |_p$, $\{\xi_A(p)\}$ são bases do espaço tangente $T_p(M)$.

$$u \mapsto \pi(u) = p. \quad (1.7)$$

$\pi^{-1}(p) = F_p$ é a fibra sobre o ponto $p \in M$, com estrutura de grupo $SO(n-1, 1)$, portanto de dimensão $n(n-1)/2$ (veja figura).

Denominaremos por $T_u(F(M))$ o espaço tangente a $F(M)$ e por $T_u^*(F(M))$ o espaço cotangente a $F(M)$.



O espaço vetorial $T_u(F(M))$ pode ser descomposto numa forma única como a soma direta de um sub-espaço vertical denotado por $V_u(F(M))$ e outro sub-espaço horizontal denotado

por $H_u(F(M))$, tal que

$$T_u(F(M)) = H_u(F(M)) \oplus V_u(F(M)). \quad (1.8)$$

Onde por definição $V_u(F(M))$ é o conjunto de todos os vetores que são tangentes à fibra F_p [73, 82].

A expressão (1.8) assegura que todo vetor do espaço $T_u(F(M))$ pode-se decompor em duas componentes, uma que pertence ao sub-espaço $V_u(F(M))$ e outra que pertence ao sub-espaço $H_u(F(M))$. Pode-se mostrar também que a projeção π induz um isomorfismo entre $T_p(M)$ e $H_u(F(M))$ [73, 82]. De uma maneira similar o espaço cotangente $T_u^*(F(M))$ pode ser decomposto como uma soma direta dos sub-espaços $H_u^*(F(M))$ e $V_u^*(F(M))$ conforme

$$T_u^*(F(M)) = H_u^*(F(M)) \oplus V_u^*(F(M)). \quad (1.9)$$

Onde $H_u^*(F(M))$ é o sub-espaço horizontal de $T_u^*(F(M))$ gerado pelas 1-formas canônicas $\{\Theta^A\}$, $V_u^*(F(M))$ é o sub-espaço vertical de $T_u^*(F(M))$ gerado pelas $n(n+1)/2$ 1-formas de conexão $\{W^A_B\}$ definidas em $F(M)$ [74]. Em resumo o conjunto $\{\Theta^A, W^A_B\}$ forma uma base linearmente independente no espaço $T_u^*(F(M))$.

A variedade diferenciável $F(M)$ incorpora a liberdade de escolha dos referenciais de Lorentz em cada ponto da variedade. Então a abordagem do problema de equivalência local entre duas variedades M e \widetilde{M} é feita de forma mais apropriada utilizando-se os fibrados $F(M)$ e $F(\widetilde{M})$, no sentido que $\{\Theta^A, W^A_B\}$ define univocamente uma base não-coordenada no fibrado $F(M)$, e do mesmo modo $\{\widetilde{\Theta}^A, \widetilde{W}^A_B\}$ define univocamente uma base não-coordenada no fibrado $F(\widetilde{M})$ [73, 72]. Logo o teorema 1 de Cartan pode ser utilizado para obter as condições necessárias e suficientes para a equivalência local entre variedades Riemannianas. A idéia básica é que se duas variedades Riemannianas M e \widetilde{M} são localmente equivalentes então seus fibrados referenciais de Lorentz também o são.

Dizemos que duas variedades Riemannianas M e \widetilde{M} são localmente equivalentes, quando existe um difeomorfismo local $J : F(M) \longrightarrow F(\widetilde{M})$ tal que

$$J^* \widetilde{\Theta}^A = \Theta^A \quad (1.10)$$

$$J^* \widetilde{W}^A{}_B = W^A{}_B. \quad (1.11)$$

Onde $J^* : T_u^*(F(\widetilde{M})) \longrightarrow T_u^*(F(M))$, é o mapeamento "pull-back" definido entre os espaços cotangente de $F(M)$ e $F(\widetilde{M})$ [73, 74]. Logo para resolver o problema de equivalência local entre variedades M e \widetilde{M} aplicamos o teorema 1 de Cartan as 1-formas $\{\Theta^A, W^A{}_B\}$ e $\{\widetilde{\Theta}^A, \widetilde{W}^A{}_B\}$.

Para isto temos que calcular as compontes dos objetos correspondentes aos C_{ABC} definidos no teorema 1 de Cartan. De acordo com a equação (1.2) estes objetos estão definidos pelas componentes das 2-formas $d \Theta^A$, $d W^A{}_B$, as quais podem ser obtidas das *equações de estrutura de Cartan* para o fibrado $F(M)$ dadas (quando não há torção) por [73, 75]

$$d \Theta^A = W^A{}_B \wedge \Theta^B \quad (1.12)$$

$$d W^A{}_B = W^A{}_C \wedge W^C{}_B + \frac{1}{2} R^A{}_{BCD} \Theta^C \wedge \Theta^D. \quad (1.13)$$

Portanto, as componentes $R^A{}_{BCD}$ da curvatura da variedade $F(M)$ fazem o papel dos coeficientes $C^A{}_{BCD}$ nas equações (1.1). Tomando a derivada exterior de $R^A{}_{BCD}$ encontramos os outros coeficientes nas equações (1.1). A título de exemplo apresentamos a seguir a derivada exterior do tensor de curvatura e a derivada exterior da derivada covariante do tensor de curvatura. (ver a referência [66]) :

$$\begin{aligned} d R_{ABCD} &= R_{EBCD} W^E{}_A + R_{AECD} W^E{}_B \\ &+ R_{ABED} W^E{}_C + R_{ABCE} W^E{}_D + R_{ABCD;E} W^E \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$d R_{ABCD;M_1} = R_{EBCD;M_1} W^E{}_A + R_{AECD;M_1} W^E{}_B + R_{ABED;M_1} W^E{}_C$$

$$+ R_{ABCE;M_1} W^E{}_D + R_{ABCD;E} W^E{}_{M_1} + R_{ABCD;M_1 M_2} W^{M_2} \quad (1.15)$$

Do teorema 1 de Cartan podemos ver que para gerar os coeficientes correspondentes a C_{ABC} e suas derivadas covariantes na equação (1.1) somente temos que fazer a derivada exterior do novo termo em cada etapa de derivação. Estes novos termos são os últimos termos nas equações (1.14) – (1.15). O ponto importante aqui é a unicidade das bases $\{\Theta^A, W^A{}_B\}$, que é fixada pela métrica e sua correspondente conexão. Se duas variedades M e \widetilde{M} são equivalentes, deve existir um mapeamento difeomorfo F entre $F(M)$ e $F(\widetilde{M})$, e a unicidade das bases em cada variedade $F(M)$ de $F(\widetilde{M})$ implica na equivalência destas bases sob o mapeamento F . Logo segue naturalmente o teorema seguinte

Teorema 2 *Duas variedades Riemannianas M e \widetilde{M} ambas de dimensão n , são localmente equivalentes se existe um difeomorfismo entre seus correspondentes fibrados referenciais $F(M)$ e $F(\widetilde{M})$, tal que as equações algébricas formadas com as componentes das curvaturas e de suas derivadas covariantes,*

$$\begin{aligned} \widetilde{R}^A{}_{BCD} &= R^A{}_{BCD} , \\ \widetilde{R}^A{}_{BCD;M_1} &= R^A{}_{BCD;M_1} , \\ \widetilde{R}^A{}_{BCD;M_1 M_2} &= R^A{}_{BCD;M_1 M_2} , \\ &\vdots \\ \widetilde{R}^A{}_{BCD;M_1 M_2 \dots M_q} &= R^A{}_{BCD;M_1 M_2 \dots M_q} , \end{aligned} \quad (1.16)$$

sejam compatíveis em termos das coordenadas $\{x^\mu, \xi_A\}$ e $\{\tilde{x}^\mu, \tilde{\xi}_A\}$ dos fibrados $F(M)$ e $F(\widetilde{M})$, respectivamente. Reciprocamente, se as equações (1.16) são compatíveis, então M e \widetilde{M} são equivalentes localmente [66, 68].

Aqui, de acordo com o teorema 1 de Cartan, a derivada covariante de ordem $(q+1)$ da curvatura é a derivada de ordem mais baixa que é funcionalmente dependente das derivadas

covariantes de ordens $0, 1, 2, 3, \dots, q$, onde $(q + 1) \leq 1/2n(n + 1) = \dim(M) + \dim(F_p) = \dim F(M)$. O teorema de equivalência, além de estabelecer as condições necessárias e suficientes para a equivalência, dadas pelas equações (1.16), também estabelece uma descrição local, independente de coordenadas da variedade Riemanniana através do conjunto

$$\Delta_q = \{R^A_{BCD}, R^A_{BCD;M_1}, R^A_{BCD;M_1M_2}, \dots, R^A_{BCD;M_1M_2\dots M_q}\}, \quad (1.17)$$

formado pelas componentes do tensor de curvatura do fibrado $F(M)$ e de suas derivadas covariantes até no máximo a ordem $n(n + 1)/2$ para uma variedade de dimensão n .

Este conjunto são escalares sob transformações de coordenadas, por isso são denominados *escalares de Cartan* [80, 72].

1.3.2 Escalares de Cartan e o Grupo de Isometria

Da subseção anterior temos que o conjunto de escalares de Cartan Δ_q permite uma descrição das propriedades locais da geometria Riemanniana [66], isto significa que todas as informações que podemos obter de $g_{\mu\nu}$ também podem, em princípio, ser obtidas a partir dos escalares de Cartan. Nesta seção vamos apresentar o teorema que permite obter as dimensões do grupo de isometria utilizando os escalares de Cartan.

Como sabemos, o grupo de isometria mapeia uma variedade Riemanniana em outra variedade Riemanniana preservando a métrica pelo menos localmente. Por outro lado o problema de equivalência pode ser usado para investigar a isometria local de duas variedades. Por exemplo, a geometria intrínseca do cone é localmente equivalente a geometria de uma superfície plana, o que quer dizer que elas são localmente isométricas. Globalmente como sabemos, o cone e uma superfície plana não são equivalentes.

Considerando que $\{x^\mu\}$ são coordenadas de M e os parâmetros ξ_A correspondem ao grupo $SO(n - 1, 1)$, apresentamos o seguinte teorema (veja refs. [64, 66] para uma demonstração)

Teorema 3 *Seja o fibrado $F(M)$ dos referenciais ortogonais generalizados, com curvatura R^A_{BCD} e coordenadas (x^μ, ξ^A) , definido sobre uma variedade Riemanniana M de dimensão n , e considere que existem k_q escalares de Cartan funcionalmente independentes no conjunto $\Delta_q = \{R^A_{BCD}, R^A_{BCD;M_1}, R^A_{BCD;M_1M_2}, \dots, R^A_{BCD;M_1M_2\dots M_q}\}$. Seja m_q o número destes escalares que são funções das coordenadas ξ^A , e t_q o número destes escalares que são funções das coordenadas x^μ . Então, existem em M um grupo de isometria de dimensão r tal que*

$$r = n(n + 1)/2 - k_q, \quad (1.18)$$

com um grupo de isotropia de dimensão s

$$s = n(n + 1)/2 - m_q, \quad (1.19)$$

onde a dimensão da órbita d é

$$d = r - s = n - t_q. \quad (1.20)$$

Aqui estamos vendo um exemplo de aplicação dos escalares de Cartan na determinação de propriedades locais de uma variedade Riemanniana. De fato existem outras aplicações como a determinação da álgebra de Lie do grupo de isometria [70, 80].

Na próxima seção apresentaremos um algoritmo para testar o método de equivalência. Como resultado deste algoritmo foi possível estabelecer critérios para uma classificação de variedades Riemannianas em termos dos escalares de Cartan, invariantes sob transformações de coordenadas.

1.4 Algoritmo de Karlhede

O teorema 2 fornece um método para determinar se duas variedades são ou não localmente equivalentes, e determina também que o número máximo de derivadas covariantes do

tensor de curvatura deve cumprir $q + 1 \leq n(n + 1)/2$. Por exemplo: para uma variedade pentadimensional $q \leq 14$. Este limite superior pode ser diminuído usando o formalismo espinorial da relatividade e usando a abordagem espinorial do problema de equivalência (ver a seção 7 da referência [66]). A solução de Cartan resolve formalmente o problema de equivalência, mas na prática se torna muito difícil, pois por exemplo, para espaços tempos quadridimensionais, além de usar 4+6 coordenadas (x^μ, ξ^A) do fibrado $F(M)$, pode envolver cálculos com mais de 8690 quantidades independentes [71]. Karlhede propõe um procedimento prático [66], que depois de um número finito de passos permite decidir se duas variedades são equivalentes ou não. O procedimento de Karlhede permite realizar os cálculos somente na variedade M e reduz bastante o número de quantidades calculadas.

Procedimento :

- Escolher uma base não-coordenada relativa a métrica constante η_{AB} , no caso pentadimensional uma base de pñtadas.
- Calcular as componentes R^A_{BCD} do tensor de Riemann na base não-coordenada fixa anteriormente escolhida.
- Calcular t_0 , o número de funções funcionalmente independentes entre as componentes do tensor de curvatura ($t_0 \leq n$). Note que agora os elementos R^A_{BCD} são funções de x^μ , porque o referencial ξ_A está fixado.
- Determine o grupo de isotropia H_0 , subgrupo do grupo de isometria G , que deixam invariantes R^A_{BCD} . (H_0 pode conter transformações discretas desde que G_r as possua também).
- Determinar uma base não-coordenada padrão pela exigência de que sob a ação de H_0 , as componentes R_{ABCD} tenha uma forma especial chamada forma canônica.
- Calcular $R^A_{BCD;M_1}$ na base não coordenada padrão.

- Determinar t_1 , o número de componentes entre R_{ABCD} e $R^A{}_{BCD;M_1}$ que são funcionalmente independentes entre si.
- Determinar o sub-grupo de isotropia H_1 que deixa $\{R_{ABCD}, R^A{}_{BCD;M_1}\}$ invariante. Em geral $H_1 \subset H_0$.

Se $t_1 = t_0$, $H_1 = H_0$; R_{ABCD} e \tilde{R}_{ABCD} tem a mesma forma canônica, $R^A{}_{BCD;M_1}$ e $\tilde{R}^A{}_{BCD;M_1}$ tem a mesma forma canônica, e além disso

$$\begin{aligned} R_{ABCD} &= \tilde{R}_{ABCD} \\ R^A{}_{BCD;M_1} &= \tilde{R}^A{}_{BCD;M_1} \end{aligned}$$

são compatíveis como equações em x^μ e \tilde{x}^μ , então as duas variedades são localmente equivalentes e o conjunto $\Delta_1 = \{R_{ABCD}, R^A{}_{BCD;M_1}\}$ é um conjunto completo de invariantes que descreve a geometria local da variedade.

Se $t_1 \neq t_0$ ou $H_1 \neq H_0$, temos que determinar uma nova base não coordenada padrão, onde $R^A{}_{BCD;M_1}$ toma uma forma canônica.

Repetimos o processo com a segunda derivada de R_{ABCD} e continuamos com a terceira, e assim por diante ($H_q \subseteq H_{q-1}$), até que $t_{q+1} = t_q$ e $H_{q+1} = H_q$. Então o conjunto

$$\Delta_q = \{R^A{}_{BCD}, R^A{}_{BCD;M_1}, R^A{}_{BCD;M_1M_2}, \dots, R^A{}_{BCD;M_1M_2\dots M_q}\} \quad (1.21)$$

dá uma descrição invariante da geometria.

A dimensão do grupo de isometria, de seu grupo de isotropia e da órbita podem ser determinadas através do teorema 3 anterior, usando

$$d = n - t_q, \quad (1.22)$$

$$r = s + n - t_q \text{ onde } s = \dim(H_q). \quad (1.23)$$

Se investigarmos as variedades (M, g) e (\tilde{M}, \tilde{g}) com o mesmo η_{AB} , com a mesma forma padrão para o tensor de curvatura e suas derivadas covariantes, e se o tensor de curvatura e

suas derivadas covariantes no conjunto de equações (1.16) são compatíveis como equações em x^μ e \tilde{x}^μ , então a condição necessária para a equivalência das variedades é $t_i = \tilde{t}_i$ e $H_i = \tilde{H}_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, q$. O conjunto

$$\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_q, H_0, H_1, H_2, \dots, H_q\}, \quad (1.24)$$

junto com a forma canônica dos elementos do conjunto (1.21) caracteriza localmente a geometria.

