

TESE DE  
MESTRADO

Cálculo da Fase Causal  
na  
Eletrodinâmica Quântica

Sérgio Eduardo Silva Duarte

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 1998

# Dedicatória

*À Sandra e Annalu que tanto me ocuparam,  
por estarem em meu coração,  
mas que, por isso mesmo, me deram motivo para a ação.*

*A meus pais e irmãos.*

# Agradecimentos

- Agradeço ao meu orientador, Sebastião Alves Dias, por tudo que aprendi durante o trabalho, e pela inesgotável paciência ao repetir  $n$  vezes ( $n \rightarrow \infty$ ) todas as regras na arte de captura e morte dos leões diários.
- Ao Luiz, meu irmão de sangue e alma, pela ajuda ilimitada.
- A todos da minha família, pelo apoio, pelos sorrisos e, principalmente, por existirem.
- Aos amigos da vida toda.
- Aos companheiros do CBPF, que transformam o trabalho num grande prazer.
- A todos, enfim, que ensinam, a cada instante que “neste mundo a beleza é comum”.

# Resumo

Estudamos a implementação, via computação algébrica, do cálculo da fase da matriz  $\mathbf{S}$  na Eletrodinâmica Quântica, supondo  $A_\mu$  externo. Como base para os nossos cálculos tomamos o princípio da causalidade e, escolhendo este caminho, evitamos o aparecimento de termos divergentes no processo. Usamos este procedimento para a construção de um algoritmo computacional que calcula a fase causal em quarta ordem em teoria de perturbações, aplicando o resultado na determinação da corrente de polarização do vácuo. Iniciamos, assim, uma investigação acerca da viabilidade de se produzir um mecanismo computacional, capaz de abordar problemas em Eletrodinâmica Quântica, em qualquer ordem perturbativa dada.

# Abstract

We study the calculation of the  $\mathbf{S}$  matrix phase, through algebraic computation methods, for Quantum Electrodynamics with an external  $A_\mu$ . We take causality as the basis for the calculations and, doing this, we avoid meeting divergencies in the process. Then, we use this procedure in the construction of a computational algorithm for the calculation of the causal phase, to fourth order in perturbation theory. This work is the beginning of an investigation concerning the viability of producing a computational mechanism, able to face problems in QED in any given perturbative order.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Índice . . . . .	vi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Espalhamento por um Campo Externo</b>	<b>5</b>
1.1 Quantizando o Campo de Dirac . . . . .	5
1.1.1 O Espaço de Fock . . . . .	6
1.1.2 Operadores no Espaço de Muitas Partículas . . . . .	7
1.1.3 O Campo de Dirac Livre . . . . .	11
1.2 Interação com um Campo Externo . . . . .	13
1.2.1 Evolução Temporal e Matriz S . . . . .	14
1.2.2 Expansão Perturbativa . . . . .	18
<b>2 Determinação da Fase Causal</b>	<b>21</b>
2.1 A Condição Diferencial . . . . .	21
2.2 Cálculo de $\varphi[A]$ pela Condição Global . . . . .	26
<b>3 Implementação do Cálculo de <math>\varphi[A]</math> e da Polarização do Vácuo</b>	<b>31</b>
3.1 Detalhando o Problema . . . . .	31

3.2	Calculando $\text{Tr}T(N)_4$ e $\text{Tr}[T^2(N)]_4$ . . . . .	33
3.2.1	Termos 4F1 . . . . .	34
3.2.2	Termos 2P1 . . . . .	41
3.2.3	Termos 2P2 . . . . .	44
3.2.4	Calculando $\text{Tr}[T^2(N)]_4$ . . . . .	47
3.3	Forma Final de $\varphi^{(4)}[A]$ . . . . .	48
3.4	Polarização do Vácuo . . . . .	50
	<b>Conclusão</b>	<b>55</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>65</b>

# Introdução

O problema das divergências em Teoria Quântica de Campos está presente desde os primeiros cálculos realizados, por Heisenberg e Pauli [1] em 1929-30. A origem deste problema está na presença de produtos de campos num mesmo ponto. Os campos, desde o ponto de vista quântico, constituem-se em distribuições com valores em operadores. Como, em geral, produtos de distribuições não estão bem definidos (tomemos, como exemplo,  $\delta(x)\delta(x)$ ), daí surge uma explicação natural para os infinitos. De fato, cálculos da auto-energia do elétron e da polarização do vácuo, induzida por uma dada distribuição de carga  $\rho(x)$ , produziram resultados divergentes, nos primórdios da Teoria Quântica de Campos [2], [3]. Estas dificuldades foram superadas posteriormente com o desenvolvimento da renormalização por Schwinger [4], Tomonaga [5], Feynman [6], Dyson [7] e outros.

A renormalização passa primeiramente pela *regularização* dos infinitos (da mesma forma como, por exemplo, considera-se a distribuição  $\delta$  como o limite de uma sequência de funções bem comportadas, parametrizada por um certo parâmetro  $\Lambda$ ; usam-se estas funções para realizar a integral, produzindo-se um resultado que é uma função de  $\Lambda$ , sendo, ao final, tomado o limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ ), deixando as expressões dependentes de um dado parâmetro de “corte”  $\Lambda$ . Ao contrário do que acontece com a  $\delta$ , no entanto, nos cálculos perturbativos realizados na Teoria de Campos o limite de  $\Lambda$  para o seu valor natural não está bem definido. Antes de fazer este limite, então, é feita a suposição de que os parâmetros da teoria (cargas, massas, etc.) são funções de  $\Lambda$  escolhidas de tal forma que cancelem as divergências que aparecem nas etapas intermediárias dos cálculos.



Tal suposição é apoiada no fato de que as funções de Green da teoria são ambíguas. Essa ambiguidade manifesta-se precisamente na possibilidade de adição de termos locais com certas características à ação original da teoria, escolhidos de forma a cancelar as divergências. Feito isto, toma-se o limite de  $\Lambda$  para o seu valor natural e obtém-se uma expressão finita. Os primeiros cálculos feitos dentro desse espírito revelaram um acordo impressionante com os dados experimentais (o chamado *Lamb shift* [8] e o cálculo do momento magnético anômalo do elétron [9]), reforçando a credibilidade do método.

Posteriormente, a teoria da renormalização foi desenvolvida de modo sistemático e rigoroso por diversos autores [10], [11], [12], [13]. A exploração do procedimento de renormalização trouxe à tona diversas propriedades fundamentais das teorias de campo, tais como o grupo de renormalização ou as anomalias [13]. A técnica foi consagrada como uma abordagem sistemática e factível para que se pudessem fazer cálculos em Teoria Quântica de Campos. Recentemente, outras abordagens à renormalização têm aparecido, tais como a renormalização *à la* Wilson [14] e a renormalização algébrica [15]. Em todas as abordagens parte-se do pressuposto de que não se pode evitar o aparecimento de divergências ao tratar campos quantizados.

Contudo, trabalhos recentes têm confrontado esta linha de pensamento. É o caso da abordagem de Scharf [16], onde o autor mostra que pode perfeitamente efetuar todos os cálculos tradicionais da Eletrodinâmica Quântica sem mencionar a palavra “infinito”. Complementando as idéias tradicionais da Teoria de Campos com a hipótese de *causalidade* (que é um fato, e não uma hipótese, quando tratamos de situações nas quais o campo eletromagnético é externo - o contexto deste trabalho) e os resultados de Epstein e Glaser [17], Scharf propõe uma maneira alternativa de fazer cálculos perturbativos, livre do problema das divergências e fortemente baseada em relações de dispersão. A técnica foi recentemente generalizada para englobar teorias de calibre não-abelianas, com sucesso [18]. A base da técnica está em definir recursivamente, com o auxílio da hipótese de causalidade, as diferentes ordens perturbativas da teoria, evitando a introdução dos produtos cronologicamente ordenados de Dyson. Estes produtos, expressos em termos de

produtos de funções de Heaviside e operadores de campo, são a origem das divergências perturbativas, as quais, portanto, não aparecerão mais.

A abordagem de Scharf é tomada, na literatura, como uma maneira a mais de se fazer a renormalização de uma teoria de campo (com o que ele não concorda [19]). Na prática é difícil distinguir as abordagens, já que a maior parte dos trabalhos, até então, procurou mostrar a equivalência dos resultados obtidos por ambos os métodos. Uma possível exceção pode ser o tratamento de teorias em que ocorrem renormalizações não-multiplicativas [20], [21]. Fenômenos muito importantes aparecem neste contexto, como a geração dinâmica de massa, por exemplo. A abordagem convencional é a de que, para que possam ser renormalizadas as divergências da teoria, os termos gerados em uma dada ordem devem ser incorporados à ação clássica e os cálculos refeitos. Mas isto muda a teoria original! Em contraste, se não há a obrigação de absorver divergências, não seria necessário modificar a ação original, preservando-se, assim, a consistência interna do modelo. Se este programa puder ser levado a cabo, pode fornecer um critério objetivo para decidir a questão acima.

Uma outra vantagem do método de Scharf é a possibilidade de aplicação da Computação Algébrica. Claramente, um obstáculo forte no caminho do uso de métodos de computação algébrica em Teoria Quântica de Campos é a presença de divergências e a necessidade de tratá-las de maneira quase que individualizada. Em contrapartida, uma abordagem recursiva (possibilitada pela condição de causalidade) na qual só entrem objetos matematicamente bem definidos poderia ser passível de um tratamento computacional (algébrico!) completo. Idealmente, através da abordagem finita, poderíamos reduzir o cálculo de elementos de matriz  $S$  a um mero fornecimento ao computador dos estados assintóticos relevantes e de uma Hamiltoniana de interação. Neste segundo aspecto é que se concentram as nossas questões.

Nesta tese, damos início a uma investigação visando decidir se a implementação computacional do método de Scharf é viável ou não. A estratégia empregada consiste em analisar o cálculo explícito de uma quantidade completamente determinada pela condição

de causalidade: a *fase causal*. Esta fase, definida posteriormente na tese, é básica para o cálculo de quantidades fisicamente relevantes, como a polarização do vácuo. Em trabalhos anteriores [22] Scharf esboçou um algoritmo de cálculo para a fase causal, envolvendo uma decomposição do potencial  $A_\mu$  que tornou aplicável a condição de causalidade. Este algoritmo, porém, não foi explicitamente aplicado, pois os cálculos foram feitos apenas até ordem  $e^2$ , onde não há necessidade das técnicas desenvolvidas em [22]. Propomo-nos, então, a estender o cálculo da fase causal até a ordem  $e^4$ , de modo a ter uma idéia das dificuldades envolvidas na possível construção de um algoritmo computacional que possa calculá-la em qualquer ordem perturbativa dada. A construção deste algoritmo permitiria a abordagem computacional de qualquer problema na Eletrodinâmica Quântica em que o campo  $A_\mu$  fosse considerado externo.

A tese organiza-se da seguinte maneira: no capítulo 1, fazemos uma breve revisão da quantização de um campo de Dirac na presença de um potencial externo, onde aproveitamos para definir a notação empregada, bem como a fase causal. No capítulo 2 revemos os dois métodos disponíveis para o cálculo desta fase. O cálculo detalhado da fase e a aplicação à polarização do vácuo são mostrados no capítulo 3. Ao final, apresentamos as nossas conclusões e um apêndice com o programa MAPLE construído para os cálculos da tese.

# Capítulo 1

## Espalhamento por um Campo Externo

Nesta tese, estaremos interessados em discutir situações em que o campo de Dirac é quantizado na presença de um campo eletromagnético externo. Para este caso, pode-se mostrar que, em geral, não é possível definir o Operador de Evolução Temporal [23]. Podemos, contudo, recorrer à teoria de espalhamento, abrindo mão de seguir detalhadamente o que acontece com as probabilidades para cada  $t$ .

Construiremos, perturbativamente, o operador  $\mathbf{S}$  que fará a conexão entre os estados livres iniciais  $\Psi_{\text{in}}$  e os estados finais (também livres)  $\Psi_{\text{out}}$ . Com isso, escreveremos  $\mathbf{S}$  em função dos operadores de criação e de destruição de partículas livres. Embora esta construção seja bastante usual, iremos aproveitá-la para introduzir a notação utilizada e o conceito, não tão amplamente discutido, da fase causal.

### 1.1 Quantizando o Campo de Dirac

A formulação da Mecânica Quântica Relativística, em bases análogas às da Não-Relativística, nos apresenta um cenário onde aparecem problemas de interpretação. A solução vem quando cumprimos o processo de “segunda quantização”. Este processo nos conduz a

uma teoria de muitas partículas onde, em geral, o número delas não é conservado na evolução temporal. Nesta seção, aplicaremos o método para o campo de Dirac livre.

### 1.1.1 O Espaço de Fock

O ponto de partida, para a construção de estados de muitas partículas, será o espaço de uma partícula  $\mathcal{H}_1$ . Neste espaço, tomando o conjunto completo de operadores comutantes  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , teremos por elementos, para cada tempo  $t$ , funções  $f(x, y, z)$ , que passaremos a representar por  $f(x)$ , tais que  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Um estado de duas partículas no espaço de configurações pode ser representado por:

$$\varphi_2(x_1, x_2) \in \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1. \quad (1.1)$$

A extensão para um estado de  $n$  partículas é imediata:

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}_n = \prod_{\otimes_1}^n \mathcal{H}_1 \equiv \mathcal{H}_1^{\otimes n}. \quad (1.2)$$

Se estivermos tratando de partículas idênticas, estaremos restritos a estados simétricos para bosons,

$$S_n \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \varphi_n(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}), \quad (1.3)$$

ou antissimétricos para férmions,

$$A_n \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \varphi_n(x_{\pi_1}, \dots, x_{\pi_n}), \quad (1.4)$$

onde a soma é feita sobre todas as  $\pi$  permutações das  $n$  partículas.

Assim, o espaço físico dos estados de  $n$  elétrons, por exemplo, é:

$$\mathcal{H}_n = A_n \mathcal{H}_1^{\otimes n}. \quad (1.5)$$

Para se tratar o número de partículas explicitamente como parte da dinâmica, define-

se o espaço de Fock

$$\mathcal{F} = \sum_{\oplus, n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n. \quad (1.6)$$

sendo

$$\mathcal{H}_0 = \{a\Omega\}, \quad a \in \mathbf{C}, \quad (1.7)$$

o vácuo, ou seja, o estado sem partículas.

