

TESE DE
MESTRADO

**Cancelamento de Anomalias
em
Teorias de Calibre Abelianas**

Rigoberto Carlos Proleón Patricio

Dedicatória

*A mis seres amados;
mis papás Maria y Rigoberto,
mi hermano Danny y
mi querida esposa Maribel.*

Agradecimentos

Queria começar agradecendo ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas por haver me permitido ser seu aluno e haver me concedido todos os meios para que eu pudesse desenvolver meu trabalho, assim como à CAPES, pela bolsa que me concedeu. Dentre as pessoas que colaboraram queria agradecer em primeiro lugar ao meu orientador, Sebastião Alves Dias, que teve que ter muita paciência para me entender e, apesar do sufoco, continuar lutando para a conclusão desta tese. Agradeço-lhe pelos ensinamentos de TQC e por esta tese. Queria agradecer também ao colega Rodolfo Casana Sifuentes, que sempre esteve disposto a me dar dicas. Agradeço a minha esposa, Maribel Gutierrez, por haver me acompanhado e ajudado em tudo que pôde, inclusive datilografando parte desta tese. Por último, agradeço à minha família, que foi motivo suficiente para continuar até o fim o meu trabalho.

A todas as pessoas acima, o meu “muito obrigado”.

Resumo

Nesta tese, estudamos o cancelamento quântico das anomalias de calibre em teorias de calibre abelianas. Mostramos argumentos formais para o cancelamento em qualquer dimensão. Estudamos o caso da Eletrodinâmica Quântica vetorial sem massa em quatro dimensões. Regularizamos completamente o setor fermiônico da teoria por meio do método de Pauli-Villars. Renormalizamos a ação efetiva e mostramos o cancelamento perturbativo da anomalia de calibre na teoria.

Abstract

In this thesis, we study the quantum cancelation of gauge anomalies, in abelian gauge theories. We present formal arguments to support this cancelation in any dimension. We consider the case of massless vectorial Quantum Electrodynamics, in four dimensions. We completely regularize the theory by means of Pauli-Villars regularization. We renormalize the effective action and show the perturbative vanishing of the gauge anomaly.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Introdução	1
1 Anomalias e Restauração de Simetria	4
1.1 Origem da Anomalia	5
1.2 Funcional de Wess-Zumino	7
1.3 Identidades de Ward	8
1.4 Formulação Invariante de Calibre: Caso Geral e Exemplos	9
1.5 Formulação Não-Invariante de Calibre: o Modelo de Schwinger	13
2 Cancelamento de Anomalias na Simetria de Calibre	17
2.1 Cancelamento da Anomalia no Formalismo Invariante de Calibre (Teorias Abelianas)	17
2.2 Cancelamento da anomalia na QED ₄ sem massa	21
2.2.1 Regularização da ação efetiva	21
2.2.2 Regularização do loop de 2 pernas	23
2.2.3 Regularização do loop de 4 pernas	30

2.3	Renormalização da divergência no loop de duas pernas	35
2.4	Cancelamento da anomalia	36
Conclusão		40
Apêndice 1: Integrais Úteis		42
Apêndice 2: Cálculo Perturbativo da ação efetiva		45
2.1	Cálculo Perturbativo da ação efetiva	45
2.2	Invariância de calibre no loop de n pernas	46
2.3	Cancelamento dos loops de ordem ímpar	49
Apêndice 3: Manipulações Alternativas para Cancelamento da Anomalia		51
3.1	Valor esperado da anomalia	55

Introdução

O fenômeno das anomalias em Teoria Quântica de Campos data de 1949, nos trabalhos de Steinberger [1], referentes a cálculos de amplitudes de decaimento do π^0 , no contexto de um modelo do tipo píon-nucleon. Após mais de uma década de relativo esquecimento, onde destacaram-se Schwinger [2] (que mostrou a existência de uma relação entre regularização e não conservação da corrente axial) e Johnson [3] (que mostrou a competição entre a simetria de calibre e a simetria axial pela primeira vez), a questão emergiu novamente com toda a força no final dos anos 60, no contexto das álgebras de correntes e da hipótese PCAC [4, 5]. Desta vez um teorema de Sutherland e Veltman *provava* que o π^0 não poderia decair em dois fótons, em flagrante contraste com os dados experimentais. Este teorema foi contradito pouco depois pelos trabalhos independentes de Adler [6] e Bell e Jackiw [7] que relacionaram com clareza a violação da simetria quiral no nível quântico com a possibilidade do decaimento ocorrer.

Posteriormente, as anomalias foram intensamente estudadas. Anomalias em outras simetrias, diferentes da simetria quiral foram descobertas, e em outras teorias [8, 9, 10], interpretações topológicas foram encontradas para a anomalia quiral [11, 12, 13], estabeleceram-se relações profundas com técnicas de cohomologia [14, 15] e as anomalias foram obtidas também dentro do contexto das integrais de trajetória [16].

O quadro atual é o da existência de anomalias “boas” e outras “más”. As boas, nas quais está incluída a anomalia quiral, são responsáveis pelo enriquecimento das propriedades dinâmicas da teoria, enquanto as más colocam problemas de consistência interna que, se não forem solucionados, podem provocar o abandono da teoria. Todas

as teorias de calibre envolvendo férmions quirais estão nessa classe, incluindo o modelo padrão das interações fundamentais que, na sua fase de simetria não quebrada, tem todos os seus férmions quirais. Lá a situação é resolvida por um cuidadoso balanceamento entre as famílias de quarks e as de léptons.

Mais recentemente, contudo, começaram a aparecer novas perspectivas para a consideração de teorias anômalas. O trabalho de Jackiw e Rajaraman [17] mostrou, no contexto de duas dimensões, que uma teoria com anomalia na simetria de calibre podia ser unitária e completamente consistente, desde que analisada num nível não perturbativo. Posteriormente, Faddeev e Shatashvili [18] mostraram que a anomalia podia ser cancelada pela introdução de novos graus de liberdade, quânticos, na teoria. Esses novos campos seriam responsáveis pela transformação de vínculos de segunda classe (cuja álgebra induzia termos de Schwinger, correlacionados à anomalia) em primeira (geradores de transformações de calibre).

Quase imediatamente após, foi descoberto independentemente por Harada e Tsutsui [19] e Babelon, Schaposnik e Viallet [20] o fato de que os graus de liberdade adicionais não precisavam ser impostos externamente, como uma modificação da teoria, mas apareciam espontaneamente, simplesmente observando a integral funcional com um ponto de vista um pouco diferente. A observação fundamental, feita em ambos os casos, é a de que numa teoria anômala não era correto fatorizar o volume do grupo de gauge, como se faz usualmente no caso não anômalo. A não fatorização traduz-se, então, em novos graus de liberdade quânticos, que definem um novo conceito de ação efetiva, invariante de calibre.

Neste contexto insere-se esta tese. É natural supor que possa haver um análogo do teorema de Noether operando no nível quântico, de modo a conservar as correntes clássicas, tornadas operadores, neste nível. Usualmente, a consideração das anomalias dá-se num contexto em que o campo A_μ é externo. Dentro dessa perspectiva foi efetuada a maior parte das análises mencionadas nos parágrafos anteriores. Harada analisou a situação desde um ponto de vista que considerava A_μ quântico [21], restringindo-se, contudo, a teorias em duas dimensões. Pretendemos aprofundar essa análise para as

teorias abelianas, estendendo a validade dos resultados para as quatro dimensões. Novas dificuldades aparecem nesse caminho, desde que divergências de caráter mais complexo têm que ser tratadas.

Organizamos a tese da seguinte maneira: no capítulo 1 fazemos uma breve revisão do fenômeno das anomalias e das diferentes formulações que permitem abordar a questão da definição quântica de uma teoria anômala. Empregamos estas técnicas no capítulo 2 para desenvolver argumentos formais que apoiam o cancelamento da anomalia na simetria de calibre e exemplificá-lo para os casos do modelo de Schwinger, do modelo de Schwinger quiral e da Eletrodinâmica sem massa em 4 dimensões. Ao final, apresentamos 3 apêndices, com integrais úteis, cálculos adicionais em 4 dimensões e argumentos formais alternativos para o cancelamento de anomalias, incluindo o caso não abeliano.

Capítulo 1

Anomalias e Restauração de Simetria

Um fato bastante conhecido é o de que, a cada simetria *contínua* da Lagrangeana está associada a conservação de um conjunto de quantidades, as *cargas de Noether*, em número igual ao de parâmetros que caracterizam infinitesimalmente essa simetria. Contudo, isso pode não acontecer quando quantizamos uma teoria com número infinito de graus de liberdade. Dizemos, então, que há uma *anomalia* associada a essa simetria. Faremos, neste capítulo, uma exposição genérica e breve do fenômeno da anomalia na simetria de calibre, a partir de uma abordagem funcional.

Ainda neste capítulo, iremos também mostrar como se pode abordar teorias de calibre anômalas, dentro do ponto de vista da integral funcional. Descreveremos brevemente os métodos invariante e não invariante de calibre para a abordagem de teorias anômalas, exemplificando com o caso da eletrodinâmica bidimensional com férmions de Dirac, quantizada sem a imposição da manutenção da simetria de calibre.

1.1 Origem da Anomalia

Consideremos uma teoria de calibre genérica, descrita pela ação $I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$ dada por

$$\begin{aligned} I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] &= I_G[A_\mu] + I_F[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \\ &= \int dx \left(\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + \int dx [\bar{\psi} D\psi], \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde denotamos $d^d x$ por dx , $A_\mu = A_\mu^a T_a$, $D = i\partial + eA$ e

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c. \quad (1.2)$$

A ação possui a propriedade clássica $I[\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A_\mu^h] = I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]$, onde temos $h = \exp(i\theta^a T_a)$, $\psi^h = h\psi$, $\bar{\psi}^h = \bar{\psi}h^{-1}$ e

$$A_\mu^h = h A_\mu h^{-1} + \frac{i}{e} (\partial_\mu h) h^{-1}. \quad (1.3)$$

Esta invariância conduz à conservação clássica da corrente $J_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi$,

$$(D_\mu J^\mu)_a = 0. \quad (1.4)$$

A teoria quântica pode ser estudada através do funcional gerador das funções de Green da teoria,

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp \left(i I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + \mathcal{J}_\mu^a A_\mu^a] \right). \quad (1.5)$$

A questão que se coloca é a manutenção, ou não, da identidade (1.4) quando a corrente J_a^μ é um operador. De modo a fazer aparecer uma identidade similar a (1.4), fazemos a seguinte transformação de variáveis

$$\psi^\theta = (1 + i\theta^a T_a) \psi,$$

$$\bar{\psi}^\theta = \bar{\psi} (1 - i\theta^a T_a), \quad (1.6)$$

com θ^a sendo os parâmetros de uma transformação de calibre infinitesimal. O resultado da integral deve ser o mesmo, independente das variáveis utilizadas na integração,

$$Z = Z_\theta. \quad (1.7)$$

Mas

$$\begin{aligned} Z_\theta &= \int d\psi^\theta d\bar{\psi}^\theta dA_\mu \exp \left(iI [\psi^\theta, \bar{\psi}^\theta, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta}\psi^\theta + \bar{\psi}^\theta\eta + \mathcal{J}_\mu^\alpha A_\alpha^\mu] \right) \\ &= \int J^{-1} [A_\mu, \theta] d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \mathcal{J}_\mu^\alpha A_\alpha^\mu] \right. \\ &\quad \left. + i \int dx (i\theta^a [D_\mu J_a^\mu + \bar{\eta}T_a\psi - \bar{\psi}T_a\eta]) \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde $J[A_\mu, \theta]$ representa um possível Jacobiano, referente à transformação de variáveis (1.6). Igualando Z_θ a Z e lembrando o caráter infinitesimal da transformação, usamos a expansão funcional do Jacobiano em primeira ordem em θ^a ,

$$J^{-1} [A_\mu, \theta] = 1 - \int dx \theta^a \mathcal{A}_a (A_\mu) + \dots, \quad (1.9)$$

para obter

$$\begin{aligned} &\int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\theta^a [-D_\mu^\alpha J_a^\mu - \mathcal{A}_a (A_\mu) + \bar{\eta}T_a\psi - \bar{\psi}T_a\eta] \right) \times \\ &\times \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \mathcal{J}_\mu^\alpha A_\alpha^\mu] \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Fazendo todas as fontes externas iguais a zero, obtemos finalmente

$$\begin{aligned} &\int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu (D_\mu J_a^\mu) \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right) = \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu (-\mathcal{A}_a (A_\mu)) \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

ou, lembrando a relação entre a integral funcional e valores esperados de operadores,

$$\langle 0 | D_\mu J_a^\mu | 0 \rangle = - \langle 0 | \mathcal{A}_a (A_\mu) | 0 \rangle. \quad (1.12)$$

Vimos, então, que, do ponto de vista funcional, a existência de uma anomalia na simetria de calibre está crucialmente vinculada ao fato da medida de integração fermiônica ser invariante ou não pela transformação dada, vista aqui como uma mudança de variáveis dentro da integral. Podemos falar em anomalias genuínas ou não, se esta medida puder ser definida ou não de maneira invariante de calibre. Devemos observar o fato de que a integração sobre os graus de liberdade bosônicos pode modificar substancialmente os termos da discussão acima.