Capítulo 2

Homogeneidade de Espaços-tempos Riemannianos Tipo Gödel em 5D

2.1 Introdução

Em 1949, Gödel encontrou a solução particular das equações de campo de Einstein com constante cosmológica, tendo como fonte de matéria poeira com rotação [31]. A solução cosmológica de Gödel tem uma reconhecida importância na TRG. Uma medida deste fato é a quantidade de trabalhos publicados relacionados à solução de Gödel no estudo de modelos cosmológicos com rotação no contexto da relatividade geral (ver [48, 52, 89] e suas referências). Uma importante consequência da solução de Gödel é que a teoria da relatividade geral (TRG) não exclui a existência de linhas de universo tipo tempo fechadas (anomalia causal).

Um resultado relevante referente aos modelos cosmológicos do tipo Gödel no contexto da TRG é o teorema de Bampi-Zordan [35], que estabelece que toda métrica tipo Gödel solução das equações 4D de Einstein com tensor de energia momentum de um fluido perfeito é necessariamente isométrica a métrica de Gödel [31].

Em 1980, Raychaudhuri e Thakurta [37] consideraram pela primeira vez o problema geral de homogeneidade local das variedades espaço-temporais 4D tipo Gödel, e determinaram as condições necessárias para a homogeneidade espaço-temporal. Três anos depois, Rebouças e Tiomno [39] provaram que as condições necessárias encontradas por Raychaudhuri e Thakurta eram também suficientes para homogeneidade espaço-temporal. Contudo, em ambos os artigos [37, 39], o estudo da homogeneidade espaço-temporal (ET) local destas variedades contém a hipótese simplificadora de que os campos de Killing são independentes do tempo.

Usando a técnica do problema de equivalência para espaços-tempos Riemannianos em sua versão espinorial formulada por Karlhede [66, 67], e o sistema de computação algébrica chamado CLASSI [69] escrito em SHEEP [61], Rebouças e Áman acharam as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade ET local das variedades tipo Gödel sem nenhuma hipótese restritiva [46].

Uma generalização natural das variedades tipo Gödel 4D para 5D é considerar as primeiras como hipersuperfícies num universo de cinco dimensões. É neste sentido que M. Rebouças e A. Teixeira publicam um primeiro trabalho onde se estuda a homogeneidade ET de um tipo de variedades pentadimensionais com métrica tipo Gödel [59]. Usando a técnica do problema de equivalência formulada por Cartan e o sistema de computação algébrica CLASSI, eles determinaram as condições necessárias e suficientes da homogeneidade ET local para este tipo de variedades 5D [59]. Neste trabalho vamos estudar variedades Riemannianas 5D com uma métrica tipo Gödel mais geral que na ref. [59, 60]. A estas variedades vamos dar o nome de variedades Riemannianas 5D tipo Gödel *generalizada* \mathcal{M}_5 .

Similarmente aos artigos [46, 59], neste capítulo examinaremos as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade ET (espaço-temporal) local destas variedades Rie-

mannianas 5D tipo Gödel *generalizada*, usando a técnica do problema de equivalência de Cartan [64] conjuntamente com CLASSI, estendendo desta forma os resultados da referência [59, 60]. Este capítulo está organizado do seguinte modo : Primeiro, determinamos as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade ET local destas variedades Riemannianas 5D tipo Gödel *generalizadas*. Segundo, discutimos a equivalência local destas variedades Riemannianas. Demonstramos que tais variedades são caracterizadas por três parâmetros essenciais m^2 , w , e κ , e que idênticas tríadas (m^2, w, κ) correspondem a variedades Riemannianas localmente equivalentes. Terceiro, discutimos a possibilidade de existência das curvas tipo tempo fechadas para cada classe de variedades 5D Riemanniana tipo Gödel, ou seja, a possível violação da causalidade. Demonstramos que os resultados são similares ao trabalho de Rebouças e Teixeira [59] e sua contrapartida em 4D [39, 46]. Também determinamos um conjunto irredutível de campos vetoriais de Killing para cada classe de variedade e sua correspondente álgebra de Lie. Demonstramos que para uma classe de variedades 5D Riemannianas tipo Gödel existe um grupo maximal de isometria G_7 , para uma outra classe destas variedades existe um grupo maximal de isometria G_9 , e finalmente para uma terceira classe de variedades deste tipo existe um grupo maximal G_{15} .

Os resultados deste capítulo fazem parte de um trabalho científico publicado no Journal of Mathematical Physics [89].

2.2 Homogeneidade Local e Métricas Irredutíveis

O elemento de linha da variedade Riemanniana 5D tipo Gödel *generalizada* \mathcal{M}_5 que estudaremos é

$$d\hat{s}^2 = dt^2 + 2H(x)dtdy - dx^2 - G(x)dy^2 - \hat{F}^2(\hat{u})(d\hat{z}^2 + d\hat{u}^2), \quad (2.1)$$

onde $H(x)$, $G(x)$ e $\widehat{F}(\hat{u})$ são funções arbitrárias, e as 5 coordenadas ET estão ordenadas do seguinte modo : $t, x, y, \hat{z}, \hat{u}$. Este elemento de linha é uma generalização do elemento de linha dos trabalhos [59, 60].

O elemento de linha (2.1) pode ser levado, por transformações adequadamente de coordenadas, a seguinte forma :

$$d\hat{s}^2 = [dt^2 + H(x)dy^2]^2 - dx^2 - D^2(x)dy^2 - F^2(u)dz^2 - du^2, \quad (2.2)$$

onde $D^2(x) = G(x) + H^2(x)$, e u é a nova (quinta) coordenada. Em um ponto arbitrário $p \in \mathcal{M}_5$, podemos definir uma base não-coordenadas (base de pntadas) através de uma escolha de 5 vetores linearmente independentes no $T_p(M)$. A base dual de 1-formas $\{\widehat{\Theta}^A\}$ no $T_p^*(M)$ correspondente a nossa escolha é dada por

$$\widehat{\Theta}^0 = dt + H(x)dy, \quad (2.3)$$

$$\widehat{\Theta}^1 = dx, \quad (2.4)$$

$$\widehat{\Theta}^2 = D(x)dy, \quad (2.5)$$

$$\widehat{\Theta}^3 = F(u)dz, \quad (2.6)$$

$$\widehat{\Theta}^4 = du. \quad (2.7)$$

O elemento de linha (2.2) pode ser reescrito como

$$d\hat{s}^2 = \hat{\eta}_{AB} \widehat{\Theta}^A \widehat{\Theta}^B \equiv (\widehat{\Theta}^0)^2 - (\widehat{\Theta}^1)^2 - (\widehat{\Theta}^2)^2 - (\widehat{\Theta}^3)^2 - (\widehat{\Theta}^4)^2. \quad (2.8)$$

Sendo $\hat{\eta}_{AB}$ a métrica Lorentziana, com a representação matricial $\|\hat{\eta}_{AB}\| = \|\hat{\eta}^{AB}\| = \text{diag}(+, -, -, -, -)$. Usando como dados de entrada do CLASSI [61] as 1-formas (2.3) – (2.7), e o referencial Lorentziano (2.8), obtivemos as seguintes componentes não nulas do tensor de curvatura

$$\widehat{R}_{0101} = \widehat{R}_{0202} = -\left(\frac{H'}{2D}\right)^2, \quad (2.9)$$

$$\widehat{R}_{0112} = \left(\frac{H'}{2D}\right)', \quad (2.10)$$

$$\widehat{R}_{1212} = \frac{D''}{D} - 3\left(\frac{H'}{2D}\right)^2, \quad (2.11)$$

$$\widehat{R}_{3434} = \frac{\ddot{F}}{F}, \quad (2.12)$$

onde a *plica* denota derivada com respeito a x , e o *ponto* sobre uma letra denota derivada com respeito a u . Uma listagem do arquivo utilizado para o cálculo das componentes do tensor de curvatura é dada no apêndice A.2. Vamos agora discutir as condições de homogeneidade local da nossa variedade Riemanniana tipo Gödel *generalizada* \mathcal{M}_5 .

Quando o grupo de isometria local G_7 age transitivamente sobre a variedade \mathcal{M}_5 então a variedade \mathcal{M}_5 é dita *localmente homogênea* [76, 78]. Neste caso a órbita \mathcal{O}_p (p um ponto arbitrário de \mathcal{M}) é a própria variedade \mathcal{M}_5 , e assim obviamente a dimensão da variedade é igual a dimensão da órbita \mathcal{O}_p . Da expressão (1.20) $d = 5 - t_q \equiv 5$, logo $t_i = 0$ para $i = 1, 2, 3, \dots, q$, o que quer dizer que o número de funções funcionalmente independentes de $\{x^\mu\}$ no conjunto Δ_q deve ser zero, ou seja as componentes R_{ABCD} das pelas equações (2.9) – (2.12) devem ser constantes. Portanto, das equações (2.9) – (2.12) concluímos que para a homogeneidade ET local da variedade \mathcal{M}_5 é necessário que

$$\frac{H'}{D} = \text{constante} \equiv -2w, \quad (2.13)$$

$$\frac{D''}{D} = \text{constante} \equiv m^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{\ddot{F}}{F} = \text{constante} \equiv \kappa. \quad (2.15)$$

Impondo as condições necessárias, as componentes não nulas do tensor de curvatura no referencial de bases não-coordenadas ou bases de *péntadas* se reduzem a

$$\widehat{R}_{0101} = \widehat{R}_{0202} = -w^2, \quad (2.16)$$

$$\widehat{R}_{1212} = m^2 - 3w^2, \quad (2.17)$$

$$\widehat{R}_{3434} = \kappa. \quad (2.18)$$

Seguindo o método de Cartan para equivalência local de variedades, calculamos a primeira derivada covariante do tensor de curvatura na base de pntadas obtendo-se as seguintes derivadas não nulas da curvatura

$$\widehat{R}_{0112;1} = \widehat{R}_{0212;2} = w(m^2 - 4w^2), \quad (2.19)$$

sendo então claro que não dependem do valor da constante κ . Os cálculos para determinar as expressões (2.13) – (2.19) foram feitos a mão e simultaneamente com o sistema CLASSI, a listagem do arquivo utilizado está no apêndice A.2.

Na expressão (2.19) observamos que a primeira derivada covariante do tensor de curvatura é algebricamente expressível em termos do tensor de curvatura, além disso tendo em conta a imposição das condições necessárias para a homogeneidade local, observa-se que nas expressões (2.16) – (2.18) não aparece explicitamente as coordenadas $\{x^\nu\}$. Logo o número de funções funcionalmente independentes de $\{x^\nu\}$ no conjunto $\Delta_0 = \{R_{ABCD}\}$ é zero, $t_0 = 0$. Da expressão (2.19), no conjunto $\Delta_1 = \{R_{ABCD}, R_{ABCD;M_1}\}$ o número de funções funcionalmente independentes de $\{x^\nu\}$ é zero também, logo $t_1 = 0$.

Seja H_0 o grupo de isotropia que deixa invariante a $\Delta_0 = \{R_{ABCD}\}$, análogamente seja H_1 o grupo de isotropia que deixa invariante a $\Delta_1 = \{R_{ABCD}, R_{ABCD;M_1}\}$. No que concerne a dimensão do grupo residual de isotropia se distingue três tipos diferentes de classes de variedades localmente homogêneas tipo Gödel, de acordo à relevância dos parâmetros m^2, w, κ como segue ¹

1. $\dim(H_0) = \dim(H_1) = 2$ quando

a) $w \neq 0, m^2 \neq 4w^2, \forall \kappa \in \mathcal{R}$;

b) $w = 0, m^2 \neq 0, \kappa \neq 0$;

¹A integração dos campos de Killing para estas classes de variedades generalizadas tipo Gödel, que desenvolvemos na próxima seção, confirma a afirmação feita neste parágrafo.

2. $\dim(H_0) = \dim(H_1) = 4$ quando

a) $w \neq 0, m^2 = 4w^2, \forall \kappa \in \mathcal{R}$;

b) $w = 0, m^2 \neq 0, \kappa = 0$;

c) $w = 0, m^2 = 0, \kappa \neq 0$;

3) $\dim(H_0) = \dim(H_1) = 10$, quando $w = m^2 = \kappa = 0$.

Destes ítems acima e da equação (1.20) concluímos que as variedades 5D generalizadas localmente homogêneas tipo Gödel admitem grupos maximais de isometria local G_r com $r = 7, r = 9$, ou $r = 15$ agindo em uma órbita de dimensão $d=5$, isto é, \mathcal{M}_5 . Logo as condições necessárias para a homogeneidade da nossa variedade \mathcal{M}_5 dadas por (2.13) – (2.15) são também suficientes, pois observe-se que a dimensão dos 3 grupos de isometria sobre a variedade Riemanniana \mathcal{M}_5 são maiores que a dimensão da órbita $d = 5$ que é a variedade \mathcal{M}_5 .

Os resultados anteriores podem ser coletados nos seguintes teoremas :

Teorema 4 *As condições necessárias e suficientes para que uma variedade pentadimensional Riemanniana tipo Gödel generalizada seja localmente homogênea são fornecidas pelas equações (2.13) – (2.15).*

Teorema 5 *As variedades 5D Riemannianas tipo Gödel generalizadas localmente homogêneas são localmente caracterizadas por três parâmetros independentes w, κ e m^2 : idênticas tríadas (w, κ, m^2) especificam variedades localmente equivalentes.*

Teorema 6 *As variedades 5D Riemannianas tipo Gödel generalizadas localmente homogêneas admitem um grupo de isometria G_r com*

(i) $r= 7$ se uma das condições (1.a) e (1.b) é satisfeita ;

(ii) $r= 9$ se uma das condições (2.a), (2.b) ou (2.c) é satisfeita ;

(iii) $r=15$ se a condição (3) é satisfeita.

Vamos agora concentrar nossa atenção em achar um conjunto isometricamente não equivalente de métricas tipo Gödel generalizados localmente homogêneas. As métricas correspondentes para cada classe de variedades podem ser obtidas de uma forma similar à conseguida por Rebouças e Tiomno [39]. Iniciamos integrando as equações (2.13) – (2.15), logo, eliminamos as constantes de integração não essenciais em concordância com o teorema 5. A seguir, apresentamos as classes irredutíveis de métricas sem detalhes dos cálculos feitos em cada caso. Distinguímos seis classes de métricas como segue :

Classe I : $m^2 > 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$, $w \neq 0$.

Para esta classe as soluções gerais de (2.13), (2.14) e (2.15) são

$$D(x) = a_1 \sinh(mx + a_2), \quad (2.20)$$

$$H(x) = -\frac{2w}{m} a_1 \cosh(mx + a_2) + a_3, \quad (2.21)$$

$$F(u) = \begin{cases} b_1 \sinh(au + b_2) & \text{se } \kappa = a^2 > 0, \\ b_1 u + b_2 & \text{se } \kappa = 0, \\ b_1 \sin(au + b_2) & \text{se } \kappa = -a^2 < 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Na equação anterior a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 são constantes arbitrárias e reais. De acordo com o teorema 5, estas constantes não são essenciais, isto quer dizer que podem ser absorvidos por transformações adequadas de coordenadas. Então o elemento de linha (2.2) junto com as funções $H(x), D(x), F(u)$ fornecidas pelas equações (2.20) — (2.22) pode ser levado na seguinte forma em coordenadas cilíndricas [32] :

$$d\hat{s}^2 = [dt + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - F^2(u)dz^2 - du^2, \quad (2.23)$$

com as seguintes funções métricas

$$H(r) = \frac{2w[1 - \cosh(mr)]}{m^2}, \quad (2.24)$$

$$D(r) = \frac{\sinh(mr)}{m}, \quad (2.25)$$

$$F(u) = \begin{cases} a^{-1} \sinh(au) & \text{se } \kappa = a^2 > 0, \\ u & \text{se } \kappa = 0, \\ a^{-1} \sin(au) & \text{se } \kappa = -a^2 < 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

De acordo com o teorema 6 os possíveis grupos de isometria para esta classe são G_7 e G_9 , onde G_7 é quando $m^2 \neq 4w^2$ e G_9 é quando $m^2 = 4w^2$, independentemente do valor de κ .

