

Tese de Doutorado

Propriedades Estáticas e Dinâmicas  
de Modelos Magnéticos do tipo Potts:  
Resultados de Cálculos Exatos e de Simulações

José Arnaldo Redinz

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas CBPF/CNPq

Rio de Janeiro - 1998

## Agradecimentos

Dedico esse espaço àqueles que, de alguma forma, cooperaram para a concretização desse importante passo na minha formação profissional e àqueles que tornaram esse período de minha vida também enriquecedor do ponto de vista pessoal. Registro meus sinceros agradecimentos

à Aglaé C. N. de Magalhães, pela dedicação aos nossos trabalhos, por sua humildade e franqueza no trato pessoal, pela orientação cuidadosa e competente.

ao Francisco A. Tamarit, pelo companheirismo, pela dedicação aos nossos trabalhos.

ao Constantino Tsallis e Evaldo M. F. Curado pela atenção e colaboração constantes.

aos colegas dos tempos do CBPF: Edson Passamani, André Sznadger, Vitório, Klippert, Ladário, André Maurício, Crisógono, Fortunato, Andrés Papa, Célia, Celina, Denise, Isaías, Mateo, Victor, Mohamed, ...

aos colegas de Viçosa: Marcelo Lobato e Anésia, Orlando e Patrícia, Daniel Stariolo e Beatriz, Aurélio, Ricardo Cordeiro, Afranio, Marcos Couto, Gino, Paulo Colares, Alexandre Tadeu, ...

à Wanda, Almério e Myriam pelo apoio e companheirismo.

à Edith, da Vila Ozanan, por ter me dedicado uma parte do seu tempo.

ao CNPq e CAPES/PICD/UFV pelas bolsas que me foram concedidas.

# Resumo

Nessa tese estudamos propriedades estáticas e dinâmicas de alguns modelos de spins com simetria discreta através de cálculos analíticos e simulações computacionais.

Na primeira parte da tese estudamos, através do método de Grupo de Renormalização no espaço real, alguns aspectos da criticalidade do modelo de Ising em redes fractais. Derivamos expressões exatas para diversas funções termodinâmicas e investigamos a validade das leis de escala de Rushbrooke e hiperescala para o ferromagneto de Ising em uma família de redes Sierpinski-gasket com  $m$  folhas (com lado  $b = 2$ ) e também verificamos analiticamente a validade da lei de hiperescala para esse modelo na família de redes do tipo diamante. Ainda nessa primeira parte da tese, determinamos o diagrama de fases estático e alguns expoentes críticos do modelo de Ising com campo externo na família Sierpinski-gasket com  $m$  folhas (com lado  $b = 4$ ).

Na segunda parte da tese estudamos, através do método de propagação de danos, algumas propriedades dinâmicas dos modelos de Potts e Potts quiral que evoluem segundo uma dinâmica de banho térmico. Investigamos o diagrama de fases que resulta da aplicação desta dinâmica ao modelo de Potts quiral com três estados na rede quadrada. Encontramos cinco fases dinâmicas distintas, dentre as quais, quatro podem ser relacionadas com as fases estáticas do modelo de Potts quiral. A fase adicional é um regime dinâmico caótico com características não usuais que reduz-se, para campo quiral nulo, à nova fase obtida recentemente para o modelo de Potts padrão. Visando investigar a existência de um possível teorema do tipo flutuação-dissipação para grandezas associadas ao dano no modelo de Potts com três estados na rede quadrada, estudamos a flutuação de danos locais em pares de sítios que distam  $r$  entre si e a suscetibilidade do dano. Nossas simulações Monte Carlo mostram que, se normalizarmos esta função de correlação em  $r = 0$ , a flutuação do dano assim definida tende a divergir, tal como a suscetibilidade, na temperatura de transição de dano. Verificamos também que o quociente entre estas duas funções, para tamanhos finitos, é uma função monótona da temperatura, indicando assim a existência de uma relação do tipo flutuação-dissipação para danos neste modelo.

# Abstract

In the present thesis we study static and dynamical properties of some spin models with discrete symmetry through analytic calculations and numerical simulations.

In the first part of the thesis we study, through the real space Renormalization Group, some aspects of the criticality of the Ising ferromagnet on fractal lattices. We derive exact expressions for several thermodynamical functions and we investigate the validity of the Rushbrooke scaling law and hyperscaling for the Ising model on a family of  $m$ -sheet Sierpinski gasket lattices (with side  $b = 2$ ) and we also verify analytically the hyperscaling law for this model on the family of diamond-type hierarchical lattices. Also in this first part of the thesis we calculate the static phase diagram and some critical exponents of the Ising model with external field on a family of  $m$ -sheet Sierpinski gasket lattices (with side  $b = 4$ ).

In the second part of the thesis we study, through the spreading of damage method, some dynamical properties of the Potts and chiral Potts models which evolve in a heat bath dynamics. We investigate the dynamical phase diagram which results of the application of this dynamics to the square lattice three-state chiral Potts model. We find five distinct dynamical phases, among which four of them can be related with the static phases of the chiral Potts model. The additional phase is a dynamical chaotic regime with unusual features which recovers, for zero chiral field, the new dynamical chaotic phase found in the standard Potts model. In order to investigate the possible existence of something similar to a fluctuation-dissipation theorem for functions associated with the damage in the square-lattice three-state Potts model, we study the damage fluctuations, the correlation function between local damages in pairs of sites which are a distance  $r$  apart from each other and the damage susceptibility. Our Monte Carlo simulations show that, if we normalize this correlation function in  $r = 0$ , the damage fluctuations defined in this way tend to diverge, as occurs with the susceptibility, at the damage transition temperature. We also verify that the quotient of these two functions, for finite size systems, is a monotonous function of the temperature, indicating the existence of a relation like a fluctuation-dissipation theorem for the damage in this model.

# Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Sumário	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xvii
Introdução	1
1 Fractais	8
1.1 Introdução . . . . .	8
1.2 Fractais . . . . .	9

1.3	Redes Hierárquicas . . . . .	14
1.4	A Família de Fractais Sierpinski gasket com $m$ folhas e lado $b$ . . . . .	18
1.5	Modelo de Ising Generalizado na Família $(mSG)_b$ . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Ferromagneto de Ising na Família de Fractais <math>(mSG)_2</math>: Funções Termodinâmicas e Leis de Escala</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução . . . . .	25
2.2	O Modelo, Equações de GR e Fronteiras Críticas . . . . .	27
2.3	Funções Termodinâmicas . . . . .	30
2.4	Expoentes Críticos e Leis de Escala . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Criticalidade do Modelo de Ising Generalizado na Família de Fractais <math>(mSG)_4</math></b>	<b>46</b>
3.1	Introdução . . . . .	46
3.2	Equações de GR . . . . .	47
3.3	Resultados . . . . .	49
3.3.1	Diagrama de Fases Global . . . . .	49
3.3.2	Modelos nos Eixos Invariantes . . . . .	56
3.3.3	Modelos nos Planos Invariantes . . . . .	60
3.3.4	Autovalores e Expoentes Críticos . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Ferromagneto de Ising em Redes Hierárquicas do tipo Diamante: Verificação Analítica da Lei de Hiperescala</b>	<b>65</b>
4.1	Introdução . . . . .	65
4.2	Modelo . . . . .	66
4.3	Relações de Recorrência . . . . .	69
4.4	A Lei de Hiperescala . . . . .	73

<b>5 O Método de Propagação de Danos</b>	<b>75</b>
<b>6 Transições Dinâmicas no Modelo de Potts Quiral com Três Estados na Rede Quadrada obtidas através da Propagação de Danos com Dinâmica de Banho Térmico</b>	<b>90</b>
6.1 Introdução . . . . .	90
6.2 Modelo e Método . . . . .	92
6.3 Resultados . . . . .	96
<b>7 Suscetibilidade e Função de Correlação do Dano no Modelo de Potts com Três Estados na Rede Quadrada: Evidências de uma Relação do tipo Flutuação-Dissipação</b>	<b>111</b>
7.1 Introdução . . . . .	111
7.2 Modelo e Método . . . . .	113
7.3 Resultados . . . . .	115
<b>8 Conclusões Finais</b>	<b>128</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>133</b>
<b>Apêndice B</b>	<b>134</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>148</b>

# Lista de Figuras

- 1.1 Alguns exemplos de fractais determinísticos. (a) A curva de von Koch ( $d_f = \ln 4 / \ln 3 = 1,26\dots$ ). (b) O Sierpinski gasket ( $d_f = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$ ). A curva de von Koch é gerada pela substituição sucessiva dos segmentos de reta pelo padrão (gerador) da hierarquia 1 (convenientemente reescalado). O Sierpinski gasket é gerado pela remoção repetida do triângulo central ou, equivalentemente, pela substituição de cada triângulo orientado para cima (hachurado) pelo padrão do nível 1 reescalado. . . . . 11
- 1.2 Alguns exemplos de fractais aleatórios. (a) Um agregado gerado por partículas em difusão (simulação computacional com 50.000 partículas) ( $d_f \simeq 1,7$ ). (b) Depósito de óxido de manganês na superfície de uma pedra ( $d_f \simeq 1,78$ ). 12

1.3	Alguns exemplos de redes hierárquicas do tipo ligação. (a) Rede diamante. (b) Rede ponte de Wheatstone. O gerador de cada uma dessas redes constitui o nível 1 dos seus processos de construção. Cada nível é obtido do nível anterior pela substituição de cada uma de suas ligações pelo gerador.	15
1.4	Os primeiros estágios de construção das famílias de fractais $(mSG)_2$ e $(mSG)_4$ com duas folhas ( $m = 2$ ). Para uma melhor visualização, representamos por uma curva tracejada (para $b = 2$ ) a segunda folha do estágio $n = 2$ , que está conectada à primeira folha apenas pelos sítios externos $A$ , $B$ e $C$ .	20
1.5	Temperaturas críticas para o ferromagneto de Ising nas redes $(mSG)_2$ (a) e $(mSG)_4$ (b) em função do número de folhas $m$ ( $b = 2$ ) e da dimensão fractal ( $b = 4$ ).	21
2.1	Temperatura crítica $T_c$ em função da dimensão fractal $d_f^{(m)}$ . Na curva superior (inferior) mostramos os pontos críticos do ferromagneto de Ising com $K_3 = h = 0$ ( $K_2 = h = 0$ ).	30
2.2	Calor específico adimensional por sítio em função da variável $x = \exp\{-4K_2/m\}$ para os casos $m = 1, 2, 3$ e $4$ no nível $n = 30$ . Os traços no eixo horizontal, indexados por (2), (3) e (4), marcam as temperaturas críticas $z_c^{(2)}$ , $z_c^{(3)}$ e $z_c^{(4)}$ respectivamente.	34
2.3	Magnetizações espontâneas $M$ (linhas sólidas) e as funções $M_\Delta$ (linhas tracejadas) em função de $x$ para os casos $m = 2, 3$ e $4$ no nível $n = 30$ . Os números entre parênteses, (2), (3) e (4), correspondem às temperaturas críticas $z_c^{(2)}$ , $z_c^{(3)}$ e $z_c^{(4)}$ respectivamente.	36

2.4	Suscetibilidades adimensionais $\chi$ (linhas sólidas) e $\chi_{\Delta}$ (linhas tracejadas) em função de $x$ para os casos $m = 2, 3$ e $4$ no nível $n = 30$ . Os traços no eixo horizontal indexados por (2), (3) e (4) correspondem às temperaturas críticas $z_c^{(2)}$ , $z_c^{(3)}$ e $z_c^{(4)}$ respectivamente. O gráfico menor exhibe um detalhe da suscetibilidade $\chi$ para o caso $m = 2$ . . . . .	40
2.5	Magnetizações espontâneas $M_n$ em função da variável $z = e^{-4K_2}$ para o caso $m = 2$ nas hierarquias $n = 2, 3$ e $4$ . . . . .	41
2.6	Gráficos log-log exibindo os comportamentos do calor específico (a) e da magnetização (b) na vizinhança da temperatura crítica para $m = 2$ e hierarquia $n = 30$ . . . . .	42
2.7	Gráficos log-log exibindo os comportamentos das grandezas $ z_{pcn}^{(m)} - z_c^{(m)} $ e $\chi_n(z_{pcn})$ com a variação do tamanho $L_n = 2^n$ da rede $(mSG)_2$ . . . . .	44
2.8	Expoentes críticos $\nu$ , $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ do modelo de Ising com campo nulo na rede $(mSG)_2$ como funções da dimensão fractal $d_f^{(m)}$ . . . . .	45
3.1	Diagrama de fases global do modelo de Ising na rede $(mSG)_4$ para $m = 2$ . Os quadrados cheios representam os atratores das fases $\uparrow\uparrow\downarrow$ ( $AF_{\uparrow}$ ), $\downarrow\downarrow\uparrow$ ( $AF_{\downarrow}$ ), $\uparrow\uparrow\uparrow$ ( $P_{\uparrow}$ ) e $\downarrow\downarrow\downarrow$ ( $P_{\downarrow}$ ), enquanto que $P(0, 0, 0)$ é o atrator de quase todos os pontos da superfície ABCD. Mostramos também um dos pontos críticos de 'Baxter-Wu' $x_{BW}$ . Os quadrados vazados simbolizam os pontos fixos especiais que são as interseções de três fases. . . . .	50

- 3.2 Superfície crítica  $AF_{\downarrow}-P_{\downarrow}$  para  $m = 2$ . Os atratores das fases são representados por quadrados cheios. No eixo invariante  $t$ , que corresponde ao modelo de Ising usual,  $t_c$  é o ponto crítico ferromagnético que separa a fase paramagnética (com atrator em  $P$ ) da fase ferromagnética (com atrator em  $F_t$ ).  $AF_{\downarrow}^*$  é o atrator da superfície crítica  $AF_{\downarrow}-P_{\downarrow}$ . Para uma melhor visualização as outras superfícies não são mostradas. Note que a linha vertical  $A AF_{\downarrow}$  representa, de fato, linhas verticais diferentes mas muito próximas entre si correspondendo a seções  $x=\text{constante}$  com valores diferentes de  $x$  próximos de 1. . . . . 51
- 3.3 Diagrama de fases do plano invariante  $x = 1$  para qualquer valor de  $m > 1$ . A linha crítica AB separa a fase antiferromagnética  $AF_{\downarrow}$  (com atrator em  $(-1,1,-1)$ ) da fase paramagnética com campo externo infinito positivo  $P_{\uparrow}$  (com atrator em  $E(0,1,1)$ ). Como discutido no texto, os pontos da fronteira AB convergem todos para o ponto fixo  $F_x$  somente para  $m < 9$ . . . . . 53
- 3.4 Corte do diagrama de fases no plano não invariante  $t = -1$  (para qualquer valor de  $m > 1$ ). A linha AD é a interseção de três superfícies:  $P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$ ,  $AF_{\uparrow}-P_{\uparrow}$ , e  $AF_{\downarrow}-P_{\downarrow}$ . Os quadrados cheios representam os atratores das duas fases antiferromagnéticas  $AF_{\uparrow}$  e  $AF_{\downarrow}$ . Os pontos em AD convergem para o ponto fixo  $P$  no centro da superfície  $P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$ . . . . . 54
- 3.5 Diagrama de fases do plano invariante  $t = 1$  para qualquer valor de  $m > 1$ . A curva BC separa as fases paramagnéticas  $P_{\uparrow}$  e  $P_{\downarrow}$  (com campo externo infinito) cujos atratores são C e B.  $F_t$  é um ponto fixo de descontinuidade (transição de primeira ordem). . . . . 55

- 3.6 Corte do diagrama de fases global no plano  $t = 0$  para  $m = 2$ . O ponto  $x_{BW}$  ( $-x_{BW}$ ) é o ponto crítico do modelo com interações somente entre três spins que separa a fase paramagnética (com atrator em  $P$ ) da fase ordenada cujo atrator é  $F_x$  ( $-F_x$ ). Para uma melhor visualização, as fronteiras  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  (que são muito estreitas) estão desenhadas fora de escala. . . . . 56
- 3.7 Corte  $x = 0$  do diagrama de fases global para  $m = 2$ . O eixo  $t$  corresponde ao modelo de Ising usual na rede  $(mSG)_4$ .  $t_c$  é o ponto crítico ferromagnético que separa a fase paramagnética (com atrator em  $P$ ) da fase ferromagnética (com atrator em  $F_t$ ). As fronteiras  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$ , que são de fato muito estreitas, estão desenhadas fora de escala. . . . . 57
- 3.8 Corte  $y = 0$  do diagrama de fases global para  $m = 2$ . As fronteiras  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  estão fora de escala. . . . . 58
- 3.9 Seção  $t = \text{constante}$  do diagrama de fases global com  $t = -0,7$  para valores distintos de  $m$  ( $m = 2, 4, 8, 16$  e  $32$ ). Podemos notar que o domínio das fases antiferromagnéticas aumenta à medida em que a dimensão fractal cresce. A superfície  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$  não varia com a dimensão fractal. . . . . 59
- 3.10 Seção  $x = \text{constante}$  do diagrama de fases com  $x = 0,8$  para diferentes valores de  $m$  ( $m = 2, 4, 8, 16$  e  $32$ ). A linha  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$  (linha em negrito) é invariante com  $m$ , e as linhas críticas  $P_{\uparrow} - AF_{\uparrow}$  para  $2 \leq m \leq 32$  são indistinguíveis dentro da escala aqui adotada. . . . . 60
- 3.11 Seção  $y = \text{constante}$  do diagrama de fases com  $y = 0,2$ . As linhas  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$  não variam com  $m$ . As curvas na parte superior esquerda representam as linhas críticas  $P_{\downarrow} - AF_{\downarrow}$  para  $m = 2$  (a curva mais alta), 4, 8, 16 e 32 (a curva mais baixa). . . . . 61

3.12	Temperatura crítica (curva tracejada) e expoente crítico $\nu$ (linha contínua) em função da dimensão fractal $d_f^{(m)}$ da rede ( $mSG_4$ . . . . .	62
4.1	Primeiros três passos de construção das redes $RHD_{(P=2,b=2)}$ e $RHD_{(P=2,b=3)}$ . Os círculos vazados são as raízes das redes hierárquicas. . . . .	67
4.2	Ilustração do mecanismo de construção do Hamiltoniano efetivo. No nível $n$ , cada ligação da rede no nível $n - 1$ é substituída pela célula básica (com $P = 2$ e $b = 2$ nessa figura). As médias envolvendo os spins que apareceram apenas no nível $n$ ( $\sigma$ e $\sigma'$ ) estão relacionadas com as médias envolvendo os spins do nível anterior ( $\mu_1$ e $\mu_2$ ) através do sistema de equações derivado do Hamiltoniano efetivo exibido no texto. . . . .	69
5.1	Dano médio $\psi$ em função da temperatura para o modelo de Ising em $d = 2$ simulado pela dinâmica Monte Carlo de Glauber. . . . .	78
5.2	Dano médio (em $t = 500$ ) para o modelo de Ising em $d = 3$ em função da temperatura para diferentes condições iniciais e diferentes lados $L$ da rede. . . . .	79
5.3	Dano médio $\langle d \rangle$ para o modelo do relógio com $p = 10$ estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico. . . . .	82
5.4	Probabilidade de sobrevivência $P(t)$ para o modelo do relógio com $p = 10$ estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico (com $D(0) = 1$ ). . . . .	83
5.5	Flutuação do dano $\sigma_d(t)$ para o modelo do relógio com $p = 10$ estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico (com $D(0) = 1$ ). . . . .	84
5.6	Probabilidade de sobrevivência $P(t)$ para o ferromagneto de Potts com $q = 3$ estados na rede quadrada com lado $L = 64$ para diferentes tempos de simulação. . . . .	85

5.7	Dano médio $\langle D(t) \rangle$ para o ferromagneto de Potts com $q = 3$ estados na rede quadrada para três condições iniciais diferentes: (a) $D(0) = 1$ (com ambas configurações ordenadas), (b) $D(0) = 1/2$ (ambas desordenadas onde 50% dos spins de uma réplica estão em estados distintos dos da outra réplica) e (c) $D(0) = 0,05$ (desordenadas). . . . .	86
5.8	Danos médios $\langle D(t) \rangle$ e $\langle d(t) \rangle$ e a probabilidade de sobrevivência $P(t)$ em função do tempo na temperatura $T = 0,90$ com condições iniciais diferentes: condição (a) na linha cheia e condição (b) nas outras linhas (ver legenda da fig. (5.7)). . . . .	87
5.9	Suscetibilidade $\chi_D$ para o modelo de Ising na rede quadrada ( $L = 64$ ) para dois valores do campo conjugado $h$ : $h = 0,03$ ( $\bullet$ ) e $h = 0,05$ ( $\Delta$ ). . . . .	89
6.1	Diagrama de fases estático do modelo de Potts quiral anisotrópico com três estados na rede quadrada. A curva tracejada indica qualitativamente a fronteira entre as fases paramagnética e flutuante assumindo a ausência de pontos de Lifshitz para $\Delta > 0$ . As linhas retas pontilhadas indicam os valores de $\Delta$ e $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) para os quais nossas simulações foram realizadas com detalhes. . . . .	94
6.2	Dano médio $\langle D \rangle$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) para um valor fixo de $\Delta = 0,1$ e condições iniciais (a) e (b) descritas no texto ( $t = 10000$ MCS). As simulações foram realizadas para dois tamanhos diferentes do sistema ( $30 \times 90$ ( $M = 500$ amostras) e $30 \times 120$ ( $M = 200$ amostras)). . . . .	97

6.3	Probabilidade de sobrevivência $P$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) ( $t = 10000$ MCS) para $\Delta = 0, 1$ fixo e condição inicial (a). Os tamanhos e números de amostras são os mesmos da figura (6.2). . . . .	98
6.4	Flutuação do dano $\sigma_D$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) ( $t = 10000$ MCS) para $\Delta = 0, 1$ fixo e condição inicial (a) para sistemas com tamanhos $30 \times 90$ ( $M = 500$ amostras) e $30 \times 120$ ( $M = 200$ amostras). . . . .	99
6.5	Evoluções temporais de $\langle D(t) \rangle$ para $\Delta = 0, 1$ fixo, condição inicial (a) e temperaturas (em unidades de $J/k_B$ ) pertencentes a regimes diferentes. Os tempos característicos dos decaimentos exponenciais são, aproximadamente, $\tau_{LIT}(T = 1, 1) \simeq 2,0 \times 10^3$ MCS e $\tau_{HT}(T = 1, 8) \simeq 77$ MCS. Os tamanhos e números de amostras são os mesmos da figura (6.2). . . . .	100
6.6	Dano médio $\langle D \rangle$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) para valores fixos de $\Delta = 0, 1, 0,4$ e $0,8$ ( $t = 10000$ MCS). As simulações foram realizadas para $M = 100$ amostras de tamanho $30 \times 90$ . As condições iniciais foram a ordenada ferromagneticamente (a) para $\Delta = 0, 1$ e $0,4$ , e a ordenada quiralmente (c) para $\Delta = 0, 8$ . . . . .	102
6.7	Dano médio $\langle d \rangle$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) ( $t = 10000$ MCS) para sistemas de tamanho $30 \times 90$ ( $M = 100$ amostras) para diferentes condições iniciais e $\Delta = 0, 1$ fixo. . . . .	103
6.8	Dano médio $\langle d \rangle$ para tempos longos versus temperatura $T$ (em unidades de $J/k_B$ ) ( $t = 10000$ MCS) para sistemas de tamanho $30 \times 90$ ( $M = 100$ amostras) para diferentes condições iniciais e para $\Delta = 0, 8$ fixo. . . . .	104

6.9	Evoluções temporais dos danos $\langle D(t) \rangle$ e $\langle d(t) \rangle$ para $\Delta = 0,8$ e temperatura $T = 0,5$ (em unidades de $J/k_B$ ) fixos, com as condições iniciais (c) e (b). $M = 100$ amostras foram simuladas para sistemas com tamanho $30 \times 90$ . O tempo característico do decaimento exponencial de $\langle D(t) \rangle$ é $\tau_{LIT} \simeq 5,4 \times 10^3$ MCS (que é uma ordem de grandeza maior do que $\tau_{HT}(T = 1,8) \simeq 3,7 \times 10^2$ MCS).	106
6.10	Probabilidade de sobrevivência $P$ versus campo quiral $\Delta$ para uma temperatura fixa $T = 0,2$ (em unidades de $J/k_B$ ) em $t = 10000$ MCS. As simulações foram realizadas para $M = 100$ amostras de tamanho $30 \times 90$ com as condições iniciais (a) e (c).	107
6.11	Probabilidade de sobrevivência $P$ versus campo quiral $\Delta$ para uma temperatura fixa $T = 0,5$ (em unidades de $J/k_B$ ) em $t = 10000$ MCS. As simulações foram realizadas para $M = 100$ amostras de tamanho $30 \times 90$ com a condição inicial (a).	108
7.1	Funções de correlação $\Gamma(r, T)$ na temperatura $T = 1,10$ e tamanho $L = 64$ em função da distância $r$ para diferentes tempos de simulação (média sobre $M = 100$ amostras).	116
7.2	Função de correlação $\Gamma(r, T)$ para tempos longos ( $t = 4000$ ) na temperatura $T = 1,11$ para dois tamanhos $L = 64$ e $L = 128$ (média sobre $M = 100$ amostras). Na parte superior mostramos um detalhe (semi-log) do comportamento de $\Gamma(r, T)$ para uma faixa de valores intermediários de $r$ para $L = 128$ .	117
7.3	Comprimento de correlação $\xi_D(T)$ para tempos longos em função da temperatura $T$ para dois tamanhos diferentes $L = 64$ e $L = 128$ ( $M = 100$ ).	118
7.4	Flutuação $\sigma_D(T)$ em função da temperatura $T$ para $L = 64$ e tempos longos.	119

7.5	Função de correlação para $r = 0$ , $\Gamma(r = 0, T)$ , em função da temperatura para tempos longos e $L = 64$ ( $M = 100$ ). . . . .	120
7.6	Função de correlação total $G(T)$ e o inverso da função de correlação para $r = 0$ , $1/\Gamma(r = 0, T)$ , em função da temperatura para $L = 64$ e tempo $t = 4000$ ( $M = 100$ ). . . . .	121
7.7	Suscetibilidade $\chi_D$ em função da temperatura para $L = 64$ e campos $h = 0, 01, 0, 05, 0, 005$ e $0, 002$ . Os círculos cheios são os resultados obtidos de uma extrapolação para $h \rightarrow 0$ ( $M = 100$ ). O pico maior ocorre em $T_D \simeq 1, 13$ . . . . .	123
7.8	Gráfico log-log da suscetibilidade $\chi_D$ na temperatura crítica $T_D$ para diferentes valores do campo conjugado $h$ ( $M = 100$ ). . . . .	124
7.9	Suscetibilidade $\chi_D$ em função da temperatura para dois tamanhos $L = 64$ e $L = 128$ e campo fixo $h = 0, 002$ ( $M = 100$ ). . . . .	125
7.10	Razão entre a suscetibilidade $\chi_D$ e a função de correlação total $G(T)$ em função da temperatura para $L = 64$ ( $M = 100$ ). . . . .	126

# Lista de Tabelas

3.1	Expoentes críticos do comprimento de correlação $\nu^{(m)}$ calculados nos pontos fixos relevantes (de coordenadas $(t, x, y)$ ) para valores diferentes de $m$ . . . .	49
-----	---	----

# Introdução

Modelos que são simples em suas definições formais porém ricos em informações e resultados desempenham um papel central no estudo das transições de fase e fenômenos críticos e muito contribuem para o desenvolvimento desse importante ramo da física estatística. Dentre esses modelos, destacam-se sobremaneira os modelos de Ising (para um histórico ver [1]) e Potts [2]. No modelo de Ising associa-se uma variável binária  $\sigma_i$  ( $\sigma_i = \pm 1$ ) a cada sítio  $s_i$  de uma rede e sítios primeiros vizinhos interagem entre si através de um Hamiltoniano  $\mathcal{H}_{ij} = -J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ , onde  $J_{ij}$  é a constante de acoplamento entre  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$ . Esse modelo pode ser usado para 'simular' um sistema ferromagnético cujos momentos magnéticos ( $\sigma_i$ ) são admitidos como clássicos e capazes de assumir apenas duas orientações no espaço - um ferromagneto uniaxial como, por exemplo, o  $\text{Rb}_2\text{CoF}_4$  em duas dimensões. O modelo de Potts pode ser visto como uma generalização do modelo de Ising, no qual as variáveis  $\sigma_i$  podem assumir  $q$  estados diferentes ( $\sigma_i = 0, 1, 2, \dots, q-1$ ) e dois 'spins' primeiros vizinhos na rede interagem entre si através do Hamiltoniano  $\mathcal{H}_{ij} = -J_{ij}\delta(\sigma_i, \sigma_j)$  onde  $\delta(,)$  é a

função delta de Kronecker.

Tanto o modelo de Ising como o de Potts possuem relações com muitos problemas em física estatística como, por exemplo, o gás de rede, ligas binárias (Ising) e modelo  $Z(N)$ ; modelo de vértices com regra do gelo, percolação, redes de resistores, etc. (Potts) [2]. Possuem também uma variedade de realizações experimentais, dentre as quais podemos citar, para o modelo de Ising, além dos ferromagnetos uniaxiais que já mencionamos (ver, por exemplo, [3]), sistemas de adsorção em substratos como o hélio 4 adsorvido em uma superfície de grafite e criptônio [4] e, para o modelo de Potts, oxigênio adsorvido em níquel ( $q = 4$ ) [5] e processos envolvendo polímeros (como a vulcanização) ( $q \leq 0 \leq 1$ ) [6].

A solução exata do modelo de Ising ferromagnético a campo nulo na rede quadrada [7], mostrando que este sistema apresenta magnetização espontânea e possui expoentes críticos não clássicos, constitui um marco no progresso da teoria dos fenômenos críticos, conferindo ao modelo de Ising um status comparável ao do átomo de hidrogênio na mecânica quântica. Onsager mostrou [7] ainda que o calor específico desse sistema possui uma divergência logarítmica na temperatura crítica  $T_c$ , novamente em contradição com a teoria clássica que previa para essa grandeza uma simples descontinuidade em  $T_c$ . Outras soluções exatas para sistemas em redes de Bravais, como o problema de seis vértices resolvido por Baxter [8] e o modelo de Ising com interações entre pares e entre quartetos de spins [9], desempenham o papel de servir como referência, dentro da física estatística, para testar métodos que fornecem soluções aproximadas em problemas similares. De fato, tanto no estudo das propriedades estáticas quanto dinâmicas, a grande maioria dos trabalhos abordando sistemas de spins em redes com dimensões acima de  $d = 1$  fazem uso de métodos numéricos ou aproximações analíticas e, novamente, os modelos de Ising e Potts, por exibirem comportamentos estáticos não triviais que já foram bastante estudados, tornam-se protótipos ideais para se investigar, dentre outras coisas, as possíveis correlações

entre transições de fase estáticas e dinâmicas. Dentre esses métodos podemos destacar o do Grupo de Renormalização no espaço real e o de Propagação de Danos, que são as técnicas usadas nos trabalhos apresentados nessa tese e sobre as quais discutiremos em seguida.

Desde sua formulação, por Wilson em 1971 [10, 11], o método do Grupo de Renormalização (GR) produziu uma profusão de trabalhos teóricos abordando fenômenos críticos em todo tipo de sistemas cooperativos (sistemas geométricos, térmicos e mistos). A técnica de GR no espaço real está baseada na renormalização de células, de comprimento característico  $b$ , em células de comprimento menor  $b'$  e no estabelecimento de relações recursivas para os parâmetros do sistema (constantes de acoplamento, etc.) em diferentes níveis de escala de tamanho. Essa técnica permite a determinação de diagramas de fases e expoentes críticos, bem como, em alguns casos, equações de estado e funções termodinâmicas (para uma revisão de vários resultados obtidos pela técnica de GR ver [12]). Dentre os vários procedimentos para se aplicar a técnica de GR está o esquema de Migdal e Kadanoff [13] do 'movimento de ligações' que, por ser um dos mais simples, foi largamente utilizado para se obter resultados aproximados em sistemas definidos em redes de Bravais. Berker e Ostlund [14] foram os primeiros a reconhecerem que os resultados aproximados obtidos pelo procedimento de Migdal-Kadanoff para certos sistemas em redes de Bravais constituem soluções exatas para esses mesmos sistemas definidos em uma classe de redes fractais denominadas redes hierárquicas, sobre as quais discutiremos com maior nível de detalhe no capítulo 1. Raciocinando no sentido inverso, podemos considerar que a solução exata (cálculo de fronteiras críticas, expoentes críticos, etc.), obtida através de um procedimento de GR, de um determinado sistema em uma rede hierárquica convenientemente escolhida pode servir de solução aproximada para esse mesmo sistema definido em uma rede com invariância translacional.

A aplicação da técnica de GR a sistemas de spins definidos em redes hierárquicas originou um grande número de resultados exatos não triviais [15-27] que, em alguns casos, podem ser vistos como aproximações para sistemas em redes de Bravais. Além disso, podem ser também, em todos os casos, vistos como sistemas interessantes por si próprios, por apresentarem uma variedade de comportamentos críticos não triviais como, por exemplo, expoentes críticos que variam continuamente com parâmetros relevantes do sistema, transições de fase sem o surgimento de ordem de longo alcance, etc. A primeira parte dessa tese está dedicada ao estudo, através de cálculos analíticos, de propriedades estáticas do modelo de Ising em substratos fractais, mais especificamente, utilizamos a técnica de GR para estudar vários aspectos da criticalidade do modelo de Ising em redes hierárquicas do tipo Sierpinski-gasket com  $m$  folhas e em redes do tipo diamante.

Antes dos capítulos 2, 3 e 4 que apresentam nossas contribuições originais dessa primeira parte da tese, fazemos, no capítulo 1, uma breve revisão sobre propriedades de objetos fractais e de sistemas de spins em redes fractais e, em particular, nas redes hierárquicas. Nos capítulos 2 e 4 abordamos a questão da validade de algumas leis de escala em sistemas fractais. Como sabemos, essas leis podem ser demonstradas rigorosamente na forma de desigualdades para sistemas em redes de Bravais [28] e emergem naturalmente (novamente para sistemas com invariância translacional), na forma de igualdades, do formalismo do grupo de renormalização. No entanto, não existe ainda uma prova rigorosa da validade geral dessas leis para o caso de sistemas fractais. No capítulo 2 investigamos a questão da validade das leis de escala de Rushbrooke e hiperescala para os expoentes críticos do modelo de Ising numa família de redes Sierpinski-gasket com  $m$  folhas. Essa família de redes fractais foi proposta por De Menezes e De Magalhães [25] como uma classe de fractais determinísticos com ordem de ramificação infinita onde o modelo de Potts com  $q$  estados pode ser resolvido exatamente e apresenta, para  $m > 1$ ,

transições de fase a temperaturas finitas. Essa família de redes constitui, em nosso conhecimento, o primeiro exemplo [25] de redes hierárquicas que não pertencem à classe das redes do tipo ligação, onde um modelo de spins com interações finitas e de curto alcance exatamente solúvel apresenta transições de fase a temperaturas finitas não nulas. No capítulo 4 nos dedicamos à questão da validade da lei de hiperescala para o modelo de Ising na família de redes do tipo diamante, para a qual podemos verificar a validade de tal lei analiticamente, sem a necessidade de nenhum cálculo numérico intermediário. Conforme teremos oportunidade de discutir, nossos resultados para os expoentes críticos  $\nu$ , funções termodinâmicas e para o expoente crítico  $\alpha$  (no capítulo 4) nessas redes fractais são exatos e permitem verificações bastante confiáveis de algumas leis de escala. No capítulo 3 estudamos o diagrama de fases estático do modelo de Ising generalizado que contém além de interações entre primeiros vizinhos, interações entre pares e tripletos de spins e campo magnético externo na família Sierpinski-gasket com  $m$  folhas e lado  $b = 4$ . Esse sistema apresenta diversas características interessantes como frustração, competição entre diferentes tendências de ordenamento e degenerescência residual (a temperatura nula) infinita. Através da técnica de GR investigamos, por exemplo, o domínio da fase do tipo Berker e Kadanoff [29] já observada para esse mesmo modelo na ausência de campo magnético e acoplamento entre tripletos [25]. Esse tipo de fase apresenta características não usuais como decaimento algébrico da função de correlação entre spins e ordenamento, caso este exista, não trivial e sua origem física está [29] na degenerescência infinita do estado fundamental.

A segunda parte dessa tese consiste no estudo de propriedades dinâmicas dos modelos de Potts e Potts quiral. Nessa parte da tese, composta dos capítulos 5, 6 e 7, abordamos os modelos de Potts quiral e de Potts com três estados na rede quadrada através da técnica de propagação de danos, técnica esta discutida em detalhes no capítulo 5. Basicamente, o

método de propagação de danos consiste em se estudar a distância entre duas configurações de spin (réplicas) que evoluem no tempo submetidas ao mesmo ruído térmico. Variando-se a temperatura e outros parâmetros do sistema, podem ser observadas (em geral) fases onde a distância (ou dano) entre as duas réplicas se anula ou atinge um limite assintótico não nulo. Essa técnica tem sido aplicada a uma variedade de sistemas como autômatos celulares [30], ferromagneto de Ising [31-36], modelo XY ferromagnético [37, 38], modelo de Heisenberg [39], modelo de Potts [40, 41, 42], modelo ANNNI [43], relógio com  $p$  estados [44], vidros de spin [32, 45, 46, 47], modelo de Ashkin-Teller [42], modelo de Ising totalmente frustrado [48] e diluído [49], sistema imunológico [50], propagação de fogo em florestas [51], jogos de imitação [52] e evolução de espécies [53]. Nossos resultados originais que constituem essa parte da tese estão apresentados nos capítulos 6 e 7. No capítulo 6 aplicamos a técnica de propagação de danos para estudar, através de simulações Monte Carlo do tipo banho térmico, as transições de fase dinâmicas no modelo de Potts quiral com três estados na rede quadrada. O modelo de Potts quiral foi introduzido por Ostlund [54] e Huse [55] visando o estudo de fases moduladas comensuráveis e incomensuráveis. Esse modelo apresenta um diagrama de fases estático bastante rico - contendo uma fase flutuante, pontos de Lifshitz e uma interface 'wetting' - e, apesar de já ter sido estudado por diversas técnicas diferentes, apresenta ainda pontos controversos como, por exemplo, a questão do domínio da fase flutuante (se este se estende até campo quiral nulo ou não). No trabalho que apresentamos nessa tese fazemos um paralelo entre nossos resultados para as fronteiras das fases dinâmicas desse modelo com os resultados já conhecidos para as fronteiras estáticas. Abordamos a questão do domínio da fase flutuante e também investigamos a persistência ou não da fase dinâmica totalmente caótica que já havia sido estabelecida para o modelo de Potts com três estados na rede quadrada (o caso particular com campo quiral nulo do modelo que estudamos). No capítulo 7 investigamos a possível

existência de um análogo ao teorema de flutuação-dissipação para as grandezas associadas ao dano no modelo de Potts com três estados na rede quadrada. Conforme os resultados de Da Silva et al [40] para esse modelo, a suscetibilidade definida como a derivada do dano médio em relação ao seu campo conjugado (dado pela frequência com que as duas réplicas do sistema são atualizadas com números aleatórios diferentes) diverge na temperatura onde o dano se anula. Por outro lado, foi demonstrado [56] para o autômato celular de Domany-Kinzel que o comprimento de correlação associado à função de correlação entre flutuações do dano diverge na temperatura de transição ativa-caótica desse modelo, analogamente ao que ocorre com a suscetibilidade [57]. Em nosso trabalho apresentamos um estudo das funções de correlação entre flutuações do dano (para spins que distam de uma distância  $r$  entre si) e mostramos que, caso essas funções sejam convenientemente normalizadas, a função de correlação total também apresenta uma divergência na temperatura onde o dano se anula. Obtemos uma extrapolação para campo nulo da suscetibilidade e mostramos que a razão entre essas duas funções (a correlação total e a suscetibilidade) apresenta um comportamento monótono com a temperatura, sugerindo assim, uma relação análogo ao teorema de flutuação-dissipação para o dano nesse modelo.

Concluindo, no capítulo 8 estão sintetizados os resultados apresentados nessa tese e as possíveis extensões desses trabalhos.

# CAPÍTULO 1

## Fractais

### 1.1 Introdução

Nesse capítulo discutimos algumas características básicas dos objetos fractais e alguns aspectos de sistemas magnéticos de spins definidos em redes fractais. Discutiremos os fractais de uma maneira geral e, em particular, as redes hierárquicas que usamos como substrato para sistemas de spins nos capítulos seguintes da primeira parte dessa tese. Essa primeira parte está composta, além desse capítulo de revisão sobre os fractais, dos seguintes capítulos: (2) onde obtemos expressões exatas para várias funções termodinâmicas e investigamos a validade das leis de escala no modelo de Ising generalizado definido em uma família de redes fractais; (3) onde determinamos o diagrama de fases

do modelo de Ising em uma família de fractais e (4) onde retornamos à questão da validade da lei de hiperescala para o modelo de Ising na família de redes do tipo diamante. Apesar do tema das leis de escala ser comum aos capítulos (2) e (4), demos preferência a essa seqüência para os capítulos devido à maior afinidade entre os capítulos (2) e (3) que abordam sistemas em substratos fractais similares, qual seja, a família de redes do tipo Sierpinski gasket com  $m$  folhas.

## 1.2 Fractais

A palavra fractal, derivada do latim *fractus*, que significa irregular ou fragmentado, foi criada por Benoit Mandelbrot [58, 59, 60] para expressar a variedade de formas complexas que foram reconhecidas pelos físicos, desde meados da década de 70, como quase que onipresentes nos fenômenos naturais. Dentre os vários exemplos de sistemas que são hoje focalizados dentro dessa nova linguagem dos fractais, podemos mencionar as formas dos objetos da natureza como árvores, núvens e a linha costeira dos continentes, bem como estruturas geradas por processos de crescimento, como agregados formados por partículas em difusão, fraturas, eletrodepósitos de íons, etc. [61-64]. Com o desenvolvimento da pesquisa nessa nova geometria dos objetos irregulares, os físicos têm voltado sua atenção também para os sistemas biológicos que apresentam padrões geométricos complexos como, por exemplo, as células cancerosas [65], a matéria porosa da madeira [66], colônias de bactérias [67] e os vasos sangüíneos da retina [68].

A característica central que distingue os objetos fractais dos objetos suaves da geometria Euclideana (como retas, esferas, etc.) é a auto-similaridade não trivial. Isso significa que se cortarmos uma porção do objeto, essa será, após ampliada em sua escala de tamanho, uma réplica, talvez um tanto deformada, do objeto original. Podemos dividir os objetos fractais em duas classes quanto ao seu processo de formação: os frac-

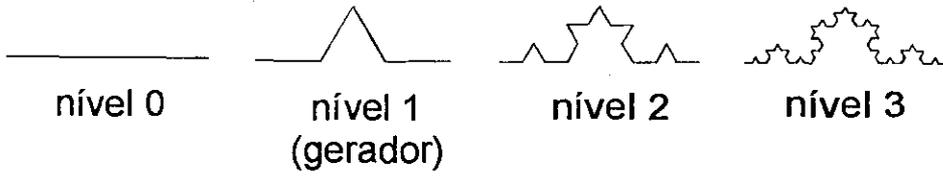
tais determinísticos e os fractais aleatórios ou estocásticos. Os objetos que se encontram na primeira classe possuem uma auto-similaridade exata, ou seja, qualquer uma de suas partes, após ampliada por um fator de escala conveniente, é idêntica ao objeto original. Nessa classe estão diversos objetos matemáticos gerados por regras geralmente simples que são iteradas sucessivamente até o infinito (como as redes hierárquicas que discutiremos em seguida). Alguns exemplos de fractais determinísticos podem ser vistos na figura (1.1). Os fractais aleatórios possuem, em seu processo de formação, algum ruído gerador de desordem, que faz com que esses fractais possam ser classificados como auto-similares apenas em um sentido estatístico e dentro de uma faixa limitada de ampliações de escala.

Nessa classe estão certamente todos os objetos fractais da natureza, onde a presença de fatores externos incontroláveis é marcante. Alguns exemplos de fractais aleatórios estão mostrados na figura (1.2) (exemplos extraídos das refs. [69] e [63]).

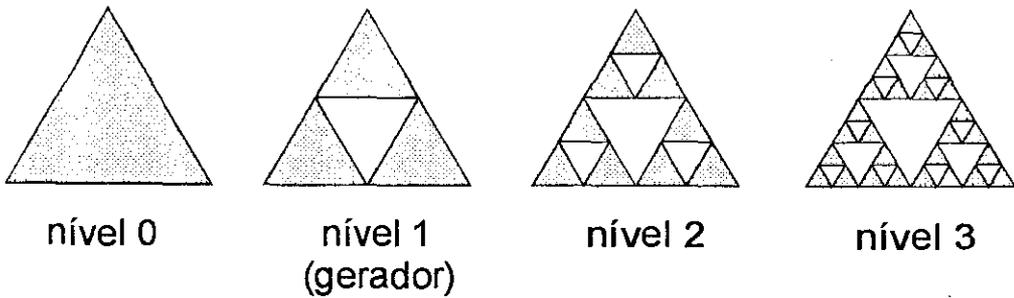
Uma outra característica marcante dos fractais reside na relação existente entre seu volume  $V$  e seu comprimento característico  $L$ . Para os objetos suaves, sabemos que essa relação está expressa por uma lei de potência na forma  $V(L) \sim L^d$  onde o símbolo  $\sim$  representa proporcionalidade e  $d$  (um número natural) é a menor dimensão Euclideana do espaço onde esses objetos podem ser imersos. Por exemplo, para um segmento de reta de comprimento  $L$ ,  $V(L) = L^1$ , para um disco de raio  $R$ ,  $V(R) = \pi R^2$  e para uma esfera de raio  $R$ ,  $V(R) = (4\pi/3)R^3$ . Para os objetos fractais essa expressão é generalizada de tal forma que

$$V(L) \sim L^{d_f} \tag{1.1}$$

onde  $d_f$ , a dimensão fractal do objeto em questão, é um número real, em geral menor do que a menor dimensão do espaço em que este pode ser embebido. A expressão (1.1) é bastante conveniente quando pretendemos determinar a dimensão fractal de um objeto gerado por agregação sucessiva de pequenas partes, como os agregados de partículas em



(a) curva de von Koch



(b) Sierpinski gasket

Figura 1.1: Alguns exemplos de fractais determinísticos. (a) A curva de von Koch ( $d_f = \ln 4 / \ln 3 = 1,26\dots$ ). (b) O Sierpinski gasket ( $d_f = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$ ). A curva de von Koch é gerada pela substituição sucessiva dos segmentos de reta pelo padrão (gerador) da hierarquia 1 (convenientemente reescalado). O Sierpinski gasket é gerado pela remoção repetida do triângulo central ou, equivalentemente, pela substituição de cada triângulo orientado para cima (hachurado) pelo padrão do nível 1 reescalado.

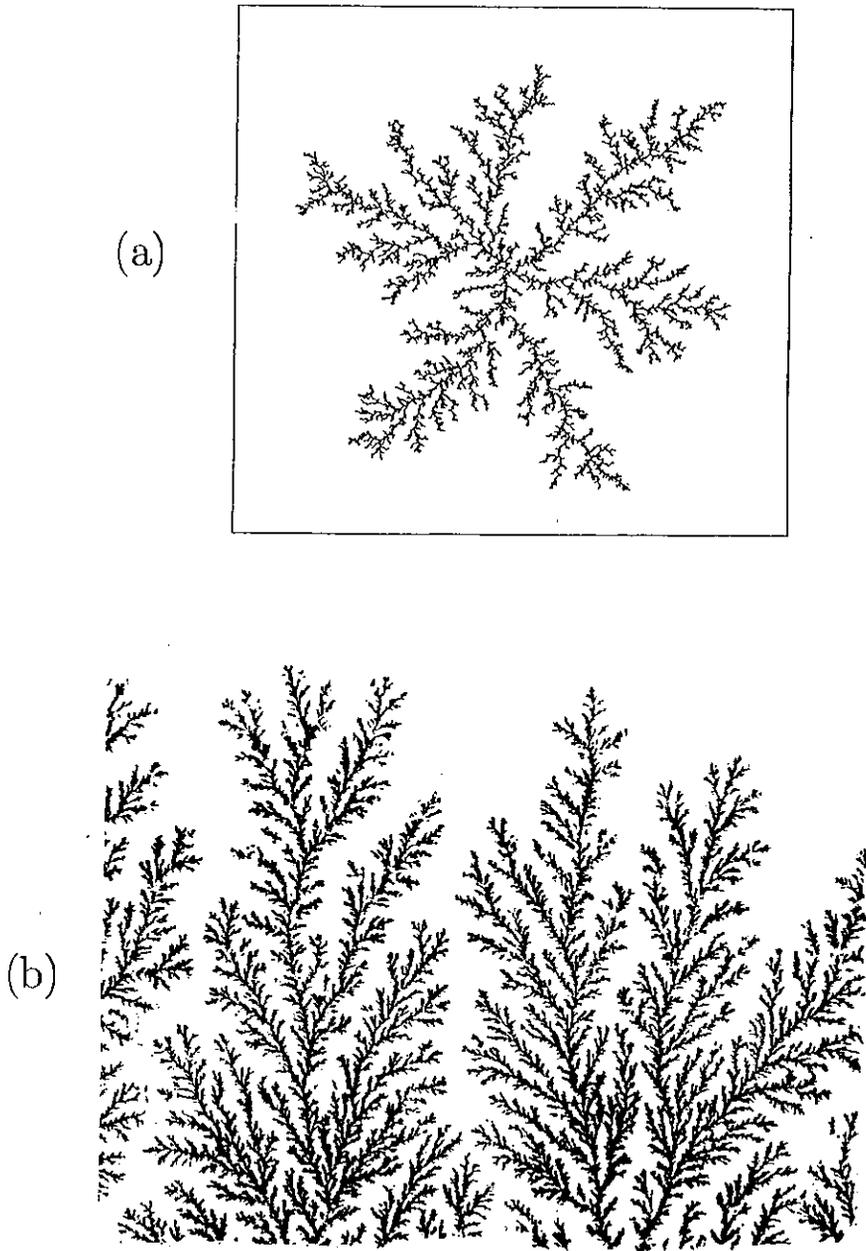


Figura 1.2: Alguns exemplos de fractais aleatórios. (a) Um agregado gerado por partículas em difusão (simulação computacional com 50.000 partículas) ( $d_f \simeq 1,7$ ). (b) Depósito de óxido de manganês na superfície de uma pedra ( $d_f \simeq 1,78$ ).

difusão. Uma expressão alternativa para a dimensão fractal resulta do método denominado ‘contagem de caixas’. Nesse método deve-se cobrir o objeto fractal com um número mínimo  $N(\lambda)$  de caixas hipercúbicas de dimensão  $d$  (a dimensão do espaço onde o objeto está imerso) e lado  $\lambda$ . À medida em que tomamos caixas de lados cada vez menores, o número  $N(\lambda)$  cresce e assume o comportamento assintótico:

$$N(\lambda) \sim \lambda^{-d_f} \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (1.2)$$

e portanto,

$$d_f = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln N(\lambda)}{\ln \lambda} \quad (1.3)$$

De fato, a grandeza  $N(\lambda)$  está intimamente relacionada ao volume do objeto fractal e as duas expressões (1.1) e (1.2) coincidem se definirmos a grandeza adimensional  $\epsilon \equiv \lambda/L$  (o lado das caixas que fazem a cobertura renormalizado pelo tamanho linear do fractal) e considerarmos que, para um fractal de tamanho fixo ( $L$  fixo),  $\epsilon$  vai a zero quando  $\lambda$  vai a zero e para um fractal que cresce,  $\lambda$  está fixo (é o tamanho linear das partículas em agregação) e  $\epsilon$  vai para zero quando  $L$  cresce (ver, por exemplo, [69]).