1.2 Funcional de Wess-Zumino

É usual escrever o Jacobiano em termos de um funcional α_1 , chamado *funcional de Wess-Zumino*,

$$J[A_\mu, \theta] = \exp \left(i \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}] \right). \quad (1.13)$$

Para $\theta = 0$, o Jacobiano deve ser 1 o que impõe $\alpha_1 [A_\mu, 0] = 0$. Para θ infinitesimal,

$$J[A_\mu, \theta] = 1 + i \int dx \theta^a \left. \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta^a} \right|_{\theta=0} + \dots, \quad (1.14)$$

Identificamos assim,

$$\mathcal{A}_a (A_\mu) = i \left. \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta^a} \right|_{\theta=0}. \quad (1.15)$$

A fórmula (1.15) permite relacionar o cálculo explícito da anomalia com o do determinante fermiônico do operador de Dirac da teoria, D . De fato, notando que

$$\int d\psi d\bar{\psi} \exp \left(i \int dx [\bar{\psi} D(A_\mu) \psi] \right) = \det D(A_\mu), \quad (1.16)$$

e que

$$\begin{aligned}
& \int d\psi^\theta d\bar{\psi}^\theta \exp\left(i \int dx [\bar{\psi}^\theta D(A_\mu) \psi^\theta]\right) = \\
& = \int J^{-1}[A_\mu, \theta] d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i \int dx [\bar{\psi} D(A_\mu^{\theta^{-1}}) \psi]\right) = \\
& = \exp\left(-i\alpha_1[A_\mu, \theta^{-1}]\right) \det D(A_\mu^{\theta^{-1}}).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Temos, então,

$$\alpha_1[A_\mu, \theta^{-1}] = i \ln \frac{\det \hat{D}(A_\mu)}{\det D(A_\mu^{\theta^{-1}})}. \tag{1.18}$$

Nos capítulos seguintes usaremos intensivamente esta expressão para estudar a estrutura quântica da anomalia de calibre.

1.3 Identidades de Ward

A equação (1.10) gera ainda um conjunto de infinitas identidades, chamadas de *identidades de Ward* no caso abeliano, e de Slavnov-Taylor, no caso não abeliano. Para obter a equação “master” fazemos uma mudança de variáveis a mais na integral, desta vez a transformação de calibre infinitesimal nos campos A_μ ,

$$(A_\mu^a)^\theta = A_\mu^a - \frac{1}{e} D_\mu \theta^a. \tag{1.19}$$

O termo extra advindo dessa mudança de variáveis cancela a divergência covariante de J_a^μ . Ficamos então com

$$\begin{aligned}
Z = Z_\theta = & \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \mathcal{J}_\mu^a A_\mu^a]\right) \\
& + i \int dx \left(i\theta^a [\mathcal{A}_a(A_\mu) + \bar{\eta}T_a\psi - \bar{\psi}T_a\eta + D_\mu \mathcal{J}_a^\mu]\right).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Logo,

$$\int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i \int dx [\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \mathcal{J}_\mu^a A_\mu^a]\right) \times$$

$$\times i \int dx \left(i\theta^a \left[\mathcal{A}_a(A_\mu) + \bar{\eta} T_a \psi - \bar{\psi} T_a \eta + \frac{1}{e} D_\mu \mathcal{J}_a^\mu \right] \right) = 0. \quad (1.21)$$

Sabendo que, dentro da integral funcional com fontes podemos utilizar

$$A_{\mu,a} = -i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}^{\mu,a}}, \quad \psi = -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} = i \frac{\delta}{\delta \eta}, \quad (1.22)$$

chegamos a

$$i \left[\mathcal{A}_a \left(-i \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}^{\mu,a}} \right) - i \bar{\eta} T_a \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - i \frac{\delta}{\delta \eta} T_a \eta + \frac{1}{e} D_\mu \mathcal{J}_a^\mu \right] Z[\eta, \bar{\eta}, \mathcal{J}_a^\mu] = 0. \quad (1.23)$$

Aplicando um número arbitrário de derivadas funcionais em relação às fontes externas e colocando-as iguais a zero em seguida, obtemos infinitas identidades relacionando as funções de Green da teoria, que constituem-se nas identidades mencionadas nesta seção.

Na expressão acima verificamos a influência decisiva da anomalia sobre essas identidades. Pode-se mostrar que as consequências dessas identidades mudam drasticamente na presença de anomalias. Em particular, essas identidades são usadas para relacionar constantes de renormalização, sendo crucial este fato para a prova da renormalizabilidade das teorias de calibre. Sem essas relações, perde-se a noção de renormalizabilidade perturbativa dessas teorias.

1.4 Formulação Invariante de Calibre: Caso Geral e Exemplos

Iremos aqui revisar basicamente o trabalho de Harada e Tsutsui [19], que estabelece de modo bastante natural o cenário desta formulação. Numa teoria de calibre, é bem sabido que a integral funcional usual não é bem definida, devido às diversas contribuições iguais, de configurações de campos de calibre fisicamente equivalentes. Com o objetivo de definir o funcional gerador corretamente, integrando apenas sobre configurações de campo que correspondam a situações fisicamente não equivalentes, é usual adotar o procedimento de

Faddeev-Popov [22], que permite que se escolha sistematicamente uma configuração A_μ em cada órbita de calibre, impondo uma condição que apenas uma dessas configurações deverá satisfazer, a condição $f(A_\mu) = 0$. Para implementar esta estratégia, definimos o funcional $\Delta_f[A_\mu]$, associado à condição f através de

$$\Delta_f[A_\mu] \int dg \delta[f(A_\mu^g)] = 1. \quad (1.24)$$

É imediato mostrar que Δ_f é invariante de calibre, $\Delta_f[A_\mu^g] = \Delta_f[A_\mu]$, devido ao fato de dg representar uma medida invariante sobre a variedade do grupo em questão [23].

O procedimento usual é o de escrever o funcional gerador da teoria, com as fontes postas iguais a zero, multiplicado por 1, expresso na forma da equação acima,

$$Z = \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\Delta_f[A_\mu] \int dg \delta[f(A_\mu^g)] \right) \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \quad (1.25)$$

Em seguida consideramos o mesmo funcional, substituindo a variável de integração por $A_\mu^{g^{-1}}$,

$$\begin{aligned} Z &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu^{g^{-1}} \left(\Delta_f[A_\mu^{g^{-1}}] \int dg \delta[f((A_\mu^{g^{-1}})^g)] \right) \times \\ &\quad \times \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^{g^{-1}}]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\Delta_f[A_\mu] \int dg \delta[f(A_\mu)] \right) \exp(iI[\psi^g, \bar{\psi}^g, A_\mu]). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Vemos que toda a dependência em g está contida em ψ . Se a medida fermiônica fosse invariante de calibre, poderíamos fazer a mudança de variáveis

$$\psi = \psi^{g^{-1}}, \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}^{g^{-1}}, \quad (1.27)$$

eliminar completamente a dependência em g do integrando e, fatorizando a integral funcional sobre g , absorver o volume do grupo de gauge no fator de normalização, como usual. Nosso interesse, entretanto está concentrado no caso em que a medida fermiônica

não é invariante. Assim,

$$\begin{aligned} d\psi d\bar{\psi} &= J [A_\mu, g^{-1}] d\psi' d\bar{\psi}' \\ &= \exp \left(i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] \right) d\psi' d\bar{\psi}'. \end{aligned} \quad (1.28)$$

O resultado final é, então,

$$\begin{aligned} Z &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu dg \Delta_f [A_\mu] \delta [f (A_\mu)] \times \\ &\times \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] \right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Notamos, então, que aparecem novos graus de liberdade, expressos pelos parâmetros que caracterizam g ,

$$dg = \prod_a d\theta_a (x), \quad (1.30)$$

que são chamados *campos de Wess-Zumino*. A peculiaridade dessa formulação é que a ação obtida integrando os graus de liberdade dos férmions e os dos campos de Wess-Zumino é invariante de calibre. Vamos demonstrar isso explicitamente, definindo

$$\exp (iW [A_\mu]) = \det D [A_\mu], \quad (1.31)$$

temos

$$\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] = W [A_\mu^{g^{-1}}] - W [A_\mu]. \quad (1.32)$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} \alpha_1 [A_\mu^h, g^{-1}] &= W [A_\mu^{hg^{-1}}] - W [A_\mu^h] \\ &= \alpha_1 [A_\mu, hg^{-1}] - \alpha_1 [A_\mu, h]. \end{aligned} \quad (1.33)$$

De volta à questão original, vamos definir a *ação efetiva* como

$$\exp (iI_{eff} [A_\mu]) \equiv \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1 [A_\mu, g^{-1}] \right). \quad (1.34)$$

Podemos agora mostrar que ela é invariante de calibre,

$$\begin{aligned}
\exp(iI_{eff}[A_\mu^h]) &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^h] + i\alpha_1[A_\mu^h, g^{-1}]) = \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A_\mu] + i\alpha_1[A_\mu, hg^{-1}] - i\alpha_1[A_\mu, h]) = \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1[A_\mu, hg^{-1}]) = \\
&= \int d\psi d\bar{\psi} d(gh^{-1}) \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1[A_\mu, (gh^{-1})^{-1}]) = \\
&= \exp(iI_{eff}[A_\mu]).
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Devido à propriedade acima, chama-se a abordagem acima de *formulação invariante de calibre*. Ela pode ser reconhecida pela presença dos campos de Wess-Zumino. Em vista dos resultados obtidos nessa formulação, podemos conjecturar o cancelamento da anomalia referente à simetria de calibre, dado que a teoria resultante é invariante de calibre no nível quântico. Isso será analisado em maior detalhe no capítulo seguinte. A título de exemplo, citamos os casos do modelo de Schwinger [24, 25] e do modelo de Schwinger quiral [17], cujas integrações sobre os férmions podem ser efetuadas exatamente. Os resultados são

$$W^s[A_\mu] = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{e^2}{2\pi} A_\mu \left[\frac{(a+1)}{2} \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu \right\}, \tag{1.36}$$

e

$$\begin{aligned}
W^{sq}[A_\mu] &= \int d^2x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^2}{8\pi} A_\mu \left[a\eta^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\alpha} + \epsilon^{\mu\alpha}) \frac{\partial_\alpha \partial_\beta}{\square} (\eta^{\beta\nu} - \epsilon^{\beta\nu}) \right] A_\nu \right\}.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

O parâmetro a representa uma ambiguidade no cálculo dos determinantes fermiônicos associados às duas teorias. Os termos de Wess-Zumino podem ser calculados facilmente

a partir dessas expressões e são

$$\alpha_1^s [A_\mu, \theta] = \frac{a-1}{\pi} \int d^2x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \theta) (\partial^\mu \theta) + e\theta \partial_\mu A^\mu \right), \quad (1.38)$$

e

$$\alpha_1^{sq} [A_\mu, \theta] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(\frac{a-1}{2} (\partial_\mu \theta) (\partial^\mu \theta) - e\theta ((a-1) \partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu) \right). \quad (1.39)$$

Uma integração sobre o campo de Wess-Zumino produz ações efetivas similares,

$$I_{eff} [A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^2x F_{\mu\nu} \square^{-1} (\square + m^2(a)) F^{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

explicitamente invariantes de calibre, em acordo com o que foi demonstrado em geral. A constante $m^2(a)$ varia de um modelo para o outro. Para o modelo de Schwinger ela é

$$m^2 = \frac{(a+1)e^2}{2\pi}, \quad (1.41)$$

enquanto, para o modelo de Schwinger quiral,

$$m^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi(a-1)}. \quad (1.42)$$

1.5 Formulação Não-Invariante de Calibre: o Modelo de Schwinger

Outra abordagem às teorias anômalas é dada pela chamada *formulação não-invariante de calibre*. O ponto de partida é o reconhecimento de que a introdução do “1” de Faddeev-Popov é totalmente desnecessária numa teoria anômala (ao contrário do caso convencional, onde é essencial para a própria definição da teoria) pois campos relacionados por transformações de calibre dão contribuições diferentes à integral funcional. Uma questão

surge imediatamente, no entanto: na Lagrangeana livre, o termo cinético

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}A_{\mu}(\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial^{\nu})A_{\nu} \quad (1.43)$$

não permite a definição de um propagador livre, pois o operador $\Box\eta^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\partial^{\nu}$ não possui inversa. Isso é usualmente contornado através da introdução de um termo de fixação de calibre (por exemplo, $1/\alpha(\partial_{\mu}A^{\mu})^2$), que contribui com um fator a mais para redefinir o operador em questão, tornando-o inversível. Contudo, numa teoria anômala, não é lícito fixar o calibre, pois não há invariância de calibre. Fazer isso significaria modificar a teoria, em relação à teoria original, não sendo possível, em princípio garantir que os resultados físicos sejam os mesmos. Como abordar a questão da definição perturbativa da teoria, então?

A solução usual vem do cálculo explícito da ação efetiva, ou seja, da integração sobre os graus de liberdade fermiônicos. Sendo o determinante fermiônico um funcional de A_{μ} não invariante de calibre, os termos advindos do seu cálculo juntam-se aos anteriores para permitir que cada elemento de uma mesma órbita de calibre contribua de maneira distinta ao funcional gerador. Dessa forma, em geral, consegue-se um termo cinético que permite definir um propagador livre para o campo A_{μ} e efetuar a análise perturbativa da teoria.