Um elemento do espaço de Fock pode ser escrito como:

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), \quad (1.8)$$

onde

$$\varphi_0 \in \mathcal{H}_0, \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \varphi_2 \in \mathcal{H}_2, \dots \quad (1.9)$$

O produto escalar é definido por:

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_n, \quad (1.10)$$

a partir do produto escalar  $(\varphi_n, \psi_n)_n$  em  $\mathcal{H}_n$ . Isto permite estabelecer os estados que admitem interpretação física. Assim,  $\mathcal{F}$  é o espaço constituído de todos os estados  $\Phi$  tais que:

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \varphi_n)_n < \infty. \quad (1.11)$$

### 1.1.2 Operadores no Espaço de Muitas Partículas

A dinâmica dos estados de muitas partículas será descrita pela ação de objetos que serão extensões dos operadores definidos no setor de uma partícula. Estas extensões ligam vetores no espaço de Fock:

$$\Psi = \mathbf{A}\Phi. \quad (1.12)$$

Assim, é possível mostrar [24] que qualquer estado  $\Phi$  pode ser levado em outro estado  $\Psi$  pela ação de operadores que criam e aniquilam partículas, ou seja, todo operador  $\mathbf{A}$ , que atua no espaço de Fock, pode ser escrito em termos dos operadores de criação e de aniquilação. Faremos a seguir a definição detalhada de tais operadores.

O operador de criação  $a(f)^\dagger$  que cria uma partícula no estado  $f \in \mathcal{H}_1$  é definido através de

$$\begin{aligned} a(f)^\dagger \Omega &= f, \\ (a(f)^\dagger \Phi)_n &= \sqrt{n} S_n(f \otimes \varphi_{n-1}) \quad \text{ou} \quad (a(f)^\dagger \Phi)_n = \sqrt{n} A_n(f \otimes \varphi_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Adicionalmente, consideramos também os “operadores” de campo  $a^\dagger(x)$ , que não são verdadeiramente operadores, mas funcionais que tomam valores em operadores. Eles fazem o mapeamento  $f \rightarrow a(f)^\dagger$  da seguinte maneira:

$$a(f)^\dagger = \int d^3x a^\dagger(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Definimos também os “operadores” de campo no espaço dos momenta usando  $\widehat{f}(k)$ , a transformada de Fourier de  $f(x)$ :

$$a(f)^\dagger = \int d^3k a^\dagger(\mathbf{k}) \widehat{f}(\mathbf{k}). \quad (1.15)$$

Sendo  $f_j(\mathbf{x})$  e  $\widehat{f}_j(\mathbf{k})$  bases ortonormais completas em  $\mathcal{H}_1$ , podemos escrever (1.14) e (1.15) como o produto escalar formal:

$$a(f_j)^\dagger = (f_j^*, a^\dagger(\mathbf{x})), \quad (1.16)$$

e

$$a(\widehat{f}_j)^\dagger = (\widehat{f}_j^*, a^\dagger(\mathbf{k})), \quad (1.17)$$

que conduz a

$$a^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j a(f_j)^\dagger f_j(\mathbf{x})^* = \sum_j a(f_j^*)^\dagger f_j(\mathbf{x}), \quad (1.18)$$

$$a^\dagger(\mathbf{k}) = \sum_j a(\widehat{f_j})^\dagger \widehat{f_j}(\mathbf{k})^* = \sum_j a(\widehat{f_j^*})^\dagger \widehat{f_j}(\mathbf{k}). \quad (1.19)$$

Devemos observar que  $a^\dagger(x)$  e  $a^\dagger(k)$  não são operadores em  $\mathcal{F}$ , uma vez que:

$$\begin{aligned} (a(\mathbf{k})^\dagger \Phi)_n(k_1, \dots, k_n) &= \sum_j \widehat{f_j}(\mathbf{k}) \sqrt{n} S_n(\widehat{f_j^*}(\mathbf{k}_1)) \varphi_{n-1}(\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n) \\ &= \sqrt{n} S_n \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \varphi_{n-1}(\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Portanto,  $a(\mathbf{k})^\dagger \Phi$  não é um vetor de  $\mathcal{F}$ .

Da mesma forma, definimos o operador de destruição  $a(f)$ , que aniquila uma partícula com estado  $f \in \mathcal{H}_1$

$$a(f)\Omega = 0, \quad (1.21)$$

$$(a(f)\Phi)_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n+1} \int d^3x f(\mathbf{x})^* \varphi_{n+1}(x, x_1, \dots, x_n). \quad (1.22)$$

De forma semelhante obtemos as suas “versões locais”

$$a(f) = \int d^3x f(\mathbf{x})^* a(\mathbf{x}) = \int d^3k f(\mathbf{k})^* a(\mathbf{k}), \quad (1.23)$$

e, analogamente ao operador de criação,

$$a(f_j) = (f_j, a(\mathbf{x})), \quad (1.24)$$

$$a(\mathbf{x}) = \sum_j a(f_j) f_j(\mathbf{x}), \quad (1.25)$$

$$a(\mathbf{k}) = \sum_j a(\widehat{f_j}) \widehat{f_j}(\mathbf{k}). \quad (1.26)$$



É possível mostrar que  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem à seguinte álgebra:

$$[a(f), a(g)] = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] = 0, \quad (1.27)$$

$$[a(f), a^\dagger(g)]\Phi = (f, g)\Phi \quad \text{para } (\Phi)_n \in S_n\mathcal{H}_n. \quad (1.28)$$

e

$$\{a(f), a(g)\} = \{a^\dagger(f), a^\dagger(g)\} = 0, \quad (1.29)$$

$$\{a(f), a^\dagger(g)\}\Phi = (f, g)\Phi \quad \text{para } (\Phi)_n \in A_n\mathcal{H}_n. \quad (1.30)$$

A partir da ação destes operadores no vácuo, pode-se construir todo o espaço de Fock [16] e qualquer operador que lá atua.

Assim temos o operador número:

$$N = \int d^3x a^\dagger(\mathbf{x})a(\mathbf{x}), \quad (1.31)$$

com a propriedade:

$$(N\Phi)_n = n\varphi_n. \quad (1.32)$$

O seu domínio é:

$$D(N) = \{\Phi \in F, \|N\Phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2(\varphi_n, \varphi_n)_n < \infty\}. \quad (1.33)$$

De maneira análoga a (1.31), define-se o operador  $A$  (atuando no espaço de Fock) correspondente ao operador  $A(x)$  definido no espaço de uma partícula

$$\mathbf{A} = \int d^3x a^\dagger(\mathbf{x})A(\mathbf{x})a(\mathbf{x}) \quad (1.34)$$

ou

$$\mathbf{A} = \sum_j (f_j, A(\mathbf{x})f_k)a^\dagger(f_j)a(f_k). \quad (1.35)$$

### 1.1.3 O Campo de Dirac Livre

Estaremos agora tratando de campos spinoriais. Neste caso o espaço de Hilbert para uma partícula é  $\mathcal{H}_1 = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ , constituído de estados  $f$  tais que:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f^\dagger = \left( f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \right). \quad (1.36)$$

A dinâmica será determinada em  $\mathcal{H}_1$  pelo hamiltoniano (escrito no espaço dos momenta):

$$H_0 = m\beta + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} \quad (1.37)$$

onde  $\beta$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  são quatro matrizes satisfazendo á álgebra

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= 2\delta^{ij}, \\ \{\alpha^i, \beta\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

A partir delas definem-se as matrizes  $\gamma$  como

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta, \\ \gamma^i &= \beta\alpha^i. \end{aligned} \quad (1.39)$$

O espectro de  $H_0$  inclui energias positivas e negativas. Os operadores  $P_\pm$  que projetam sobre os subespaços associados a estas energias são dados por

$$P_\pm \gamma^0 = \frac{\not{p} \pm m}{2E}, \quad (1.40)$$

com o que, podemos decompor  $\mathcal{H}_1$  como abaixo,

$$\mathcal{H}_1 = P_+ \mathcal{H}_1 + P_- \mathcal{H}_1. \quad (1.41)$$

A definição dos operadores de criação e aniquilação é feita como na seção anterior:

$$a(f)^\dagger = \int d^3x a^\dagger(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \int d^3k a^\dagger(\mathbf{k})\hat{f}(\mathbf{k}), \quad (1.42)$$

$$a(f) = \left( \int d^3x f(\mathbf{x})^\dagger a(\mathbf{x}) \right) = \int d^3k \hat{f}(\mathbf{k})^\dagger a(\mathbf{k}), \quad (1.43)$$

com a ressalva de que  $a^\dagger(x)$  e  $a(x)$  são agora matrizes linha e coluna, respectivamente.

A decomposição (1.41) pode ser levada aos operadores:

$$a(f) = b(P_+f) + d(P_-f), \quad (1.44)$$

$$a(f)^\dagger = b^\dagger(P_+f) + d^\dagger(P_-f), \quad (1.45)$$

com

$$b(P_-f) = d(P_+f) = 0. \quad (1.46)$$

Teremos os anticomutadores:

$$\{b(f), b(g)\} = \{b^\dagger(f), b^\dagger(g)\} = 0, \quad (1.47)$$

$$\{b(f), b^\dagger(g)\} = (P_+f, P_+g), \quad (1.48)$$

$$\{d(f), d(g)\} = \{d^\dagger(f), d^\dagger(g)\} = 0, \quad (1.49)$$

$$\{d(f), d^\dagger(g)\} = (P_-f, P_-g). \quad (1.50)$$

A definição mais natural para o hamiltoniano no espaço de Fock seria então:

$$\mathbf{H} = \sum_{jk} (f_j, H(\mathbf{x})f_k) b^\dagger(f_j) b(f_k) + \sum_{jk} (g_j, H(\mathbf{x})g_k) d^\dagger(g_j) d(g_k), \quad (1.51)$$

que nos apresenta o problema de não ser limitado inferiormente. A solução encontrada é decompor os campos, não mais em  $a$  e  $a^\dagger$ , mas sim em  $\psi$  e  $\psi^\dagger$ , definidos por:

$$\psi(f) = b(P_+f) + d(P_-f)^\dagger, \quad (1.52)$$

$$\psi(f)^\dagger = b^\dagger(P_+f) + d(P_-f), \quad (1.53)$$

com regras de anticomutação obtidas a partir de (1.47) e (1.49):

$$\{\psi(f), \psi^\dagger(g)\} = (f, g). \quad (1.54)$$

O hamiltoniano passa a ser:

$$\mathbf{H} = \sum_{jk} (f_j, H(\mathbf{x})f_k) b^\dagger(f_j) b(f_k) + \sum_{jk} (g_j, H(\mathbf{x})g_k) d(g_j) d^\dagger(g_k). \quad (1.55)$$

Para que, finalmente, tudo fique bem determinado, faz-se a redefinição do valor esperado de  $\mathbf{H}$  no vácuo. Para isto, basta que se reescreva o operador com produtos normalmente ordenados:

$$\mathbf{H} = \sum_{jk} (f_j, H(\mathbf{x})f_k) b^\dagger(f_j) b(f_k) - \sum_{jk} (g_j, H(\mathbf{x})g_k) d^\dagger(g_k) d(g_j), \quad (1.56)$$

desprezando o termo numérico resultante do anticomutador entre  $d^\dagger$  e  $d$ . Desta forma obtemos um hamiltoniano que é limitado inferiormente.

## 1.2 Interação com um Campo Externo

Caminhando em direção a situações mais realísticas, consideramos uma interação com um campo eletromagnético clássico. Uma vez que entramos na arena das interações dependentes do tempo, passamos a enfrentar, imediatamente, uma grave dificuldade na quantização: se o operador hamiltoniano muda com o tempo, então teremos que definir

um espaço de Fock para cada instante  $t$ . No caso em que todos os campos interagentes são quantizados, temos complicações ainda mais agudas, pois a própria interpretação de partícula fica comprometida. Uma saída é a teoria de espalhamento, em que o sistema só é observado muito antes ou muito depois de ocorrida a interação.

### 1.2.1 Evolução Temporal e Matriz $\mathbf{S}$

Faremos a consideração de que o campo externo se anula para  $t \rightarrow \pm\infty$ . Assim, nestas regiões, podemos dizer que teremos estados livres  $\Psi_{\text{in}} = \Psi(-\infty)$  e  $\Psi_{\text{out}} = \Psi(\infty)$ . A ligação entre  $\Psi_{\text{in}}$  e  $\Psi_{\text{out}}$  será feita pelo operador  $\mathbf{S}$ .

A construção do operador  $\mathbf{S}$  é um problema básico em teoria de campos, e a condição de causalidade desempenha um importante papel neste esquema. Em alguns trabalhos [17], esta condição substitui a equação de movimento.

No nosso caso, a construção de  $\mathbf{S}$  será feita a partir da receita fornecida por [25], [26]. Tomando por base o operador  $S$  no espaço de uma partícula, chegaremos ao operador  $\mathbf{S}$  no espaço de Fock através de relações algébricas.

Novamente, o ponto de partida é a dinâmica para o setor de uma partícula (onde o operador de evolução é bem definido), dada pela equação de Dirac:

$$i\frac{\partial f(t)}{\partial t} = [H_0 + e\gamma^0\gamma_\mu A^\mu(t, x)]f, \quad (1.57)$$

onde  $H_0$  é o hamiltoniano do campo livre. Neste caso a solução pode ser descrita por um operador unitário em  $\mathcal{H}_1$

$$f(t) = U(t, t_0)f(t_0), \quad (1.58)$$

com as propriedades:

$$\begin{aligned} U(t, t) &= 1, \\ U(t, t_1)U(t_1, t_0) &= U(t, t_0), \\ U(t, t)^\dagger &= U(t, t)^{-1} = U(t, t). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Utilizando  $U$ , obtemos a matriz  $S$  para o setor de uma partícula:

$$S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow \infty}} e^{iH_0 t} U(t, t_0) e^{-iH_0 t_0}. \quad (1.60)$$

Faremos, então, a conexão com o operador  $\mathbf{S}$ , que atua no espaço de Fock através de:

$$\psi^{\text{out}}(t) = \psi^{\text{in}}(S(t)^\dagger f) = \mathbf{S}^\dagger \psi^{\text{in}}(f) \mathbf{S} \quad (1.61)$$

e ainda

$$\psi^{\text{out}}(t)^\dagger = \psi^{\text{in}}(S(t)^\dagger f)^\dagger = \mathbf{S}^\dagger \psi^{\text{in}}(f)^\dagger \mathbf{S}. \quad (1.62)$$

Segue, imediatamente, que para  $f \in \mathcal{H}_+$  e  $g \in \mathcal{H}_-$ :

$$b(f) \mathbf{S} = \mathbf{S} [b(S_{++}^\dagger f) + d(S_{-+}^\dagger f)^\dagger], \quad (1.63)$$

$$d(g)^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S} [b(S_{+-}^\dagger g) + d(S_{--}^\dagger g)^\dagger], \quad (1.64)$$

$$b(f)^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S} [b(S_{++}^\dagger f)^\dagger + d(S_{-+}^\dagger f)], \quad (1.65)$$

$$d(g) \mathbf{S} = \mathbf{S} [b(S_{+-}^\dagger g)^\dagger + d(S_{--}^\dagger g)], \quad (1.66)$$

com

$$S_{++} = P_+ S P_+, \quad S_{+-} = P_+ S P_-, \quad S_{-+} = P_- S P_+, \quad S_{--} = P_- S P_-. \quad (1.67)$$

Mostra-se (veja [16]) que a expressão de  $\mathbf{S}$  que satisfaz esta álgebra é:

$$\mathbf{S} = C e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} : e^{(A_2 - 1) b b^\dagger} :: e^{(1 - A_3) d d^\dagger} : e^{A_4 b d}, \quad (1.68)$$

onde  $C$  é uma constante que depende funcionalmente de  $A_\mu$  e

$$A_1 b^\dagger d^\dagger = \sum_{jk} (f_j, S_{+-} (S_{--})^{-1} g_k) b^\dagger(f_j) d^\dagger(g_k), \quad (1.69)$$

$$A_2 b b^\dagger = \sum_{jk} (f_j, (S_{++}^\dagger)^{-1} f_k) b(f_j) b^\dagger(f_k), \quad (1.70)$$

$$A_3 d d^\dagger = \sum_{jk} (g_j, (S_{++}^\dagger)^{-1} g_k) d(g_j) d^\dagger(g_k), \quad (1.71)$$

$$A_4 b d = \sum_{jk} (f_j, (S_{++}^\dagger)^{-1} g_k) b(f_j) d(g_k), \quad (1.72)$$

com  $f_j$  e  $g_k$  sendo conjuntos completos de funções ortonormais em  $\mathcal{H}_+$  e  $\mathcal{H}_-$ .