Podemos encontrar na literatura diversas definições de dimensão como, por exemplo, dimensão de Hausdorff, de ‘contagem de caixas’, de ‘empacotamento’, etc. [69]. Cada uma dessas definições possui suas propriedades que podem se adequar ou não a um objeto fractal particular. Com efeito, mesmo nos trabalhos originais onde primeiro propôs o conceito de fractal, Mandelbrot definiu um objeto fractal como um conjunto cuja dimensão de Hausdorff é maior do que sua dimensão topológica (a dimensão topológica de um objeto é sempre um número inteiro  $d_T$  tal que  $d_T = 0$  se esse objeto é totalmente desconexo,  $d_T = 1$  se cada um dos seus pontos tem uma pequena vizinhança cuja fronteira tem dimensão  $d_T = 0$  e assim por diante), conceito que, como hoje é sabido, exclui uma variedade de conjuntos que claramente podem ser classificados como fractais. Atualmente, a dimensão de ‘contagem de caixas’ (eq. (1.3)) (que, em geral, coincide com a dimensão de

Hausdorff) é mais amplamente utilizada na literatura por se adaptar facilmente à forma de um algoritmo computacional.

### 1.3 Redes Hierárquicas

As redes hierárquicas (RHs) são redes construídas através de um processo recursivo e que apresentam auto-similaridade não trivial exata. As redes hierárquicas ‘do tipo ligação’ com duas raízes são fractais determinísticos gerados pelo processo recursivo de substituição de cada ligação por uma célula básica, ou gerador. O processo de construção dessas RHs parte de uma simples ligação conectando dois sítios (as raízes da rede) (nível ou hierarquia 0) e segue sucessivamente substituindo cada ligação pela célula básica. Na figura (1.3) mostramos os primeiros passos de construção de dois exemplos de redes hierárquicas do tipo ligação, a rede diamante e a rede Ponte de Wheatstone. A definição de distâncias entre sítios e dimensão para redes hierárquicas não é trivial, devido à topologia irregular dessas redes (ver, por exemplo [17]), no entanto, seguiremos aqui o procedimento de Melrose [18] para definir a dimensão intrínseca de uma rede hierárquica (que chamaremos, como é atualmente usual, de dimensão fractal) e definiremos a distância entre dois sítios [70] como o número de ligações no caminho mais curto que conecta esses dois sítios. Se encararmos o processo de construção das RHs como um processo de agregação (de células básicas) e assumirmos que a massa de uma ligação vale 1, vemos que, para a rede ponte de Wheatstone, a massa na hierarquia  $n$  será  $M_n = 5^n$  (já que o número de ligações na célula básica (o número de agregação) é 5) enquanto que seu comprimento característico (a distância química entre as raízes, i.e., o número mínimo de ligações necessárias para conectar as raízes) será  $L_n = 2^n$  e, portanto, usando a expressão (1.1) (com a massa no lugar do volume) podemos deduzir que sua dimensão fractal vale  $d_f = \ln 5 / \ln 2$ . De maneira análoga, para a rede diamante obtemos  $d_f = 2$ .

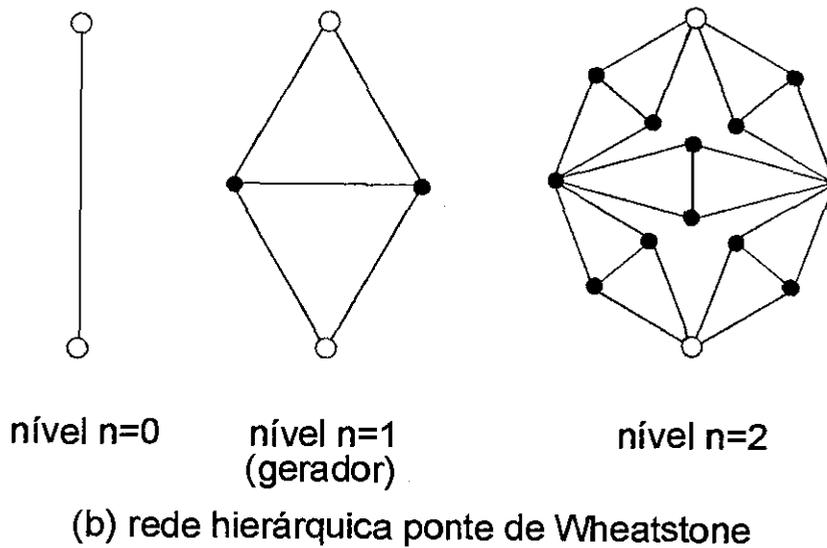
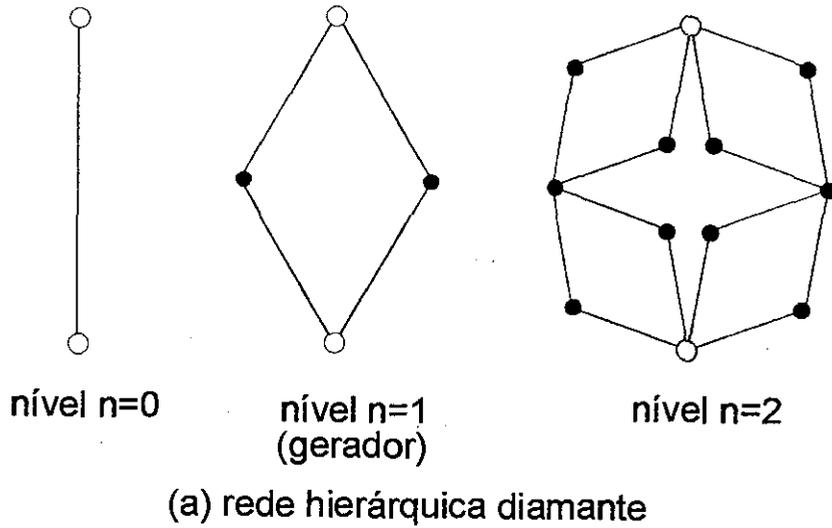


Figura 1.3: Alguns exemplos de redes hierárquicas do tipo ligação. (a) Rede diamante. (b) Rede ponte de Wheatstone. O gerador de cada uma dessas redes constitui o nível 1 dos seus processos de construção. Cada nível é obtido do nível anterior pela substituição de cada uma de suas ligações pelo gerador.

Podemos considerar também redes hierárquicas construídas por processos diferentes deste exposto acima e também com mais de duas raízes. Um exemplo simples é a rede Sierpinski gasket que consiste simplesmente no fractal Sierpinski gasket mostrado na figura (1.1) onde assumimos que cada vértice dos triângulos é um sítio da rede e cada lado desses triângulos é uma ligação. Esse é um exemplo de uma RH com três raízes (as raízes são os três sítios no nível 0) e aqui o elemento a ser substituído no processo recursivo é um triângulo e não uma ligação, como ocorre nas RHs do tipo ligação. Seu processo de construção consiste em se substituir sucessivamente cada triângulo equilátero orientado para cima pelo gerador constituído de três triângulos conectados como mostrado na figura (1.1). No limite de infinitas iterações obtemos uma rede de dimensão fractal  $d_f = \ln 3 / \ln 2$ . É interessante notar que para a rede Sierpinski gasket, o número de coordenação dos sítios internos (i.e. distintos das raízes), qualquer que seja a hierarquia da rede, é finito e igual a 4, e que, nesse caso, a ordem de ramificação ( $R = 3$ ) é finita (a ordem de ramificação  $R$  em um ponto  $P$  da rede é um conceito matemático complexo que envolve o número mínimo de pontos de interseção com a rede de uma fronteira que delimita uma vizinhança de  $P$  convenientemente escolhida [59]). Para os exemplos de redes do tipo ligação dados acima (figura (1.3)), a ordem de ramificação é infinita ( $R \rightarrow \infty$ ), e no limite de infinitas iterações, cada sítio estará conectado a um número infinito de outros sítios. Podemos considerar generalizações da rede Sierpinski gasket como, por exemplo, redes que incluem variações no número de triângulos na célula básica, redes embebidas no espaço tridimensional cujas unidades básicas são pirâmides de base triangular ao invés de triângulos, e redes cujo gerador possui muitas folhas conectadas entre si, como o Sierpinski gasket com  $m$  folhas que discutiremos com mais detalhes na próxima seção e que consideraremos nos capítulos (2) e (3) dessa tese.

Em princípio qualquer problema definido numa rede de Bravais pode ser adaptado

para as redes hierárquicas como, por exemplo, caminhadas aleatórias, percolação, sistemas magnéticos de spins, etc. As RHs possuem a propriedade de auto-similaridade exata, como todos os fractais determinísticos, mas constituem redes sem invariância translacional. A propriedade de auto-similaridade faz com que as RHs sejam idealmente apropriadas para a aplicação das idéias do método de Grupo de Renormalização (GR) no espaço real, que é intrinsecamente baseado na noção de auto-similaridade sob mudança de escala. Apesar da ausência de invariância translacional, esses sistemas definidos em RHs podem ser considerados, em algumas situações, como aproximações para os mesmos sistemas definidos em redes de Bravais. De fato, quando se utiliza a aproximação de Migdal-Kadanoff (movimento de ligações) [13] para sistemas de spins em redes hipercúbicas, obtém-se o mesmo modelo de spins em RHs. A aproximação de Migdal-Kadanoff é uma das técnicas mais simples de GR no espaço real que tem sido aplicada a uma grande variedade de sistemas, fornecendo, em geral, resultados qualitativamente corretos quando comparados com resultados obtidos por outros métodos para sistemas em redes de Bravais [12].

Diversas propriedades em sistemas de spins têm sido calculadas em RHs do 'tipo ligação', como, por exemplo, os modelos de Ising [23, 70, 71], de Potts ferromagnético [27] e antiferromagnético [26], de Blume-Emery-Griffiths [72, 73], cúbico discreto [74], Ashkin-Teller simétrico [75] e  $Z(6)$  [76], para os quais foram encontradas transições de fase a temperaturas finitas não nulas. Em contraste, os modelos de spins com interações finitas e de curto alcance definidos em redes fractais com ordem de ramificação  $R$  [59] finita permanecem desordenados para todas as temperaturas não nulas, ou seja,  $T_c = 0$ . Desse ponto de vista, esses sistemas em RHs com  $R$  finita são similares aos sistemas unidimensionais. Essa semelhança se origina na presença de sítios estrategicamente localizados na estrutura das RHs (com  $R$  finita) que, caso suas ligações sejam cortadas, isolam grandes

porções da rede. Dessa forma, uma análise do crescimento da entropia similar àquela para os sistemas unidimensionais [77] se aplica também a esses sistemas e justifica seu desordenamento para todas as temperaturas não nulas. No entanto, fora da criticalidade, os modelos definidos em RHs com  $R$  finita podem apresentar comportamentos bastante distintos daqueles encontrados para esses mesmos modelos em dimensão 1. Para o modelo de Ising a campo nulo no fractal Sierpinski gasket, por exemplo, o comprimento de correlação diverge como uma exponencial de uma exponencial na vizinhança da temperatura crítica  $T_c = 0$  [20]. Essa ‘ampliação’ da região crítica deve ter sua origem na propriedade de auto-similaridade das redes fractais [78, 79].

#### 1.4 A Família de Fractais Sierpinski gasket com $m$ folhas e lado $b$

Os modelos exatamente solúveis, com interações finitas e de curto alcance, definidos em fractais e que exibem transições de fase a uma temperatura não nula, ocorrem somente em RHs do tipo ligação, i.e., RHs com duas raízes, com exceção daquela introduzida na referência [25] que se refere a uma RH com três raízes. Nessa referência, foram propostas famílias de fractais determinísticos, especificamente, as redes Sierpinski gasket com  $m$  folhas e lado  $b$  (referida como  $(mSG)_b$ ), que têm diferentes dimensões fractais  $d_f^{(b,m)}$  e nas quais o modelo de Potts de  $q$  estados pode ser resolvido exatamente.

A construção desses fractais segue o seguinte processo recursivo: iniciamos com um triângulo (nível  $n = 0$ ) que é substituído por uma célula básica (ou gerador) constituída de  $m$  folhas triangulares conectadas somente através de seus vértices externos A, B e C. Cada uma das  $m$  folhas contém  $b(b + 1)/2$  triângulos menores orientados para cima. O nível  $n$  é obtido a partir do nível anterior pela substituição de cada triângulo orientado para cima pela célula básica. Esse procedimento recursivo está ilustrado na figura (1.4)

para os casos  $(m = 2, b = 2)$  e  $(m = 2, b = 4)$ .

No limite  $n \rightarrow \infty$  obtemos uma rede fractal de dimensão dada por:

$$d_f^{(b,m)} = \frac{\ln(b(b+1)m/2)}{\ln b} \quad (1.4)$$

e cuja ordem de ramificação no nível  $n$  da rede,  $R_n$ , satisfaz [25] à recorrência  $R_n = m R_{n-1}$  onde  $R_1(m) > 1$  para todo  $m$ . Portanto, com exceção do caso  $m = 1$  (o Sierpinski gasket  $(SG)_b$ ), a família de redes  $(mSG)_b$  possui, no limite termodinâmico, ordem de ramificação infinita.

No que concerne ao ferromagneto de Ising nas redes  $(mSG)_2$  e  $(mSG)_4$ , foram obtidas [25] as temperaturas críticas exatas  $T_c(m, b = 2)$  (ver figura (1.5a) e  $T_c(m, b = 4)$  (ver figura (1.5b), mostrando que essas se reduzem a zero somente no caso de ramificação finita, i.e., no caso da família de fractais Sierpinski gasket usual  $(SG)_b$  de lado  $b$  ( $m = 1$ ) proposta por Hilfer e Blumen [80] (ver figura (1.1) para  $b = 2$ ). Essa última contém o Sierpinski gasket padrão (SG) (quando  $b = 2$ ), que tem sido usado extensivamente como um substrato geométrico fractal no qual uma variedade de problemas foi resolvido de uma forma exata [20,78,80-92]. Em particular, os trabalhos focalizando o modelo de Ising com interações finitas e de curto alcance no SG [20, 78, 81, 79, 83, 88, 89] mostram que esse sistema se ordena ferromagneticamente somente em  $T_c = 0$ , onde o comprimento de correlação tem uma divergência anômala (exponencial de uma exponencial) levando a expoentes críticos infinitos. Um fato similar também é encontrado [89] para outros valores de  $b$  na família  $(SG)_b$ . As  $m$  folhas que constituem o fractal  $(mSG)_b$  tornam o  $(SG)_b$  mais fortemente conectado, suprimindo flutuações e induzindo as transições para-ferromagnéticas a ocorrerem em temperaturas não nulas com expoentes críticos finitos [25]. A possibilidade de solução exata do modelo de Ising, e mais genericamente, do modelo de Potts com  $q$  estados nas famílias  $(mSG)_b$  torna esses sistemas, portanto, bastante úteis para o estudo de fenômenos críticos em fractais.

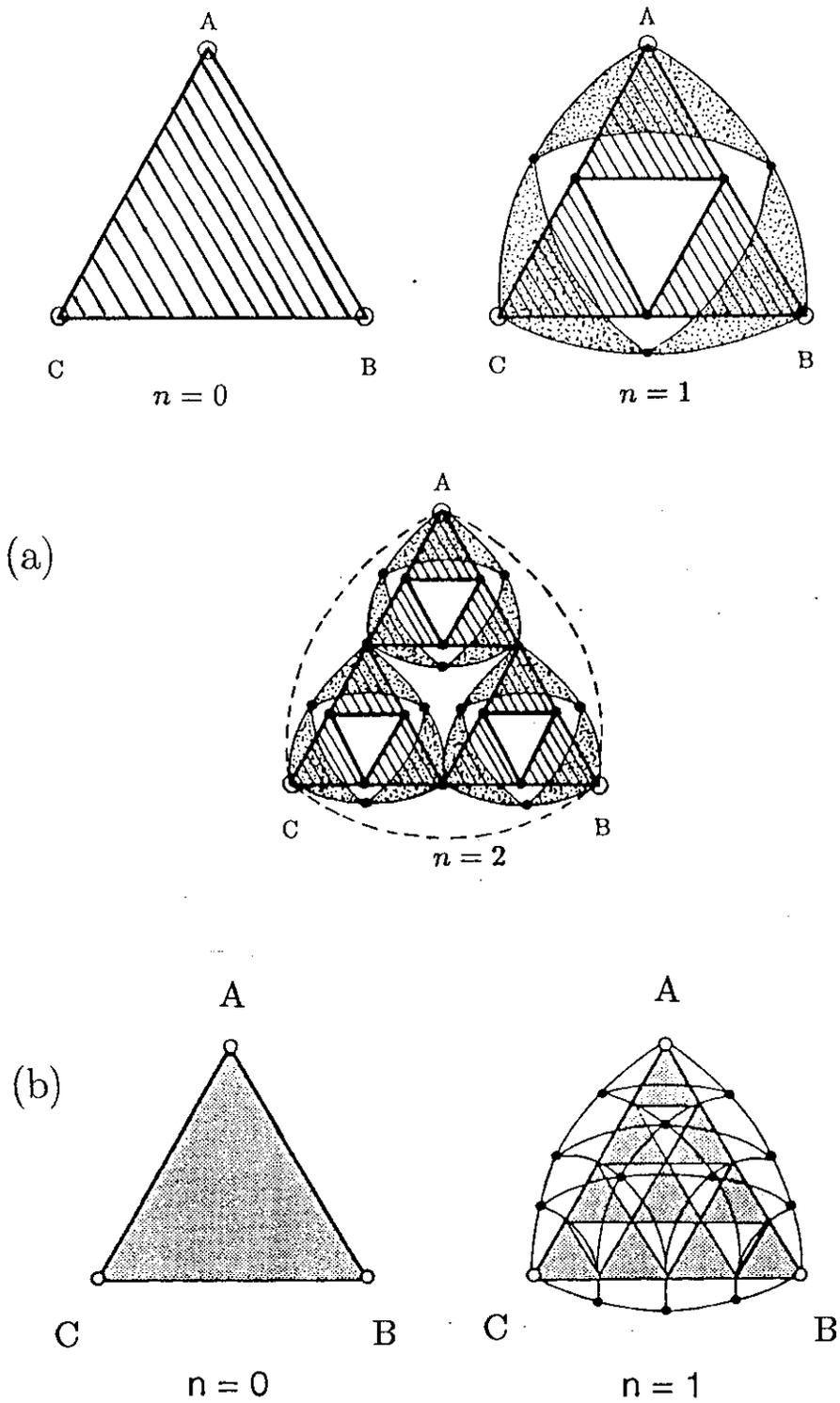


Figura 1.4: Os primeiros estágios de construção das famílias de fractais  $(mSG)_2$  e  $(mSG)_4$  com duas folhas ( $m = 2$ ). Para uma melhor visualização, representamos por uma curva tracejada (para  $b = 2$ ) a segunda folha do estágio  $n = 2$ , que está conectada à primeira folha apenas pelos sítios externos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

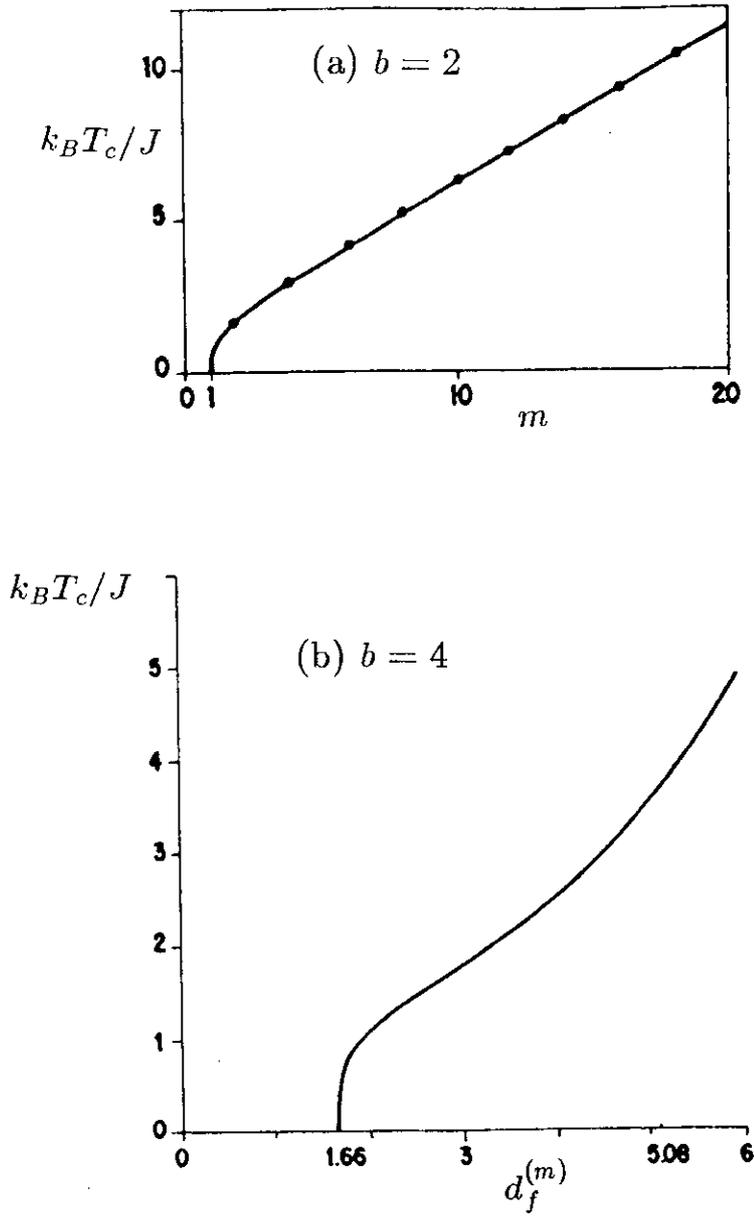


Figura 1.5: Temperaturas críticas para o ferromagneto de Ising nas redes  $(mSG)_2$  (a) e  $(mSG)_4$  (b) em função do número de folhas  $m$  ( $b = 2$ ) e da dimensão fractal ( $b = 4$ ).

O modelo de Ising totalmente frustrado com interações antiferromagnéticas entre pares primeiros vizinhos na rede  $(SG)_b$  ( $b = 2$ ) [88] e com valores quaisquer de  $b$  [89] é, devido à altíssima degenerescência do seu estado fundamental, sempre paramagnético, mesmo para  $T = 0$ . O mesmo acontece na rede  $(mSG)_4$  para valores de  $m$  abaixo de um valor crítico  $m_c$  ( $m_c \simeq 115.57$ ), mas, acima desse limiar, esse modelo apresenta [25] uma fase não usual do tipo prevista por Berker e Kadanoff [29] para alguns sistemas complexos com entropia residual (i.e. à temperatura zero) por sítio não nula. Ao longo de toda essa fase não usual o comprimento de correlação é infinito e a função de correlação entre spins apresenta um decaimento com a distância do tipo lei de potência. Esse comportamento da função de correlação na fase não usual foi demonstrado exatamente para o antiferromagneto de Potts com  $q = 2$ , e 4 na família  $(mSG)_4$  [25] e para esse mesmo modelo com  $q = 3$  numa família de RHs do tipo diamante [26]. Dentro do contexto do grupo de renormalização, essa fase não usual está associada a um atrator localizado em uma temperatura finita não nula (onde o comprimento de correlação é infinito). As flutuações de longo alcance nessa fase têm origem na altíssima degenerescência do estado fundamental ( $T = 0$ ) que, abaixo da dimensão crítica para a qual surge a fase não usual, torna o sistema trivialmente paramagnético.

## 1.5 Modelo de Ising Generalizado na Família $(mSG)_b$

Admitimos como substrato uma rede  $(mSG)_b$  onde  $m$  e  $b$  estão fixos e associamos a cada um dos seus vértices uma variável de spin Ising,  $\sigma_i = \pm 1$  (representaremos o estado  $+1$  ( $-1$ ) pelo símbolo  $\uparrow$  ( $\downarrow$ )), e consideramos o modelo de Ising generalizado descrito pelo Hamiltoniano adimensional:

$$-\beta\mathcal{H} = K_2 \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + K_3 \sum_{\Delta} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + h \sum_i c_i \sigma_i \quad , \quad (1.5)$$

onde  $\beta \equiv 1/k_B T$ ,  $K_2 \equiv \beta J_2$ ,  $K_3 \equiv \beta J_3$  e  $h \equiv \beta H$ ;  $J_2$  é a constante de acoplamento entre pares de spins primeiros vizinhos,  $J_3$  é o acoplamento de três corpos entre os spins que estão nos vértices dos triângulos orientados para cima e  $H$  é o campo magnético externo. As três somas acima são realizadas respectivamente sobre todos os pares de sítios primeiros vizinhos  $\langle ij \rangle$ , sobre todos os triângulos orientados para cima  $\Delta$ , e sobre todos os sítios  $i$  da rede  $(mSG)_b$ . O termo  $c_i$  na equação acima denota o número de coordenação do sítio  $i$ .

Este Hamiltoniano é fechado (ou seja, não há a proliferação de outros tipos de acoplamentos entre os spins do sistema) e invariante na sua forma sob a aplicação da transformação de grupo de renormalização utilizada. O termo de três corpos é gerado naturalmente (na presença do acoplamento  $K_2$ ) pelo termo de um corpo após um passo de renormalização. A presença do número de coordenação  $c_i$  no termo do campo magnético externo garante a invariância na forma do Hamiltoniano [73, 70]. Note também que o Hamiltoniano (1.5) é invariante sob a inversão dos spins e a troca simultânea dos sinais dos termos ímpares, ou seja:

$$\mathcal{H}(\{\sigma_i\}, K_2, K_3, h) = \mathcal{H}(\{-\sigma_i\}, K_2, -K_3, -h) \quad (1.6)$$

Definimos as funções de partição restritas no nível  $n$  de construção do sistema, quais sejam:

$$W_n^{(m)}(s_A, s_B, s_C) = Tr' \exp\{-\beta \mathcal{H}_n^{(m)}\}; \quad (s_A, s_B, s_C = \uparrow, \downarrow) \quad (1.7)$$

onde  $Tr'$  denota o traço sobre todas as configurações dos spins internos com os três spins nas raízes,  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$  (veja a figura (1.4)), fixados nos estados  $s_A$ ,  $s_B$  e  $s_C$  respectivamente.

Devido à simetria da rede, existem somente quatro funções de partição restritas distintas:  $\mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\uparrow)$ ,  $\mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\downarrow)$ ,  $\mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\downarrow\uparrow)$ , e  $\mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\downarrow\downarrow)$ . A simetria do Hamiltoniano

expressa na equação (1.6) implica ainda nas seguintes relações restritivas:

$$\begin{cases} \mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\downarrow\downarrow)(K_2, K_3, h) = \mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\uparrow)(K_2, -K_3, -h) \\ \mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\uparrow\uparrow)(K_2, K_3, h) = \mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\downarrow)(K_2, -K_3, -h) \end{cases} \quad (1.8)$$

Além disso, devido ao fato de que, no gerador da rede  $(mSG)_b$ , as  $m$  folhas conectam-se entre si apenas nos três sítios raízes, as funções de partição restritas do nível  $n = 1$  fatoram trivialmente como:

$$\mathcal{W}_1^{(m)}(s_A, s_B, s_C) = \left( \mathcal{W}_1^{(1)}(s_A, s_B, s_C) \right)^m \quad (s_A, s_B, s_C = \uparrow, \downarrow) \quad (1.9)$$

As equações de recorrência do Grupo de Renormalização (GR) são obtidas através da relação

$$\mathcal{W}'(s_A, s_B, s_C; K'_2, K'_3, h') = \mathcal{C} \mathcal{W}(s_A, s_B, s_C; K_2, K_3, h) \quad (1.10)$$

onde

$$(s_A, s_B, s_C) = (\uparrow, \uparrow, \uparrow), (\uparrow, \uparrow, \downarrow), (\downarrow, \downarrow, \uparrow) \text{ ou } (\downarrow, \downarrow, \downarrow) \quad (1.11)$$

e  $\mathcal{W}'$  denota a função de partição restrita  $\mathcal{W}_0^{(1)}$  do agregado triangular renormalizado ( $n = 0$ ). Os parâmetros  $K'_2$ ,  $K'_3$  e  $h'$  são os acoplamentos renormalizados que podem ser expressos, pela imposição das quatro equações resultantes de (1.10), como funções dos acoplamentos originais  $K_2$ ,  $K_3$  e  $h$ . O termo independente dos spins,  $\mathcal{C}$ , estabelece a renormalização do nível zero de energia. Note que nossas equações de GR (1.10) para os parâmetros  $K_2$ ,  $K_3$  e  $h$  são exatas devido ao processo recursivo de construção da rede  $(mSG)_b$ . Nos capítulos 2 e 3 que se seguem, usaremos esse método de GR para deduzir algumas funções termodinâmicas e expoentes críticos do modelo de Ising usual ( $K_3 = h = 0$ ) na família  $(mSG)_2$  e determinar o diagrama de fases e alguns expoentes críticos para o modelo de Ising generalizado na família  $(mSG)_4$ .

## CAPÍTULO 2

# Ferromagneto de Ising na Família de Fractais $(mSG)_2$ : Funções Termodinâmicas e Leis de Escala

### 2.1 Introdução

Nesse capítulo estudamos o modelo de Ising na família de fractais  $(mSG)_2$ . A partir da energia livre do modelo de Ising generalizado, derivamos expressões exatas para algumas funções termodinâmicas do modelo de Ising ( $K_3 = h = 0$ ) e calculamos os seus expoentes críticos correspondentes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , bem como, o expoente crítico  $\nu$  associado ao comprimento de correlação. A determinação dos valores desses expoentes críticos nos permite

testar explicitamente a lei de hiperescala estendida aos fractais (i.e.,  $d_f\nu = 2 - \alpha$ ) e a lei de escala de Rushbrooke ( $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$ ). A primeira lei tem sido verificada numericamente em uma variedade de RHs [21-27] e foi demonstrada analiticamente [26] para o antiferromagneto de Potts em uma família de RHs do tipo diamante. No que concerne à lei de escala de Rushbrooke, há muito menos evidências em favor da sua validade em sistemas fractais. Essa foi testada [93] no ferromagneto de Potts na RH ponte de Wheatstone, usando métodos aproximados para a derivação dos expoentes  $\beta$  e  $\gamma$ ; foi encontrada uma pequena violação dessa lei para todos os valores do número de estados  $q$ , exceto para o caso Ising ( $q = 2$ ). Em nosso conhecimento, não há nenhuma prova rigorosa e tampouco uma verificação confiável (no sentido de, pelo menos, se derivar os expoentes críticos de expressões exatas das suas funções termodinâmicas correspondentes) da lei de Rushbrooke para modelos de spins em fractais - um fato que pode lançar alguma luz sobre a questão da universalidade (ver, por exemplo, [94] e [95]) nesses sistemas. Em nosso trabalho [96], verificamos essa lei de escala, bem como a lei de hiperescala, para o ferromagneto de Ising na família de redes fractais  $(mSG)_2$ . Além disso, calculamos de uma forma exata o parâmetro de ordem associado com as interações de três spins (apenas em triângulos alternados) e sua suscetibilidade correspondente, e verificamos que seus expoentes críticos são iguais a  $\beta$  e  $\gamma$  respectivamente.

Esse capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção (2.2) definimos o modelo de Ising generalizado na rede  $(mSG)_2$  e derivamos equações recursivas para as variáveis de GR. Na seção (2.3) obtemos as expressões exatas para as seguintes funções termodinâmicas do modelo de Ising: o calor específico, a magnetização, a suscetibilidade, o parâmetro de ordem de três spins e sua suscetibilidade. Na seção (2.4) calculamos os respectivos expoentes críticos dessas grandezas e testamos a validade da lei de hiperescala e da lei de escala de Rushbrooke.

## 2.2 O Modelo, Equações de GR e Fronteiras Críticas

Nosso ponto de partida reside na definição das funções de partição restritas no nível  $n$  de construção do modelo de Ising generalizado no fractal  $(mSG)_2$ . Essas funções já foram introduzidas no capítulo anterior, mas relembremos aqui suas definições:

$$W_n^{(m)}(s_A, s_B, s_C) = Tr' \exp\{-\beta \mathcal{H}_n^{(m)}\}; \quad (s_A, s_B, s_C = \uparrow, \downarrow), \quad (2.1)$$

onde  $Tr'$  denota o traço sobre todas as configurações dos spins internos com os três spins nas raízes,  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$  e  $\sigma_C$  (veja a figura (1.4a)), fixados nos estados  $s_A$ ,  $s_B$  e  $s_C$  respectivamente. Embora estejamos interessados aqui apenas no estudo do modelo de Ising usual ( $K_3 = h = 0$ ), a introdução do campo magnético externo  $h$  implica necessariamente, conforme já comentamos no capítulo anterior, na existência mútua do acoplamento entre tripletos  $K_3$  que é gerado no processo de renormalização. O método que utilizamos aqui para derivar a energia livre do sistema é similar ao que foi utilizado por Bleher e Zalys [71] para o modelo de Ising em redes hierárquicas do tipo ligação. Nesse capítulo usaremos a notação abreviada:  $W_{an} = \mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\uparrow)$ ,  $W_{cn} = \mathcal{W}_n^{(m)}(\uparrow\uparrow\downarrow)$ ,  $W_{dn} = \mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\downarrow\uparrow)$  e  $W_{bn} = \mathcal{W}_n^{(m)}(\downarrow\downarrow\downarrow)$  para as funções definidas em (2.1).

O procedimento recursivo de construção da rede  $(mSG)_2$  leva às seguintes equações de recorrência que relacionam as funções de partição restritas em níveis diferentes de construção do sistema:

$$\begin{aligned} W_{an+1} &= (W_{an}^3 + 3W_{an}W_{cn}^2 + 3W_{cn}^2W_{dn} + W_{dn}^3)^m \\ W_{cn+1} &= (W_{an}^2W_{cn} + W_{cn}^3 + 2W_{an}W_{cn}W_{dn} + 2W_{cn}W_{dn}^2 + \\ &\quad + W_{bn}W_{cn}^2 + W_{bn}W_{dn}^2)^m, \end{aligned} \quad (2.2)$$

equações essas que se reduzem, para  $m = 1$ , às equações (11) de Liu [81]. Levando-se em conta o fato de que nosso procedimento de GR preserva a simetria (1.6) do Hamiltoniano, as equações para  $W_{bn+1}$  e  $W_{dn+1}$  podem ser obtidas das equações acima pela inversão dos

spins, i.e., permutando os índices  $a$  e  $b$  bem como  $c$  e  $d$ . As condições iniciais para essas equações correspondem aos pesos de Boltzmann do triângulo ( $n = 0$  na figura (1.4)) e são dadas por:

$$W_{a0} = e^{3K_2+K_3+6h} \quad W_{c0} = e^{-K_2-K_3+2h} \quad , \quad (2.3)$$

enquanto que aquelas para  $W_{b0}$  e  $W_{d0}$  podem ser obtidas pela invariância do Hamiltoniano (1.6).

Introduzindo as variáveis relativas

$$p_n = \left( \frac{W_{dn}W_{bn}}{W_{an}W_{cn}} \right)^{1/2} ; \quad q_n = \left( \frac{W_{bn}}{W_{an}} \right)^{1/2} ; \quad z_n = \left( \frac{W_{cn}W_{dn}}{W_{an}W_{bn}} \right)^{1/2} \quad , \quad (2.4)$$

podemos derivar, de (2.2), equações de recorrência para  $p_n$ ,  $q_n$  e  $z_n$  (cujas expressões estão explicitadas no apêndice (A)) que definem nossa transformação de GR,  $\mathcal{R} : \{p_n, q_n, z_n\} \rightarrow \{p_{n+1}, q_{n+1}, z_{n+1}\}$ . As condições iniciais para essas variáveis são:

$$p_0 = e^{-8h} ; \quad q_0 = e^{-6h-K_3} ; \quad z_0 = e^{-4K_2} \quad . \quad (2.5)$$

Iterações sucessivas da transformação  $\mathcal{R}$  sujeita às condições iniciais acima levam às fronteiras críticas e aos atratores das fases do sistema no espaço  $(p, q, z)$ . Vamos nos restringir aqui ao caso particular em que os parâmetros  $K_2$ ,  $K_3$  e  $h$  são positivos, o que implica que nossas variáveis de GR estão restritas ao intervalo  $[0, 1]$ . Esta restrição se deve ao fato de que o estado fundamental antiferromagnético não é preservado em nosso GR quando  $K_2$  é negativo [25].

Os eixos  $(1, q, 1)$  e  $(1, 1, z)$ , bem como a linha  $(p, p^{3/4}, 1)$  (correspondente a um sistema de spins independentes entre si em um campo magnético externo), são invariantes sob nossa transformação de GR. No eixo  $(1, 1, z)$  que corresponde ao modelo de Ising usual com  $J_3 = H = 0$ , nossa transformação de GR fica:

$$z_{n+1} = \left( \frac{z_n(1 + 3z_n)}{1 - z_n + 4z_n^2} \right)^m \quad , \quad (2.6)$$

o que concorda com a equação (22) da referência [25] e recupera, para  $m = 1$ , a equação (1) da referência [15]. A equação (2.6) (com  $m > 1$ ) possui três pontos fixos no intervalo  $0 \leq z \leq 1$ , quais sejam, os dois atratores  $z = 0$  e  $z = 1$ , correspondentes às fases ferromagnética ( $T = 0$ ) e paramagnética ( $T \rightarrow \infty$ ) respectivamente, e o ponto crítico instável  $z_c^{(m)}$  separando essas duas fases. Alguns valores típicos de  $z_c^{(m)}$  são:  $z_c^{(1)} = 0$ ,  $z_c^{(2)} = 0,309\dots$ ,  $z_c^{(3)} = 0,433\dots$ , e  $z_c^{(4)} = 0,513\dots$ . Na figura (2.1) mostramos o gráfico de  $k_B T_c / J_2$  como uma função da dimensão fractal  $d_f^{(m)}$  (curva superior). A curva inicia com derivada infinita no ponto  $d_f = \ln 3 / \ln 2$  ( $m = 1$ ) e se comporta assintoticamente como  $2^{d_f}$  para  $d_f \rightarrow \infty$ , de maneira similar ao caso do ferromagneto de Potts em redes hierárquicas do tipo Migdal-Kadanoff  $d$ -dimensionais [97] (onde  $d_f = d$ ). Por outro lado, esse comportamento exponencial difere do comportamento linear  $k_B T_c / J_2 \sim 2d$  encontrado para o ferromagneto de Ising em redes hipercúbicas com dimensões  $d$  altas [98].

No eixo  $(1, q, 1)$ , que corresponde ao modelo de Ising apenas com interações de três spins nos vértices dos triângulos orientados para cima ( $J_2 = H = 0$ ), nossa transformação de GR se torna

$$q_{n+1} = \left( \frac{q_n^2(3 + q_n^4)}{1 + 3q_n^4} \right)^{m/2}, \quad (2.7)$$

que se reduz, para  $m = 1$ , à equação (2.35) da referência [78]. No caso  $m > 1$ , a equação (2.7) apresenta três pontos fixos: os dois atratores  $q = 0$  (à  $T = 0$ ) e  $q = 1$  (à  $T \rightarrow \infty$ ) correspondentes, respectivamente, às fases ordenada e paramagnética, e o ponto fixo instável  $q_c^{(m)}$  que separa as bacias de atração dessas duas fases. Valores típicos de  $q_c^{(m)}$  são:  $q_c^{(1)} = 0$ ,  $q_c^{(2)} = 0,346\dots$ ,  $q_c^{(3)} = 0,485\dots$  e  $q_c^{(4)} = 0,557\dots$ . A curva de  $k_B T_c / J_3$  em função de  $d_f^{(m)}$  é mostrada na figura (2.1) (curva inferior), exibindo um comportamento assintótico do tipo  $2^{d_f/2}$  para valores grandes de  $d_f^{(m)}$ .

Verificamos que, para qualquer valor de  $m > 1$ , com exceção dos eixos  $(1, q, 1)$  e  $(1, 1, z)$ , todos os pontos do cubo unitário são renormalizados sucessivamente no atrator

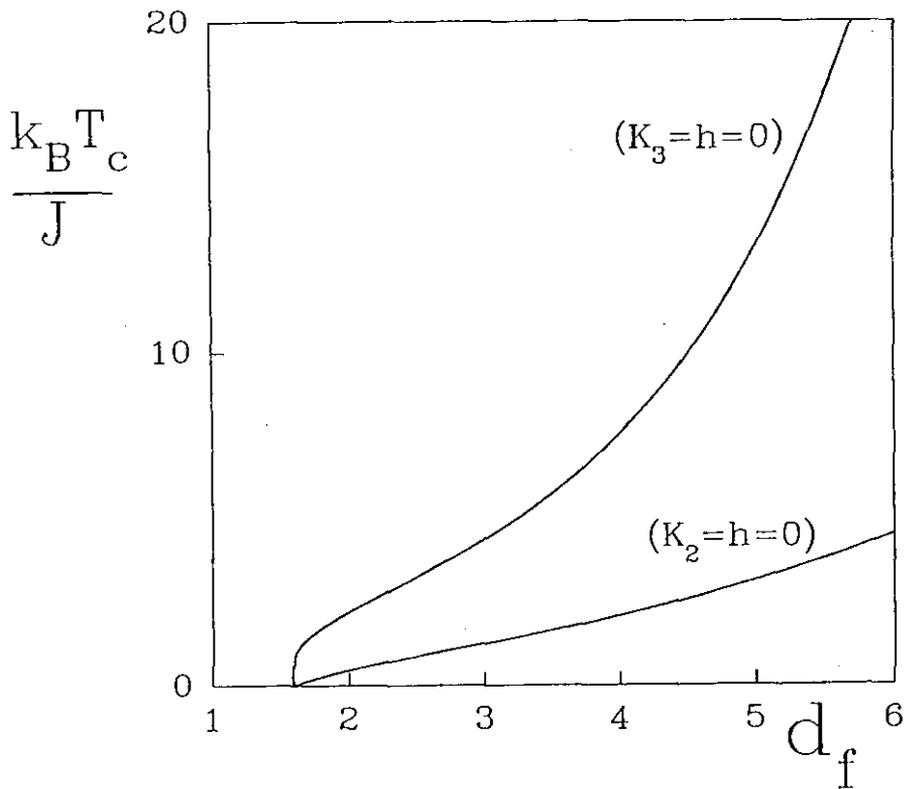


Figura 2.1: Temperatura crítica  $T_c$  em função da dimensão fractal  $d_f^{(m)}$ . Na curva superior (inferior) mostramos os pontos críticos do ferromagneto de Ising com  $K_3 = h = 0$  ( $K_2 = h = 0$ ).

$(0, 0, 1)$  correspondente à fase paramagnética com campo magnético infinito (com  $h \rightarrow \infty$ ). Portanto, o campo magnético, bem como o acoplamento de três corpos, destrói a transição para-ferromagnética do modelo de Ising usual na rede  $(mSG)_2$  ( $m > 1$ ).

### 2.3 Funções Termodinâmicas

Nesta seção calculamos, para o modelo de Ising na rede  $(mSG)_2$ , expressões exatas para o calor específico, magnetização, suscetibilidade, parâmetro de ordem associado ao acoplamento de três corpos e sua suscetibilidade correspondente. Para este fim, vamos obter primeiramente a energia livre do modelo de Ising generalizado em termos do conjunto de variáveis de GR,  $p$ ,  $q$  e  $z$ .

A função de partição do sistema no nível  $n$  é definida por:

$$Z_n = \text{Tr}\{\exp(-\beta\mathcal{H}_n^{(m)})\} \quad , \quad (2.8)$$

onde o traço é feito sobre todas as configurações dos spins na rede  $(m\text{SG})_2$  no  $n$ -ésimo nível de construção. Utilizando as definições das funções de partição restritas dadas em (2.1) obtemos:

$$\mathcal{Z}_n \equiv W_{an} + W_{bn} + 3W_{cn} + 3W_{dn} \quad , \quad (2.9)$$

e portanto, usando as equações de recorrência (2.2) e as definições (2.4) obtemos

$$\mathcal{Z}_n = W_{an}g_n \quad \text{onde} \quad g_n \equiv 1 + q_n^2 + 3\frac{q_n^2 z_n}{p_n} + 3p_n z_n \quad . \quad (2.10)$$

Por outro lado,  $W_{an}$  satisfaz (veja a equação (2.2)) a seguinte relação recursiva

$$W_{an} = W_{an-1}^{3m} v_{n-1}^m \quad , \quad (2.11)$$

onde

$$v_n \equiv 1 + 3\left(\frac{q_n^2 z_n}{p_n}\right)^2 + 3\frac{q_n^4 z_n^3}{p_n} + (p_n z_n)^3 \quad . \quad (2.12)$$

Iterações sucessivas da equação (2.11) combinadas com a equação (2.9) conduzem a

$$\mathcal{Z}_n = W_{a0}^{(3m)^n} g_n \prod_{i=0}^{n-1} v_i^{m(3m)^{n-1-i}} \quad , \quad (2.13)$$

e, conseqüentemente,

$$\ln \mathcal{Z}_n = (3m)^n \left( \ln W_{a0} + \frac{\ln g_n}{(3m)^n} + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \ln v_i \right) \quad . \quad (2.14)$$

Levando em conta o fato de que, para o caso de campo  $h$  finito ( $p_n \neq 0$ ), a função  $g_n$  é limitada, a energia livre adimensional por sítio no nível  $n$  ( $n \gg 1$ ) fica

$$f_{sn} \equiv -\frac{\ln \mathcal{Z}_n}{N_{sn}} = \frac{(1-3m)}{3m} \left( 3K_2 + 6h + K_3 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \ln v_i \right) \quad , \quad (2.15)$$

onde o número de sítios  $N_{sn}$  no nível  $n$  da rede  $(mSG)_2$  é dado por

$$N_{sn} = 3m \frac{(3m)^n - 1}{3m - 1} + 3 \simeq \frac{3m}{3m - 1} (3m)^n \quad (n \gg 1) \quad (2.16)$$

A energia interna adimensional por sítio do modelo de Ising usual ( $H = J_3 = 0$ ) no nível  $n$  pode ser obtida através de

$$U_n \equiv \frac{\langle \mathcal{H}_n \rangle}{J_2 N_{sn}} \Big|_{h=K_3=0} = \frac{\partial f_{sn}}{\partial K_2} \Big|_{h=K_3=0}, \quad (2.17)$$

onde a notação  $\langle \mathcal{O} \rangle_n$  representa a média térmica do operador  $\mathcal{O}$  na rede  $(mSG)_2$  no nível  $n$ , qual seja:

$$\langle \mathcal{O}_n \rangle = \frac{\text{Tr}\{\mathcal{O}e^{-\beta\mathcal{H}_n}\}}{Z_n} \quad (2.18)$$

Para calcularmos a derivada do último termo da equação (2.15), fazemos

$$\frac{\partial \ln v_i}{\partial K_2} \Big|_{h=K_3=0} = \frac{k_B T}{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial J_2} \Big|_{h=K_3=0} = \frac{k_B T}{v_i} (6z_i + 12z_i^2) \frac{\partial z_i}{\partial J_2} \Big|_{h=K_3=0}, \quad (2.19)$$

sendo que

$$\frac{\partial z_i}{\partial J_2} \Big|_{h=K_3=0} = \frac{\partial z_i}{\partial z_{i-1}} \Big|_{h=K_3=0} \frac{\partial z_{i-1}}{\partial J_2} \Big|_{h=K_3=0}, \quad (2.20)$$

e conseqüentemente:

$$\frac{\partial z_i}{\partial J_2} \Big|_{h=K_3=0} = \frac{-4}{k_B T} e^{-4K_2} \mathcal{P}_i, \quad (2.21)$$

onde definimos

$$\mathcal{P}_k \equiv \prod_{j=0}^k \frac{\partial z_{j+1}}{\partial z_j} \Big|_{z_j}. \quad (2.22)$$

Portanto, usando as equações (2.12), (2.15), (2.17), (2.19) e (2.21) obtemos para a energia interna do sistema a expressão:

$$U_n = \frac{(1-3m)}{3m} \left( 3 - \frac{4}{3} e^{-4K_2} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \left( \frac{6z_i + 12z_i^2}{1 + 3z_i^2 + 4z_i^3} \right) \mathcal{P}_i \right) \quad (2.23)$$

O calor específico adimensional por sítio no nível  $n$  pode ser calculado através da derivação de  $U_n$ , ou seja,  $C_n = \partial U_n / \partial (1/K_2)$ . Para simplificar as expressões matemáticas,

vamos definir em (2.23) as seguintes funções:

$$\mathcal{G}_n \equiv \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \mathcal{A}_i \mathcal{P}_i \quad \text{onde} \quad \mathcal{A}_i \equiv \frac{6z_i + 12z_i^2}{1 + 3z_i^2 + 4z_i^3} \quad (2.24)$$

Portanto

$$\frac{\partial U_n}{\partial J_2} = \frac{3m-1}{3m} \left(\frac{4}{3}\right) e^{-4K_2} \left\{ \frac{4\mathcal{G}_n}{k_B T} - \frac{\partial \mathcal{G}_n}{\partial J_2} \right\} \quad (2.25)$$

Utilizando um procedimento análogo àquele em (2.20) na derivação de  $\mathcal{G}_n$  em relação a  $J_2$  obtemos:

$$C_n = \frac{16(3m-1)}{9m} K_2^2 e^{-4K_2} \left\{ \mathcal{G}_n + e^{-4K_2} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \left[ \frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial z_i} \mathcal{P}_i^2 + \mathcal{A}_i \mathcal{P}_i \sum_{k=0}^i \frac{1}{r_k} \mathcal{P}_{k-1} r_k^{(2)} \right] \right\} \quad (2.26)$$

onde definimos  $r_k \equiv (\partial z_{k+1} / \partial z_k) |_{z_k}$  e  $r_k^{(2)} \equiv (\partial^2 z_{k+1} / \partial z_k^2) |_{z_k}$ .