Vamos procurar responder a esta questão usando como exemplo o modelo de Schwinger. Nossa linha de pensamento, no entanto, usará uma estratégia ligeiramente diferente da enunciada no parágrafo anterior, embora completamente equivalente, para todos os resultados práticos. A análise seguirá a linha já delineada em [26]. Observamos que a razão básica pela qual o operador acima não possui inversa é porque ele é proporcional a um projetor, que elimina a componente longitudinal do campo A_{μ} . Daí, se conseguirmos provocar o aparecimento de um termo cinético para a componente longitudinal de A_{μ} , esse termo fará exatamente o papel do termo de fixação de calibre. Em duas dimensões, a decomposição em componentes longitudinais e transversais de A_{μ} é bastante simples:

qualquer A_μ pode ser escrito como

$$eA_\mu = \partial_\mu \rho - \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi. \quad (1.44)$$

Para A_μ dado, ρ e ϕ podem ser achados como

$$\rho = e \frac{\partial_\mu A^\mu}{\square}, \quad (1.45)$$

e

$$\phi = e \epsilon_{\mu\nu} \frac{\partial^\mu A^\nu}{\square}. \quad (1.46)$$

O Jacobiano da transformação de A_0, A_1 em ρ e ϕ é um número, independente dos campos, podendo ser absorvido no fator de normalização da integral funcional. O funcional gerador é dado, então, em termos de ρ e ϕ ,

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = & \int d\psi d\bar{\psi} d\rho d\phi \exp \left(i \int d^2x \left[\bar{\psi} (i\cancel{\partial} + \cancel{\partial}\rho - \cancel{\partial}\phi) \psi + \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi \right] + \right. \\ & \left. + i \int d^2x \left[\bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta + \frac{1}{e} \mathcal{J}_\mu \partial^\mu \rho - \frac{1}{e} \mathcal{J}_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi \right] \right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde definimos $\tilde{\partial}_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu$. Observamos aqui a ausência de um termo cinético para o campo ρ (a parte longitudinal de A_μ). Uma observação importante, contudo, é a de que uma transformação de calibre é capaz de desacoplar ρ de ψ e $\bar{\psi}$ no termo que não envolve as fontes fermiônicas. De fato, fazendo

$$\psi = e^{i\rho} \psi', \quad (1.48)$$

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{-i\rho}, \quad (1.49)$$

obtemos

$$\bar{\psi}' (i\cancel{\partial} + \cancel{\partial}\rho - \cancel{\partial}\phi) \psi = \bar{\psi}' (i\cancel{\partial} - \cancel{\partial}\phi) \psi'. \quad (1.50)$$

Com o auxílio do termo de Wess-Zumino mostrado na equação (1.38) é simples calcular

o Jacobiano da transformação acima,

$$J[\rho] = \frac{i(a-1)}{4\pi} \int d^2x (\partial_\mu \rho) (\partial^\mu \rho). \quad (1.51)$$

Expresso em termos dessas variáveis, o funcional gerador fica dado por

$$\begin{aligned} Z[\eta, \bar{\eta}, J_\mu] = & \int d\psi d\bar{\psi} d\rho d\phi \quad (1.52) \\ & \exp \left(i \int d^2x \left[\bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi}) \psi + \frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi - \frac{(a-1)}{4\pi} \rho \square \rho \right] + \right. \\ & \left. + i \int d^2x \left[\bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} \mathcal{J}_\mu \partial^\mu \rho - \frac{1}{e} \mathcal{J}_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi \right] \right), \end{aligned}$$

que é uma forma perfeitamente adequada para análise, sem quaisquer problemas na definição perturbativa da teoria. Se quiséssemos prosseguir, seria possível mostrar que a parte transversal também pode ser desacoplada, agora por uma transformação quirai com parâmetro ϕ , ao custo de um outro Jacobiano. A teoria resultante é exatamente solúvel no setor bosônico, e renormalizável num sentido semi-perturbativo [26].

Capítulo 2

Cancelamento de Anomalias na Simetria de Calibre

A presença de anomalias na simetria de calibre pode ter consequências desastrosas para a renormalizabilidade perturbativa da teoria e, potencialmente, para a sua própria consistência. Vimos no capítulo anterior, no entanto, que a simetria de calibre é restaurada quanticamente, num nível não-perturbativo, pela presença espontânea de um termo de Wess-Zumino. Poderíamos especular então que, se a teoria tem um funcional gerador invariante de calibre, não deveria existir anomalia. De fato, a integração funcional sobre os campos de calibre é decisiva para responder a esta questão. Ela será investigada agora, em dimensão arbitrária, para teorias abelianas, do ponto de vista funcional. Alguns exemplos serão citados explicitamente, em duas e em quatro dimensões.

2.1 Cancelamento da Anomalia no Formalismo Invariante de Calibre (Teorias Abelianas)

Vamos mostrar, de modo simples e direto, como a anomalia é cancelada no caso abeliano. Princípios com dois exemplos particulares, passando, em seguida ao caso geral. Primeira-

mente observemos o caso do modelo de Schwinger. A anomalia é dada pela equação

$$\mathcal{A}(A_\mu) = i \left. \frac{\delta \alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta \theta} \right|_{\theta=0}. \quad (2.1)$$

Usando α_1 dado por (1.38) obtemos

$$\mathcal{A}^s [A_\mu] = -i \frac{e(a-1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu. \quad (2.2)$$

O valor esperado que deve ser computado é

$$\langle \mathcal{A}^s \rangle = -i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\frac{e(a-1)}{\pi} \partial_\mu A^\mu \right) \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]). \quad (2.3)$$

Introduzindo o 1 de Faddeev-Popov, como antes e fazendo as transformações de calibre anteriores, chegamos a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^s \rangle &= -i \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\Delta_f [A_\mu] \int d\theta \delta[f(A_\mu)] \right) \times \\ &\times \left(\frac{e(a-1)}{\pi} \left[\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \square \theta \right] \right) \times \\ &\times \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^s [A_\mu, -\theta]). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Observamos agora, contudo, que o segundo termo entre parênteses no produto acima é precisamente a derivada funcional do termo de Wess-Zumino em relação a θ

$$-\frac{e(a-1)}{\pi} \left[\partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \square \theta \right] = \frac{\delta}{\delta \theta} \alpha_1^s [A_\mu, -\theta]. \quad (2.5)$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^s \rangle &= i \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \\ &\times \frac{\delta}{\delta \theta} \alpha_1^s [A_\mu, -\theta] \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^s [A_\mu, -\theta]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu d\theta \frac{\delta}{\delta \theta} \left[\exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^s [A_\mu, -\theta]) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$= \int d\theta \frac{\delta}{\delta\theta} F|\theta\rangle = 0,$$

onde

$$\mathcal{D}A_\mu = dA_\mu \left(\Delta_f [A_\mu] \int dg \delta \{f(A_\mu)\} \right). \quad (2.7)$$

A última passagem segue-se a partir da integração explícita dos graus de liberdade fermiônicos (que produz o determinante fermiônico, finito) e a posterior integração sobre os campos A_μ (que envolve apenas integrações gaussianas com resultado igualmente finito). O funcional de θ resultante é, portanto, perfeitamente bem definido e finito, e a última integração fornece apenas um termo de fronteira na variedade dos campos, que se supõe ser nulo (corresponde às configurações limite na integral funcional, que, em geral, são tomadas como identicamente nulas - lembremo-nos de que as condições de contorno físicas completam a definição da integral de trajetória).

Algo completamente análogo acontece com o modelo de Schwinger quirar. Lá, a transformada de calibre da anomalia é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\theta^{-1}} &= \frac{i}{4\pi} \left(-(a-1) \square\theta - e \left((a-1) \partial_\mu A^\mu + \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right) \right) = \quad (2.8) \\ &= \frac{i\delta}{\delta\theta} \alpha_1^{\text{sq}} [A_\mu, -\theta] \end{aligned}$$

A sequência do cálculo conduz igualmente ao cancelamento da anomalia, como antes.

Estamos prontos, agora, para tentar a generalização dos resultados acima para para uma teoria abeliana em dimensão arbitrária. Novamente consideramos o valor esperado da anomalia, após termos introduzido o 1 de Faddeev-Popov,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^s \rangle &= \int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \left(\Delta_f [A_\mu] \int d\theta \delta \{f(A_\mu)\} \right) \mathcal{A} [A_\mu^{\theta^{-1}}] \times \quad (2.9) \\ &\quad \times \exp \left(iI [\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + i\alpha_1^s [A_\mu, -\theta] \right). \end{aligned}$$

Vamos considerar em detalhe a transformada de calibre da anomalia. A derivada fun-

cional do termo de Wess-Zumino pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta\theta(x)} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta(x)} \right|_{\theta=0} \\
& = \int dz \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \frac{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)}{\delta\theta(x)} \right|_{\theta=0} \\
& = \int dz \left. \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \left(\frac{1}{e} \partial_\mu^z \delta(z-x) \right) \right|_{\theta=0} \\
& = \left. -\frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} \right|_{\theta=0} = \left. -\frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu]}{\delta A_\mu(x)} \right|_{\theta=0}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Calculando em $\theta = 0$ obtemos uma expressão para a anomalia, diretamente em termos da ação efetiva,

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu]}{\delta A_\mu(x)}. \tag{2.11}$$

Essa identidade nos ajudará a mostrar que a transformada de calibre da anomalia é, em geral, a derivada funcional do termo de Wess-Zumino em relação a θ . Vamos à demonstração

$$\mathcal{A}^{\theta^{-1}} = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W [A_\mu^{\theta^{-1}}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(x)} = \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
& = \int dz \frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \left(\frac{i}{e} \partial_\mu^z \delta(z-x) \right) \\
& = i \int dz \frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)} \frac{\delta A_\mu^{\theta^{-1}}(z)}{\delta\theta(x)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$= i \frac{\delta\alpha_1 [A_\mu, \theta^{-1}]}{\delta\theta(x)} \tag{2.14}$$

O restante é formalmente idêntico ao que aconteceu com o modelo de Schwinger e com o modelo de Schwinger quiral. Há uma diferença importante, no entanto. Nos exemplos acima, todas as integrações funcionais puderam ser feitas de forma fechada e produziram

resultados finitos. Isso se deveu à estrutura muito particular destas teorias em duas dimensões. Para dimensões mais altas, uma análise detalhada da possível estrutura de divergências do modelo deve ser feita, no nível da ação efetiva da teoria, para descobrir se as mesmas conclusões podem ser válidas. Esta análise será feita em quatro dimensões, para a Eletrodinâmica sem massa, nas seções a seguir.

Uma abordagem alternativa, que sugere os mesmos resultados acima, pode ser obtida, através de transformações na medida bosônica. De fato, considerando uma transformação infinitesimal

$$\begin{aligned}
 Z &= \int dA_\mu^\theta d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu^\theta]\right) \\
 &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] - i \int dx \theta \partial_\mu J^\mu\right) \\
 &= Z - i \int dx \theta \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} (\partial_\mu J^\mu) \exp\left(iI[\psi, \bar{\psi}, A_\mu]\right).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Daí,

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle = 0. \tag{2.16}$$

A demonstração acima está restrita, contudo, às mesmas limitações expostas anteriormente.

2.2 Cancelamento da anomalia na QED₄ sem massa

2.2.1 Regularização da ação efetiva

Sabe-se que a utilização de uma regularização do tipo Pauli-Villars não é capaz de lidar com todas as divergências presentes numa teoria de calibre [27]. Isso se deve ao fato de, usualmente, querermos preservar a simetria de calibre durante a regularização. Isso força a utilização da derivada covariante na definição dos propagadores regularizados, ao invés da derivada convencional. A cada campo de Pauli-Villars adicional introduzido, novos vértices de interação com o campo A_μ se fazem presentes, exigindo mais campos

de Pauli-Villars e assim sucessivamente.

Para o problema no qual estamos interessados, contudo, *precisamos* de um esquema de regularização que quebre a simetria de calibre, para que a própria anomalia tenha chance de aparecer. Isso faz com que possamos usar o esquema de Pauli-Villars sem restrições, abrindo a possibilidade concreta de regularizar a teoria assim. Vamos usar o método de Pauli-Villars na sua versão generalizada, onde vários campos são introduzidos, fazendo a seguinte mudança no propagador fermiônico:

$$\left(\frac{1}{\not{p}}\right)' = \frac{1}{\not{p}} - \sum_n \frac{C_n}{\not{p} - M_n}, \quad (2.17)$$

onde o índice n indica o n -ésimo campo de Pauli-Villars, de massa M_n e resíduo C_n . Como é usual, impomos condições de convergência sobre os coeficientes, que visam melhorar o comportamento ultravioleta do propagador regularizado:

$$\left. \begin{aligned} \sum_n C_n &= 1, \\ \sum_n C_n M_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Com o auxílio dessas duas condições, podemos mostrar que o comportamento ultravioleta do propagador fermiônico é precisamente o necessário para regularizar os loops divergentes na expansão da ação efetiva. Reescrevemos o propagador livre como,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\not{p}} &= \frac{1}{\not{p}} + \sum_n \frac{C_n M_n}{\not{p}} \\ &= \sum_n \frac{C_n (\not{p} + M_n)}{p^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Substituindo essa expressão na equação (2.17), é fácil mostrar que

$$\left(\frac{1}{\not{p}}\right)' = \sum_n C_n \left(\frac{-\not{p}M_n^2 - M_n^3}{p^2(p^2 - M_n^2)} \right) \propto \frac{1}{p^3}, \quad (2.20)$$

A ação efetiva tem uma expansão em termos de gráficos de Feynmann com um loop

fermiônico e número arbitrário de pernas externas. Os loops de 2 e 4 pernas são quadrática e logaritmicamente divergentes, respectivamente, sendo todos os demais superficialmente convergentes. Como iremos ver a seguir, a prescrição fornecida acima regulariza completamente as divergências dos dois loops. Veremos também que a simetria de calibre é perdida no processo, o que corresponde exatamente ao que estamos buscando, um esquema de regularização que provoque o aparecimento da anomalia de calibre.

