

Tese de Mestrado

Eficiência de um Micronadador Elíptico em Duas Dimensões

Alexandre Cherman

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas
Rio de Janeiro, 29 de julho de 1998.

A imaginação é mais importante
do que o conhecimento.

Albert Einstein

A vida é o que te acontece enquanto
você está fazendo outros planos.

John Lennon

Para os meus pais, por tudo.
É pelo *bacon*.

Para Angélica, que com um
simples sorriso faz a vida pa-
recer tão fácil de ser vivida.

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, gostaria de agradecer aos meus pais, por terem proporcionado tantas valiosas oportunidades em minha vida.

Agradeço ao meu irmão, que sempre me incentivou em tudo e — sem ter a menor obrigação de fazê-lo — contribuiu substancialmente para a minha educação.

Agradeço também à Angélica, minha esposa, amiga e companheira de todos os momentos. Não seria possível traduzir em palavras o quanto lhe devo.

Quero agradecer ao Jaír Koiller, que soube lidar habilmente com minha personalidade dispersa, encaminhando-me rumo a um trabalho promissor.

Muito obrigado ao Fernando Duda, que sempre se fez disponível às minhas dúvidas.

Um agradecimento geral a todos os professores que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a minha formação.

E um obrigado muito carinhoso a todos do Planetário do Rio, pela compreensão que tiveram comigo e por tantas estimulantes conversas. Em especial ao Jorge, ao Fernando, ao Paulo, ao Domingos, ao Guilherme e à Angela.

E aos futuros astrónomos Sandro, Wailã e Bruno, por tantas e tantas horas de Internet navegadas.

RESUMO

Micronatação é o nome dado ao movimento de microorganismos através de fluidos. Este deslocamento pode ser resultado de variados mecanismos.

O presente trabalho se propõe a estudar o deslocamento causado por ondas transversais, quer na membrana real, quer em um “envelope” formado pelas extremidades externas dos cílios. A dinâmica se dá em um fluido superviscoso, *i.e.* em baixos números de Reynolds. O organismo tratado é bidimensional.

Neste contexto, calcula-se a matriz de curvatura, a matriz de potência despendida, equacionando-se ambas em um problema de autovalores. Os maiores autovalores representam os modos mais eficientes de locomoção.

Pela primeira vez o nadador elíptico foi totalmente resolvido. Os resultados obtidos mostram que os modos de vibração mais altos são mais eficientes e, portanto, os organismos tenderiam a privilegiá-los. Para escapar de eventuais problemas que as fortes oscilações causariam nas membranas, a Natureza pode ter optado por dotar estes nadadores com um “envelope” ciliar, livre para oscilar quão intensamente fosse necessário.

A solução matemática de um problema biológico nos permite tirar uma importante conclusão sobre o desenvolvimento dos microorganismos: os cílios surgiram para que eles pudessem nadar mais eficientemente.

SUMÁRIO

Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Sumário	vi
Índice de figuras	ix
1 Introdução	1
2 Considerações Iniciais	3
2.1 Por que estudar locomoção?	3
2.2 Um mundo superviscoso	5
2.3 Diferentes estilos	7
2.4 Terra plana	9
3 Digressão Matemática	11
3.1 A equação biarmônica	11
3.2 Teoria de calibre	14
3.3 O colchete de Lie	17
3.4 Eficientes eficiências	19
3.5 Um problema de autovalores	21

4	O Nadador Circular	25
4.1	As funções analíticas	25
4.2	Curvaturas, potência e a eficiência	27
5	O Nadador Elíptico	29
5.1	Uma transformação conforme	29
5.2	A matriz de curvatura	30
5.3	A matriz de potência	33
5.4	A eficiência	33
6	Conclusões	35
	<u>Apêndices</u>	
A	Cálculo das Curvaturas	38
A.1	A forma da velocidade	38
A.2	Cálculo do caso 1	39
A.3	Cálculo do caso 2	40
A.4	Cálculo do caso 3	44
A.5	A matriz de curvatura	48
B	Matriz de Curvatura para a Elipse ($\lambda_n = \lambda_m = 1$)	50