Na figura (2.2) mostramos as curvas do calor específico para os casos  $m = 1$  (a rede SG), 2, 3 e 4. Note que no eixo horizontal usamos, para uma melhor representação, a variável  $x \equiv e^{-4K_2/m}$ . Nenhuma das curvas diverge na temperatura crítica, o que indica valores negativos (ou nulos) para o expoente  $\alpha$  (os valores explícitos deste expoente serão dados na próxima seção), de maneira similar aos resultados encontrados para o modelo de Ising usual em uma variedade de redes hierárquicas do tipo ligação [70, 21, 24]. O caso  $m = 2$  apresenta um comportamento do tipo cúspide com um pico finito no ponto  $x_c^{(2)}$ . Os outros casos com  $m > 2$  apresentam picos arredondados localizados abaixo dos pontos críticos  $x_c^{(m)}$ , de maneira similar ao comportamento encontrado em alguns sistemas com estado fundamental infinitamente degenerado [26, 99, 100].

Devido à introdução do número de coordenação  $c_i$  no termo do campo magnético do Hamiltoniano, vamos definir a magnetização  $M$  do sistema no nível  $n$  por

$$M_n \equiv \frac{\sum_i c_i^{(n)} \langle \sigma_i \rangle}{\sum_i c_i^{(n)}} = - \left( \frac{N_{sn}}{N_{cn}} \right) \frac{\partial f_{sn}}{\partial h} \Big|_{h=K_3=0} \quad (2.27)$$

onde a soma é realizada sobre todos os sítios da rede  $(mSG)_2$  no nível  $n$ , e onde introduzimos  $N_{cn} \equiv \sum_i c_i^{(n)} = 6(3m)^n$  de tal forma a normalizar  $M_n$  em  $T = 0$ . Da equação

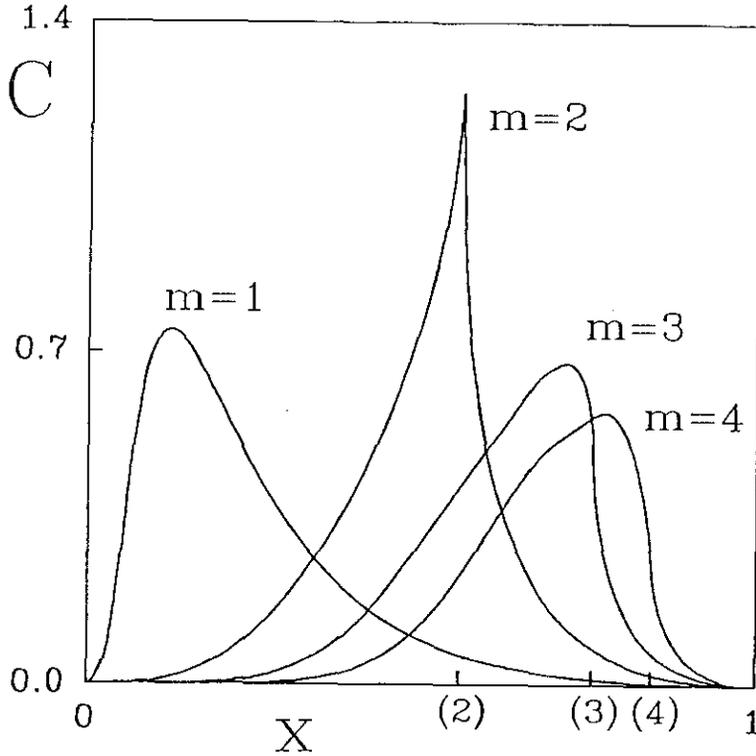


Figura 2.2: Calor específico adimensional por sítio em função da variável  $x = \exp\{-4K_2/m\}$  para os casos  $m = 1, 2, 3$  e  $4$  no nível  $n = 30$ . Os traços no eixo horizontal, indexados por (2), (3) e (4), marcam as temperaturas críticas  $z_c^{(2)}$ ,  $z_c^{(3)}$  e  $z_c^{(4)}$  respectivamente.

(2.15) obtemos:

$$-\left(\frac{N_{sn}}{N_{cn}}\right) \frac{\partial f_{sn}}{\partial h} \Big|_{h=K_3=0} = 1 + \frac{1}{18} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \frac{1}{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial h} \Big|_{h=K_3=0} \quad (2.28)$$

Note que  $v_i$  é função das variáveis de GR  $p_i$ ,  $q_i$  e  $z_i$  e, portanto:

$$\frac{\partial v_i}{\partial h} \Big|_{h=K_3=0} = \left(\frac{\partial z_i}{\partial h} \frac{\partial v_i}{\partial z_i}\right) \Big|_{h=K_3=0} + \left(\frac{\partial p_i}{\partial h} \frac{\partial v_i}{\partial p_i}\right) \Big|_{h=K_3=0} + \left(\frac{\partial q_i}{\partial h} \frac{\partial v_i}{\partial q_i}\right) \Big|_{h=K_3=0} \quad (2.29)$$

Definindo  $a_i \equiv (\partial q_i / \partial h) |_{h=K_3=0}$  e  $b_i \equiv (\partial p_i / \partial h) |_{h=K_3=0}$  e levando em conta que, para qualquer valor de  $j$ ,

$$\frac{\partial z_j}{\partial h} \Big|_{h=K_3=0} = 0 \quad , \quad (2.30)$$

relação essa que podemos derivar como uma consequência da simetria (1.6) do Hamiltoniano (já que  $z(K_2, K_3, h) = z(K_2, -K_3, -h)$ ) obtemos:

$$M_n = 1 + D_n(\{z_i\}, \{a_i\}, \{b_i\}) \quad , \quad (2.31)$$

com

$$D_n(\{z_i\}, \{a_i\}, \{b_i\}) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \left\{ \frac{z_i^2 [2(1+z_i)a_i - b_i]}{1 + 3z_i^2 + 4z_i^3} \right\} \quad (2.32)$$

As funções  $a_i$  e  $b_i$  introduzidas em (2.32) obedecem às seguintes relações de recorrência (que podem ser facilmente deduzidas usando-se a regra da cadeia na derivação, como feito em (2.29) e (2.20)):

$$\begin{cases} a_{i+1} = F_i^{(1)} a_i + F_i^{(2)} b_i \\ b_{i+1} = F_i^{(3)} a_i + F_i^{(4)} b_i \end{cases} \quad (2.33)$$

com

$$F_i^{(1)} = m \left( \frac{3(1-z_i)}{1-z_i+4z_i^2} \right) \quad , \quad F_i^{(2)} = m \left( \frac{6z_i^2}{(1-z_i+4z_i^2)(1+z_i)} \right) \quad (2.34)$$

$$F_i^{(3)} = m \left( \frac{4(1+z_i-z_i^2-z_i^3)}{(1-z_i+4z_i^2)(1+3z_i)} \right) \quad , \quad F_i^{(4)} = m \left( \frac{1-2z_i+13z_i^2+4z_i^3}{(1-z_i+4z_i^2)(1+3z_i)} \right) \quad ,$$

e com as condições iniciais  $a_0 = -6$  e  $b_0 = -8$ . Os gráficos da magnetização para os casos  $m = 2, 3$  e  $4$  são mostrados, com linhas sólidas, na figura (2.3).

Como vimos na seção anterior,  $J_3$  desempenha o mesmo papel que o campo  $H$  no que concerne à transição para-ferromagnética do modelo de Ising usual, i.e., ambos destroem essa transição. Portanto, podemos introduzir o seguinte parâmetro de ordem  $M_\Delta$  conjugado ao acoplamento de três spins  $J_3$ :

$$M_\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{\Delta n} \quad , \quad (2.35)$$

com  $M_\Delta$  no nível  $n$  sendo dado por:

$$M_{\Delta n} \equiv \frac{\sum_{\Delta} \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle}{N_{\Delta n}} \quad , \quad (2.36)$$

onde a soma é realizada sobre todos os  $N_{\Delta n} = (3m)^n$  triângulos orientados para cima no nível  $n$  da rede  $(mSG)_2$ .  $N_{\Delta n}$  foi introduzido na expressão acima de forma a normalizar  $M_\Delta$  em  $T = 0$ .

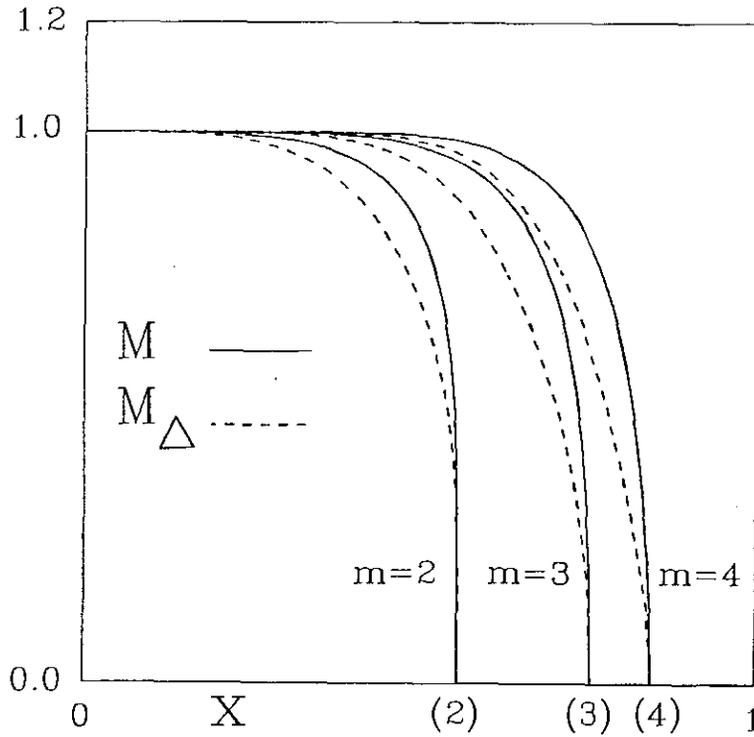


Figura 2.3: Magnetizações espontâneas  $M$  (linhas sólidas) e as funções  $M_{\Delta}$  (linhas tracejadas) em função de  $x$  para os casos  $m = 2, 3$  e  $4$  no nível  $n = 30$ . Os números entre parênteses, (2), (3) e (4), correspondem às temperaturas críticas  $z_c^{(2)}$ ,  $z_c^{(3)}$  e  $z_c^{(4)}$  respectivamente.

$M_{\Delta n}$  pode ser obtido de  $f_{sn}$  (equação (2.15)) através de

$$M_{\Delta n} = - \left( \frac{N_{sn}}{N_{\Delta n}} \right) \frac{\partial f_{sn}}{\partial K_3} \Big|_{h=K_3=0} \quad (2.37)$$

Levando-se em conta que, analogamente à equação (2.30),

$$\frac{\partial z_j}{\partial K_3} \Big|_{h=K_3=0} = 0 \quad , \quad (2.38)$$

e definindo,  $A_i \equiv (\partial q_i / \partial K_3) |_{h=K_3=0}$  e  $B_i \equiv (\partial p_i / \partial K_3) |_{h=K_3=0}$  chegamos (os cálculos aqui são similares aos desenvolvidos para a magnetização  $M_n$ , apenas substituindo-se as derivações em relação ao campo  $h$  por derivações em relação a  $K_3$ ) a uma expressão para  $M_{\Delta n}$  totalmente análoga àquela obtida para a magnetização  $M_n$ , qual seja

$$M_{\Delta n} = 1 + 6D_n(\{z_i\}, \{A_i\}, \{B_i\}) \quad , \quad (2.39)$$

onde as funções  $A_i$  e  $B_i$  satisfazem às mesmas equações de recorrência que são satisfeitas por  $a_i$  e  $b_i$  (2.33), mas com condições iniciais diferentes ( $A_0 = -1$  e  $B_0 = 0$ ).

Os gráficos de  $M_{\Delta n}$  para os casos  $m = 2, 3$  e  $4$  estão mostrados na figura (2.3) (em linhas tracejadas). Dessa figura podemos confirmar que  $M_{\Delta}$  desempenha o papel de um parâmetro de ordem já que ele se anula acima da temperatura crítica e, como já havíamos visto, a aplicação do seu campo conjugado ( $J_3$ ), não importa o quão pequeno seja o seu valor, destrói a transição de fase. Note também que  $M$  e  $M_{\Delta}$  se anulam na mesma temperatura crítica  $z_c^{(m)}$ . Além disso, como veremos na próxima seção, os dois parâmetros de ordem, bem como suas respectivas suscetibilidades, possuem os mesmos expoentes críticos (i.e.,  $\beta^{(m)} = \beta_{\Delta}^{(m)}$  e  $\gamma^{(m)} = \gamma_{\Delta}^{(m)}$ ) para qualquer valor de  $m$ . Este fato pode ser entendido se notarmos que a adição de um pequeno campo magnético  $H$  ou, da mesma forma, de uma interação de três spins ao modelo de Ising usual (somente interações entre dois spins) quebra a mesma simetria (i.e., a simetria  $Z(2)$ ). Um fato similar ocorre no modelo de Ising com interações somente entre três spins na rede triangular [101], onde ambos, o campo magnético e a interação entre dois spins, quebram a simetria de inversão de todos os spins em quaisquer duas das três subredes que particionam a rede triangular.

A suscetibilidade a campo nulo  $\chi_n \equiv (\partial M_n / \partial H) |_{h=K_3=0}$  no nível  $n$  está relacionada com  $f_{sn}$  através de

$$J_2 \chi_n = - \left( \frac{N_{sn}}{N_{cn}} \right) K_2 \frac{\partial^2 f_{sn}}{\partial h^2} \Big|_{h=K_3=0}, \quad (2.40)$$

e portanto

$$J_2 \chi_n = \frac{K_2}{18} \sum_{i=0}^{n-1} (3m)^{-i} \left[ \frac{-1}{v_i^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial h} \right)^2 + \frac{1}{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial h^2} \right] \Big|_{h=K_3=0}. \quad (2.41)$$

O cálculo de  $\partial v_i / \partial h$  foi mostrado em (2.29) na dedução da magnetização. Para calcular  $\partial^2 v_i / \partial h^2$  usamos novamente a regra da cadeia na derivação, qual seja:

$$\frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial z_i}{\partial h} \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial p_i}{\partial h} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial q_i}{\partial h} \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (2.42)$$

e, levando-se em conta (2.30) (e também que  $\partial q_i/\partial z_{i-1}|_{h=K_3=0} = 0$ ,  $\partial p_i/\partial z_{i-1}|_{h=K_3=0} = 0$ ,  $\partial z_i/\partial q_{i-1}|_{h=K_3=0} = 0$  e  $\partial z_i/\partial p_{i-1}|_{h=K_3=0} = 0$ ) e definindo (analogamente ao que foi feito para as funções  $a_i$  e  $b_i$  na dedução da magnetização)

$$d_i = \left. \frac{\partial^2 q_i}{\partial h^2} \right|_{h=K_3=0}, \quad e_i = \left. \frac{\partial^2 p_i}{\partial h^2} \right|_{h=K_3=0} \quad \text{e} \quad g_i = \left. \frac{\partial^2 z_i}{\partial h^2} \right|_{h=K_3=0}, \quad (2.43)$$

obtemos, além das equações de recorrência dadas em (2.33), as equações

$$\begin{cases} d_{i+1} = F_i^{(1)} d_i + F_i^{(2)} e_i + F_i^{(5)} a_i^2 + 2F_i^{(6)} a_i b_i + F_i^{(7)} b_i^2 \\ e_{i+1} = F_i^{(3)} d_i + F_i^{(4)} e_i + F_i^{(8)} a_i^2 + 2F_i^{(9)} a_i b_i + F_i^{(10)} b_i^2 \\ g_{i+1} = F_i^{(11)} g_i + F_i^{(12)} a_i^2 + 2F_i^{(13)} a_i b_i + F_i^{(14)} b_i^2 \end{cases}, \quad (2.44)$$

com  $F_i^{(1)}$ ,  $F_i^{(2)}$ ,  $F_i^{(3)}$  e  $F_i^{(4)}$  dadas em (2.34) e

$$F_i^{(5)} = 3m \left( \frac{(z_i-1)(1-3m-z_i+3mz_i+4z_i^2)}{(1-z_i+4z_i^2)^2} \right), \quad F_i^{(6)} = \left( \frac{18m^2(1-z_i)z_i^2}{(1-z_i+4z_i^2)^2(1+z_i)} \right), \quad (2.45)$$

$$F_i^{(7)} = -6mz_i^2 \left( \frac{1+3z_i^2-6mz_i^2+4z_i^3}{(1-z_i+4z_i^2)^2(1+z_i)^2} \right),$$

$$F_i^{(8)} = \left( \frac{4m(z_i-1)(z_i+1)^2(1+2z_i+z_i^2+12z_i^3-4m(1+z_i-z_i^2-z_i^3))}{(1-z_i+4z_i^2)^2(1+3z_i)^2} \right), \quad (2.46)$$

$$F_i^{(9)} = \left( \frac{-4m^2(z_i-1)(z_i+1)^2(1-2z_i+13z_i^2+4z_i^3)}{(1-z_i+4z_i^2)^2(1+3z_i)^2} \right), \quad (2.47)$$

$$F_i^{(10)} = \left( \frac{m(1-2z_i+13z_i^2+4z_i^3)(-1-2z_i-z_i^2-12z_i^3+m(1-2z_i+13z_i^2+4z_i^3))}{(1-z_i+4z_i^2)^2(1+3z_i)^2} \right), \quad (2.48)$$

$$F_i^{(11)} = \left( \frac{m(1-z_i)z_i^{m-1}(1+7z_i)(1+4z_i+3z_i^2)^m}{(1-z_i+4z_i^2)^{m+1}(1+3z_i)(1+z_i)^m} \right), \quad (2.49)$$

$$F_i^{(12)} = \left( \frac{16m(z_i-1)z_i^{m+1}(z_i+1)^{3-m}(5z_i+1)(1+4z_i+3z_i^2)^m}{(1-z_i+4z_i^2)^{m+2}(1+3z_i)^2} \right), \quad (2.50)$$

$$F_i^{(13)} = \left( \frac{4m(1-z_i)z_i^{m+1}(5z_i-1)(1+4z_i+3z_i^2)^m(1+6z_i-3z_i^2+4z_i^3)}{(1-z_i+4z_i^2)^{m+2}(1+z_i)^m(1+3z_i)^2} \right), \quad (2.51)$$

$$F_i^{(14)} = \left( \frac{4m(z_i-1)z_i^{m+1}(z_i+1)^{-m-1}(1+4z_i+3z_i^2)^m(-3-2z_i-4z_i^2-6z_i^3-53z_i^4+20z_i^5)}{(1-z_i+4z_i^2)^{m+2}(1+3z_i)^2} \right) \quad (2.52)$$

As equações (2.44) têm como condições iniciais  $a_0 = -6$ ,  $b_0 = -8$ ,  $d_0 = 36$ ,  $e_0 = 64$  e

$$g_0 = 0.$$

Na figura (2.4) (linhas sólidas) mostramos os gráficos da suscetibilidade nos casos  $m = 2, 3$  e  $4$ . As suscetibilidades divergem apenas nas temperaturas críticas, em contraste com o comportamento da mesma função para o modelo de Ising na rede hierárquica diamante [71], onde há uma divergência para todo  $z > z_c$ .

Podemos definir a suscetibilidade a campo nulo do acoplamento entre três spins  $\chi_{\Delta n} \equiv (\partial M_{\Delta n} / \partial J_3) |_{h=K_3=0}$ , que pode ser obtida da equação (2.15) similarmente ao que foi feito para a suscetibilidade  $\chi$ , apenas trocando a derivação em relação a  $h$  pela derivação em relação ao acoplamento  $K_3$ . Obtemos uma expressão similar àquela dada em (2.41) e equações de recorrência análogas às dadas em (2.44) (com  $E_i, F_i$  e  $G_i$  definidas em termos de derivadas em relação a  $K_3$ ) mas, com as condições iniciais  $a_0 = -1, b_0 = 0, d_0 = 1, e_0 = 0$  e  $g_0 = 0$ . Os gráficos de  $\chi_{\Delta}$  para  $m = 2, 3$  e  $4$  estão mostrados na figura (2.4) (linhas tracejadas). Essa suscetibilidade apresenta uma divergência na temperatura crítica  $z_c^{(m)}$ , de maneira similar à suscetibilidade  $\chi$ .

## 2.4 Expoentes Críticos e Leis de Escala

Nessa seção obtemos os expoentes críticos  $\nu, \alpha, \beta$  e  $\gamma$  correspondentes aos respectivos comportamentos críticos do comprimento de correlação, calor específico, magnetização espontânea e suscetibilidade para o modelo de Ising usual ( $K_3 = h = 0$ ) na rede  $(mSG)_2$ . Com esses expoentes testaremos a validade das leis de hiperscala e de Rushbrooke.

A linearização da Equação (2.6) na vizinhança do ponto crítico  $z_c^{(m)}$  leva a:

$$\nu^{(m)} = \frac{\ln 2}{\ln r_c^{(m)}} \quad , \quad (2.53)$$

onde  $r_c^{(m)} \equiv (\partial z_{n+1} / \partial z_n) |_{z_c^{(m)}}$ . Com isso obtemos os valores exatos para os expoentes do comprimento de correlação:  $\nu^{(2)} = 0,928\dots, \nu^{(3)} = 0,850\dots, \nu^{(4)} = 0,840\dots$ , etc. (na figura (2.8) mostramos o gráfico de  $\nu$  em função da dimensão fractal  $d_f^{(m)}$ ).

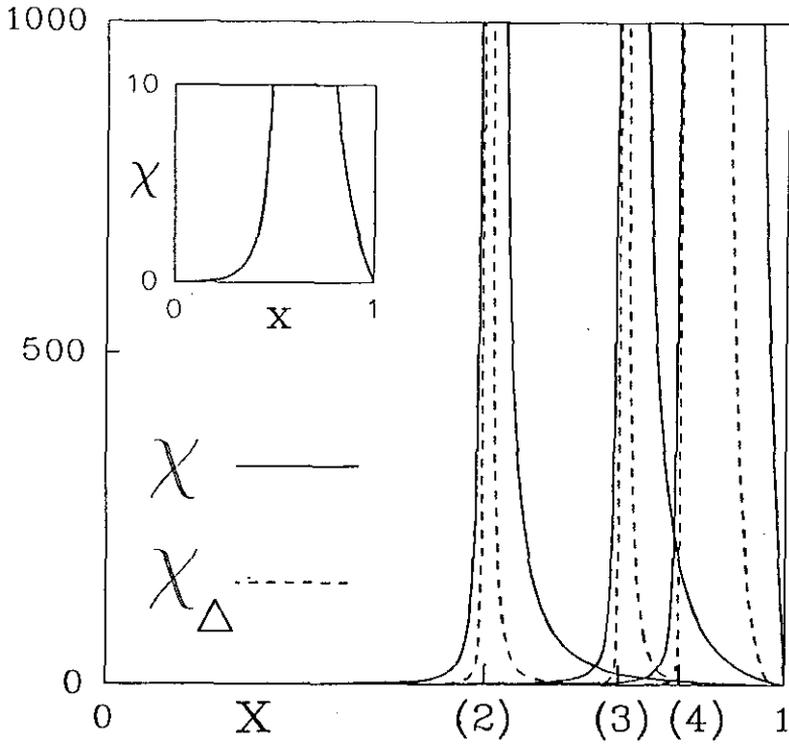


Figura 2.4: Suscetibilidades adimensionais  $\chi$  (linhas sólidas) e  $\chi_{\Delta}$  (linhas tracejadas) em função de  $x$  para os casos  $m = 2, 3$  e  $4$  no nível  $n = 30$ . Os traços no eixo horizontal indexados por (2), (3) e (4) correspondem às temperaturas críticas  $z_c^{(2)}$ ,  $z_c^{(3)}$  e  $z_c^{(4)}$  respectivamente. O gráfico menor exibe um detalhe da suscetibilidade  $\chi$  para o caso  $m = 2$ .

Os gráficos das grandezas termodinâmicas mostrados nas figuras (2.2), (2.3) e (2.4) foram obtidos para a rede  $(mSG)_2$  na hierarquia  $n = 30$  que corresponde a, aproximadamente,  $N_{sn}^{(m)} \simeq (3m)^{30}$  spins ( $N_{sn}^{(1)} \simeq 10^{14}$ ,  $N_{sn}^{(4)} \simeq 10^{32}$ ). A análise da convergência dessas funções com o aumento de  $n$  mostra que este tamanho fornece valores numéricos para  $C_n$ ,  $M_n$ ,  $M_{\Delta n}$ ,  $\chi_n$  e  $\chi_{\Delta n}$  (com excessão de  $\chi_n$  e  $\chi_{\Delta n}$  na vizinhança imediata de  $z_c^{(m)}$ ) que não variam mais nas suas  $16^{as}$  casas decimais. Na figura (2.5) mostramos, para exemplificar o que acabamos de afirmar, o comportamento da magnetização  $M_n$  em função da temperatura para o caso  $m = 2$  em diferentes hierarquias da rede,  $n = 2$ ,  $n = 3$  e  $n = 4$ . Podemos notar que essa função, mesmo nos primeiros passos de iteração da rede, já começa a convergir rapidamente para a curva assintótica que está mostrada na figura

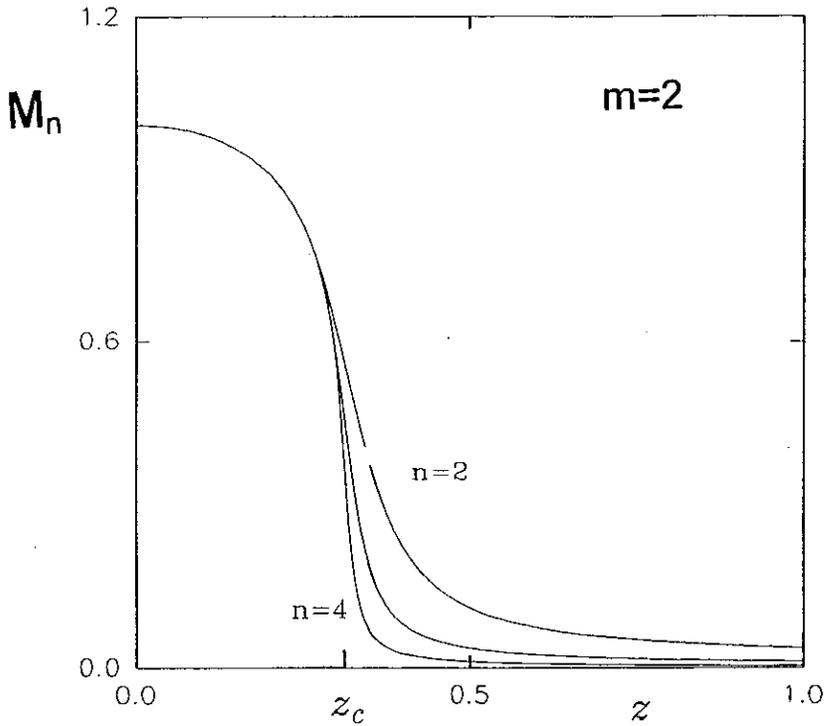


Figura 2.5: Magnetizações espontâneas  $M_n$  em função da variável  $z = e^{-4K_2}$  para o caso  $m = 2$  nas hierarquias  $n = 2, 3$  e  $4$ .

(2.3). Vamos, portanto, considerar que  $C_{30}$ ,  $M_{30}$ ,  $M_{\Delta 30}$ ,  $\chi_{30}$  e  $\chi_{\Delta 30}$  são aproximações muito boas para essas funções no limite termodinâmico.

Usando a expressão exata para  $C_n$  (2.26) obtemos, de um gráfico log-log de  $|C_{30}(z) - C_{30}(z_c^{(m)})|$  versus  $(z_c^{(m)} - z)$  (para um exemplo  $(m = 2)$ , ver figura (2.6a), os seguintes valores para os expoentes  $\alpha^{(m)}$  do calor específico:  $\alpha^{(2)} \simeq -0,401$ ,  $\alpha^{(3)} \simeq -0,696$ ,  $\alpha^{(4)} \simeq -1,012$ , etc. (veja o gráfico de  $\alpha$  versus  $d_f^{(m)}$  na figura (2.8)).

Os gráficos log-log de  $M_{30}(t)$  versus  $(z_c^{(m)} - z)$  (para um exemplo  $(m = 2)$ , ver figura (2.6b) fornecem os seguintes valores para os expoentes  $\beta^{(m)}$  da magnetização:  $\beta^{(2)} \simeq 0,247$ ,  $\beta^{(3)} \simeq 0,441$ ,  $\beta^{(4)} \simeq 0,582$ , etc. (veja o gráfico desse expoente versus  $d_f^{(m)}$  na figura (2.8)). Usando um procedimento similar, verificamos que a função  $M_{\Delta n}$  se anula na mesma temperatura crítica  $z_c^{(m)}$  com o mesmo expoente  $\beta^{(m)}$  calculado para a magnetização  $M_n$ .

Os expoentes críticos  $\gamma^{(m)}$  foram calculados através de *Finite Size Scaling* (FSS).

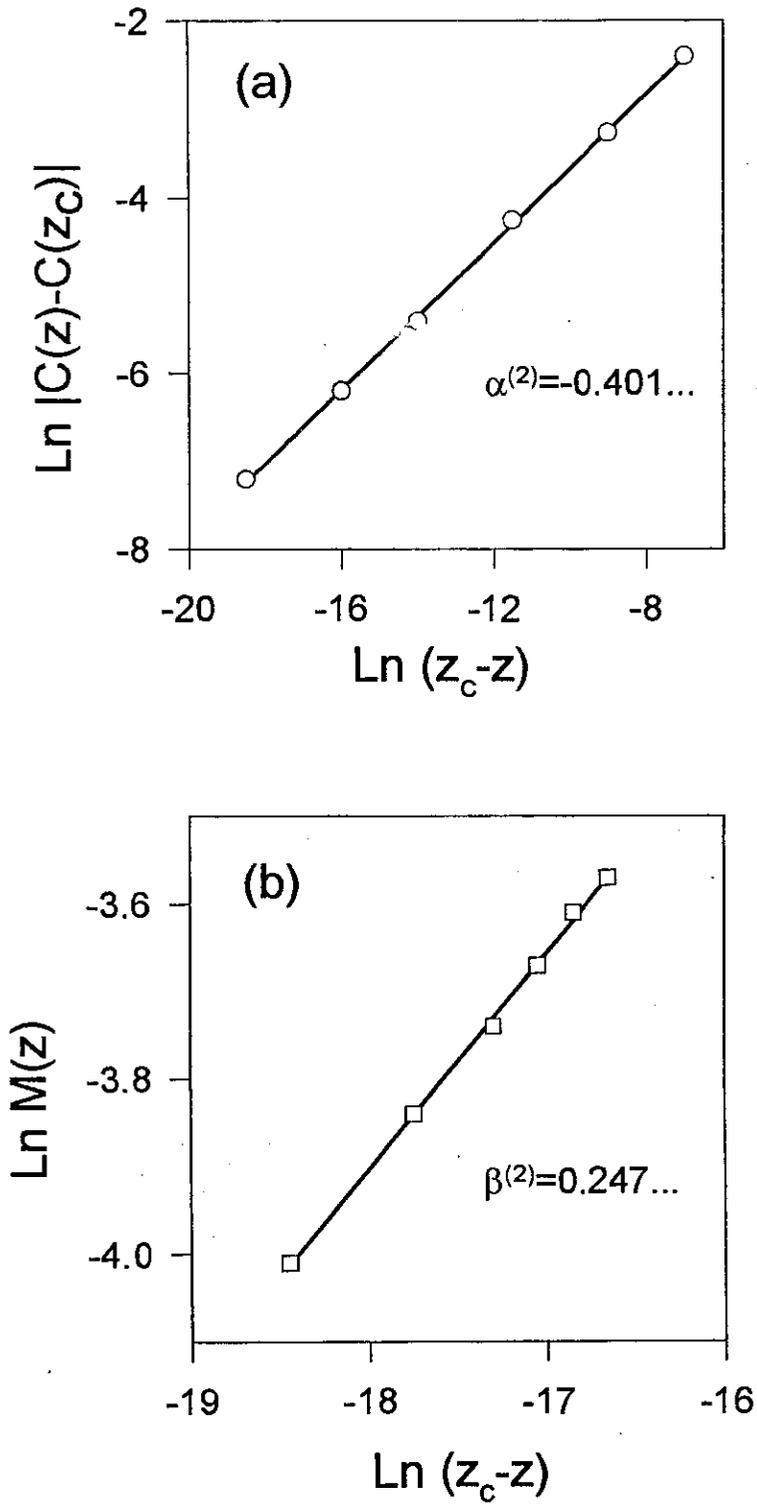


Figura 2.6: Gráficos log-log exibindo os comportamentos do calor específico (a) e da magnetização (b) na vizinhança da temperatura crítica para  $m = 2$  e hierarquia  $n = 30$ .

Usamos este procedimento porque as suscetibilidades  $\chi^{(m)}$  variam de uma maneira muito brusca para pequenas variações em  $z_c^{(m)}$ , o que gera erros numéricos muito grandes na determinação do expoente  $\gamma^{(m)}$  através de um simples gráfico log-log de  $\chi^{(m)}$  versus  $(z - z_c^{(m)})$ . Para um dado  $m$  e para valores crescentes de  $n$ , observamos que o valor máximo de  $\chi_n^{(m)}$  aumenta com  $n$ , tendendo a divergir no limite termodinâmico. Este pico ocorre em uma temperatura pseudo-crítica  $z_{pc\ n}^{(m)}$  que converge, à medida em que  $n$  aumenta, para a temperatura crítica  $z_c^{(m)}$  da seguinte forma [102]:

$$|z_{pc\ n}^{(m)} - z_c^{(m)}| \sim L_n^{-1/\theta^{(m)}} \quad (n \gg 1) \quad , \quad (2.54)$$

onde  $L_n$  é o tamanho linear característico da rede  $(mSG)_2$  no nível  $n$  ( $L_n = 2^n$ ) e  $\theta^{(2)} \simeq 0,928$ ,  $\theta^{(3)} \simeq 0,850$ ,  $\theta^{(4)} \simeq 0,839$ , etc. (para um exemplo ( $m = 2$ ), ver figura (2.7a)). Esses valores de  $\theta^{(m)}$  coincidem com os valores exatos do expoente crítico  $\nu^{(m)}$  com uma concordância excelente (com erros relativos da ordem de 0,1%), o que corrobora o fato de que a igualdade  $\theta = \nu$  parece ser usualmente verdadeira dentro do formalismo de FSS.

O *scaling* da suscetibilidade em hierarquias finitas ( $n \gg 1$ ) da rede  $(mSG)_2$  é, de acordo com o formalismo de FSS, dado por [102]:

$$\chi_n(z_{pc\ n}) \sim L_n^{\gamma^{(m)}/\nu^{(m)}} \quad (n \gg 1) \quad , \quad (2.55)$$

o que leva à curva superior mostrada na figura (2.8), em particular,  $\gamma^{(2)} \simeq 1,904$ ,  $\gamma^{(3)} \simeq 1,814$ ,  $\gamma^{(4)} \simeq 1,847$ , etc. (para um exemplo ( $m = 2$ ) do comportamento indicado na equação (2.55), ver figura (2.7b)). Os valores de  $\gamma^{(m)}$  obtidos diretamente de um gráfico log-log de  $\chi_{30}$  versus  $(z - z_c^{(m)})$  concordam com estes valores obtidos aqui até na segunda casa decimal de seus valores numéricos. Usando um procedimento similar para a suscetibilidade  $\chi_{\Delta n}$  obtemos o mesmo conjunto de expoentes  $\gamma^{(m)}$  obtidos para a susceptibilidade  $\chi_n$

A lei de hiperescala estendida aos sistemas fractais, qual seja

$$d_f \nu = 2 - \alpha \quad , \quad (2.56)$$

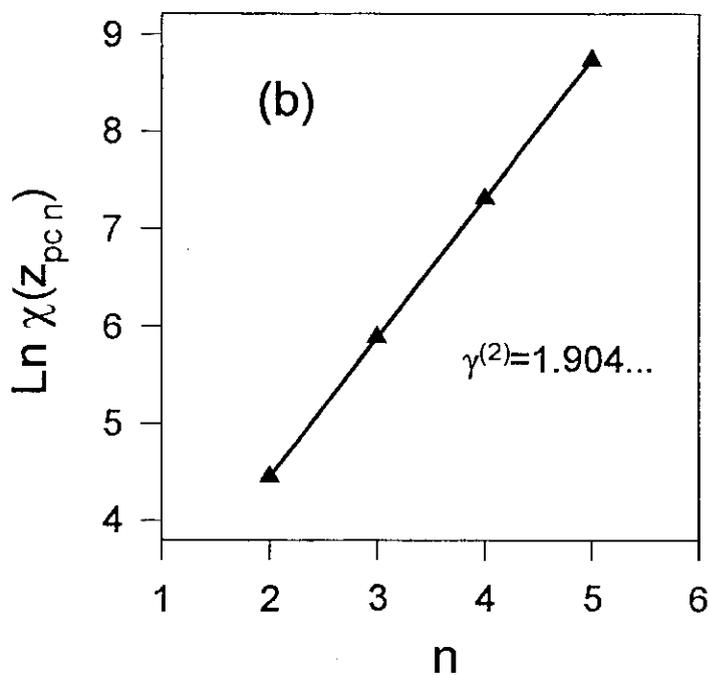
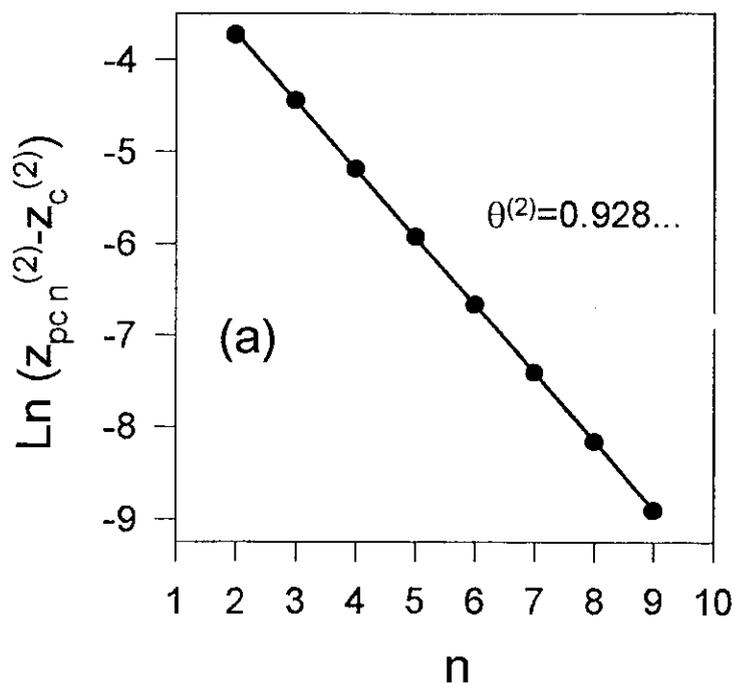


Figura 2.7: Gráficos log-log exibindo os comportamentos das grandezas  $|z_{pcn}^{(m)} - z_c^{(m)}|$  e  $\chi_n(z_{pcn})$  com a variação do tamanho  $L_n = 2^n$  da rede  $(mSG)_2$ .

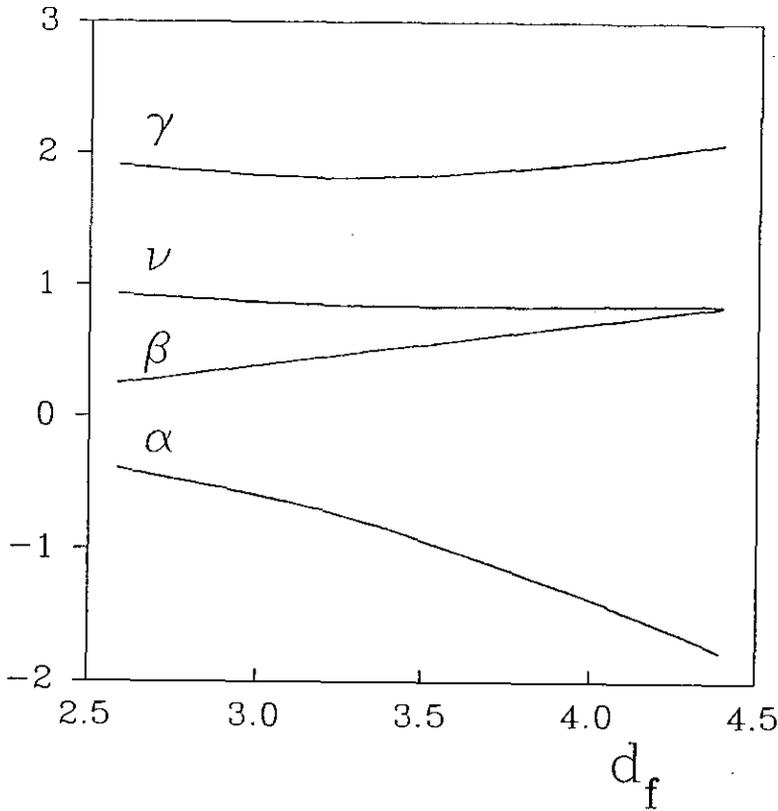


Figura 2.8: Expoentes críticos  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  do modelo de Ising com campo nulo na rede  $(mSG)_2$  como funções da dimensão fractal  $d_f^{(m)}$ .

não foi ainda rigorosamente demonstrada em geral mas, ainda assim, esta tem sido verificada para uma variedade de sistemas definidos em fractais [21,24,26,27]. Neste nosso trabalho, usando os expoentes críticos exatos  $\nu^{(m)}$  obtidos da equação (2.53) e os expoentes aproximados  $\alpha^{(m)}$  acima obtemos  $d_f^{(m)}\nu^{(m)} + \alpha^{(m)} \simeq 1,998$  ( $m = 2$ ),  $2,001$  ( $m = 3$ ),  $1,999$  ( $m = 4$ ).

No que concerne ao teste da lei de escala de Rushbrooke, obtemos  $\alpha^{(m)} + 2\beta^{(m)} + \gamma^{(m)} \simeq 1,997$ ,  $2,000$  e  $1,999$  para  $m = 2$ ,  $3$  e  $4$  respectivamente. Essa lei foi também verificada [93] para o ferromagneto de Ising na rede hierárquica ponte de Wheatstone usando um método aproximado na determinação das funções termodinâmicas e de seus respectivos expoentes críticos.

## CAPÍTULO 3

### Criticalidade do Modelo de Ising

### Generalizado na Família de Fractais $(mSG)_4$

#### 3.1 Introdução

Neste Capítulo estudamos a criticalidade do modelo de Ising na família de redes fractais  $(mSG)_4$  sujeito a interações entre pares primeiros vizinhos, entre tripletos em triângulos alternados e a um campo magnético externo, onde as respectivas constantes de acoplamento  $J_2$ ,  $J_3$  e  $H$  podem assumir valores positivos e/ou negativos [103]. A abordagem, através de um procedimento exato de GR, desse modelo de Ising generalizado é relevante pois permite responder questões de interesse, tais como: (i) a fase não usual descrita

anteriormente persiste ou não para  $J_2 < 0$ ,  $H \neq 0$  e/ou  $J_3 \neq 0$ ?; (ii) quando aplicamos um campo ímpar ( $H$  ou  $J_3$ ), a degenerescência do modelo de Ising frustrado com interações antiferromagnéticas (AF) entre primeiros vizinhos ( $J_2 < 0$ ) diminui; pode esse fato gerar uma ordem AF similar ao caso na rede triangular?; (iii) já que o caso puro do ferromagneto de Ising usual ( $J_2 > 0$ ,  $J_3 = H = 0$ ) e o caso do modelo de Ising com interações somente nos tripletos ( $J_3 \neq 0$ ,  $J_2 = H = 0$ ) possuem temperaturas críticas finitas distintas para um valor fixo de  $m > 1$  (como mostrado em [96]) esses modelos pertencem a classes de universalidade distintas? No caso afirmativo, qual o comportamento crítico dos modelos intermediários com  $J_2 > 0$  e  $J_3 \neq 0$ ? Em suma, esperamos que o estudo da criticalidade do modelo aqui considerado, que para algumas faixas de parâmetros contém muitos ingredientes complexos (e.g., frustrações, denerescência infinita no estado fundamental, competição entre diferentes tendências de ordenamento, um substrato não bipartido), contribua para um melhor entendimento dos fenômenos críticos em fractais.

Esse Capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção (3.2) derivamos equações recursivas para as variáveis de GR no  $(mSG)_4$ . Na seção (3.3) discutimos o diagrama de fases obtido para esse modelo, bem como seus expoentes críticos  $\nu$ .

## 3.2 Equações de GR

Nesse capítulo vamos considerar apenas o caso particular  $b = 4$  do conjunto de fractais  $(mSG)_b$ . Nosso critério para a escolha deste fractal específico foi a exigência da preservação das simetrias do estado fundamental AF sob renormalização, como está discutido em [25] (os cálculos que levam à escolha do  $(mSG)_4$  são muito extensos e não serão detalhados aqui).

Ao invés de trabalharmos com o espaço  $(K_2, K_3, h)$ , que é ilimitado, preferimos usar

as variáveis de GR  $t$ ,  $x$  e  $y$  definidas por:

$$t \equiv \tanh(K_2), \quad x \equiv \tanh(K_3), \quad \text{e} \quad y \equiv \tanh(h), \quad (3.1)$$

e que formam um espaço limitado.

A equação (1.10) leva, portanto, às seguintes equações de GR:

$$t' = \frac{a_1^{m/4} - 1}{a_1^{m/4} + 1}, \quad x' = \frac{a_2^{m/4} - 1}{a_2^{m/4} + 1}, \quad \text{e} \quad y' = \frac{a_3^{m/8} - 1}{a_3^{m/8} + 1}, \quad (3.2)$$

onde definimos as funções

$$\begin{aligned} a_1 &= [\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\uparrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\downarrow)] / [\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\downarrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\uparrow)] \\ a_2 &= [\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\uparrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\uparrow)^3] / [\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\downarrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\downarrow)^3] \\ a_3 &= [\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\uparrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\uparrow\uparrow\downarrow)] / [\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\downarrow)\mathcal{W}_1^{(1)}(\downarrow\downarrow\uparrow)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

As expressões das funções de partição restritas, como funções de  $t$ ,  $x$  e  $y$ , estão explicitadas no apêndice B.

Cada uma das variáveis de GR está confinada ao intervalo  $[-1, 1]$ . No eixo  $(t, 0, 0)$  (que corresponde ao modelo de Ising usual com  $J_3 = H = 0$ ) nossa transformação de GR recupera um resultado anterior [25]. No eixo  $(0, x, 0)$  (correspondente ao modelo de Ising com interações somente entre os três spins nos vértices dos triângulos orientados para cima ( $J_2 = H = 0$ )) a transformação de GR (3.2) se torna  $t' = t$ ,  $y' = y$  e

$$x' = \frac{(1 + x^9)^m - (1 - x^9)^m}{(1 + x^9)^m + (1 - x^9)^m} \quad (3.4)$$

O eixo  $(0, 0, y)$  corresponde a um conjunto de spins não interagentes entre si sujeitos a um campo magnético e as equações (3.2) tornam-se, simplesmente,  $h' = mh$ .

Ponto Fixo $(t, x, y)$	$\nu^{(m)}$
$AF_{\uparrow}^{*(2)} (-0.603, -0.851, 0.427)$	$\nu^{(2)} \simeq 1.963$
$AF_{\downarrow}^{*(2)} (-0.603, 0.851, -0.427)$	$\nu^{(2)} \simeq 1.963$
$F_x(0, 1, 0)$	$\nu^{(m)} = \ln 4 / \ln m \quad (1 < m < 9)$
$P_1^{(9)} (0.371, 1, -0.192)$	$\nu^{(9)} \simeq 0.630$
$P_1^{(10)} (0.433, 1, -0.228)$	$\nu^{(10)} \simeq 0.6016$ (for $t > 0$ )
$P_2^{(10)} (-0.0537, 1, 0.0269)$	$\nu^{(10)} \simeq 0.6018$ (for $t < 0$ )
$P_1^{(20)} (0.767, 1, -0.467)$	$\nu^{(20)} \simeq 0.4626$ (for $t > 0$ )
$P_2^{(20)} (-0.340, 1, 0.175)$	$\nu^{(20)} \simeq 0.4629$ (for $t < 0$ )

Tabela 3.1: Expoentes críticos do comprimento de correlação  $\nu^{(m)}$  calculados nos pontos fixos relevantes (de coordenadas  $(t, x, y)$ ) para valores diferentes de  $m$ .