Classe II : $m^2 = 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$, $w \neq 0$.

O elemento de linha para esta classe também pode ser levado a forma (2.23), com a função métrica $F(u)$ dada por (2.26) e com as funções $H(r)$ e $D(r)$ dadas por

$$H(r) = -wr^2, \quad D(r) = r. \quad (2.27)$$

O teorema 6 assegura que para esta classe existe um grupo de isometria G_7 , independente do valor de κ .

Classe III : $m^2 \equiv -\nu^2 < 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$, $w \neq 0$.

Da mesma maneira para esta classe o elemento de linha (2.2) pode ser levado a forma (2.23) por transformações adequadas de coordenadas, com $F(u)$ dado por (2.26) e

$$H(r) = \frac{2w[\cos(\nu r) - 1]}{\nu^2}, \quad (2.28)$$

$$D(r) = \frac{\sin(\nu r)}{\nu}, \quad (2.29)$$

o teorema 6 garante que para esta classe existe um grupo de isometria G_7 , independente dos valores de κ

Classe IV : $m^2 \neq 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$, $w = 0$.

Neste caso, o termo cruzado do elemento de linha (2.23), relacionado com o parâmetro de rotação w em modelos tipo Gödel 4D, se anula. Partindo da expressão (2.2) para o elemento de linha podemos fazer adequadas transformações de coordenadas e obter o seguinte resultado

$$d\hat{s}^2 = dt^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - F^2(u)dz^2 - du^2. \quad (2.30)$$

Observe que aqui $H(r) = 0$ e $D(r)$ é dado pelas equações (2.25) ou (2.29) conforme $m^2 > 0$ ou $m^2 \equiv -\nu^2 < 0$ respectivamente. A função $F(u)$ é fornecida por (2.26). De acordo com o sinal de κ , pode-se separar em duas sub-classes.

De acordo com o teorema 6, as variedades \mathcal{M}_5 desta classe admitem um grupo de isometria local G_7 quando $\kappa \neq 0$ ou G_9 quando $\kappa = 0$.

Classe V : $m^2 = 0$, $\kappa \neq 0$, $w = 0$.

Da mesma maneira que nos casos anteriores, podemos levar o elemento de linha (2.2) à forma (2.23) com as funções métricas

$$H(r) = 0, \quad D(r) = r, \quad (2.31)$$

$$F(u) = \begin{cases} a^{-1} \sinh(au) & \text{se } \kappa = a^2 > 0, \\ a^{-1} \sin(au) & \text{se } \kappa = -a^2 < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Do teorema 6, as variedades desta classe admitem um grupo de isometria G_9 .

Classe VI : $m^2 = 0$, $\kappa = 0$, $w = 0$.

Das expressões (2.16), (2.17) e (2.18) podemos notar que esta classe corresponde as variedades planas 5D, dado que o tensor de curvatura é identicamente nulo. De outra maneira, seguindo o procedimento análogo nos casos anteriores, o elemento de linha (2.2) se pode levar à forma

$$d\hat{s}^2 = dt^2 - r^2 d\phi^2 - dr^2 - u^2 dz^2 - du^2, \quad (2.33)$$

que corresponde a uma variedade plana 5D. De acordo com o teorema 6, esta variedade admite um grupo de isometria G_{15} , sendo 5 isometrias de translação e 10 isometrias de rotação. Observe-se que as variedades desta classe são maximalmente simétricas [82]).

2.3 Violação de Causalidade

Existe uma solução cosmológica exata das equações de Einstein que admite curvas fechadas tipo tempo, encontrada por Gödel em 1949 [31]. A solução de Gödel tem como fonte de matéria um fluido perfeito livre de pressões (poeira) em rotação. A variedade \mathcal{M}_4 correspondente tem como elemento de linha

$$ds^2 = [dt + H(x)dy]^2 - D^2(x)dy^2 - dx^2 - dz^2, \quad (2.34)$$

onde $H(x) = \exp(mx)$, $D(x) = \frac{\exp(mx)}{\sqrt{(2)}}$; onde $m = cte.$ real, está relacionada com a constante cosmológica Λ e com o parâmetro de rotação w por : $m^2 = 2w^2 = -2\Lambda = \rho$, onde ρ é a densidade de matéria. O modelo de Gödel é homogêneo em espaço tempo (ET homogêneo), uma vez que admite um grupo de isometria G_5 que atua transitivamente sobre a variedade espaço-tempo com elemento de linha (2.34). Desde a publicação do trabalho original de Gödel muitas publicações foram feitas ao longo da linha de investigação de modelos cosmológicos com rotação e violação de causalidade no contexto da TRG, denominadas soluções cosmológicas tipo Gödel [48, 52, 46]. Nesta seção vamos analisar a possibilidade da existência de curvas fechadas tipo tempo para nossa variedade Riemanniana na pentadimensional tipo Gödel. Nosso resultado é uma generalização aos estudos feitos em variedades tipo Gödel 4D [31, 39] e variedades tipo Gödel 5D [59, 60]. A existência destas curvas permite que a causalidade seja violada. No entanto, localmente o princípio de causalidade continua sendo válido, posto que, nossa variedade é localmente Lorentziana.

Seja V um vetor unitário tangente num ponto p de alguma curva sobre \mathcal{M}_5 , agora se $g(V, V) > 0$ então diz se que V é tipo tempo no ponto p , se $g(V, V) > 0$ é válido para todo ponto da curva, então se diz que tal curva é tipo tempo. Vamos reescrever aqui o

elemento de linha (2.23) :

$$d\hat{s}^2 = dt^2 + 2H(r)dtd\phi - dr^2 - G(r)d\phi^2 - F(u)dz^2 - du^2, \quad (2.35)$$

onde $G(r) = D(r)^2 - H(r)^2$, (r, t, ϕ) são coordenadas cilíndricas. Consideremos as curvas fechadas onde $u = cte$, $t = cte$, $z = cte$, $r = cte$, ou seja circunferências. Posto que $g_{\phi\phi} = g(e_\phi, e_\phi) = G(r)$, a existência ou não de curvas fechadas tipo tempo, depende somente do sinal de $G(r)$. No caso que $G(r) < 0$ as circunferências $u = cte$, $t = cte$, $z = cte$, $r = cte$ são tipo tempo (circunferências de Gödel) [59, 84]. Vamos analisar a existência ou não destas curvas não causais para cada classe de métricas irredutíveis estudadas anteriormente. Vamos apresentar primeiro o caso II por ser relativamente mais fácil.

Classe II $w \neq 0$, $m^2 = 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Usando a equação (2.27) para $H(r)$ e $D(r)$, o elemento de linha (2.35), determinamos o comportamento de $G(r)$

$$\begin{aligned} \text{se } 0 < r < r_c, & \quad G(r) > 0, \\ \text{se } r = r_c, & \quad G(r) = 0, \\ \text{se } r_c < r < \infty, & \quad G(r) < 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

onde, a $r_c = \frac{1}{|w|}$ é denominado raio crítico. Podemos portanto concluir que para a zona $r_c < r < \infty$ as circunferências $u, t, z = ctes$ e $r = cte > r_c$ são curvas tipo tempo fechadas, logo há violação da causalidade. Na zona $0 < r < r_c$ as circunferências $u, t, z = ctes$ e $r = cte$ são tipo espaço ou nulas

Classe I $w \neq 0$, $m^2 > 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Usando as equações (2.24) e (2.25), o elemento de linha (2.35) e definindo $B = 2w/m$ encontramos que

- Se $B > 1$, se cumpre $\sinh^2(\frac{mr_c}{2}) = (B^2 - 1)^{-1}$ então para a região $r_c < r < \infty$, a condição $G(r) < 0$ é satisfeita. Logo, as circunferências $u, t, z, = cte$ e $r = cte > r_c$ são curvas tipo tempo fechadas, existindo violação de causalidade,
- Se $B \leq 1$, então as circunferências $u, t, z, = cte$ e $r = cte$ não são tipo tempo.

Classe III $m^2 = -\nu^2 < 0$, $w = 0 \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Para esta classe, a partir do elemento de linha (2.35), juntamente com as equações (2.28) e (2.29) para $H(r)$ e $D(r)$, deduzimos as condições para a existência de circunferências não causais mostrando que elas dependem da raiz da equação

$$\sin^2\left(\frac{\nu r_c}{2}\right) = (1 + B^2)^{-1} \leq 1, \quad (2.37)$$

onde $B = 2w/m$, mostra-se que existem circunferências não causais e causais de maneira alternada nas seções $u, t, z, = cte$. Por exemplo, a primeira região não causal está entre $r = 0$ e a primeira raiz da equação (2.37). A segunda região não causal está entre a segunda raiz e a terceira raiz de (2.37) e assim por diante.

Nas classes IV, V e VI não existem circunferências não causais do tipo $u, t, z, = cte$, devido a que para estas classes $G(r) > 0, \forall r > 0$.

2.4 Campos Vetoriais de Killing

Nesta seção determinaremos os geradores infinitesimais e a álgebra de Lie do grupo de isometria que atua sobre a variedade generalizada homogênea tipo Gödel 5D. Estes geradores são campos vetoriais sobre a variedade \mathcal{M}_5 e chamam-se campos vetoriais de Killing. O elemento de linha fornecido por (2.23) para estas variedades pode ser levado à forma Lorentziana (2.8) com as 1-formas $\{\widehat{\Theta}^A\}$ dadas por

$$\widehat{\Theta}^0 = dt + H(r)d\phi, \quad \widehat{\Theta}^1 = dr, \quad \widehat{\Theta}^2 = D(r)d\phi, \quad \widehat{\Theta}^3 = F(u)dz, \quad \widehat{\Theta}^4 = du. \quad (2.38)$$

Aqui $H(r), D(r), F(u)$ dependem dos parâmetros m^2, κ, w de acordo com as classes das variedades localmente homogêneas estudadas anteriormente. Seja \widehat{K} um campo vetorial de Killing genérico sobre a variedade espaço-temporal \mathcal{M}_5 , denotamos as componentes deste campo por $\widehat{K}^\mu = (Q, R, S, Z/F, V)$, onde Q, R, S, Z, V são funções de todas as coordenadas t, r, ϕ, z, u . Tendo em conta que estamos trabalhando numa variedade Riemanniana, e que a conexão é compatível com a métrica (conexão Riemanniana), mostra-se que os campos vetoriais de Killing satisfazem a equação

$$\widehat{K}(A; B) \equiv \widehat{K}_{A;B} + \widehat{K}_{B;A} = 0. \text{ onde } A, B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad (2.39)$$

Estas quinze equações são denominadas equações de Killing. Para nosso caso e no referencial de Lorentz (2.38) elas se reduzem a

$$T_t = 0, \quad T_u - V_t = 0, \quad (2.40)$$

$$R_r = 0, \quad R_u + V_r = 0, \quad (2.41)$$

$$V_u = 0, \quad (2.42)$$

$$D(T_r - R_t) - H_r P = 0, \quad (2.43)$$

$$P_u D - H V_t + V_\phi = 0, \quad (2.44)$$

$$-D P_t - H T_t + R H_r + T_\phi = 0, \quad (2.45)$$

$$D P_r - H R_t - P D_r + R_\phi = 0, \quad (2.46)$$

$$-H P_t + R D_r + P_\phi = 0, \quad (2.47)$$

$$-F Z_t + T_z = 0, \quad (2.48)$$

$$F Z_r + R_z = 0, \quad (2.49)$$

$$V F_u + Z_z = 0, \quad (2.50)$$

$$Z_u F - Z F_u + V_z = 0, \quad (2.51)$$

$$P_z D - H F Z_t + F Z_\phi = 0. \quad (2.52)$$

Onde

$$T = HS + Q , \quad P = DS . \quad (2.53)$$

Agora, para resolver as 15 equações anteriores, vamos fazer uso dos resultados obtidos da ref [40] e para esse objetivo, nós faremos a troca $u \rightarrow z$, $V \rightarrow Z$ nas equações (2.40) – (2.52), obtendo

$$T_t = 0 , \quad T_z - Z_t = 0 , \quad (2.54)$$

$$R_r = 0 , \quad R_z + Z_r = 0 , \quad (2.55)$$

$$Z_z = 0 , \quad (2.56)$$

$$D(T_r - R_t) - H_r P = 0 , \quad (2.57)$$

$$P_z D - H Z_t + Z_\phi = 0 , \quad (2.58)$$

$$-DP_t + R H_r + T_\phi = 0 , \quad (2.59)$$

$$DP_r - H R_t - P D_r R_\phi = 0 , \quad (2.60)$$

$$-H P_t + R D_r + P_\phi = 0 , \quad (2.61)$$

$$-F V_t + T_u = 0 , \quad (2.62)$$

$$F V_r + R_u = 0 , \quad (2.63)$$

$$Z F_z + V_u = 0 , \quad (2.64)$$

$$V_z F - V F_z + Z_u = 0 , \quad (2.65)$$

$$P_u D - H F V_t + F V_\phi = 0 . \quad (2.66)$$

Vemos que as equações (2.54) – (2.61) são formalmente as mesmas equações de Killing (4) a (11) de [40]. Não obstante, nas equações (2.54) – (2.61) as funções T, R, P, Z dependem adicionalmente da quinta coordenada u , e a componente V depende de todas as coordenadas. Levando em conta esta similitude, a integração das equações de Killing (2.54) – (2.66) podem ser feita do seguinte modo :

Primeiro, por analogia com (4) – (11) da referência [40] integramos (2.54) – (2.61), mas aqui em vez de constantes devemos ter ainda uma dependência com relação a quinta coordenada u .

Segundo, observando que $V = V(t, r, \phi, z, u)$ e usando as equações restantes (2.62) – (2.66) encontramos a forma explícita de T, P, R, Z e V como função de u . Ao final fazemos de novo a troca $z \rightarrow u$, $Z \rightarrow V$ obtendo desta forma a solução das equações (2.40) – (2.53). Usaremos os dois passos anteriores na integração das equações de Killing (2.40) – (2.53) para todas as classes das métricas generalizadas tipo Gödel. Para exemplificar vamos resolver as equações (2.40) – (2.53) para as métricas generalizadas de Classe IA.

Classe I : $m^2 > 0$, $w \neq 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Classe IA : $m^2 \neq 4w^2$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$.

$$F(u) = \begin{cases} a^{-1} \sinh(au) & \text{se } \kappa = a^2 > 0, \\ u & \text{se } \kappa = 0, \\ a^{-1} \sin(au) & \text{se } \kappa = -a^2 < 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

com

$$H(r) = \frac{2w}{m^2} [1 - \cosh(mr)] \quad , \quad D(r) = \frac{\sinh(mr)}{m} . \quad (2.68)$$

Dado que para este caso (classe IA) temos 3 possibilidades para κ (positivo, zero, negativo), então temos que resolver separadamente para cada κ .