Estas expressões dos operadores  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$  não são únicas, pois há relações entre as projeções (1.67) em virtude da unitariedade de  $S$  :

$$S^\dagger S = 1 \quad (1.73)$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} \\ S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix}, \quad S^\dagger = \begin{pmatrix} S_{++}^\dagger & S_{+-}^\dagger \\ S_{-+}^\dagger & S_{--}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Assim, temos:

$$S_{++} S_{++}^\dagger + S_{+-} S_{-+}^\dagger = P_+; \quad (1.75)$$

$$S_{++} S_{+-}^\dagger + S_{+-} S_{--}^\dagger = 0; \quad (1.76)$$

$$S_{-+} S_{++}^\dagger + S_{--} S_{-+}^\dagger = 0; \quad (1.77)$$

$$S_{-+} S_{+-}^\dagger + S_{--} S_{--}^\dagger = P_-; \quad (1.78)$$

Finalmente, podemos determinar  $C$ , a menos de uma fase, utilizando:

$$(\mathbf{S}\Omega, \mathbf{S}\Omega) = |C|^2 (e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega) = 1. \quad (1.79)$$

A partir da decomposição espectral de  $A_1$  :

$$A_1 = \sum_j \mu_j(\varphi_j, \cdot) \psi_j, \quad (1.80)$$

$$A_1 b^\dagger d^\dagger = \sum_j (\varphi_j, A_1 \psi_k) b^\dagger(\varphi_j) d^\dagger(\psi_k), \quad (1.81)$$

$$A_1 b^\dagger d^\dagger = \sum_j \mu_j b^\dagger(\varphi_j) d^\dagger(\psi_j), \quad (1.82)$$

onde  $\{\varphi_j\}$  e  $\{\psi_k\}$  são bases adequadas de  $\mathcal{H}_+$  e  $\mathcal{H}_-$ , respectivamente [27], chegamos a:

$$\frac{1}{|C|^2} = \det(1 - A_1^\dagger A_1), \quad |C|^2 = \det(1 - S_{-+} S_{-+}^\dagger). \quad (1.83)$$

A expressão acima determina o módulo de  $C$ , restando uma fase, da qual trataremos no próximo capítulo. É importante mencionar que este resultado indica condições para que possamos definir o operador  $\mathbf{S}$ . Os determinantes acima (e conseqüentemente  $\mathbf{S}$ ) existem, se  $A_1^\dagger A_1$  é classe traço, o que define  $A_1$  como um operador de Hilbert-Schmidt [27]. Este mesmo critério pode ser aplicado à questão da existência de um operador de evolução temporal  $\mathbf{U}$ , unitário no espaço de Fock

$$\psi(U(t)^\dagger f) = \mathbf{U}^\dagger \psi(f) \mathbf{U}. \quad (1.84)$$

A condição para que  $\mathbf{U}$  exista é que  $P_+ U P_-$  seja um operador de Hilbert-Schmidt, a qual, em geral, não é verificada. No caso do operador  $S$ , a condição é satisfeita para uma classe de problemas bem mais ampla.

Finalmente, um vez que  $S$  e  $\mathbf{S}$  estão relacionados por (1.79), a invariância de  $S$  por transformações de calibre

$$S[A] = S[A'] \quad (1.85)$$

implica que  $\mathbf{S}$  também será invariante por transformações de calibre.



## 1.2.2 Expansão Perturbativa

Considerando

$$H(t) = H_0 + H_1(t), \quad (1.86)$$

obtemos a matriz  $S$  para uma partícula, pela série perturbativa:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n), \quad (1.87)$$

onde

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_1(t) e^{-iH_0 t}. \quad (1.88)$$

No espaço dos momenta, o termo de ordem  $n$  de  $S$  será:

$$S^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \dots \int d^3 p_{n-1} \times \quad (1.89)$$

$$\times H_I(t_1, \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) H_I(t_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \dots H_I(t_n, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{q}),$$

com

$$H_I(t, \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_j) = e^{iH_0(\mathbf{p}_{j-1})t} H_1(t, \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) e^{-iH_0(\mathbf{p}_j)t}. \quad (1.90)$$

Utilizando ainda

$$P_{\pm}(\mathbf{p}) H_0(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}) P_{\pm}(\mathbf{p}), \quad (1.91)$$

ficamos com:

$$S_{\pm\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n e^{\pm i t_1 E(\mathbf{p}) \pm i t_n E(\mathbf{q})} \times \quad (1.92)$$

$$\times \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \dots \int d^3 p_{n-1} P_{\pm}(\mathbf{p}) H_1(t_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) e^{-i H_0(\mathbf{p}_1)(t_1 - t_2)} \times$$

$$\dots e^{-i H_0(\mathbf{p}_{n-1})(t_{n-1} - t_n)} H_1(t_n, \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q}) P_{\pm}(\mathbf{q}).$$

Esta expressão pode ser utilizada para avaliar a condição de Hilbert-Schmidt de  $S_{\pm\pm}$ .

[16], para que  $\mathbf{S}$  fique bem definido (conforme foi dito na seção anterior). A condição obtida é que  $A^\mu(t)$  seja contínuo em  $t$ , e que sua primeira derivada tenha apenas finitas descontinuidades.

Vamos, ainda, reescrever (1.92), substituindo as integrais em  $t$ . Definindo

$$S_R(t, \mathbf{p}) = \Theta(t) e^{-iH_0(\mathbf{p})t}, \quad (1.93)$$

e, calculando a sua transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} S_R(p_0, \mathbf{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{ip_0(t-\epsilon t)} e^{-iH_0(\mathbf{p})t} dt = \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip^0 0} \gamma^0 \equiv \frac{i}{\sqrt{2\pi}} S^{\text{ret}}(p) \gamma^0, \end{aligned} \quad (1.94)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} S_{\pm\pm}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -i(2\pi)^{2n+1} e^n P_\pm(\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^4 p_1 \dots \int d^4 p_{n-1} \times \\ &\times A(p - p_1) S^{\text{ret}}(p_1) A(p_1 - p_2) \dots S^{\text{ret}}(p_{n-1}) A(p_{n-1} - q) P_\pm(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.95)$$

onde foi usado:

$$\gamma^0 H_1 = eA, \quad A(t_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk_1 A(k_1, \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) e^{-ik_1 t}. \quad (1.96)$$

A partir de (1.95), podemos encontrar a expressão para  $S^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (S_{\pm\pm}^{-1})^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= i(2\pi)^{-2n+1} e^n P_\pm(\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^4 p_1 \dots \int d^4 p_{n-1} \times \\ &\times A(p - p_1) S^{\text{AF}}(p_1) A(p_1 - p_2) \dots S^{\text{AF}}(p_{n-1}) A(p_{n-1} - q) P_\pm(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (1.97)$$

com

$$S^{\text{AF}}(p) \equiv \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - ip^0 0}. \quad (1.98)$$

Estes resultados serão úteis nos próximos capítulos.

# Capítulo 2

## Determinação da Fase Causal

### 2.1 A Condição Diferencial

Conforme foi visto anteriormente, há uma fase indeterminada na expressão de  $S$ . Esta fase será obtida pela imposição da condição de causalidade.

Escrevemos  $C$  na forma

$$C = C_0 e^{i\varphi[A]}, \quad (2.1)$$

uma vez que a fase dependerá do potencial externo  $A^\mu$ .

Retornando ao setor de uma partícula, consideremos o seguinte potencial:

$$A^\mu(x) = A_1^\mu(x) + A_2^\mu(x), \quad (2.2)$$

tendo  $A_1$  e  $A_2$  suportes disjuntos no tempo

$$\text{suporte } A_1 \subset (-\infty, t_0), \text{ suporte } A_2 \subset (t_0, +\infty). \quad (2.3)$$

Assim, o estado (de uma partícula) inicial  $\varphi_0$  será primeiramente espalhado por  $A_1$ , resultando no estado intermediário  $S[A_1]\varphi_0$ . Este, então, sofrerá a ação de  $A_2$ , de forma

que o estado final será  $S[A_2] S[A_1]\varphi_0$ . Mais especificamente, usando (1.60):

$$S = U_0(0, \infty)U(\infty, -\infty)U_0(-\infty, 0) = \quad (2.4)$$

$$S = U_0(0, \infty)U(\infty, r)U_0(r, 0)U_0(0, r)U(r, -\infty)U_0(-\infty, 0) = S_2S_1 \quad (2.5)$$

Obteremos um resultado análogo para  $\mathbf{S}$  no espaço de Fock:

$$\psi(S(t)^\dagger f) = \psi(S_1(t)^\dagger S_2(t)^\dagger f) = \mathbf{S}_1^\dagger \psi(S_2(t)^\dagger f) \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1^\dagger \mathbf{S}_2^\dagger \psi(f) \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1 = \mathbf{S}^\dagger \psi(f) \mathbf{S} . \quad (2.6)$$

Concluimos então que

$$\mathbf{S}[A_1 + A_2] = \mathbf{S}[A_2]\mathbf{S}[A_1], \quad (2.7)$$

para dois potenciais com suportes disjuntos no tempo. Esta condição é chamada de *condição de causalidade*, no sentido de que o que acontece em  $t < t_0$  (representado por  $\mathbf{S}(A_1)$ ) não é influenciado pelo que acontece em  $t > t_0$  (representado por  $\mathbf{S}(A_2)$ ). Esta mesma condição pode ser expressa diferencialmente. Consideremos dois pontos  $x$  e  $y$  tais que  $x^0 < t_0 < y^0$ . Desde o ponto de vista funcional, podemos considerar  $A_\mu(x)$  e  $A_\mu(y)$  como variáveis independentes,

$$\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} = 0. \quad (2.8)$$

Desta forma, temos

$$\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A] = \mathbf{S}[A_2] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A_1]. \quad (2.9)$$

Multiplicando por  $\mathbf{S}^\dagger[A] = \mathbf{S}^\dagger[A_1]\mathbf{S}^\dagger[A_2]$  ambos os lados da equação obtemos,

$$\mathbf{S}^\dagger[A] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A] = \mathbf{S}^\dagger[A_1] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A_1]. \quad (2.10)$$

Portanto,

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \mathbf{S}^\dagger[A_1] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A_1] \right) = 0. \quad (2.11)$$

Utilizando agora

$$\mathbf{S}[A_1] = \mathbf{S}^\dagger[A_2]\mathbf{S}[A], \quad (2.12)$$

obtemos, finalmente,

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \mathbf{S}^\dagger[A] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}[A] \right) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x^0 < t_0 < y^0, \\ A_\mu(z) = 0 \text{ numa vizinhança de } z^0 = t_0. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Se desprezarmos a segunda consideração teremos a condição de causalidade de Bogoliubov [10]:

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \Omega, \mathbf{S}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S} \Omega \right) = 0 \quad \text{para} \quad x^0 < y^0 \quad (2.14)$$

(sendo  $A_\mu$  um potencial arbitrário). A condição de Bogoliubov é nitidamente mais forte que a citada acima. Vamos mostrar que é possível calcular a fase a partir de (2.14). Para isso, explicitaremos  $\varphi[A]$  em (1.95) fazendo:

$$\mathbf{S} = e^{i\varphi[A]} \mathbf{S}'. \quad (2.15)$$

Então

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \mathbf{S} \Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S} \Omega \right) = \\ & = \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left[ e^{-i\varphi} \frac{\delta e^{i\varphi}}{\delta A_\mu(x)} (\mathbf{S}' \Omega, \mathbf{S}' \Omega) + \left( \mathbf{S}' \Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}' \Omega \right) \right] = \\ & = i \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} + \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \mathbf{S}' \Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}' \Omega \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

A parte real da condição de causalidade é identicamente satisfeita, uma vez que

$$\left( \Omega, \mathbf{S}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S} \Omega \right) \quad (2.17)$$

é imaginário puro, devido a  $(\Omega, \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \Omega) = 1$ . A condição para a parte imaginária será a base para a determinação de  $\varphi[A]$ .

Faremos agora a determinação da fase causal, na ordem mais baixa em teoria de perturbação. Assim:

$$\mathbf{S}'\Omega = C_0 e^{A_1 b^+ d^+} \Omega = C_0 \left( \Omega + \sum_{mn} (S_{+-} (S_{--})^{-1})_{mn} b_m^+ d_n^+ \Omega + \dots \right). \quad (2.18)$$

Uma vez que  $(S_{--})^{-1} = 1$  em primeira aproximação, temos:

$$\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}'\Omega \right) = \left[ C_0 \frac{\delta C_0}{\delta A_\mu(x)} + \text{Tr} \left( S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\mu(x)} \right) \right] + \dots \quad (2.19)$$

Como o lado esquerdo de (2.19) é puramente imaginário, concluímos que

$$C_0 \frac{\delta C_0}{\delta A_\mu(x)} = -\text{Re} \left[ \text{Tr} \left( S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\mu(x)} \right) \right] \quad (2.20)$$

e

$$\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}'\Omega \right) = i \text{Im} \left[ \text{Tr} \left( S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\mu(x)} \right) \right]. \quad (2.21)$$

Podemos, então, reescrever (2.16) como:

$$\begin{aligned} F(x, y) &\equiv i \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \left( \mathbf{S}\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \mathbf{S}\Omega \right) = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} + \\ &+ \frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \text{Im} \left[ \text{Tr} \left( S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\mu(x)} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

para  $x^0 < y^0$ . Isto define  $F(x, y)$  como uma *função causal*, ou seja nula para pontos  $y$  que sejam posteriores a  $x$ . Este tipo de função satisfaz propriedades específicas bastante restritivas, como será visto abaixo.