### 3.3 Resultados

#### 3.3.1 Diagrama de Fases Global

Inicialmente gostaríamos de frisar que, similarmente à rede triangular, a rede  $(mSG)_4$  é tripartida, ou seja, ela pode ser dividida em três subredes similares e interpenetrantes,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Os sítios de qualquer uma dessas três subredes são segundos vizinhos uns dos outros e têm vizinhos mais próximos localizados numa outra subrede. No modelo de Ising AF ( $J_2 < 0$ ), a notação para as fases  $(\alpha\beta\gamma)=(\uparrow\uparrow\downarrow)$  aqui utilizada significa que a maioria dos spins nas subredes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  estão, respectivamente, nos estados  $\uparrow$ ,  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . O conjunto de três fases AF degeneradas  $(\alpha\beta\gamma)=(\uparrow\uparrow\downarrow)$ ,  $(\alpha\beta\gamma)=(\downarrow\uparrow\uparrow)$  e  $(\alpha\beta\gamma)=(\uparrow\downarrow\uparrow)$  são referidas aqui simplesmente por  $AF_{\uparrow}$  ou  $\uparrow\uparrow\downarrow$ , enquanto que as três fases AF degeneradas  $(\alpha\beta\gamma)=(\downarrow\downarrow\uparrow)$ ,  $(\alpha\beta\gamma)=(\downarrow\uparrow\downarrow)$  e  $(\alpha\beta\gamma)=(\uparrow\downarrow\downarrow)$  são referidas simplesmente por  $AF_{\downarrow}$  ou  $\downarrow\downarrow\uparrow$ .

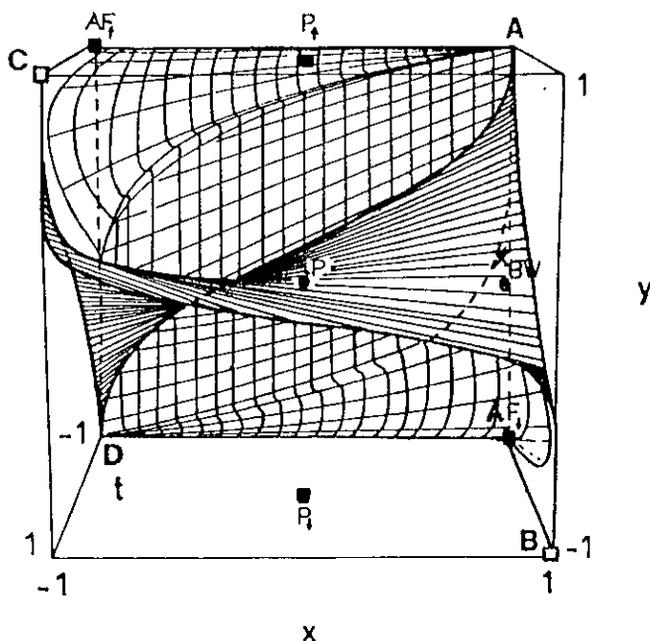


Figura 3.1: Diagrama de fases global do modelo de Ising na rede  $(mSG)_4$  para  $m = 2$ . Os quadrados cheios representam os atratores das fases  $\uparrow\uparrow\downarrow$  ( $AF_\uparrow$ ),  $\downarrow\downarrow\uparrow$  ( $AF_\downarrow$ ),  $\uparrow\uparrow\uparrow$  ( $P_\uparrow$ ) e  $\downarrow\downarrow\downarrow$  ( $P_\downarrow$ ), enquanto que  $P(0, 0, 0)$  é o atrator de quase todos os pontos da superfície ABCD. Mostramos também um dos pontos críticos de 'Baxter-Wu'  $x_{BW}$ . Os quadrados vazados simbolizam os pontos fixos especiais que são as interseções de três fases.

Vamos agora estudar a criticalidade do modelo considerado segundo nossa transformação de GR  $(t, x, y) \rightarrow (t', x', y')$  obtida das equações (3.2). Inicialmente podemos notar que, devido à simetria do Hamiltoniano (equação (1.6)) do sistema, o diagrama de fases mostrado na figura (3.1) é simétrico sob a transformação  $R: (t, x, y) \rightarrow (t, -x, -y)$ . As iterações sucessivas das equações (3.2) levam, para um valor fixo de  $m$ , a quatro pontos fixos completamente estáveis, quais sejam:  $P_\uparrow = (0, 0, 1)$  (caracterizando a fase paramagnética  $P_\uparrow$  com campo infinito positivo);  $P_\downarrow = (0, 0, -1)$  (caracterizando a fase paramagnética  $P_\downarrow$  com campo infinito negativo),  $AF_\uparrow = (-1, -1, 1)$  (correspondendo à fase antiferromagnética triplamente degenerada  $AF_\uparrow$  com a maioria das subredes com spins orientados para cima  $\uparrow\uparrow\downarrow$ ) e  $AF_\downarrow = (-1, 1, -1)$  (caracterizando a fase antiferro-



superfície crítica  $AF_1 - P_1$  (que pode ser vista com mais detalhes, para  $m = 2$ , na figura (3.2)) intercepta a superfície  $P_1 - P_1$  nos planos  $x = 1$  (ao longo da curva AB mostrada na figura (3.3)), que é a única situação onde ocorre a transição  $P_1 - AF_1$ ) e  $t = -1$  (ao longo da curva AD mostrada na figura (3.4)). As outras bordas dessa fronteira  $AF_1 - P_1$  são as linhas  $AF_1 B (t, 1, -1)$  e  $AF_1 D (-1, x, -1)$  cujos pontos fluem para o atrator  $AF_1$ . A fronteira  $AF_1 - P_1$  é similar a um cone com vértice em  $D$  e cujas seções  $x = \text{constante}$  (mostradas na figura (3.2)), para  $x$  não muito próximo de 1, são bastante estreitas e se aproximam dos pontos da curva AD tangencialmente ao plano  $t = -1$  (representado na figura (3.2) por linhas verticais paralelas ao eixo  $y$ ). Na região próxima ao atrator  $AF_1$ , a abrangência de uma seção  $x = \text{constante}$  aumenta muito rapidamente à medida em que  $x$  se aproxima de 1, sem nunca interceptar o plano  $y = -1$  (com exceção da linha  $AF_1 D$ ), até que esta toca a curva AB quando  $x = 1$ . A superfície crítica  $AF_1 - P_1$  (que pode ser obtida da superfície  $AF_1 - P_1$  pela transformação  $R$ ) intercepta a superfície  $P_1 - P_1$  nos dois planos  $x = -1$  (ao longo da curva DC obtida da transformada  $R$  da linha crítica AB da figura (3.3), que é a única situação onde a transição  $P_1 - AF_1$  existe) e  $t = -1$  (ao longo da curva AD mostrada na figura (3.4)). Essa curva no plano  $t = -1$  é, de fato, a interseção de três superfícies. Portanto, a transição  $AF_1 - AF_1$  ocorre somente nesse plano (que não é um plano invariante) ao longo da curva AD. No que concerne à superfície  $P_1 - P_1$ , além desta ser limitada pela curva AD, suas outras bordas estão nos planos invariantes  $t = 1$  (ao longo da curva BC mostrada na figura (3.5)),  $x = 1$  (ver curva AB na figura (3.3)) e  $x = -1$  (ao longo de DC). Além dessas três curvas em planos invariantes, a superfície  $P_1 - P_1$  contém outros dois espaços invariantes, quais sejam, os eixos  $t$  e  $x$ . Cada um desses cinco espaços invariantes corresponde a um modelo específico (com sua própria classe de universalidade) que decreveremos em detalhe nas próximas seções.

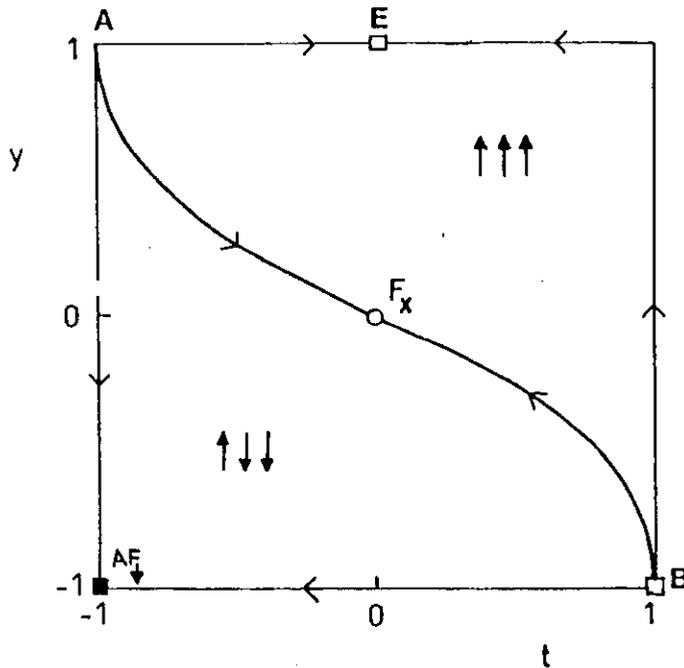


Figura 3.3: Diagrama de fases do plano invariante  $x = 1$  para qualquer valor de  $m > 1$ . A linha crítica AB separa a fase antiferromagnética  $AF_{\downarrow}$  (com atrator em  $(-1,1,-1)$ ) da fase paramagnética com campo externo infinito positivo  $P_{\uparrow}$  (com atrator em  $E(0,1,1)$ ). Como discutido no texto, os pontos da fronteira AB convergem todos para o ponto fixo  $F_x$  somente para  $m < 9$ .

Contrariamente às outras superfícies  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  e  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$ , verificamos numericamente (e também analiticamente na vizinhança dos pontos fixos  $F_t(1,0,0)$  e  $F_x(0,1,0)$ ) que a superfície  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$  não varia com a dimensão fractal  $d_f^{(m)}$  (para  $m > 1$ ). Podemos entender essa invariância da seguinte forma: a superfície  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$  não é crítica, já que todos os seus pontos (incluindo a curva AD), com exceção daqueles pertencentes aos espaços invariantes mencionados, fluem para o ponto fixo à temperatura infinita  $P$  onde o comprimento de correlação é nulo. Essa superfície desempenha o mesmo papel da linha não-crítica constituída pelos pontos paramagnéticos ( $T > T_c(d)$ ,  $H = 0$ ) do diagrama de fases do ferromagneto de Ising usual num campo magnético uniforme  $H$  em redes hipercúbicas  $d$ -dimensionais ( $d > 1$ ) ( $T_c(d)$  denota a temperatura crítica quando  $H = 0$ ). Os pontos da transição  $AF_{\uparrow} - AF_{\downarrow}$  (curva AD mostrada na figura (3.4)) devem, portanto, corresponder

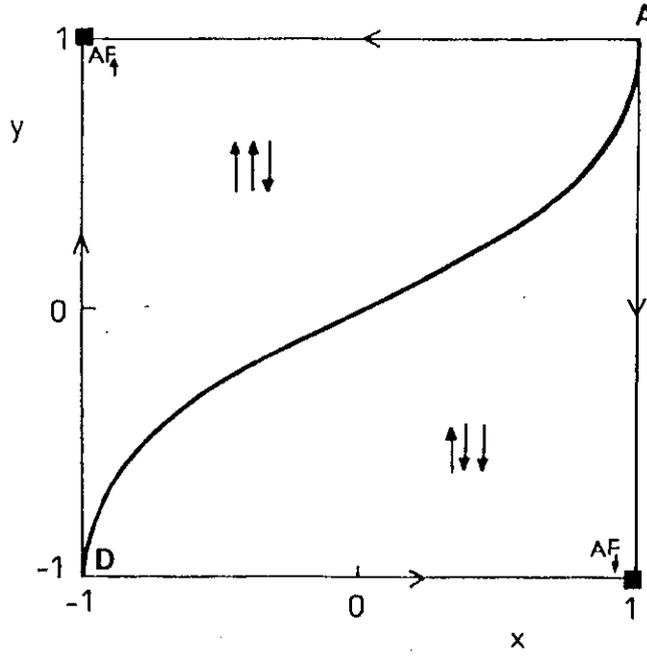


Figura 3.4: Corte do diagrama de fases no plano não invariante  $t = -1$  (para qualquer valor de  $m > 1$ ). A linha AD é a interseção de três superfícies:  $P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$ ,  $AF_{\uparrow}-P_{\uparrow}$ , e  $AF_{\downarrow}-P_{\downarrow}$ . Os quadrados cheios representam os atratores das duas fases antiferromagnéticas  $AF_{\uparrow}$  e  $AF_{\downarrow}$ . Os pontos em AD convergem para o ponto fixo  $P$  no centro da superfície  $P_{\uparrow} - P_{\downarrow}$ .

a comprimentos de correlação finitos que, sob aplicações sucessivas da transformação de GR, decrescem até se anular em  $P$ . Dessa forma, a transição  $AF_{\uparrow} - AF_{\downarrow}$  deve ser de primeira ordem.

Alguns cortes do diagrama de fases global estão ilustrados, para  $m = 2$ , na figura (3.6) (plano  $t = 0$ ), (3.7) (plano  $x = 0$ ) e (3.8) (plano  $y = 0$ ). Devido ao fato das fases  $AF_{\uparrow}$  e  $AF_{\downarrow}$  serem muito estreitas nos três casos acima, desenhamos as linhas críticas  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  e  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  fora de escala. Estes cortes contêm dois casos particulares importantes: o modelo de Ising usual (onde  $x = y = 0$ ) ao longo do eixo  $t$  e o modelo de Ising com apenas interações entre três spins em triângulos orientados para cima (onde  $t = y = 0$ ) ao longo do eixo  $x$ . Esses casos serão analisados em detalhe na próxima seção. No entanto, gostaríamos de frisar que o domínio da fase não usual de Berker e Kadanoff [29], que

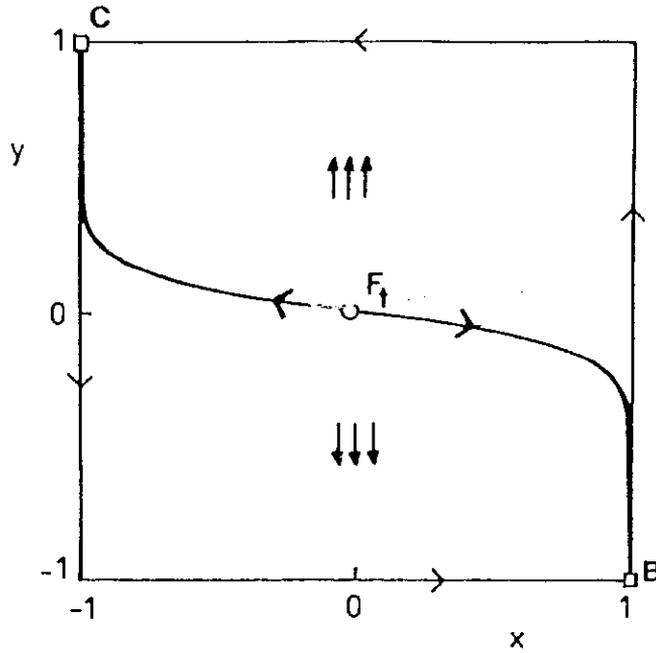


Figura 3.5: Diagrama de fases do plano invariante  $t = 1$  para qualquer valor de  $m > 1$ . A curva BC separa as fases paramagnéticas  $P_{\uparrow}$  e  $P_{\downarrow}$  (com campo externo infinito) cujos atratores são C e B.  $F_t$  é um ponto fixo de descontinuidade (transição de primeira ordem).

aparece no caso AF do modelo de Ising para dimensões fractais suficientemente grandes, está restrito apenas ao eixo  $t < 0$ . Isso significa que a aplicação de qualquer um dos campos ímpares  $H$  ou  $K_3$ , não importa o quão pequeno cada um deles possa ser, destrói essa fase. Este mesmo fato ocorre para a fase ferromagnética ao longo do eixo  $t > 0$  (como pode ser visto nas figuras (3.7) e (3.8)), de uma maneira similar ao que acontece para a rede  $(mSG)_2$  [96] (vide capítulo 2).

Cortes adicionais do diagrama de fases estão mostrados nas figuras (3.9) (plano  $t = -0,7$ ), (3.10) (plano  $x = 0,8$ ) e (3.11) (plano  $y = 0,2$ ) para diferentes valores do número de folhas  $m$ . Podemos notar que as fronteiras críticas  $P_{\uparrow} - AF_{\uparrow}$  e  $P_{\downarrow} - AF_{\downarrow}$  são muito mais sensíveis ao aumento de  $m$  nas regiões próximas dos seus respectivos atratores (ver, por exemplo, a figura (3.10), onde as transições  $P_{\uparrow} - AF_{\uparrow}$  para  $2 \leq m \leq 32$  são indistinguíveis, dentro da escala adotada).

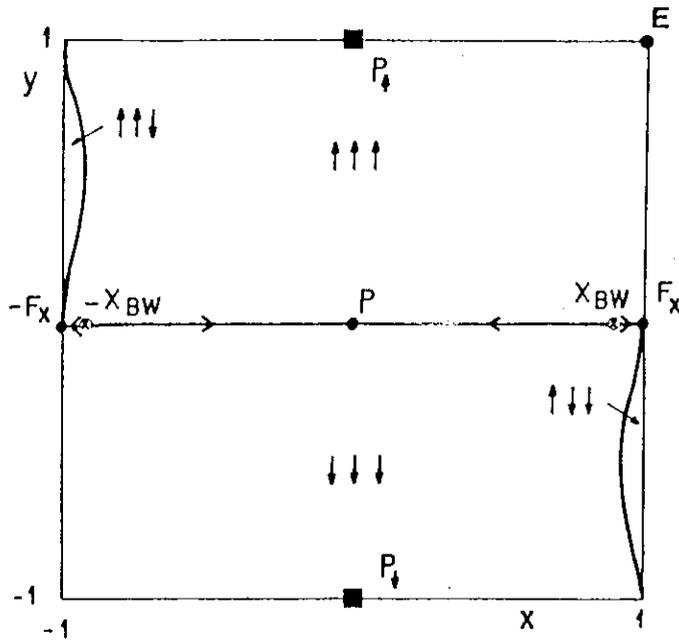


Figura 3.6: Corte do diagrama de fases global no plano  $t = 0$  para  $m = 2$ . O ponto  $x_{BW}$  ( $-x_{BW}$ ) é o ponto crítico do modelo com interações somente entre três spins que separa a fase paramagnética (com atrator em  $P$ ) da fase ordenada cujo atrator é  $F_x$  ( $-F_x$ ). Para uma melhor visualização, as fronteiras  $AF_1 - P_1$  e  $AF_1 - P_1$  (que são muito estreitas) estão desenhadas fora de escala.

### 3.3.2 Modelos nos Eixos Invariantes

O modelo de Ising usual na rede  $(mSG)_4$  corresponde ao eixo invariante  $(t, 0, 0)$  do nosso modelo. Nossa transformação de GR se reduz, nesse caso, à equação (26) da referência [25]. No caso  $m > 1$  ferromagnético,  $t > 0$  ( $K_2 > 0$ ), existe um ponto crítico instável em  $t_c^{(m)}$  que separa a fase ferromagnética (com atrator  $F_t$  em  $t = 1$ ), da fase paramagnética (com atrator  $P$  em  $t = 0$ ). Como veremos na seção (3.3.4), existe uma transição de primeira ordem no intervalo  $t_c^{(m)} < t \leq 1$ . À medida em que a dimensão fractal aumenta, a temperatura crítica  $T_c^{F(m)}$  aumenta, como é mostrado na figura (1.5b), expandindo o domínio da fase ordenada. No que concerne ao caso AF ( $t < 0$ ), o sistema é paramagnético em todas as temperaturas para valores de  $m \leq m_c$  ( $m_c \simeq 115.57$ ). Mas, para dimensões

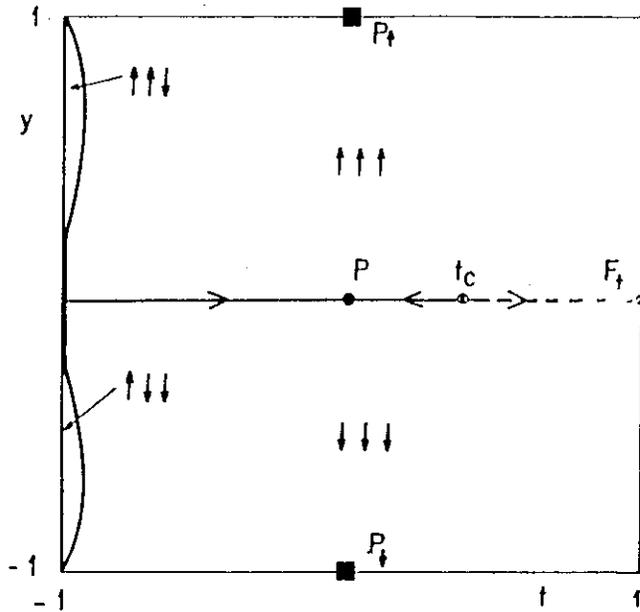


Figura 3.7: Corte  $x = 0$  do diagrama de fases global para  $m = 2$ . O eixo  $t$  corresponde ao modelo de Ising usual na rede  $(mSG)_4$ .  $t_c$  é o ponto crítico ferromagnético que separa a fase paramagnética (com atrator em  $P$ ) da fase ferromagnética (com atrator em  $F_t$ ). As fronteiras  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$ , que são de fato muito estreitas, estão desenhadas fora de escala.

fractais acima dessa dimensão crítica ( $d_{fc} \simeq 5,08$ ), surge um ponto crítico  $t_{AFc}^{(m)}$  separando a fase paramagnética da fase não usual com atrator  $t_{AF}^{(m)}$  localizado a uma temperatura não nula (ver figura (8) de [25]). Como foi demonstrado [25] anteriormente, a função de correlação ao longo dessa fase do tipo Berker e Kadanoff [29] tem um decaimento com a distância do tipo lei de potência. A variação da temperatura crítica com a dimensão fractal pode ser vista na figura (9) de [25] (por exemplo, para  $m = 140$ ,  $t_{AFc} \simeq -0,555$ , enquanto que o atrator ocorre em  $t_{AF} \simeq -0,879$ ).

O eixo invariante  $(0, x, 0)$  ( $H = K_2 = 0$ ) corresponde ao modelo com interações somente entre três spins localizados nos vértices dos triângulos orientados para cima. Um problema similar na rede triangular (mas com interações em todos os triângulos) foi resolvido exatamente por Baxter e Wu [104]. Nesse caso, nossa transformação de GR

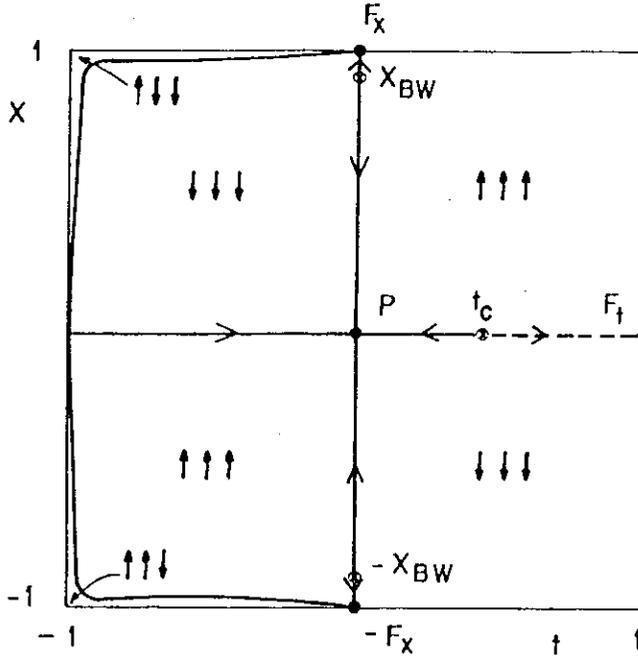


Figura 3.8: Corte  $y = 0$  do diagrama de fases global para  $m = 2$ . As fronteiras  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$  estão fora de escala.

é dada pela equação (3.4). Existe, para  $m > 1$ , um ponto crítico  $x_{BW}^{(m)}$  (BW se refere a Baxter e Wu) que separa a fase paramagnética (com atrator  $P$  em  $x = 0$ ) da fase ordenada (com atrator  $F_x$  em  $x = 1$ ). É interessante frisar que encontramos transições contínuas (como veremos na seção (3.3.4)) em  $x_{BW}^{(m)}$ , em contraste com a transição de primeira ordem (onde há, para temperaturas abaixo da temperatura crítica de BW, coexistência da fase  $P_{\uparrow}$  com as três fases AF degeneradas da forma  $AF_{\uparrow}$ ) obtida por Baxter e Wu. Devido à simetria do Hamiltoniano, no caso  $x < 0$ , existe um ponto crítico em  $-x_{BW}^{(m)}$  separando a fase paramagnética ( $x = 0$ ) da fase ordenada (com atrator  $-F_x$  em  $x = -1$ ). O comportamento da temperatura crítica  $k_B T_{BW}^{(m)} / J_3$ , à medida em que variamos a dimensão fractal, pode ser visto na figura (3.12). Para  $d_f^{(m)} \rightarrow \infty$ , a temperatura crítica se comporta assintoticamente como  $k_B T_{BW}^{(m)} / J_3 \sim 2^{d_f^{(m)}/4}$ . Esse comportamento exponencial é similar aos casos do modelo de Potts em redes hierárquicas [97] e do modelo de Ising na rede  $(mSG)_2$  (vide capítulo 2) [96], contrastando com o comportamento linear

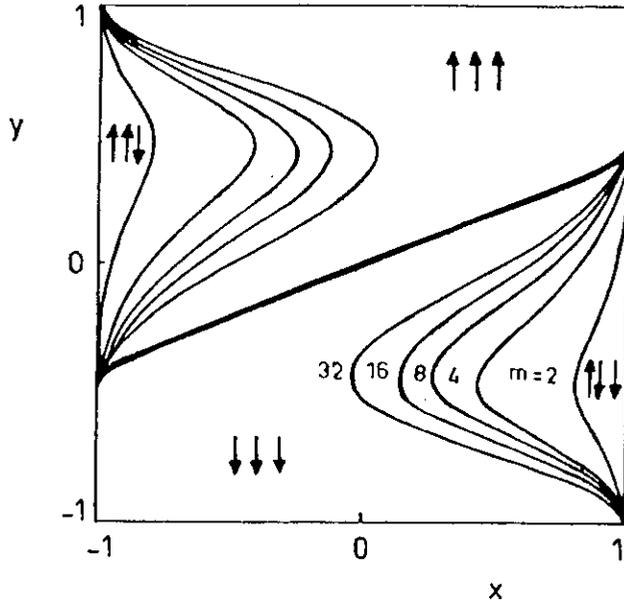


Figura 3.9: Seção  $t = \text{constante}$  do diagrama de fases global com  $t = -0,7$  para valores distintos de  $m$  ( $m = 2, 4, 8, 16$  e  $32$ ). Podemos notar que o domínio das fases antiferromagnéticas aumenta à medida em que a dimensão fractal cresce. A superfície  $P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$  não varia com a dimensão fractal.

$k_B T_c / J_2 \sim 2d$  encontrado no ferromagneto de Ising em redes hipercúbicas com dimensões  $d$  altas [98]. Nosso resultado acima, junto com o resultado obtido no capítulo anterior [96] ( $k_B T_{BW}^{(m)} / J_3 \sim 2^{d^{(m)}/2}$ ) sugerem o comportamento assintótico geral  $k_B T_{BW}^{(m)} / J_3 \sim 2^{d^{(m)}/b}$  para a temperatura crítica do modelo de Ising com interações entre tripletos na rede  $(mSG)_b$ .

O último eixo invariante,  $(0, 0, y)$  ( $K_2 = K_3 = 0$ ), que corresponde a spins independentes entre si em um campo magnético externo, é governado pela equação simples de GR  $h' = mh$ . Para  $m \neq 1$ , essa equação leva a um ponto fixo somente em  $h = 0$ , ponto esse que separa a fase  $P_{\uparrow}$  (com atrator  $P_{\uparrow}$  em  $y = 1$ ) da fase  $P_{\downarrow}$  (com atrator  $P_{\downarrow}$  em  $y = -1$ ) (ver figuras (3.6) e (3.7)).

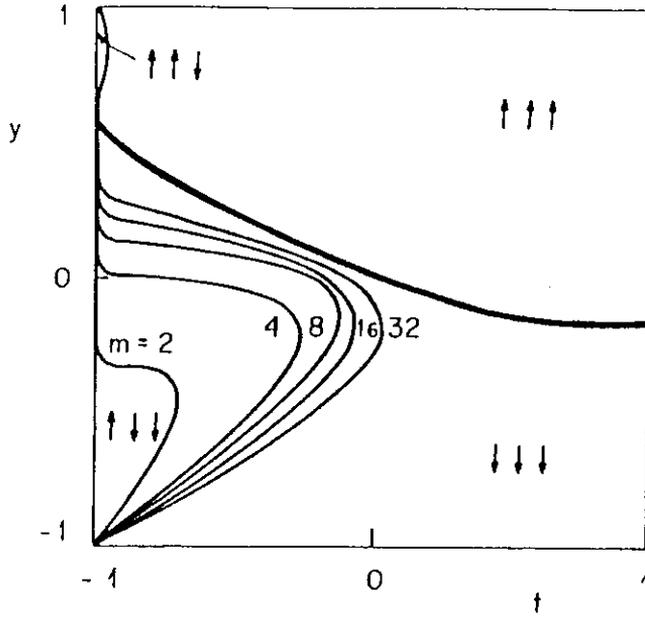


Figura 3.10: Seção  $x = \text{constante}$  do diagrama de fases com  $x = 0,8$  para diferentes valores de  $m$  ( $m = 2, 4, 8, 16$  e  $32$ ). A linha  $P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$  (linha em negrito) é invariante com  $m$ , e as linhas críticas  $P_{\uparrow}-AF_{\uparrow}$  para  $2 \leq m \leq 32$  são indistinguíveis dentro da escala aqui adotada.

### 3.3.3 Modelos nos Planos Invariantes

Nessa seção analisamos os cinco planos invariantes  $t = 1$ ,  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$ . O plano  $t = 1$  é um plano invariante onde o acoplamento  $K_2$  é infinito. Portanto, as configurações acessíveis para os spins são somente aquelas onde spins primeiros vizinhos estão na mesma direção ( $\sigma_i \sigma_j = +1$ ). Nessa condição, o Hamiltoniano se torna

$$\beta\mathcal{H} = -K_2 N_b - \sum_i (hc_i + K_3)\sigma_i \quad (3.5)$$

que é equivalente a spins independentes entre si em um campo magnético não uniforme (com uma dependência no sítio em  $c_i$ )  $\bar{h}_i = hc_i + K_3$ .  $N_b$  representa o número de ligações na rede  $(mSG)_4$ . Nossas equações de GR (3.2) conduzem, para todos os valores de  $r$  investigados, à fronteira BC mostrada na figura (3.5). Essa curva separa a fase  $P_{\uparrow}$  (com atrator em  $C = (1, -1, 1)$ ) da fase  $P_{\downarrow}$  (com atrator em  $B = (1, 1, -1)$ ). Mostraremos, na seção (3.3.4), que essa transição é de primeira ordem no ponto fixo  $F_t(1, 0, 0)$ . Como era

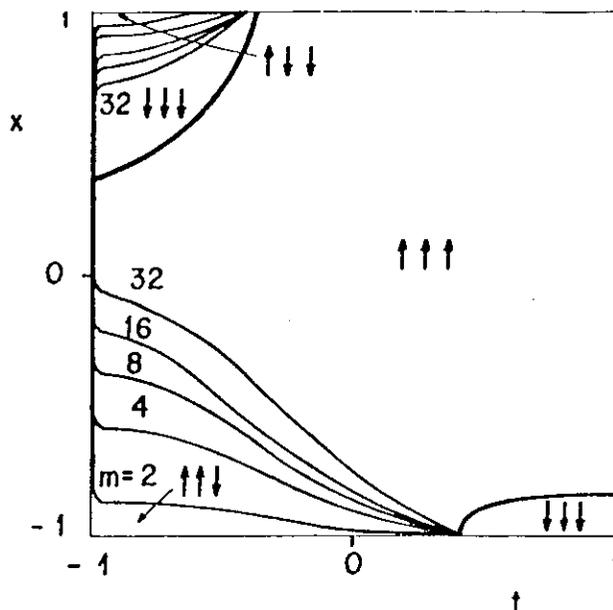


Figura 3.11: Seção  $y = \text{constante}$  do diagrama de fases com  $y = 0, 2$ . As linhas  $P_1$ - $P_1$  não variam com  $m$ . As curvas na parte superior esquerda representam as linhas críticas  $P_1$ - $AF_1$  para  $m = 2$  (a curva mais alta), 4, 8, 16 e 32 (a curva mais baixa).

esperado, para valores positivos (negativos) de  $y$  e  $x$  e portanto  $\bar{h}_i > 0$  ( $\bar{h}_i < 0$ ), a única fase possível é a  $P_1$  ( $P_1$ ). Quando os dois acoplamentos têm sinais diferentes, há uma competição entre os ordenamentos ‘para cima’ e ‘para baixo’. É interessante notar que os atratores B e C das fases estão localizados na fronteira BC que é tangente aos eixos  $x = 1$  (no ponto B) e  $x = -1$  (no ponto C). Esse comportamento não usual, onde os atratores estão localizados na fronteira entre as fases, foi também obtido para o modelo de Potts com três estados com interações entre pares e tripletos na rede  $(mSG)_4$  [25] e no modelo de Ising com interações entre pares primeiros e segundos vizinhos na rede quadrada [105].

Os planos  $x = 1$  e  $x = -1$  também são invariantes sob a transformação de GR. Devido à simetria do Hamiltoniano (ver equação (1.6)), discutiremos aqui somente o plano  $x = 1$ . Esse plano corresponde a um acoplamento  $K_3$  infinito. Portanto, as configurações acessíveis são somente aquelas onde spins nos vértices dos triângulos orientados para cima

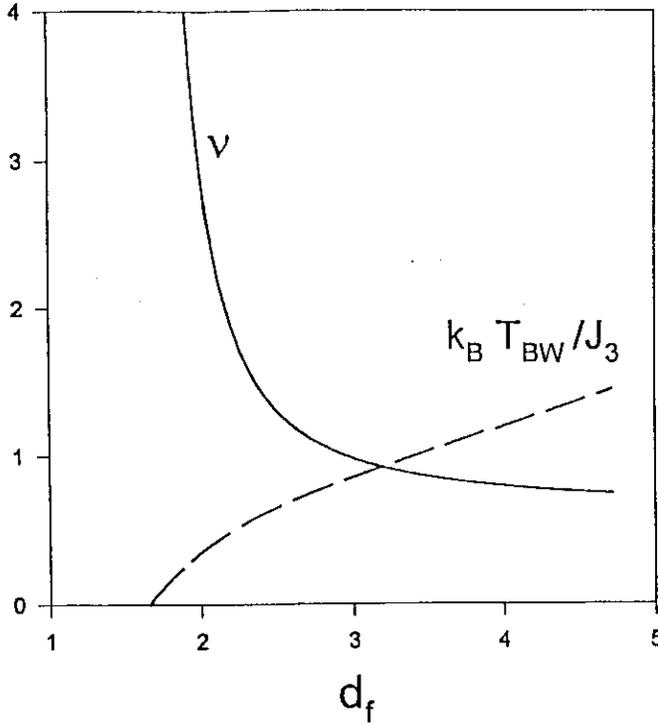


Figura 3.12: Temperatura crítica (curva tracejada) e expoente crítico  $\nu$  (linha contínua) em função da dimensão fractal  $d_f^{(m)}$  da rede ( $mSG_4$ ).

obedecem à condição  $\sigma_i \sigma_j \sigma_k = 1$  (i.e.,  $\uparrow\uparrow\uparrow$  e  $\uparrow\downarrow\downarrow$ ). O Hamiltoniano se torna

$$\beta\mathcal{H} = -K_3 N_\Delta - K_2 \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i c_i \sigma_i \quad (3.6)$$

onde  $N_\Delta$  é o número de triângulos orientados para cima na rede ( $mSG_4$ ). As configurações que aparecem nas somas em  $\langle i, j \rangle$  e em  $i$  devem obedecer também à condição  $\sigma_i \sigma_j \sigma_k = 1$ . O diagrama de fases nesse plano é mostrado na figura (3.3). Há uma fronteira crítica separando a fase  $P_\uparrow$  (com atrator em  $E=(0, 1, 1)$ ) da fase  $AF_1$  (com atrator  $AF_1$ ). Como era esperado, as únicas fases presentes são a  $P_\uparrow$  e a  $AF_1$ . Para valores positivos (negativos) de  $t$  e  $y$  há somente a fase  $P_\uparrow$  ( $AF_1$ ), já que nessa região não existe competição entre as diferentes tendências de ordenamento. Como iremos mostrar na próxima seção, o ponto fixo  $F_x$  muda de estabilidade quando o número de folhas  $m$  atinge o valor  $m = 9$ . Para  $m < 9$ , todos os pontos na fronteira crítica convergem para o ponto fixo  $F_x$ . Para  $m = 9$ , surge um ponto fixo  $P_1^{(9)}$  sobre a fronteira crítica para o qual convergem todos os pontos

dessa fronteira com  $t > 0$ , os outros pontos convergem para o ponto fixo marginal  $F_x$ . Para  $m > 9$ , surge um ponto fixo adicional  $P_2^{(m)}$  sobre a fronteira crítica que atrai todos os pontos dessa linha com  $t < 0$ ; os pontos com  $t > 0$  convergem para  $P_1^{(m)}$ .

No plano invariante  $y = 1$ , que corresponde a um modelo com campo magnético positivo infinito, os únicos pontos fixos são os atratores  $P_\uparrow$  e  $AF_\uparrow$ , bem como os pontos  $E(0, 1, 1)$  e  $C(1, -1, 1)$ . As linhas  $x = -1$  e  $t = -1$  pertencem à fronteira crítica da fase  $P_\uparrow$  e todos os seus pontos, com exceção do ponto fixo  $C$ , convergem para o atrator  $AF_\uparrow$ . Todos os outros pontos desse plano, exceto  $E$ , são atraídos para o ponto  $P_\uparrow$ . Portanto, a fronteira crítica no plano  $y = 1$  se reduz às duas linhas de borda  $x = -1$  e  $t = 1$ . A discussão do plano  $y = -1$ , devido à simetria do Hamiltoniano, é similar a do plano  $y = 1$ .

### 3.3.4 Autovalores e Expoentes Críticos

Os expoentes críticos do comprimento de correlação  $\nu^{(m)}$  podem ser obtidos dos autovalores relevantes  $\lambda_l^{(m)} > 1$  ( $l = 1, 2$  ou  $3$ ) da matriz Jacobiana  $J^{(m)} \equiv \partial(t', x', y')/\partial(t, x, y)$  nos pontos fixos instáveis através da expressão:

$$\nu_l^{(m)} = \frac{\ln b}{\ln \lambda_l^{(m)}} \quad (\text{onde } \lambda_l > 1) \quad , \quad (3.7)$$

onde  $b$  é o fator de expansão linear ( $b = 4$ ). A variação de  $\nu$  com a dimensão fractal no modelo de Ising usual ( $K_3 = H = 0$ ) pode ser vista em [25] (figura (13)) para as duas transições, para-ferromagnética e a do tipo Berker e Kadanoff. No caso do modelo de Ising com interações nos tripletos ( $K_2 = H = 0$ ), o gráfico de  $\nu$  versus  $d_f^{(m)}$  é mostrado na figura (3.12). É interessante frisar que, neste caso,  $\nu$  diverge quando  $m \rightarrow 1$  da seguinte forma:

$$\nu \sim \left[ d_f^{(m)} - d_f^{(1)} \right]^{-1} \quad (m \rightarrow 1) \quad , \quad (3.8)$$

que coincide com o comportamento assintótico obtido no caso  $K_3 = H = 0$  [25], e que é similar aos resultados encontrados para o ferromagneto de Potts em redes hipercúbicas [106] e redes hierárquicas do tipo Migdal-Kadanoff [97].

Outros valores do expoente  $\nu^{(m)}$  para a transição para-ferromagnética nos dois casos, o caso geral e o caso limite  $K_3 \rightarrow \infty$ , estão mostrados na tabela (3.1) para alguns valores de  $m$ . Note que, devido à simetria do Hamiltoniano (equação (1.6)), as duas transições,  $AF_{\downarrow} - P_{\downarrow}$  e  $AF_{\uparrow} - P_{\uparrow}$ , estão, para um valor fixo de  $m$ , na mesma classe de universalidade.

No ponto fixo  $F_x$  encontramos os seguintes autovalores:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = m/9$  e  $\lambda_3 = m$ , que provoca, para  $m \geq 9$ , uma mudança na estabilidade de  $F_x$ . A classe de universalidade da transição  $P_{\uparrow} - AF_{\downarrow}$  no plano invariante  $x = 1$  descrito na seção (3.3.3) é controlada por: i)  $F_x$  para  $m < 9$ ; ii)  $P_1^{(9)}$  quando  $t > 0$  e  $F_x$  quando  $t \leq 0$ , para  $m = 9$ ; iii)  $P_1^{(m)}$  quando  $t > 0$  e  $P_2^{(m)}$  quando  $t < 0$ , ambos para  $m > 9$ .

No que concerne ao modelo de Ising usual (onde  $K_3 = H = 0$ ), o segmento linear ( $t_c^{(m)} < t \leq 1$ ) ligando o ponto crítico ferromagnético  $t_c^{(m)}$  ao ponto fixo com acoplamentos fortes  $F_t(1, 0, 0)$  (ver a linha tracejada nas figuras (3.7) e (3.8)) é, para todo  $m > 1$ , uma linha de transição de primeira ordem pois (considerando uma generalização para fractais do argumento de Nienhuis e Nauenberg [107, 108]) o maior autovalor em  $F_t$ ,  $\lambda = 10m = b^{d_f^{(m)}}$ , reproduz a dimensão fractal  $d_f^{(m)}$  do sistema. Uma linha de coexistência similar entre as fases  $P_{\uparrow}$  e  $P_{\downarrow}$  aparece no modelo de Ising na rede triangular (ver, por exemplo, [109]).

## **CAPÍTULO 4**

### **Ferromagneto de Ising em Redes**

### **Hierárquicas do tipo Diamante: Verificação**

### **Analítica da Lei de Hiperescala**

#### **4.1 Introdução**

Nesse capítulo retornamos à questão da validade das leis de escala para expoentes críticos em sistemas fractais, que abordamos no capítulo (2) para o modelo de Ising definido em uma família de redes fractais com topologia similar à da rede triangular. Apenas para lembrar, nossa abordagem naqueles sistemas partiu da determinação das funções termodinâmicas para em seguida, através da análise dos comportamentos dessas funções

na vizinhança da temperatura crítica, determinar numericamente os expoentes críticos do sistema e finalmente verificar a validade de algumas leis de escala para esses expoentes.

No trabalho que vamos relatar em seguida, vamos usar um método diferente para a determinação dos expoentes críticos que foi introduzido por Morgado et al [23]. Nessa abordagem vamos mostrar que a lei de hiperescala para o modelo de Ising em toda a família de RHs do tipo Diamante pode ser verificada analiticamente, sem a necessidade de nenhum cálculo numérico intermediário [110]. Como vamos nos restringir ao modelo de Ising na ausência de campo magnético externo, nos limitaremos a verificar a validade da lei de hiperescala.

Esse capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção (4.2) definimos o modelo que estudamos e o método empregado na determinação dos expoentes críticos. Na seção (4.3) derivamos relações de recorrência para a energia interna do sistema em diferentes hierarquias da rede e a transformação de GR para a constante de acoplamento ferromagnético. A seção (4.4) consta da verificação analítica da lei de hiperescala.

## 4.2 Modelo

Vamos considerar o ferromagneto de Ising a campo nulo na família de redes hierárquicas do tipo diamante (às quais nos referiremos simplesmente como RHD). No capítulo 1 vimos que essas redes são geradas por um processo iterativo que parte de uma única ligação conectando dois sítios ( $n = 0$ ) que é substituída pela célula básica constituída de  $P$  ramos em paralelo, cada um dos quais é constituído de  $b$  ligações em série. O nível, ou hierarquia,  $n$  é obtido do nível anterior pela substituição de cada uma das ligações pela célula básica. Os primeiros passos desse processo recursivo estão ilustrados na figura (4.1) para os casos ( $P = 2, b = 2$ ) (a RH diamante) e ( $P = 2, b = 3$ ).

No limite  $n \rightarrow \infty$  obtemos uma rede, que denotaremos por  $\text{RHD}_{(P,b)}$ , com dimensão

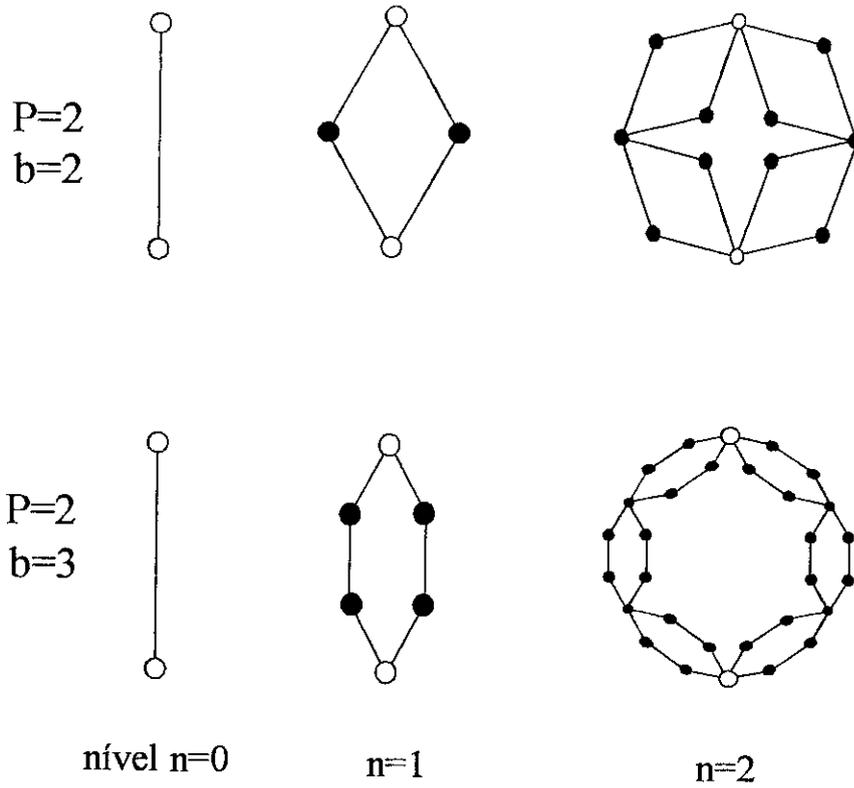


Figura 4.1: Primeiros três passos de construção das redes  $RHD_{(P=2, b=2)}$  e  $RHD_{(P=2, b=3)}$ . Os círculos vazados são as raízes das redes hierárquicas.

fractal dada por:

$$d_f(P, b) = \frac{\ln(Pb)}{\ln b} \quad (4.1)$$

Nos cálculos que se seguem, os parâmetros  $P \geq 2$  e  $b \geq 2$  estão fixos.

A cada vértice  $i$  da rede  $\text{RHD}_{(P,b)}$  no nível  $n$  vamos associar uma variável de spin de Ising  $\sigma_i = \pm 1$ , e vamos considerar o modelo descrito pelo Hamiltoniano adimensional (que é o caso particular  $K_3 = h = 0$  da equação (1.5))

$$-\beta\mathcal{H}_n = K_n \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad , \quad (4.2)$$

onde  $K_n = \beta J_n$  e  $J_n > 0$  é a constante de acoplamento entre pares de spins primeiros vizinhos no nível  $n$ . A soma é sobre todos os pares primeiros vizinhos  $\langle i, j \rangle$  da rede no nível  $n$ . Relembramos que a função de partição do sistema no nível  $n$  é definida por

$$Z_n = \sum_{\{\sigma\}} \exp \left( K_n \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \right) \quad . \quad (4.3)$$

Se realizarmos um traço parcial sobre todos os spins da rede no nível  $n$ , com exceção daqueles pertencentes a uma célula básica particular (ver a figura (4.2)), essa função de partição será expressa como um traço sobre os spins restantes (aqueles que pertencem à célula básica isolada) com um Hamiltoniano equivalente  $\mathcal{H}_E$  que tem a forma mais geral dada por (para a RH mostrada na figura (4.2)):

$$\mathcal{H}_E = C + K_n(\mu_1\sigma + \mu_1\sigma' + \mu_2\sigma + \mu_2\sigma') + K_E\mu_1\mu_2 + H_1\mu_1 + H_2\mu_2 \quad , \quad (4.4)$$

onde  $C$ ,  $K_E$ ,  $H_1$  e  $H_2$  são funções desconhecidas, em princípio, da constante de acoplamento  $K_n$ . A célula básica escolhida está conectada ao resto da rede pelos spins  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .  $\sigma$  e  $\sigma'$  são os spins internos à célula básica que aparecem apenas no nível  $n$  da rede. Os campos ( $H_1$  e  $H_2$ ) e o acoplamento ( $K_E$ ) efetivos são devidos à influência do resto da rede sobre os spins externos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

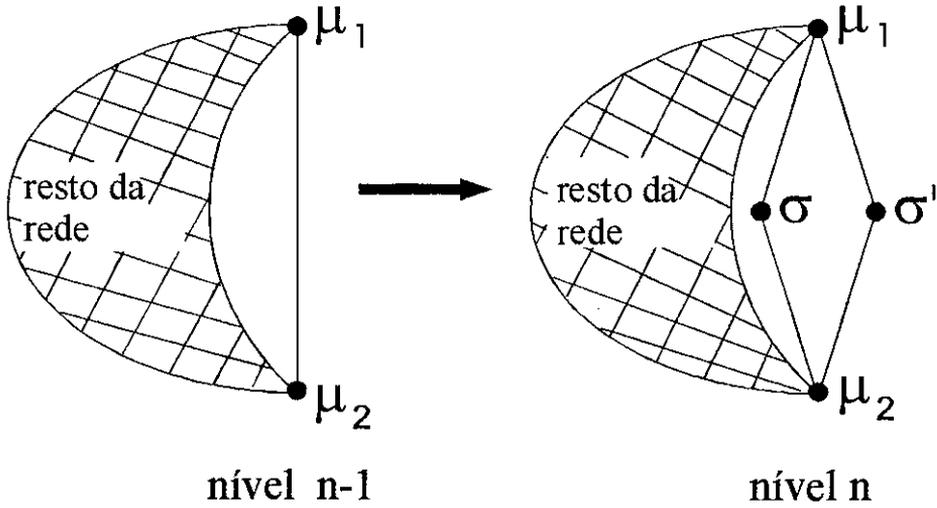


Figura 4.2: Ilustração do mecanismo de construção do Hamiltoniano efetivo. No nível  $n$ , cada ligação da rede no nível  $n - 1$  é substituída pela célula básica (com  $P = 2$  e  $b = 2$  nessa figura). As médias envolvendo os spins que apareceram apenas no nível  $n$  ( $\sigma$  e  $\sigma'$ ) estão relacionadas com as médias envolvendo os spins do nível anterior ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ) através do sistema de equações derivado do Hamiltoniano efetivo exibido no texto.