Vamos resolver agora as equações (2.40) – (2.53), especificamente para a classe IA em que $(m^2 > 0, w \neq 0, \kappa = a^2 > 0)$. Como foi sugerido anteriormente, ao fazer a troca $u \rightarrow z$, $V \rightarrow Z$, temos que resolver especificamente as equações

(2.54) – (2.66) com

$$F(z) = \frac{\sinh(az)}{a} . \quad (2.69)$$

Da ref [40] temos

$$T = k_1 + 2w [k_2 D_r + (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D] , \quad (2.70)$$

$$R = k_3 \cos \phi - k_4 \sin \phi , \quad (2.71)$$

$$P = -k_2 m^2 D - (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D_r , \quad (2.72)$$

$$Z = k_7 , \quad (2.73)$$

onde

$$k_1 = k_1(u) , k_2 = k_2(u) , k_3 = k_3(u) , k_4 = k_4(u) , k_7 = k_7(u) , \quad (2.74)$$

$$V = V(t, r, \phi, z, u) . \quad (2.75)$$

De (2.64) – (2.65) obtemos

$$ZF^2 a^2 + V_u F_z = Z_{uu} . \quad (2.76)$$

Da equação anterior obtemos

$$Z_{uu} + Z = 0 , \quad (2.77)$$

$$Z \cosh(az) + V_u = 0 . \quad (2.78)$$

Das equações (2.77) – (2.78) obtemos

$$Z = k_5 \sin u + k_6 \cos u , \quad (2.79)$$

$$V = -\cosh(az)[k_6 \sin u - k_5 \cos u] + g(t, \phi, r, z) , \quad (2.80)$$

e de (2.62), (2.63), (2.70), (2.71) obtemos

$$T_{ur} + R_{ut} = 0 . \quad (2.81)$$

logo

$$k_2 = cte, k_3 = cte, k_4 = cte. \quad (2.82)$$

Dos resultados anteriores e das equações (2.62), (2.66) se deduz que $k_1 = cte$ e $g = g(z)$.

Logo, usando novamente a equação (2.66) chegamos a que $g = b \sinh(az)$, onde b é uma

constante arbitrária.

Em resumo

$$V = -\cosh(az) [k_6 \sin u - k_5 \cos u] + b \sinh(az) , \quad (2.83)$$

$$Z = k_5 \sin u + k_6 \cos u , \quad (2.84)$$

$$T = k_1 + 2w [k_2 D_r + (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D] , \quad (2.85)$$

$$R = k_3 \cos \phi - k_4 \sin \phi , \quad (2.86)$$

$$P = -k_2 m^2 D - (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D_r . \quad (2.87)$$

Para voltar às coordenadas originais fazemos $z \rightarrow u$ $Z \rightarrow V$, e redefinindo a constante de integração b temos a solução das equações (2.40) - (2.53)

$$T = k_1 + 2w [k_2 D_r + (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D] , \quad (2.88)$$

$$R = k_3 \cos \phi - k_4 \sin \phi , \quad (2.89)$$

$$P = -k_2 m^2 D - (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) D_r , \quad (2.90)$$

$$Z = -\cosh(au) [k_6 \sin z - k_5 \cos z] + k_7 \sinh(au) , \quad (2.91)$$

$$V = k_5 \sin z + k_6 \cos z , \quad (2.92)$$

e usando a equação (2.53) temos também

$$Q = k_1 + k_2 [2w D_r + H m^2] + k_3 2w D \sin \phi \quad (2.93)$$

$$+ k_3 \frac{H D_r}{D} \sin \phi + k_4 [2w D \cos \phi + \frac{H D_r}{D} \cos \phi] , \quad (2.94)$$

$$R = k_3 \cos \phi - k_4 \sin \phi , \quad (2.95)$$

$$S = -k_2 m^2 - \frac{D_r}{D} (k_3 \sin \phi + k_4 \cos \phi) , \quad (2.96)$$

$$Z = -\cosh(ua) [\sin z k_6 - \cos z k_5] + k_7 \sinh(ua) , \quad (2.97)$$

$$V = k_6 \cos z + k_5 \sin z . \quad (2.98)$$

Dos resultados acima, e do fato que o espaço dos campos vetoriais de Killing sobre a

variedade forma um espaço vetorial, obtemos os seguintes campos de Killing

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.99)$$

$$K_2 = \frac{2w}{m} \partial_t - m \partial_\phi, \quad (2.100)$$

$$K_3 = -\frac{H}{D} \sin \phi \partial_t + \cos \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.101)$$

$$K_4 = -\frac{H}{D} \cos \phi \partial_t - \sin \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.102)$$

$$K_5 = \frac{a \cosh(au)}{\sinh(au)} \cos z \partial_z + \sin(z) \partial_u, \quad (2.103)$$

$$K_6 = -\frac{a \cosh(au)}{\sinh(au)} \sin z \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.104)$$

$$K_7 = \partial_z. \quad (2.105)$$

De maneira análoga para a classe IA ($\kappa = a^2$), vamos encontrar os campos de Killing para a classe IA ($\kappa = 0$) e para IA ($\kappa = -a^2$), os resultados parecidos para os três casos permite coletar numa única solução.

Em resumo, temos os seguintes campos vetoriais de Killing para a Classe IA :

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.106)$$

$$K_2 = \frac{2w}{m} \partial_t - m \partial_\phi, \quad (2.107)$$

$$K_3 = -\frac{H}{D} \sin \phi \partial_t + \cos \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.108)$$

$$K_4 = -\frac{H}{D} \cos \phi \partial_t - \sin \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.109)$$

$$K_5 = \frac{F_u}{F} \cos z \partial_z + \sin z \partial_u, \quad (2.110)$$

$$K_6 = -\frac{F_u}{F} \sin z \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.111)$$

$$K_7 = \partial_z, \quad (2.112)$$

onde $F(u)$ está dado pela equação (2.26).

$$[K_2, K_3] = -m K_4, \quad [K_2, K_4] = m K_3, \quad [K_3, K_4] = m K_2, \quad (2.113)$$

$$[K_5, K_6] = -\kappa K_7, \quad [K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5. \quad (2.114)$$

Álgebra de Lie $\mathcal{L}_{IA} = \mathcal{L}_\kappa \oplus \tau \oplus so(2, 1)$. Daqui em diante os símbolos \oplus e \oplus denotam a soma direta e soma semi-direta de subálgebras, a subálgebra \mathcal{L}_κ é $so(3)$ para $\kappa < 0$, $so(2, 1)$ para $\kappa > 0$, e $t^2 \oplus so(2)$ para $\kappa = 0$. Para esta classe Ia, \mathcal{L}_κ é gerado por K_5, K_6 e K_7 ; o símbolo τ é associado à translação temporal K_1 , e finalmente os geradores infinitesimais da subálgebra $so(2, 1)$ são K_2, K_3 e K_4 .

Determinar a álgebra de Lie para cada grupo de isometria é importante do ponto de vista matemático dentro do contexto do estudo e classificação das álgebras de Lie. Nesse sentido vamos explicitar a álgebra de Lie dos campos vetoriais de Killing para cada classe de variedades Riemannianas 5D tipo Gödel encontrada neste capítulo [79, 78].

Classe IB : $m^2 = 4w^2, w^2 \neq 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Com $F(u)$ dado por a equação (2.26). Os campos de Killing para este caso são

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.115)$$

$$K_2 = \partial_t - m \partial_\phi, \quad (2.116)$$

$$K_3 = -\frac{H}{D} \sin \phi \partial_t + \cos \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.117)$$

$$K_4 = -\frac{H}{D} \cos \phi \partial_t - \sin \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.118)$$

$$K_5 = -\frac{H}{D} \cos(mt + \phi) \partial_t + \sin(mt + \phi) \partial_r + \frac{1}{D} \cos(mt + \phi) \partial_\phi, \quad (2.119)$$

$$K_6 = -\frac{H}{D} \sin(mt + \phi) \partial_t - \cos(mt + \phi) \partial_r + \frac{1}{D} \sin(mt + \phi) \partial_\phi, \quad (2.120)$$

$$K_7 = \cos z \frac{F_u}{F} \partial_z + \sin z \partial_u, \quad (2.121)$$

$$K_8 = -\sin z \frac{F_u}{F} \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.122)$$

$$K_9 = \partial_z. \quad (2.123)$$

Os comutadores não nulos destes campos vetoriais de Killing são

$$[K_1, K_5] = -m K_6, \quad [K_1, K_6] = m K_5, \quad [K_2, K_3] = -m K_4, \quad (2.124)$$

$$[K_2, K_4] = m K_3, \quad [K_3, K_4] = m K_2, \quad [K_5, K_6] = m K_1, \quad (2.125)$$

$$[K_7, K_8] = -\kappa K_9, \quad [K_7, K_9] = -K_8, \quad [K_8, K_9] = K_7. \quad (2.126)$$

Destes comutadores, a álgebra de Lie para esta classe é $\mathcal{L}_{IB} = \mathcal{L}_\kappa \oplus so(2, 1) \oplus so(2, 1)$. Como na classe anterior a subálgebra \mathcal{L}_κ depende do sinal de κ , e aqui ela é gerada por K_7, K_8 e K_9 . As duas subálgebras $so(2, 1)$ são geradas pelos campos vetoriais de Killing K_1, K_5, K_6 , e K_2, K_3, K_4 respectivamente.

Classe II : $m^2 = 0, w \neq 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Para esta classe também $F(u)$ é fornecido pela expressão (2.25). Os campos de Killing para este caso são

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.127)$$

$$K_2 = \partial_\phi, \quad (2.128)$$

$$K_3 = -w r \sin \phi \partial_t - \cos \phi \partial_r + \frac{1}{r} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.129)$$

$$K_4 = -w r \cos \phi \partial_t + \sin \phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.130)$$

$$K_5 = \cos z \frac{F_u}{F} \partial_z + \sin z \partial_u, \quad (2.131)$$

$$K_6 = -\sin z \frac{F_u}{F} \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.132)$$

$$K_7 = \partial_z. \quad (2.133)$$

Para estes campos vetoriais temos os seguintes comutadores não nulos :

$$[K_2, K_3] = K_4, \quad [K_2, K_4] = -K_3, \quad [K_3, K_4] = 2w K_1, \quad (2.134)$$

$$[K_5, K_6] = -\kappa K_7, \quad [K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5. \quad (2.135)$$

Portanto, a correspondente álgebra de Lie para esta classe é $\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_\kappa \oplus \mathcal{L}_4$. A subálgebra \mathcal{L}_κ é a mesma das classes anteriores; neste caso é gerada por K_5, K_6 e K_7 . A subálgebra \mathcal{L}_4 é gerada por K_1, K_2, K_3 e K_4 . Esta álgebra é solúvel, não contém subálgebras abelianas 3D, e está classificada por Petrov [85] como tipo *III* com $q = 0$.

Classe III $m^2 \equiv -\nu^2 < 0, w \neq 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Para esta classe $F(u)$ está dado pela expressão (2.26). Os campos vetoriais de Killing são

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.136)$$

$$K_2 = (2w/\nu) \partial_t + \nu \partial_\phi, \quad (2.137)$$

$$K_3 = -\frac{H}{D} \sin \phi \partial_t + \cos \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.138)$$

$$K_4 = -\frac{H}{D} \cos \phi \partial_t - \sin \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.139)$$

$$K_5 = \cos z \frac{F_u}{F} \partial_z + \sin z \partial_u, \quad (2.140)$$

$$K_6 = -\sin z \frac{F_u}{F} \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.141)$$

$$K_7 = \partial_z. \quad (2.142)$$

Estes campos de Killing possuem os seguintes comutadores não nulos :

$$[K_2, K_3] = \nu K_4, \quad [K_2, K_4] = -\nu K_3, \quad [K_3, K_4] = \nu K_2, \quad (2.143)$$

$$[K_5, K_6] = -\kappa K_7, \quad [K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5. \quad (2.144)$$

Para esta classe, de acordo com estes comutadores a álgebra de Lie é $\mathcal{L}_{III} = \mathcal{L}_\kappa \oplus \tau \oplus so(3)$.

Aqui τ é associado com o campo vetorial de Killing K_1 , a subálgebra $so(3)$ é gerada por K_2, K_3, K_4 , e finalmente \mathcal{L}_κ é gerada por K_5, K_6 e K_7 .

Classe IV $m^2 \neq 0, w = 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

Ao integrar os campos de Killing, esta classe se subdivide em duas sub-classes, de acordo se $\kappa \neq 0$ ou se $\kappa = 0$.

Classe IVA : $m^2 \neq 0, \kappa \neq 0, w = 0$.

Esta classe corresponde as chamadas variedades degeneradas tipo Gödel, obtemos os seguintes campos de Killing :

$$K_1 = \partial_t, \quad (2.145)$$

$$K_2 = \partial_\phi, \quad (2.146)$$

$$K_3 = \cos \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.147)$$

$$K_4 = -\sin \phi \partial_r - \frac{D_r}{D} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.148)$$

$$K_5 = \cos z \frac{F_u}{F} \partial_z + \sin z \partial_u, \quad (2.149)$$

$$K_6 = -\sin z \frac{F_u}{F} \partial_z + \cos z \partial_u, \quad (2.150)$$

$$K_7 = \partial_z, \quad (2.151)$$

$$(2.152)$$

onde $D(r) = m^{-1} \sinh(mr)$ para $m^2 > 0$, ou $D(r) = \nu^{-1} \sin(\nu r)$ para $m^2 \equiv -|\nu|^2 < 0$, a função $F(u)$ para $\kappa \neq 0$ é fornecida pela expressão (2.26). Para esta caso temos os seguintes comutadores não nulos :

$$[K_2, K_3] = K_4, \quad [K_2, K_4] = -K_3, \quad [K_3, K_4] = -m^2 K_2, \quad (2.153)$$

$$[K_5, K_6] = -\kappa K_7, \quad [K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5. \quad (2.154)$$

Assim a álgebra de Lie para esta classe é $\mathcal{L}_{IVA} = \mathcal{L}_\kappa \oplus \tau \oplus \mathcal{L}_m$, onde \mathcal{L}_m é $so(2, 1)$ para $m^2 > 0$, e $so(3)$ para $m^2 \equiv -|\nu|^2 < 0$. A subálgebra \mathcal{L}_κ gerada por K_5, K_6, K_7 é $so(3)$ para $\kappa < 0$, e $so(2, 1)$ para $\kappa > 0$. Finalmente τ é associado ao campo vetorial de Killing K_1 .

Classe IVB : $m^2 \neq 0, \kappa = 0, w = 0$.

Nos referimos a esta classe, como variedades 5D tipo Gödel duplamente degeneradas.

Obtemos neste caso os seguintes campos Vetoriais de Killing :

$$K_1 = \partial_t, \quad K_2 = \partial_\phi, \quad (2.155)$$

$$K_3 = \cos \phi \partial_r - (D_r/D) \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.156)$$

$$K_4 = -\sin \phi \partial_r - (D_r/D) \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.157)$$

$$K_5 = \sin z \partial_u + \frac{1}{u} \cos z \partial_z, \quad (2.158)$$

$$K_6 = \cos z \partial_u - \frac{1}{u} \sin z \partial_z, \quad (2.159)$$

$$K_7 = \partial_z, \quad (2.160)$$

$$K_8 = u \sin z \partial_t + t \sin z \partial_u + \frac{1}{u} t \cos z \partial_z, \quad (2.161)$$

$$K_9 = u \cos z \partial_t + t \cos z \partial_u - \frac{1}{u} t \sin z \partial_z, \quad (2.162)$$

onde $D(r) = m^{-1} \sinh(mr)$ para $m^2 > 0$, ou $D(r) = \nu^{-1} \sin(\nu r)$ para $m^2 \equiv -|\nu|^2 < 0$.

Para estes campos vetoriais de Killing temos os seguintes comutadores não nulos :

$$[K_2, K_3] = K_4, \quad [K_2, K_4] = -K_3, \quad [K_3, K_4] = -m^2 K_2, \quad (2.163)$$

$$[K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5, \quad [K_1, K_8] = K_5, \quad (2.164)$$

$$[K_1, K_9] = K_6, \quad [K_5, K_8] = K_1, \quad [K_6, K_9] = K_1, \quad (2.165)$$

$$[K_7, K_8] = K_9, \quad [K_7, K_9] = -K_8, \quad [K_8, K_9] = -K_7, \quad (2.166)$$

onde devemos substituir $-m^2$ por ν^2 se $m^2 < 0$.