2.2.2 Regularização do loop de 2 pernas

O loop de 2 pernas tem a seguinte estrutura:

$$L^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int d^4 \tilde{p} \tilde{A}^\mu(-p) \int d^4 \tilde{k} \operatorname{tr} \left[\frac{1}{\not{k}} \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma_\nu \right] \tilde{A}^\nu(p). \quad (2.21)$$

Portanto, temos que regularizar a seguinte integral

$$I_{\mu\nu}(p) = \int d^4 \tilde{k} \operatorname{tr} \left[\frac{1}{\not{k}} \gamma_\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma_\nu \right]. \quad (2.22)$$

Fazendo uso da equação (2.17) escrevemos a integral como:

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p) &= \int d^4 \tilde{k} \operatorname{tr} \left[\frac{\not{k} \gamma_\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma_\nu}{k^2 (k+p)^2} - \sum_n C_n \frac{\not{k} \gamma_\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma_\nu}{k^2 ((k+p)^2 - M_n^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_n C_n \frac{\not{k} \gamma_\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma_\nu}{(k+p)^2 (k^2 - M_n^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{mn} C_m C_n \left(\frac{\not{k} \gamma_\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma_\nu + M_m M_n \gamma_\mu \gamma_\nu}{(k^2 - M_n^2) ((k+p)^2 - M_m^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando as propriedades do traço,

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu}(p) &= \frac{4}{(2\pi)^4} \int dk \left[(2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu} (k^2 + k \cdot p)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{k^2 (k+p)^2} - \sum_n C_n \frac{1}{k^2 ((k+p)^2 - M_n^2)} + \right. \right. \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_n C_n \frac{1}{(k+p)^2(k^2 - M_n^2)} + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n \frac{1}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} \Big\} + \\
& + \eta_{\mu\nu} \sum_{mn} C_m C_n M_n M_m \frac{1}{(k^2 - M_n^2)((k+p)^2 - M_m^2)} \Big].
\end{aligned}$$

Empregando a representação α do propagador (1.1) (do apêndice 1) obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= \frac{4}{2\pi^4} \int d^4k \left\{ (2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - \eta_{\mu\nu}(k^2 + k \cdot p)) \times \right. & (2.25) \\
& \times \left(\int d\alpha d\beta e^{ik^2(\alpha+\beta)+2i\beta p \cdot k} \right) \times \\
& \times \left[1 - \sum_n C_n (e^{-i\beta M_n^2} + e^{-i\alpha M_n^2}) + \sum_{mn} C_n C_m e^{-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2} \right] + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n M_m M_n \eta_{\mu\nu} e^{-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2} \times \\
& \left. \times \left(\int d\alpha d\beta e^{ik^2(\alpha+\beta)+2i\beta p \cdot k} \right) \right\} e^{i\beta p^2 - \epsilon(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Para podermos integrar em k vamos usar as integrais (1.8) e (1.9) do apêndice 1, obtendo

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= \frac{-i}{4\pi^2} \int d\alpha d\beta \left\{ \left[1 - \sum_n C_n (e^{-i\beta M_n^2} + e^{-i\alpha M_n^2}) + \right. \right. & (2.26) \\
& + \sum_{mn} C_m C_n e^{-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2} \Big] \times \\
& \times \left[\left(\frac{\beta^2}{(\alpha + \beta)^4} - \frac{\beta}{(\alpha + \beta)^3} \right) (2p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2) - \frac{\eta_{\mu\nu} i}{(\alpha + \beta)^3} \right] + \\
& + \sum_{mn} C_m C_n M_m M_n \eta_{\mu\nu} e^{-i\alpha M_n^2 - i\beta M_m^2} \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} \Big\} \times \\
& \times e^{-i\beta p^2 / (\alpha + \beta) + i\beta p^2 - \epsilon(\alpha + \beta)}.
\end{aligned}$$

Vamos agora fazer a seguinte transformação nas variáveis α e β

$$\begin{aligned}
\alpha &= xy, \\
\beta &= (1-x)y, \\
\int d\alpha d\beta &\equiv \int_0^1 dx \int_0^\infty dy y.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Com essa transformação obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) &= -\frac{i}{4\pi^2}(2p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \times \\
&\times \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \left\{ \frac{1}{y} (x^2 - x) e^{i(x-x^2)yp^2 - y\epsilon} - \right. \\
&- \sum_n C_n \frac{1}{y} (x^2 - x) e^{i(x-x^2)yp^2 - i(1-x)yM_n^2 - y\epsilon} \\
&- \sum_n C_n \frac{1}{y} (x^2 - x) e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - y\epsilon} + \\
&\left. + \sum_{n m} C_n C_m \frac{1}{y} (x^2 - x) e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - i(1-x)yM_m^2 - y\epsilon} \right\} \\
&- \frac{i}{4\pi^2} \sum_{n m} C_n C_m M_m M_n \times \\
&\times \eta_{\mu\nu} \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{1}{y} e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - i(1-x)M_m^2 - y\epsilon} \\
&- \frac{i}{4\pi^2} (-i\eta_{\mu\nu}) \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \left\{ \frac{1}{y^2} e^{i(x-x^2)yp^2 - y\epsilon} \right. \\
&- \sum_n C_n \frac{1}{y^2} e^{i(x-x^2)yp^2 - i(1-x)yM_n^2 - y\epsilon} \\
&- \sum_n C_n \frac{1}{y^2} e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - y\epsilon} \\
&\left. + \sum_{n m} C_n C_m \frac{1}{y^2} e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - i(1-x)M_m^2 - y\epsilon} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Usando a condição de convergência, equação (2.18), podemos reescrever a integral anterior como:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) = & -\frac{i}{4\pi^2}(2p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \times & (2.30) \\
& \times \left\{ \sum_n C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \right. \\
& \times \int_0^\infty dy \frac{1}{y} \left\{ e^{i(x-x^2)p^2 y - y\epsilon} - e^{i(x-x^2)p^2 y - i(1-x)yM_n^2 - y\epsilon} \right\} + \\
& + \sum_{m\ n} C_m C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \times \\
& \times \left. \int_0^\infty dy \frac{1}{y} \left\{ e^{i(x-x^2)p^2 y - ixyM_n^2 - i(1-x)yM_m^2 - y\epsilon} - e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - y\epsilon} \right\} \right\} \\
& - \frac{i}{4\pi^2} \eta_{\mu\nu} \sum_{m\ n} C_m C_n M_m M_n \int_0^1 dx \times \\
& \times \int_0^\infty \frac{1}{y} \left\{ e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - i(1-x)yM_m^2 - y\epsilon} - e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - y\epsilon} \right\} - \\
& - \frac{i}{4\pi^2} (-i\eta_{\mu\nu}) \left\{ \sum_n C_n \times \right. \\
& \times \int_0^1 dx \int_0^\infty dy \frac{1}{y^2} \left\{ e^{i(x-x^2)yp^2 - y\epsilon} - e^{i(x-x^2)yp^2 - i(1-x)yM_n^2 - y\epsilon} \right\} + \\
& + \sum_{m\ n} C_m C_n \int_0^1 dx \times \\
& \times \left. \int_0^\infty dy \frac{1}{y^2} \left\{ e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - i(1-x)yM_m^2 - y\epsilon} - e^{i(x-x^2)yp^2 - ixyM_n^2 - y\epsilon} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Podemos, agora, usar as equações (1.11) e (1.12) do apêndice 1 para integrar em y encontrando, para a integral regularizada:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu}(p) = & -\frac{i}{2\pi^2}(p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \times & (2.31) \\
& \times \left\{ \int_0^1 dx (x^2 - x) \sum_n C_n \ln \left[\frac{(x-x^2)p^2 - (1-x)M_n^2 + i\epsilon}{(x-x^2)p^2 + i\epsilon} \right] + \right. \\
& \left. \int_0^1 dx (x^2 - x) \sum_{m\ n} C_m C_n \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left[\frac{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 + i\epsilon}{(x-x^2)p^2 - xM_n^2 - (1-x)M_m^2 + i\epsilon} \right] \Bigg\} + \\
& + \frac{i\eta_{\mu\nu}}{4\pi^2} \sum_{m\ n} C_m C_n \int_0^1 dx (M_m M_n - 2xM_m^2) \times \\
& \times \ln \left[\frac{(x-x^2)p^2 - xM_m^2 - (1-x)M_n^2 + i\epsilon}{(x-x^2)p^2 - xM_m^2 + i\epsilon} \right].
\end{aligned}$$

Notamos que a integral regularizada $I_{\mu\nu}(p)$ contém uma parte que, ao ser contraída com os campos A_μ , irá gerar uma contribuição invariante de calibre à ação efetiva, e outra não invariante de calibre que contribuirá à anomalia de calibre. Notamos também que, *antes* de fazermos M_n tender para o infinito, podemos escolher os coeficientes α_n , que representam as relações entre as massas $\alpha_n = M_n/M$, e os C_n de tal modo que cancelem as divergências quadráticas presentes em $I_{\mu\nu}$. Expandindo os logaritmos como função de M e tomando M muito grande obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu} = & -\frac{i}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left\{ -\frac{1}{6} \sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| + \frac{1}{6} \ln |p^2 + i\epsilon| + \right. \quad (2.32) \\
& + \frac{10}{36} + \sum_{m\ n} C_m C_n \int_0^1 dx (x^2 - x) \ln \left| \frac{\alpha_n^2}{x\alpha_n^2 + (1-x)\alpha_m^2} \right| \Bigg\} + \\
& + \frac{i}{4\pi^2} \eta_{\mu\nu} \left\{ \sum_{m\ n} C_m C_n \times \right. \\
& \times \left[\int_0^1 dx (\alpha_m \alpha_n - 2x\alpha_m^2) \ln |x(\alpha_m^2 - \alpha_n^2) + \alpha_n^2| + \right. \\
& + \alpha_m^2 \ln |\alpha_m^2| - \frac{\alpha_m^2}{2} \Bigg] M^2 + \sum_{m\ n} C_m C_n \times \\
& \times \left. \int_0^1 dx \left[\frac{(x-x^2)(2x\alpha_m^2 - \alpha_n \alpha_m)}{x(\alpha_m^2 - \alpha_n^2) + \alpha_n^2} \right] p^2 - \frac{p^2}{3} \right\}.
\end{aligned}$$

A divergência quadrática pode ser cancelada impondo a condição

$$\sum_{m\ n} C_m C_n \times$$

$$\times \left[\int_0^1 dx (\alpha_m \alpha_n - 2x \alpha_m^2) \ln |x(\alpha_m^2 - \alpha_n^2) + \alpha_n^2| + \alpha_m^2 \ln |\alpha_m^2| - \frac{\alpha_n^2}{2} \right] = 0. \quad (2.33)$$

Integrando e supondo que $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$ encontramos que:

$$\sum_{m \neq n} C_m C_n S_{mn} = 0, \quad (2.34)$$

com S_{mn} dado por

$$S_{mn} = -\alpha_m \alpha_n + \left(\frac{\alpha_m \alpha_n (\alpha_n^2 + \alpha_m^2) - \alpha_m^2 \alpha_n^2}{\alpha_n^2 - \alpha_m^2} \right) \ln \left| \frac{\alpha_n^2}{\alpha_m^2} \right|. \quad (2.35)$$

Para evitarmos problemas de unitaridade, devem existir valores reais para os C_n , que satisfaçam estas equações. Uma investigação rápida revela que estes valores podem ser impostos contanto que usemos um mínimo de quatro campos de Pauli-Villars. Isso é necessário, pois com um número menor não conseguiríamos uma solução com C 's e α 's reais. Resumindo as condições impostas sobre os diversos coeficientes e razões entre as massas,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 C_n &= 1, \\ \sum_{n=1}^4 C_n \alpha_n &= 0, \\ \sum_{m \neq n} C_m C_n S_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A integral regularizada é então:

$$I_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - p^2 \eta_{\mu\nu}) \left\{ -\frac{1}{6} \sum_n C_n \ln |\alpha_n^2 M^2| + \frac{1}{6} \ln |p^2| + \frac{10}{36} + \sum_{m \neq n} C_m C_n \cdot A_{mn} \right\}$$

$$+\frac{i}{4\pi^2} \eta_{\mu\nu} p^2 \left\{ \sum_{m \neq n} C_m C_n B_{nm} - \frac{1}{3} \right\}, \quad (2.37)$$

onde

$$A_{nm} = -\frac{5}{36} + \frac{1}{3} \frac{2\alpha_n^4 - \alpha_m^2 \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)^2} + \frac{-3\alpha_n^4 \alpha_m^2 + 5\alpha_n^6}{6(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)^3} \ln \left[\frac{\alpha_m^2}{\alpha_n^2} \right] \quad (2.38)$$

e

$$B_{nm} = \frac{1}{6} - \frac{\alpha_m \alpha_n}{(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_m^2 + \alpha_n^2) + \frac{\alpha_n^2 + \alpha_m^2}{(\alpha_n^2 - \alpha_m^2)} \ln \left[\frac{\alpha_m^2}{\alpha_n^2} \right] \right\}. \quad (2.39)$$

Definindo

$$\alpha = \sum_{m \neq n} C_m C_n B_{nm} - \frac{1}{3} \quad (2.40)$$

verificamos a presença de ambigüidades advindas do processo de regularização, similares à que aparece em duas dimensões. Observamos que a parte divergente é apenas logarítmica, e aparece multiplicada por um projetor transverso, ou seja, corresponde a um termo invariante de calibre na ação efetiva. Assim, não irá contribuir para o Jacobiano de uma transformação de calibre na integral funcional.