Usando a expansão (1.95), podemos calcular  $\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \text{Im} \left[ \text{Tr} \left( S_{+-}^\dagger \frac{\delta S_{+-}}{\delta A_\mu(x)} \right) \right]$  perturbativamente, obtendo:

$$F(x, y) = \frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} + e^2 (2\pi)^{-6} \frac{i}{2} \int d^4 k e^{ik(x-y)} P^{\mu\nu}(k), \quad (2.23)$$

com

$$P^{\mu\nu}(k) \equiv (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})P(k), \quad (2.24)$$

onde  $P(k)$  é dado por

$$P(k) \equiv \frac{2\pi}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2) \text{sgn } k^0. \quad (2.25)$$

Para calcular a fase  $\varphi$ , usaremos o fato da transformada de Fourier de uma função causal, satisfazer a uma relação de dispersão ([16], [28]), ou seja, se

$$F(t) = 0 \quad \text{para } t < 0, \quad (2.26)$$

então, as partes real e imaginária da transformada de Fourier

$$R(\omega) = \int_0^\infty F(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.27)$$

estarão relacionadas. No caso em que

$$|R(\omega)| \leq \text{const. } |\omega|^n, \quad \text{para } |\omega| \rightarrow \infty,$$

temos

$$\text{Im}R(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{Re}R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0)^{n+1}(\zeta - \omega)} d\zeta, \quad (2.28)$$

e

$$\text{Re}R(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{Im}R(\zeta)}{(\zeta - \omega_0)^{n+1}(\zeta - \omega)} d\zeta. \quad (2.29)$$

A aplicação ao nosso problema é imediata, pois definindo  $Q(k)$  a partir de

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\nu(y) \delta A_\mu(x)} = -\frac{e^2}{2} (2\pi)^{-6} \int d^4 k e^{ik(x-y)} \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) Q(k), \quad (2.30)$$



temos

$$F(x, y) = -\frac{e^2}{2}(2\pi)^{-6} \int d^4k e^{ik(x-y)} \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) (Q(k) + i P(k)), \quad (2.31)$$

com  $Q(k)$  e  $P(k)$  reais. Notando que

$$|P(k)| \leq \text{const. } |k|^2, \quad (2.32)$$

então, usando (2.29):

$$Q(\omega) = \frac{(\omega)^3}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\zeta)}{(\zeta)^3(\zeta - \omega)} d\zeta. \quad (2.33)$$

Finalmente, fazemos uma dupla integração funcional e obtemos:

$$\varphi^{(2)}[A] = \int d^4k A_\mu(k)^* \left( \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu} \right) Q(k) A_\nu(k). \quad (2.34)$$

O resultado corresponde à fase causal, calculada em segunda ordem na constante de acoplamento.

## 2.2 Cálculo de $\varphi[A]$ pela Condição Global

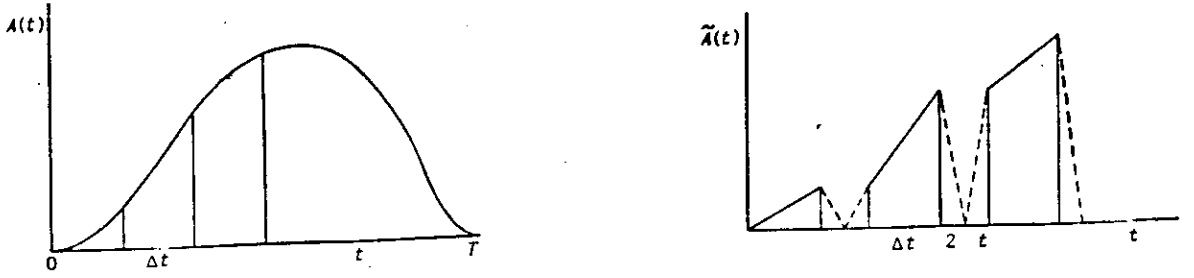
Na segunda referência citada em [22], Scharf e Wreszinski argumentam que o método apresentado acima para o cálculo da fase causal não é completamente satisfatório, apontando como desvantagens uma possível ambiguidade na integração funcional final e dificuldades para cálculos *numéricos* efetivos. A partir dessas considerações, os autores mostram, então, como calcular a fase usando a condição de causalidade sem diferenciá-la em relação a  $A_\mu$  (*condição global*). Nesta seção, vamos revisar este método, fazendo o cálculo de  $\varphi[A]$  a partir da equação (2.7), evitando diferenciá-la. A estratégia utilizada será: (i) tomar um potencial com suporte finito, (ii) “partir” este suporte, (iii) utilizar (2.7), e (iv) retornar ao potencial original.

Trataremos apenas com potenciais contínuos no tempo, com primeiras derivadas

contínuas por partes. Além disso, o potencial será diferente de zero, apenas em um intervalo finito de tempo  $[0, T]$ . Faremos, então, uma divisão desse intervalo em  $N$  partes  $\Delta t = T/N$ . Em cada um desses intervalos será feita uma aproximação linear para o potencial. Os intervalos  $\Delta t$  serão então transladados, de maneira que dois intervalos subseqüentes fiquem separados por  $(2\delta t)$ . Terminaremos a construção, fazendo o potencial ir a zero no ponto médio de cada um dos intervalos  $2\delta t$ . Ao final, teremos o seguinte potencial:

$$\left(\tilde{A}_j^\mu(t, \mathbf{x})\right) = \begin{cases} A^\mu(t_j - \Delta t) + \frac{A^\mu(t_j) - A^\mu(t_j - \Delta t)}{\Delta t}(t - t_j + \Delta t), & \text{para } t_j - \Delta t \leq t \leq t_j, \\ \frac{A^\mu(t_j - \Delta t)}{\delta t}(t - t_j + \Delta t + \delta t), & \text{para } t_j - \Delta t - \delta t \leq t \leq t_j - \Delta t, \\ \frac{A^\mu(t_j)}{\delta t}(t_j + \delta t - t), & \text{para } t_j \leq t \leq t_j + \delta t, \end{cases} \quad (2.35)$$

para  $j = 1, \dots, N$ . A visualização do processo é facilitada pela observação da figura abaixo:



A transformada de Fourier de (2.35) é:

$$\left(\tilde{A}_j^\mu(k)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_0^2}} \left[ (\exp[ik_0 t_2] - \exp[ik_0 t_1]) \frac{A^\mu(t_2) - A^\mu(t_1)}{\Delta t} + \right. \quad (2.36) \\ \left. + \frac{\exp[ik_0 t_1] - \exp[ik_0(t_1 - \delta t)]}{\delta t} A^\mu(t_1) - \frac{\exp[ik_0 t_2] - \exp[ik_0(t_2 - \delta t)]}{\delta t} A^\mu(t_2) \right],$$

onde  $t_2 = t_j$ ,  $t_1 = t_j - \Delta t$  e  $A^\mu(t) = A^\mu(t, \mathbf{k})$ .

A partir desta construção, podemos aplicar (2.7) sucessivamente às matrizes de espalhamento  $S^j$  correspondentes aos potenciais  $\tilde{A}_j^\mu(t, \mathbf{x})$ . Faremos, então, os limites  $\delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ , reobtendo o potencial original  $A^\mu(t, \mathbf{x})$ .

Inicialmente, tomamos dois potenciais com suportes disjuntos e os respectivos operadores de espalhamento:

$$\mathbf{S}_1 \equiv \mathbf{S}[A_1] = C_1 e^{i\varphi_1} e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} : e^{(A_2-1)bb^\dagger} :: e^{(1-A_3)dd^\dagger} : e^{A_4 bd} \quad (2.37)$$

e

$$\mathbf{S}_2 \equiv \mathbf{S}[A_2] = C_2 e^{i\varphi_2} e^{B_1 b^\dagger d^\dagger} : e^{(B_2-1)bb^\dagger} :: e^{(1-B_3)dd^\dagger} : e^{B_4 bd}. \quad (2.38)$$

Mas se

$$A^\mu(x) = A_1^\mu(x) + A_2^\mu(x) \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{S}[A] = C e^{i\varphi} e^{D_1 b^\dagger d^\dagger} : e^{(D_2-1)bb^\dagger} :: e^{(1-D_3)dd^\dagger} : e^{D_4 bd}, \quad (2.40)$$

$\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  estão relacionados a  $\mathbf{S}[A]$  por (2.7). Podemos concluir que:

$$(\Omega, \mathbf{S}[A]\Omega) = C e^{i\varphi} = \quad (2.41)$$

$$(\Omega, \mathbf{S}[A_2]\mathbf{S}[A_1]\Omega) = C_1 C_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} (\Omega, e^{B_4 bd} e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega). \quad (2.42)$$

Desta expressão chegamos a:

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \left( \frac{C_1 C_2}{C} \right) \det(1 + B_4 A_1). \quad (2.43)$$

Notamos que o módulo de  $\left( \frac{C_1 C_2}{C} \right) \det(1 + B_4 A_1)$  tem que ser igual a um. De fato, sendo  $S_2$  e  $S_1$  os operadores de espalhamento do setor de uma partícula  $S[A_2]$  e  $S[A_1]$ ,

respectivamente, temos:

$$\ln \left[ \left( \frac{C_1 C_2}{C} \right) \det(1 + B_4 A_1) \right] = i \text{Im} \ln \det(1 + (S_2)_{--}^{-1} (S_2)_{-+} (S_1)_{+-} (S_1)_{--}^{-1}), \quad (2.44)$$

o que nos permite escrever:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \text{Im} \ln \det(1 + (S_2)_{--}^{-1} (S_2 S_1)_{--} (S_1)_{--}^{-1}). \quad (2.45)$$

O resultado (2.45) pode ser aplicado sucessivamente aos potenciais  $\tilde{A}_j^\mu(t, \mathbf{x})$  para obtermos:

$$\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi[\tilde{A}_j^\mu] + \text{Im} \ln \det(1 + (S_j)_{--}^{-1} (S_j)_{-+} (S(j-1))_{+-} (S(j-1))_{--}^{-1}), \quad (2.46)$$

onde

$$S(j-1) = \begin{cases} \prod_{l=j-1}^1 S_l, & \text{se } j \geq 2 \\ 0 & \text{se } j = 1 \end{cases}.$$

Após algumas manipulações, chegamos à expressão:

$$\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi[\tilde{A}_j^\mu] + \text{Im} \ln \det \left( S(N)_{--} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right). \quad (2.47)$$

Mostra-se [22] que, para os limites  $\delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\varphi[\tilde{A}_j^\mu]$  pode ser substituído pela sua aproximação em segunda ordem  $\varphi^{(2)}[\tilde{A}_j^\mu]$ , calculada a partir de (2.34), não tendo contribuições de outras ordens. Ficamos então com o resultado:

$$\varphi[A] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=1}^N \varphi^{(2)}[\tilde{A}_j^\mu] + \text{Im} \ln \det \left( S(N)_{--} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right) \right\}. \quad (2.48)$$

Este termo ainda não está pronto para ser calculado, pois temos uma divergência ultravioleta em  $\varphi^{(2)}[\tilde{A}_j^\mu]$  e  $\det \left( S(N)_{--} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right)$ . O problema é apenas aparente, uma vez

que as divergências se cancelam. De fato, podemos escrever

$$\det \left( S(N)_{--} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right) = \det[1 + T(N)], \quad (2.49)$$

onde  $T(N)$  é constituído de termos com 2, 4, 6, ..., operadores  $S_{-+}$  ou  $S_{+-}$ . Dentre estes fatores, aqueles que possuem dois operadores  $(S_i)_{-+}$  e  $(S_j)_{+-}$ , serão operadores de Hilbert-Schmidt, e os demais serão classe traço. Assim, pode-se regularizar (2.49) fazendo

$$\text{Im ln det}[1 + T(N)] = \text{Im ln det} \{ [1 + T(N)] \exp[-\text{Tr}T(N)] \} + \text{Im Tr } T(N). \quad (2.50)$$

Substituindo (2.50) em (2.48), verificamos que a segunda ordem do termo  $\text{Im Tr } T(N)$ , que representaremos por  $\text{Im Tr } T(N)_2$ , pode ser combinada com  $\sum_{j=1}^N \varphi^{(2)}[\tilde{A}_j^\mu]$ , resultando finalmente em:

$$\begin{aligned} \varphi[A] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N \varphi^{(2)}[\tilde{A}_j^\mu] + \text{Im Tr } T(N)_2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \text{Im ln det} \{ [1 + T(N)] \exp[-\text{Tr}T(N)_2] \} \right\} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \varphi^{(2)}[A(N)] + \text{Im ln det} \{ [1 + T(N)] \exp[-\text{Tr}T(N)_2] \} \right\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde

$$A(N)^\mu = \sum_{j=1}^N A_j^\mu, \quad (2.52)$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[ \varphi^{(2)}[A(N)] \right] = \varphi^{(2)}[A], \quad (2.53)$$

que podemos calcular usando (2.34).

No próximo capítulo, estaremos envolvidos com o cálculo de  $\varphi[A]$  utilizando a expressão (2.51).

# Capítulo 3

## Implementação do Cálculo de $\varphi[A]$ e da Polarização do Vácuo

Neste capítulo, faremos uso da expressão

$$\varphi[A] = \varphi^{(2)}[A] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \{ \text{Im} \ln \det \{ [1 + T(N)] \exp[-\text{Tr} T(N)_2] \} \} \quad (3.1)$$

para estudar a implementação de um algoritmo computacional algébrico que calcule  $\varphi[A]$ , em quarta ordem em teoria de perturbação. No final, aplicaremos o resultado ao cálculo da polarização do vácuo para uma configuração  $A_\mu$  genérica, nesta mesma ordem.

### 3.1 Detalhando o Problema

Começaremos com uma análise mais detalhada do termo

$$(1 + T(N)) \equiv S(N) \prod_{j=1}^N (S_j)^{-1}. \quad (3.2)$$

O fator  $S(N)_{--}$  pode ser escrito como:

$$S(N)_{--} = \prod_{j=N}^1 (S_j)_{--} + \sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} + \sum_{j>k>l>m=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k,l,m]} + \dots, \quad (3.3)$$

onde  $(S_{i[j,k,l,m,\dots]})_{--}$  representa:

$$\begin{aligned} (S_i)_{--} & \text{ se } i > j \text{ ou } k > i > l, \dots, \\ (S_i)_{++} & \text{ se } j > i > k \text{ ou } l > i > m, \dots, \\ (S_i)_{-+} & \text{ se } i = j, l, \dots \text{ ou} \\ (S_i)_{+-} & \text{ se } i = k, m, \dots, \end{aligned} \quad (3.4)$$

e onde

$$\sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \text{ e } \sum_{j>k>l>m=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k,l,m]} \quad (3.5)$$

são os termos com dois e quatro fatores  $(S_i)_{\pm\mp}$  respectivamente. Através de (1.95), notamos que  $(S_i)_{++}$  e  $(S_i)_{--}$  têm o termo de ordem zero igual a um. No caso de  $(S_i)_{-+}$  e  $(S_i)_{+-}$ , o mais baixo termo da expansão tem ordem  $e^1$ .