A correspondente álgebra de Lie é $\mathcal{L}_{IVB} = t^3 \oplus so(2,1) \oplus \mathcal{L}_m$. \mathcal{L}_m é gerada por K_2, K_3, K_4 , sendo $so(2,1)$ para $m^2 > 0$, e $so(3)$ para $m^2 \equiv -|\nu|^2 < 0$. O subálgebra $t^3 \oplus so(2,1)$ é gerada por K_1, K_5, K_6, K_7, K_8 e K_9 .

Clase V : $m^2 = 0$, $\kappa \neq 0$, $w = 0$.

Para esta classe encontramos os seguintes campos de Killing :

$$K_1 = \partial_t, \quad K_2 = \partial_\phi, \quad (2.167)$$

$$K_3 = \cos \phi \partial_r - \frac{1}{r} \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.168)$$

$$K_4 = -\sin \phi \partial_r - \frac{1}{r} \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.169)$$

$$K_5 = \sin z \partial_u + \frac{F_u}{F} \cos z \partial_z, \quad (2.170)$$

$$K_6 = \cos z \partial_u - \frac{F_u}{F} \sin z \partial_z, \quad (2.171)$$

$$K_7 = \partial_z, \quad (2.172)$$

$$K_8 = r \sin \phi \partial_t + t \sin \phi \partial_r + \frac{1}{r} t \cos \phi \partial_\phi, \quad (2.173)$$

$$K_9 = r \cos \phi \partial_t + t \cos \phi \partial_r - \frac{1}{r} t \sin \phi \partial_\phi, \quad (2.174)$$

onde $F(u)$ depende do sinal de κ e está dado por (2.26). Aqui temos os seguintes comutadores não nulos :

$$[K_2, K_3] = K_4, \quad [K_2, K_4] = -K_3, \quad [K_5, K_6] = -\kappa K_7, \quad (2.175)$$

$$[K_5, K_7] = -K_6, \quad [K_6, K_7] = K_5, \quad [K_1, K_8] = -K_4, \quad (2.176)$$

$$[K_1, K_9] = K_3, \quad [K_4, K_8] = -K_1, \quad [K_3, K_9] = K_1, \quad (2.177)$$

$$[K_2, K_8] = K_9, \quad [K_2, K_9] = -K_8, \quad [K_8, K_9] = -K_2. \quad (2.178)$$

A álgebra de Lie para esta classe é $\mathcal{L}_V = t^3 \in so(2, 1) \oplus \mathcal{L}_\kappa$, onde \mathcal{L}_κ é gerada por K_5, K_6, K_7 ; e será $so(2, 1)$ se $\kappa > 0$ ou $so(3)$ para $\kappa < 0$. A subálgebra $t^3 \in so(2, 1)$ é gerada por K_1, K_2, K_3, K_4, K_8 e K_9 .

Classe VI : $m^2 = 0$, $\kappa = 0$, $w = 0$.

De (2.16) - (2.17) podemos concluir que esta classe corresponde às geometrias planas pentadimensionais, o que se pode constatar pelo elemento de linha (2.33). Podemos observar que os campos de Killing correspondentes as isometrias desta geometria são 5 translações, 10 rotações generalizadas (onde temos 4 rotações espaço-temporais e 6 rotações espaciais). Para estes 15 campos vetoriais de Killing a álgebra de Lie é $\mathcal{L}_{VI} = t^5 \in so(4, 1)$.

Determinar se a álgebra de Lie \mathcal{L}_{IA} é simples, semi-simples ou não é importante no estudo e classificação das álgebras de Lie. Nesse sentido observamos que nenhuma das álgebras de Lie correspondentes aos campos de Killing das classes anteriormente estudadas são *semi-simples*, algumas delas são *simples*. Entretanto as sub-álgebras $so(3)$, $so(2, 1)$ são semi-simples. As subálgebras $so(2)$, \mathcal{L}_4 e $so(4, 1)$ não são semi-simples. As sub-álgebras $so(3)$ e $so(2)$ são compactas. As sub-álgebras $so(2, 1)$, $so(4, 1)$ não são compactas [79].

Em resumo, o número de campos vetoriais de Killing que achamos para cada uma das seis classes demonstra que as variedades 5D tipo Gödel localmente homogêneas admitem

- Um grupo de isometria G_7 quando,

$$(1a) \quad m^2 \neq 4w^2, \quad w \neq 0, \quad \forall \kappa \in \mathcal{R}, \quad \text{ou}$$

$$(1b) \quad m^2 \neq 0, \quad w = 0, \quad \forall \kappa \neq 0.$$

- Um grupo de isometria G_9 quando,

$$(2a) \quad m^2 = 4w^2, \quad w \neq 0, \quad \forall \kappa \in \mathcal{R}, \text{ ou}$$

$$(2b) \quad m^2 \neq 0, \quad w = 0, \quad \kappa = 0, \text{ ou quando}$$

$$(2c) \quad m^2 = 0, \quad w = 0, \quad \kappa \neq 0.$$

Quando $m^2 = w = \kappa = 0$ temos um grupo de isometria G_{15} . Estes possíveis grupos estão de acordo com o teorema 4 da seção anterior. Na verdade, a integração das equações de Killing constitui uma maneira diferente de mostrar o teorema. Além disso, estas equações mostram que o grupo de isotropia H , subgrupo de G_r , é tal que tem $\dim(H)=2$ quando as condições (1a) e (1b) são satisfeitas, e $\dim(H)=4$ quando as condições (2a), (2b) e (2c) são satisfeitas. Finalmente quando $m^2 = w = \kappa = 0$ temos $\dim(H) = 10$.

Capítulo 3

Soluções Tipo Gödel na Teoria de Gravitação com Matéria Induzida

3.1 Introdução

Motivadas pela unificação da eletricidade e magnetismo numa única teoria, Nordström, Kaluza e Klein [3, 4, 5] abordaram o problema da unificação da gravidade com o eletromagnetismo postulando a existência de uma quinta dimensão extra para o espaço-tempo. Kaluza demonstrou que as equações de campo da relatividade geral, quando são interpretadas como equações de campo em 5D no vácuo, contém as equações de campo da relatividade geral em 4D em presença de um campo eletromagnético, junto com as equações de Maxwell. A partir destes trabalhos originais, surgiram teorias de unificação das interações fundamentais, que são denominadas teorias tipo Kaluza-Klein. As teorias tipo Kaluza-Klein em 5 ou mais dimensões despertam interesse em vários contextos.

No contexto da teoria de campos e partículas elas são úteis na questão da unificação das interações fundamentais da natureza. A idéia de que várias interações na natureza podem ser unificadas incrementando a dimensionalidade do espaço-tempo teve origem nos

trabalhos de Nordström, Kaluza e Klein. Para alguns, o interesse inicial foi a extensão da relatividade geral a espaços em mais de 4D. A possibilidade dos espaços-tempos com mais de 4 dimensões também tem recebido razoável atenção na cosmologia. Uma questão que surge naturalmente neste contexto é : “ Por que nosso universo em seu estágio atual pode ser modelado através de uma variedade espaço-tempo 4D ? ”. Se existem coordenadas extras seria interessante saber qual é a dinâmica destas dimensões, e de que maneira poderemos constatá-las.

Ao longo da história das teorias tipo Kaluza-Klein foram definidas duas linhas de estudo, as teorias tipo Kaluza-Klein compactificadas e as não compactificadas. No primeiro caso se impõe uma condição de cilindridade às coordenadas extras, sugerido pelo fato de que a física no estágio atual depende das quatro primeiras coordenadas e não das coordenadas extras. No caso em que a teoria de Kaluza-Klein compactificada seja formulada num contexto de uma variedade espaço-temporal pentadimensional então a quinta coordenada teria topologia de S^1 , logo a variedade espaço-temporal total seria da forma $M^4 \times S^1$ [12]. Para o leitor interessado numa versão moderna da teoria de Kaluza-Klein sugerimos a leitura das refs. [11, 12]. No caso das teorias não compactificadas admite-se que a física precisa das coordenadas extras, neste caso para uma teoria puramente gravitacional no contexto de uma variedade espaço-temporal de 5 dimensões se impõe como hipótese uma métrica 5D da forma seguinte :

$$\hat{g}_{AB} = \begin{vmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon\phi^2 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Os índices latinos A, B vão de 0 a 4 e os índices gregos vão de 0 a 3, $\epsilon^2 = 1$. O sinal do fator "ε" depende de se a quinta coordenada é de tipo tempo ou tipo espaço, para uma discussão sobre a escolha do sinal do ε ver a referência [11], entretanto φ depende em geral de todas coordenadas.

Recentemente Wesson e co-autores [9, 10] introduziram um novo enfoque à relatividade geral, na mesma linha da antiga idéia sugerida por Einstein [1], em que a matéria junto com o seu papel na determinação da geometria do espaço-tempo é dada de um ponto de vista puramente geométrico pentadimensional. Na versão pentadimensional da relatividade geral se apresenta uma equação de campo no vácuo. Esta equação deve fornecer curvatura e matéria para a contraparte em 4D. Isto é um passo elegante na visão de Einstein sobre a geometrização da natureza. Na introdução desta tese nos referimos a esta teoria de gravidade como a teoria da gravidade com matéria induzida, ou simplesmente teoria de gravidade com MI. A teoria da gravidade com MI tem sido estudada recentemente [11] – [14], [60], e [92] – [94]. As aplicações em astrofísica e cosmologia desta teoria podem ser vistas nas referências [29] – [49] da referência [11].

Neste capítulo vamos examinar a possibilidade das métricas 5D tipo Gödel generalizadas como solução da teoria de gravidade com matéria induzida. Estudaremos particularmente se esta teoria aceita soluções não causais de suas equações de campo.

3.2 Teoria de Gravitação com Matéria Induzida

Wesson e co-autores introduziram uma teoria de gravitação puramente geométrica pentadimensional, onde o espaço-tempo pentadimensional é representado por uma variedade Riemanniana 5D, em que a matéria e seu papel na determinação da geometria do espaço-tempo 4D é uma manifestação de uma geometria pentadimensional. Nesta teoria se consideram válidas as equações de campo da TRG.

Uma das hipóteses desta teoria é uma equação de campo no vácuo em 5D, ou seja, uma equação de campo sem fonte seguinte.

$$\widehat{G}_{AB} = 0, \tag{3.2}$$

Onde \widehat{G}_{AB} é o tensor de Einstein em 5D definido por

$$\widehat{G}_{AB} = \widehat{R}_{AB} - \frac{\widehat{R} \widehat{g}_{AB}}{2}, \quad (3.3)$$

e onde \widehat{R}_{AB} é o tensor de Ricci, $\widehat{R} = \widehat{g}_{AB} \widehat{R}^{AB}$ é o escalar de curvatura pentadimensional. \widehat{g}_{AB} é a métrica da variedade espaço-temporal 5D com assinatura $(+, -, -, -, -)$, fornecida pela expressão (3.1). A equação (3.2) é claramente uma extensão a 5 dimensões da equação de campo de Einstein de TRG. A equação (3.2) pode dar origem a curvatura e matéria em 4D conforme mostraremos a seguir.

Primeiro a equação (3.2) é equivalente a

$$\widehat{R}_{AB} = 0, \quad (3.4)$$

onde

$$\widehat{\Gamma}^C{}_{AB} = \frac{1}{2} \widehat{g}^{CD} (\partial_A \widehat{g}_{DB} + \partial_B \widehat{g}_{DA} - \partial_D \widehat{g}_{AB}), \quad (3.5)$$

$$\widehat{R}_{AB} = \partial_C \widehat{\Gamma}^C{}_{AB} - \partial_B \widehat{\Gamma}^C{}_{AC} + \widehat{\Gamma}^C{}_{AB} \widehat{\Gamma}^D{}_{CD} - \widehat{\Gamma}^C{}_{AD} \widehat{\Gamma}^D{}_{BC}, \quad (3.6)$$

são a conexão Riemanniana e o tensor de Ricci respectivamente para uma variedade pentadimensional. Como hipótese seguinte exigimos a validade das equações de campo com fonte da TRG, que escrevemos na forma

$$8\pi G T_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}, \quad \{\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3\}, \quad (3.7)$$

onde $T_{\alpha\beta}$ é o tensor de matéria ou tensor de energia-momentum. Nosso objetivo é obter uma expressão para $T_{\alpha\beta}$ partindo da equação (3.2). Das equações (3.1), (3.5), (3.6) temos as seguintes expressões para a parte $\alpha\beta$, $\alpha 4$, e 44 do tensor de Ricci \widehat{R}_{AB} :

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{\alpha\beta} = & R_{\alpha\beta} - \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)}{\phi} + \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left(\frac{\partial_4\phi \partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi} - \partial_4 g_{\alpha\beta} \right. \\ & \left. + g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\gamma} \partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{\alpha 4} = & \frac{g^{44}g^{\beta\gamma}}{4}(\partial_4 g_{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{44} - \partial_\gamma g_{44} \partial_4 g_{\alpha\beta}) + \frac{\partial_\beta g^{\beta\gamma} \partial_4 g_{\gamma\alpha}}{2}, \\ & + \frac{g^{\beta\gamma} \partial_4(\partial_\beta g_{\gamma\alpha})}{2} - \frac{\partial_\alpha g^{\beta\gamma} \partial_4 g_{\beta\gamma}}{2} - \frac{g^{\beta\gamma} \partial_4(\partial_\alpha g_{\beta\gamma})}{2} \\ & + \frac{g^{\beta\gamma} g^{\delta\epsilon} \partial_4 g_{\gamma\alpha} \partial_\beta g_{\delta\epsilon}}{4} + \frac{\partial_4 g^{\beta\gamma} \partial_\alpha g_{\beta\gamma}}{4},\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{44} = & -\varepsilon\phi\Box\phi - \frac{\partial_4 g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} - \frac{g^{\alpha\beta} \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta})}{2} \\ & + \frac{\partial_4\phi g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2\phi} - \frac{g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\beta} \partial_4 g_{\alpha\delta}}{4},\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde \Box está definido como

$$\Box\phi \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\beta(\partial_\alpha\phi), \quad (3.11)$$

e ∇_α é a derivada covariante em relação a coordenada x^α . Usando as equações (3.4) e (3.8) temos

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta} = & \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha\phi)}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left(\frac{\partial_4\phi \partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi} - \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta}) \right. \\ & \left. + g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\gamma} \partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} \right).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Usando a equação (3.4), a equação (3.9) pode ser reescrita como uma *lei de conservação*

$$\nabla_\beta P_\alpha^\beta = 0, \quad (3.13)$$

onde por definição

$$P_\alpha^\beta \equiv \frac{1}{2\sqrt{\widehat{g}_{44}}} (g^{\beta\gamma} \partial_4 g_{\gamma\alpha} - \delta_\alpha^\beta g^{\gamma\epsilon} \partial_4 g_{\gamma\epsilon}). \quad (3.14)$$

Finalmente, usando a equação (3.4) a expressão (3.10) toma a forma de uma equação de onda escalar para ϕ

$$\varepsilon\phi\Box\phi = -\frac{\partial_4 g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{4} - \frac{g^{\alpha\beta} \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta})}{2} + \frac{\partial_4\phi g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2\phi}. \quad (3.15)$$

As equações (3.12) – (3.15) são a base desta teoria de gravidade com MI. Se contraímos a eq.(3.12) com ajuda do tensor métrico $g^{\alpha\beta}$ e da eq.(3.15), obtemos a seguinte expressão

para o escalar de curvatura 4D :

$$R = \frac{\varepsilon}{4\phi^2} [\partial_4 g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta} + (g^{\alpha\beta} \partial_4 g_{\alpha\beta})^2]. \quad (3.16)$$