Contribuição à anomalia do loop de duas pernas

No espaço de momenta o loop regularizado de maneira não invariante de calibre que acabamos de calcular tem a forma:

$$L^{(2)} = -\frac{ie^2 \alpha}{8\pi^2} \int d\tilde{p} p^2 \tilde{A}_\nu(-p) \tilde{A}^\nu(p) + \text{termos inv. de calibre.} \quad (2.41)$$

Passando ao espaço de configurações temos que:

$$L^{(2)} = \frac{ie^2 \alpha}{8\pi^2} \eta_{\mu\nu} \int dx A^\mu(x) \square A^\nu(x) + \text{t. i. c.} \quad (2.42)$$

A contribuição à anomalia deste termo vem da derivada funcional da ação efetiva em relação ao campo de calibre, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(2)}[A] &= \frac{1}{e} \partial_\mu^x \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \left\{ \frac{ie\alpha}{8\pi^2} \int dx A_\mu(x) \square A^\mu(x) \right\} = \\ &= \frac{-ie\alpha}{4\pi^2} \square \partial \cdot A(x).\end{aligned}\quad (2.43)$$

No espaço de momenta, a anomalia é dada por:

$$\mathcal{A}^{(2)}[\tilde{A}] = \frac{ie\alpha}{4\pi^2} k^2 k \cdot \tilde{A}(k).\quad (2.44)$$

2.2.3 Regularização do loop de 4 pernas

O loop de 4 pernas tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}L^{(4)} &= -\frac{e^4}{4} \int d\tilde{p}d\tilde{q}d\tilde{r} \tilde{A}_\mu(-p)\tilde{A}_\nu(-q)\tilde{A}_\alpha(p+q+r)\tilde{A}_\beta(-r) \times \\ &\times \int d\tilde{k} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{k}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{p} + \not{q}} \gamma^\alpha \frac{1}{\not{k} + \not{p} + \not{q} + \not{r}} \gamma^\beta \right].\end{aligned}\quad (2.45)$$

A integral que precisamos regularizar é

$$I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) = \int d\tilde{k} \text{tr} \left[\frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu \frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} \gamma^\nu \frac{\not{k} + \not{q}}{(k+q)^2} \gamma^\alpha \frac{\not{k} + \not{r}}{(k+r)^2} \gamma^\beta \right],\quad (2.46)$$

onde usamos uma nova convenção $p+q \rightarrow q$ e $p+q+r \rightarrow r$, já que a integração se dá em k . Esta integral apresenta divergência logarítmica e, antes de a regularizarmos vamos escrevê-la de maneira mais conveniente. Aproveitando as condições de convergência (2.18), vemos que

$$\frac{\not{k} + \not{p}}{(k+p)^2} = \sum_n C_n (\not{k} + \not{p} + M_n) \left\{ \frac{-M_n^2}{(k+p)^2((k+p)^2 - M_n^2)} \right\}.\quad (2.47)$$

Inserindo os propagadores fermiônicos, nessa forma, dentro da integral, obtemos

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu\alpha\beta}(p, q, r) = & \sum_{ijmn} C_i C_j C_m C_n \times \\
& \times \int d\tilde{k} \operatorname{tr} [(\not{k} + M_i)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p} + M_j)\gamma^\nu \times \\
& \times (\not{k} + \not{q} + M_n)\gamma^\alpha(\not{k} + \not{r} + M_m)\gamma^\beta] \times \\
& \left\{ \frac{M_i^2 M_j^2}{k^2(k^2 - M_i^2)(k+p)^2((k+p) - M_j^2)(k+q)^2} \times \right. \\
& \left. \times \frac{M_m^2 M_n^2}{((k+q) - M_n^2)(k+r)^2((k+r) - M_m^2)} \right\}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Podemos ver que a divergência logarítmica está contida no termo $\not{k}\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{k}\gamma^\alpha\not{k}\gamma^\beta$. O resto dos termos, por serem de ordem menor do que 4 em k , não apresentam divergência. Nestes termos podemos antecipar o limite de M indo para infinito, obtendo resultados finitos. Para o que queremos analisar, não será necessária a consideração detalhada desses termos. O termo restante (que chamaremos de $I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}$) pode ser melhor escrito através da representação α do propagador, assim

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) = & \sum_{ijmn} C_i C_j C_m C_n \sum_{abcd} (-1)^{a+b+c+d} \int d\tilde{k} (\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\alpha\not{k}\gamma_\beta) \times \\
& \times \int d\alpha d\beta d\gamma d\delta e^{i\alpha(k^2 - aM_i^2)} e^{i\beta((k+p)^2 - bM_j^2)} e^{i\gamma((k+q)^2 - cM_n^2)} e^{i\delta((k+r)^2 - dM_m^2)},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde os índices a, b, c, d podem ter valores de zero ou um. Podemos integrar em k , encontrando

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) = & \sum_{ijmn} C_i C_j C_m C_n \sum_{abcd} (-1)^{a+b+c+d} \frac{1}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} [\gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \gamma^\theta \gamma_\alpha \gamma^\sigma \gamma_\beta] \times \\
& \int d\alpha d\beta d\gamma d\delta \frac{i\pi^2}{4\omega^4} \left\{ \eta_{\sigma\rho}\eta_{\theta\lambda} + \eta_{\sigma\theta}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\theta\rho}\eta_{\sigma\lambda} - \frac{2i}{\omega} (\eta_{\sigma\lambda}\Sigma_\theta\Sigma_\rho + \eta_{\theta\lambda}\Sigma_\sigma\Sigma_\rho + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. +\eta_{\rho\lambda}\Sigma_{\sigma}\Sigma_{\theta} + \eta_{\sigma\rho}\Sigma_{\theta}\Sigma_{\lambda} + \eta_{\theta\sigma}\Sigma_{\rho}\Sigma_{\lambda} + \eta_{\theta\rho}\Sigma_{\sigma}\Sigma_{\lambda} - \frac{4}{\omega^2} (\Sigma_{\rho}\Sigma_{\lambda}\Sigma_{\theta}\Sigma_{\sigma}) \right\} \times \\
& \times \exp\{-i\Sigma^2/\omega - i(\alpha aM_i^2 + \beta bM_j^2 + \gamma cM_n^2 + \delta dM_m^2) + \\
& \quad + i(\beta p^2 + \gamma q^2 + \delta r^2) - \epsilon\omega\}. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

onde $\omega = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ e $\Sigma = \beta p + \gamma q + \delta r$. Para poder integrar precisamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$\left. \begin{aligned}
\alpha &= stuw & 0 < t < 1 \\
\beta &= stu(1 - \omega) & 0 < u < 1 \\
\gamma &= st(1 - u) & 0 < \omega < 1 \\
\delta &= s(1 - t) & 0 < s < \infty
\end{aligned} \right\} \tag{2.51}$$

com o jacobiano $J = s^3 t^2 u$. Com as novas cordenadas, temos que $\Sigma = s\sigma$, $\sigma = ut(1 - \omega)p + (1 - u)tq + (1 - t)r$ e $\chi = ut(1 - \omega)p^2 + (1 - u)tq^2 + (1 - t)r^2$. Ao fazermos essa mudança de variáveis vemos que há um termo que é divergente em s , o resto podendo ser integrado em s sem divergências. Explicitando o termo divergente,

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) &= \frac{i}{2\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \sum_{i j n m} C_i C_j C_m C_n \times \\
&\times \sum_{abcd} (-1)^{a+b+c+d} \int_0^1 dudtd\omega ut^2 \times \\
&\times \int_0^\infty ds \frac{1}{s} e^{-is\sigma^2 + is\chi - is\{ut\omega aM_i^2 + ut(1-\omega)bM_j^2 + ct(1-u)M_n^2 + (1-t)dM_m^2\} - s\epsilon} \\
&+ \text{termos finitos.} \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Para poder integrar em s vamos somar em d ,

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) &= \frac{i}{2\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \times \\
&\times \sum_{i j n m} C_i C_j C_m C_n \sum_{abc} (-1)^{a+b+c} \times \\
&\times \int_0^1 dudtd\omega ut^2 \times \tag{2.53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^\infty ds \frac{1}{s} \left\{ e^{-is\sigma^2 + is\chi - is\{ut\omega a M_i^2 + ut(1-\omega)bM_j^2 + ct(1-u)M_n^2\} - s\epsilon} \right. \\
& \left. - e^{-is\sigma^2 + is\chi - is\{ut\omega a M_i^2 + ut(1-\omega)bM_j^2 + ct(1-u)M_n^2 + (1-t)M_m^2\} - s\epsilon} \right\} \\
& + \text{termos finitos.}
\end{aligned}$$

Podemos, agora, integrar em s , obtendo:

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) &= \\
&= \frac{i}{2\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \sum_{ijnm} C_i C_j C_m C_n \sum_{abc} (-1)^{a+b+c} \times \\
&\times \int_0^1 dudtd\omega ut^2 \ln |\Omega| + \text{termos finitos,} \tag{2.54}
\end{aligned}$$

onde

$$\Omega = \frac{-\sigma^2 + \chi - \{ut\omega a M_i^2 + ut(1-\omega)bM_j^2 + ct(1-u)M_n^2 + (1-t)M_m^2\} + i\epsilon}{-\sigma^2 + \chi - \{ut\omega a M_i^2 + ut(1-\omega)bM_j^2 + ct(1-u)M_n^2\} + i\epsilon}. \tag{2.55}$$

O termo da soma em a, b, c, d que corresponde ao caso $a = b = c = d = 0$ contém a divergência. Mantendo-o explícito,

$$\begin{aligned}
I_{\mu\nu\alpha\beta}^{div}(p, q, r) &= \frac{i}{2\pi^2} (\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}) \times \tag{2.56} \\
&\sum_{ijnm} C_i C_j C_m C_n \left\{ \int_0^1 dudtd\omega ut^2 \left\{ \ln |(1-t)\alpha_m^2 M^2| - \ln |-\sigma^2 + \chi| \right\} + \right. \\
&\sum_{abc} (-1)^{a+b+c} \int_0^1 dudtd\omega ut^2 \times \\
&\times \ln \left| \frac{ut\omega a \alpha_i^2 + ut(1-\omega)b\alpha_j^2 + ct(1-u)\alpha_n^2 + (1-t)\alpha_m^2 - i\epsilon}{ut\omega a \alpha_i^2 + ut(1-\omega)b\alpha_j^2 + ct(1-u)\alpha_n^2 - i\epsilon} \right| \left. \right\} \\
&+ \text{termos finitos,}
\end{aligned}$$

onde consideramos $M_n = \alpha_n M$. Podemos ver que há uma divergência logarítmica em M , nos termos proporcionais a $C_i C_j C_m C_n$. O termo divergente é do tipo

$$\sum_{i j n m} C_i C_j C_n \left(C_m \ln \left| \alpha_m^2 M^2 \right| \right), \quad (2.57)$$

tendo, portanto, a *mesma* estrutura do termo divergente no loop de duas pernas. Na segunda integral da última equação, fizemos M tender a infinito. Podemos mostrar também que, de modo análogo ao que acontece com o loop de duas pernas, o termo divergente é invariante de calibre, não contribuindo, então, para o cálculo do Jacobiano, o qual é, conseqüentemente, completamente finito.

A estrutura do termo divergente é

$$\begin{aligned} L_{div}^{(4)} &= \int d\bar{p} d\bar{q} d\bar{r} \hat{A}_\mu(-p) \hat{A}_\nu(-q) \hat{A}_\alpha(p+q+r) \hat{A}_\beta(-r) \times \\ &\quad \times (\eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta} \eta_{\nu\alpha}) \\ &= \int d\bar{p} d\bar{q} d\bar{r} \left[\hat{A}(-p) \cdot \hat{A}(-q) \hat{A}(p+q+r) \cdot \hat{A}_\beta(-r) - \right. \\ &\quad - 2\hat{A}(-p) \cdot \hat{A}(p+q+r) \hat{A}(-q) \cdot \hat{A}_\beta(-r) + \\ &\quad \left. + \hat{A}(-p) \cdot \hat{A}(-r) \hat{A}(-q) \cdot \hat{A}_\beta(p+q+r) \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Trocando de variáveis, $p \rightarrow r$, no segundo termo, e $r \rightarrow q$ no terceiro, observamos que os termos entre parêntesis se anulam mutuamente. Isso mostra que o loop de quatro pernas é totalmente *finito*.