Ao multiplicarmos (3.3) por  $\prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1}$ , temos:

$$\begin{aligned} S(N)_{--} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} &= 1 + \sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} + \\ &+ \sum_{j>k>l>m=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k,l,m]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podemos reconhecer:

$$T(N) = \sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} + \sum_{j>k>l>m=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k,l,m]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} + \dots, \quad (3.7)$$

Toda a contribuição de segunda ordem encontra-se em  $\sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1}$ , uma vez que todos os demais possuem quatro ou mais fatores  $(S_i)_{\pm\mp}$  e, portanto, a ordem

mais baixa destes termos é  $e^4$ .

Usando a identidade

$$\ln \det A = \text{Tr} \ln A \quad (3.8)$$

aplicada a (2.49), temos:

$$\ln \det(1 + T(N)) = \text{Tr} \ln(1 + T(N)). \quad (3.9)$$

Fazendo uso da definição de  $\ln(1 + T(N))$  pela série:

$$\ln(1 + T(N)) = T(N) + \frac{[T(N)]^2}{2} + \frac{[T(N)]^3}{3} + \frac{[T(N)]^4}{4} + \dots, \quad (3.10)$$

ficamos com:

$$\ln \det(1 + T(N)) = \text{Tr} T(N) + \text{Tr} \frac{[T(N)]^2}{2} + \text{Tr} \frac{[T(N)]^3}{3} + \text{Tr} \frac{[T(N)]^4}{4} + \dots \quad (3.11)$$

Em uma primeira abordagem do problema, estaremos interessados em calcular (3.11) até quarta ordem em teoria de perturbação. Isso significa que tomaremos apenas os termos  $\text{Tr} T(N)$  e  $\text{Tr} \frac{[T(N)]^2}{2}$ . Por fim, é importante notar que só teremos potências pares de  $e$  na expansão de  $\varphi[A]$  [22], e a exponencial em (3.1) cancela o termo de segunda ordem. Teremos, então, que calcular  $\text{Tr} T(N)_4$  e  $\text{Tr}(T(N)_2)^2$ .

## 3.2 Calculando $\text{Tr} T(N)_4$ e $\text{Tr}[T^2(N)]_4$

Os termos de quarta ordem, presentes em  $\text{Tr} T(N)_4$ , podem ser classificados em três grupos:

- i) termos constituídos por quatro fatores de primeira ordem, que indicaremos pela notação 4F1;
- ii) termos constituídos por dois fatores de primeira ordem e um fator de segunda ordem (2F1);



iii) termos constituídos por dois fatores de segunda ordem (2F2);

Passamos agora à determinação desses termos:

### 3.2.1 Termos 4F1

Neste grupo estão as expressões do tipo:

$$\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-}), \quad (3.12)$$

$$\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{++}(S_k)_{++}(S_l)_{+-}), \quad (3.13)$$

$$\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_j)^{-1}(S_i)^{-1}), \quad (3.14)$$

$$\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_l)_{+-}(S_k)^{-1}(S_j)^{-1}), \quad (3.15)$$

$$\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{++}(S_l)_{+-}(S_k)^{-1}), \quad (3.16)$$

com  $1 < l < k < j < i < N$ .

Para (3.12), usando a aproximação de primeira ordem em (1.95), temos:

$$\begin{aligned} ((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-})(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (2\pi)^{12} e^4 P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \times \\ &\times \mathcal{A}_i(-p - p_1) P_+(\mathbf{p}_1) \gamma^0 \mathcal{A}_j(p_1 + p_2) P_-(-\mathbf{p}_2) \times \\ &\times \gamma^0 \mathcal{A}_k(-p_2 - p_3) P_+(\mathbf{p}_3) \gamma^0 \mathcal{A}_l(p_3 + q) P_-(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tomando o traço, temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-}) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^3 p \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^3 p_3 \times \\ &\times \text{tr} \left( P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \mathcal{A}_i(-p - p_1) P_+(\mathbf{p}_1) \gamma^0 \mathcal{A}_j(p_1 + p_2) \times \right. \\ &\left. \times P_-(-\mathbf{p}_2) \gamma^0 \mathcal{A}_k(-p_2 - p_3) P_+(\mathbf{p}_3) \gamma^0 \mathcal{A}_l(p_3 + p) \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde foi usada a propriedade de permutações cíclicas não alterarem o traço. Sabendo que:

$$P_-(-\mathbf{p})\gamma^0 = \frac{\not{p} - m}{2E} \quad (3.19)$$

e

$$P_+(\mathbf{p})\gamma^0 = \frac{\not{p} + m}{2E} , \quad (3.20)$$

e fazendo  $\int \frac{d^3p}{2E} \rightarrow \int d^4p \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)$  temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-}) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4p \int d^4p_1 \int d^4p_2 \int d^4p_3 \times \\ &\times \text{tr}((\not{p} - m)A_i(-p - p_1)(\not{p}_1 + m)A_j(p_1 + p_2)(\not{p}_2 - m) \times \\ &\times A_k(-p_2 - p_3)(\not{p}_3 + m)A_l(p_3 + p)) \times \\ &\times \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)\delta(p_1^2 - m^2)\Theta(p_{1_0})\delta(p_2^2 - m^2)\Theta(p_{2_0})\delta(p_3^2 - m^2)\Theta(p_{3_0}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Introduziremos, agora, as novas variáveis:

$$\begin{aligned} k_1^\mu &= -(p + p_1)^\mu, \\ k_2^\mu &= (p_1 + p_2)^\mu, \\ k_3^\mu &= -(p_2 + p_3)^\mu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Isto nos conduz a:

$$\begin{aligned} \text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-}) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \times \\ &\times A_{\mu i}(k_1)A_{\nu j}(k_2)A_{\rho k}(k_3)A_{\sigma l}(-k_3 - k_2 - k_1) \times \\ &\times \int d^4p \text{tr}((\not{p} - m)\gamma^\mu(-\not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \\ &\times \gamma^\rho(-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\sigma) \times \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \Theta(-k_{1_0} - p_0) \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \\ & \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \delta((-k_3 - k_2 - k_1 - p)_3^2 - m^2) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0). \end{aligned}$$

É importante notar que todos os termos 4F1 serão calculados a partir de expressões do tipo (3.23) e, portanto, a integração de  $\int d^4p$  tr... estará presente em todos eles (com poucas mudanças de sinais no argumento do traço). Escolhemos o caminho que se segue, para simplificar a aplicação computacional do procedimento a todos os fatores.

Podemos calcular

$$\begin{aligned} t^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \text{tr}((\not{p} - m)\gamma^\mu(-\not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times & (3.24) \\ & \times \gamma^\rho(-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\sigma) = \\ p_\alpha(-k_1 - p)_\beta(k_2 + k_1 + p)_\eta & (-k_3 - k_2 - k_1 - p)_\kappa \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\eta\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma^\sigma) + \\ p_\alpha(-k_1 - p)_\beta m^2 & \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) + \\ p_\alpha(k_2 + k_1 + p)_\eta m^2 & \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\eta\gamma^\rho\gamma^\sigma) + \\ p_\alpha(-k_3 - k_2 - k_1 - p)_\kappa m^2 & \text{tr}(\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma^\sigma) + \\ (-k_1 - p)_\beta(k_2 + k_1 + p)_\eta m^2 & \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\eta\gamma^\rho\gamma^\sigma) + \\ (-k_1 - p)_\beta(-k_3 - k_2 - k_1 - p)_\kappa m^2 & \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma^\sigma) + \\ (k_2 + k_1 + p)_\eta(-k_3 - k_2 - k_1 - p)_\kappa m^2 & \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\eta\gamma^\rho\gamma^\kappa\gamma^\sigma) + \\ & m^4 \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma). \end{aligned}$$

Este termo é calculado, com auxílio de computação algébrica, para ser utilizado em:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \int d^4p t^{\mu\nu\rho\sigma} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \times \\ & \times \Theta(-k_{1_0} - p_0) \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \times & (3.25) \end{aligned}$$

$$\times \delta((-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0).$$

Para resolvermos a integral acima, podemos utilizar as quatro funções  $\delta$ . O procedimento será descrito a seguir:

Integrando em  $dp_0 \delta(p^2 - m^2)$  temos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \int \frac{d^3p}{2E} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \delta(k_1^2 + 2k_1p) \Theta(-k_{1_0} - E_0) \times \\ &\times \delta\left((k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{2_0} + k_{1_0}) - 2(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{p}\right) \times \\ &\times \delta\left((k_3 + k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{3_0} + k_{2_0} + k_{1_0}) - 2(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{p}\right) \times \\ &\times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + E) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - E), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $[t^{\mu\nu\rho\sigma}]$  passa a representar, de agora em diante, o termo  $t^{\mu\nu\rho\sigma}$  já com as substituições devidas a cada integração.

Faremos agora a integração em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{|\mathbf{p}|^2 \sin\theta d|\mathbf{p}| d\theta d\phi}{2E} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \delta(k_1^2 + 2k_1p) \times \\ &\times \Theta(-k_{1_0} - E_0) \delta\left((k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{2_0} + k_{1_0}) - 2(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{p}\right) \times \\ &\times \delta\left((k_3 + k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{3_0} + k_{2_0} + k_{1_0}) - 2(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{p}\right) \times \\ &\times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + E) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - E), \end{aligned} \quad (3.27)$$

usamos então  $|\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| = E dE$ . Podemos, ainda, escolher um referencial em que  $k_1 = (k_{1_0}, 0, 0, 0)$ , pois,  $k_1 = -(p + p_1)$  é construído pela soma de dois vetores tipo tempo e, portanto, é ele mesmo de tipo tempo. Assim:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \int_m^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{|\mathbf{p}| \sin\theta dE d\theta d\phi}{2} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \delta\left(2k_{1_0} \left(\frac{k_{1_0}}{2} + E\right)\right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \Theta(-k_{1_0} - E_0) \delta \left( (k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{2_0} + k_{1_0}) - 2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{p} \right) \times \\
& \times \delta \left( (k_3 + k_2 + k_1)^2 + 2E(k_{3_0} + k_{2_0} + k_{1_0}) - 2(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{p} \right) \times \\
& \times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + E) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - E),
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Integrando em  $E$  ficamos com:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta d\phi}{4k_{1_0}} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \Theta(-k_{1_0}) \times \\
& \times \delta \left( k_2^2 + k_{1_0} k_{2_0} - 2\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{p} \right) \delta \left( k_3^2 + k_2^2 + k_{1_0}(k_{3_0} + k_{2_0}) - 2(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{p} \right) \times \\
& \times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + E) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - E),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde foram feitas as substituições:

$$E = \frac{k_{1_0}}{2} \quad \text{e} \quad |\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2}, \tag{3.30}$$

e usamos que  $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$ . Fazemos agora uma rotação espacial para que  $\mathbf{k}_2$  fique sobre o eixo  $z$ . Assim,

$$\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{k}_2| |\mathbf{p}| \cos \theta. \tag{3.31}$$

Então

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta d\phi}{4k_{1_0}} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \Theta(-k_{1_0}) \times \\
& \times \delta \left( 2|\mathbf{k}_2| \left( \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \right) \left( \frac{k_2^2 + k_{1_0} k_{2_0}}{2|\mathbf{k}_2| \left( \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \right)} - \cos \theta \right) \right) \times \\
& \times \delta \left( k_3^2 + k_2^2 + k_{1_0}(k_{3_0} + k_{2_0}) - 2|\mathbf{k}_2| \left( \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \right) \cos \theta - 2\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{p} \right) \times
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\times \Theta(k_{2_0} + \frac{k_{1_0}}{2}) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - \frac{k_{1_0}}{2}).$$

Integramos em  $\theta$  e obtemos:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv -\Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8|\mathbf{k}_2|k_{1_0}} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \times \\ &\times \Theta(-k_{1_0}) \delta(k_3^2 + k_{1_0}k_{3_0} - 2\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{p}) \\ &\times \Theta(k_{2_0} + \frac{k_{1_0}}{2}) \Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - \frac{k_{1_0}}{2}), \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde foi feita a substituição

$$\cos \theta = \frac{k_2^2 + k_{1_0}k_{2_0}}{2|\mathbf{k}_2| \left( \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \right)}. \quad (3.34)$$

Fazemos outra rotação espacial de forma que  $\mathbf{k}_3$  esteja no plano  $xz$ , resultando que

$$\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{p} = k_{3_3} |\mathbf{p}| \cos \theta + k_{3_1} |\mathbf{p}| \sin \theta \cos \phi. \quad (3.35)$$

substituindo  $|\mathbf{p}|$ ,  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  pelo que obtivemos das outras integrações:

$$\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{p} = \frac{k_2^2 + k_{1_0}k_{2_0}}{2|\mathbf{k}_2|} k_{3_3} + k_{3_1} \sqrt{\left( \frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2 \right) \left( 1 - \left( \frac{k_2^2 + k_{1_0}k_{2_0}}{2|\mathbf{k}_2| \left( \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \right)} \right)^2 \right)} \sin \phi. \quad (3.36)$$

Temos, assim:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8|\mathbf{k}_2|k_{1_0}} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \Theta(-k_{1_0}) \times \\ &\times \delta \left( k_3^2 + k_{1_0}k_{3_0} - \left( \frac{k_2^2 + k_{1_0}k_{2_0}}{2|\mathbf{k}_2|} k_{3_3} + a(k_1, k_2, k_3) \sin \phi \right) \right) \times \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\times \Theta(k_{20} + \frac{k_{10}}{2})\Theta(-k_{30} - k_{20} - \frac{k_{10}}{2}),$$

com

$$a(k_1, k_2, k_3) = k_{31} \sqrt{\left(\frac{k_{10}^2}{4} - m^2\right) \left(1 - \left(\frac{k_2^2 + k_{10}k_{20}}{2|\mathbf{k}_2| \left(\sqrt{\frac{k_{10}^2}{4} - m^2}\right)}\right)^2\right)}.$$

Integramos em  $\phi$ , obtendo:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \Theta(k_{10}^2 - 4m^2) \frac{1}{8k_{10}} [t^{\mu\nu\rho\sigma}] \times \\ &\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{k}_2|^2 (k_{10}^2 - 4m^2) - (k_1 \cdot k_2)^2 - 2(k_1 \cdot k_2)k_2^2 - k_2^4}} \times \\ &\frac{1}{\sqrt{k_{31}^2 - \frac{(-|\mathbf{k}_2|[(k_1 \cdot k_3) + 2(k_2 \cdot k_3) - k_3^2] + k_{33}[(k_1 \cdot k_2) + k_2^2])^2}{|\mathbf{k}_2|^2(k_{10}^2 - 4m^2) - (k_1 \cdot k_2)^2 - 2(k_1 \cdot k_2)}}}} \\ &\times \Theta(-k_{10})\Theta(k_{20} + \frac{k_{10}}{2})\Theta(-k_{30} - k_{20} - \frac{k_{10}}{2}). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para terminar, temos que escrever este resultado em um referencial arbitrário. Fazemos isto através das seguintes substituições em (3.38):

$$\begin{aligned} k_{10}^2 &\rightarrow k_1^2, \\ k_{10}k_{20} &\rightarrow k_1k_2, \\ k_{10}k_{30} &\rightarrow k_1k_3, \\ |\mathbf{k}_2| &\rightarrow \frac{(k_1k_2)^2 - k_1^2k_2^2}{k_1^2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$k_{31} \rightarrow \frac{(k_1k_2)^2 - k_1^2k_2^2}{k_1^2} - \quad (3.40)$$

$$- \left[ (k_1k_3)^2 - 2\frac{(k_1k_2)(k_1k_3)(k_2k_3)}{k_1^2} + \frac{(k_1k_2)^2(k_1k_3)^2}{k_1^4} \right] \left[ \frac{(k_1k_2)^2 - k_1^2k_2^2}{k_1^2} \right]^{-1},$$

$$k_{33} \rightarrow \left[ k_2k_3 - \frac{(k_1k_2)(k_1k_3)}{k_1^2} \right] \left[ \frac{(k_1k_2)^2 - k_1^2k_2^2}{k_1^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Todo o procedimento acima será aplicado a cada um dos termos resultantes de  $t^{\mu\nu\rho\sigma}$ , sendo o resultado final substituído em (3.23).