Usando esta equação (3.16) e as eqs.(3.12) e (3.7), encontramos a seguinte expressão para o tensor $T_{\alpha\beta}$:

$$8\pi G T_{\alpha\beta} = \frac{\nabla_\beta(\partial_\alpha \phi)}{\phi} - \frac{\varepsilon}{2\phi^2} \left[\frac{\partial_4 \phi \partial_4 g_{\alpha\beta}}{\phi} - \partial_4(\partial_4 g_{\alpha\beta}) + g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\gamma} \partial_4 g_{\beta\delta} - \frac{g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} \partial_4 g_{\alpha\beta}}{2} + \frac{g_{\alpha\beta}}{4} (\partial_4 g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta} + (g^{\gamma\delta} \partial_4 g_{\gamma\delta})^2) \right]. \quad (3.17)$$

A expressão (3.17) para $T_{\alpha\beta}$ é tal que a equação de Einstein em 4D $G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$ está automaticamente contida na equação pentadimensional do vácuo $\widehat{G}_{AB} = 0$. O que permite que a matéria descrita por $T_{\alpha\beta}$ pode ser interpretada como uma manifestação da *geometria pura* em 5 dimensões. É por isso que a expressão *matéria induzida* é usada para este tipo de teoria de gravitação. Similarmente podemos chamar a expressão (3.17) como o tensor de energia-momentum para a matéria induzida. Este tensor satisfaz as exigências de *simetria*, i.e. $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, posto que o primeiro termo é uma derivada segunda e os outros termos são todos explicitamente simétricos. As equações (3.13) – (3.15) são vínculos da teoria, a interpretação física destas equações é uma questão aberta no momento [11]

3.3 Soluções Tipo Gödel em Gravitação com MI

Nesta seção vamos analisar a possibilidade de existência de soluções tipo Gödel para a teoria com gravitação de matéria induzida. Lembramos que, nossa variedade Riemanniana

\mathcal{M}_5 possui a métrica

$$\hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & H(r) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ H(r) & 0 & -G^2(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F^2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde $G^2(r) = D^2(r) - H^2(r)$, com elemento de linha (2.23) definida no capítulo três, que reescrevemos aqui

$$d\hat{s}^2 = [dt + H(r)d\phi]^2 - D^2(r)d\phi^2 - dr^2 - F^2(u)dz^2 - du^2. \quad (3.19)$$

De acordo com a seção anterior, a equação de campo para a teoria com materia induzida é a equação (3.2). No referencial de Lorentz (2.38) usando o sistema CLASSI/SHEEP (ver apêndice A.2) obtemos as seguintes componentes não nulas para o tensor de Einstein 5D associadas ao elemento de linha (3.19).

$$\hat{G}_{00} = -\frac{F_{uu}}{F} - \frac{D_{rr}}{D} + 3\left(\frac{H_r}{2D}\right)^2, \quad (3.20)$$

$$\hat{G}_{02} = \frac{1}{2}\left(\frac{H_{rr}}{D} - \frac{H_r D_r}{D^2}\right), \quad (3.21)$$

$$\hat{G}_{11} = \hat{G}_{22} = \frac{F_{uu}}{F} + \frac{H_r^2}{4D^2}, \quad (3.22)$$

$$\hat{G}_{33} = \hat{G}_{44} = \frac{D_{rr}}{D} - \frac{H_r^2}{4D^2}. \quad (3.23)$$

Usando (3.20) – (3.23) e a equação de campo (3.2), obtemos

$$\hat{G}_{00} = -\frac{F_{uu}}{F} - \frac{D_{rr}}{D} + 3\left(\frac{H_r}{2D}\right)^2 = 0, \quad (3.24)$$

$$\hat{G}_{02} = \frac{1}{2}\left(\frac{H_{rr}}{D} - \frac{H_r D_r}{D^2}\right) = 0, \quad (3.25)$$

$$\hat{G}_{11} = \hat{G}_{22} = \frac{F_{uu}}{F} + \frac{H_r^2}{4D^2} = 0, \quad (3.26)$$

$$\hat{G}_{33} = \hat{G}_{44} = \frac{D_{rr}}{D} - \frac{H_r^2}{4D^2} = 0. \quad (3.27)$$

Das quatro equações (3.24) – (3.27) se deduz que

$$\frac{H_r}{2D} = -2w = 0, \quad (3.28)$$

$$\frac{D_{rr}}{D} = m^2 = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{F_{uu}}{F} = \kappa = 0. \quad (3.30)$$

Deste modo a equação (3.2) é satisfeita unicamente se $w = m^2 = \kappa = 0$. Das equações (3.28) – (3.30) resulta que

$$H(r) = a_1, \quad D(r) = a_2 r + b_2, \quad F(u) = a_3 u + b_3, \quad (3.31)$$

onde a_1, a_2, a_3, b_2 e b_3 são constantes reais arbitrárias. Porém de acordo com o teorema 5 do capítulo três, estas constantes não são essenciais, desde que por transformações adequadas de coordenadas podemos fazer com que elas tomem valores específicos ($a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, b_2 = 0, b_3 = 0$). De fato as seguintes transformações de coordenadas:

$$t = \tilde{t} - \frac{a_1}{a_2} \tilde{\phi}, \quad (3.32)$$

$$r = \tilde{r} - \frac{b_2}{a_2}, \quad (3.33)$$

$$\phi = \frac{1}{a_2} \tilde{\phi}, \quad (3.34)$$

$$z = \frac{1}{a_3} \tilde{z}, \quad (3.35)$$

$$u = \tilde{u} - \frac{b_3}{a_3}, \quad (3.36)$$

levam o elemento de linha (3.19) a forma

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2 d\tilde{\phi}^2 - d\tilde{z}^2 - d\tilde{u}^2. \quad (3.37)$$

Este elemento de linha claramente corresponde a uma geometria plana 5D, tendo portanto curvatura nula. Além disso, $G(\tilde{r}) = \tilde{r}^2 > 0, \forall \tilde{r} \neq 0$. É claro que a variedade subjacente pode ser considerada como uma variedade Euclideana \mathcal{R}^5 simplesmente conexa, e

portanto como $G(\tilde{r}) > 0$ circunferências de Gödel não são permitidas. Consequentemente o resultado anterior mostra que a teoria de gravitação com matéria induzida não admite nenhuma geometria *curva* com métrica 5D tipo Gödel (3.19), como solução de sua equação de campo (3.2), sendo este resultado uma generalização do trabalho [60]. Entretanto, McManus em seu trabalho de 1994 [17] mostra que uma família mono-paramétrica de soluções da equação de campo (3.2), previamente encontrada por Ponce de Leon [88], é de fato plana em 5 dimensões, e se mostra que seus correspondentes modelos induzidos em 4D para fluido perfeito são uma família de modelos curvos tipo Friedmann-Robertson-Walker. Ver as referências [16, 19, 20] e também as referências [88] – [92].

Portanto surge naturalmente a questão de que se a única solução 5D de geometria plana acima encontrada (para métricas 5D tipo Gödel) para a equação de campo (3.2) pode similarmente produzir algum espaço-tempo curvo em 4D. A resposta vem da equação (3.37), de onde obviamente seu correspondente espaço-tempo 4D é um espaço-tempo 4D plano Minkowskiano. Este resultado também pode ser obtido usando o sistema de computação algébrica CLASSI [69, 61] fazendo o cálculo do tensor de curvatura 4D para $m^2 = w = 0$. Em resumo, a única solução da equação de campo (3.2) da teoria de gravitação com MI para métricas generalizadas tipo Gödel é uma geometria plana 5D com elemento de linha (3.37), que induz unicamente o espaço-tempo plano de Minkowski em 4D.

Do resultado acima, aparentemente, a teoria MI é uma terapia efetiva da anomalia causal da TRG em 4D, pelo menos quando trabalhamos com uma específica família de métricas generalizadas tipo Gödel 5D, mas o certo é que a versão matéria induzida da TRG não é um tratamento eficiente da anomalia causal (soluções com curvas fechadas tipo tempo) da TRG como foi conjecturado na referência [60]. Para esclarecer este fato, fazemos uma pergunta: “Será que a teoria de gravidade de MI reproduz todas as

soluções das equações de campo da TRG”? A resposta é sim. Para entendermos bem esta resposta, nos referimos ao problema de mergulho das soluções da TRG num espaço-tempo de dimensão maior ou igual a 5D.

O conceito de mergulho de uma variedade em outra tem caráter local e global e neste trabalho nós nos referiremos somente ao caráter local, sendo o mergulho global de variedades mais complexo e mais restritivo. A seguir damos algumas definições e mencionamos alguns teoremas relevantes discutidos nas referências [93, 94].

Diz-se que uma variedade Riemanniana é analítica se a métrica é analítica para todo ponto da variedade, e como é conhecido, uma variedade Riemanniana é plana quando a curvatura é nula para todo ponto da variedade.

Teorema 7 *Qualquer variedade Riemanniana analítica n -dimensional pode ser localmente e isometricamente mergulhada em alguma variedade Riemanniana plana m -dimensional, com $n \leq m \leq n(n+1)/2$ [94, 96].*

Teorema 8 *Uma solução não plana n -dimensional da equação de Einstein n -dimensional no vácuo não pode ser mergulhada num espaço plano $(n+1)$ -dimensional.*

O teorema anterior explica por que a solução de Schwarzschild não pode ser mergulhada num espaço-tempo plano 5D, portanto o mergulho da métrica de Schwarzschild num espaço-tempo plano precisa de pelo menos 6 dimensões. Este teorema foi provado por Kasner em 1921 [97]. Entretanto é possível mergulhar a solução de Schwarzschild num espaço-tempo *Ricci-flat* 5D, sendo este um caso especial de um teorema mais geral que veremos no que se segue.

Teorema 9 *Qualquer variedade Riemanniana analítica Ricci-flat n dimensional pode ser localmente mergulhada numa variedade Ricci-flat analítica $(n+1)$ -dimensional [94].*

Logo, o mergulho da solução de Schwarzschild obtida por Wesson dentro de sua teoria [7] é um exemplo da validade deste teorema. A seguir vamos enunciar o teorema de Campbell [95] que é muito importante para nosso trabalho.

Teorema 10 *Seja $V_n(s, t)$ uma variedade Riemanniana analítica n -dimensional, com s coordenadas espaciais e t coordenadas temporais, $n = s + t$. Qualquer variedade Riemanniana $V_n(s, t)$ analítica pode ser localmente mergulhada numa variedade Riemanniana $V_{n+1}(\tilde{s}, \tilde{t})$ Ricci-flat, onde*

$$\tilde{s} = s, \quad \tilde{t} = t + 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{s} = s + 1, \quad \tilde{t} = t. \quad (3.38)$$

É claro que, além do interesse matemático, o teorema anterior é importante no esquema da teoria de matéria induzida de Wesson. De fato o teorema de Campbell e conforme os trabalhos de J. E. Lidsey, C. Romero, R. Tavakol e S. Rippl [93] e C. Romero, R. Tavakol, R. Zalaletdinov [94] implica que todas as soluções da equação de campo de Einstein n -dimensional com tensor de energia-momentum arbitrário podem ser mergulhadas, pelo menos localmente, num espaço-tempo Ricci-flat $(n+1)$ -dimensional¹. Em outras palavras, o esquema da teoria da gravitação com MI é suficientemente geral para abrigar localmente todas as soluções da equação de campo de Einstein 4D. Em nosso contexto isto quer dizer que deve existir um espaço-tempo Ricci-flat pentadimensional, que induz *localmente* as famílias de espaços-tempos 4D tipo Gödel, soluções não causais da TRG, ou seja, deve existir uma métrica 5D Ricci-flat, que induz as soluções tipo Gödel 4D. Logo, fica claro nosso comentário feito na página 57, onde dizíamos que na verdade a teoria com MI não é uma terapia efetiva da anomalia causal da TRG.

Para concluir este capítulo mencionamos alguns fatos vinculados com o mergulho da

¹Quando dizemos mergulho local, entendemos no sentido da geometria diferencial, sem nenhuma referência direta à topologia global do espaço a mergulhar ou do espaço onde vai se mergulhar, logo cada uma das variedades pode ter topologia diferente.

TRG na teoria com MI. Primeiro, qualquer variedade *Riemann-flat* obviamente é também *Ricci-flat*. A recíproca entretanto não é necessariamente certa, ou seja, podemos ter espaços-tempos *Ricci-flat* que não são *Riemann-flat*. Certamente as variedades 5D com métricas tipo Gödel generalizadas discutidas neste trabalho no contexto da teoria com MI são *Ricci-flat* e *Riemann-flat* simultaneamente. Notavelmente algumas soluções da equação de campo (3.2) são também *Riemann-flat* (ver as referências [16, 17, 19] e também as referências [90] – [92]). De um ponto de vista matemático todos os espaços 5D *Riemann-flat* são localmente equivalentes (localmente isométricos). Entretanto no contexto da teoria com MI, todas as variedades 5D *Riemann-flat* referidas anteriormente induzem espaços-tempos 4D física e geometricamente distintos, (ver [16, 17, 19] e [90] – [92]). À luz da técnica do problema de equivalência discutida no capítulo 2, para essas variedades 5D *Riemann-flat* mostra-se que os *escalares de Cartan* se anulam identicamente, entretanto os correspondentes *escalares de Cartan* induzidos em 4D podem ou não anular-se. Em nosso caso os *escalares de Cartan* induzidos em 4D também são nulos.

Os resultados principais deste trabalho de tese foram condensados num artigo científico publicado na revista *Journal of Mathematical Physics* no mês de agosto do ano 1999 [89].

Conclusões

Neste capítulo vamos a expôr as principais conclusões deste trabalho de tese. No capítulo primeiro basicamente desenvolvemos o contexto teórico do problema de equivalência. Os resultados originais estão expostos nos capítulos dois e três.

No capítulo dois determinamos as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade local de variedades Riemannianas 5D tipo Gödel generalizadas, tais condições são expressas através das equações (2.13) – (2.15) do capítulo dois. Mostramos que as variedades Riemannianas 5D tipo Gödel generalizada \mathcal{M}_5 são caracterizadas localmente por três parâmetros independentes m^2, w, κ , de maneira que duas destas variedades com idêntica tríada (m^2, w, κ) são localmente equivalentes. Podemos dividir estas variedades em classes de acordo com os parâmetros reais m^2, w, κ , e da relação entre eles, de tal maneira que existe uma métrica irredutível para cada classe da variedade \mathcal{M}_5 . Demonstramos a existência e exibimos os elementos de linhas correspondentes das seguintes classes de variedades Riemannianas 5D tipo Gödel generalizadas :

Classe I $m^2 > 0, w \neq 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

O elemento de linha desta classe é dado pelas equações (2.23) – (2.26).

Classe II $m^2 = 0, w \neq 0, \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

O elemento de linha desta classe é dado pelas equações (2.23), (2.26) e (2.27).

Classe III $m^2 = -\nu^2 < 0, w = 0 \forall \kappa \in \mathcal{R}$.

O elemento de linha desta classe é dado pelas equações (2.23), (2.26), (2.28) e (2.29).

Classe IV $m^2 \neq 0$, $\kappa \neq 0$, $w = 0$.

O elemento de linha desta classe é dado pelas equações (2.30), (2.26), $H(r) = 0$ e $D(r)$ é dado pelas equações (2.25) ou (2.29) conforme $m^2 > 0$ ou $m^2 \equiv -\nu^2 < 0$ respectivamente.

Classe V $m^2 = 0$, $\forall \kappa \in \mathcal{R}$, $w = 0$.

O elemento de linha desta classe é dado pelas equações (2.23), (2.31) e (2.32).

Classe VI $m^2 = 0$, $\kappa = 0$, $w = 0$.

O elemento de linha desta classe é dado pela equação (2.33).

Chamamos atenção para o fato de que inclusive dentro de uma classe de variedades Riemannianas tipo Gödel dadas na listagem acima, podem ter duas variedades localmente não equivalentes, para isto simplesmente tem que ter as tríadas m^2 , w , κ diferentes, logo, na verdade em cada classe existem infinitas variedades Riemannianas não equivalentes.