2.3 Renormalização da divergência no loop de duas pernas

A divergência que ocorre no loop de duas pernas pode ser facilmente tratada, através de uma renormalização de função de onda bosônica, acompanhada de uma renormalização de carga. A estrutura do único termo divergente na ação efetiva é

$$\begin{aligned}
 I_{eff}^{(2)} &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) + W^{(2)} \\
 &= \int d^4p \hat{A}^\mu(-p) \left[\left(1 + \frac{e^2}{2\pi^2} f(p^2) \right) (p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \right] \hat{A}^\nu(p) - \\
 &\quad - \frac{\alpha e^2}{8\pi^2} \int d^4p \hat{A}^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \hat{A}^\nu(p).
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Uma renormalização do tipo

$$A^\mu = \sqrt{Z} A_r^\mu, \tag{2.60}$$

$$e = \frac{e_r}{\sqrt{Z}}, \tag{2.61}$$

não altera o comportamento de nenhum termo da ação efetiva, exceto o que é proporcional ao projetor $p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2$ (inclusive nos termos de ordem maior que dois, pois todos envolvem produtos da mesma potência de e e A_μ). Este termo, em particular se transforma em

$$\begin{aligned}
 &\int d^4p \hat{A}_r^\mu(-p) Z \left[\left(1 + \frac{e_r^2}{2\pi^2 Z} f(p^2) \right) (p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \right] \hat{A}_r^\nu(p) \\
 &= \int d^4p \hat{A}_r^\mu(-p) \left[\left(Z + \frac{e_r^2}{2\pi^2} f(p^2) \right) (p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2) \right] \hat{A}_r^\nu(p).
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Assim, escolhendo

$$Z = 1 - \frac{e_r^2}{2\pi^2} f(p^2), \tag{2.63}$$

obtemos uma ação efetiva totalmente finita, em termos dos campos renormalizados

$$I_{eff}^{(2)} = \int d^4p \hat{A}_r^\mu(-p) \left[p_\mu p_\nu - \eta_{\mu\nu} p^2 \right] \hat{A}_r^\nu(p) - \frac{\alpha e_r^2}{8\pi^2} \int d^4p \hat{A}_r^\mu(-p) \eta_{\mu\nu} p^2 \hat{A}_r^\nu(p). \quad (2.64)$$

2.4 Cancelamento da anomalia

Podemos mostrar, agora, o cancelamento da anomalia. Para mostrar isso, precisaremos da expressão para o loop de duas pernas. Por ser de segunda ordem em A_μ e não invariante de calibre, ele nos fornecerá um propagador livre para o fóton. Com esse propagador livre poderemos estabelecer uma análise perturbativa do valor esperado para a anomalia. A ação efetiva é escrita como

$$iW[A_r^\mu] = \frac{e_r^2 i}{4\pi^2} \int d\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \left[p_\mu p_\nu - \left(1 + \frac{\alpha}{2g(p^2)} \right) p^2 \eta_{\mu\nu} \right] f(p^2) \tilde{A}_r^\nu(p) + iW'[A_r^\mu], \quad (2.65)$$

onde $g(p^2) = \frac{1}{6} \ln[p^2] + \frac{10}{36} + \sum_{m \neq n} C_n C_m A_{mn}$, e $W'[A_r^\mu]$ contém o resto dos termos que dependem de A_r^μ , mais que quadraticamente (mas apenas em termos de potências pares de A_r^μ , graças ao teorema de Furry). O funcional gerador da teoria, no setor bosônico (que é o que vai interessar para a análise da anomalia), é dado por

$$Z = \int dA_\mu \exp \left\{ \frac{-i}{4} \int d\tilde{p} F_{r\mu\nu}(p) F_r^{\mu\nu}(p) + \frac{ie_r^2}{4\pi^2} \int d\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \left[p_\mu p_\nu - \left(1 + \frac{\alpha}{2g(p)} \right) p^2 \eta_{\mu\nu} \right] \times \right. \\ \left. \times g(p^2) \tilde{A}_r^\nu(p) + iW'[A_r^\mu] \right\} \quad (2.66)$$

$$= \int dA_\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) \tilde{D}_{\mu\nu}(p) \tilde{A}_r^\nu(p) + iW[\tilde{A}_r^\mu] \right\},$$

onde

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p) = ip_\mu p_\nu \left(\frac{1}{2} - \frac{e_r^2}{2\pi^2} g(p^2) \right) - i \left(\frac{\alpha + 1}{2} - \frac{e_r^2}{2\pi^2} g(p^2) \right) \eta_{\mu\nu} p^2. \quad (2.67)$$

Este operador tem um inverso:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) = \frac{i}{\alpha p^4 \left(\frac{\alpha+1}{2} - \frac{e_r^2 i}{2\pi^2} g(p^2) \right)} \left[\eta_{\mu\nu} p^2 \alpha + \left(1 + e_r^2 \pi^2 g(p^2) \right) p_\mu p_\nu \right]. \quad (2.68)$$

Podemos escrever, então,

$$\begin{aligned} Z &= e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \times \\ &\times \int dA_r^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d\tilde{p} \tilde{A}_r^\mu(-p) D_{\mu\nu}(p) \tilde{A}_r^\nu(p) + \tilde{A}_r^\mu \tilde{J}_\mu(p) \right\} \Big|_{\tilde{J}=0} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$= e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu(k)} \right]} \exp \left[\frac{1}{2} \tilde{J}^\mu(p) \tilde{D}_{\mu\nu}^{-1}(p) \tilde{J}^\nu(p) \right] \det^{\frac{1}{2}} [D_{\mu\nu}^{-1}(p)] \Big|_{\tilde{J}=0}. \quad (2.70)$$

É possível, então, calcular perturbativamente os efeitos da interação do campo fotônico com o campo fermiônico sem que tenhamos que necessariamente usar campos de Wess-Zumino, através de uma escolha cuidadosa do procedimento de regularização.

Passando para o espaço de configurações, vejamos o que acontece quando calculamos o valor esperado da anomalia. Usamos a expressão para a anomalia deduzida anteriormente

$$\mathcal{A}[A] = -\frac{i}{e} \partial_\mu \frac{\delta W[A]}{\delta A_\mu(x)}. \quad (2.71)$$

Vamos explorar essa identidade para calcular o valor esperado da anomalia:

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle_M(z) &= - \int dA_r^\mu \left(\frac{i}{e} \partial_z^\mu \frac{\delta W[A_r]}{\delta A_r^\mu(z)} \right) e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_r^2 \right) + iW[A_r]} \\
&= -\frac{1}{e} \int dA_r^\mu \left(\partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(z)} \right) e^{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_r^2 \right) + iW[A_r]} \\
&= -\frac{1}{e} \int dA_r^\mu \left(\partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(z)} \right) \left[e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} \times \right. \\
&\quad \left. \det^{\frac{1}{2}} [D] e^{-\frac{1}{2} \int dx dy A^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A^\nu(y) + \int dx A^\mu(x) \cdot J_\mu(x)} \right] \Big|_{J=0}. \quad (2.72)
\end{aligned}$$

Derivando funcionalmente em relação a A_r^μ , para derivar em seguida com respeito a $J_\mu(x)$ e avaliando em $J = 0$, logo após uma integração em A_r^μ encontramos uma expressão que pode ser facilmente avaliada:

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A} \rangle_M &= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} \times \right. & (2.73) \\
&\quad \left. \times \int dA_r^\mu \left(\partial_r^\mu \frac{\delta}{\delta A_r^\mu(z)} \right) e^{-1/2 \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) \cdot J_\mu(x)} \right\} \Big|_{J=0} \\
&= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} \int dA_r^\mu \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\mu^\rho(z-x) A_r^\nu(x) + J^\rho(z) \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\nu(x)} \right\} \Big|_{J=0} \\
&= -\frac{1}{e} \left\{ e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} \int dA_r^\mu \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\nu^\rho(x-z) \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} + J^\rho(z) \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-\frac{1}{2} \int dx dy A_r^\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) A_r^\nu(y) + \int dx A_r^\mu(x) J_\mu(x)} \right\} \Big|_{J=0} \\
&= -\frac{1}{e} \partial_\mu^z \left\{ - \int dx D_\nu^\rho(z-x) e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\nu} \right]} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} + J^\rho(z) \right\} \times \\
&\quad \left. \times e^{\frac{1}{2} \int dx dy J^\mu(x) D_{\mu\nu}^{-1}(x-y) J^\nu(y)} \right\} \Big|_{J=0}.
\end{aligned}$$

Com a expressão acima, é fácil mostrar que:

$$e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int JD^{-1}J \right\} \Big|_{J=0} = 0, \quad (2.74)$$

e também que

$$e^{iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]} J^\rho(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int JD^{-1}J \right\} \Big|_{J=0} = 0 \quad (2.75)$$

já que cada termo de $iW' \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu} \right]$ contém um número par de derivadas funcionais com respeito a J , e cada termo da expansão da exponencial é de ordem par em J . Portanto, a integral na equação (2.73) é nula, mostrando que a anomalia é cancelada, na teoria regularizada,

$$\langle \mathcal{A} \rangle_M = 0. \quad (2.76)$$

Conclusão

As anomalias na simetria de calibre têm sido consideradas como um dos principais obstáculos na quantização consistente das teorias de calibre, tendo o seu cancelamento à força sido usado inclusive como critério para escolher entre duas ou mais teorias concorrentes, numa mesma situação física. O que esperamos ter mostrado neste trabalho foi que ainda há muito o que ser aprendido sobre a dinâmica de uma teoria aparentemente anômala. O valor esperado da anomalia, para vários casos interessantes mencionados, simplesmente anula-se, impondo a conservação da correspondente corrente clássica, no nível quântico. A dinâmica de uma teoria anômala, portanto, é consideravelmente complexa e rica, mas não necessariamente inconsistente.

Os principais obstáculos à posterior exploração dessa dinâmica, residem na dificuldade de renormalização da teoria quando a anomalia se manifesta. Entretanto, até este problema acena com possibilidades interessantes, tais como observar a teoria numa situação semi-perturbativa, onde parte da série perturbativa tenha sido somada de alguma forma, para então considerar a teoria efetiva resultante como uma teoria renormalizável [26].

O ponto crucial para a análise que foi realizada em 4 dimensões foi a utilização da regularização de Pauli-Villars para uma definição finita da ação efetiva. Mostrando que apenas dois gráficos necessitavam de regularização e escolhendo os parâmetros da regularização convenientemente, foi possível definir todas as condições necessárias para o cálculo explícito do valor esperado da anomalia, de uma forma simples. A estrutura das divergências pode ser tratada com muita facilidade, devido ao fato da regularização de Pauli-Villars ter conseguido tratar da divergência quadrática, e da divergência do loop de

quatro pernas se manifestar exatamente proporcional a um termos que se anulava. A divergência logarítmica remanescente pode, então, ser renormalizada por uma combinação de renormalização de função de onda e renormalização de carga.

Extensões naturais deste trabalho consistem na análise da Eletrodinâmica vetorial massiva e da Eletrodinâmica quirial em 4 dimensões. O caso não-abeliano, extremamente mais complexo, também constitui campo de interesse agudo a ser investigado. Com este quadro completo, teríamos uma visão bem mais realista do papel das anomalias na definição da dinâmica de uma Teoria Quântica de Campos.

Apêndice 1

Integrais Úteis

A representação α do propagador é:

$$\frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - M^2) - \epsilon\alpha}. \quad (1.1)$$

A representação da integral Gaussiana em quatro dimensões tem a forma:

$$\int d^4k e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = -\frac{i\pi^2}{\omega^2} e^{-i\Sigma^2/\omega}. \quad (1.2)$$

Derivando com respeito a Σ obtemos as seguintes integrais:

$$\int d^4k k_\mu e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = i\pi^2 \frac{1}{\omega^3} \Sigma_\mu e^{-i\Sigma^2/\omega}, \quad (1.3)$$

$$\int d^4k k_\nu k_\mu e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = -\frac{i\pi^2}{2} \frac{1}{\omega^3} [ig_{\mu\nu} + \frac{2}{\omega} \Sigma_\mu \Sigma_\nu] e^{-i\Sigma^2/\omega}, \quad (1.4)$$

$$\int d^4k k^2 e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = -\frac{i\pi^2}{\omega^3} \left[2i + \frac{\Sigma^2}{\omega} \right] e^{-i\Sigma^2/\omega}, \quad (1.5)$$

$$\int d^4k k_\rho k_\nu k_\mu e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = -\frac{\pi^2}{2\omega^4} \{g_{\mu\rho} \Sigma_\nu + g_{\nu\mu} \Sigma_\rho + g_{\nu\rho} \Sigma_\mu - \frac{2i}{\omega} \Sigma_\mu \Sigma_\nu \Sigma_\rho\} e^{i\Sigma^2/\omega}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned}
\int d^4k k_\lambda k_\rho k_\nu k_\mu e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} &= \frac{\pi^2 i}{4\omega^4} \left\{ (g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} + g_{\nu\rho}g_{\mu\lambda}) - \frac{2i}{\omega} \times \right. \\
&\times (g_{\mu\lambda}\Sigma_\nu\Sigma_\rho + g_{\nu\lambda}\Sigma_\mu\Sigma_\rho + g_{\rho\lambda}\Sigma_\mu\Sigma_\nu \\
&+ g_{\mu\rho}\Sigma_\nu\Sigma_\lambda + g_{\mu\nu}\Sigma_\rho\Sigma_\lambda + g_{\nu\rho}\Sigma_\mu\Sigma_\lambda) \\
&\left. - \frac{4}{\omega^2} (\Sigma_\mu\Sigma_\nu\Sigma_\rho\Sigma_\lambda) \right\} e^{-i\Sigma^2/\omega}. \tag{1.7}
\end{aligned}$$