Esse método do Hamiltoniano efetivo foi usado para calcular exatamente magnetizações locais, várias grandezas termodinâmicas e expoentes críticos do modelo de Ising em RHs [23, 24], do ferromagneto de Potts com  $q$  estados em algumas RHs do tipo diamante [27], do antiferromagneto de Potts com  $q = 3$  numa família de RHs do tipo diamante ( $b = 3$  e  $P \geq 2$ ) [26] e de vidros de spin [24].

Na próxima seção vamos usar esse Hamiltoniano efetivo para calcular a relação entre as energias internas do sistema em níveis diferentes da RHD.

### 4.3 Relações de Recorrência

A energia interna adimensional (em módulo) por ligação para o sistema no nível  $n$  é dada por:

$$E_n = \frac{\langle \mathcal{H}_n \rangle}{-J_n N_{(P,b)_n}} = \langle \mu \sigma \rangle, \quad (4.5)$$

onde  $N_{(P,b)n}$  é o número de ligações e  $\mu$  e  $\sigma$  são quaisquer dois spins primeiros vizinhos na rede  $\text{RHD}_{(P,b)}$  no nível  $n$ .

Usando o Hamiltoniano dado pela equação (4.4) (e suas generalizações para outras redes com diferentes parâmetros  $b$  e  $P$ ), podemos calcular as quantidades relacionadas aos spins  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , que podem ser formalmente expressas como:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_n = f_1(K_n, K_E, H_1, H_2, C) \\ Z_n < \mu_1 \mu_2 > = f_2(K_n, K_E, H_1, H_2, C) \\ Z_n < \mu_1 > = f_3(K_n, K_E, H_1, H_2, C) \\ Z_n < \mu_2 > = f_4(K_n, K_E, H_1, H_2, C) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Para o caso mais simples,  $b = 2$ , por exemplo, obtemos as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_n = e^C (e^{-H_1-H_2+2K_n+K_E} + e^{-H_1-H_2-2K_n+K_E} + 2e^{-H_1+H_2-K_E} + \\ 2e^{H_1-H_2-K_E} + e^{H_1+H_2-2K_n+K_E} + e^{H_1+H_2+2K_n+K_E}) \\ Z_n < \mu_1 \mu_2 > = e^C (e^{-H_1-H_2+2K_n+K_E} + e^{-H_1-H_2-2K_n+K_E} - 2e^{-H_1+H_2-K_E} - \\ 2e^{H_1-H_2-K_E} + e^{H_1+H_2-2K_n+K_E} + e^{H_1+H_2+2K_n+K_E}) \\ Z_n < \mu_1 > = e^C (-e^{-H_1-H_2+2K_n+K_E} - e^{-H_1-H_2-2K_n+K_E} - 2e^{-H_1+H_2-K_E} + \\ 2e^{H_1-H_2-K_E} + e^{H_1+H_2-2K_n+K_E} + e^{H_1+H_2+2K_n+K_E}) \\ Z_n < \mu_2 > = e^C (-e^{-H_1-H_2+2K_n+K_E} - e^{-H_1-H_2-2K_n+K_E} + 2e^{-H_1+H_2-K_E} - \\ 2e^{H_1-H_2-K_E} + e^{H_1+H_2-2K_n+K_E} + e^{H_1+H_2+2K_n+K_E}) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Podemos também calcular médias envolvendo os spins pertencentes ao último nível  $n$ , em particular:

$$Z_n < \sigma_1 \sigma_2 > = g_1(K_n, K_E, H_1, H_2, C) \quad , \quad (4.8)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são spins primeiros vizinhos na rede  $\text{HL}_{(P,b)}$ , e portanto, da equação (4.5),  $< \sigma_1 \sigma_2 > = E_n$ . Para o caso  $b = 2$ , por exemplo, obtemos

$$Z_n < \sigma_1 \sigma_2 > = e^{C+K_E} (e^{-H_1-H_2+2K_n} - e^{-H_1-H_2-2K_n} + e^{H_1+H_2+2K_n}) \quad (4.9)$$

Invertendo o sistema de equações dado por (4.6), obtemos os parâmetros  $C$ ,  $K_E$ ,  $H_1$  e  $H_2$  como funções das médias envolvendo os spins  $\mu$  da hierarquia  $n - 1$ . Para o caso  $b = 2$ , por exemplo, obtemos:

$$e^{H_1} = \frac{1}{e^K} \left( \frac{(e^{4K} + 1)(-\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle + \langle \mu_1 \mu_2 \rangle - 1)}{2(\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle - 1)} \right)^{1/2} e^{K_E}, \quad (4.10)$$

$$e^{H_2} = \frac{1}{e^K} \left( \frac{(e^{4K} + 1)(\langle \mu_1 \rangle - \langle \mu_2 \rangle + \langle \mu_1 \mu_2 \rangle - 1)}{2(\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle - \langle \mu_1 \mu_2 \rangle - 1)} \right)^{1/2} e^{K_E}, \quad (4.11)$$

$$e^{K_E} = \left( \frac{4e^{4K}((\langle \mu_1 \rangle + \langle \mu_2 \rangle)^2 - (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle + 1)^2)}{(e^{8K} + 2e^{4K} + 1)((\langle \mu_1 \rangle - \langle \mu_2 \rangle)^2 - (\langle \mu_1 \mu_2 \rangle - 1)^2)} \right)^{1/4}. \quad (4.12)$$

Note que não é necessário calcular  $C$ , já que, na prática, dividimos as equações (4.6) e (4.8) por  $Z_n$ .

As soluções de (4.6) podem ser substituídos nas equações (4.8) para obtermos relações de recorrência para a energia adimensional  $E_n$ . Essa recorrência pode ser formalmente expressa como:

$$E_n^{(b)} = \frac{A_n^{(b)}}{B_n^{(b)}} E_{n-1}^{(b)} + \frac{C_n^{(b)}}{B_n^{(b)}}, \quad (4.13)$$

onde  $A_n^{(b)}$ ,  $B_n^{(b)}$  e  $C_n^{(b)}$ , que dependem da rede  $HL_{(P,b)}$  particular que utilizamos através do parâmetro  $b$  (o parâmetro  $P$  não aparece devido à equivalência entre os ramos em paralelo na célula básica), são funções do acoplamento  $K_n$ . Dessa forma, se fixarmos a energia do sistema na hierarquia 0 (uma única ligação), é imediato o cálculo da energia nas hierarquias subsequentes através da iteração da equação (4.13). As expressões explícitas das funções  $A_n^{(b)}$ ,  $B_n^{(b)}$  e  $C_n^{(b)}$  podem ser facilmente obtidas através do uso de computação

algébrica. Obtivemos:

$$A^{(b)} = (x^4 - 1)^{b-1} \quad \text{para } b = 2, 3, \dots$$

$$C^{(b)} = (x^4 - 1)B^{(b-1)} \quad \text{para } b = 2, 3, \dots$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{(1)} = 1 \\ B^{(2)} = 2(x^4 + 1) = [(x^2 + 1)^4 - (x^2 - 1)^4]/4x^2 \\ B^{(3)} = (x^4 + 3)(3x^4 + 1) = [(x^2 + 1)^6 - (x^2 - 1)^6]/4x^2 \\ B^{(4)} = 4(x^4 + 1)(x^8 + 6x^4 + 1) = [(x^2 + 1)^8 - (x^2 - 1)^8]/4x^2 \\ B^{(5)} = (x^8 + 10x^4 + 5)(5x^8 + 10x^4 + 1) = [(x^2 + 1)^{10} - (x^2 - 1)^{10}]/4x^2 \\ B^{(6)} = 2(x^4 + 3)(x^4 + 1)(3x^4 + 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) \\ \quad = [(x^2 + 1)^{12} - (x^2 - 1)^{12}]/4x^2 \\ \dots \\ B^{(10)} = 2(x^4 + 1)(5x^8 + 10x^4 + 1)(x^8 + 10x^4 + 5)(x^{16} + 44x^{12} + 166x^8 + 44x^4 + 1) \\ \quad = [(x^2 + 1)^{20} - (x^2 - 1)^{20}]/4x^2 \\ \dots \end{array} \right. \quad (4.14)$$

onde definimos a variável  $x \equiv e^K$ . As expressões acima para  $A^{(b)}$  e  $C^{(b)}$ , bem como a expressão geral

$$B^{(b)}(x) = \frac{1}{4x^2} \{ (x^2 + 1)^{2b} - (x^2 - 1)^{2b} \} \quad , \quad (4.15)$$

para a função  $B^{(b)}$ , foram verificadas para valores do parâmetro  $b$  até  $b = 15$ . Portanto, levando-se em conta que a estrutura das equações (4.6) se mantém sempre a mesma, qualquer que seja o valor de  $b$ , alterando-se apenas o número de termos nos polinômios em  $x$  nelas contidas, admitiremos que essas expressões para  $A^{(b)}$ ,  $B^{(b)}$  e  $C^{(b)}$  são válidas para todos os valores de  $b$ .

Para completarmos nossas equações de recorrência, precisamos da renormalização da

constante de acoplamento adimensional  $K_{n-1} = K'$  (ou, equivalentemente  $x_{n-1} = x'$ ) em termos da constante de acoplamento  $K_n = K$  (ou  $x_n = x$ ). Essa recorrência é estabelecida de uma maneira usual, através da preservação da função de correlação entre as raízes da RH, que pode ser obtida através do cálculo explícito do traço parcial  $\text{Tr}'$  sobre os spins internos da célula básica da rede  $\text{HL}_{(P,b)}$  da seguinte forma:

$$\text{Tr}' \exp \mathcal{H}_1(K) = \exp(\mathcal{C} + \mathcal{H}_0(K')) \quad , \quad (4.16)$$

onde  $\mathcal{H}_1$  é o Hamiltoniano da célula básica (nível  $n = 1$ ),  $\mathcal{H}_0$  é o Hamiltoniano de uma única ligação (nível  $n = 0$ ) e  $\mathcal{C}$  é uma constante. Obtivemos então

$$x'(x) = \left( \frac{1 + U(x)^b}{1 - U(x)^b} \right)^{P/2} \quad \text{onde} \quad U(x) \equiv \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad . \quad (4.17)$$

Para  $b = 2$  nossa transformação de GR resulta em  $K' = P \ln \sqrt{\cosh(2K)}$  como na referência [22]. A equação (4.17) admite, para todo  $P \geq 2$  e  $b \geq 2$ , dois pontos fixos estáveis triviais, quais sejam,  $x = 1$  ( $T \rightarrow \infty$ ) (fase paramagnética) e  $x \rightarrow \infty$  ( $T = 0$ ) (fase ferromagnética), bem como um ponto fixo crítico (instável) que denotaremos por  $x_{(P,b)}^*$  ( $0 < x_{(P,b)}^* < \infty$ ). Conforme já vimos nos capítulos anteriores, o expoente crítico  $\nu_{(P,b)}$  do comprimento de correlação é calculado através da linearização da equação de GR (4.17) na vizinhança do ponto crítico  $x_{(P,b)}^*$ :

$$\nu_{(P,b)} = \frac{\ln b}{\ln r_{(P,b)}} \quad \text{onde} \quad r_{(P,b)} \equiv \left. \frac{dx'(x)}{dx} \right|_{x_{(P,b)}^*} \quad . \quad (4.18)$$

#### 4.4 A Lei de Hiperescala

Com as relações de recorrência obtidas acima, a lei de hiperescala (eq. (2.56)) pode ser provada analiticamente para o ferromagneto de Ising em todo o conjunto de redes fractais  $\text{RHD}_{(P,b)}$ . Inicialmente, assumindo que na vizinhança da temperatura crítica  $T_{c(P,b)}$  (ou  $x_{(P,b)}^*$ ) a energia  $E_n$  pode ser escrita como  $E_n = E_c + \lambda(\epsilon_n)^\sigma$ , onde  $E_c = E(x_{(P,b)}^*)$  e

$\epsilon_n = (x_{(P,b)}^* - x_n)$ , obtemos, da equação (4.13), a seguinte expressão para o expoente  $\sigma$ :

$$\sigma_{(P,b)} = \frac{\ln(B^{(b)}(x)/A^{(b)}(x)) \Big|_{x_{(P,b)}^*}}{\ln r_{(P,b)}} \quad (4.19)$$

Como o calor específico está relacionado com a primeira derivada da energia interna em relação à temperatura, segue-se que  $\alpha_{(P,b)} = 1 - \sigma_{(P,b)}$ .

Usando as expressões das equações (4.1), (4.18) e (4.19) verificamos que para que a lei de hiperescala seja válida é preciso que:

$$bP = r_{(P,b)} \frac{B^{(b)}}{A^{(b)}} \Big|_{x_{(P,b)}^*} \quad (4.20)$$

que, após algumas simplificações, se reduz à seguinte igualdade para o ferromagneto de Ising nas redes RHD $_{(P,b)}$ :

$$\frac{1}{4} = \frac{x_c^2}{(x_c^4 - 1)} \frac{1}{(U_c^{-b} - U_c^b)} \frac{B^{(b)}}{A^{(b)}} \Big|_{x_c} \quad (4.21)$$

onde  $x_c \equiv x_{(P,b)}^*$ ,  $U$  está definido em (4.17), e  $U_c = U(x_c)$ . Utilizando as expressões de  $A^{(b)}$ ,  $B^{(b)}$  e  $C^{(b)}$  (eqs. (4.14) e (4.15)) verificamos que a igualdade acima é satisfeita analiticamente para todas as redes RHD $_{(P,b)}$  e, em particular para aquelas que testamos explicitamente ( $2 \leq b \leq 15$ ).

Apenas para ilustrar, no caso mais simples ( $b = 2$ ), por exemplo, segue-se das equações (4.14) que

$$\frac{B^{(2)}}{A^{(2)}} \Big|_{x_c} = \frac{2(x_c^4 + 1)}{x_c^4 - 1} \quad , \quad (4.22)$$

enquanto que

$$\frac{1}{(U_c^{-2} - U_c^2)} = \frac{1}{8} \frac{(x_c^4 - 1)^2}{x_c^2(x_c^4 + 1)} \quad , \quad (4.23)$$

e portanto

$$\frac{B^{(2)}}{A^{(2)}} \frac{1}{(U_c^{-2} - U_c^2)} = \frac{1}{4} \frac{x_c^4 - 1}{x_c^2} \quad , \quad (4.24)$$

que, sem o auxílio de nenhum cálculo numérico, fornece o resultado que queríamos demonstrar.

## CAPÍTULO 5

# O Método de Propagação de Danos

Uma questão central na teoria dos sistemas dinâmicos é o quanto uma trajetória no espaço de fase depende das condições iniciais. Numa simulação Monte Carlo, por exemplo, o estado de um sistema segue uma trajetória no espaço de fase, através de aplicações sucessivas da dinâmica utilizada no método Monte Carlo, até atingir um estado de equilíbrio, onde as configurações microscópicas são visitadas com probabilidades proporcionais aos seus pesos de Boltzmann. Se considerarmos o mesmo sistema, evoluindo com a mesma dinâmica, mas partindo de uma condição inicial um pouco diferente, a nova trajetória será pouco ou muito diferente da trajetória original? Objetivando abordar essa questão, Stuart Kauffman [111] introduziu o conceito de propagação de danos no contexto de sistemas dinâmicos com motivação biológica. Mais especificamente, Kauffman modelava os

genes e suas mutações através de seqüências de bits que evoluíam segundo regras simples, do tipo autômato celular. Seu interesse consistia justamente em estudar a influência de pequenas mutações (danos) sobre a evolução temporal desses genes.

De forma a tornar preciso o conceito de proximidade ou não entre trajetórias no espaço de fase, devemos definir uma distância nesse espaço. Kauffman considerou a distância, ou dano (ou ainda distância de Hamming), num tempo  $t$ , como sendo simplesmente a fração de bits diferentes em duas seqüências binárias  $\{\sigma_i^{(A)}(t)\}$  e  $\{\sigma_i^{(B)}(t)\}$ , ou seja:

$$\text{Distância}(t) = D(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N | \sigma_i^{(A)}(t) - \sigma_i^{(B)}(t) | \quad , \quad (5.1)$$

onde  $N$  é o tamanho das seqüências. Se considerarmos que a seqüência  $\{\sigma_i^{(A)}(t)\}$  representa um gene 'normal', enquanto que a seqüência  $\{\sigma_i^{(B)}(t)\}$  representa esse mesmo gene após sofrer uma mutação (um dano) e estudarmos suas evoluções temporais, medindo a distância  $D(t)$ , poderemos responder à pergunta que fizemos no início desse capítulo. Se, para uma determinada faixa de parâmetros do sistema, essas duas configurações, que evoluem no tempo, seguem trajetórias próximas no espaço de fase que finalmente coalescem, o sistema é dito estar numa fase congelada ( $D(t) \rightarrow 0$ ). Por outro lado, se as duas configurações se mantêm afastadas uma da outra indefinidamente, o sistema é dito estar numa fase ativa ( $D(t) > 0 \neq 0$ ). Caso esse afastamento das trajetórias seja observado mesmo para um dano inicial  $D(0)$  muito pequeno (apenas um bit ( $D(0) = 1/N$ )), podemos dizer que o sistema se encontra numa fase caótica.

Na metade dos anos 80, esse conceito de propagação de danos foi incorporado à física [112, 31, 32], especificamente ao estudo de sistemas magnéticos de spins. A evolução temporal dos modelos para esses sistemas físicos não obedece regras determinísticas, como era o caso do autômato de Kauffman, por isso, essa extensão do método de propagação de danos não é imediata. De fato, as evoluções desses sistemas envolvem um ruído térmico que é obtido computacionalmente através de uma seqüência de números aleatórios que

toma parte no processo de decisão da evolução temporal de cada spin. De forma a manter a idéia original do método de propagação de danos (qual seja, manter a regra de evolução inalterada, mudando-se apenas a condição inicial) foi proposto que as evoluções das duas configurações (réplicas) que estão sendo comparadas deveriam ser acopladas através do uso da mesma seqüência de números aleatórios [31], ou seja, as duas réplicas do sistema devem estar submetidas ao mesmo ruído térmico.

Stanley et al [31] aplicaram o método de propagação de danos ao ferromagneto de Ising na rede quadrada. Inicialmente eles deixaram o sistema de  $N$  spins evoluir até o equilíbrio seguindo uma dinâmica de Glauber em uma simulação Monte Carlo. Uma vez atingido o equilíbrio, eles criaram uma réplica do sistema e ‘fliparam’ o spin no centro dessa réplica ( $D(0) = 1/N$ ). Daí em diante as duas réplicas evoluíram seguindo a mesma dinâmica e a mesma seqüência de números aleatórios. Na figura (5.1) mostramos a fração  $\psi$  de sítios diferentes (danificados) nas duas réplicas (equação (5.1)) obtida em [31] em função da temperatura do sistema. Nessa figura o dano  $\psi$  é uma média sobre várias simulações independentes. Pode-se observar que existe uma temperatura  $T_d$  que coincide, dentro da faixa de erro, com a temperatura crítica estática do modelo  $T_c(d = 2)$ , onde o dano se anula (essa temperatura é chamada de temperatura de transição de dano). Abaixo dessa temperatura o  $\psi$  é nulo (fase congelada) e acima de  $T_d$  este cresce com a temperatura  $T$  (fase caótica) até tender assintoticamente à reta  $\psi = 0,5$ .

A dependência dos resultados obtidos através do método de propagação de danos com a dinâmica particular que se usa para simular um sistema físico ficou evidenciada com os trabalhos que se seguiram sobre o modelo de Ising usando a dinâmica de banho térmico. Wang et al [34], por exemplo, obtiveram valores de dano não nulos somente abaixo da temperatura crítica  $T_d \simeq T_c(d = 3)$  do modelo de Ising na rede cúbica. Eles estudaram a propagação de danos partindo de duas condições iniciais diferentes: (a)  $D(0) = 1$  (uma

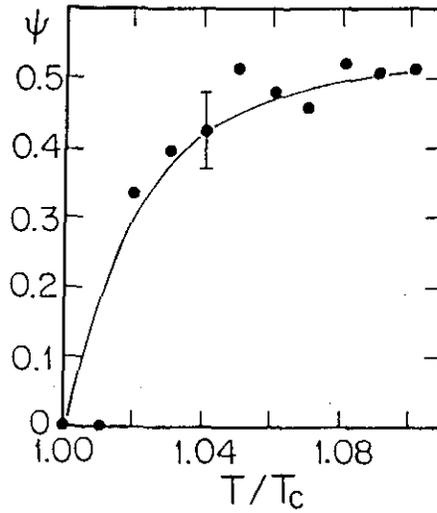


Figura 5.1: Dano médio  $\psi$  em função da temperatura para o modelo de Ising em  $d = 2$  simulado pela dinâmica Monte Carlo de Glauber.

réplica preenchida aleatoriamente e a outra réplica com os spins invertidos em relação à primeira) e (b)  $D(0) = 0,5$  (as duas réplicas aleatórias e independentes entre si). O valor médio (sobre todas as amostras simuladas) do dano  $\langle D(t) \rangle$  em função da temperatura obtido em [34] está mostrado na figura (5.2).

Com base nesses resultados, os autores indicam a existência de duas fases dinâmicas distintas para o ferromagneto de Ising em  $d = 3$ . Uma fase onde o dano médio  $\langle D(t = 500) \rangle$  se anula rapidamente para todas as temperaturas  $T > T_d \simeq T_c(d = 3) = 4,48 \pm 0,05$ , e uma fase a baixas temperaturas onde o dano no tempo  $t = 500$  se mantém não nulo e depende do dano inicial ( $T < T_d$ ).

Essa discrepância entre os resultados obtidos em [31] e [34] para a natureza da fase a baixas temperaturas do modelo de Ising, se congelada ou caótica, tem sua origem na diferença entre as dinâmicas utilizadas para simular o sistema. A razão principal da diferença entre os resultados para as diferentes dinâmicas, de Glauber e banho térmico, decorre das definições das probabilidades de transição. Mais especificamente, na dinâmica de banho térmico para o modelo de Ising o estado do spin  $\sigma_i$  no tempo  $t + 1$  é deter-

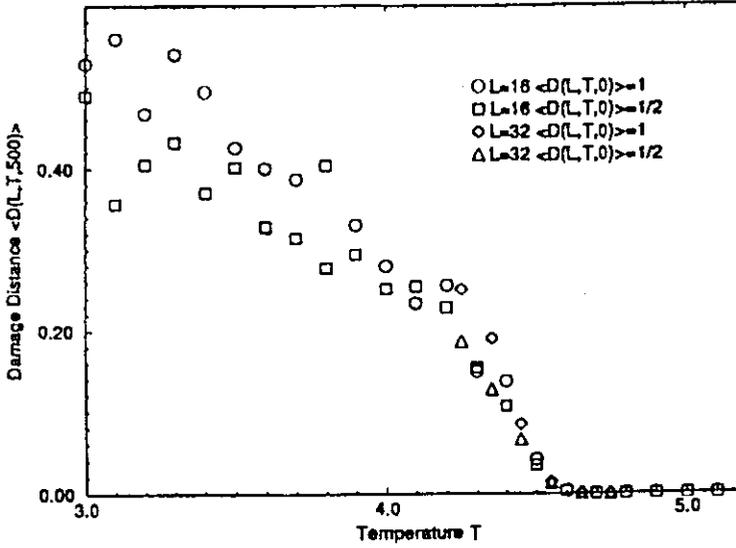


Figura 5.2: Dano médio (em  $t = 500$ ) para o modelo de Ising em  $d = 3$  em função da temperatura para diferentes condições iniciais e diferentes lados  $L$  da rede.

minado através da comparação de um número aleatório  $z$  com a probabilidade  $P_i^{(\sigma=1)} = \{1 + \exp[-2J \sum_j \sigma_j(t)/k_B T]\}^{-1}$  de que o spin evolua para o estado 1 (a soma em  $P_i$  é sobre os spins  $\sigma_j$  primeiros vizinhos de  $\sigma_i$ ). Por outro lado, na dinâmica de Glauber, esse número aleatório deve ser comparado com a probabilidade  $P_i^{(FLIP)} = \{1 + \exp[2J\sigma_i(t) \sum_j \sigma_j(t)/k_B T]\}^{-1}$  de que o estado de spin no tempo  $t$  venha a ser alterado em  $t + 1$ . Portanto, dependendo do valor do spin  $\sigma_i$  no tempo  $t$ , o número aleatório  $z$  será comparado com limiares que podem ser diferentes nas duas dinâmicas. Em particular, para  $T \rightarrow \infty$ , onde obtemos  $P_i = P_i^{(FLIP)} = 1/2$ , se considerarmos que os spins  $\sigma_i^{(A)}$  da réplica  $A$  e  $\sigma_i^{(B)}$  da réplica  $B$  estão no tempo  $t$  em estados diferentes (e portanto o dano local nesse sítio vale 1), vemos que no tempo  $t + 1$  ambos os spins irão para o mesmo estado na dinâmica de banho térmico (e portanto o dano se anula), enquanto que na dinâmica de Glauber estes serão conjuntamente invertidos ou não, mantendo o dano do tempo  $t$  intacto.

O resultado obtido através da dinâmica de banho térmico para o ferromagneto de Ising pode ser facilmente entendido em termos da estrutura do espaço de fase desse mo-

delo. Abaixo de  $T_c$  o espaço de fase consiste de dois vales distintos com a mesma energia, um com magnetização positiva e outro com magnetização negativa. Duas configurações microscópicas que partem (em  $t = 0$ ) longe uma da outra nesse espaço irão se manter confinadas em vales diferentes e, portanto, separadas por um longo tempo. Se o dano inicial for muito pequeno, as duas configurações já partirão no mesmo vale e o dano se anulará rapidamente. Por outro lado, na fase paramagnética ( $T > T_c$ ) só existe um vale e as duas configurações irão sempre se encontrar no espaço de fase, tornando o dano nulo nessa fase. De fato, utilizando-se a dinâmica de banho térmico com condições iniciais convenientes, os mesmos números aleatórios para as duas réplicas e aplicando-se campos magnéticos  $H$  de mesma intensidade mas opostos nas duas réplicas, pode-se demonstrar analiticamente que, quando  $H \rightarrow 0$ , o dano médio coincide com a magnetização espontânea do modelo de Ising [36] e que, portanto,  $T_d = T_c$ . Embora essa igualdade entre a temperatura estática e a temperatura de transição de dano não possa ser demonstrada analiticamente para os modelos de Potts [42], Ashkin-Teller [42] e  $N$ -vetorial discreto [113], foi possível estabelecer relações exatas entre alguns tipos de danos e propriedades térmicas relevantes desses modelos.

Além do ferromagneto de Ising [31-36,45], o método de propagação de danos tem sido utilizado para se investigar uma grande variedade de sistemas como, por exemplo, autômatos celulares [30], modelo XY ferromagnético [37, 38], modelo de Heisenberg [39], modelo de Potts [40, 41, 42], modelo ANNNI [43], relógio com  $p$  estados [44], modelo  $N$ -vetorial discreto [113], modelo de Ashkin-Teller [42], vidros de spin [32, 45, 46, 47], um modelo de evolução de espécies [53], jogos de imitação [52], fogo em florestas [51] e sistema imunológico [50]. Além de sua grande variedade de aplicações, a técnica de propagação de danos tem recebido um interesse renovado devido ao fato de que a temperatura de transição de dano parece estar correlacionada com sua correspondente temperatura de

transição de percolação de agregados geométricos de spins correlacionados (veja [48, 114, 115, 116] e compare os resultados de [117] e [37]).

Em sistemas com um nível de complexidade mais alto, como o modelo ANNNI em  $d = 2$  [43], o ferromagneto XY [37] e o modelo relógio com  $p$  estados ( $5 \leq p \leq 10$ ) [44] foram encontradas mais do que duas fases dinâmicas, das quais, algumas não possuem equivalente estático claramente identificável. No modelo ANNNI em  $d = 2$  [43] com a dinâmica banho térmico, por exemplo, foram obtidas três fases (para um valor suficientemente alto da constante de acoplamento entre segundos vizinhos): uma a altas temperaturas onde o dano se anula, uma a temperaturas intermediárias onde o dano nunca se anula mas seu valor assintótico é independente do dano inicial, e uma fase a baixas temperaturas onde o valor assintótico do dano apresenta efeito de memória, i.e., depende do dano inicial. Essas fases foram identificadas, respectivamente, com os regimes paramagnético, flutuante incomensurável e comensurável (antifase), e o domínio (no diagrama de fases) observado [43] para a fase dinâmica flutuante foi bem maior do que o domínio estático atribuído a essa mesma fase. Essa mesma estrutura de fases foi obtida para o modelo XY em  $d = 2$  (com a dinâmica Metropolis) [37] para o qual (como também ocorre no vidro de spin  $\pm J$  em  $d = 3$  [32, 46]) a transição mais baixa é consistente com a sua equivalente estática e a transição mais alta está próxima da transição de percolação de agregados geométricos de spins correlacionados [117, 37, 116, 114].

Para o caso do modelo relógio com  $p = 10$  estados [44] na rede quadrada, simulado através da dinâmica banho térmico, o dano definido por

$$D(t) = \frac{1}{2L^2} \sum_i [1 - \cos(\theta_i - \theta'_i)] \quad (5.2)$$

onde  $\theta_i$  é a orientação no plano do spin  $\vec{s}_i$  na réplica A do sistema ( $\theta'_i$  idem na réplica B) e a soma em  $i$  é sobre os  $L^2$  sítios da rede, resulta, após uma média sobre as amostras simuladas para as quais  $D(t) \neq 0$  no tempo  $t$ , no comportamento mostrado na figura

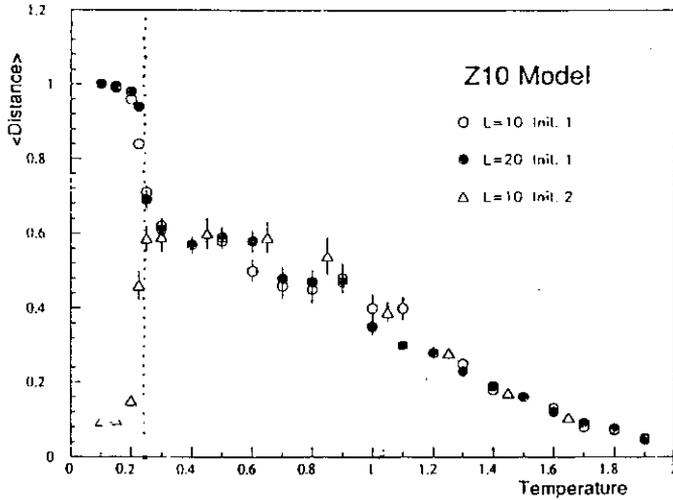


Figura 5.3: Dano médio  $\langle d \rangle$  para o modelo do relógio com  $p = 10$  estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico.

(5.3). Denotaremos essa média do dano feita somente entre as réplicas sobreviventes por  $\langle d(t) \rangle$ . Nessa figura são mostradas duas condições iniciais diferentes: (1)  $D(0) = 1$  com as duas réplicas ordenadas e opostas uma à outra; (2)  $D(0) = 1/2$  com as duas réplicas ordenadas e ortogonais entre si. Na figura (5.4) mostramos a probabilidade (de sobrevivência) no tempo  $t$ ,  $P(t)$ , de que, após um tempo  $t$ , as duas réplicas do sistema ainda estejam em configurações microscópicas diferentes (já que quando duas configurações se tornam idênticas em um tempo  $t$ , essas se mantêm idênticas para todos os tempos posteriores):

$$P(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_1(t)}{M}, \quad (5.3)$$

onde  $M_1(t)$  é o número de amostras, de um total de  $M$  amostras simuladas, para as quais, no tempo  $t$ , as duas réplicas do sistema são ainda diferentes. Na figura (5.5) mostramos a flutuação do dano  $\sigma_d(t)$  definida por:

$$\sigma_d(t) = \sqrt{\langle d^2(t) \rangle - \langle d(t) \rangle^2}. \quad (5.4)$$

Com base nesses resultados os autores [44] identificam quatro fases dinâmicas distintas para o modelo relógio com  $p = 10$  estados: (i) uma fase a baixas temperaturas  $T <$

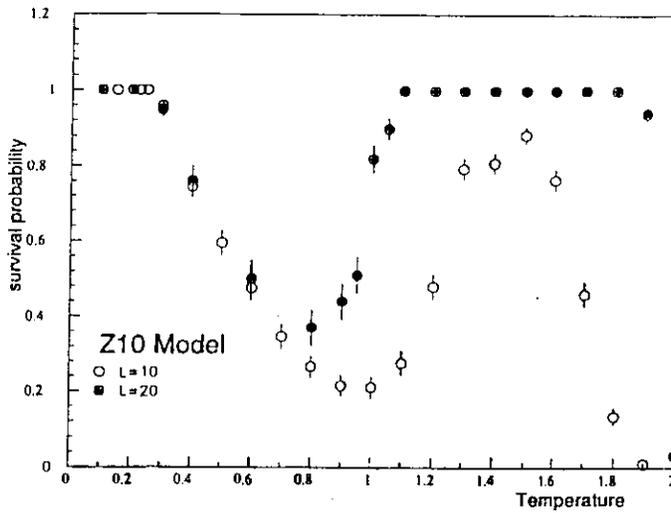


Figura 5.4: Probabilidade de sobrevivência  $P(t)$  para o modelo do relógio com  $p = 10$  estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico (com  $D(0) = 1$ ).

$T_3 \simeq 0,24$  (identificada com a fase ferromagnética estática) onde  $\langle d(t) \rangle$  é não nulo e dependente da condição inicial,  $P(t) = 1$  e  $\sigma_D(t)$  é pequeno; (ii) uma fase intermediária a baixas temperaturas ( $T_3 \leq T \leq T_2 \simeq 1,05$ ) onde  $\langle d(t) \rangle$  é não nulo e independente de  $D(0)$ ,  $P(t)$  é pequena e as flutuações do dano são altas (identificada com a fase de equilíbrio de ondas de spin); (iii) uma segunda fase intermediária ( $T_2 \leq T \leq T_1 \simeq 2,0$ ) que difere da primeira pela probabilidade  $P(t)$  próxima de 1 e baixas flutuações (uma fase puramente dinâmica sem equivalente estático) e (iv) uma fase a altas temperaturas (identificada com a fase paramagnética estática) ( $T > T_1$ ) onde  $\langle d(t) \rangle = P(t) = \sigma_d(t) = 0$ .

Mais recentemente, mostrou-se que essa estrutura contendo mais de duas fases não é exclusividade de sistemas com ingredientes complexos, estando também presente no ferromagneto de Potts com três estados na rede quadrada [40] (que é o caso particular de campo quiral nulo do modelo de Potts quiral que estudaremos no próximo capítulo). Além das transições consistentes com as de equilíbrio, também foi obtida [40] para esse modelo, com a dinâmica de banho térmico, uma nova fase dinâmica caótica com características não usuais. Os resultados de Bibiano et al [41] de propagação de danos com a dinâmica

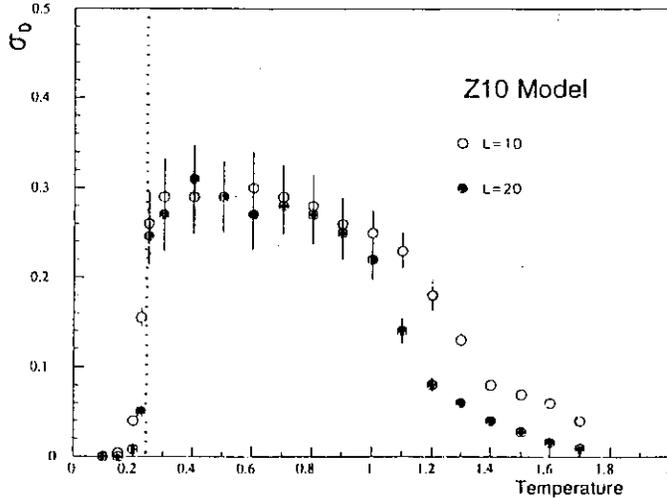


Figura 5.5: Flutuação do dano  $\sigma_d(t)$  para o modelo do relógio com  $p = 10$  estados na rede quadrada e com dinâmica banho térmico (com  $D(0) = 1$ ).

de Glauber conduzem também a três fases para esse sistema.

O Hamiltoniano do modelo de Potts com três estados é dado por

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(\sigma_i, \sigma_j) \quad , \quad (5.5)$$

com  $\sigma_i = 0, 1$  ou  $2$ ,  $K = J/k_B T$ , e a soma é realizada sobre todos os pares de spins primeiros vizinhos na rede e  $\delta(\cdot)$  é a função delta de Kronecker. Da Silva et al [40] simularam esse sistema em redes quadradas usando o seguinte algoritmo de banho térmico:

- i) Determina-se as diferenças de energia  $\Delta E_i^{\alpha\gamma} = E_i^\gamma - E_i^\alpha$  para mudar o spin  $\sigma_i(t)$  do estado  $\alpha$  para o estado  $\gamma$  ( $\alpha, \gamma = 0, 1, 2$ ).

- ii) Calcula-se as probabilidades  $p_i^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, 2$ ) para  $\sigma_i(t+1)$  assumir o estado  $\alpha$ , quais sejam:

$$p_i^{(\alpha)} = \left[ 1 + \exp(-\beta\Delta E_i^{\alpha\gamma}) + \exp(-\beta\Delta E_i^{\alpha\delta}) \right]^{-1} \quad (\gamma, \delta \neq \alpha) \quad (5.6)$$

- iii) Sorteia-se um número pseudo-aleatório uniforme  $z(t) \in [0, 1]$  e faz-se  $\sigma_i(t+1) = 0, 1$  ou  $2$  nos respectivos casos  $z(t) \leq p_i^{(0)}$ ,  $p_i^{(0)} < z(t) \leq p_i^{(0)} + p_i^{(1)}$  e  $p_i^{(0)} + p_i^{(1)} < z(t) \leq 1$ .

Na figura (5.6) exibimos a probabilidade de sobrevivência obtida por Da Silva et al [40] em função da temperatura. Na figura (5.7) exibimos o dano médio (sobre todas as

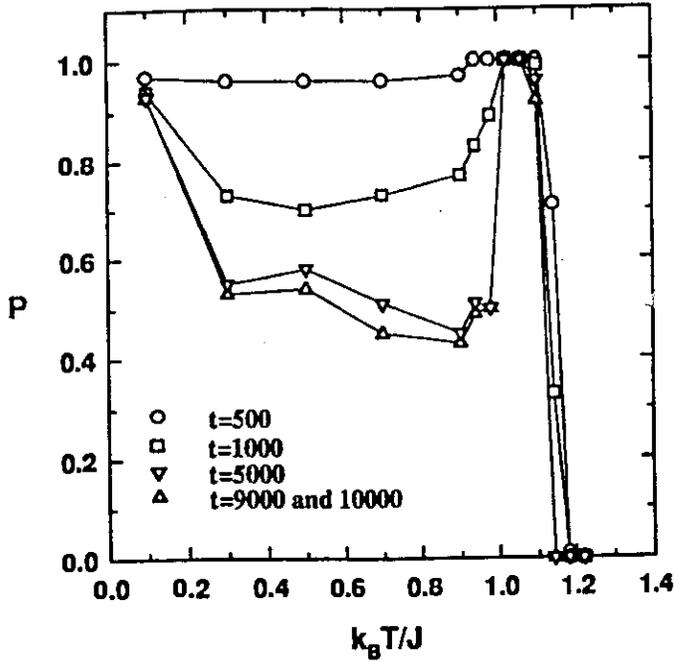


Figura 5.6: Probabilidade de sobrevivência  $P(t)$  para o ferromagneto de Potts com  $q = 3$  estados na rede quadrada com lado  $L = 64$  para diferentes tempos de simulação.

amostras simuladas)  $\langle D(t = 10000) \rangle$  em função da temperatura obtida em [40] para três condições iniciais diferentes (ver legenda da figura). A distância de Hamming  $D(t)$  entre as réplicas do sistema foi definida, nesse caso, por:

$$D(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{1 - \delta(\sigma_i^{(A)}, \sigma_i^{(B)})\} \quad , \quad (5.7)$$

onde a soma é sobre os  $N$  spins  $\sigma_i^{(A)}$  ( $\sigma_i^{(B)}$ ) da réplica A (B). Para realizar médias de  $D(t)$  sobre as flutuações térmicas, as simulações foram repetidas para  $M$  amostras e o dano médio  $\langle D(t) \rangle$  foi definido como:

$$\langle D(t) \rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} D_m(t) \quad , \quad (5.8)$$

onde  $D_m(t)$  é a distância de Hamming no tempo  $t$  para a amostra particular  $m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ).

Os autores [40] estudaram também o comportamento do dano médio  $\langle d(t) \rangle$  definido como a média de  $D(t)$  somente sobre aquelas amostras que sobreviveram no tempo  $t$ , ou

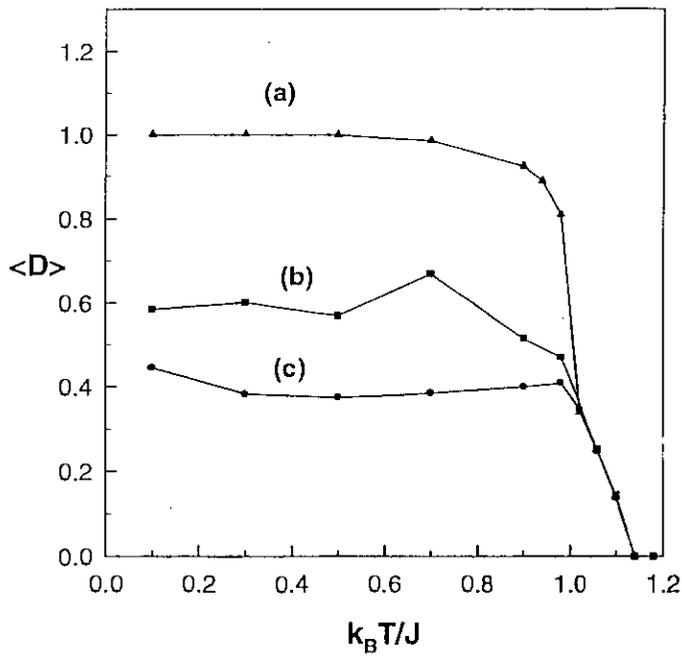


Figura 5.7: Dano médio  $\langle D(t) \rangle$  para o ferromagneto de Potts com  $q = 3$  estados na rede quadrada para três condições iniciais diferentes: (a)  $D(0) = 1$  (com ambas configurações ordenadas), (b)  $D(0) = 1/2$  (ambas desordenadas onde 50% dos spins de uma réplica estão em estados distintos dos da outra réplica) e (c)  $D(0) = 0,05$  (desordenadas).

seja:

$$\langle D(t) \rangle = \langle d(t) \rangle P(t) \quad (5.9)$$

Um gráfico das evoluções temporais dos danos médios  $\langle D(t) \rangle$  e  $\langle d(t) \rangle$ , e da probabilidade  $P(t)$ , para a temperatura  $T = 0,90$  (com a condição inicial (b) (ver legenda da figura (5.7)) nas linhas descontínuas e condição inicial (a) na linha cheia) é mostrado na figura (5.8).

As fases encontradas por Da Silva et al [40] foram: fase ferromagnética (F) (para  $T < T_2 = 0,99 \pm 0,01$ ) que apresenta efeitos de memória ( $\langle D(t) \rangle$  é dependente das condições iniciais); fase paramagnética (P) (para  $T \geq T_1 = T_d = 1,135 \pm 0,003$ ) (onde  $\langle D(t) \rangle = 0$  para todas as condições iniciais), e uma fase intermediária ( $T_2 \leq T < T_1$ ) onde o dano não é nulo mas independe das condições iniciais. Essa estimativa para a

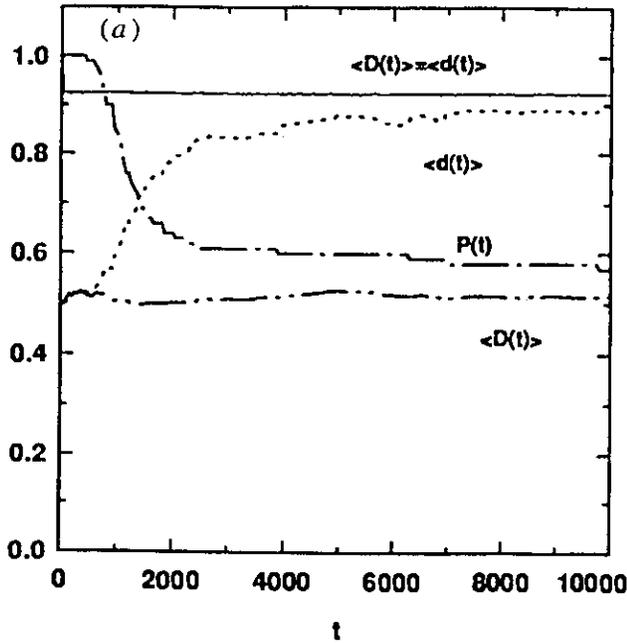


Figura 5.8: Danos médios  $\langle D(t) \rangle$  e  $\langle d(t) \rangle$  e a probabilidade de sobrevivência  $P(t)$  em função do tempo na temperatura  $T = 0,90$  com condições iniciais diferentes: condição (a) na linha cheia e condição (b) nas outras linhas (ver legenda da fig. (5.7)).

temperatura  $T_2$  está bastante próxima da temperatura crítica exata do ferromagneto de Potts com três estados ( $T_c = 0,9949\dots$ ) em equilíbrio térmico. Mostrou-se [40] que a fase intermediária é completamente caótica no sentido de que, mesmo que duas configurações sejam infinitesimalmente próximas em  $t = 0$ , essas irão sempre se tornar separadas por uma distância finita, levando a  $P(t) = 1$  para qualquer dano inicial não nulo  $D(t = 0)$ . Essa nova fase com propriedades não usuais foi denominada ‘fase dinâmica caótica’ (DC). Sua fronteira superior  $T_1$  está, surpreendentemente, muito próxima da temperatura crítica estática do modelo de Ising na rede quadrada ( $T_c = 1,1345\dots$ ). Além disso, o expoente crítico dinâmico  $\delta$  ( $\langle D(t) \rangle \sim t^{-\delta}$ ) obtido por da Silva et al [40] nessa temperatura foi  $\delta = 0,46 \pm 0,03$ , valor esse que é compatível com a transição de percolação direcionada em dimensão  $2 + 1$ , de acordo com uma conjectura de Grassberger [118].

Note na figura (5.8) que o dano médio  $\langle d(t) \rangle$  converge para tempos longos para o

mesmo valor, independentemente da condição inicial, e, por isso, não é conveniente usá-lo para distinguir a fase ferromagnética ( $T < T_2$ ) da fase intermediária ( $T_2 \leq T < T_1$ ), ou seja, se os autores [40] tivessem usado somente o dano  $\langle d(t) \rangle$  para estudar o sistema, teriam obtido  $T_2 = 0$ .

Da Silva et al [40] mencionam que a flutuação do dano  $\sigma_D$  é quase nula (no caso de condições iniciais (a) onde  $D(0) = 1$ ) no regime de baixas temperaturas, exceto perto da transição  $T_2$  onde apresenta um pico, e que na fase dinâmica caótica  $\sigma_D$  é relativamente pequeno. Estes autores estudaram também a influência do campo conjugado ao dano perto da temperatura de transição de dano do modelo. Conforme já havia sido exibido [119] para o modelo de Ising tridimensional, o campo magnético, apesar de ser o campo conjugado da magnetização, não é o campo conjugado à distância de Hamming, já que um campo magnético infinitesimal não destrói a transição dinâmica acusada pelo dano. Tsallis e Martins [57] mostraram, para o autômato celular de Domany-Kinzel, que podiam definir um campo  $h$  conjugado ao dano como sendo *a frequência na qual os números aleatórios que fazem a atualização das duas réplicas do sistema são escolhidos diferentes um do outro*. Estes autores mostraram evidências de que esse campo  $h$  desempenha o papel de campo conjugado ao dano, ou seja, na presença de  $h \neq 0$ , o dano é não nulo para todas as temperaturas (desaparece a transição de dano) e a suscetibilidade  $\chi_D$ , definida por:

$$\chi_D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \langle D \rangle}{\partial h} \quad (5.10)$$

diverge na temperatura de transição de dano  $T_D$ . Esse comportamento para  $\chi_D$  no autômato de Domany-Kinzel também foi previsto através de uma análise de campo médio [120].

Essas mesmas propriedades foram obtidas, via simulações Monte Carlo tipo banho térmico, para o ferromagneto de Ising na rede quadrada [121]. Na figura (5.9) mostramos a suscetibilidade  $\chi_D$  em função da temperatura para esse modelo obtida em [121]. Os

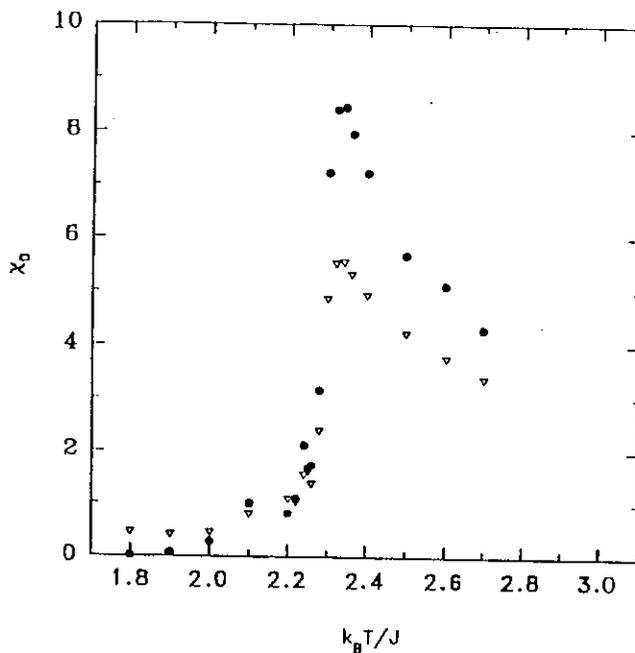


Figura 5.9: Suscetibilidade  $\chi_D$  para o modelo de Ising na rede quadrada ( $L = 64$ ) para dois valores do campo conjugado  $h$ :  $h = 0,03$  ( $\bullet$ ) e  $h = 0,05$  ( $\Delta$ ).

autores sugerem uma divergência de  $\chi_D$ , quando  $h \rightarrow 0$ , na temperatura crítica dinâmica  $k_B T_d/J \simeq 2,26$  que está próxima da temperatura crítica estática  $T_c(d = 2)$  do modelo de Ising (note que essa temperatura contém um fator 2 em relação ao comentário que fizemos anteriormente sobre os resultados de [40] devido às diferentes definições do Hamiltoniano do sistema).