No capítulo **2** também estabelecemos que as classes de variedades IA, II, III e IVA admitem um grupo de isometria G_7 com um subgrupo de isotropia de dimensão igual a 2. Entretanto, as classes de variedades IB, IVB e V admitem um grupo de isometria G_9 com um subgrupo de isotropia com dimensão igual a 4. Finalmente a classe VI admite um grupo de isometria G_{15} com um subgrupo de isotropia de dimensão 10.

Encontramos explicitamente os geradores infinitesimais das isometrias (campos vetoriais de Killing) para cada família de espaços-tempos tipo Gödel generalizada, determinando a dimensão do grupo de isometria para cada família de espaços-tempos. Determinamos também a álgebra de Lie associada a cada grupo de isometria para cada classe destes espaços-tempos.

A análise feita na referência [59] para determinar se existe ou não violação de causalidade num tipo de variedades 5D Tipo Gödel pode ser facilmente estendida às variedades 5D tipo Gödel generalizadas do presente trabalho. Como resultado obtivemos que apenas as três primeiras classes das seis classes de variedades homogêneas tipo Gödel general-

izadas apresentam violação de causalidade, ou seja, permitem a existência de curvas tipo tempo fechadas.

No capítulo três estudamos a possibilidade de que a teoria de gravitação com matéria induzida admita como solução de sua equação de campo (3.2) a geometria 5D com métrica (2.23) tipo Gödel generalizadas estudadas no capítulo dois. Demonstramos que a única solução 5D com métrica (2.23) do tipo Gödel desta teoria é uma geometria plana pentadimensional com elemento de linha (3.37). Se a variedade subjacente para esta métrica plana é considerada como uma variedade Euclideana \mathcal{R}^5 simplesmente conexa, e como $G(r) > 0$, então, circunferências de Gödel não serão permitidas. Consequentemente o resultado anterior mostra que a teoria de gravitação com matéria induzida não admite nenhuma geometria *curva* com métrica 5D tipo Gödel (3.19), como solução de sua equações de campo (3.2). Este resultado é uma generalização ao trabalho [60].

De acordo com os trabalhos de McManus [17], Ponce de Leon [88] e outros [88] – [92] existem soluções geométricas 5D planas da teoria de gravitação com matéria induzida e que de acordo com esta teoria seus correspondentes modelos induzidos em 4D são espaços-tempos curvos. Em nosso contexto no capítulo três se mostrou que a solução espaço-temporal 5D plana da teoria de matéria induzida, induz apenas em quatro dimensões o espaço-tempo plano de Minkowski.

Conforme os artigos recentes [94, 93], podemos afirmar que a teoria de matéria induzida, gera, pelo menos localmente, todas as soluções da equação de campo de Einstein. Assim, no contexto da teoria com matéria induzida deve existir uma geometria pentadimensional *Ricci-flat* tal que, a métrica 4D tipo Gödel solução da TRG esta mergulhada localmente nela. Em outras palavras deve existir uma métrica 5D tal que a métrica 4D tipo Gödel anteriormente referida esta mergulhada localmente nesta métrica 5D.

Os resultados principais deste trabalho de tese foram condensados num artigo científico

publicado na revista Journal of Mathematical Physics [89].

Apêndice A

O Sistema de Computação Algébrica SHEEP/CLASSI

A.1 Sistema Classi/Sheep

Neste apêndice fazemos um resumo do sistema de computação algébrica CLASSI/SHEEP. Este sistema foi desenvolvido nas Universidades de Estocolmo e Londres, tendo por objetivo o cálculo de expressões algébricas dos tipos encontrados na Teoria de Relatividade Geral (TRG). Ele permite o cálculo de conexões, tensor de curvatura, escalar de curvatura, tensor de Einstein, derivada covariante do tensor de curvatura etc, para uma variedade Riemanniana de dimensão n (inteiro), seja numa base de coordenada ou uma base não-coordenada. É útil também na classificação das métricas na teoria da relatividade geral, classificação de Petrov, de Segre e também na abordagem do problema de equivalência segundo Karlhede. Uma descrição completa deste sistema de computação algébrica pode ser encontrada nas referências [61]. Aplicações ao problema de equivalência e à TRG podem ser encontradas nas referências [68] - [71]. Existe também um pacote denominado TCLASSI escrito em CLASSI/SHEEP para cálculos nas teorias de gravitação com torção,

onde a variedade espaço-temporal é dito tipo Riemann-Cartan [72].

A seguir vamos apresentar algumas noções básicas que permitem utilizar o sistema CLASSI/SHEEP, úteis no contexto desta tese. O sistema CLASSI/SHEEP depois de inicializado apresenta “SHP >”, indicando que o sistema está pronto para a entrada de dados e comandos. Os comandos de CLASSI/SHEEP usam a sintaxe de LISP [62, 63], onde cada comando tem um parêntese no início e outro no final. No contexto da classificação de métricas a entrada de dados com as informações sobre a métrica pode ser feita interativamente ou carregando um arquivo que contenha informações sobre a métrica. A seguir vamos apresentar alguns comandos úteis para manipular este sistema de computação algébrica [61].

- (TITLE “ _ _ _ _ ”) : É utilizado no início do arquivo da métrica e normalmente contém o nome desse arquivo e informações sobre a métrica. Este comando é usado somente quando carregamos um arquivo de métrica para executar no sistema CLASSI/SHEEP;
- % : Permite a introdução de comentários. Tudo o que se escreve à direita de “ % ” é ignorado por CLASSI/SHEEP;
- (LOAD “nome.lor”) : Carrega um arquivo de métrica ou de programa. O argumento “nome.lor” é o nome do arquivo, em geral este argumento deve conter a localização e o nome do arquivo entre aspas;
- (OFF ALL) : Desliga todas as chaves que controlam a execução do sistema SHEEP / CLASSI;
- (VARS *var1 var2 var3,...etc*) : Define as coordenadas. Os argumentos *var1 var2 var3,... etc* formam uma lista com as letras (ou nomes) que especificam as coordenadas, sendo a coordenada temporal em primeiro lugar;

- (ON NOZERO) : Este comando faz com que o sistema apresente somente aqueles componentes não nulos de qualquer tensor (seja na tela ou mesmo quando os resultados são direcionados para um arquivo);
- (NAMLC *vars*) : Faz com que o argumento *vars* seja apresentado em letras minúsculas. Geralmente é utilizado nos nomes das coordenadas e das funções;
- (DIMENSION *n*) : Define a dimensão *n* (inteiro) da variedade;
- (RPL GDD) : Define os componentes covariantes da métrica. A entrada de dados pode ser feita de maneira interativa ou de maneira global em forma matricial. É preciso usar o comando \$ para separar um dado de outro;
- (FUNS (A *var1 var2*)) : Este comando define o argumento A como uma função arbitrária das coordenadas *var1, var2, var3*, etc, possibilitando o cálculo de suas derivadas. No caso de uma função constante, os nomes das coordenadas não são indicados. Se uma função A depende de todas as coordenadas então é mais simples fazer o seguinte : (FUNS(A all)). É possível também juntar estes dois comandos num só comando conforme o item abaixo;
- (FUNS (A all)(B *var1 var2*)). Aqui a função A depende de todas as variáveis e a função B depende das coordenadas *var1, var2*. Os comandos RPL e FUNS não dizem onde os valores das funções devem ser utilizados, isto é feito na lista de substituições;
- IZUD : Matriz $n \times n$ cujos elementos são componentes das 1-formas $\omega^A = Z^A_{\mu} dx^{\mu}$ que definem uma base não-coordenada para a entrada de dados . Os valores dos elementos de IZUD são atribuídos com o comando RPL. O nome IZUD tem origem em *Input Z Up Down* ;

- (LORENTZ IFRAME) : Define o tipo de base não-coordenada utilizado para a entrada de dados, sendo (IFRAME) uma base não-coordenada tipo Lorentz (chamada tétradas de Lorentz no caso quadridimensional). Para definir outros sistemas de referência tais como bases não-coordenadas tipo nulas, semi-nulas ou cartesianas, utiliza-se NULLT, HNULLT, CARTESIAN. Assim, por exemplo, para o referencial semi-nulo o comando seria : (HNULLT IFRAME). Apresentamos alguns dos sistemas de referência mais usuais

1. FRAME LORENTZ $ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2.$

2. FRAME NULLT $ds^2 = \omega^0\omega^1 - \omega^2\omega^3.$

3. FRAME CARTESIAN $ds^2 = (\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2.$

Existem duas formas para especificar *derivada* de uma função no sistema CLASSI/SHEEP.

Por exemplo, para dizer a CLASSI que faça a seguinte operação $\partial^3 A / \partial t^2 \partial x^1$ faríamos : A&T&T&X ou DF(A,T,2,x,1).

O comando que define uma lista de substituições é

- (NEWSUL m SULNAME) : Ela define uma lista de substituições chamado SULNAME com m itens, por exemplo :

(NEWSUL 2 RIESUL)

DF(A,x) \$ k \$

DF(B,y,2) \$ w \$

define uma lista de substituições chamada RIESUL com dois itens. Especificamente o comando está instruindo a SHEEP que substitua $\frac{\partial A}{\partial x}$ por k , semelhantemente $\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$ por w , este comando ainda não especifica onde vai se fazer aquela substituição.

Para instruir a CLASSI/SHEEP quando vamos utilizar RIESUL, usamos o comando USESUL;

- (USESUL SULNAME *cobra1 cobra2 cobra3...*) que aplica SULNAME quando calculamos os tensores *cobra1 cobra2 cobra3...*. Seguindo o exemplo anterior : (USESUL RIESUL RIE RIC EIN) aplica RIESUL no momento de calcular os tensores RIE, RIC, EIN.

Dado que usualmente na TRG se trabalha com tensores, campos vetoriais, etc, e usualmente em algum sistema de referência (em especial num sistema inercial local), criou-se um pacote chamado "FRAME". Sempre que se quiser calcular conexões, curvaturas, encontrar os campos vetoriais de Killing, numa base de tetradas ou em geral numa base não-coordenada é preciso carregar primeiro o pacote FRAME com (LOAD FRAME).

Alguns tensores que são calculados com FRAME estão na tabela 1.1, onde os índices com letras gregas denotam componentes num sistema de coordenadas generalizadas. Os índices com letra latina denotam componentes numa base não-coordenada local.

Para dizer a CLASSI que calcule qualquer um dos objetos definidos na tabela 1.1, temos somente que proceder conforme a regra seguinte :

```
SHP> (wmake nome-em-classi 1),
```

Por exemplo, se queremos calcular o tensor de Einstein o procedimento será :

```
SHP > (wmake ein) ,
```

e se depois do cálculo quisermos sair de CLASSI então faremos :

```
SHP> (quit).
```

¹Ver tabela 1.1

Tabela A.1: Tensores no FRAME

Nome em CLASSI	Definição
HDD	H_{AB} (dado, fornecido pelo usuário)
HDET	$\det(H_{AB})$
ZUD	$Z^A{}_{\mu}$ (dado, fornecido pelo usuário)
ZDD	$Z_{A\mu} = H_{AB} Z^B{}_{\mu}$
GDD	$g_{\mu\nu} = H_{AB} Z^A{}_{\mu} Z^B{}_{\nu}$
FORMSU	$W^A = Z^A{}_{\mu} dx^{\mu}$
DS2	$g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$
LIE	$C_{ABC} = 2Z_{A[\mu,\nu]} Z^{\mu\nu}{}_{BC}$
LIEU	$C^A{}_{BC} = H^{AD} C_{DBC}$
GAM	$\Gamma_{ABC} = 1/2 (C_{CAB} + C_{BAC} - C_{ABC})$
GAMZ	$W_{AB\mu} = \Gamma_{ABC} Z^C{}_{\mu}$
CONF	$W_{AB} = W_{AB\mu} dx^{\mu}$
RIE	R_{ABCD}
RIC	$R_{AB} = H^{CD} R_{ABCD}$
RSCL	$R = R^A{}_A$
EIN	$T_{AB} = R_{AB} - 1/2 R H_{AB}$

Tabela A.2: Tensor de Curvatura no SHEEP/CLASSI

	Nome	Símbolo	Módulo
1	Tensor de curvatura	RIE	FRAME
2	Deriv. covar. do tensor de curvatura	DRIE	DRIEF
3	2da Deriv. covar. do tensor curvatura	D2RIE	D2RIEF
4	3ra Deriv. covar. do tensor de curvatura	D3RIE	D3RIEF

Na tabela 1.2 temos alguns objetos relacionados ao tensor de curvatura que são definidos no sistema CLASSI/SHEEP. Logo utilizando este sistema pode-se calcular por exemplo o tensor de curvatura (RIE) e suas derivadas covariantes (DRIE), (D2RIE) e (D3RIE), úteis na abordagem do problema de equivalência segundo Karlhede. O conteúdo desta tabela será utilizado em nosso trabalho no capítulo dois.

Supondo que inicialmente foram dados entradas corretas, podemos calcular qualquer objeto definido na tabela 1.2 carregamos o módulo "FRAME" com (LOAD FRAME). Em seguida carrega-se o módulo respectivo. Por exemplo, para calcular a derivada covariante do tensor de curvatura (DRIE) carrega-se o módulo "FRAME", logo o módulo "DRIEF" com (LOAD DRIEF). Finalmente o comando (wmake drie) calcula a derivada covariante do tensor de curvatura.

Para encontrar as equações de Killing correspondentes a uma variedade que possui uma métrica conhecida na base não-coordenada precisamos carregar o módulo KILLNF e, logicamente, devemos fornecer também os dado de entrada. Logo introduzimos como dado de entrada o vetor de Killing VUC (na base de coordenadas locais), então podemos calcular qualquer um dos objetos definidos na tabela 1.3 . Neste trabalho de tese é util calcular KDDF, pois temos que resolver a equação $V_{A;B} + V_{B;A} = 0$ (que é o mesmo que

Tabela A.3: Campos Vetorias de Killing no SHEEP/CLASSI

Nome	Símbolo	Definição
Vetor de Killing	VUF	V^A
Derivada de V	DVF	$V^A_{,B}$
Componente covariante de VUF	VDF	$V_B = \eta_{BA} V^A$
Derivada covariante de VDF	DVDF	$V_{A;B} = V_{A,B} - GAM^D_{AB} V_D$
Parte simétrica de DVDF	KDDF	$(V_{A;B} + V_{B;A})/2$

KDDF= 0) para encontrar os campos vetoriais de Killing sobre uma variedade que possui uma determinada métrica.

Um exemplo de um arquivo de métrica é dado a seguir :

Arquivo de programa escrito no sistema CLASSI/SHEEP

```
% ### 2godel.lor
(TITLE "2GODEL.LOR    Godel's Universe in Lorentz frame.
Pressure-free perfect fluid,    rotating    Kurt Godel 1949
Hawking-Ellis p168, first coordinate system".
A, B, C, D : Killing Vector Fields)
(LOAD FRAME)
(LOAD DRIEF)
(LOAD KILLNF)
(DIMENSION 4)
(OFF ALL)
(ON NOZERO)
(NAM T X Y Z)
```

```

t $ x $ y $ z $
(VARS T X Y Z) % (t, x, y, z )
(FUNS (W)) % omega
(FUNS (A all)(B all)(C all)(D all))
(RPL IZUD)
1 $ 0 $ E^(2^(1/2)*W*X) $ 0 $
0 $ 1 $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ 2^(-1/2)*E^(2^(1/2)*W*X) $ 0 $
0 $ 0 $ 0 $ 1 $
(RPL VUC)
A $ B $ C $ D $
(LORENTZ IFRAME)
% ### 2godel.lor end

```

O arquivo de programa acima permite calcular, por exemplo, o tensor de curvatura, o escalar de curvatura, a primeira derivada covariante do tensor de curvatura e também permite encontrar as equações que satisfazem os campos vetoriais de Killing.

Para rodar o arquivo do programa acima, carrega-se o sistema CLASSI/SHEEP, aparecendo na tela o seguinte: “SHP>.....”, a continuação carrega-se o arquivo do programa.