C	Cálculo da Potência Despendida	51
	C.1 A fórmula da potência	51
	C.2 Manipulações algébricas	53
	C.3 Sete integrais e uma solução	55
	C.4 Interlúdio circular	57
	C.5 De volta à elipse	59
D	Matriz de Potência para a Elipse ($\lambda_n = \lambda_m = 1$)	64
E	Autovalores Calculados	65
F	Considerações Adicionais	92
	F.1 Geometria diferencial	92
	F.2 Força e torque nulos	95
	F.2.1 Mecânica do contínuo	95
	F.2.2 Mecânica de partículas	96
	F.3 Um problema isoperimétrico	98
	Bibliografia	104

ÍNDICE DE FIGURAS

Espermatozoides	3
Cálculos manuscritos de Purcell	6
Modelo do envelope	9

1 INTRODUÇÃO

...devo dizer que nenhuma visão mais agradável
jamais apareceu diante de meus olhos, do que esta
miríade de criaturas, vistas bem vivas numa
pequena gota d'água, movendo se conjuntamente,
cada uma tendo seu próprio movimento.

Anton van Leeuwenhoek

Eles estão entre nós. Na verdade, nós é que estamos entre eles, visto que são absoluta maioria. E têm alguns bilhões de anos de dianteira na incansável corrida evolutiva. Definitivamente, o mundo pertence aos microorganismos.

Talvez por isso nós, pretensos “Senhores da Criação”, nos vejamos impelidos a estudar esta flora/fauna diminuta e fascinante. Tentar entender como vivem estes seres é, em última análise, vislumbrar os meandros de um intrincado processo natural.

Sim, pois se o gênero *homo* apareceu há apenas um milhão de anos, certas bactérias e correlatos tiveram mais de um bilhão de anos para otimizar seus modos e métodos (por que não dizer, com uma certa dose de antropomorfismo, suas idiossincrasias?).

Assim, vemo-nos motivados a tentar decifrar processos que acontecem em um mundo distante de nós, ainda que desconfortavelmente próximo. Gostaríamos de saber não só

como funcionam seus processos internos, mas também como interação entre si e com o meio.

Os processos internos, que metaforicamente poderiam ser descritos como um “passeio pelo corpo e pela mente” do organismo, não são o alvo deste trabalho.

Aqui, pretende-se discorrer sobre sua mais simples relação com o meio: o deslocamento. A este deslocamento denominamos *micronatação*.

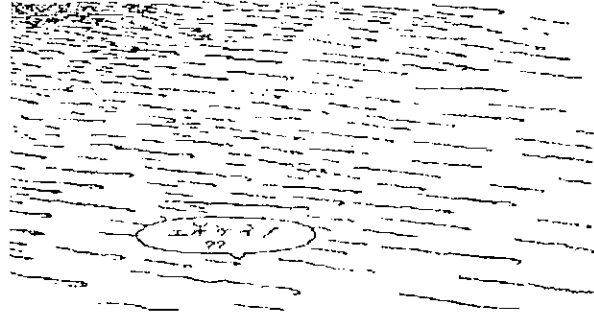
Podemos, então, concentrar nossos esforços em descrever o mundo em que vivem nossos microscópicos objetos de estudo. Pode-se dizer que habitam um meio aquoso, quer seja um habitat externo (o solo umedecido, a neve ou qualquer poça de água) ou um habitat interno, como nosso sistema sangüíneo ou aparelho digestório.

Devido aos seus pequenos tamanhos, a relação que têm com o meio é algo muito diferente do que estamos acostumados. Para eles, o mundo é superviscoso, prevalecendo a ausência da inércia. É neste mundo que lutam pela sobrevivência bactérias, protozoários e tantos outros espécimes singulares de vida microscópica.

É neste mundo estranho que nadam nossos “atletas”, e é deste movimento de natação que trata este trabalho.

2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

“Espermatozóides” (L.F. Verissimo)



— Isto tinha que ser por concurso!

2.1 Por que estudar a locomoção?

Em 1676, Anton van Leeuwenhoek inventou (alguns poderiam dizer aperfeiçoou) o microscópio. Esta conquista tecnológica descortinou para o homem um novo mundo, bizarro e assustador. Surgiram, como que de um dia para o outro, milhares de novas espécies que precisavam ser estudadas e catalogadas. Surgia também, embora ainda em gestação nesta época a que nos referimos aqui, a idéia de mapear este mundo estranho, compreendê-lo através da única linguagem que permite ao homem descrever o que o cerca: a matemática.