Com a ajuda dessas integrais mostramos que:

$$\int d^4k e^{ik^2(\alpha+\beta) + 2i\beta k \cdot p} = -i\pi^2 \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} e^{-i\beta p^2/(\alpha+\beta)}, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4k \{2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu - g_{\mu\nu}(kp + k^2)\} e^{i(\alpha+\beta)k^2 + 2\beta k \cdot p} = \\
-\pi^2 i \left[(2p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2) \left\{ \frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^4} - \frac{\beta}{(\alpha+\beta)^3} \right\} - \frac{i g_{\mu\nu}}{(\alpha+\beta)^3} \right] \times \\
\times e^{-i\beta p^2/(\alpha+\beta)}, \tag{1.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4k k_\lambda (k_\rho + p_\rho)(k_\theta + q_\theta)(k_\sigma + r_\sigma) e^{i\omega k^2 + 2i\Sigma \cdot k} = \\
\frac{i\pi^2}{4\omega^4} \{g_{\theta\sigma}g_{\rho\lambda} + g_{\theta\rho}g_{\sigma\lambda} + g_{\sigma\rho}g_{\theta\lambda}\} e^{-i\Sigma^2/\omega} + \\
+\frac{\pi i^2}{2\omega^4} \left\{ \frac{1}{\omega} g_{\sigma\lambda}\Sigma_\theta\Sigma_\rho + \frac{1}{\omega} g_{\theta\lambda}\Sigma_\sigma\Sigma_\rho + \frac{1}{\omega} g_{\rho\lambda}\Sigma_\theta\Sigma_\sigma + \right. \\
+\frac{1}{\omega} g_{\sigma\rho}\Sigma_\theta\Sigma_\lambda + \frac{1}{\omega} g_{\theta\sigma}\Sigma_\rho\Sigma_\lambda + \frac{1}{\omega} g_{\theta\rho}\Sigma_\sigma\Sigma_\lambda \\
- q_\theta (g_{\lambda\rho}\Sigma_\sigma + g_{\sigma\rho}\Sigma_\lambda + g_{\lambda\theta}\Sigma_\rho) \\
- p_\rho (g_{\lambda\rho}\Sigma_\theta + g_{\lambda\theta}\Sigma_\sigma + g_{\sigma\theta}\Sigma_\lambda) - \\
- r_\sigma (g_{\lambda\rho}\Sigma_\theta + g_{\rho\theta}\Sigma_\lambda + g_{\lambda\theta}\Sigma_\rho) + \\
\left. + \omega (r_\sigma q_\theta g_{\lambda\rho} + g_{\lambda\sigma} p_\rho q_\theta + g_{\lambda\theta} p_\rho r_\sigma) \right\} e^{-i\Sigma^2/\omega} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi^2 i}{\omega^4} \left\{ -\frac{q_\theta}{\omega} \Sigma_\lambda \Sigma_\rho \Sigma_\sigma - \frac{p_\rho}{\omega} \Sigma_\lambda \Sigma_\sigma \Sigma_\theta - \frac{r_\sigma}{\omega} \Sigma_\lambda \Sigma_\rho \Sigma_\theta + \right. \\
& \frac{1}{\omega^2} \Sigma_\sigma \Sigma_\theta \Sigma_\rho \Sigma_\lambda + r_\sigma q_\theta \Sigma_\lambda \Sigma_\rho + p_\rho q_\theta \Sigma_\lambda \Sigma_\sigma \\
& \left. + p_\rho r_\theta \Sigma_\lambda \Sigma_\theta - \omega p_\rho q_\theta r_\sigma \Sigma_\lambda \right\} e^{-i\Sigma^2/\omega}, \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Outras integrais úteis são:

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{iAs} - e^{iBs}) e^{-s\epsilon} = \ln \left(\frac{B + i\epsilon}{A + i\epsilon} \right), \tag{1.11}$$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^2} (e^{iAs} - e^{iBs}) e^{-s\epsilon} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s\epsilon} (iAe^{iAs} - iBe^{iBs}) + i(B - A), \tag{1.12}$$

$$\int_0^\infty dx \ln |ax + b| = \ln |a + b| + \frac{b}{a} \ln \left| 1 + \frac{a}{b} \right| - 1, \tag{1.13}$$

$$\int_0^\infty dx x \ln |ax + b| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln |a + b| + \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{2a^2} \ln |b| - \frac{1}{4}, \tag{1.14}$$

$$\int_0^\infty dx x^2 \ln |ax + b| = \frac{1}{3} \ln |a + b| + \frac{b^2}{3a^3} \ln \left| 1 + \frac{a}{b} \right| - \frac{1}{3} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{6} \frac{b}{a} - \frac{1}{9}. \tag{1.15}$$

Apêndice 2

Cálculo Perturbativo da ação efetiva

2.1 Cálculo Perturbativo da ação efetiva

Por definição,

$$e^{iW[A_\mu]} = N \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx (i\bar{\psi} \not{\partial} + e\bar{A}) \psi \right]. \quad (2.1)$$

Usamos uma normalização tal que $e^{iW[0]} = 1$. Então,

$$\begin{aligned} e^{iW[A_\mu]} &= \frac{\int d\psi d\bar{\psi} \exp [i \int dx (i\bar{\psi} \not{\partial} + e\bar{A}) \psi]}{\int d\psi d\bar{\psi} \exp [i \int dx \bar{\psi} i \not{\partial} \psi]} \\ &= \frac{\det i D}{\det i(i\bar{\partial})}. \end{aligned}$$

A ação efetiva é

$$\begin{aligned} iW[A_\mu] &= \ln \left[\frac{\det i D}{\det i(i\bar{\partial})} \right] \\ &= \ln \left[\det (i\bar{\partial})^{-1} (D) \right]. \end{aligned}$$

Sabemos que $(i\bar{\partial})_{xz}^{-1} = G_F(x-z)$ podemos escrever $D(z,y) = (i\bar{\partial}^z + e\bar{A}(y))\delta(z-y)$.

Daí,

$$\begin{aligned} (i\bar{\partial})^{-1}D &= \int dz (i\bar{\partial})_{xz}^{-1} D_{zy} \\ &= \int dz G_F(x-z)(i\bar{\partial}^z + e\bar{A}(y))\delta(z-y) \\ &= \delta(x-y) + e G_F(x-y)\bar{A}(y). \end{aligned}$$

Usando $\det C = \exp[\text{tr} \ln C]$ obtemos:

$$iW[A_\mu] = \text{tr} [\ln \{\delta(x-y) + e G_F(x-y)\bar{A}(y)\}].$$

Agora podemos expandir esta função para ter uma expansão perturbativa da ação efetiva.

$$\begin{aligned} iW[A_\mu] &= e \int dx \text{tr} [G_F(x-x)\bar{A}(x)] - \frac{e^2}{2} \int dx dy \text{tr} [G_F(x-y)\bar{A}(y)G_F(y-x)\bar{A}(x)] \\ &\quad + \frac{e^3}{3} \int dx dy dz \text{tr} [G_F(x-y)\bar{A}(y)G_F(y-z)\bar{A}(z)G_F(z-x)\bar{A}(x)] + \dots \quad (2.2) \end{aligned}$$

2.2 Invariância de calibre no loop de n pernas

Vamos mostrar que o loop de n pernas é invariante sob uma transformação de calibre.

Ele é dado por

$$I = \int dv \text{tr} [G_F(x_1-x_2)\bar{A}(x_2)G_F(x_2-x_3)\bar{A}(x_3)\dots\bar{A}(x_n)G_F(x_n-x_1)\bar{A}(x_1)].$$

onde $dv = dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Fazendo uma transformação de calibre com parâmetro θ temos

$$I^g = \int dV \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)(A(x_2) + \not{\partial}\theta(x_2))G_F(x_2 - x_3)(A(x_3) + \not{\partial}\theta(x_3)) \cdots (A(x_n) + \not{\partial}\theta(x_n))G_F(x_n - x_1)(A(x_1) + \not{\partial}\theta(x_1))].$$

Fazendo o produto, obtemos termos que contem zero θ , um θ , dois θ , até n . Assim,

$$I^g = I + \int dV \left(\begin{array}{l} \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)A(x_2)G_F(x_2 - x_3)A(x_3) \cdots A(x_n)G_F(x_n - x_1)A(x_1)] \\ + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)\not{\partial}\theta(x_2)G_F(x_2 - x_3)A(x_3) \cdots A(x_n)G_F(x_n - x_1)A(x_1)] \\ + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)A(x_2)G_F(x_2 - x_3)\not{\partial}\theta(x_3) \cdots A(x_n)G_F(x_n - x_1)A(x_1)] \\ \vdots \\ + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)A(x_2)G_F(x_2 - x_3)A(x_3) \cdots A(x_n)G_F(x_n - x_1)\not{\partial}\theta(x_1)] \end{array} \right) \left. \vphantom{\int dV} \right\} \text{um } \theta$$

$$\left(\begin{array}{l} + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)\not{\partial}\theta(x_2)G_F(x_2 - x_3)\not{\partial}\theta(x_3) \cdots A(x_n)G_F(x_n - x_1)A(x_1)] \\ + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)\not{\partial}\theta(x_2)G_F(x_2 - x_3)A(x_3) \cdots \not{\partial}\theta(x_n)G_F(x_n - x_1)A(x_1)] \\ \vdots \\ + \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)A(x_2)G_F(x_2 - x_3)A(x_3) \cdots \not{\partial}\theta(x_n)G_F(x_n - x_1)\not{\partial}\theta(x_1)] \end{array} \right) \left. \vphantom{\int dV} \right\} \text{dois } \theta$$

$$\vdots$$

$$\left. \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)\not{\partial}\theta(x_2)G_F(x_2 - x_3)\not{\partial}\theta(x_3) \cdots \not{\partial}\theta(x_n)G_F(x_n - x_1)\not{\partial}\theta(x_1)] \right\} n\theta$$

Todos os termos da soma têm pelo menos um $\not{\partial}\theta(x)$. Usando a propriedade cíclica do traço podemos escrever qualquer termo da soma assim

$$S = \int dV \operatorname{tr} [G_F(x_1 - x_2)\not{\partial}\theta(x_2)G_F(x_2 - x_3)A_3(x_3)G_F(x_3 - x_4) \dots]$$

$$\dots A_n(x_n)G(x_n - x_1)A(x_1)].$$

Integrando por partes:

$$S = - \int dv \theta(x_2) \text{tr} \left[\partial_\mu^{x_2} (G_F(x_1 - x_2) \gamma^\mu G_F(x_2 - x_3)) A_3(x_3) G_F(x_3 - x_4) \dots \right. \\ \left. \dots A_1(x_1) \right].$$

Vamos mostrar a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^y G_F(x - y) \gamma^\mu G_F(y - z) &= \partial_\mu^y \int d\tilde{k} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2} \not{k} \gamma^\mu \int d\tilde{p} \frac{e^{-ip(y-z)}}{p^2} \not{p} \\ &= -i \int d\tilde{k} d\tilde{p} \frac{e^{-ikx+ipz}}{k^2 p^2} \not{k} \gamma^\mu \not{p} e^{-iy(p-k)} (p_\mu - k_\mu) \\ &= -i \int d\tilde{k} d\tilde{p} \frac{e^{-ik(x-y)} e^{-ip(y-z)}}{k^2 p^2} \not{k} (\not{p} - \not{k}) \not{p} \\ &= -i \int d\tilde{k} d\tilde{p} e^{-ik(x-y)} e^{-ip(y-z)} \left(\frac{\not{k}}{k^2} - \frac{\not{p}}{p^2} \right) \\ &= -i \int d\tilde{k} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\not{k}} \int d\tilde{p} e^{-ip(y-z)} \\ &\quad + i \int d\tilde{k} e^{-ik(x-y)} \int d\tilde{p} \frac{e^{-ip(y-z)}}{\not{p}}. \end{aligned}$$

Com o que provamos que:

$$\boxed{\partial_\mu^y G_F(x - y) \gamma^\mu G_F(y - z) = -i G_F(x - y) \delta(y - z) + i G_F(y - z) \delta(x - y)}. \quad (2.3)$$

Então, usando a identidade (2.3):

$$S = - \int dx_1 \dots dx_n \theta(x_2) \text{tr} \left[\{-i G_F(x_1 - x_2) \delta(x_2 - x_3) + i G_F(x_2 - x_3) \delta(x_1 - x_2)\} A_3(x_3) \times \right.$$

$$\times G_F(x_3 - x_n) A_4(x_4) \dots A_1(x_1)].$$

Integrando em x_2 mostramos que esse termo se cancela:

$$\begin{aligned} S &= - \int dx_1 \dots dx_n \theta(x_3) \text{tr} [\{-iG_F(x_1 - x_3) + iG_F(x_1 - x_3)\} A_3(x_3) G_F(x_3 - x_4) \dots A_1(x_1)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

O argumento pode ser generalizado para os demais termos, com produtos de n θ . Portanto o loop de n pernas é invariante de gauge.

2.3 Cancelamento dos loops de ordem ímpar

Os loops de ordem ímpar não contribuem para a ação efetiva, já que esses loops contêm um número ímpar de vértices. Em decorrência do teorema de Furry esses gráficos se cancelam. Vamos rever isso explicitamente. Podemos escrever o loop de $2n + 1$ pernas como

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int dv A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \text{tr} [G_F(x_1 - x_2) \gamma^{\mu_2} G_F(x_2 - x_3) \gamma^{\mu_3} \times \\ &\quad \times G_F(x_3 - x_4) \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} G_F(x_{2n+1} - x_1) \gamma^{\mu_1}]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $dv = dx_1 dx_2 \dots dx_{2n+1}$. As matrizes de Dirac satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz C tal que:

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T. \quad (2.5)$$

Como consequência disso:

$$G_F(x_n - x_{n+1}) = C^{-1} G_F^T(x_{n+1} - x_n) C. \quad (2.6)$$

Esta equação é válida tanto para o propagador não regularizado quanto para o propagador regularizado pelo método de Pauli-Villars, ou seja, respectivamente para os propagadores:

$$G_F(x-y) = \int d\bar{k} \frac{1}{\not{k}} e^{-ik(x-y)}, \quad (2.7)$$

$$G_F^R(x-y) = \int d\bar{k} \left(\frac{1}{\not{k}} - \sum_n \frac{C_n}{\not{k} - M_n} \right) e^{-ik(x-y)}. \quad (2.8)$$

Inserindo a equação (2.5) e (2.6) na equação (2.4) obtemos que:

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int dv A^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) \cdots A^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \times \\ &\quad \times \text{tr} \left[G_F^T(x_2 - x_1) \gamma_{\mu_2}^T G_F^T(x_3 - x_2) \gamma_{\mu_3}^T \cdots \gamma_{\mu_{2n+1}}^T G_F^T(x_1 - x_{2n+1}) \gamma_{\mu_1}^T \right] \\ &= - \int dv A_1^{\mu_1}(x_1) A^{\mu_2}(x_2) \cdots A^{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1}) \times \\ &\quad \times \text{tr} \left[\gamma_{\mu_1} G_F(x_1 - x_{2n}) \gamma_{\mu_{2n+1}} \cdots \gamma_{\mu_3} G_F(x_3 - x_2) \gamma_{\mu_2} G_F(x_2 - x_1) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Trocando de índices, $1 \rightarrow 2n+1$, $2 \rightarrow 2n$, $\rightarrow \cdots 2n \rightarrow 2$, $2n+1 \rightarrow 1$, mostramos que:

$$I_{2n+1} = -I_{2n+1} = 0. \quad (2.10)$$

Portanto, o loop de $2n+1$ pernas é nulo tanto para o caso em que a integral I_{2n+1} seja convergente quanto para o caso divergente. Assim, na Eletrodinâmica Quântica em quatro dimensões temos que nos preocupar apenas pela regularização dos loops de duas e quatro pernas.