De maneira análoga, Da Silva et al mostraram [40], para o modelo de Potts com três estados na rede quadrada, que um pequeno valor do campo conjugado  $h$  é suficiente para destruir a transição de dano contínua em  $T_D = T_1$ . Verificaram também que a suscetibilidade  $\chi_D$  em  $T_D$  cresce à medida que o campo  $h$  diminui, sugerindo uma divergência nessa temperatura crítica.

## **CAPÍTULO 6**

# **Transições Dinâmicas no Modelo de Potts Quiral com Três Estados na Rede Quadrada obtidas através da Propagação de Danos com Dinâmica de Banho Térmico**

### **6.1 Introdução**

Desde que estruturas espacialmente moduladas foram observadas em materiais ferroelétricos e magnéticos, no final da década de 50 e início da década de 60 [122], tem havido um grande interesse no estudo de modelos estatísticos que poderiam exibir tais modulações.

Basicamente, dois modelos têm sido estudados: o modelo de Ising anisotrópico com interações até segundos vizinhos (ANNNI) e o modelo de Potts quiral (também conhecido como relógio assimétrico, relógio quiral ou Potts helicoidal) de  $q$  estados. Os dois modelos contêm diferentes interações que competem entre si e permitem o surgimento de estruturas espacialmente moduladas. No modelo de Potts quiral anisotrópico a competição ocorre entre as interações ferromagnéticas e quirais (ou helicoidais) ao longo de um determinado eixo da rede. Esse modelo pode servir, em duas dimensões, como um protótipo para a fusão de uma fase comensurável adsorvida [123] e uma de suas realizações experimentais é a dissociação de hidrogênio em Fe(110) [124].

O modelo de Potts quiral com  $q$  estados em duas dimensões foi estudado através de uma variedade de técnicas, incluindo a análise de férmions livres [54], teoria de campo médio [125, 126], análise de paredes de domínios combinada com idéias topológicas [127-130], expansões em série [131, 132], análise Hamiltoniana de escala de lacuna de massa (*mass gap scaling*) [133], simulações Monte Carlo [134, 135], diferentes tipos de cálculos de Grupo de Renormalização [136-140], e matriz de transferência [141]. Para  $q > 3$  e para todos os valores do campo quiral  $\Delta$ , foi encontrada uma fase flutuante incomensurável separando a fase comensurável da fase paramagnética. Entretanto, no caso  $q = 3$ , não foi determinado com certeza absoluta se existe um ponto de Lifshitz em  $\Delta_L > 0$  [54,55,123,131,134,137-140] ou se a fase flutuante se estende até um campo quiral nulo [129, 130, 133]. De fato, a determinação da posição desse ponto de Lifshitz, no caso dele existir, está longe de ser trivial e os valores sugeridos para o campo quiral nesse ponto (para  $\Delta < 1/2$ ) variam desde  $\Delta_L = 0,25$  até  $\Delta_L = 0,45$ .

Nesse capítulo estudamos o modelo de Potts quiral com três estados anisotrópico na rede quadrada [142], introduzido independentemente por Huse [136] e Ostlund [54]. Utilizamos o método de propagação de danos segundo a dinâmica de banho térmico. In-

investigações de sistemas apresentando fases flutuantes através da técnica de propagação de danos são bastante raras e, em nosso conhecimento, não há na literatura nenhum trabalho aplicando esse método, ou mesmo outra técnica qualquer, para estudar a dinâmica do modelo de Potts quiral com três estados na rede quadrada. A meta principal desse capítulo é investigar as transições de fase dinâmicas desse modelo detectadas através dessa técnica e conferir, em particular, se a fase dinâmica caótica encontrada [40] para  $\Delta = 0$  persiste, ou não, para valores não nulos do campo quiral. Ainda que as transições dinâmicas não coincidam necessariamente com suas correspondentes no equilíbrio (caso elas existam), é interessante verificar se nossos resultados conduzem, ou não, a uma fase dinâmica flutuante para todos os valores de  $\Delta > 0$ . Esse capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção (6.2) descrevemos o modelo e os detalhes do método que utilizamos, e na seção (6.3) apresentamos nossos resultados.

## 6.2 Modelo e Método

O modelo de Potts quiral com  $q$  estados consiste em ‘variáveis de spin’  $n_i$  distribuídas nos sítios  $i$  de uma rede. Cada spin pode assumir  $q$  valores discretos  $n_i = 0, 1, 2, \dots, q - 1$ . Os spins estão acoplados entre si pelo Hamiltoniano adimensional

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_{\langle ij \rangle} \cos \left\{ \frac{2\pi}{q} (n_i - n_j + \vec{\Delta} \cdot \hat{R}_{ij}) \right\} \quad (6.1)$$

onde a soma percorre todos os pares de sítios primeiros vizinhos  $\langle ij \rangle$ ,  $\vec{\Delta}$  é o campo quiral,  $J > 0$  é a constante de acoplamento entre spins primeiros vizinhos,  $K = J/k_B T$  e  $\hat{R}_{ij}$  é o vetor unitário que vai do sítio  $i$  ao sítio  $j$ . Para  $q = 2$ , esse Hamiltoniano é, para valores arbitrários de  $\vec{\Delta}$ , equivalente ao modelo de Ising anisotrópico a campo nulo. Quando o campo quiral  $\vec{\Delta}$  se anula, o modelo com  $q = 3$  estados se reduz ao modelo de Potts ferromagnético usual. O campo  $\vec{\Delta}$  induz uma tendência para os ângulos de

fase  $2\pi n_i/q$  assumirem uma rotação contínua em função da posição ao longo da direção do campo  $\vec{\Delta}$  na rede. Essa 'quiralidade' compete com a restrição de que os ângulos de fase devem ser discretos, levando a transições comensurável-incomensurável no sistema. Daqui em diante vamos nos restringir à rede quadrada e considerar que o campo quiral está direcionado ao longo do eixo fixo  $x$  da rede ( $\vec{\Delta} = \Delta \hat{x}$ ). Devido à controvérsia sobre a extensão do domínio da fase flutuante (se para todos os valores de  $\Delta > 0$  ou não), a determinação precisa do diagrama de fases estático desse modelo é ainda bastante nebulosa. No entanto, há duas previsões qualitativamente diferentes para esse diagrama de fases que são mostradas esquematicamente na figura (6.1). As fronteiras críticas em linhas cheias nessa figura foram baseadas nos resultados de [134] onde foram obtidos pontos de Lifshitz em  $\Delta_L \simeq 0,40$  e  $0,60$ . A curva tracejada representa esquematicamente o cenário alternativo previsto em [129, 130, 133] para a fronteira entre as fases paramagnética e flutuante sem a existência de pontos de Lifshitz para  $\Delta > 0$ . O estado fundamental do sistema é ferromagnético ( $n_i = n_j$  para todos os sítios) quando  $|\Delta| < 1/2$  (fase F). Para  $1/2 < \Delta < 3/2$  o estado fundamental apresenta uma configuração ferromagnética ao longo da direção do eixo  $y$  e uma configuração quiral dextrógira ao longo da direção  $x$  (os spins formam um padrão ...0120120... nessa direção) (fase C). Esse estado fundamental é comensurável com a rede e a ordem espacialmente modulada possui um período de três constantes da rede.  $\Delta = 1/2$  é um ponto de multifase, infinitamente degenerado, onde o estado ferromagnético e qualquer seqüência quiral dextrógira compartilham da mesma energia. A fase intermediária M é a fase flutuante incomensurável (onde convivem uma infinidade de configurações com diferentes períodos de modulação, comensuráveis ou não com a rede) e a fase a altas temperaturas P é a fase paramagnética. As fronteiras das fases de equilíbrio são simétricas em relação à linha  $\Delta = 1/2$ . Essa simetria tem origem

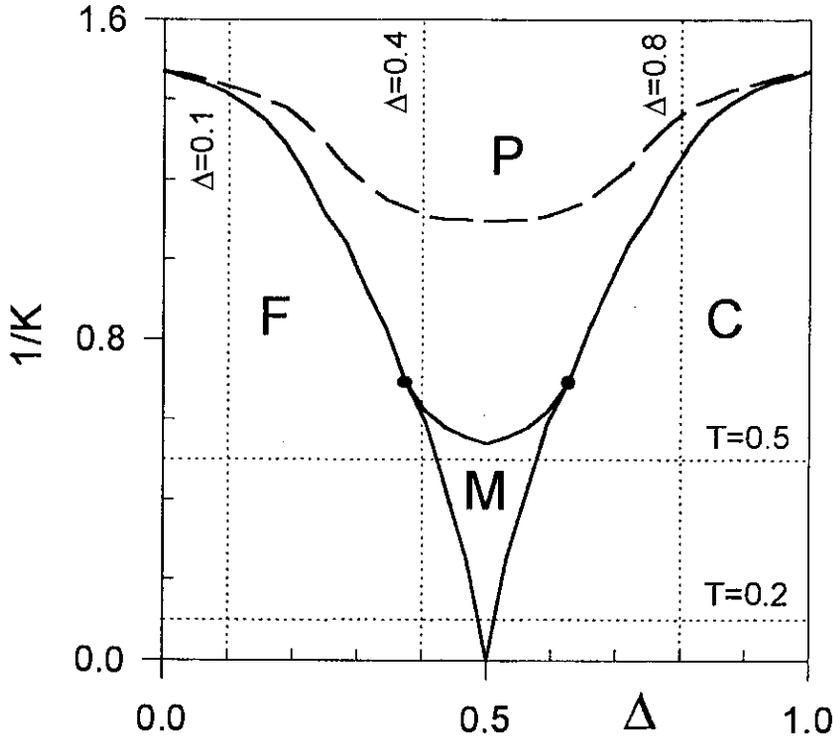


Figura 6.1: Diagrama de fases estático do modelo de Potts quirral anisotrópico com três estados na rede quadrada. A curva tracejada indica qualitativamente a fronteira entre as fases paramagnética e flutuante assumindo a ausência de pontos de Lifshitz para  $\Delta > 0$ . As linhas retas pontilhadas indicam os valores de  $\Delta$  e  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) para os quais nossas simulações foram realizadas com detalhes.

na invariância do Hamiltoniano (6.1) sob a transformação

$$\begin{cases} \Delta \rightarrow 1 - \Delta \\ n_i \rightarrow (-n_i + x_i) \bmod 3 \end{cases} \quad (6.2)$$

onde  $x_i$  é a coordenada do sítio  $i$  ao longo do eixo do campo quirral ( $x$ ).

Nesse nosso trabalho, o modelo de Potts quirral com três estados (equação (6.1) com  $q = 3$ ) é simulado usando redes de tamanho  $L_x \times L_y$  com  $L_x$  sítios na direção  $x$  e  $L_y = 30$  sítios na direção  $y$  com condições de contorno periódicas nas duas direções. Consideraremos sempre  $L_x$  maior do que  $L_y$  ( $L_x = 90, 120$ ) para permitir, o melhor possível, as modulações espaciais sem distorções ao longo do eixo  $x$  (a direção do campo

quiral).

Para atualizar os spins usamos um processo Monte Carlo seqüencial do tipo banho térmico. A cada passo de Monte Carlo (MCS)  $t$ , a variável de spin  $n_i(t)$  é atualizada seguindo o mesmo procedimento utilizado para o modelo de Potts na ref. [40] (vide eq. (5.6)).

Consideramos duas configurações iniciais  $\{n_i^{(A)}(0)\}$  e  $\{n_i^{(B)}(0)\}$  no tempo  $t = 0$  e deixamos que evoluam de acordo com a dinâmica banho térmico acima usando, nas duas réplicas, a mesma seqüência de números aleatórios para atualizar os spins. Essas duas configurações no tempo  $t$ ,  $\{n_i^{(A)}(t)\}$  e  $\{n_i^{(B)}(t)\}$  são comparadas através da seguinte distância de Hamming (ou dano)  $D(t)$  entre elas:

$$D(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{1 - \delta(n_i^{(A)}(t), n_i^{(B)}(t))\} \quad , \quad (6.3)$$

onde a soma é sobre todos os  $N = L_x \times L_y$  sítios de cada réplica e  $\delta(,)$  é a função delta de Kronecker. Essa distância  $D(t)$  é a mesma da eq. (5.7) (usada na ref. [40]) e representa a fração de spins que diferem em seus estados nas duas réplicas no tempo  $t$ . O dano médio  $\langle D(t) \rangle$  sobre as flutuações térmicas foi obtido similarmente à equação (5.8) (o número de amostras simuladas foi tipicamente  $M = 100$ ).

Para estudar os efeitos de memória, consideramos três conjuntos de configurações iniciais para as duas réplicas:

(a) Ordenada ferromagnética:  $\{n_i^{(A)}(0) = 0 \quad \forall i\}$  e  $\{n_i^{(B)}(0) = 1 \text{ ou } 2 \text{ com iguais probabilidades}\}$  ( $D(0) = 1$ ).

(b) Desordenada:  $\{n_i^{(A)}(0)\}$  é aleatória e  $\{n_i^{(B)}(0)\} = \{n_i^{(A)}(0)\}$  exceto em 5% dos spins aleatoriamente escolhidos ( $D(0) = 0,05$ ).

(c) Ordenada quirar:  $\{n_i^{(A)}(0)\}$  tem uma configuração ferromagnética ao longo do eixo

$y$  e uma configuração com ordem quiral dextrógira ao longo do eixo  $x$  (...0120120...) e  $\{n_i^{(B)}(0)\}$  é construída através das permutações  $0 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$  e  $2 \rightarrow 0$  dos estados dos spins de  $\{n_i^{(A)}(0)\}$  ( $D(0) = 1$ ).

### 6.3 Resultados

Levando-se em conta o fato de que demandaria um tempo muito longo para explorar com cuidado todo o diagrama de fases dinâmico, decidimos analisar em detalhe (computando, para amostras de tamanhos diferentes, todas as quatro grandezas  $\langle D(t) \rangle$ ,  $\langle d(t) \rangle$ ,  $P(t)$  e  $\sigma_D(t)$ ) o caso  $\Delta = 0$  e os cinco cortes mostrados em linhas pontilhadas na figura (6.1). Efetuamos também simulações parciais para vários valores de  $\Delta \leq 0,8$  escolhidos (que são qualitativamente equivalentes aos que discutiremos em seguida e, por isso, não serão mostrados aqui), simulações essas que nos ajudaram a estabelecer as características gerais para cada fase do diagrama de fases global. Em todos os nossos resultados, a temperatura  $T$  é calculada em unidades de  $J/k_B$ .

Para o caso particular  $\Delta = 0$  recuperamos os resultados de Da Silva et al [40] para o modelo de Potts com três estados onde foram observadas três fases distintas conforme descrevemos no capítulo anterior. Obtivemos para as temperaturas das transições de fase os valores  $T_1 \simeq 1,7$  e  $T_2 \simeq 1,5$  (note que temos um fator  $2/3$  em relação às temperaturas indicadas em [40] devido à diferença nas definições dos Hamiltonianos, ou seja,  $K_{\text{quiral com } \Delta=0} = (2/3)K_{\text{Potts}}$ ).

Com o objetivo de investigar as transições de fase dinâmicas para valores pequenos do campo quiral, computamos os limites para tempos longos do dano médio  $\langle D \rangle$  (eq. (5.8)), da probabilidade de sobrevivência  $P$  (eq. (5.3)) e da flutuação  $\sigma_D$  (eq. (5.4) com  $\langle D \rangle$  no lugar de  $\langle d \rangle$ ) como funções da temperatura  $T$  para  $\Delta = 0,1$  e para as condições iniciais (a) e (b). Os seus respectivos gráficos estão mostrados nas figuras (6.2),

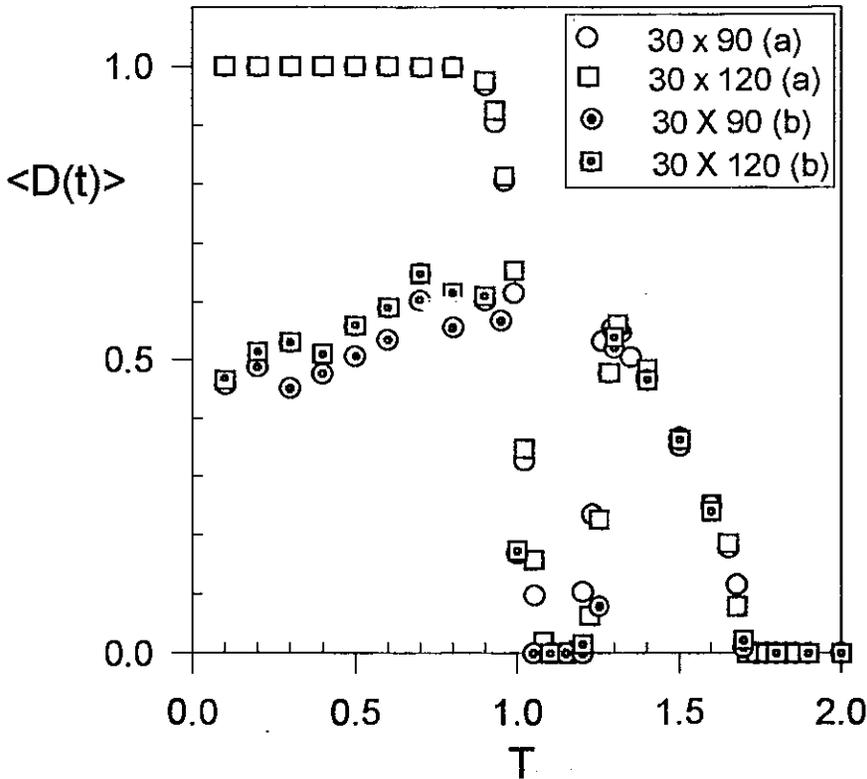


Figura 6.2: Dano médio  $\langle D \rangle$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) para um valor fixo de  $\Delta = 0,1$  e condições iniciais (a) e (b) descritas no texto ( $t = 10000$  MCS). As simulações foram realizadas para dois tamanhos diferentes do sistema ( $30 \times 90$  ( $M = 500$  amostras) e  $30 \times 120$  ( $M = 200$  amostras)).

(6.3) e (6.4) (note que o caso correspondente à condição inicial (b) foi omitido nas figuras (6.3) e (6.4)) para amostras de tamanhos  $30 \times 90$  e  $30 \times 120$ . Observamos claramente quatro regimes diferentes conforme variamos a temperatura, quais sejam:

i) um regime de altas temperaturas (HT) (para  $T \geq T_1$ ;  $T_1 \simeq 1.7$ ) onde  $\langle D \rangle$ ,  $P$  e  $\sigma_D$  se anulam para qualquer condição inicial.

ii) um regime intermediário a temperaturas altas (HIT) (para  $T_2 < T < T_1$ ;  $T_2 \simeq 1.2$ ) onde  $\langle D \rangle \neq 0$ ,  $P = 1$  e as flutuações do dano  $\sigma_D$  são pequenas (exceto nas suas bordas).

Essas quantidades são independentes das condições iniciais.

iii) um regime intermediário a baixas temperaturas (LIT) ( para  $T_3 \leq T \leq T_2$ ;  $T_3 \simeq 1.0$ )

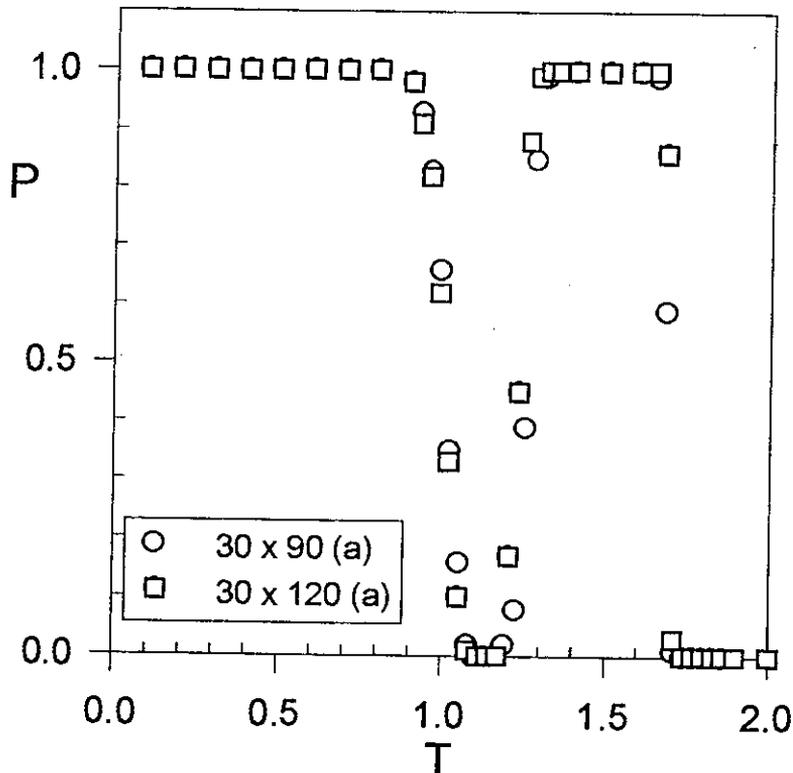


Figura 6.3: Probabilidade de sobrevivência  $P$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) ( $t = 10000$  MCS) para  $\Delta = 0, 1$  fixo e condição inicial (a). Os tamanhos e números de amostras são os mesmos da figura (6.2).

onde  $\langle D \rangle$ ,  $P$  e  $\sigma_D$  se anulam para todas as condições iniciais.

iv) um regime de baixas temperaturas (LT) (para  $T < T_3$ ) onde  $\langle D \rangle \neq 0$ ,  $P \neq 0$  e  $\sigma_D$  se anulam (exceto próximo de  $T_3$ ) para a condição inicial com ordem ferromagnética (a). Essas quantidades dependem da condição inicial, e  $\langle D \rangle = P = 1$  quando uma ou ambas as replicas estão, em  $t = 0$ , em estados fundamentais ferromagnéticos diferentes, como na condição (a).

Note que a flutuação do dano  $\sigma_D$  apresenta picos razoavelmente estreitos nas temperaturas  $T_3$ ,  $T_2$  e  $T_1$  (ainda que em  $T_1$  esse seja bem pequeno). Todos os resultados enunciados acima mostram que existe uma estrutura de quatro fases quando  $\Delta = 0, 1$ , mas, ambos regimes HT e LIT possuem as mesmas características com respeito a  $\langle D \rangle$ ,

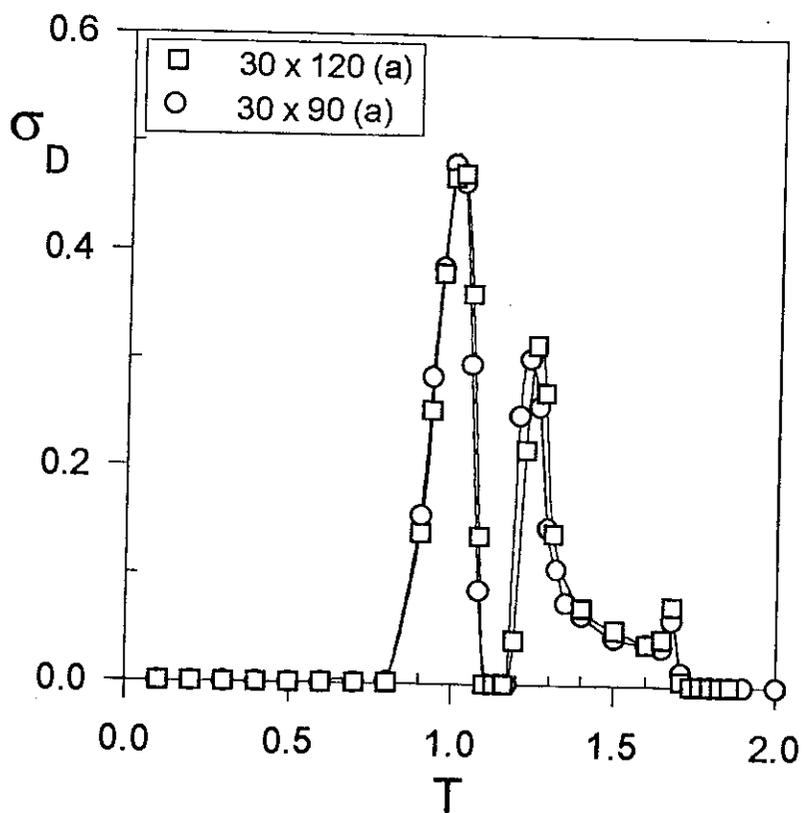


Figura 6.4: Flutuação do dano  $\sigma_D$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) ( $t = 10000$  MCS) para  $\Delta = 0,1$  fixo e condição inicial (a) para sistemas com tamanhos  $30 \times 90$  ( $M = 500$  amostras) e  $30 \times 120$  ( $M = 200$  amostras).

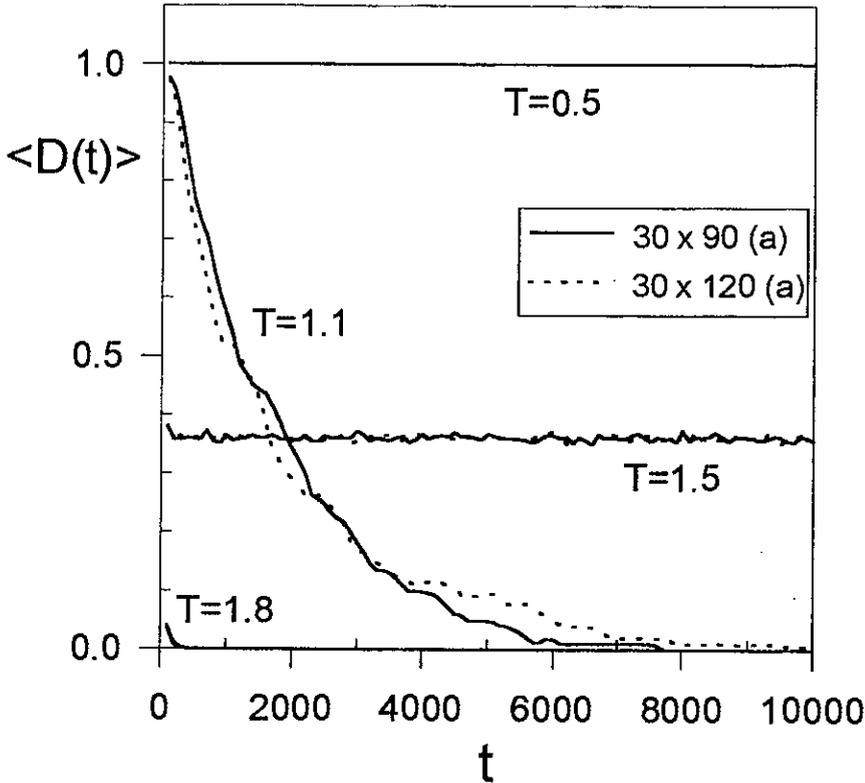


Figura 6.5: Evoluções temporais de  $\langle D(t) \rangle$  para  $\Delta = 0, 1$  fixo, condição inicial (a) e temperaturas (em unidades de  $J/k_B$ ) pertencentes a regimes diferentes. Os tempos característicos dos decaimentos exponenciais são, aproximadamente,  $\tau_{LIT}(T = 1, 1) \simeq 2,0 \times 10^3$  MCS e  $\tau_{HT}(T = 1, 8) \simeq 77$  MCS. Os tamanhos e números de amostras são os mesmos da figura (6.2).

$P$  e  $\sigma_D$ . No entanto, se olharmos para os comportamentos temporais típicos da distância de Hamming média nesses dois regimes, ilustrados na figura (6.5) para  $T = 1, 8$  (pertencente ao regime HT) e  $T = 1, 1$  (no regime LIT), vemos que os tempos de relaxação envolvidos são muito maiores na fase LIT do que na fase HT. De fato, verificamos que  $\langle D(t) \rangle$  tem um decaimento exponencial ( $\langle D(t) \rangle \propto \exp\{-t/\tau(T)\}$ ) nos dois regimes, mas os tempos característicos  $\tau_{LIT}$  são da ordem de 3000 MCS ( $10^3 < \tau_{LIT} < 2 \times 10^4$ ) na fase LIT enquanto que na fase HT o maior tempo  $\tau_{HT}$  encontrado é aproximadamente 100 MCS (para amostras de tamanho  $30 \times 90$ ).

Podemos notar também da figura (6.5) que  $\langle D(t) \rangle$ , depois de um pequeno tempo

transiente, flutua pouco em torno de seu valor estacionário para uma temperatura fixa ( $T = 1.5$ ) no regime HIT, enquanto que na fase LT  $\langle D(t) \rangle$  se mantém constante no seu valor máximo quando a condição inicial é ordenada ferromagneticamente (a) (mas, para as configurações iniciais (b) e (c),  $\langle D(t) \rangle$  atinge lentamente seu limite para tempos longos).

Note que os gráficos mostrados nas figuras (6.2)-(6.5) quase não se alteram quando aumentamos o tamanho da amostra de  $L = 90$  para  $L = 120$ , o que indica que nossos resultados obtidos para amostras de tamanho  $30 \times 90$  devem estar próximos aos correspondentes ao limite termodinâmico (quando  $N \rightarrow \infty$  e  $L \rightarrow \infty$ ). Visto que também verificamos esse fato para valores maiores do campo quiral, iremos daqui para diante apresentar nossos resultados somente para o tamanho  $30 \times 90$ . Observamos ainda que, caso o dano inicial  $D(0) = 0,05$  seja introduzido em configurações de equilíbrio a baixas temperaturas, o dano final se anula em toda a fase LIT. Esse fato é condizente com a interpretação de que nessa fase, para um dano inicial muito pequeno, as duas réplicas do sistema já partem desde o início em um mesmo vale no espaço de fase.

Na figura (6.6) mostramos os limites para tempos longos de  $\langle D \rangle$  como funções da temperatura para diferentes valores do campo quiral ( $\Delta = 0, 1, 0,4$  e  $0,8$ ). Computamos também, para  $\Delta = 0,4$  e  $0,8$ , suas correspondentes probabilidades de sobrevivência  $P$  para tempos longos e a flutuação  $\sigma_D$ . Para todos os valores de  $\Delta > 0$  observados, obtivemos sempre uma estrutura de quatro fases qualitativamente similar àquela descrita para  $\Delta = 0, 1$ . Entretanto, para  $\Delta$  próximo de  $0,5$  obtivemos indicações de que o regime LT desaparece. Encontramos as mesmas características para os quatro regimes mencionados previamente para  $\Delta = 0, 1$ , exceto pelo fato de que, para  $\Delta > 1/2$ , devemos substituir a condição inicial com ordem ferromagnética (a) pela ordenada quiralmente (c) nas afirmações concernentes ao regime de baixas temperaturas. Por motivo de clareza, omiti-

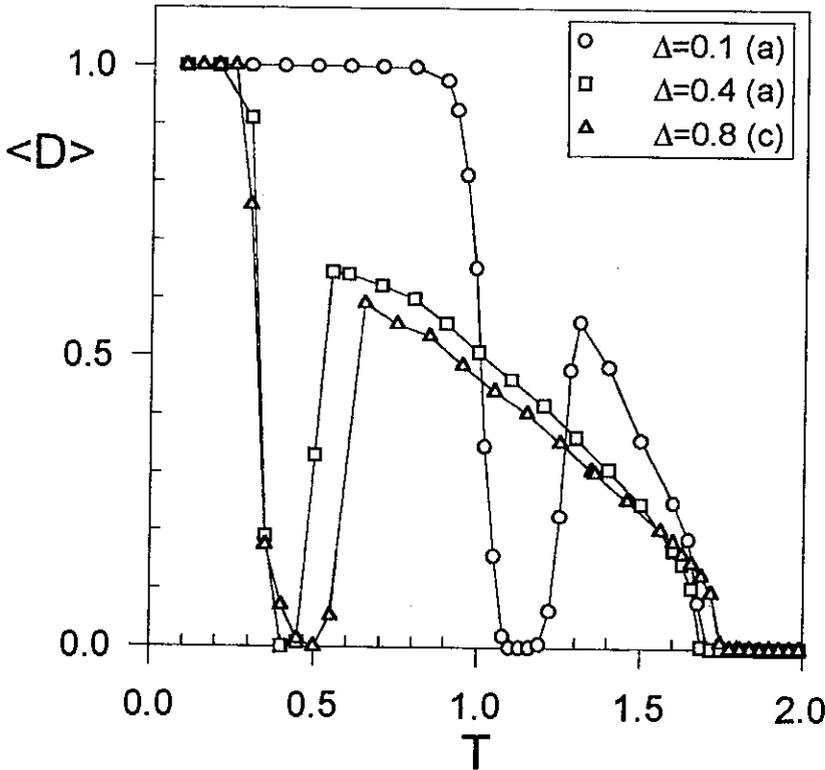


Figura 6.6: Dano médio  $\langle D \rangle$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) para valores fixos de  $\Delta = 0, 1, 0,4$  e  $0,8$  ( $t = 10000$  MCS). As simulações foram realizadas para  $M = 100$  amostras de tamanho  $30 \times 90$ . As condições iniciais foram a ordenada ferromagneticamente (a) para  $\Delta = 0, 1$  e  $0,4$ , e a ordenada quiralmente (c) para  $\Delta = 0, 8$ .

mos, na figura (6.6), os gráficos para condições iniciais diferentes que mostrariam que  $\langle D \rangle$  depende de  $D(0)$  somente no regime LT.

Observamos que, à medida em que o valor do campo quiral cresce e se aproxima de  $\Delta = 0,5$ , as duas temperaturas de transição  $T_3$  e  $T_2$  diminuem (para  $\Delta = 0,4$  obtivemos  $T_3 \simeq 0,34$ ,  $T_2 \simeq 0,50$  e  $T_1 \simeq 1,68$ ). A situação oposta ocorre para os valores observados de  $\Delta > 0,5$  (por exemplo, obtivemos  $T_3 \simeq 0,36$ ,  $T_2 \simeq 0,56$  e  $T_1 \simeq 1,75$  quando  $\Delta = 0,8$ ). Um encolhimento (expansão) similar do regime de baixas temperaturas à medida em que  $\Delta$  cresce de 0 para 0,5 (de 0,5 para 1) ocorre para a fase ferromagnética F (quiral C) estática. O fato de que, no regime de baixas temperaturas,  $\langle D \rangle = P = 1$

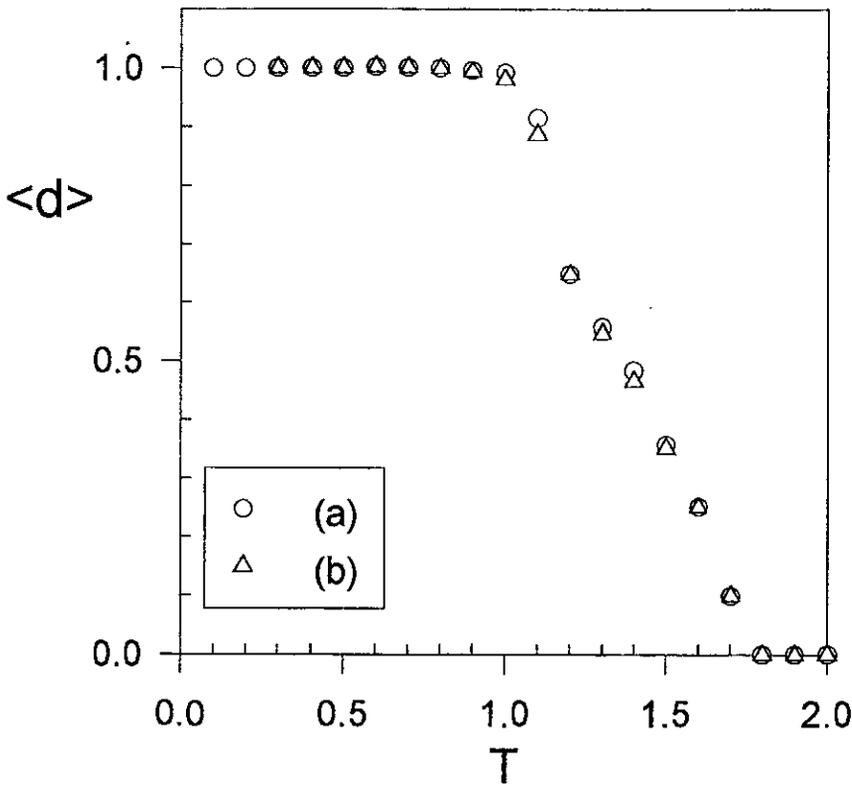


Figura 6.7: Dano médio  $\langle d \rangle$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) ( $t = 10000$  MCS) para sistemas de tamanho  $30 \times 90$  ( $M = 100$  amostras) para diferentes condições iniciais e  $\Delta = 0, 1$  fixo.

sempre que as configurações iniciais das duas réplicas são escolhidas como sendo os estados fundamentais do sistema foi obtido também [43] para os dois regimes ferromagnético e comensurável (antifase) no modelo ANNNI bidimensional. Na ref. [43] foi verificado que o dano das amostras sobreviventes  $\langle d \rangle$  depende (não depende) da condição inicial na fase comensurável (ferromagnética), e que a probabilidade  $P$  depende das configurações iniciais nesses dois regimes. Uma situação similar é encontrada aqui para as fases LT nos casos  $0 < \Delta < 0,5$  e  $\Delta > 0,5$  como está ilustrado nos gráficos de  $\langle d \rangle$  versus temperatura para  $\Delta = 0, 1$  (figura (6.7)) e  $\Delta = 0,8$  (figura (6.8)).

Podemos ver também nas figuras (6.7) e (6.8) que  $\langle d \rangle$  assume valores não nulos, independentemente das condições iniciais, para todas as temperaturas no regime LIT e

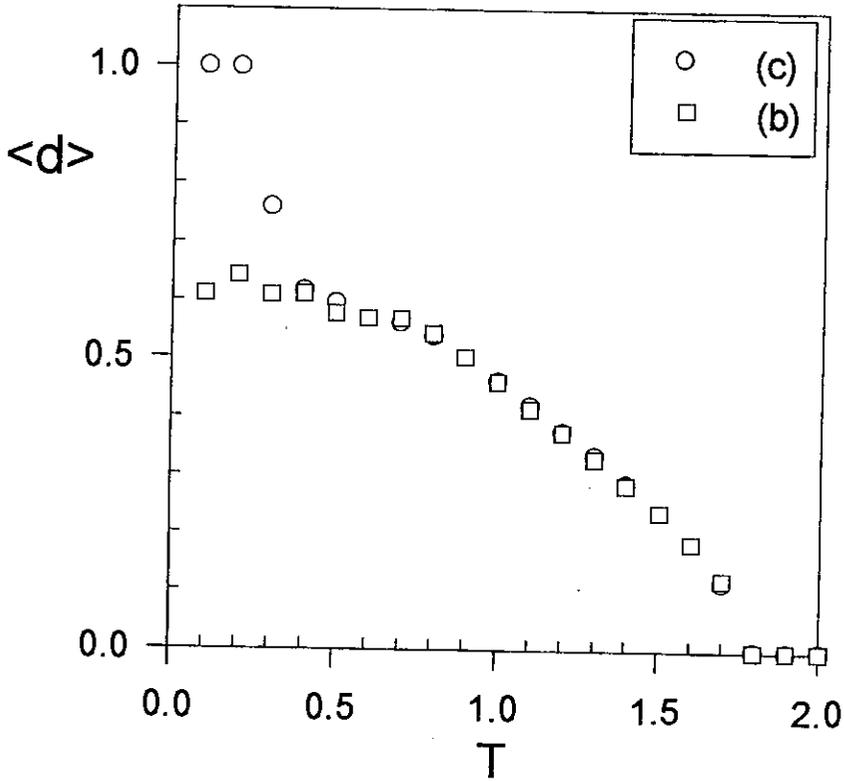


Figura 6.8: Dano médio  $\langle d \rangle$  para tempos longos versus temperatura  $T$  (em unidades de  $J/k_B$ ) ( $t = 10000$  MCS) para sistemas de tamanho  $30 \times 90$  ( $M = 100$  amostras) para diferentes condições iniciais e para  $\Delta = 0,8$  fixo.

qualquer valor de  $\Delta > 0$ . Ainda que  $\langle D(t) \rangle$  e  $P(t)$  diminuam, tendendo a zero, muito lentamente com o tempo na fase LIT (esse tempo transiente cresce quando aumentamos  $\Delta$  de 0 para 0,5, e então passa a diminuir quando variamos  $\Delta$  a partir de  $\Delta = 0,5$ ), sua razão  $\langle d(t) \rangle$  atinge muito rapidamente um valor finito em torno do qual flutua pouco para um tempo longo (antes de  $P(t)$  se anular). Os comportamentos temporais de  $\langle d(t) \rangle$  e  $\langle D(t) \rangle$ , encontrados no regime LIT estão ilustrados na figura (6.9) para  $T = 0,5$  e  $\Delta = 0,8$  com as condições iniciais (b) e (c). Observamos que, para  $\Delta = 0,8$ ,  $\langle D(t) \rangle$  tem decaimentos exponenciais nos regimes LIT e HT com tempos característicos ( $\tau_{LIT}$  e  $\tau_{HT}$ ) superiores àqueles encontrados para  $\Delta = 0,1$ . Observamos ainda, como no caso  $\Delta = 0,1$ , que  $\tau_{LIT}$  é uma ordem de grandeza maior do que  $\tau_{HT}$ . É interessante frisar que os comportamentos de  $\langle d(t) \rangle$  e  $P(t)$  encontrados [43] na fase flutuante do modelo ANNNI são similares aos mencionados aqui para o regime LIT.

Nossos resultados para a fase HIT obtidos para  $\Delta > 0$  possuem as mesmas características qualitativas [40] para a fase caótica DC do modelo de Potts usual ( $\Delta = 0$ ) que mencionamos no capítulo 5. Verificamos que, ainda que a fronteira inferior dessa fase ( $T_2$ ) varie bastante com  $\Delta$ , sua fronteira superior é praticamente insensível a mudanças do campo quiral ( $T_1 \simeq 1,7$ ), permanecendo próxima da temperatura crítica estática do ferromagneto de Ising na rede quadrada ( $T_{c \text{ Ising}} = 1.701\dots$ ) (note que nossa constante de acoplamento  $K$  é  $4/3$  da constante de acoplamento usual do modelo de Ising).

As figuras (6.10) e (6.11) exibem a probabilidade de sobrevivência  $P(t)$  em função do campo quiral  $\Delta$  para temperaturas fixas  $T = 0,2$  (Fig. (6.10)) e  $T = 0,5$  (Fig. 6.11)) no tempo  $t = 10000$  MCS. Quando  $T = 0,2$ , percebe-se claramente uma fase LIT estreita ( $P(t)$  se anula lentamente e ainda não atingiu o valor zero no tempo considerado) para valores de  $\Delta$  próximos de 0,5 ( $0,48 \lesssim \Delta \lesssim 0,46$ ) que separa dois regimes LT distintos onde  $P = 1$  para diferentes condições iniciais ((a) para  $\Delta < 0,48$  e (c) para  $\Delta > 0,56$ ).

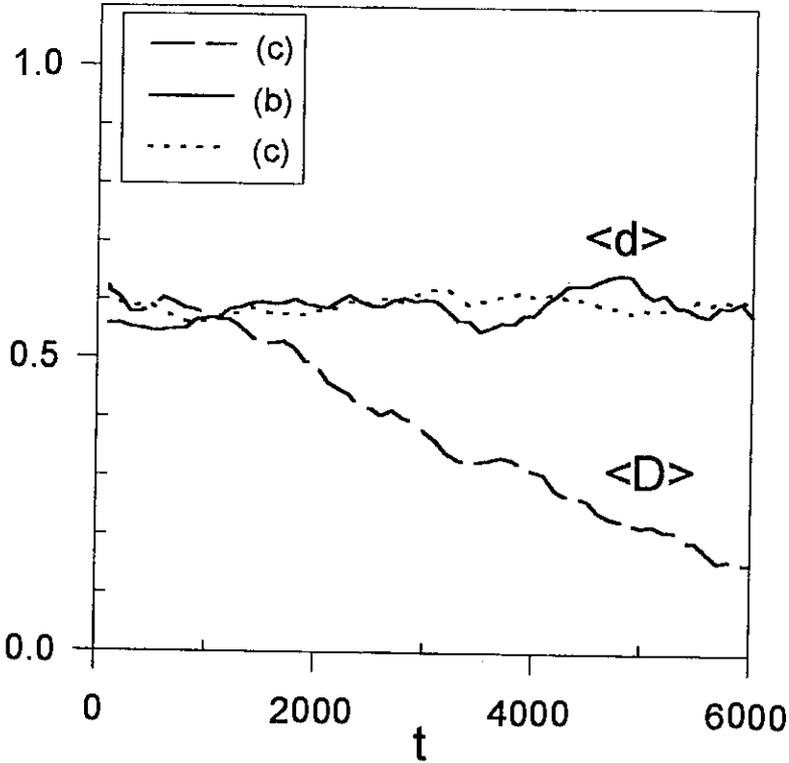


Figura 6.9: Evoluções temporais dos danos  $\langle D(t) \rangle$  e  $\langle d(t) \rangle$  para  $\Delta = 0,8$  e temperatura  $T = 0,5$  (em unidades de  $J/k_B$ ) fixos, com as condições iniciais (c) e (b).  $M = 100$  amostras foram simuladas para sistemas com tamanho  $30 \times 90$ . O tempo característico do decaimento exponencial de  $\langle D(t) \rangle$  é  $\tau_{LIT} \simeq 3,4 \times 10^3$  MCS (que é uma ordem de grandeza maior do que  $\tau_{HT}(T = 1,8) \simeq 3,7 \times 10^2$  MCS).

Quando aumentamos a temperatura para  $T = 0,5$ , o regime LIT se torna mais abrangente (para  $0,2 \lesssim \Delta \lesssim 0,5$ ), mas agora este surge entre a fase LT com  $\Delta$  pequeno e a fase DC. Essa diminuição da fase LIT com a redução da temperatura segue a mesma tendência dos diagramas estáticos (ver figura (6.1)), e eventualmente seu domínio poderia reduzir-se, para  $T = 0$ , a apenas um ponto próximo de  $\Delta = 0,5$ , como no ponto multifásico estático em  $\Delta = 0,5$ . Em  $T = 0,5$  o regime DC desaparece em torno de  $\Delta \simeq 0,75$ , acima do qual a fase LIT reaparece, em concordância com o comportamento temporal de  $\langle D(t) \rangle$  em  $\Delta = 0,8$  mostrado na figura (6.9).

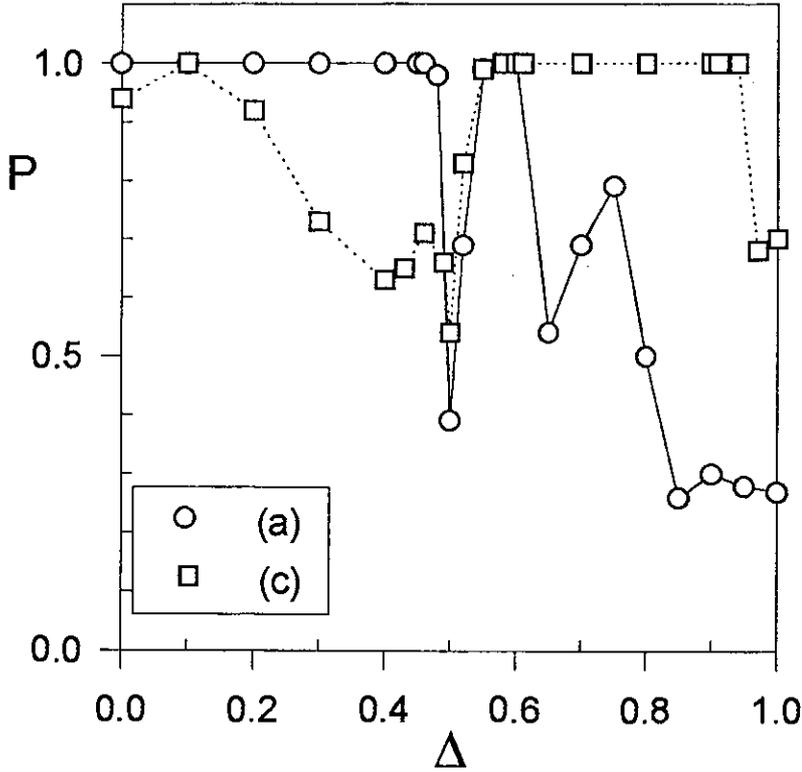


Figura 6.10: Probabilidade de sobrevivência  $P$  versus campo quiral  $\Delta$  para uma temperatura fixa  $T = 0,2$  (em unidades de  $J/k_B$ ) em  $t = 10000$  MCS. As simulações foram realizadas para  $M = 100$  amostras de tamanho  $30 \times 90$  com as condições iniciais (a) e (c).

Levando-se em conta: (i) todas as similaridades mencionadas acima entre nossos resultados para os regimes dinâmicos LT com  $\Delta$  pequeno, LT com  $\Delta$  grande e LIT e aqueles para as respectivas fases estáticas ferromagnética (F), quiral (C) e flutuante (M); ii) o fato de  $P(t)$  e  $\langle d(t) \rangle$  nesses três regimes possuírem os mesmos comportamentos encontrados em [43] nas respectivas fases dinâmicas ferromagnética, comensurável e flutuante do modelo ANNNI, vamos associar o regime LT com  $\Delta$  pequeno (com  $\Delta$  grande) à fase dinâmica ferromagnética (quiral) e o regime LIT à fase dinâmica flutuante do modelo de Potts quiral com três estados.