O cálculo de (3.13...3.16) é bastante semelhante a este com pequenas mudanças nas definições de  $k_1, k_2$  e  $k_3$ .

### 3.2.2 Termos 2P1

Na construção do termo de quarta ordem, iremos tratar também com fatores formados pelo produto de dois elementos  $S_{i[j,k]}$  de primeira ordem e um de segunda ordem. Todos estarão em  $\sum_{j>k=1}^N \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1}$ . Estaremos, portanto, calculando os seguintes traços:

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_j^{(1)})_{++} (S_l^{(2)})_{+-} \right), \quad (3.42)$$

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(2)})_{-+} (S_j^{(1)})_{++} (S_l^{(1)})_{+-} \right), \quad (3.43)$$

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_j^{(2)})_{++} (S_l^{(1)})_{+-} \right), \quad (3.44)$$

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_l^{(1)})_{+-} (S_j^{(2)})_{--}^{-1} \right), \quad (3.45)$$

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(2)})_{-+} (S_l^{(1)})_{+-} (S_j^{(1)})_{--}^{-1} \right), \quad (3.46)$$

$$\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_l^{(2)})_{+-} (S_j^{(1)})_{--}^{-1} \right), \quad (3.47)$$

com  $1 < l < j < i < N$ .

Tomaremos, como exemplo, o cálculo de (3.42), que, a partir de (1.95), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_j^{(1)})_{++} (S_l^{(2)})_{+-} \right) (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \quad (3.48) \\ & = \text{Tr} \left[ -i(2\pi)^{2n+1} e^n P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \int d^4 p_3 \times \right. \\ & \quad \times \mathcal{A}_i(-p-p_1) P_+(\mathbf{p}_1) \gamma^0 \mathcal{A}_j(p_1-p_2) P_+(\mathbf{p}_2) \times \\ & \quad \left. \times \gamma^0 \mathcal{A}_l(p_2-p_3) S^{\text{ret}}(p_3) \mathcal{A}_l(p_3+q) P_-(-\mathbf{q}) \right]. \end{aligned}$$



Então,

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_j^{(1)})_{++} (S_i^{(2)})_{+-} \right) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 p \int d^4 p_1 \int d^4 p_2 \int d^4 p_3 \times \\
&\times \text{tr} \left( (\not{p} - m) A_i(-\not{p} - \not{p}_1) (\not{p}_1 + m) A_j(\not{p}_1 + \not{p}_2) \times \right. \\
&\times (\not{p}_2 + m) A_l(\not{p}_2 - \not{p}_3) (\not{p}_3 - m) A_l(\not{p}_3 + \not{p}) \left. \right) \times \\
&\times \frac{1}{p_3^2 - m^2 + i\epsilon p_{30}} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta(p_1^2 - m^2) \Theta(p_{10}) \delta(p_2^2 - m^2) \Theta(p_{20}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Assim como em (3.21), faremos mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned}
k_1^\mu &= -(p + p_1)^\mu \\
k_2^\mu &= (p_1 + p_2)^\mu \\
k_3^\mu &= (p_2 - p_3)^\mu
\end{aligned} \tag{3.50}$$

obtendo uma expressão semelhante a (3.23):

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( (S_i^{(1)})_{-+} (S_j^{(1)})_{++} (S_i^{(2)})_{+-} \right) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \times \\
&\times A_{\mu i}(k_1) A_{\nu j}(k_2) A_{\rho k}(k_3) A_{\sigma l}(-k_3 - k_2 - k_1) \times \\
&\times \int d^4 p \text{tr} \left( (\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \right. \\
&\times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma \left. \right) \times \\
&\times \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \Theta(-k_{10} - p_0) \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \\
&\Theta(k_{20} + k_{10} + p_0) \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{30} - k_{20} - k_{10} - p_0)}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Definimos, neste caso,

$$T_2^{\mu\nu\rho\sigma} = \int d^4 p \text{tr} \left( (\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \right. \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
& \times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma \times \\
& \times \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \Theta(-k_{1_0} - p_0) \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \\
& \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0)}.
\end{aligned}$$

Podemos definir  $t_2^{\mu\nu\rho\sigma}$ :

$$\begin{aligned}
t_2^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \text{tr}((\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \\
& \times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma). \tag{3.53}
\end{aligned}$$

As integrações de  $\int d^4p \text{tr}(\dots)$  serão feitas de forma semelhante ao exemplo anterior, no que diz respeito às três funções  $\delta$ . A quarta integral, no entanto, não permitirá o mesmo procedimento, em que a aplicação do cálculo a todos os termos resumia-se a substituições. Neste caso, cada termo será uma função específica da variável de integração, exigindo que separemos  $t_2^{\mu\nu\rho\sigma}$  em famílias de funções semelhantes, para tornar o cálculo implementável. Faremos agora, a título de exemplo, o cálculo de uma parcela de (3.52). Escolhendo especificamente a parcela  $f^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv [(k_1 \cdot p) k_1^2 g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}]$  de  $t_2^{\mu\nu\rho\sigma}$ , temos que calcular:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv \int d^4p f^{\mu\nu\rho\sigma} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \Theta(-k_{1_0} - p_0) \times \\
& \times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \times \\
& \times \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0)}, \tag{3.54}
\end{aligned}$$

e procedendo como em (3.26)...(3.33), chegamos a:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\rho\sigma} & \equiv -\Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{8 |\mathbf{k}_2| k_{1_0}} [f^{\mu\nu\rho\sigma}] \times \\
& \times \Theta(-k_{1_0}) \delta(k_3^2 + k_{1_0} k_{3_0} - 2\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{p}) \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$\times \Theta(k_{2_0} + \frac{k_{1_0}}{2})\Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - \frac{k_{1_0}}{2}).$$

Integramos em  $\phi$ , resultando em:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{8k_{1_0}} \left[ \left( -|\mathbf{k}_2| \left[ (k_1 \cdot k_3) + 2(k_2 \cdot k_3) + k_3^2 + i\epsilon \right] + k_{3_3} \left[ (k_1 \cdot k_2) + k_2^2 \right] \right)^2 + \right. \\ & \left. -k_{3_1}^2 |\mathbf{k}_2|^2 (k_{1_0}^2 - 4m^2) - (k_1 \cdot k_2)^2 - 2(k_1 \cdot k_2) \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \Theta(-k_{1_0})\Theta(k_{2_0} + \frac{k_{1_0}}{2})\Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - \frac{k_{1_0}}{2}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

### 3.2.3 Termos 2P2

Finalmente, estaremos também lidando com termos que resultam do produto de  $(S_i^{(2)})_{--}$  e  $(S_j^{(2)})_{+-}$ . Recorrendo a (1.95), temos:

$$\begin{aligned} & \left( (S_i^{(2)})_{-+} (S_i^{(2)})_{+-} \right) (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -i(2\pi)^{12} e^4 P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^4 p_1 \int d^3 p_2 \int d^4 p_3 \times \\ & \times \mathcal{A}_i(-p - p_1) S^{\text{ret}}(p_1) \mathcal{A}_j(p_1 - p_2) P_+(\mathbf{p}_2) \gamma^0 \mathcal{A}_l(p_2 - p_3) S^{\text{ret}}(p_3) \mathcal{A}_l(p_3 + q) P_-(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Tomando o traço:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left( (S_i^{(2)})_{-+} (S_i^{(2)})_{+-} \right) (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -i(2\pi)^{12} e^4 P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^3 p \int d^4 p_1 \int d^3 p_2 \int d^4 p_3 \times \\ & \times \text{tr} \left( P_-(-\mathbf{p}) \gamma^0 \mathcal{A}_i(-p - p_1) S^{\text{ret}}(p_1) \mathcal{A}_j(p_1 - p_2) P_+(\mathbf{p}_2) \times \right. \\ & \left. \times \gamma^0 \mathcal{A}_l(p_2 - p_3) S^{\text{ret}}(p_3) \mathcal{A}_l(p_3 + q) \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Com a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} k_1^\mu &= -(p + p_1)^\mu, \\ k_2^\mu &= (p_1 + p_2)^\mu, \\ k_3^\mu &= (p_2 - p_3)^\mu, \end{aligned} \quad (3.59)$$

pode ser escrito de forma semelhante a (3.23) e (3.51):

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( (S_i^{(2)})_{-+} (S_j^{(2)})_{+-} \right) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \times \\
&\times A_{\mu i}(k_1) A_{\nu j}(k_2) A_{\rho k}(k_3) A_{\sigma l}(-k_3 - k_2 - k_1) \times \\
&\times \int d^4 p \text{tr} \left( (\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \right. \\
&\quad \left. \times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma \right) \times \\
&\times \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \frac{1}{(-k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{1_0} - p_0)} \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \\
&\Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0)}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

A expressão acima nos leva a definir:

$$T_3^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \int d^4 p \text{tr} \left( (\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \right. \tag{3.61}$$

$$\left. \times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma \right) \times$$

$$\times \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \frac{1}{(-k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{1_0} - p_0)} \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \tag{3.62}$$

$$\Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0)},$$

e

$$t_3^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \text{tr} \left( (\not{p} - m) \gamma^\mu (-\not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \right. \tag{3.63}$$

$$\left. \times \gamma^\rho (-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m) \gamma^\sigma \right).$$

Dispomos agora de duas funções  $\delta$  apenas. O processo de integração fica ainda mais complicado, pois temos de classificar os termos oriundos de  $t_3^{\mu\nu\rho\sigma}$ , para duas variáveis (seguindo a ordem de integração do exemplo anterior, estas são as variáveis  $\theta$  e  $\phi$ ). Nesta seção, mostraremos apenas um exemplo, que resulta da parcela  $f^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv [(k_1 \cdot p) k_1^2 g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}]$  de

$t_3^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Calculamos então:

$$\begin{aligned}
F_3^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \int d^4p f^{\mu\nu\rho\sigma} \delta(p^2 - m^2) \Theta(p_0) \times \\
&\times \frac{1}{(-k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{1_0} - p_0)} \delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \times \\
&\Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \frac{1}{(-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2 - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0)}. \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Repetindo os passos de (3.26) a (3.29) e fazendo escolhas apropriadas dos eixos de integração, temos:

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu\rho\sigma} &\equiv \Theta(k_{1_0}^2 - 4m^2) \frac{1}{3} \pi \sqrt{\frac{k_{1_0}^2}{4} - m^2} \times \\
&\frac{1}{b^4 h^4} \left( 3h^2(cb^3 + da^3) [\ln(a+b) - \ln(a-b)] + \right. \\
&\quad + 6(a^3d^3 - b^3c^3) [\ln(a+b) - \ln(a-b)] + \\
&\quad + 6(bc + ad)abh^2 + 4dh^2b^3 - 3abh^2(ac + bd) [\ln(a+b) - \ln(a-b)] + \\
&\quad + 18(bc - ad)abcdh^2 [\ln(a+b) - \ln(a-b)] + \\
&\quad \left. + 36acb^2d^2 - 4b^3d^3 - 36dc^2b^3 - 12ba^2d^2 \right),
\end{aligned}$$

onde, para reduzir as dimensões da expressão, foram definidos:

$$\begin{aligned}
a &= k_2^2 - k_{1_0}k_{2_0} - i\epsilon(-k_{1_0} - p_0), \\
b &= -|\mathbf{k}_2| \sqrt{k_{1_0}^2 - 4m^2}, \\
c &= k_3^2 - k_{1_0}k_{3_0} - i\epsilon(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0), \\
d &= -k_{3_3} \sqrt{k_{1_0}^2 - 4m^2}, \\
h &= -k_{3_1} \sqrt{k_{1_0}^2 - 4m^2}.
\end{aligned}$$

Como nos outros casos, 4F1 e 2F1, devem ser feitas as substituições (3.39)...(3.41) para

retornar ao referencial arbitrário.

### 3.2.4 Calculando $\text{Tr}[T^2(N)]_4$

Analisaremos os termos de quarta ordem, oriundos de  $\text{Tr}[T^2(N)]$ . É fácil perceber que, para este caso, teremos de calcular somente termos do tipo:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}((S_i)_{-+}(S_j)_{+-}(S_k)_{-+}(S_l)_{+-}) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \times \\
&\times A_{\mu i}(k_1) A_{\nu j}(k_2) A_{\rho k}(k_3) A_{\sigma l}(-k_3 - k_2 - k_1) \times \\
&\times \int d^4 p \text{tr}((\not{p} - m)\gamma^\mu(-\not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \\
&\times \gamma^\rho(-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\sigma) \times \\
&\times \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)\delta((-k_1 - p)^2 - m^2)\Theta(-k_{1_0} - p_0)\delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \times \\
&\times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0)\delta((-k_3 - k_2 - k_1 - p)_3^2 - m^2)\Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0) .
\end{aligned} \tag{3.65}$$

com  $1 < j < i < N$  e  $1 < l < k < N$ . O resultado para a integral

$$\begin{aligned}
&\int d^4 p \text{tr}((\not{p} - m)\gamma^\mu(-\not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \\
&\times \gamma^\rho(-\not{k}_3 - \not{k}_2 - \not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\sigma) \times \\
&\times \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)\delta((-k_1 - p)^2 - m^2)\Theta(-k_{1_0} - p_0)\delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2) \times \\
&\times \Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0)\delta((-k_3 - k_2 - k_1 - p)_3^2 - m^2)\Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0),
\end{aligned} \tag{3.66}$$

é o mesmo de (3.23).