Apêndice 3

Manipulações Alternativas para Cancelamento da Anomalia

Uma série de caminhos se apresentam, do ponto de vista formal, para sugerir o cancelamento da anomalia. A partir da definição de ação efetiva de Harada encontramos outras equivalentes:

i)

$$\begin{aligned}\exp(iI_{eff}[A]) &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI_{st}[\psi, \bar{\psi}, A, g]) \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A]) + \alpha_1(A, g^{-1}) \\ &= \int dg \exp(iW[A] + \alpha_1(A, g^{-1})) \\ &= \int dg \exp(iW[A^{g^{-1}}]),\end{aligned}$$

podemos conferir rapidamente a invariância de calibre:

$$\begin{aligned}\exp(iI_{eff}[A^h]) &= \int dg \exp(iW[A^{hg^{-1}}]) \\ &= \int d\theta \exp(iW[A^{\theta^{-1}}]), \quad \text{onde } \theta = gh^{-1} \\ &= \exp(iI_{eff}[A]).\end{aligned}$$

O mesmo acontece se escrevemos simplesmente:

$$\exp(iI_{eff}[A]) = \int dg d\psi d\bar{\psi} \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A^{g^{-1}}])$$

ii)Integrando em g :

$$\exp(iI_{eff}[A]) = \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]),$$

onde

$$\exp(iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]) = \int dg \exp(iI_{st}[\psi, \bar{\psi}, A, g]).$$

Então:

$$\begin{aligned} \exp i(I_2[\psi, \bar{\psi}, A]) &= \int dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A]) + \alpha_1(A, g^{-1}) \\ &= \int dg \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A]) + iW[A^{g^{-1}}] - iW[A] \\ &= \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A]) + I_{eff}[A] - iW[A], \\ I_2[\psi, \bar{\psi}, A] &= I[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] + I_{eff}[A] - W[A]. \end{aligned}$$

Vejamos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} I_2[\psi, \bar{\psi}, A^h] &= I[\psi, \bar{\psi}, A^h] + I_{eff}[A^h] - W[A^h] \\ &= I[\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A] + I_{eff}[A] - W[A^h]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Temos, também

$$I_2 [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A] = I [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A] + I_{eff}[A] - W[A]. \quad (3.2)$$

Subtraindo a equação (3.2) da equação (3.1) obtemos:

$$I_2 [\psi, \bar{\psi}, A^h] = I_2 [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A] - \alpha[A, h].$$

Usando esta ultima propriedade podemos ver como se cancela a anomalia:

$$\begin{aligned} \exp(iI_{eff}[A]) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2 [\psi, \bar{\psi}, A]) \\ \exp(iI_{eff}[A^h]) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2 [\psi, \bar{\psi}, A^h]) \\ &= \int d\psi^{h^{-1}} d\bar{\psi}^{h^{-1}} \exp(i\alpha[A, h]) \exp(iI_2 [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A]) - i\alpha[A, h] \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2 [\psi, \bar{\psi}, A]). \end{aligned}$$

Se a medida for invariante de calibre,

$$\begin{aligned} I_2 [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A] &= I_2 [\psi, \bar{\psi}, A], \\ d\psi d\bar{\psi} &= d\psi^{h^{-1}} d\bar{\psi}^{h^{-1}}, \end{aligned}$$

e, então,

$$\begin{aligned} \exp(iI_{eff}[A^h]) &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2 [\psi, \bar{\psi}, A^h]) \\ &= \int d\psi^{h^{-1}} d\bar{\psi}^{h^{-1}} \exp(iI_2 [\psi^{h^{-1}}, \bar{\psi}^{h^{-1}}, A]) \end{aligned}$$

$$= \int d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]),$$

Podemos concluir que, caso anomalia estivesse presente, também poderia ser ignorada, pois I_2 irá gerar um termo que cancela o Jacobiano gerado pela transformação. Fazendo a substituição

$$\begin{aligned} I[\psi, \bar{\psi}, A] &\rightarrow I_2[\psi, \bar{\psi}, A], \\ W[A] &\rightarrow I_{eff}[A], \\ dA_\mu &\rightarrow \mathcal{D}A_\mu = dA_\mu \Delta_f[A] \delta t(f[A]), \end{aligned}$$

ou seja, se, em lugar de considerarmos¹

$$Z_1 = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A]),$$

consideramos

$$Z_2 = \int \mathcal{D}A_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp(iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]),$$

poderíamos trabalhar sem nos preocuparmos com nenhuma violação da simetria de calibre.

Se voltarmos à definição da ação efetiva veremos que a restituição da simetria de calibre é conseguida pela integração em g , considerando como medida para o campo de calibre $\mathcal{D}A_\mu$,

$$\exp(iI_{eff}[A]) = \exp(iW[A]) \int dg \exp(i\alpha_1[A, g^{-1}]).$$

¹numericamente $Z_1 = Z_2$

3.1 Valor esperado da anomalia

Se usássemos Z_1 para encontrar a anomalia teríamos

$$\frac{e^{iW[A^{\theta^{-1}}]}}{e^{iW[A]}} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta^{-1}}]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]}}$$

$$\mathcal{A}[A] = i \frac{\delta W[A^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} = i \frac{\int d\psi d\bar{\psi} \frac{\delta I[\psi, \bar{\psi}, A]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]}}$$

Em contraste, se usamos Z_2 não encontramos anomalia alguma, devido a que $I_{eff}[A]$ é invariante. Apesar disso, vejamos o que acontece se insistimos em encontrar uma anomalia, ignorando temporariamente que $I_{eff}[A]$ é invariante de calibre,

$$\frac{e^{iI_{eff}[A^{\theta^{-1}}]}}{e^{iI_{eff}[A]}} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI_2[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta^{-1}}]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]}}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}[A] = i \frac{\delta I_{eff}[A^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\int d\psi d\bar{\psi} \left(\frac{\delta I_2[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} \right) e^{i(I_2[\psi, \bar{\psi}, A])}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI_2[\psi, \bar{\psi}, A]}}$$

Usando $I_2[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta^{-1}}] = I[\psi, \bar{\psi}, A] + I_{eff}[A] - W[A]$

$$\tilde{\mathcal{A}}[A] = \frac{\int d\psi d\bar{\psi} \left(\frac{\delta I[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} - i \frac{\delta W[A^{\theta^{-1}}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} \right) e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]}}{\int d\psi d\bar{\psi} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]}}$$

$$= \mathcal{A}[A] - i \frac{\delta W[A^{\theta}]}{\delta\theta} \Big|_{\theta=0} = 0.$$

Vemos, assim, que I_{eff} não pode gerar uma anomalia.

Usamos, agora, a seguinte relação obedecida por $I_{eff}[A]$ para mostrar uma identidade para \mathcal{A} ,

$$\frac{\exp iI_{eff}[A^{\theta^{-1}}]}{\exp iI_{eff}[A]} = \frac{\int dh d\psi d\bar{\psi} \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A^{(h\theta)^{-1}}])}{\int dh d\psi d\bar{\psi} \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}])}.$$

Derivando funcionalmente em relação a θ obtemos

$$0 = \int dh d\psi d\bar{\psi} \left. \frac{\delta I[\psi, \bar{\psi}, A^{(h\theta)^{-1}}]}{\delta \theta} \right|_{\theta=0} \exp(iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}]). \quad (3.3)$$

De (3.1), vemos que

$$\mathcal{A}[A^{h^{-1}}] \int d\psi d\bar{\psi} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}]} = i \int d\psi d\bar{\psi} \left. \frac{\delta I[\psi, \bar{\psi}, A^{\theta h^{-1}}]}{\delta \theta} \right|_{\theta=0} e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}]}.$$

Considerando $(\theta h^{-1}) \iff (h\theta)^{-1}$ (pois os termos que contém essas quantidades são avaliados em $\theta = 0$), encontramos

$$\int dh d\psi d\bar{\psi} \mathcal{A}[A^{h^{-1}}] e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}]} = 0. \quad (3.4)$$

Integrando em A_μ encontramos

$$\int dh d\psi d\bar{\psi} \int dA_\mu \mathcal{A}[A^{h^{-1}}] e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A^{h^{-1}}]} = 0,$$

e, fazendo $A \rightarrow A^h$,

$$\int dh d\psi d\bar{\psi} \int dA_\mu \mathcal{A}[A] e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]} = 0,$$

o que implica, pela fatorização do volume do grupo,

$$\int d\psi d\bar{\psi} dA_\mu \mathcal{A}[A] e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]} = 0$$

e, portanto, como esperado, em

$$\langle A \rangle = 0$$

Podemos, ainda, ir facilmente da equação (3.3) à equação (3.4), inserindo o 1 de Fadeev-Popov,

$$\begin{aligned} 0 &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \mathcal{A}[A] e^{iI[\psi, \bar{\psi}, A]} \\ &= \int dA_\mu \mathcal{A}[A] e^{iW[A]} \\ &= \int dA_\mu \Delta(f[A]) \int dh \delta(f[A^h]) \mathcal{A}[A] e^{iW[A]} \\ &= \int dh \int dA_\mu \Delta f[A] \delta(f[A^h]) \mathcal{A}[A] e^{iW[A]} \\ &= \int dh dA_\mu^{h^{-1}} \Delta(f[A]) \delta(f[h]) \int dh \mathcal{A}[A^{h^{-1}}] e^{iW[A^{h^{-1}}]} \end{aligned}$$

mostrando que $\int dh \mathcal{A}[A^{h^{-1}}] e^{iW[A^{h^{-1}}]} = 0$, concluímos que (3.3) nos conduz à equação (3.2) e vice-versa:

$$\begin{aligned} \int dh \mathcal{A}[A^{h^{-1}}] e^{iW[A^{h^{-1}}]} &= i \int dh \left. \frac{\delta W[A^{(\theta h)^{-1}}]}{\delta(\theta h)} e^{iW[A^{(\theta h)^{-1}}]} \right|_{\theta=0} \\ &= \int d(\theta h) \left. \frac{\delta W[A^{(\theta h)^{-1}}]}{\delta(\theta h)} e^{iW[A^{(\theta h)^{-1}}]} \right|_{\theta=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] J. Steinberger, *Phys. Rev.* **76** (1949), 1180.
- [2] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951), 664.
- [3] K. Johnson, *Phys. Lett.* **5** ((1963), 253.
- [4] D. G. Sutherland, *Nucl. Phys.* **B2** (1967), 433.
- [5] M. Veltman, *Proc. Roy. Soc.* **A301** (1967), 107.
- [6] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969), 2426.
- [7] J. S. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **A60**, (1969), 47.
- [8] L. Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Nucl. Phys.* **B234** (1984), 449.
- [9] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351.
- [10] M. B. Green e J. H. Schwartz, *Phys. Lett.* **149B** (1984), 117.
- [11] R. Jackiw e C. Rebbi, *Phys. Rev.* **D14** (1976), 517; **D16** (1977), 1052.
- [12] N. K. Nielsen e B. Schroer, *Nucl. Phys.* **B127**, 493.
- [13] M. F. Atiyah e I. M. Singer, *Ann. Math.* **87** (1968), 485.
- [14] R. Stora, Continuum Gauge Theories, in: *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*. Cargèse Lectures, eds. M. Levy e P. Mitter, Plenum Press, New York (1976), pag. 201.

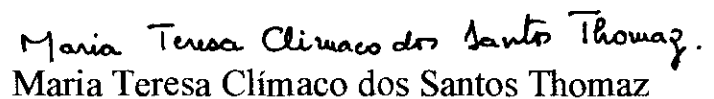
- [15] B. Zumino Chiral Anomalies and Differential Geometry, in: *Relativity, Groups and Topology II*. Les Houches lectures, eds. B. S. DeWitt e R. Stora, North-Holland, Amsterdam (1983), pag. 1291.
- [16] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D21** (1980), 2848.
- [17] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985), 1219.
- [18] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167** (1986), 225.
- [19] K. Harada e I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **183B** (1987), 311.
- [20] O. Babelon, F. Schaposnik e C. M. Viallet, *Phys. Lett.* **B177** (1986), 385.
- [21] K. Harada, *Nucl. Phys.* **B329** (1990), 723.
- [22] L. D. Faddeev e Y. N. Popov, *Phys. Lett.* **25B**, (1967), 29.
- [23] P. Pascual e R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Lecture Notes in Physics, vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [24] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962), 2425.
- [25] R. Jackiw e K. Johnson, *Phys. Rev.* **182** (1969), 1459.
- [26] Rodolfo A. Casana S., *Renormalização e Ambigüidades na QED₂*, tese de Mestrado, CBPF, fevereiro de 1997.
- [27] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 2ª edição, International Series of Monographs in Physics, vol. 85, Oxford Science Publications, Oxford, 1993.

**“CANCELAMENTO DE ANOMALIAS EM TEORIAS DE
CALIBRE ABELIANAS”**

Rigoberto Carlos Proleón Patricio

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Sebastião Alves Dias - Presidente


Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz


José Abdalla Helayël-Neto

Rio de Janeiro, 28 de agosto de 1998