É interessante notar que, diferentemente do diagrama de fases estático, nossas fronteiras de fase dinâmicas não são simétricas com respeito à linha  $\Delta = 1/2$ . Provavelmente

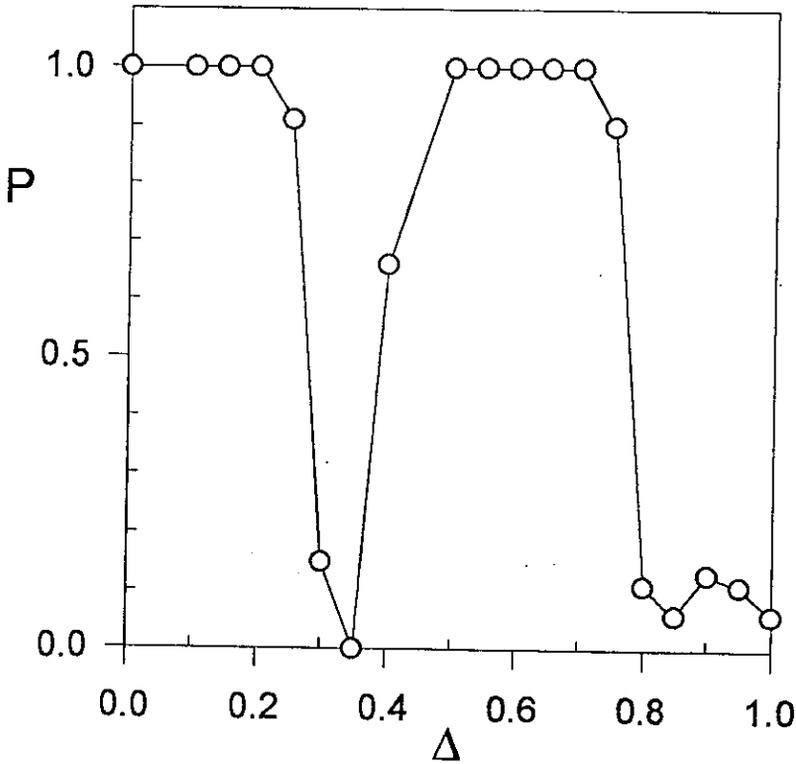


Figura 6.11: Probabilidade de sobrevivência  $P$  versus campo quiral  $\Delta$  para uma temperatura fixa  $T = 0,5$  (em unidades de  $J/k_B$ ) em  $t = 10000$  MCS. As simulações foram realizadas para  $M = 100$  amostras de tamanho  $30 \times 90$  com a condição inicial (a).

esse é um efeito da dinâmica particular e da própria definição da distância de Hamming que utilizamos. A influência desses fatores foi exibida para o ferromagneto XY clássico por Chiu e Teitel [38], mostrando que as transições na propagação de danos dependem crucialmente da simetria desses dois fatores. Através da escolha de uma dinâmica e de uma distância de Hamming com invariância rotacional, diferentes daquelas definidas por Golinelli e Derrida [37] (que não possuem invariância rotacional), eles obtiveram resultados que estão mais fielmente relacionados às transições de equilíbrio. Mas, por outro lado, eles não encontram a transição superior obtida em [37], que, acredita-se, está relacionada à transição de percolação (mencionada no capítulo 5). Seria interessante verificar se as fronteiras de fase dinâmicas se tornariam simétricas com respeito à linha  $\Delta = 1/2$  através

da escolha de uma dinâmica e de uma definição para o dano que preservassem a simetria do Hamiltoniano do modelo de Potts quiral. Em nosso trabalho seguimos as definições da dinâmica e do dano utilizadas para o modelo de Potts padrão [40] mencionadas no capítulo 5, já que um dos nossos objetivos foi investigar a persistência (ou não) da fase DC (que não possui análogo estático) encontrada para  $\Delta = 0$  [40].

Em resumo, o estudo das variações das quantidades dinâmicas  $\langle D \rangle$ ,  $P$ ,  $\sigma_D$  e  $\langle d \rangle$  com o tempo, temperatura, campo quiral e condições iniciais nos permite distinguir os regimes enumerados abaixo com as seguintes características:

1. Fase paramagnética (P) (HT - para  $T \geq T_1(\Delta)$ ,  $\forall \Delta \geq 0$ ):  
 $\langle D(t) \rangle$ ,  $P(t)$ ,  $\sigma_D(t)$  e  $\langle d(t) \rangle$  decaem rapidamente (com um comportamento exponencial que relaxa rapidamente com o aumento da temperatura) a zero para todas as condições iniciais.
2. Fase dinâmica caótica (DC) (HIT - para  $T_2(\Delta) < T < T_1(\Delta)$ ,  $\forall \Delta \geq 0$ ):  
 $\langle D(t) \rangle = \langle d(t) \rangle$  e  $P(t)$  assume valores não nulos para tempos longos ( $\langle D \rangle < 1$  e  $P = 1$ ) que são independentes das condições iniciais e são atingidos rapidamente. As flutuações  $\sigma_D(t)$  de  $\langle D \rangle$  são pequenas nessa fase, exceto em suas fronteiras.
3. Fase flutuante incomensurável (M) (LIT - para  $T_3(\Delta) \leq T \leq T_2(\Delta)$ ,  $\forall \Delta > 0$ ):  
 $\langle D(t) \rangle$ ,  $P(t)$  e  $\sigma_D(t)$  diminuem muito lentamente até se anularem para todas as condições iniciais.  $\langle D(t) \rangle$  tem um decaimento exponencial com um tempo de relaxação tipicamente uma ordem de grandeza maior do que o tempo máximo encontrado na fase P, para qualquer  $\Delta > 0$ . Por outro lado, para tempos inferiores ao tempo de transiente de  $P(t)$ ,  $\langle d(t) \rangle$  assume rapidamente um limite não nulo ( $\langle d \rangle < 1$ ) que é independente das condições iniciais.
4. Fase ferromagnética (F) ( $\Delta < 1/2$  LT - para  $T < T_3(\Delta)$ ,  $0 \leq \Delta \leq 1/2$ ):

$\langle D(t) \rangle$ ,  $P(t)$  e  $\sigma_D(t)$  possuem limites não nulos, para tempos longos, que dependem das condições iniciais e são atingidos lentamente quando as configurações iniciais são diferentes da ordenada ferromagneticamente (a). No caso da condição inicial (a),  $\langle D \rangle = P = 1$  e  $\sigma_D = 0$ . O limite para tempos longos de  $\langle d \rangle$  é sempre 1 para todas as condições iniciais.

5. Fase quiral (C) ( $\Delta > 1/2 LT$  - para  $T < T_3(\Delta)$ ,  $\forall \Delta > 1/2$ ):

$\langle D(t) \rangle$ ,  $P(t)$ ,  $\sigma_D(t)$  e  $\langle d(t) \rangle$  possuem limites não nulos, para tempos longos, que dependem das condições iniciais e são atingidos muito lentamente quando as configurações iniciais são diferentes da ordenada quiralmente (c). No caso da condição inicial (c),  $\langle D \rangle = \langle d \rangle = P = 1$  e  $\sigma_D = 0$ .

## CAPÍTULO 7

# Suscetibilidade e Função de Correlação do Dano no Modelo de Potts com Três Estados na Rede Quadrada: Evidências de uma Relação do tipo Flutuação-Dissipação

### 7.1 Introdução

Conforme já tivemos oportunidade de discutir no capítulo 5, Da Silva et al [40] mostraram, para o modelo de Potts com três estados na rede quadrada, que a grandeza definida como *a frequência com que as duas réplicas do sistema são atualizadas com números aleatórios*

*diferentes* possui as propriedades de um campo conjugado  $h$  ao dano  $\langle D \rangle$  pois este (i) destrói a transição do dano em  $T_D$  e (ii) a suscetibilidade  $\chi_D$  definida na equação (5.10) diverge em  $T_D$ . Na temperatura  $T_2$  no modelo de Potts, a suscetibilidade  $\chi_D$  não deve apresentar nenhuma divergência já que o dano não é um parâmetro de ordem para essa transição. Nessa temperatura, foi sugerido [40] que um parâmetro de ordem apropriado seria a diferença entre danos com condições iniciais distintas  $\Delta(t)$ , mas as tentativas de se identificar o campo conjugado correspondente falharam. Essas mesmas propriedades da suscetibilidade  $\chi_D$  (em  $T_D$ ) foram verificadas para a transição ativa-caótica do autômato celular de Domany-Kinzel [57] e para o modelo de Ising na rede quadrada [121].

Recentemente foi verificado [56] para o autômato celular de Domany-Kinzel que o comprimento de correlação associado à função de correlação entre flutuações do dano (que foi a única grandeza obtida pelos autores nesse trabalho) apresenta um pico pronunciado na mesma temperatura de transição ativa-caótica onde  $\chi_D$  diverge. Os autores sugerem que esse comprimento de correlação também diverge nessa temperatura e indicam esse fato como uma (primeira) pista para a possível existência de um análogo ao teorema de flutuação-dissipação para o dano.

Por outro lado, no modelo de Potts com três estados na rede quadrada, apesar das evidências de que a suscetibilidade de dano  $\chi_D$  diverge em  $T_D$ , a flutuação do dano  $\sigma_D$  é pequena perto de  $T_D$  [40]. Na realidade, constatamos (tal como ocorreu no modelo de Potts quiral, como pode ser visto na figura (6.4) para  $\Delta = 0, 1$ ) que, antes de se anular no regime de altas temperaturas ( $T > T_D$ ),  $\sigma_D$  apresenta um pequeno pico em  $T_D$  (ver figura (7.4) mais adiante nesse capítulo). Estes dois fatos parecem indicar que não existe uma relação do tipo flutuação-dissipação para o dano nesse sistema, contrastando com o que foi sugerido [56] para o autômato celular de Domany-Kinzel. Para esclarecer essa questão, resolvemos inicialmente calcular numericamente, para uma dada temperatura  $T$ , a função

de correlação  $\Gamma(r, T)$  entre flutuações de danos locais em pares de spins que distam  $r$  entre si, bem como seu comprimento de correlação  $\xi_D(T)$ . Verificamos então, nesse capítulo, que  $\xi_D$  tende a divergir em  $T_D$ , contrariamente ao comportamento da correlação total (ou seja, a soma de  $\Gamma(r, T)$  para todos os pares possíveis) que é essencialmente a flutuação do dano  $\sigma_D$ . Constatamos que a razão desta aparente contradição deve ao fato de  $\Gamma(r = 0, T)$  ser muito pequena perto de  $T_D$ , e que, portanto, se normalizarmos a correlação total em  $r = 0$  (dividindo a correlação total por  $\Gamma(r = 0, T)$ ) esta grandeza, tal como  $\chi_D$ , tende a divergir em  $T_D$ . Finalmente, verificamos que o quociente entre  $\chi_D$  e esta correlação total normalizada é uma função monótona da temperatura, sugerindo então a existência de uma relação do tipo flutuação-dissipação para grandezas associadas ao dano. Ressaltamos que não existe, em nosso conhecimento, nenhum trabalho abordando esse tipo de questão em algum modelo particular (note que nos trabalhos [36, 42, 113] foram deduzidas relações entre grandezas usualmente estudadas em modelos de spins e grandezas associadas a danos e não somente entre grandezas associadas ao dano como fazemos aqui).

Esse capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção (7.2) definimos o modelo e o método que utilizamos e na seção (7.3) mostramos nossos resultados.

## 7.2 Modelo e Método

Associamos a cada sítio  $i$  de uma rede quadrada uma variável de Potts  $\sigma_i$  que pode assumir três estados distintos ( $\sigma_i = 0, 1, 2$ ) e consideramos o Hamiltoniano dado em (5.5). Realizamos simulações Monte Carlo do tipo banho térmico em sistemas com tamanho  $N = L \times L$  e condições de contorno periódicas. O processo de atualização dos spins segue nos moldes já citados no capítulo 5 (como na ref. [40]), bem como as definições do dano (5.7) e do dano médio (5.8). Todas as grandezas médias que utilizamos nesta seção estão definidas para  $L, T$  e  $t$  fixos, onde admitiremos que  $t$  é suficientemente longo de tal forma

que as grandezas abaixo tenham atingido estados estacionários.

Para estudarmos a função de correlação nesse modelo, iniciamos definindo o dano local  $x_i^{(s)}$  no sítio  $i$  para uma amostra  $s$  constituída do par de réplicas  $A$  e  $B$  por:

$$x_i^{(s)} = 1 - \delta(\sigma_i^{(A)}, \sigma_i^{(B)}) \quad , \quad (7.1)$$

com a mesma notação da equação (5.7), ou seja, o dano  $D^{(s)}$  para o par de réplicas de uma amostra particular  $s$  (das  $M$  amostras simuladas) é dado por:

$$D^{(s)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(s)} \quad . \quad (7.2)$$

Podemos notar que  $x_i^{(s)}$  é uma variável binária (0 ou 1) que pode ser associada ao sítio  $i$  de uma terceira réplica, compondo assim um sistema 'tréplica' de  $N$  spins. Nas grandezas que definiremos em seguida estaremos considerando  $M$  amostras desse sistema tréplica (chamado de sistema 'Hamming' em [56]).

A flutuação quadrática média (no conjunto de amostras) do dano  $\delta D(T)$  na temperatura  $T$  (vide equação (5.4)) pode ser definida por:

$$\delta D(T) \equiv \sigma_D^2(T) \equiv \langle (D^{(s)}(T) - \langle D(T) \rangle)^2 \rangle = \langle D^2(T) \rangle - \langle D(T) \rangle^2 \quad . \quad (7.3)$$

Portanto, usando a equação (7.2), obtemos:

$$\delta D(t) = \frac{1}{N^2} \langle \left( \sum_{i=1}^N (x_i^{(s)} - \langle x_i \rangle) \right) \left( \sum_{j=1}^N x_j^{(s)} - \langle x_j \rangle \right) \rangle \quad . \quad (7.4)$$

Introduzindo a notação  $\gamma_{ij}(T)$  para a função de correlação entre os 'spins' nos sítios  $i$  e  $j$  do sistema tréplica (que representa as correlações entre flutuações de danos locais nos sítios  $i$  e  $j$ ) por:

$$\gamma_{ij}(T) = \langle (x_i^{(s)} - \langle x_i \rangle)(x_j^{(s)} - \langle x_j \rangle) \rangle = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \quad , \quad (7.5)$$

obtemos:

$$\delta D(T) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}(T) \quad . \quad (7.6)$$

Definindo a função  $\Gamma(r, T)$ , que mede a correlação média, na temperatura  $T$ , entre spins do sistema tréplica que estão separados pela distância  $r$ , por:

$$\Gamma(r, T) = \frac{1}{N_p(r)} \sum_{(i,j)} \gamma_{ij}(T) \quad \text{com} \quad |i - j| = r \quad , \quad (7.7)$$

onde a soma é feita somente sobre os  $N_p(r)$  pares (distintos ou não) de spins  $(i, j)$  que distam  $r$  entre si ( $r$  podendo ser nulo ou não), obtemos finalmente:

$$\delta D(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^L N_p(r) \Gamma(r, T) \quad . \quad (7.8)$$

A expressão que obtivemos acima é totalmente análoga à sua equivalente estática:

$$\delta m(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{r=0}^L N_p(r) \Gamma(r, T) \quad , \quad (7.9)$$

onde  $m$  é a magnetização por sítio do sistema.

Em nosso cálculo de  $\Gamma(r, T)$  adotaremos o procedimento usual de cálculo de funções de correlação no qual  $r$  é interpretado como sendo a distância química, ou seja, o número de ligações na rede ao longo do menor caminho que une o par de sítios considerado. Esta interpretação decorre do fato de que o modelo de Potts em estudo assume interações diretas somente entre primeiros vizinhos. Conseqüentemente, a influência de um spin  $\sigma_i$  sobre, por exemplo, um dos seus segundos vizinhos  $\sigma_{i+2}$  envolve duas interações diretas (a de  $\sigma_i$  com  $\sigma_{i+1}$  e a interação entre  $\sigma_{i+1}$  com  $\sigma_{i+2}$ , e assim sucessivamente). Nesse contexto, para uma rede quadrada de lados  $L$ , a maior distância possível seria  $r = 2L$ . No entanto, dadas as condições de contorno periódicas que adotamos aqui, as distâncias entre sítios varrem efetivamente apenas o intervalo  $[0, L]$ .

### 7.3 Resultados

Nas figuras (7.1) e (7.2) mostramos o comportamento típico da função de correlação  $\Gamma(r, T)$  em função da distância. Para pequenas distâncias a função de correlação decai rapidamente para um valor próximo de zero. Podemos notar da figura (7.1) que no

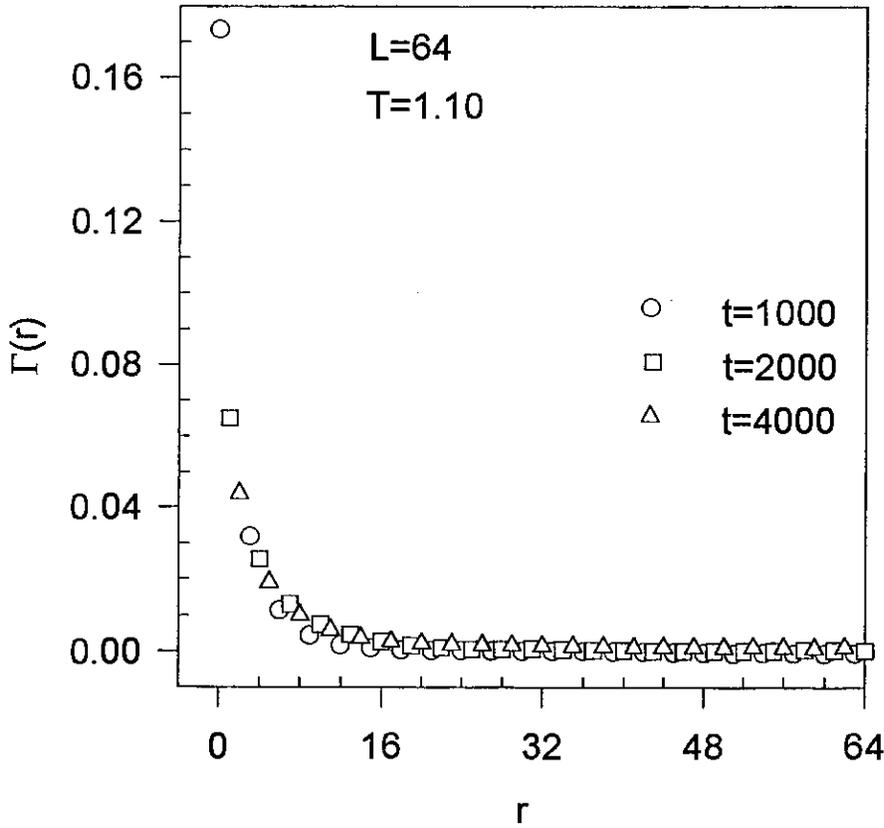


Figura 7.1: Funções de correlação  $\Gamma(r, T)$  na temperatura  $T = 1,10$  e tamanho  $L = 64$  em função da distância  $r$  para diferentes tempos de simulação (média sobre  $M = 100$  amostras).

tempo  $t = 4000$ , para  $T = 1.10$ ,  $\Gamma(r, T)$  já convergiu para seu valor assintótico. Esse tempo se mostrou satisfatório para todas as outras temperaturas que estudamos e corresponderá portanto ao tempo de simulação utilizado em todas as figuras que mostraremos em seguida. Vemos da figura (7.2) que  $\Gamma(r, T)$  apresenta um comportamento exponencial para valores de  $r$  em uma faixa intermediária próxima de  $r = 0$ . Esse comportamento foi verificado para todos os valores de temperatura que simulamos ( $0,95 \leq T \leq 1,125$ ). Podemos então calcular o comprimento de correlação  $\xi_D(T)$  através de:

$$\Gamma(r, T) \sim e^{-r/\xi_D(T)} \quad (7.10)$$

Assumindo esse comportamento para  $\Gamma(r, T)$  (numa faixa intermediária de valores de  $r$ ) obtivemos o comportamento de  $\xi_D(T)$  em função da temperatura que está mostrado na

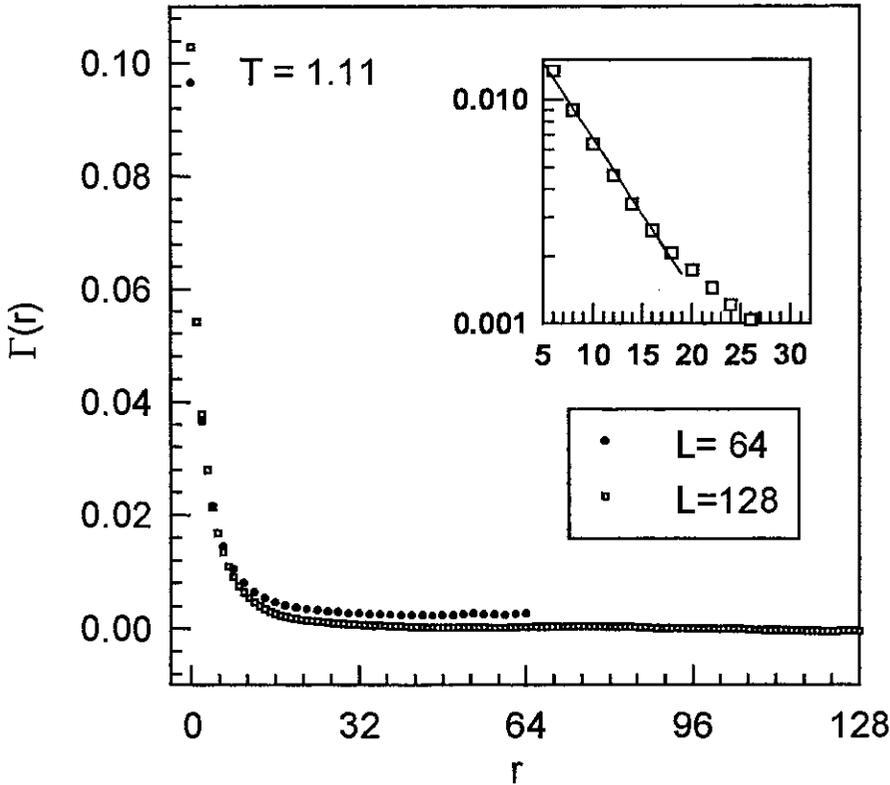


Figura 7.2: Função de correlação  $\Gamma(r, T)$  para tempos longos ( $t = 4000$ ) na temperatura  $T = 1,11$  para dois tamanhos  $L = 64$  e  $L = 128$  (média sobre  $M = 100$  amostras). Na parte superior mostramos um detalhe (semi-log) do comportamento de  $\Gamma(r, T)$  para uma faixa de valores intermediários de  $r$  para  $L = 128$ .

figura (7.3).

Podemos observar na figura (7.3) que o comprimento de correlação  $\xi_D$  apresenta um pico pronunciado na temperatura de transição de dano  $T_D \simeq 1,13$  (um valor de temperatura bem próximo do obtido em [40] ( $T_D = 1,135 \pm 0,003$ ) através de uma extrapolação para  $L \rightarrow \infty$ ). Esse pico aumenta significativamente quando o tamanho do sistema vai de  $L = 64$  para  $L = 128$ , o que sugere que  $\xi_D$  apresenta uma divergência nessa temperatura para um sistema infinito. Um comportamento similar para o comprimento de correlação foi observado para a transição de dano ativa-caótica no autômato celular de Domany-Kinzel [56]. Observamos também um pico secundário de  $\xi_D(T)$  na temperatura

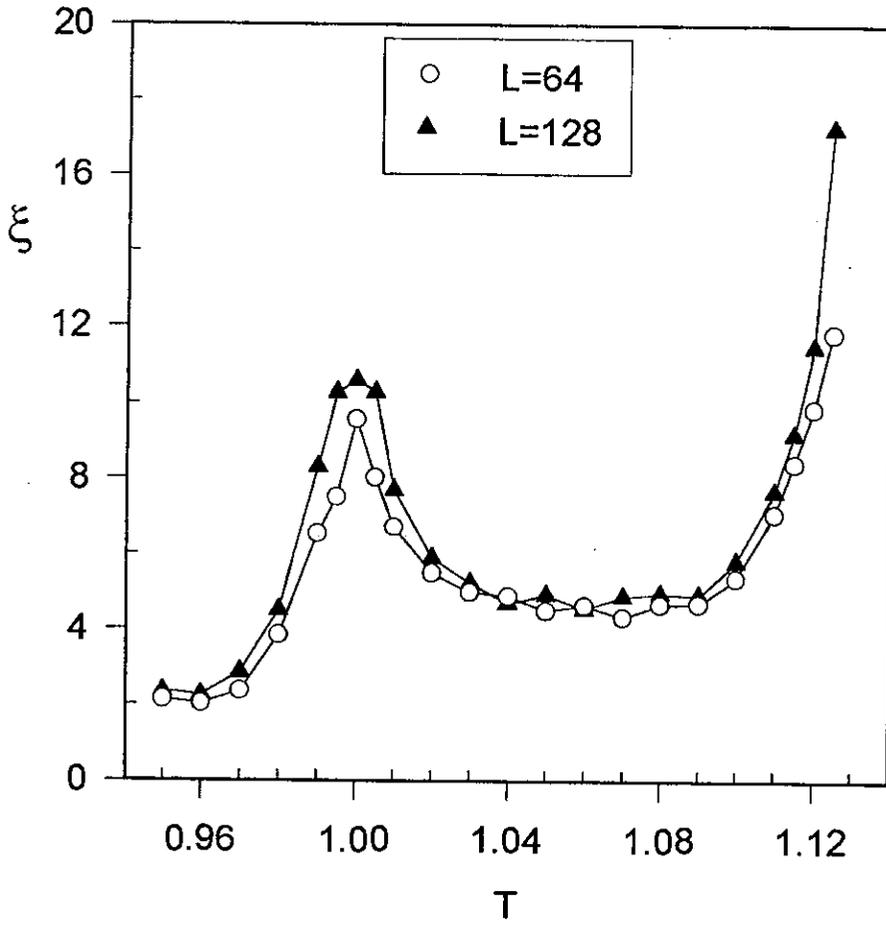


Figura 7.3: Comprimento de correlação  $\xi_D(T)$  para tempos longos em função da temperatura  $T$  para dois tamanhos diferentes  $L = 64$  e  $L = 128$  ( $M = 100$ ).

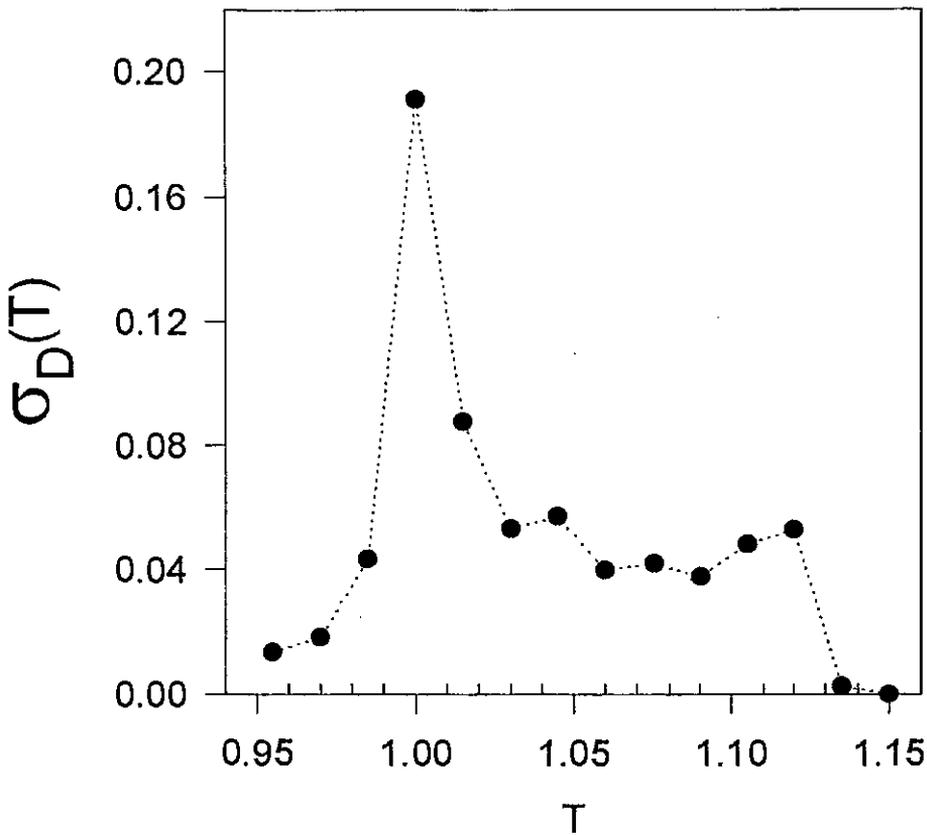


Figura 7.4: Flutuação  $\sigma_D(T)$  em função da temperatura  $T$  para  $L = 64$  e tempos longos.

$T_2$  que cresce muito pouco com o aumento do tamanho do sistema.

Como já mencionamos na introdução desse capítulo, podemos notar da figura (7.4) que a flutuação  $\sigma_D(T)$  apresenta um pico quase imperceptível na temperatura  $T_D$ , menor até do que o pico em  $T_2$  que, em princípio, deveria ser secundário já que o dano não é um parâmetro de ordem para essa transição. Esse pequeno pico em  $T_D$  parece contradizer o fato de que a função  $\Gamma(r, T)$  decai mais lentamente à medida em que nos aproximamos da temperatura  $T_D$  (como pode ser visto no gráfico (7.3) de  $\xi_D$  versus  $T$ ) o que deveria implicar em uma maior 'integral'  $\sigma_D(T_D)$ . O que ocorre de fato é que, ao mesmo tempo em que a função  $\Gamma(r, T)$  fica mais lenta à medida em que nos aproximamos de  $T_D$ , seu valor absoluto (ou sua amplitude) também decai, resultando em uma soma sobre  $r$  que, ao invés de aumentar, diminui ou aumenta muito pouco nessa temperatura. Esse fato

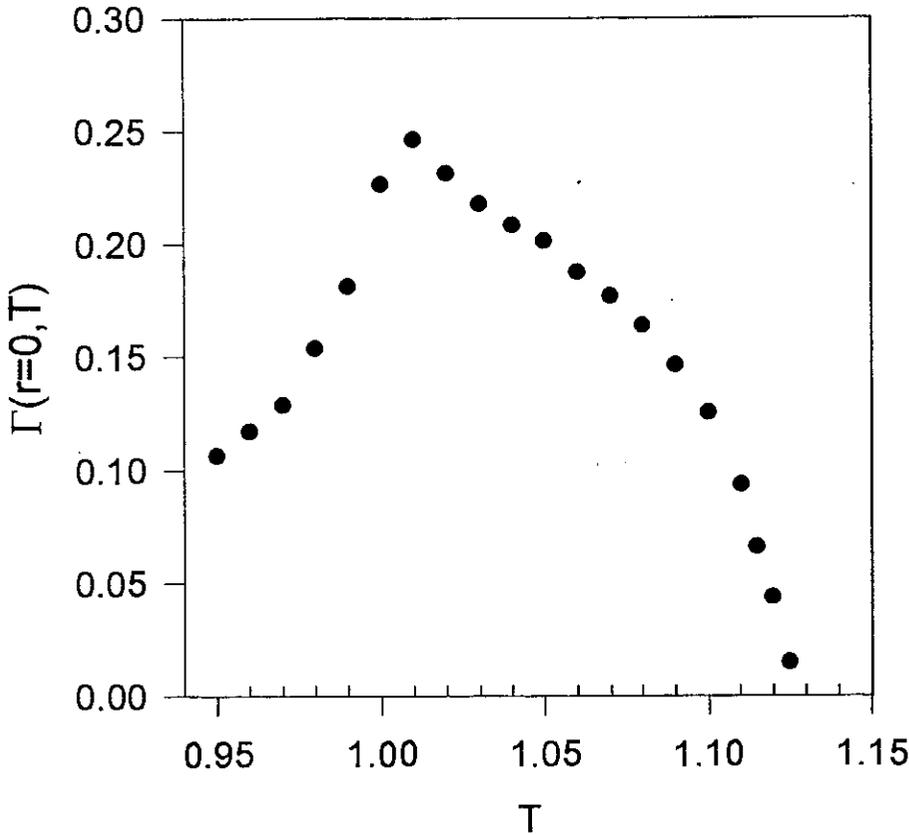


Figura 7.5: Função de correlação para  $r = 0$ ,  $\Gamma(r = 0, T)$ , em função da temperatura para tempos longos e  $L = 64$  ( $M = 100$ ).

pode ser visto na figura (7.5) onde mostramos, para exemplificar esse decaimento, o comportamento de  $\Gamma(r = 0, T)$  (que é o maior valor de  $\Gamma(r, T)$  para uma dada  $T$ ) em função da temperatura. Por esse motivo, a função  $\delta D(T)$  introduzida no início desse capítulo apresenta, em função da temperatura, picos arredondados quase que imperceptíveis em  $T_D$  e  $T_2$ .

Com o objetivo de isolar e eliminar esse efeito de decaimento da amplitude da função de correlação  $\Gamma(r, T)$ , definimos a função de correlação total  $G(T)$  entre as flutuações de dano nas réplicas do sistema por:

$$G(T) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^L N_p(r) \Gamma_0(r, T) \quad , \quad (7.11)$$

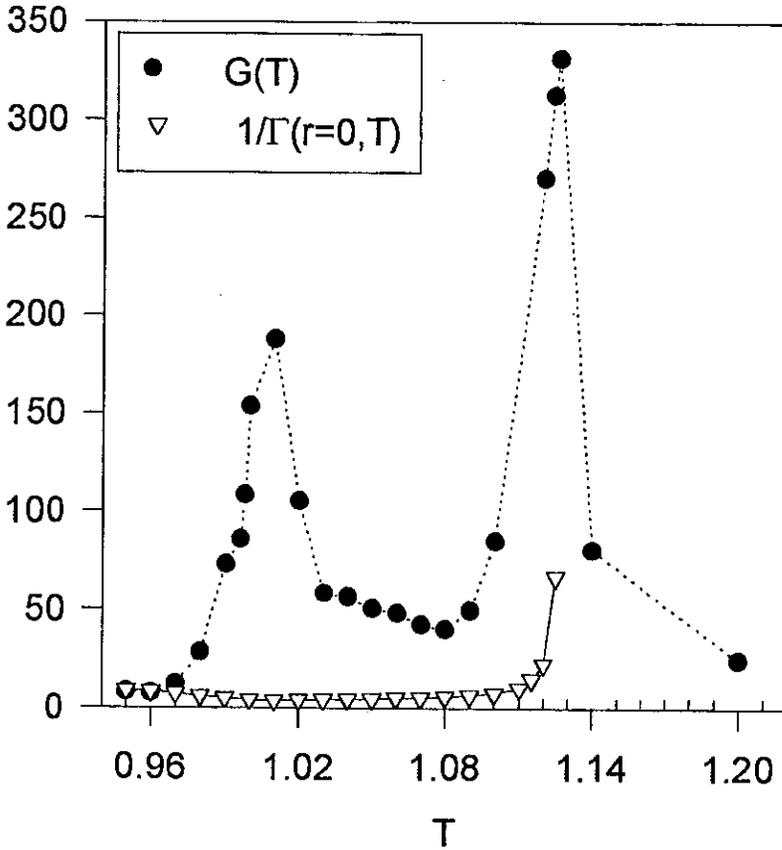


Figura 7.6: Função de correlação total  $G(T)$  e o inverso da função de correlação para  $r = 0$ ,  $1/\Gamma(r = 0, T)$ , em função da temperatura para  $L = 64$  e tempo  $t = 4000$  ( $M = 100$ ).

onde introduzimos a função de correlação normalizada em  $r = 0$ :

$$\Gamma_0(r, T) = \frac{\Gamma(r, T)}{\Gamma(r = 0, T)} \quad (7.12)$$

O comportamento da função  $G(T)$  em função da temperatura está mostrado na figura (7.6). Note que a relação de  $G(T)$  com a flutuação  $\delta D(T)$  definida anteriormente é:

$$G(T) = \frac{N \delta D(T)}{\Gamma(r = 0, T)} \quad (7.13)$$

Essa função  $G(T)$  apresenta um pico pronunciado na temperatura de transição de dano  $T_D$  e um pico menor na temperatura  $T_2$ , analogamente ao comportamento da suscetibilidade  $\chi_D$  que estudaremos em seguida. Acima da temperatura  $T_D$ ,  $G(T)$  (para campo  $h = 0$ ) é identicamente nula, já que nessa região, para a dinâmica banho térmico utilizada nas nossas simulações, o dano se anula rapidamente e, devido às duas réplicas

serem atualizadas com o mesmo ruído térmico, se mantém nulo indefinidamente. Para se estudar o comportamento de  $G(T)$  acima de  $T_D$  é necessário aplicar um campo conjugado  $h$  não nulo e depois considerar o limite dessa função para  $h \rightarrow 0$ . Esse procedimento foi o que adotamos para obter os pontos mostrados na figura (7.6) para  $T > T_D$ . Obtivemos também essa mesma curva para o tamanho  $L = 128$  e pudemos observar que, assim como ocorre com a suscetibilidade (como veremos em seguida), a função  $G(T)$  depende muito pouco do tamanho do sistema, com exceção das regiões de temperaturas muito próximas das temperaturas de transição  $T_D$  e  $T_2$  onde o tempo  $t$  para se obter resultados estacionários (que já é grande para  $L = 64$ ) aumenta muito quando passamos para  $L = 128$ . Por essa razão nossos gráficos não apresentam muitos pontos nas vizinhanças imediatas das temperaturas  $T_D$  e  $T_2$ . Nessa mesma figura (7.6) mostramos o comportamento do inverso da função de correlação  $1/\Gamma(r = 0, T)$  para efeito de comparação com o comportamento de  $G(T)$  na vizinhança da temperatura  $T_D$ .

Os resultados de Da Silva et al [40] para a suscetibilidade  $\chi_D$  no modelo de Potts foram obtidos através da variação de  $\langle D \rangle$  correspondente a pequenos valores de  $h$  ( $h = 0,01$  e  $h = 0,005$ ), sem apresentarem uma extrapolação para campo tendendo a zero. Por isso, em nossas simulações recalculamos essa suscetibilidade para mais valores do campo conjugado  $h$  e apresentamos na figura (7.7) os nossos resultados para  $\chi_D$  em função da temperatura para uma rede de tamanho  $L = 64$  e para quatro valores distintos do campo conjugado  $h$ . Apresentamos ainda o resultado de uma extrapolação para  $h \rightarrow 0$ . Podemos observar que essa função apresenta um pico pronunciado em  $T_D \simeq 1,13$  e que esse pico mostra um crescimento rápido à medida em que o campo  $h$  tende a zero. Notamos também a presença de um outro pico pequeno na temperatura  $T_2 \simeq 1,0$ , temperatura essa que está próxima do resultado obtido ( $T_2 = 0,99 \pm 0,01$ ) em [40].

Na figura (7.8) exibimos o comportamento (log-log) de  $\chi_D$  na temperatura  $T_D$  em

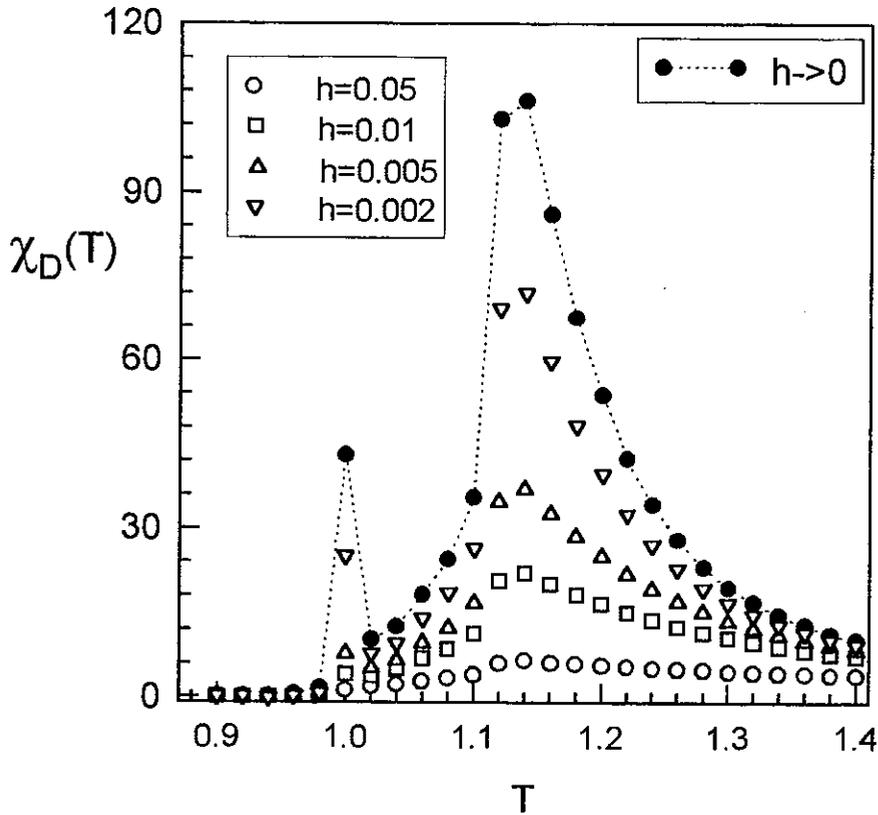


Figura 7.7: Suscetibilidade  $\chi_D$  em função da temperatura para  $L = 64$  e campos  $h = 0, 01, 0, 05, 0, 005$  e  $0, 002$ . Os círculos cheios são os resultados obtidos de uma extrapolação para  $h \rightarrow 0$  ( $M = 100$ ). O pico maior ocorre em  $T_D \simeq 1, 13$ .

função do valor do campo conjugado  $h$ . Vemos desse gráfico que  $\chi_D(T_D, h, L = 64)$  apresenta um comportamento bem próximo de uma lei de potência ( $\chi_D(T_D, h, L) \sim h^{-x}$ ), mostrando que o resultado para esse tamanho  $L = 64$  não deve diferir muito da suscetibilidade no limite termodinâmico ( $L \rightarrow \infty$ ) onde  $\chi_D$  deve apresentar uma divergência na temperatura  $T_D$  quando  $h$  se anula. Esse resultado, juntamente com as temperaturas  $T_D$  e  $T_2$  obtidas aqui sugerem que nossos resultados para o tamanho  $L = 64$  devem estar bem próximos dos resultados que seriam observados no limite termodinâmico para temperaturas não muito próximas das transições.

Esse fato é também corroborado pela figura (7.9) onde mostramos o comportamento da suscetibilidade  $\chi_D$  em função da temperatura para dois tamanhos diferentes da rede

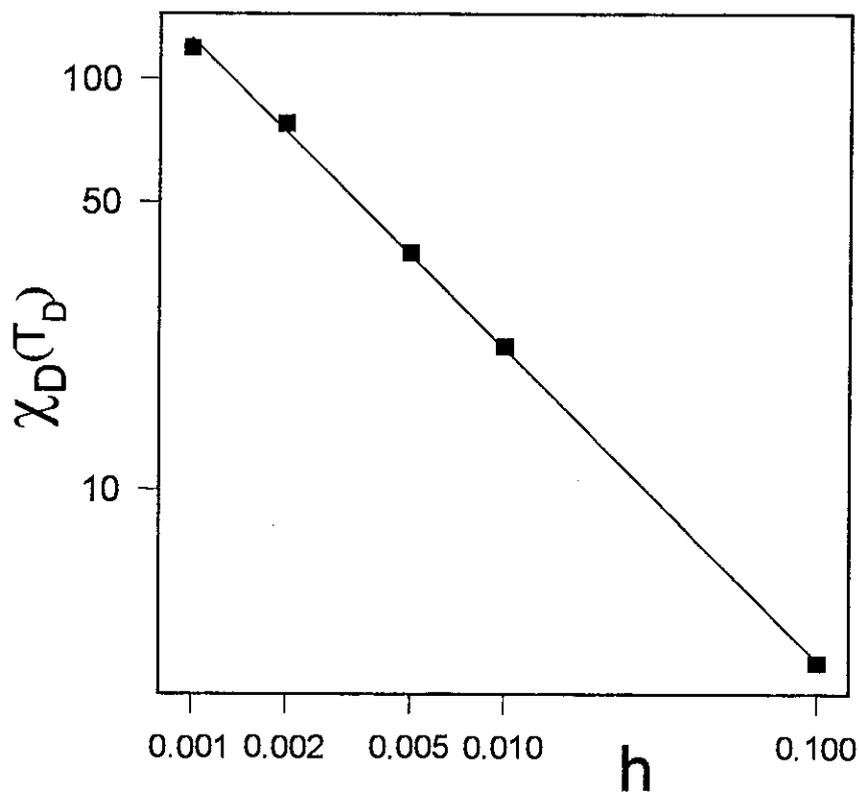


Figura 7.8: Gráfico log-log da suscetibilidade  $\chi_D$  na temperatura crítica  $T_D$  para diferentes valores do campo conjugado  $h$  ( $M = 100$ ).

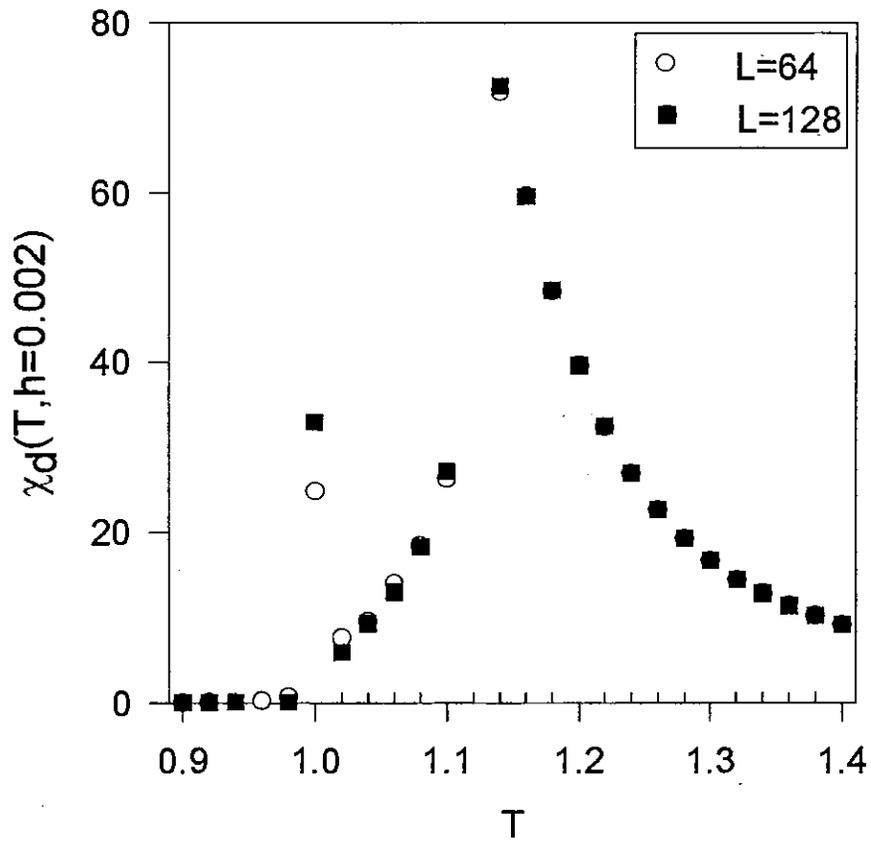


Figura 7.9: Suscetibilidade  $\chi_D$  em função da temperatura para dois tamanhos  $L = 64$  e  $L = 128$  e campo fixo  $h = 0,002$  ( $M = 100$ ).

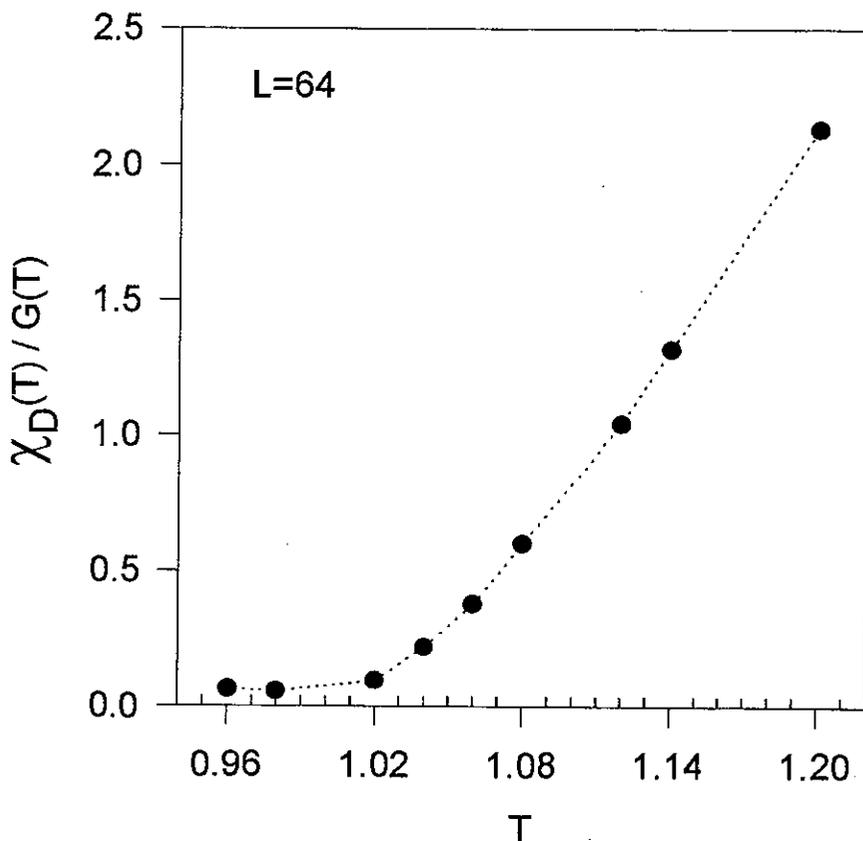


Figura 7.10: Razão entre a suscetibilidade  $\chi_D$  e a função de correlação total  $G(T)$  em função da temperatura para  $L = 64$  ( $M = 100$ ).