### 3.3 Forma Final de $\varphi^{(4)}[A]$

Podemos, agora, reunir todos os resultados anteriores na expressão de  $\varphi^{(4)}[A]$ :

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}[A] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \{ \text{Im} \ln \det \{ [1 + T(N)] \exp[-\text{Tr} T(N)_2] \} \}^{(4)} = \\ &= \text{Tr} T(N)_4 + \text{Tr} \frac{[T^2(N)]_4}{2}.\end{aligned}\quad (3.67)$$

Usando:

$$\begin{aligned}T(N)_4 &= \sum_{j>k=1}^N \left( \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right)_4 + \sum_{j>k>l>m=1}^N \left( \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k,l,m]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right)_4, \\ [T^2(N)]_4 &= \sum_{j>k=1}^N \left( \prod_{i=N}^1 S_{i[j,k]} \prod_{j=1}^N (S_j)_{--}^{-1} \right)_2^2,\end{aligned}$$

e as expressões para os traços obtidos anteriormente, temos:

$$\begin{aligned}\varphi^{(4)}[A] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \text{Im} \left\{ (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \times \right. \\ &\quad \times \left( \left[ \sum_{i>j>k>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu j}(k_2) \tilde{A}_{\rho k}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (T_{1_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_3}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_4}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] + \right. \\ &\quad \left[ \sum_{i>j,k>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu j}(k_2) \tilde{A}_{\rho k}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) T_{1_5}^{\mu\nu\rho\sigma} \right] + \\ &\quad \left[ \frac{1}{2} \sum_{i>j=1}^N \sum_{k>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu j}(k_2) \tilde{A}_{\rho k}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) T_4^{\mu\nu\rho\sigma} \right] + \\ &\quad \left[ \sum_{i>j>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu j}(k_2) \tilde{A}_{\rho l}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) (T_{2_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{2_4}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] + \\ &\quad \left. \left[ \sum_{i>j>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu i}(k_2) \tilde{A}_{\rho k}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) (T_{2_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{2_5}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.68)$$

$$\left[ \sum_{i>j>l=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu j}(k_2) \tilde{A}_{\rho j}(k_3) \tilde{A}_{\sigma l}(k_1, k_2, k_3) (T_{23}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{26}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] + \left[ \sum_{i>j=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k_1) \tilde{A}_{\nu i}(k_2) \tilde{A}_{\rho j}(k_3) \tilde{A}_{\sigma j}(k_1, k_2, k_3) T_3^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \Bigg\},$$

onde  $\tilde{A}_{\mu i}(k)$  é dado por (2.36).

Tomando os limites  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\delta t \rightarrow 0$  temos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \tilde{A}_{\mu i}(k) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}k_0^2} \left[ (\exp[ik_0 t_2] - \exp[ik_0 t_1]) \frac{A^\mu(t_2) - A^\mu(t_1)}{\Delta t} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\exp[ik_0 t_1] - \exp[ik_0(t_1 - \delta t)]}{\delta t} A^\mu(t_1) - \frac{\exp[ik_0 t_2] - \exp[ik_0(t_2 - \delta t)]}{\delta t} A^\mu(t_2) \right] \Bigg\} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}k_0} [d[A^\mu(t)](\exp[ik_0 t]) - d(A^\mu(t) \exp[ik_0 t])] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A^\mu(t) \exp[ik_0 t] dt. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \tilde{A}_{\mu i}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T A^\mu(t) \exp[ik_0 t] dt ,$$

e

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}[A] &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \left\{ \left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_{t_3}^T dt_2 \int_{t_4}^T dt_3 \int_0^T dt_4 \times \right. \right. \\ &\times A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times \\ &\times \left. e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+k_{20}(t_2-t_4)+k_{30}(t_3-t_4)]} (T_{11}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{12}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{13}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{14}^{\mu\nu\rho\sigma}) \right] + \\ &\left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_{t_4}^T dt_2 \int_{t_4}^T dt_3 \int_0^T dt_4 e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+k_{20}(t_2-t_4)+k_{30}(t_3-t_4)]} \times \right. \\ &A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) T_{15}^{\mu\nu\rho\sigma} \Big] + \\ &\left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_0^T dt_2 \int_{t_4}^T dt_3 \int_0^T dt_4 e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+k_{20}(t_2-t_4)+k_{30}(t_3-t_4)]} \times \right. \\ &A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) T_4^{\mu\nu\rho\sigma} \Big] + \\ &\left. \left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_{t_3}^T dt_2 \int_0^T dt_3 e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+k_{20}(t_2-t_4)+k_{30}(t_3-t_4)]} \times \right. \right. \end{aligned} \quad (3.69)$$



$$\begin{aligned}
& A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left( T_{21}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{24}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) + \\
& \quad \left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_{t_3}^T dt_2 \int_0^T dt_3 e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+k_{20}(t_2-t_4)]} \times \right. \\
& A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_1, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_2, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left( T_{22}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{25}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) + \\
& \quad \left[ \int_{t_2}^T dt_1 \int_{t_3}^T dt_2 \int_{t_4}^T dt_3 e^{i[k_{10}(t_1-t_4)+(k_{20}+k_{30})(t_2-t_4)]} \times \right. \\
& A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_2, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \left( T_{23}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{26}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) + \\
& \left. \left. \int_{t_2}^T dt_1 \int_0^T dt_2 e^{i(k_{10}+k_{20})(t_1-t_2)} A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_1, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_2, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) T_3^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

### 3.4 Polarização do Vácuo

Aplicaremos o resultado obtido para  $\varphi^{(4)}[A]$ , no cálculo da polarização do vácuo em quarta ordem. Busquemos uma definição de densidade de corrente [16], adequada ao nosso problema de interação com um campo externo. Observamos que, da definição

$$j^\alpha(x) \equiv i\mathbf{S}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}, \quad (3.70)$$

verificamos as seguintes propriedades:

i)  $j^\alpha(x)$  é um operador hermitiano, uma vez que

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} (\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}) = \mathbf{0}, \quad (3.71)$$

e, então,

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{S}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}. \quad (3.72)$$

Assim:

$$j^\alpha(x) = \frac{i}{2} \left( \mathbf{S}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S} - \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \right). \quad (3.73)$$

ii)  $j^\alpha(x)$  é uma quantidade conservada, em virtude da invariância de calibre:

$$\mathbf{S}[A_\alpha - \epsilon \partial_\alpha \Lambda] = \mathbf{S}[A_\alpha], \quad (3.74)$$

pois, diferenciando com relação a  $\epsilon$  em  $\epsilon = 0$

$$\int d^4x \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}[A] \partial_\alpha \Lambda = 0 = \int d^4x \Lambda(x) \partial_\alpha \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}[A], \quad (3.75)$$

supondo que  $\Lambda(x)$  seja zero no infinito. Assim

$$\partial_\alpha \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}[A] = 0, \quad (3.76)$$

e

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0. \quad (3.77)$$

iii) A ordem mais baixa da expressão para  $j^\alpha$ , em teoria de perturbação, é

$$j^\alpha(x)_1 = e : \bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi :,$$

que coincide com a definição usual de corrente.

Tomando o valor esperado de  $j^\alpha$  no vácuo estaremos, então, calculando a corrente de polarização do vácuo:

$$j_{(\text{Pol})}^\alpha(x) \equiv (\Omega, j^\alpha \Omega) = i \left( \mathbf{S} \Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S} \Omega \right).$$

Com

$$\mathbf{S} = e^{-i\varphi} \mathbf{S}',$$

temos

$$(\Omega, j^\alpha \Omega) = i \left[ i \frac{\delta \varphi}{\delta A_\alpha(x)} + \left( \mathbf{S}' \Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}' \Omega \right) \right].$$

Faremos, a seguir, o cálculo da correção deste termo em quarta ordem. Para determi-

nar  $\delta\varphi^{(4)}/\delta A_\alpha(x)$ , faremos os limites das integrações em  $t$  se estenderem de  $-\infty$  a  $+\infty$ , escrevendo ainda  $\int_{t_n}^\infty dt_{n-1}$  como  $\int_{-\infty}^\infty \Theta(t_{n-1} - t_n) dt_{n-1}$ . Ficamos, então, com:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\varphi^{(4)}}{\delta A_\alpha(x)} &= (2\pi)^{12} e^4 \text{Im} \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \left\{ \left[ \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dt_3 \times \right. \right. \\
&\quad \times \Theta(t_1 - t_2) \Theta(t_2 - t_3) \Theta(t_3 - x_0) A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) \times \\
&\quad \times e^{i[k_{1_0} t_1 + k_{2_0} t_2 + k_{3_0} t_3]} e^{i[k_1 + k_2 + k_3]x} g_\sigma^\alpha \left( T_{1_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_3}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_4}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \left. \right] + \\
&\quad \left[ \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dt_4 \times \right. \\
&\quad \times \Theta(t_1 - t_2) \Theta(t_2 - x_0) \Theta(t_3 - t_4) A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times \\
&\quad \times e^{ik_3 x} e^{i[k_{1_0} t_1 + k_{2_0} t_2]} e^{i[k_{1_0} + k_{2_0} + k_{3_0}]t_4} g_\rho^\alpha \left( T_{1_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_3}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_4}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \left. \right] + \\
&\quad \left[ \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_3 \int_{-\infty}^\infty dt_4 \times \right. \\
&\quad \times \Theta(t_1 - x_0) \Theta(t_2 - t_3) \Theta(t_3 - t_4) A_\mu(t_1, \mathbf{k}_1) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times \\
&\quad \times e^{ik_2 x} e^{i[k_{1_0} t_1 + k_{3_0} t_3]} e^{i[k_{1_0} + k_{2_0} + k_{3_0}]t_4} g_\nu^\alpha \left( T_{1_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_3}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_4}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \left. \right] + \\
&\quad \left[ \int_{-\infty}^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dt_3 \int_{-\infty}^\infty dt_4 \times \right. \\
&\quad \times \Theta(x_0 - t_2) \Theta(t_2 - t_3) \Theta(t_3 - t_4) A_\nu(t_2, \mathbf{k}_2) A_\rho(t_3, \mathbf{k}_3) A_\sigma(t_4, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \times \\
&\quad \times e^{ik_1 x} e^{i[k_{2_0} t_2 + k_{3_0} t_3]} e^{i[k_{1_0} + k_{2_0} + k_{3_0}]t_4} g_\mu^\alpha \left( T_{1_1}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_2}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_3}^{\mu\nu\rho\sigma} + T_{1_4}^{\mu\nu\rho\sigma} \right) \left. \right] + \dots
\end{aligned}$$

A este resultado, temos que somar  $\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}'\Omega \right)_4$ . Para calcular este termo em quarta ordem, teremos que tomar as expansões de  $C_0$ , a partir de (1.83),  $\mathbf{S}'$  e  $\frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}'$ , a partir de (1.68). Assim, podemos definir  $C'$  usando

$$C_0 = 1 + C'(e^2) + \dots, \quad (3.78)$$

como

$$C'(e^2) = \frac{\text{Tr}(S_{-+} S_{+-}^\dagger)}{2}. \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}'\Omega \right)_4 &= C' \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} C' + 2C' \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_2 + \\
&+ \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} C' \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} \right)_2 + \text{Tr} \left( (S_{+-} S_{--}^{-1}) \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} [\dagger S_{+-} S_{--}^{-1}] \right)_4 + \\
&+ \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_4 + \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} \right)_2 \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_2.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Como o lado esquerdo de (3.80) é imaginário puro, as parcelas

$$C' \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} C' \text{ e } \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} C' \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} \right)_2, \tag{3.81}$$

que são reais, devem se anular com as partes reais das demais. Dessa forma temos:

$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}'\Omega \right)_4 &= i\text{Im} \left[ 2C' \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_2 + \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left( (S_{+-} S_{--}^{-1}) \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} [\dagger S_{+-} S_{--}^{-1}] \right)_4 + \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_4 + \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} \right)_2 \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_2 \right],
\end{aligned} \tag{3.82}$$

e usando (3.79):

$$\begin{aligned}
\left( \mathbf{S}'\Omega, \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} \mathbf{S}'\Omega \right)_4 &= i\text{Im} \left[ \text{Tr} \left( (S_{+-} S_{--}^{-1}) \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} [\dagger S_{+-} S_{--}^{-1}] \right)_4 + \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_4 + 2\text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger S_{+-} \right)_2 \text{Tr} \left( S_{-+}^\dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} S_{+-} \right)_2 \right].
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Podemos exemplificar os cálculos considerando o primeiro traço em (3.83):

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left( (S_{+-} S_{--}^{-1}) \dagger \frac{\delta}{\delta A_\alpha(x)} [\dagger S_{+-} S_{--}^{-1}] \right) &= (2\pi)^{12} e^4 \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \int d^4 k_3 \times \\
&\quad \times \left[ e^{i[k_1+k_2+k_3]x} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\rho(k_3) g_\sigma^\alpha T_{p_1}^{\mu\nu\rho\sigma} \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-ik_3x} A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) A_\sigma(-k_1-k_2-k_3) g_\rho^\alpha T_{p_1}^{\mu\nu\rho\sigma} \right],
\end{aligned} \tag{3.84}$$

com

$$\begin{aligned}
T_{p_1}^{\mu\nu\rho\sigma} = & \int d^4p \operatorname{tr} ((\not{p} - m)\gamma^\mu(-\not{k}_1 - \not{p} + m)\gamma^\nu(\not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m) \times \\
& \times \gamma^\rho (\not{k}_3 + \not{k}_2 + \not{k}_1 + \not{p} - m)\gamma^\sigma) \times \\
& \times \delta(p^2 - m^2)\Theta(p_0)\delta((-k_1 - p)^2 - m^2) \times \\
& \times \Theta(-k_{1_0} - p_0)\delta((k_2 + k_1 + p)^2 - m^2)\Theta(k_{2_0} + k_{1_0} + p_0) \times \quad (3.85) \\
& \times \delta((-k_3 - k_2 - k_1 - p)^2 - m^2)\Theta(-k_{3_0} - k_{2_0} - k_{1_0} - p_0).
\end{aligned}$$

Os cálculos a partir daí são idênticos aos realizados anteriormente. Notemos que o resultado acima é uma expressão matematicamente bem definida, *para um potencial genérico* não envolvendo qualquer necessidade de renormalização.