Por exemplo, se o arquivo chama-se “2godel.lor” e está no diretório

C:\ SHPTESE , então temos que fazer o seguinte :

SHP > (load “C:\ SHPTESE \ 2godel.lor”). Em seguida, para obter resultados do programa, ou seja para que ele calcule algum objeto de interesse reconhecido por CLASSI, se procede da seguinte forma :

SHP> (wmake nome-em-classi).

A.2 Arquivos de Programas para Espaços-tempos 5D

Tipo Gödel

Nesta seção listamos o conteúdo de alguns arquivos de métrica tipo Gödel 5D, úteis no cálculo da curvatura, tensor de Einstein e campos vetoriais de Killing no referencial de pntadas.

1. 1GTY5D.LOR

```
% ### 1GTY5D.LOR
(title "1GTY5D.LOR
      5D Godel type space-time ,curvature tensor,first
      and second covariant derivatives of the curvature.")
(load frame)
(load drief)
(load d2rief)
(dimension 5)
(off all)
(on nozero)
(vars t x y z u)
(namlc T X Y Z U)
(funs (H X)(D X)(F U))
(RPL IZUD)
1 $ 0 $ H $ 0 $ 0 $
0 $ 1 $ 0 $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ D $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ 0 $ F $ 0 $
```

```

0 $ 0 $ 0 $ 0 $ 1 $
(LORENTZ IFRAME)%
% ## 1GTY5D.LOR end

```

2. 2GTY5D.LOR

```

% ### 2GTY5D.LOR
(title "2GTY5D.LOR
      5D Godel type space-time with homogeneity condition.")
(load frame)
(load drief)
(load d2rief)
(load d3rief)
(dimension 5)
(off all)
(on nozero)
(vars t r p z u) % time,radial coord,phi,z,last coord.
(namlc T R P Z U)
(funs (H r)(D r)(F u)(m)(w)(k))
(RPL IZUD)
1 $ 0 $ H $ 0 $ 0 $
0 $ 1 $ 0 $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ D $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ 0 $ F $ 0 $
0 $ 0 $ 0 $ 0 $ 1 $
(LORENTZ IFRAME)
(NEWSUL 4 RIESUL)

```

```

DF(H,R,1) $ -2*w*D          $ % First homogeneity condition
DF(H,r,2) $ -2*w*DF(D,R,1) $
DF(D,r,2) $ m^2*D          $ % Second homogeneity condition
DF(F,u,2) $ k*F           $ % Third homogeneity condition
(USESUL RIESUL rie drief d2rief d3rief)
% ##2GT5D.LOR end

```

3. 3GT5D.LOR

```

% ### 3GT5D.LOR
(title "3GT5D.LOR
      Killing vector fields in 5D Space-time
      Godel Type.")
(load frame)
(load killnf)
(dimension 5)
(off all)
(on nozero)
(vars t x y z u)
(namlc t x y z u )
(funs (H x)(D x)(F u)(TT all)(R all)(P all)(ZZ all)(V all))
(NAM ZZ TT )
Z $ T $
(RPL IZUD)
1 $ 0 $ H $ 0 $ 0 $
0 $ 1 $ 0 $ 0 $ 0 $
0 $ 0 $ D $ 0 $ 0 $

```

0 \$ 0 \$ 0 \$ F \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ 0 \$ 0 \$ 1 \$

(RPL vuc)

TT-H*P/D \$ R \$ P/D \$ ZZ/F \$ V \$

(LORENTZ IFRAME)

% ### 3GT5D.LOR end

Bibliografia

- [1] A. Einstein, "The meaning of General Relativity", Princeton University (1956).
- [2] J. A. Wheeler, "Einstein's vision", Springer-Verlag, Berlin (1968).
- [3] G. Nordström, Phys. Z. **15**, 504 (1914).
- [4] Th. Kaluza, Sitzungsberichte preuss. Akad. Wiss. – Phys. Math. Klasse **LIV**, 966 (1921).
- [5] O. Z. Klein, Phys. Z. **37**, 895 (1926).
- [6] P. S. Wesson, Astron. Astrophys. **119**, 145 (1983).
- [7] P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **16**, 193 (1984).
- [8] P. S. Wesson, Astron. Astrophys. **143**, 233 (1985).
- [9] P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **22**, 707 (1990).
- [10] P. S. Wesson e Ponce de Leon, J. Math. Phys. **33**, 3883 (1992).
- [11] J. M. Overduin e P. S. Wesson, Phys. Rep. **283**, 303 (1997).
- [12] M. J. Duff, "Kaluza-Klein Theory in Perspective" hep-th/9410046.
- [13] P. S. Wesson e Ponce de Leon, J. Math. Phys. **34**, 4080 (1993).

- [14] S. Rippl, C. Romero e R. Tavakol, *Class. Quant. Grav.* **12**, 2411 (1995).
- [15] P. S. Wesson, *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 15 (1995).
- [16] P. S. Wesson, J. Ponce de Leon, H. Liu, B. Mashhoon, D. Kalligas, C. W. F. Everitt, A. Billyard, P. H. Lim e J. M. Overduin, *Int. J. Mod. Phys. A* **11**, 3247 (1996).
- [17] D. J. McManus, *J. Math. Phys.* **35**, 4889 (1994).
- [18] A. A. Coley, *Astrophys. J.* **427**, 585 (1994).
- [19] A. A. Coley e D. J. McManus, *J. Math. Phys.* **36**, 335 (1995).
- [20] P. S. Wesson, *Astrophys. J.* **394**, 19 (1992).
- [21] P. S. Wesson, *Phys. Lett. B* **276**, 299 (1992).
- [22] P. S. Wesson e J. Ponce de Leon, *J. Math. Phys.* **33**, 3883 (1992).
- [23] H. Liu e P. S. Wesson, *Int. J. Mod. Phys. D* **3**, 627 (1994).
- [24] P. S. Wesson e J. Ponce de Leon, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 555 (1994).
- [25] P. S. Wesson e H. Liu, *Astrophys. J.* **440**, 1 (1995).
- [26] P. S. Wesson e J. Ponce de Leon, *Astron. Astrphys.* **294**, 1 (1995).
- [27] D. Kalligas, P. S. Wesson e C. W. F. Everitt, *Astrophys. J.* **439**, 548 (1995).
- [28] H. Liu e P. S. Wesson, *Class. Quant. Grav.* **13**, 2311 (1996).
- [29] A. Billyard e P. S. Wesson, *Gen. Rel. Grav.* **28**, 129 (1996).
- [30] H. Liu e P. S. Wesson, *Gen. Rel. Grav.* **30**, 509 (1998).
- [31] K. Gödel, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 447 (1949).

- [32] S. C. Maitra, *J. Math. Phys.* **7**, 1025 (1966).
- [33] M. M. Som e A. K. Raychaudhuri, *Proc. Roy. Soc. London A* **304**, 81 (1968).
- [34] A. Banerjee e S. Banerji, *J. Phys. A* **1**, 188 (1968).
- [35] F. Bampi e C. Zordan, *Gen. Rel. Grav.* **9**, 393 (1978).
- [36] M. J. Rebouças, *Phys. Lett. A* **70**, 161 (1979).
- [37] A. K. Raychaudhuri e S. N. G. Thakurta, *Phys. Rev. D* **22**, 802 (1980).
- [38] S. K. Chakraborty, *Gen. Rel. Grav.* **12**, 925 (1980).
- [39] M. J. Rebouças e J. Tiomno, *Phys. Rev. D* **28**, 1251 (1983).
- [40] A. F. F. Teixeira, M. J. Rebouças e J. E. Áman, *Phys. Rev. D* **32**, 3309 (1985).
 Note que nesta referência existem dois erros, ditos a seguir: na equa.(5) o termo $-R_z$ deve ser R_z , e na eq.(38) o termo $\kappa_3 m D$ deve ser $\kappa_3 m^2 D$.
- [41] M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *Phys. Rev. D* **34**, 2985 (1986).
- [42] M. J. Rebouças, J. E. Áman e A. F. F. Teixeira, *J. Math. Phys.* **27**, 1370 (1986).
- [43] M. J. Rebouças e J. E. Áman, *J. Math. Phys.* **28**, 888 (1987).
- [44] F. M. Paiva, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *Phys. Lett. A* **126**, 168 (1987).
- [45] K. Dunn, *Gen. Rel. Grav.* **21**, 137 (1989).
- [46] M. J. Rebouças e J. E. Áman, *J. Math. Phys.* **28**, 888 (1987).
- [47] R. X. Saibatalov, *Gen. Rel. Grav.* **7**, 697 (1995).
- [48] T. Singh e A. K. Agrawal, *Fortschr. Phys.* **42**, 71 (1994).

- [49] M. Rooman e P. Spindel, *Class. Quant. Grav.* **15**, 3241 (1998).
- [50] M. Tsamparlis, D. Nikolopoulos e P. S. Apostolopoulos, *Class. Quant. Grav.* **15** 2909 (1998).
- [51] A. M. Candelas e M. Sánchez, “Geodesic Connectedness in Gödel-type Space-times” Report 17/98, Dipartimento Interuniversitario di Matematica, Università degli Studi- Politecnico di Bari (1998).
- [52] A. Krasinski, *J. Math. Phys.* **39**, 2148 (1998). Esta referência contém uma boa quantidade de listagem de referências sobre modelos cosmológicos com parâmetro de rotação.
- [53] E. P. Vaidya, M. L. Bedran e M. M. Som, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 857 (1984).
- [54] J. D. Oliveira, A. F. F. Teixeira e J. Tiomno, *Phys. Rev. D* **43**, 3661 (1986).
- [55] L. L. Smalley, *Phys. Lett. A* **113**, 463 (1986).
- [56] W. M. Silva, *J. Math. Phys.* **32**, 3223 (1991).
- [57] J. D. Barrow e M. P. Dabrowski, *Phys. Rev. D* **58**, 103502 (1998).
- [58] J. E. Aman, J. B. Fonseca-Neto, M. A. H. MacCallum e M. J. Rebouças, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1089 (1998).
- [59] M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *J. Math. Phys.* **39**, 2180 (1998).
- [60] M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *Int. J. Mod. Phys A*, **13**, 3181 (1998).
- [61] M. A. H. MacCallum e J. E. F. Skea, “SHEEP: A Computer Algebra System for General Relativity”, in *Algebraic Computing in General Relativity, Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra*, Vol. II, edited by M. J.

Rebouças and W. L. Roque. Oxford U. P., Oxford (1994). Ver também as referências lá mencionadas.

- [62] J. Marti, A. Hearn e M. Griss : “Standard LISP report”, SIGPLAN notices. ACM, New York **14** , no.10, 48 (Distribuído com código fonte de REDUCE).
- [63] P. H. Winston e B. Horhn : “LISP”, Addison Wesley, New York (1981).
- [64] E. Cartan, “Leçons sur la Géométrie des Éspaces de Riemann”, Gauthier-Villars, Paris (1951). Traduzido para o Inglês por J. Glazebrook, Math. Sci Press, Brookline (1983).
- [65] R. B. Gardner, “The method of Equivalence and Its Applications”, CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia (1989).
- [66] A. Karlhede, “A Review of the Equivalence Problem”, march 1979, University of Stockolm Report (79-05). Institute Of Physics - Sweden.
- [67] A. Karlhede, Gen. Rel. Grav. **12**, 693 (1980).
- [68] M. A. H. MacCallum, “Classifying Metrics in Theory and Practice”, in *Unified Field Theory in More Than 4 Dimensions, Including Exact Solutions*, editado por V. de Sabbata e E. Schmutzer. World Scientific, Singapore (1983).
- [69] J. E. Åman, “Manual for CLASSI: Classification Programs for Geometries in General Relativity”, Institute of Theoretical Physics Technical Report, 1987. Third provisional edition. Distributed with the SHEEP sources.
- [70] A. Karlhede, M. A. H. MacCallum, Gen. Rel. Grav. **14**, 673 (1982).
- [71] M. A. H. MacCallum, “Computer-aided Classification of Exact Solutions in General Relativity”, in *General Relativity and Gravitational Physics (9th Italian Confer-*

- ence), editado por R. Cianci, R. de Ritis, M. Francaviglia, G. Marmo, C. Rubano e P. Scudellaro. World Scientific, Singapore (1991).
- [72] J. Batista da Fonseca-Neto, “A Equivalência de Espaços-tempos nas Teorias de gravitação com Torção Utilizando Computação Algébrica”, tese de doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas CBPF (1997).
- [73] K. Nomizu, S. Kobayashi “Foundations of Differential Geometry”, Volume I, Interscience Publishers (1963).
- [74] J. B. Fonseca-Neto, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, *J. Math. Phys.* **33** (7), (1992).
- [75] M. Heller, “Theoretical Foundations of Cosmology”, World Scientific, 1992.
- [76] T. Koike, M. Tanimoto e A. Hosoya, *J. Math. Phys.* **35** (9), 4855 (1994).
- [77] C. J. Isham, “Modern Differential Geometry for Physicists”, World Scientific(32) 1989.
- [78] Y. Choquet-Bruhat, Cécile de Witt-morette “Analysis, Manifolds and Physics”(part I, part II), Reprinted in 1996. Edition : Elsevier science B. V.
- [79] A. O. Barut, R. Rączka, “Theory of group representations and applications”, World Scientific (1986).
- [80] F. M. Paiva, M. J. Rebouças e M. MacCallum, *Class. Quantum Grav.* **10**, 1165 (1993).
- [81] A. Koutras e C. McIntosh, *Class. Quantum Grav.* **13**, L47 (1996)
- [82] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, graduate student series in physics, reprinted (1991).


- [83] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, "The Large Scale Structure of Space-Time", Cambridge U. P., Cambridge (1973).
- [84] M. O. Calvão, M. J. Rebouças, A. F. F. Teixeira, W. M. Silva-Jr., J. Math. Phys. **29**, 1127 (1988).
- [85] A. Z. Petrov, "Einstein Spaces" (primeira edição em inglês), Pergamon Press (1969).
- [86] R. Penrose, Ann. Phys. **10**, 171 (1960).
- [87] F. A. E. Pirani, "General Relativity" (19..).
- [88] J. Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. **20**, 539 (1988).
- [89] H. L. Carrion, M. J. Rebouças e A. F. F. Teixeira, J. Math. Phys. **40**, 4011 (1999).
- [90] G. Abolghasem, A. A. Coley e D. J. Manaus, J. Math. Phys. **37**, 361 (1996).
- [91] A. Billyard e P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **28**, 137 (1996).
- [92] H. Liu. P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **30**, 509 (1998).
- [93] J. E. Lidsey, C. Romero, R. Tavakol e S. Rippl, Class. Quant. Grav. **14**, 865 (1997).
- [94] C. Romero, R. Tavakol e R. Zalaletdinov, Gen. Rel. Grav. **28**, 365 (1996).
- [95] J. E. Campbell, "A Course of Differential Geometry", Clarendon press, Oxford, (1926).
- [96] L. P. Eisenhart, "Riemannian geometry", Princeton University Press, Princeton.
- [97] E. Kasner, Am. J. Math. **43**, 126 (1921).

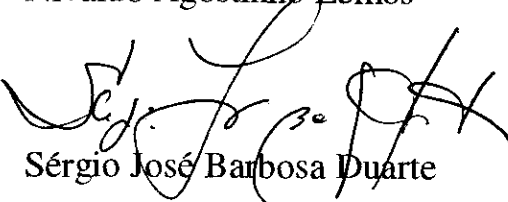
**“ESPAÇOS-TEMPOS TIPO GÖDEL EM TEORIA DE
GRAVITAÇÃO COM MATÉRIA INDUZIDA”**

Hector Leny Carrion Salazar

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Marcelo José Rebouças - Presidente


Nivaldo Agostinho Lemos


Sérgio José Barbosa Duarte


Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira - Suplente

Rio de Janeiro, 07 de dezembro de 1999