( $L = 64$  e  $L = 128$ ) e campo conjugado fixo  $h = 0,002$ . Podemos ver nessa figura que  $\chi_D$  é essencialmente independente do tamanho do sistema, exceto nas vizinhanças das transições onde o tempo de relaxação é tão grande que não nos foi possível computar o valor assintótico de  $\chi_D$  para tempos longos.

Nossos resultados para o dano nesse modelo sugerem algo similar ao que está expresso no teorema de flutuação-dissipação, qual seja, um vínculo estreito entre os comportamentos da resposta do sistema a um campo externo ( $\chi_D(T)$ ) e das flutuações do parâmetro de ordem conjugado a esse campo ( $G(T)$ ), onde as flutuações devem ser convenientemente normalizadas em  $r = 0$ . Essa relação está expressa por:

$$\chi_D = \mathcal{F}(T)G(T) = \mathcal{F}(T) \frac{N\delta D(T)}{\Gamma(r=0, T)} \quad , \quad (7.14)$$

com a função  $\mathcal{F}(T)$ , monótona crescente em  $T$ , conforme está exibido na figura (7.10). Apenas para efeito de comparação, o teorema de flutuação-dissipação usual para a magnetização é expresso pela relação:

$$\delta m = \langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = \frac{k_B T}{N} \chi_m \quad (7.15)$$

ou seja

$$\chi_m = \left( \frac{N}{k_B T} \right) \delta m \quad (7.16)$$

onde  $m$  é a magnetização por sítio e  $\chi_m$  é a suscetibilidade magnética.

## CAPÍTULO 8

### Conclusões Finais

Nesse capítulo apresentamos um resumo dos principais resultados apresentados nessa tese e algumas perspectivas para trabalhos futuros.

Na primeira parte da tese (composta dos capítulos 2, 3 e 4, além do capítulo didático 1) apresentamos resultados analíticos exatos obtidos através do método de Grupo de Renormalização no espaço real aplicado a modelos do tipo Ising em substratos fractais.

No capítulo 2 apresentamos um modelo exatamente solúvel definido numa família de fractais determinísticos, o ferromagneto de Ising com, além da interação entre primeiros vizinhos, campo externo e interações de três spins (denominado modelo de Ising generalizado) no fractal Sierpinski gasket de  $m$  folhas e lado  $b = 2$  ( $(mSG)_2$ ). Obtivemos as expressões exatas para algumas grandezas termodinâmicas em função da temperatura

no caso do modelo de Ising usual (com interações somente entre pares de spins) para diferentes valores de  $m$ .

Verificamos que a função  $M_\Delta$  (definida nas equações (2.35) e (2.36)) pode ser usada como um parâmetro de ordem alternativo neste modelo de Ising com campo externo pelas seguintes razões: (i) ele se anula na mesma temperatura crítica e com o mesmo expoente crítico  $\beta$  da magnetização  $M$ ; (ii) a introdução de seu campo conjugado (i.e., a interação entre três spins  $J_3$ ), não importa quão pequeno este seja, destrói a transição para-ferromagnética; (iii) a sua suscetibilidade correspondente  $\chi_\Delta$  diverge na temperatura crítica com o mesmo expoente crítico  $\gamma$  da suscetibilidade  $\chi$  associada à magnetização.

Com os expoentes críticos computados,  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , e  $\gamma$ , testamos a validade da lei de hiperescala e da lei de escala de Rushbrooke. Mesmo com os erros implícitos nos cálculos numéricos dos expoentes críticos (com exceção de  $\nu$ , que foi calculado exatamente), os valores obtidos aqui fornecem uma evidência muito forte a favor da validade dessas leis para o ferromagneto de Ising na família de fractais  $(mSG)_2$ . Em nosso conhecimento, não houve ainda nenhum outro trabalho na literatura exibindo qualquer prova ou verificação explícita (sem usar expressões analíticas aproximadas para as funções termodinâmicas correspondentes) da lei de Rushbrooke em sistemas fractais.

No capítulo 3 obtivemos, através de um procedimento exato de Grupo de Renormalização no espaço real, o diagrama de fases, bem como os expoentes críticos do comprimento de correlação, do modelo de Ising generalizado numa família de redes fractais com topologia triangular, especificamente, o Sierpinski gasket com  $m$  folhas e lado  $b = 4$   $((mSG)_4)$ . Ainda que o diagrama de fases, para qualquer valor fixo de  $m > 1$ , contenha pontos críticos para os dois casos (o ferromagneto de Ising usual com interações entre primeiros vizinhos ( $K_3 = H = 0$  e  $K_2 > 0$ ) e o modelo de Ising com interações somente entre tripletos ( $K_2 = H = 0$ )) pertencentes a classes de universalidade diferentes, os

modelos intermediários com  $K_2 > 0$ ,  $K_3 \neq 0$  e  $H = 0$  são sempre paramagnéticos. No caso mais geral, o campo magnético destrói, para todo  $m > 1$ , não apenas a transição para-ferromagnética do modelo  $K_3 = H = 0$ , mas também a transição do modelo com interações somente entre tripletos. Quanto ao caso antiferromagnético ( $K_2 < 0$ ), o sistema apresenta, além das fases paramagnética e antiferromagnética frustrada (que ocorrem para todo  $m > 1$ ), uma fase não usual do tipo Berker e Kadanoff quando a dimensão fractal é suficientemente alta. Verificamos que essa fase tem seu domínio restrito a apenas o eixo  $K_2 < 0$ , mostrando que um campo infinitesimal ( $H$  ou  $K_3$ ) é suficiente para aniquilar essa fase não usual. Todos esses resultados diferem dos obtidos para o modelo de Ising na rede triangular onde nem  $K_3$  destrói a transição para-ferromagnética do modelo  $K_3 = H = 0$ , nem  $H$  aniquila a transição do modelo com interações apenas entre tripletos.

No capítulo 4 retornamos à questão da validade da lei de hiperescala para o ferromagneto de Ising na família de redes fractais do tipo diamante. Utilizamos um método exato para determinar equações de recorrência para a energia interna e para a constante de acoplamento desse sistema. Com essas equações de recorrência obtivemos os expoentes críticos  $\alpha$  e  $\nu$  e verificamos explicitamente, sem nenhum cálculo numérico intermediário, a validade da lei de hiperescala para toda essa família de sistemas fractais.

As equações de recorrência obtidas através desse método de Hamiltoniano efetivo para o ferromagneto de Ising com campo externo são mais complexas do que as obtidas com campo nulo. No entanto, acreditamos que ainda seja possível, e pretendemos tentar isso no futuro, determinar analiticamente os expoentes  $\beta$  da magnetização e  $\gamma$  da suscetibilidade de forma a obter uma verificação analítica da lei de escala de Rushbrooke nesse modelo.

Na segunda parte da tese fazemos uso de simulações Monte Carlo e do método de Propagação de Danos para estudar propriedades dinâmicas dos modelos de Potts e Potts quiral que evoluem segundo uma dinâmica de banho térmico. Essa parte da tese é com-

posta dos capítulos 5, onde fazemos uma revisão do método de propagação de danos, 6 e 7, onde apresentamos nossos resultados.

No capítulo 6 investigamos, através da técnica de propagação de danos, as transições de fase dinâmicas no modelo de Potts quiral com três estados na rede quadrada submetido à dinâmica de banho térmico. Encontramos cinco fases dinâmicas das quais, quatro podem ser associadas com as fases estáticas conhecidas (ferromagnética (F), quiral (C), flutuante (M) e paramagnética (P)) e uma outra, a fase dinâmica caótica (DC), que subsiste mesmo para um campo quiral nulo e não possui equivalente estático. A fronteira superior dessa fase DC, que é quase insensível ao valor do campo quiral, está próxima do valor exato da temperatura crítica estática do ferromagneto de Ising na rede quadrada. As cinco fases podem ser diferenciadas por comportamentos distintos de pelo menos uma das quatro grandezas relacionadas ao dano analisadas aqui. Em particular, as características encontradas para  $\langle d \rangle$  e  $P(t)$  nos regimes flutuante e comensurável são os mesmos que foram obtidos para as fases correspondentes no modelo ANNNI bidimensional.

Obtivemos um regime dinâmico flutuante para todos os valores não nulos do campo quiral observados, analogamente a alguns resultados existentes na literatura para a fase de equilíbrio correspondente.

Uma questão interessante que pretendemos investigar nesse modelo é a coincidência (ou não) da temperatura de transição de dano com a temperatura de transição de percolação de aglomerados de spins correlacionados.

No capítulo 7 abordamos a questão da existência, ou não, de um análogo ao teorema de flutuação-dissipação para grandezas relacionadas ao dano no modelo de Potts com três estados na rede quadrada. Estudamos o comportamento das funções de correlação entre flutuações do dano para spins distantes  $r$  entre si e da função de correlação total. Mostramos que o comprimento de correlação apresenta um pico pronunciado na tempe-

ratura de transição de dano (onde o dano se anula), e que a função de correlação total também parece divergir nessa temperatura. Para mostrar essa divergência foi necessária a normalização das funções de correlação na origem ( $r = 0$ ), de tal forma a eliminar o efeito de decaimento da amplitude dessas funções. Comparando esses resultados com uma extrapolação da suscetibilidade do dano para campo conjugado nulo, pudemos mostrar que existe uma função monótona crescente com a temperatura que relaciona a correlação total com a suscetibilidade, analogamente ao teorema de flutuação-dissipação usual.

Futuramente pretendemos estender esse estudo a outros modelos como, por exemplo, o modelo de Ising, para o qual a temperatura de transição dinâmica, na dinâmica banho térmico, coincide com a temperatura de transição estática.

## Apêndice A

Conforme as definições

$$p_n = \left( \frac{W_{dn}W_{bn}}{W_{an}W_{cn}} \right)^{1/2} ; \quad q_n = \left( \frac{W_{bn}}{W_{an}} \right)^{1/2} ; \quad z_n = \left( \frac{W_{cn}W_{dn}}{W_{an}W_{bn}} \right)^{1/2} , \quad (9.1)$$

das variáveis de GR introduzidas no Capítulo 2, e utilizando as equações de renormalização (2.2), obtemos as seguintes equações de renormalização:

$$p'(p, q, z) = \left( \frac{(q^4p^3 + z(p^5z + 2q^4p^2 + 2q^4zp + p^4 + q^4))(q^4p^3 + z(3p^5z + 3z^2p^4 + q^4z^2))}{(p^2 + z(3q^4z + 3q^4z^2p + p^5z^2))(p^2 + z(q^4z + 2p^3 + 2zp^4 + q^4p + p^5))} \right)^{m/2} \quad (9.2)$$

$$q'(p, q, z) = \left( \frac{q^2(q^4p^3 + 3p^5z^2 + 3z^3p^4 + q^4z^3)}{p(p^2 + 3q^4z^2 + 3q^4z^3p + p^5z^3)} \right)^{m/2} \quad (9.3)$$

$$z'(p, q, z) = \left( \frac{z^2(p^2 + z(q^4z + 2p^3 + 2zp^4 + q^4p + p^5))(q^4p^3 + z(p^5z + q^4(2p^2 + 2zp + 1) + p^4))}{(p^2 + z(3q^4z + 3q^4z^2p + p^5z^2))(q^4p^3 + z(3p^5z + 3z^2p^4 + q^4z^2))} \right)^{m/2} \quad (9.4)$$

onde definimos  $p' = p_{n+1}$  e  $p = p_n$ , analogamente para  $z$ ,  $z'$ ,  $q$  e  $q'$ .

## Apêndice B

Nesse apêndice nós explicitamos as funções de partição restritas definidas pela equação (1.7) no capítulo 1, com  $n = 1$  e  $m = 1$  e que foram utilizadas no capítulo 3 para o modelo de Ising generalizado na rede  $(mSG)_4$ . De forma a compactar ao máximo o tamanho das expressões para essas funções de partição, usamos as seguintes definições:

$$\left\{ \begin{array}{ll} t_{\oplus} \equiv 1 + t & t_{\ominus} \equiv 1 - t \\ x_{\oplus} \equiv 1 + x & x_{\ominus} \equiv 1 - x \\ y_{\oplus} \equiv 1 + y & y_{\ominus} \equiv 1 - y \end{array} \right. \quad (10.5)$$

e fazemos ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} W(\uparrow, \uparrow, \uparrow) = A + B + C \\ W(\uparrow, \uparrow, \downarrow) = D + E + F + G \\ W(\uparrow, \downarrow, \downarrow) = H + I + J + K \\ W(\downarrow, \downarrow, \downarrow) = L + M \end{array} \right. \quad (10.6)$$

onde as funções  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$  e  $M$  são dadas pelas expressões mostradas nas páginas que seguem:

$$\begin{aligned}
A = & 27t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 27t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 3t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 18t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 54t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 9t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 60t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 9t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 12t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 6t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 42t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 6t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 6t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 3t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& t_{\oplus}^6t_{\ominus}^{24}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^6y_{\ominus}^{54} + 3t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + 18t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 3t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 15t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 30t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 9t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 27t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{52}y_{\ominus}^8 + 18t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + \\
& 12t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 9t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 12t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 45t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 3t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 78t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 84t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 3t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 6t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 6t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + \\
& 3t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 6t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 33t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 36t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 33t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 9t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 72t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 21t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 21t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 45t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 3t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 27t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 25t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 86t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 18t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + \\
& 9t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 39t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 36t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 26t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 6t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 18t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22}
\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}
B = & 39t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 30t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 12t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 18t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 45t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + t_{\oplus}^{30}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{60} + \\
& 21t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 3t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 3t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + \\
& 66t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 72t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 84t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 75t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 126t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 33t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 126t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 93t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 126t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 12t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 30t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 6t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 39t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^9y_{\oplus}^{30} + xy_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 24t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \tag{10.8} \\
& 15t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 9t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 12t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 9t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{52}y_{\ominus}^8 + \\
& 12t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 78t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 75t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 27t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 6t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 3t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 18t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 132t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 15t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 48t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& 111t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 3t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 39t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 39t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = & 102t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 3t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 24t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 60t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 60t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 84t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 12t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 12t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 87t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 36t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 45t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 12t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^9 + xy_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 3t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{54}y_{\ominus}^6 + 9t_{\ominus}^4t_{\oplus}^{26}x_{\oplus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{56}y_{\ominus}^4 + 99t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 33t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 6t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 3t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^9x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 9t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 102t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 48t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 6t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^9x_{\oplus}y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 60t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 15t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10}
\end{aligned} \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}
D = & 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 10t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 28t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 8t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 12t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 15t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 78t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 25t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 51t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 4t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 30t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 15t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 5t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 13t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 8t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 7t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 2t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \tag{10.10} \\
& 2t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + t_{\oplus}^4t_{\oplus}^{26}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^4y_{\ominus}^{56} + 7t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + \\
& 10t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 5t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^8y_{\ominus}^{52} + \\
& t_{\oplus}^{22}t_{\oplus}^8x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 55t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 11t_{\oplus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 30t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 3t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{52}y_{\ominus}^8 + 2t_{\oplus}^{24}t_{\oplus}^6x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& t_{\oplus}^{24}t_{\oplus}^6x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 19t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 18t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 22t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 16t_{\oplus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + \\
& 25t_{\oplus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 4t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 6t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 2t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = & 2t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^9x_{\oplus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 132t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 28t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 2t_{\oplus}^{26}t_{\ominus}^4x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{54}y_{\ominus}^6 + 6t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 7t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 2t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 4t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^8y_{\ominus}^{52} + t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 87t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 18t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 35t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 8t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 37t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 46t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 34t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 28t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 41t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 47t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 6t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 39t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 34t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 4t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 8t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + 20t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 93t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 52t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 17t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 50t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 2t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 2t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 10t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 8t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 34t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 89t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 38t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 8t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32}
\end{aligned} \tag{10.11}$$

$$\begin{aligned}
F = & 10t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 3t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + t_{\oplus}^{28}t_{\ominus}^2x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{58}y_{\ominus}^2 + 4t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 7t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 43t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 24t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 2t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^6x_{\ominus}y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + \\
& 48t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 67t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 85t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 59t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 12t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 70t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 125t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 68t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 4t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 49t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 8t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 40t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 21t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 4t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 30t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 2t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\oplus}y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + t_{\oplus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 12t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 22t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 2t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 2t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + t_{\oplus}^{22}t_{\oplus}^8x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 2t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 18t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 6t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + \\
& 3t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 91t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 76t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 27t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 2t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 24t_{\oplus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 4t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 8t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 93t_{\oplus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 14t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 25t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 14t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& 101t_{\oplus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 10t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 39t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 3t_{\oplus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 70t_{\oplus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 2t_{\oplus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 6t_{\oplus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30}
\end{aligned} \tag{10.12}$$

$$\begin{aligned}
G = & 45t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 100t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 48t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 98t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 3t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 27t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 100t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 79t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 24t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 6t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 2t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^{10}y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 7t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\ominus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{54}y_{\ominus}^6 + t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^{10}y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + \\
& 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 60t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 2t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 4t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 80t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 17t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 3t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^3x_{\oplus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}x_{\oplus}^9y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& 2t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 32t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 68t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 11t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 17t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 15t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + \\
& t_{\oplus}^{26}t_{\ominus}^4x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 13t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30}
\end{aligned} \tag{10.13}$$

$$\begin{aligned}
H = & 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 13t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^2x_{\oplus}^8y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 7t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 28t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 4t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 17t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 2t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 67t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 45t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 98t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 8t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 10t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 10t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 34t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 12t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 7t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^6y_{\ominus}^{54} + t_{\oplus}^2t_{\ominus}^{28}x_{\oplus}^9x_{\ominus}^2y_{\oplus}^2y_{\ominus}^{58} + \\
& 11t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + 7t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 15t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + \\
& 3t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^8y_{\ominus}^{52} + 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 18t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 27t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 24t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 5t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{52}y_{\ominus}^8 + 14t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 3t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 48t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 43t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 10t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 8t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 21t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24}
\end{aligned} \tag{10.14}$$

$$\begin{aligned}
I = & 2t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 4t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^9x_{\oplus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 68t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^6x_{\oplus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 46t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 2t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 6t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 15t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 18t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 2t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 4t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 2t_{\ominus}^4t_{\oplus}^{26}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^6y_{\ominus}^{54} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 12t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 34t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 55t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 17t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 3t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 39t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 28t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 3t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 8t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 24t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 100t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \tag{10.15} \\
& 2t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 70t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 6t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 37t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 87t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 25t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + 6t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 93t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 60t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 35t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 8t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 8t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^5x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 7t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 49t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 50t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 17t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 32t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 79t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 25t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = & 8t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + \\
& 10t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 16t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 4t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 30t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 68t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 78t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 76t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 27t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 100t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 125t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 132t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 4t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 10t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 6t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 80t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 6t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 2t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 24t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 13t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 14t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \tag{10.16} \\
& 15t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 3t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 2t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 3t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 2t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 4t_{\ominus}^6t_{\oplus}^{24}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{52}y_{\ominus}^8 + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 18t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 101t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 85t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 59t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 28t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 5t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 93t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 2t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 4t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 19t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& 91t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 2t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 30t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K = & 39t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 47t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 4t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 25t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 70t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 22t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 51t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 22t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 2t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 11t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 41t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 38t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 20t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 2t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& t_{\oplus}^4t_{\ominus}^{26}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{56}y_{\ominus}^4 + 52t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 2t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 2t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 40t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 2t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 8t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 8t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 2t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 89t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 48t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 7t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& 4t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^91 + xy_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + t_{\oplus}^{26}t_{\ominus}^4x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + \\
& 34t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 2t_{\oplus}^{24}t_{\ominus}^6x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + \\
& t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30}
\end{aligned} \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned}
L = & 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 27t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 18t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 6t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 6t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 30t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + \\
& 75t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 24t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 84t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 6t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 39t_{\ominus}^{20}t_{\oplus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 15t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 3t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 27t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 21t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{26} + 12t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 3t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 3t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 3t_{\oplus}^6t_{\ominus}^{24}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^6y_{\ominus}^{54} + \\
& t_{\oplus}^{30}x_{\ominus}^{10}y_{\oplus}^{60} + 9t_{\oplus}^4t_{\ominus}^{26}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^4y_{\ominus}^{56} + 30t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + \\
& 3t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 15t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 27t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^8y_{\ominus}^{52} + \\
& 36t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 12t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 72t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 48t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 12t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 60t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + \\
& 66t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 21t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 3t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 6t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 126t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 21t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 25t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 18t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 12t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{10}y_{\ominus}^{50} + 9t_{\oplus}^6t_{\ominus}^{24}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^8y_{\ominus}^{52} + t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 86t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 15t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 26t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 3t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 84t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 42t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 87t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 102t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 3t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 72t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 33t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 15t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 9t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{12}y_{\ominus}^{48} + 12t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + \\
& 132t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 99t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + \\
& 33t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 30t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 12t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^2x_{\ominus}^8y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 6t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 60t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 102t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34}
\end{aligned} \tag{10.18}$$

$$\begin{aligned}
M = & 36t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 12t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^8x_{\oplus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 9t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 9t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{16}y_{\ominus}^{44} + 3t_{\ominus}^8t_{\oplus}^{22}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 18t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 12t_{\ominus}^{12}t_{\oplus}^{18}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 18t_{\ominus}^{10}t_{\oplus}^{20}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 9t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^7x_{\oplus}^3y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + 48t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 54t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 3t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + 75t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 27t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 6t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 60t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 93t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^5x_{\oplus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + 78t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\ominus}^4x_{\oplus}^6y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 39t_{\ominus}^{18}t_{\oplus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 12t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + 33t_{\ominus}^{16}t_{\oplus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 45t_{\ominus}^{14}t_{\oplus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 6t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 45t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 12t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 6t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 12t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 3t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 6t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 6t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 6t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 111t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + \\
& 126t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{24}y_{\ominus}^{36} + 33t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 3t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 6t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + 6t_{\oplus}^{22}t_{\ominus}^8x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + 12t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{18}y_{\ominus}^{42} + \\
& 39t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 24t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{26}y_{\ominus}^{34} + 18t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{46}y_{\ominus}^{14} + \\
& 78t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 9t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 39t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30} + \\
& 3t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 27t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{42}y_{\ominus}^{18} + \\
& 39t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + 126t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 18t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{44}y_{\ominus}^{16} + \\
& 60t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + 9t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + 30t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{32}y_{\ominus}^{28} + \\
& 45t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 45t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& 39t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + 9t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^8x_{\ominus}^2y_{\oplus}^{20}y_{\ominus}^{40} + t_{\oplus}^{18}t_{\ominus}^{12}x_{\oplus}^{10}y_{\oplus}^{36}y_{\ominus}^{24} + \\
& t_{\oplus}^6t_{\ominus}^{24}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{54}y_{\ominus}^6 + 3t_{\oplus}^8t_{\ominus}^{22}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{14}y_{\ominus}^{46} + 3t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + \\
& 36t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 6t_{\oplus}^{20}t_{\ominus}^{10}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{22}y_{\ominus}^{38} + 30t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^3x_{\ominus}^7y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + \\
& 3t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^4x_{\ominus}^6y_{\oplus}^{40}y_{\ominus}^{20} + 18t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{34}y_{\ominus}^{26} + 84t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{28}y_{\ominus}^{32} + \\
& 3t_{\oplus}^{12}t_{\ominus}^{18}x_{\oplus}^6x_{\ominus}^4y_{\oplus}^{48}y_{\ominus}^{12} + 12t_{\oplus}^{14}t_{\ominus}^{16}x_{\oplus}^7x_{\ominus}^3y_{\oplus}^{38}y_{\ominus}^{22} + \\
& 3t_{\oplus}^{10}t_{\ominus}^{20}x_{\oplus}^5x_{\ominus}^5y_{\oplus}^{50}y_{\ominus}^{10} + 3t_{\oplus}^{16}t_{\ominus}^{14}x_{\oplus}^9x_{\ominus}y_{\oplus}^{30}y_{\ominus}^{30}
\end{aligned} \tag{10.19}$$

## Bibliografia

- [1] S. G. Brush, *History of the Lenz-Ising Model*, Rev. Mod. Phys. 39 883 (1978)
- [2] F. Y. Wu, *The Potts Model*, Rev. Mod. Phys. 54 235 (1982) e *Potts Model of Magnetism*, J. Appl. Phys. 55 2421 (1984)
- [3] L. J. De Jongh e A. R. Miedema, *Experiments on Simple Magnetic Model Systems*, Adv. Phys. 23 1 (1974)
- [4] E. Domany e M. Shick, *Classification of Continuous Order-disorder Transitions in Adsorbed Monolayers. II*, Phys. Rev. B 20 3828 (1979)
- [5] R. L. Park, T. L. Einstein, A. R. Kortan e L. D. Roelofs, em *Ordering in Two Dimensions*, North-Holland, New York (1980)
- [6] T. C. Lubenski e J. Isaacson, *Field Theory for the Statistics of Branched Polymers, Gelation, and Vulcanization*, Phys. Rev. Lett. 41 829 (1978)

- [7] L. Onsager, *Cristal Statistics I: A Two-dimensional Model with an Order-disorder Transition*, Phys. Rev. 65 117 (1944)
- [8] R. J. Baxter, S. B. Kelland e F. Y. Wu, J. Phys. A 8 245 (1976)
- [9] L. P. Kadanoff e R. J. Wegner, Phys. Rev. B 4 3989 (1971)
- [10] K. G. Wilson, Phys. Rev. B 4 3174 e 3184 (1971)
- [11] K. G. Wilson e M. E. Fisher, *Critical Exponents in 3.99 Dimensions*, Phys. Rev. Lett. 28 240 (1972)
- [12] C. Tsallis e A. C. N. de Magalhães, *Pure and Random Potts-like Models: Real-space Renormalization-group Approach*, Phys. Rep. 268 (1996)
- [13] A. A. Migdal, Sov. Phys. JETP 69 810 (1975) e 69 1457 (1975), e L. P. Kadanoff, Ann. Phys. (N.Y.) 100 359 (1976)
- [14] A. N. Berker e S. Ostlund, *Renormalisation-group Calculations of Finite Systems: Order Parameter and Specific Heat for Epitaxial Ordering*, J. Phys. C 12 4961 (1979)
- [15] Y. Gefen, B. B. Mandelbrot e A. Aharony, *Critical Phenomena on Fractal Lattices*, Phys. Rev. Lett. 45 855 (1980)
- [16] M. Kaufman e R. B. Griffiths, *First-order Transitions in Defect Structures at a Second-order Critical Point for the Potts Model on Hierarchical Lattices*, Phys. Rev. B 26 5282 (1982)
- [17] M. Kaufman e R. B. Griffiths, *Exactly Soluble Ising Models on Hierarchical Lattices*, Phys. Rev. B 24 496 (1981)
- [18] J. R. Melrose, *Hierarchical Lattices: Some Examples with a Comparison of Intrinsic Dimension and Connectivity and Ising Model Exponents*, J. Phys A 16 3077 (1983)

- [19] R. B. Griffiths e M. Kaufman, *Spin Systems on Hierarchical Lattices. II. Some Examples of Soluble Models*, Phys. Rev. B 30 244 (1984)
- [20] Y. Gefen, A. Aharony, Y. Shapir e B. B. Mandelbrot, *Phase Transitions on Fractals: II. Sierpinski Gaskets*, J. Phys. A 17 435 (1984)
- [21] C. Tsallis, *On the Hierarchical Lattices Approximation of Bravais Lattices: Specific Heat and Correlation Length*, J. Phys. C 18 6581 (1985)
- [22] Z. R. Yang, *Family of Diamond-type Hierarchical Lattices*, Phys. Rev. B 38 728 (1988)
- [23] W. A. M. Morgado, S. Coutinho e E. M. F. Curado, *Multifractal Magnetization on Hierarchical Lattices*, J. Stat. Phys. 61 913 (1991)
- [24] S. Coutinho, O. D. Neto, J. R. L. Almeida, E. M. F. Curado e W. A. M. Morgado, *Multifractality of Ising Models on Hierarchical Lattices: Pure and Spin Glass Cases*, Phys. A 185 271 (1992)
- [25] F. S. de Menezes e A. C. N. de Magalhães, *Potts Model on Infinitely Ramified Sierpinski-gasket-type Fractals and Algebraic Order at Antiferromagnetic Phases*, Phys. Rev. B 46 11642 (1992)
- [26] J. A. Redinz, A. C. N. de Magalhães e E. M. F. Curado, *Potts Antiferromagnetic Model on a Family of Fractal Lattices: Exact Results for an Unusual Phase*, Phys. Rev. B 49 6689 (1994)
- [27] L. da Silva, E. M. F. Curado, W. A. M. Morgado e S. Coutinho, *Criticality and Multifractality of the Potts Ferromagnetic Model on Fractal Lattices*, Phys. Rev. B 53 6345 (1996)
- [28] H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, New York (1971)

- [29] A. N. Berker e L. P. Kadanoff, *Ground State Entropy and Algebraic Order at Low Temperatures*, J. Phys. A 13 L259 (1980)
- [30] M. L. Martins, H. F. V. de Resende, C. Tsallis e A. C. N. de Magalhães, *Evidence for a New Phase in the Domany-Kinzel Cellular Automaton*, Phys. Rev. Lett. 66 2045 (1991)
- [31] H. E. Stanley D. Stauffer, J. Kertesz e H. Herrmann, *Dynamics of Spreading Phenomena in Two-dimensional Ising Models*, Phys. Rev. Lett. 59 2326 (1987)
- [32] B. Derrida e G. Weisbuch, *Dynamical Phase Transitions in 3-dimensional Spin Glasses*, Europhys. Lett. 4 657 (1987)
- [33] D. Stauffer, *Effective Analysis of Damage Spreading in Ising Models*, J. Phys. A 26 L599 (1993)
- [34] F. Wang, N. Hatano e M. Suzuki, *Study on Dynamical Critical Exponents of the Ising Model Using the Damage Spreading Method*, J. Phys. A 28 4543 (1995)
- [35] F. Wang e M. Suzuki, *Time-Evolution of Damage in the Ising Model*, Physica A 223 34 (1996)
- [36] A. Coniglio, L. de Arcangelis, H. J. Herrmann e N. Jam, *Exact Relations between Damage Spreading and Thermodynamical Properties*, Europhys. Lett. 8 315 (1989)
- [37] O. Golinelli e B. Derrida, *Dynamical Phase Transitions in the Two-Dimensional XY Model*, J. Phys. A 22 L939 (1989)
- [38] J. Chiu e S. Teitel. *The Effect of Dynamics on Damage Spreading in the Two-Dimensional Classic XY Model*, J. Phys. A 23 L891 (1990)
- [39] E. N. Miranda e N. Parga, *Dynamical Phase Transitions in the Classical Heisenberg Model*, J. Phys. A 24 1059 (1991)

- [40] L. da Silva, F. A. Tamarit e A. C. N. de Magalhães, *Damage Spreading in a Two-dimensional Potts Ferromagnet in an External Field*, J. Phys. A 30 2329 (1997)
- [41] M. F. de A. Bibiano, F. G. Brady Moreira e A. M. Mariz, *Damage Spreading in the  $q$ -state Potts Model*, Phys. Rev. E 55 1448 (1997)
- [42] A. M. Mariz, *Damage Spreading in the Potts and Ashkin-Teller Models: Exact Results*, J. Phys. A 23 979 (1990)
- [43] M. N. Barber e B. Derrida, *Dynamical Phase Transitions in the Two-dimensional ANNNI Model*, J. Stat. Phys. 51 877 (1988)
- [44] Y. Leroyer e K. Rouidi, *Dynamical Phase Diagram of the Two-dimensional  $p$ -state Clock Model*, J. Phys. A 24 1931 (1991)
- [45] A. V. Neumann e B. Derrida, *Finite Size Scaling Study of Dynamical Phase Transitions in Two Dimensional Models: Ferromagnet, Symmetric and non Symmetric Spin Glasses*, J. Phys. France 49 1647 (1988)
- [46] I. A. Campbell e L. de Arcangelis, *On the Damage Spreading in Ising Spin Glasses*, Physica A 178 29 (1991)
- [47] L. de Arcangelis, A. Coniglio e H. Herrmann, *Damage Spreading in Spin Glasses*, Europhys. Lett 9 749 (1989)
- [48] A. A. Júnior e F. D. Nobre, *Damage Spreading in the Fully Frustrated Square-lattice Ising Model*, Physica A 243 58 (1997)
- [49] E. S. de Souza, A. M. Mariz, F. D. Nobre e U. M. S. Costa, *The Two-dimensional Site-diluted Ising Ferromagnet A Damage Spreading Analysis*, Physica A 241 469 (1997)

- [50] R. M. Z. dos Santos e A. T. Bernardes, *Immunization and Aging: a Learning Process in the Immune Network*, preprint (1998)
- [51] E. V. Albano, *Spreading Analysis and Finite-size Scaling Study of the Critical Behavior of a Forest Fire Model with Immune Trees*, *Physica A* 216 213 (1995)
- [52] A. R. R. Papa e C. Tsallis, *Imitation Games: Power-law Sensitivity to Initial Conditions and Nonextensivity*, *Phys. Rev. E* 57 3923 (1998)
- [53] F. A. Tamarit, S. A. Cannas e C. Tsallis, *Sensitivity to Initial Conditions in the Bak-Sneppen Model of Biological Evolution*, *Eur. Phys. J. B* 1 545 (1998)
- [54] S. Ostlund, *Incommensurate and Commensurate Phases in Asymmetric Clock Models*, *Phys. Rev. B* 24 398 (1981)
- [55] D. A. Huse, *Simple Three-state Model with Infinitely Many Phases*, *Phys. Rev. B* 24 5180 (1981)
- [56] T. F. Nagy, S. D. Mahanti e C. Tsallis, *Correlation Function Studies on the Domany-Kinzel Cellular Automaton*, *Physica A* 250 345 (1998)
- [57] C. Tsallis e M. L. Martins, *Has the Spreading-of-damage Order Parameter a Conjugate Field?*, *Europhys. Lett.* 27 415 (1994)
- [58] B. Mandelbrot, *Fractals, Form, Chance and Dimensions*, Freeman Ed., São Francisco (1977)
- [59] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman Ed., São Francisco (1982)
- [60] B. Mandelbrot, *Fractals and Multifractals, Noise, Turbulence and Galaxies*, Springer Ed. (1988)

- [61] N. Ostrowsky e H. E. Stanley (Eds.), *On Growth and Form*, M. Nijhoff, The Hague (1985)
- [62] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York (1988)
- [63] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena*, World Scientific, Singapore (1992)
- [64] T. Tél, *Fractals, Multifractals and Thermodynamics*, *Z. Natur.* **43a** 1154 (1988)
- [65] M. Vilela, M. L. Martins e S. Bosheti, *Fractal Patterns for Cells in Culture*, *J. Pathology* **177** 103 (1995)
- [66] J. A. Redinz e P. R. C. Guimarães, *The Fractal Nature of Wood Revealed by Water Absorption*, *Wood and Fiber Science* **29** 333 (1997)
- [67] T. Vicsek, F. Family e P. Meakin, *Multifractal Geometry of Diffusion-limited Aggregates*, *Europhys. Lett.* **12** 217 (1990)
- [68] F. Family, B. R. Masters e D. E. Platt, *Fractal Patterns Formation in Human Retinal Vessels*, *Phys. D* **38** 98 (1989)
- [69] K. Falconer, *Fractal Geometry*, J. Wiley & Sons, New York (1990)
- [70] J. R. Melrose, *The Migdal-Kadanoff Approximation: Optimisation, Generalisation, Ising Model in External Fields and the Migdal-Kadanoff Hierarchies*, *J. Phys. A* **16** 1041 (1983)
- [71] P. M. Bleher e E. Zals, *Asymptotics of the Susceptibility for the Ising Model on the Hierarchical Lattices*, *Commun. Math. Phys.* **120** 409 (1989)
- [72] M. Kaufman, R. B. Griffiths, J. M. Yeomans e M. E. Fisher, *Three-component Model and Tricritical Points: a Renormalization-group Study. Two Dimensions*, *Phys. Rev B* **23** 3448 (1981)

- [73] J. M. Ycomans e M. E. Fisher, *Three-component Model and Tricritical Points: a Renormalization-group Study. II. General Dimensions and Three-Phase Monohedron*, Phys. Rev. B 24 2825 (1981)
- [74] C. Tsallis, A. M. Mariz, A. Stella e L. R. da Silva, *Criticality of the Discrete  $N$ -vector Ferromagnet in Planar Self-dual Lattices*, J. Phys. A 23 329 (1990)
- [75] A. M. Mariz, C. Tsallis e P. Fulco,  *$Z(4)$  Model: Criticality and Break-Collapse Method*, Phys. Rev. B 32 6055 (1985)
- [76] A. M. Mariz, A. C. N. de Magalhães, L. R. da Silva e C. Tsallis,  *$Z(6)$  Model: Criticality and Break-collapse Method*, Phys. A 162 161 (1990)
- [77] R. B. Griffiths, *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 1, C. Domb e J. L. Lebowitz (Eds.), Academic, New York (1983)
- [78] J. H. Luscombe e R. C. Desai, *Statistical Mechanics of a Fractal Lattice: Renormalization-group Analysis of the Sierpinski Gasket*, Phys. Rev. B 32 1614 (1985)
- [79] J. H. Luscombe e R. C. Desai, *Ising Thermodynamics on the Sierpinski Gasket*, Phys. Lett. A 108 39 (1985)
- [80] R. Hilfer e A. Blumen, *Renormalization on Sierpinski-type Fractals*, J. Phys. A 17 L537 (1984)
- [81] S. H. Liu, *Unusual Long-range-order Property of the Ising Model on the Sierpinski Gasket*, Phys. Rev. B 32 5804 (1985)
- [82] B. D. Stošić, S. Sastry, D. Kostić, S. Milošević e H. E. Stanley, *Geometric Criteria for Phase Transitions: the Ising Model with Nearest and Next-nearest Neighbor Interactions*, Physica A 232 349 (1996)

- [83] T. Stošić, B. D. Stošić, S. Milošević e H. E. Stanley, *Ising Model on the Sierpinski Gasket: Thermodynamical Limit Versus Infinitesimal Field*, *Physica A* **233** 31 (1996)
- [84] Z. Borjan, S. Elezović, M. Knežević e S. Milošević, *Asymptotic Form of the Spectral Dimension of the Sierpinski Gasket Type of Fractals*, *J. Phys. A* **20** L715 (1987)
- [85] S. Elczović, M. Knežević e S. Milošević, *Critical Exponents of the Self-avoiding Walks on a Family of Finitely Ramified Fractals*, *J. Phys. A* **20** 1215 (1987)
- [86] P. Alström, D. Stassinopoulos e H. E. Stanley, *"Thermodynamical Formalism" for an Infinite Hierarchy of Fractal Resistor Networks*, *Physica A* **153** 20 (1988)
- [87] T. Abe, *A Model for Phase Transition on Sierpinski Gaskets*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** 1962 (1989)
- [88] R. B. Stinchcombe, *Frustration and Correlations in Fractals*, *Physica D* **38** 345 (1989) e *Fully Frustrated Fractal*, *Phys. Rev. B* **41** 2510 (1990)
- [89] M. P. Grillon e F. G. Brady Moreira, *Exact Renormalization Group Approach on Frustrated Sierpinski-type Fractals*, *Phys. Lett. A* **142** 22 (1989)
- [90] W. Jezewsky e P. Tomczak, *Universality Classes of Ising Systems with Long-range Interactions on Sierpinski-gasket-like Lattices*, *Phys. Lett. A* **157** 507 (1991) e *Exact Renormalization-group Approach to Critical Phenomena in an Ising System with Long-range Interactions on the Sierpinski-gasket Lattice*, *Physica A* **171** 209 (1991)
- [91] A. Valla, S. E. Korshunov e H. Beck, *XY Model on a Sierpinski Gasket*, *Phys. Rev. B* **43** 8482 (1991)
- [92] T. Stosic, B. Stosic, S. Milosevic e H. E. Stanley, *Fractal-to-euclidean Crossover of the Thermodynamic Properties of the Ising Model*, *Phys. Rev. E* **49** 1009 (1994)

- [93] E. P. da Silva e C. Tsallis, *Susceptibility of the Potts Model on a Hierarchical Lattice: Renormalization Group Approach*, Physica A 167 347 (1990)
- [94] B. Hu, *Problem of Universality in Phase Transitions on Hierarchical Lattices*, Phys. Rev. Lett. 55 2316 (1985)
- [95] Y. K. Wu e B. Hu, *Phase Transitions on Complex Sierpiński Carpets*, Phys. Rev. A 35 1404 (1987)
- [96] J. A. Redinz e A. C. N. de Magalhães, *Ising Ferromagnet on a Fractal Family: Thermodynamical Functions and Scaling Laws*, Phys. Rev. B 51 2930 (1995)
- [97] L. R. da Silva e C. Tsallis, *Criticality of the Potts Ferromagnet in Migdal-Kadanoff-like Hierarchical Lattices*, J. Phys. A 20 6013 (1987)
- [98] M. E. Fisher e D. S. Gaunt, *Ising Model and Self-avoiding Walks on Hypercubical Lattices and 'High-density' expansions*, Phys. Rev. 133 A244 (1964)
- [99] W. Kinzel, W. Selke e F. Y. Wu, J. Phys. A 14 L399 (1981)
- [100] E. H. Lieb e F. Y. Wu, em *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 1 p. 331, editado por C. Domb e M. S. Green (Academic, New York) (1972)
- [101] R. J. Baxter, M. F. Sykes e M. G. Watts, *Magnetization of the Three-spin Triangular Ising Model*, J. Phys. A 8 245 (1975)
- [102] M. N. Barber, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb e J. L. Lebowitz (Eds.), Academic, New York (1983) vol. 8, p.145
- [103] J. A. Redinz e A. C. N. de Magalhães, *Criticality of Two-and three-spin Ising Model in an External Field on a Fractal Family*, Physica A 246 27 (1997)

- [104] R. J. Baxter e F. Y. Wu, *Ising Model on a Triangular Lattice with Three-spin Interactions. I The Eigenvalue Equation*, Aust. J. Phys. 27 357 (1974)
- [105] P. M. C. de Oliveira, *Renormalization Group for an Ising System with Competing Interactions*, J. Phys. (Paris) 47 1107 (1986)
- [106] M. J. Stephen, Phys. Lett. A 56 149 (1976)
- [107] B. Nienhuis e M. Nauenberg, *First-order Phase Transitions in Renormalization-group Theory*, Phys. Rev. Lett. 35 477 (1975)
- [108] M. E. Fisher e A. N. Berker, *Scaling for First-order Phase Transitions in Thermodynamic and Finite Systems*, Phys. Rev. B 26 2507 (1982)
- [109] M. Schick, J. S. Walker e M. Wortis, *Phase Diagram of the Triangular Ising Model: Renormalization-group Calculation with Application to Adsorbed Monolayers*, Phys. Rev. B 16 2205 (1977)
- [110] J. A. Redinz, *Ising Ferromagnet in Fractal Lattices: Analytical Verification of the Hyperscaling Law*, J. Phys. A 31 6921 (1998)
- [111] S. A. Kauffman, *Metabolic Stability and Epigenesis in Randomly Connected Nets*, J. Theor. Biol. 22 437 (1969)
- [112] M. Creutz, Ann. Phys. 167 62 (1986)
- [113] A. M. Mariz, A. M. C. de Souza e C. Tsallis, *Spread of Damage in the Discrete N-vector Ferromagnet: exact Results*, J. Phys. A 26 L1007 (1993)
- [114] L. de Arcangelis, A. Coniglio e F. Peruggi, *Percolation Transitions in Spin Glasses*, Europhys. Lett. 14 515 (1991)

- [115] V. Cataudella, *Percolation Transition in Systems with Frustration*, Physica A 183 (1992) 249
- [116] G. M. Zhang e C. Z. Yang, *Comparative Study of Dynamical Transition and Percolation Transition in an Ising Model with Frustration*, Europhys. Lett. 22 505 (1993)
- [117] M. Nicodemi, *Percolation and Cluster Formalism in Continuous Spin Systems*, Physica A 238 9 (1997)
- [118] P. Grassberger, *Are Damage Spreading Transitions Generically in the Universality Class of Directed Percolation?*, J. Stat. Phys. 79 13 (1995)
- [119] G. Le Caer, *Damage Spreading in a Three-dimensional Ising Model in a Magnetic Field*, J. Phys. A 22 L647 (1989) e *Damage Spreading in a Ferromagnetic Cubic Ising System as a Function of Temperature and Magnetic Field*, Phys. A 159 329 (1989)
- [120] T. Tomé, *Spreading of Damage in the Domany-Kinzel Cellular Automaton: a Mean Field Approach*, Physica A 212 99 (1994)
- [121] F. A. Tamarit e L. da Silva, *The 2D Ising Ferromagnet: Spreading of Damage and its Conjugate Field*, J. Phys. A 27 L809 (1994)
- [122] A. J. Yoshimori, J. Phys. Soc. Japan 14 807 (1959) e S. Tanisaki, J. Phys. Soc. Japan 16 579 (1961)
- [123] D. A. Huse e M. E. Fisher, *Commensurate Melting, Domain Walls, and Dislocations*, Phys. Rev. B 29 239 (1984)
- [124] F. Boszo, G. Ertl, M. Grunze e M. Weiss, Appl. Surface Sci. 1 103 (1977) e R. Imbihl, R. J. Behm, K. Cristmann, G. Ertl e T. Matsushima, Surface Sci. 117 257 (1982)

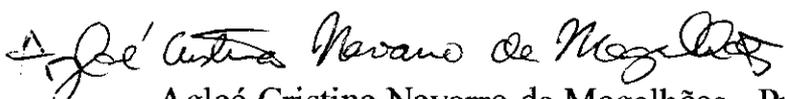
- [125] H. C. Öttinger, *Mean-field Theory of the Chiral Potts Model*, J. Phys. C 15 L1257 (1982), *Two-dimensional Iterated Mapping for the Mean-field Theory of the Chiral Potts Model*, J. Phys. C 16 L257 e *Order-disorder and Ferromagnetic-modulated Phase Transitions of the Chiral Potts Model*, J. Phys. C L597 (1982)
- [126] M. Siegert e H. Everts, *Critical Behavior of Modulated Phases in the Chiral Clock Model*, Z. Phys. B 60 265 (1985)
- [127] D. A. Huse e M. E. Fisher, *Domain Walls and the Melting of Commensurate Surface Phases*, Phys. Rev. Lett. 49 793 (1982)
- [128] D. A. Huse , A. M. Szpilka e M. E. Fisher, *Melting and Wetting Transitions in the Three-state Chiral Clock Model*, Physica A 121 363 (1983)
- [129] F. D. M. Haldane, P. Bak e T. Bohr, *Phase Diagram of Surface Structures from Bethe-ansatz Solutions of the Quantum Sine-Gordon Model*, Phys. Rev B 28 2743 (1983)
- [130] H. J. Schulz, *Phase Transitions in Monolayers Adsorbed on Uniaxial Substrates*, Phys. Rev. B 28 2746 (1983)
- [131] S. F. Howes, *Commensurate-incommensurate Transitions and Lifshitz Point in the Quantum Asymmetric Clock Model*, Phys. Rev. B 27 1762 (1983)
- [132] J. M. Yeomans e M. E. Fisher, *Analysis of the Multiphase Region in the Three-state Chiral Clock Model*, Physica A 127 1 (1984)
- [133] G. von Gehlen e V. Rittenberg, Nucl. Phys. B230 455 (1984)
- [134] W. Selke e J. M. Yeomans, *A Monte Carlo Study of the Asymmetric Clock or Chiral Potts Model in Two Dimensions*, Z. Phys. B 46 311 (1982)

- [135] W. S. McCullough e H. L. Scott, *Mean Field and Monte Carlo Analysis of the  $p$ -state Chiral Clock Model*, J. Phys. A 22 4463 (1989)
- [136] D. A. Huse, Phys. Rev. B 24 5180 (1981)
- [137] P. M. Duxbury, J. Yeomans e P. D. Beale, *Wavevector Scaling and the Phase Diagram of the Chiral Clock Model*, J. Phys. A 17 L179 (1984)
- [138] J. Yeomans e B. Derrida, *Bulk and Interface Scaling Properties of the Chiral Clock Model*, J. Phys. A 18 2343 (1985)
- [139] J. M. Houlik e S. J. K. Jensen, *Phase Diagram of the Three-state Chiral Clock Model Studied by Monte Carlo Renormalization-group Calculations*, Phys. Rev. B 34 325 (1986)
- [140] M. L. Martins e C. Tsallis, *Criticality of the Three-state Chiral Clock Model: a Renormalization Group Study*, J. Phys. A 23 3043 (1990)
- [141] H. U. Everts e H. Röder, em *Transfer Matrix Study of the Chiral Clock Model in the Hamiltonian Limit*, J. Phys. A 22 2475 (1989)
- [142] J. A. Redinz, F. A. Tamarit e A. C. N. de Magalhães, *Dynamical Phase Transitions in the Square Lattice Three-state Chiral Potts Model*, Physica A 255 439 (1998)

**“PROPRIEDADES ESTÁTICAS E DINÂMICAS DE  
MODELOS MAGNÉTICOS DO TIPO POTTS: RESULTADOS  
DE CÁLCULOS EXATOS E DE SIMULAÇÕES”**

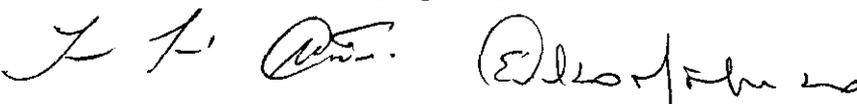
*José Arnaldo Redinz*

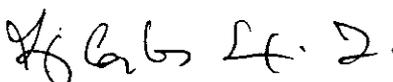
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

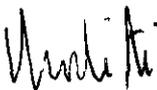
  
Aglaé Cristina Navarro de Magalhães - Presidente

  
Anantas Monteiro Mariz

  
Tania Thomé Martins de Castro

  
Evaldo Mendonça Fleury Curado

  
Luiz Carlos Sampaio Lima

  
Itzhak Roditi - Suplente

Rio de Janeiro, 08 de outubro de 1998