# Conclusão

Demos início, nesta tese, ao processo de montagem de um algoritmo numérico para o cálculo de elementos de matriz  $\mathbf{S}$  genéricos na Eletrodinâmica Quântica. Pensamos na possibilidade de construir este algoritmo devido à formulação de um formalismo *finito* para cálculos perturbativos em Teoria de Campos. Podemos, assim, investigar se existem regularidades suficientes no cálculo que nos permitam utilizar métodos de computação *algébrica* na tarefa. Tais métodos nos conduziriam a expressões gerais, válidas para qualquer conjunto de momenta assintóticos ou para quaisquer potenciais externos dados.

Para iniciar esta investigação, analisamos o caso em que o potencial  $A_\mu$  é externo, situação na qual há uma fórmula que permite o cálculo de uma amplitude qualquer em ordem arbitrária, sem necessidade de renormalização. Nesta fórmula, o elemento crucial a ser calculado é uma fase dependente de  $A_\mu$ , fundamental na definição da matriz  $\mathbf{S}$ . O critério de *causalidade* é suficiente para fixá-la. Contudo, o seu cálculo explícito, em qualquer ordem superior a  $e^2$  é praticamente impossível, sem o auxílio de ferramentas computacionais poderosas, como MAPLE. Para que se tenha uma idéia, a mera visualização do resultado final, em ordem  $e^4$ , envolve a presença de mais de 10.000 termos. Com a ajuda da computação algébrica, contudo, fomos capazes de calcular a fase causal para um potencial  $A_\mu$  genérico.

Considerando a possibilidade de construir um algoritmo que permitisse o cálculo da fase causal em ordem arbitrária, localizamos dificuldades que podem ser perfeitamente superadas:

1. No curso do cálculo de  $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ , é conveniente escolher um referencial onde um dos

momenta “externos” está no referencial de repouso e orientar os eixos de integração para que coincidam com as partes espaciais de outros momenta. Para obter um resultado invariante de Lorentz, é preciso identificar as quantidades obtidas no final do cálculo com escalares convenientes. Tal identificação foi feita de maneira particular na tese, mas não nos parece que seja impossível fazer um programa que faça esta “volta” de modo sistemático.

2. Certas integrais múltiplas calculadas por MAPLE dão resultados de difícil utilização posterior, se não forem adequadamente manipulados por observação direta. A principal dificuldade reside em obter um algoritmo de fatorização “inteligente”, ou seja, que coloque o resultado da integral em uma variável na forma mais adequada para integração na próxima variável.
3. Algumas integrais são expressas, ao final, como limites que devem ainda ser calculados para que se obtenham resultados fechados. Nessas situações, o limite não é tomado por existir alguma obstrução aparente que o programa não consegue superar sozinho. Seria necessário ensinar o programa a reconhecer essas obstruções e superá-las automaticamente.

Fora as dificuldades mencionadas acima, cremos que o problema de calcular a fase causal de maneira automática é plenamente solúvel. Gostaríamos de frisar, mais uma vez, que a característica responsável pela possibilidade de criar um algoritmo completo é a não necessidade de renormalização.

O próximo passo na construção do algoritmo é a finalização do procedimento de cálculo da fase causal e a incorporação dos estados assintóticos ao problema. Com isso, teremos um procedimento para o cálculo de qualquer amplitude de espalhamento desejada, bastando para isso que se diga quais são os estados assintóticos relevantes e qual a forma explícita do potencial vetor  $A_\mu$ . Com isso pronto, teremos dois caminhos a seguir: um deles é a generalização (tanto da formulação teórica quanto da construção do algoritmo de cálculo) para o caso de teorias de calibre não-abelianas. O outro caminho

é a quantização do campo de calibre. Nesta segunda alternativa o principal desafio é o de descobrir sistematicamente o grau de singularidade das distribuições envolvidas, para que possa ser feito o *splitting* causal [16] e construídos explicitamente os termos de ordem arbitrária em  $e$  para a matriz  $\mathbf{S}$ .



# Apêndice

Apresentamos, a seguir, a rotina em MAPLE construída para calcular os traços e integrais necessários ao cálculo da fase causal.

## Rotina 1: Preparação

```
nothas := proc(a,b) if has(a,b) then false else true fi end;
```

## Rotina 2 Cálculo do traço de matrizes $\gamma$

Entrada [a,b,...], onde as letras a,b,... representam os índices das matrizes gama.

```
tg := proc(pg)
local tr_total,pgm,i;
global -g;
-g := '-g';
if type(nops(pg),odd) then RETURN(0) fi;
if nops(pg)=2 then RETURN(4*-g[op(1,pg),op(2,pg)]) fi;
tr_total := 0;
for i from 2 to nops(pg) do
pgm := subsop(1=NULL,i=NULL,pg);
tr_total := tr_total + (-1)^(i-1)*-g[op(1,pg),op(i,pg)]*tg(pgm);
od;
tr_total;
end;
```

## Rotina 3 - Contração das matrizes

```
cg := proc(expressao)
```

```

local ex,ex1,npk,ng,i,j,s,subst,u,v,w,z;
global _g,-p,-k1,-k2,-k3;
_g := '-g';
ex := expand(expressao);
if type(ex,'+') then RETURN(map(cg,ex)) fi;
if type(ex,'*') and has(ex,-g) and has(ex,[_p,-k1,-k2,-k3]) then
npk := select(has,ex,[_p,-k1,-k2,-k3])*w[z];
ng := select(has,ex,-g)*u[v];
subst := NULL;
for i to nops(npk) do
for j to nops(ng) do
if has(op(op(j,ng)),op(op(i,npk))) then
s[i,j] := op(i,npk)=op(0,op(i,npk))[op(op(op(j,ng))
(contin. da linha ant.) minus op(op(i,npk))],op(j,ng)=1;
RETURN(cg(subs(s[i,j],ex)));
fi;
od;
od;
fi;
ex;
end;

```

Rotina 4 - Contração dos  $p^\mu$  e  $k^\nu$  com a métrica  $g^{\mu\nu}$

```

cgg := proc(expressao)
local ex,ex1,npk,ng,i,j,s,subst,interse,u,v;
global _g,-p,-k1,-k2,-k3;
_g := '-g';
ex := cg(expand(expressao));
if type(ex,'+') then RETURN(map(cgg,ex)) fi;

```

```

if type(ex, '*') and has(ex, -g) then
ng := select(has, ex, -g) * u[v];
subst := NULL;
for i to nops(ng) do
if i | nops(ng) then
for j from i+1 to nops(ng) do
if has(op(op(j, ng)), op(op(i, ng))) then
interse := op(op(j, ng)) intersect op(op(i, ng));
s[i, j] := op(i, ng) = -g[op(op(op(j, ng)), op(op(i, ng))
minus interse)], op(j, ng) = 1;
RETURN(cgg(subs(s[i, j], ex)));
fi;
od;
fi;
od;
fi;
ex;
end;
trt := proc(ee)
local i, ex, termogg, termongg;
global gg, -g, -p, -k1, -k2, -k3;
ex := expand(ee);
if type(ex, '+') then RETURN(map(trt, ex)) fi;
if type(ex, '*') and has(ex, gg) then
termogg := select(has, ex, gg);
termongg := select(nothas, ex, gg);
RETURN(termongg * tg(sort(convert(map(op, termogg), list), lexorder)));
fi;

```

```

ex;
end;
prosim := proc(expre)
local i,j,pi,pni,pri,indice,nome;
if type(expre,'+') then RETURN(map(prosim,expre)) fi;
pi := select(has,select(has,expre,[_p,_k1,_k2,_k3]),[a,c,e,g]);
pni := select(nothas,expre,[a,c,e,g]);
if pi=1 then RETURN(pni) fi;
pri := NULL;
if type(pi, '^ ') then
pri := pri,cats(op(0,op(1,pi)),op(0,op(1,pi)));
else
for i to nops(pi) do
if type(op(i,pi), '^ ') then
pri := pri,cats(op(0,op(1,op(i,pi))),op(0,op(1,op(i,pi))));
else
indice[i] := op(1,op(i,pi));
nome[i] := op(0,op(i,pi));
fi;
od;
for i to nops(pi) do
for j from i+1 to nops(pi) do
if indice[i]=indice[j] then pri := pri,cats(op(sort([nome[i],nome[j]]))) fi;
od;
od;
fi;
pni*cats([pri], '*')
end;

```

```

calcT:=proc(Ss)
local i,ns,ee,p,nucleo,Ls,l2,sol,expre;
global _g,_p,_k1,_k2,_k3;
ns:=nops(Ss);
if ns=4 then
nucleo:=1;
Ls:=[op(3,op(1,Ss)),op(3,op(2,Ss)),op(3,op(3,Ss))];
elif ns=3 then
for i to 3 do
if op(2,op(i,Ss))=2 then
l2:=i;
nucleo:=1/(p[i] ^ 2-m ^ 2+I*ep);
break;
fi;
od;
if l2=1 then
Ls:=[1,op(3,op(1,Ss)),op(3,op(2,Ss))];
elif l2=2 then
Ls:=[op(3,op(1,Ss)),1,op(3,op(2,Ss))];
elif l2=3 then
Ls:=[op(3,op(1,Ss)),op(3,op(2,Ss)),1];
else
ERROR('Entrada errada');
fi;
elif ns=2 then
nucleo:=1/((p[1] ^ 2-m ^ 2+I*ep)*(p[3] ^ 2-m ^ 2+I*ep));
Ls:=[1,1,1];
else

```

```

ERROR('Entrada errada');
fi;
ee[1]:=_k1=-_p-(Ls[1]*p[1]);
ee[2]:=_k2=Ls[1]*p[1]-(Ls[2]*p[2]);
ee[3]:=_k3=Ls[2]*p[2]-(Ls[3]*p[3]);
sol:=solve(ee[1],ee[2],ee[3],p[1],p[2],p[3]);
assign(sol);
expre :=(-p[a]*gg[a]-m)*gg[b]*((sign(p[1],-p)*_p[c]+
(cont.)sign(p[1],_k1)*_k1[c])*gg[c]+Ls[1]*m)*gg[d]*((sign(p[2],-p)*_p[e]+
(cont.)sign(p[2],_k1)*_k1[e]+sign(p[2],_k2)*_k2[e])*gg[e]+
(cont.)Ls[2]*m)*gg[f]*((sign(p[3],-p)*_p[g]+
(cont.)sign(p[3],_k1)*_k1[g]+sign(p[3],_k2)*_k2[g]+
(cont.)sign(p[3],_k3)*_k3[g])*gg[g]+Ls[3]*m)*gg[h];
expre := trt(ee):
expre := cgg(expre):
expre := subs([-p[a]^2=m^2,-p[c]^2=m^2,-p[e]^2=m^2,-p[g]^2=m^2],expre):
expre := prosim(expre):
resfinal(expre,ns,nucleo);
end;
resfinal := proc(ex,n,nucl)
local i;
global _g,-p,-k1,-k2,-k3;
if n=4 then
_4S1(ex);
elif n=3 then
_2S1(ex,nucl);
else
_2S2(ex,nucl);

```

```
fi;  
end;
```

# Bibliografia

- [1] W. Heisenberg e W. Pauli, *Zeit. Phys.* **56** (1929), 1; *ibid.*, **59** (1930), 168.
- [2] J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35** (1930), 461.
- [3] I. Waller, *Zeit. Phys.* **59** (1930), 168; *ibid.*, **61** (1930), 721, 837; *ibid.*, **62** (1930), 673.
- [4] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74** (1948), 1439; *ibid.*, **75** (1949), 651; outros artigos reproduzidos em *Quantum Electrodynamics*, ed. J. Schwinger, Dover, Nova Iorque, 1958.
- [5] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.* **1** (1946), 27; Z. Koba, T. Tati e S. Tomonaga, *ibid.*, **2** (1947), 101; S. Kanazawa e S. Tomonaga, *ibid.*, **3** (1948) 1, 101; S. Tomonaga, *Phys. Rev.* **74** (1948), 224; D. Ito, Z. Koba e S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **3** (1948), 276; Z. Koba e S. Tomonaga, *ibid.*, **3** (1948), 290.
- [6] R. P. Feynmann, *Rev. Mod. Phys.*, **20** (1948), 367; *Phys. Rev.* **74** (1948), 939, 1430; *ibid.*, **76** (1949) 749, 769; *ibid.*, **80** (1950), 440.
- [7] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949), 486, 1736.
- [8] H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72** (1947), 339.
- [9] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73** (1948), 416.
- [10] N. N. Bogoliubov e D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, Nova Iorque, 1959.



- [11] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.*, **2** (1966), 301.
- [12] W. Zimmermann, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, Brandeis Summer Institute 1970, eds. S. Deser, M. Grisaru e H. Pendleton, MIT Press, 1970.
- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995.
- [14] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B231** (1984), 269.
- [15] O. Piguet, *Phys. Rep.* **76** (1981), 1.
- [16] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics*, 2ª edição, Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
- [17] H. Epstein e V. Glaser, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **19** (1973) 211.
- [18] M. Dütsch, T. Hurth, F. Krahe e G. Scharf, *Nuovo Cimento* **106A** (1993), 1029; *ibid.*, **107A** (1994), 375; *ibid.*, **108A** (1995), 679, 737.
- [19] Veja o capítulo 0 da referência [16].
- [20] R. Jackiw, *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, in *Current Algebras and Anomalies*, World Scientific, Singapura, 1985.
- [21] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 2ª edição, Oxford Science Pub., Oxford, 1993.
- [22] G. Scharf, *Nuovo Cimento A*, **74** (1983), 302; G. Scharf e W. F. Wreszinski, *ibid.*, **93** (1986), 1.
- [23] G. Nenciu e G. Scharf, *Helv. Phys. Acta*, **51** (1978), 412.
- [24] W. Thirring, *Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*, A Course in Mathematical Physics, vol. 3, Springer-Verlag, Nova Iorque, 1981.

- [25] S. Ruijsenaars, *Journ. Math. Phys.* **18** (1977), 720; *ibid.*, *Comm. Math. Phys.* **52** (1977), 267.
- [26] H. P. Seipp, *Helv. Phys. Acta*, **55** (1982), 1.
- [27] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vols. 1 a 4, Academic Press, 1978.
- [28] H. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley, Reading, 1965.

# **“Cálculo da Fase Causal na Eletrodinâmica Quântica”**

Sérgio Eduardo Silva Duarte

Tese de Doutorado apresentada no centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora od seguintes Professores:

Sebastião Alves Dias – Presidente

Luiz Antonio Campinho Pereira da Mota

Marcelo José Rebouças

Suplente: José Abdalla Helayel Neto

Rio de Janeiro, 30 de Abril de 1998