Avançou bastante a biologia, visto que esta se apresentava recém-nascida neste ramo

microscópico. E foram quase trezentos anos de descrições e conclusões corretas e fundamentais, mas de alguma forma limitadas. Detalhes anatômicos foram sendo descobertos, testes e mais testes realizados sob os auspícios dos olhos de pioneiros. E, por fim, já em nosso século, os resultados começaram a ser quantificados. A matemática mostrava-se uma importante aliada na descrição da vida muito pequena.

O estudo da locomoção dos microorganismos remete ao ideal newtoniano de um mundo determinístico. Gostaríamos muito de poder prever para onde vão certos seres (principalmente, talvez, aqueles que fazem de nós seu habitat preferencial). Gostaríamos, também, de poder interagir com eles, encaminhando-os em certas direções preferenciais.

Koiller [K1] relata algumas possíveis utilidades para micronadadores “domesticados”, sejam eles seres vivos ou minúsculos robôs:

1. Bombeamento peristáltico. Uma microbomba peristáltica poderia ser usada no resfriamento de *chips* de computador.
2. Exploração de petróleo. Pequenos robôs, capazes de identificar reservas de petróleo, investigariam as regiões em prospecção. (Este método também foi proposto para a exploração de Marte, em busca de outros elementos.)
3. Saúde. Supõe-se que vacinas mais eficientes poderiam ser geneticamente construídas e colocadas em “atletas” de uma determinada espécie.

4. Transporte. Micronadadores “treinados” poderiam levar remédios a regiões do corpo humano atualmente inacessíveis.

Descrevendo a origem deste movimento em palavras, podemos dizer que a contração de músculos, cílios e flagelos vem de um processo mecânico-químico sujeito às leis da termodinâmica. A locomoção resultante pressupõe vínculos entre estes sistemas termodinâmicos internos e os sistemas hidrodinâmicos externos, que indubitavelmente afetam o movimento.

Esta vinculação pode ser entendida em seu caráter mais simples como a relação entre a energia despendida na realização do movimento e a utilidade deste movimento na vida do nadador. É, nada mais, que uma medida da energia dissipada.

A capacidade de locomoção por seus próprios meios, em detrimento ao movimento browniano a que estão sujeitos estes nadadores, é a chave para a sobrevivência de certas espécies. Como aos proverbiais tubarões, permanecer parado pode significar a morte.

A vida microscópica é dura e competitiva.

2.2 Um mundo superviscoso

Esta é a equação de Navier-Stokes, que rege o movimento de um corpo através de um meio viscoso:

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (2.1)$$

Em mecânica dos fluidos, mede-se a viscosidade relativa de um meio através de uma grandeza adimensional conhecida como número de Reynolds, \mathcal{R} , definida por:

$$\mathcal{R} = \frac{av\rho}{\eta},$$

onde a é o comprimento típico do corpo imerso em determinado meio de densidade ρ . v é sua velocidade medida em relação ao meio e η é a viscosidade do fluido (a razão entre a viscosidade e a densidade de um meio é comumente chamada de viscosidade cinemática, ν).

$\frac{\text{inertial forces}}{\text{viscous forces}} \approx \frac{av\rho}{\eta}$

$\mathcal{R} = \frac{av\rho}{\eta} = \frac{av}{\nu}$

$\nu = 10^{-2} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \text{ for water}$

Cálculos manuscritos de Purcell ([P1], pág.4).

Dada a sua formulação, que surge quando se adimensionaliza a equação de Navier-Stokes, vemos que se $\mathcal{R} \ll 1$ os efeitos devido à viscosidade dominam a dinâmica do movimento. Para nossos objetos de estudo, o número de Reynolds é tipicamente da

ordem de 10^{-4} . Ou seja, trataremos de um mundo superviscoso¹.

Qual a principal característica de um mundo que se apresenta assim tão denso? Este ambiente nos permite ignorar os termos inerciais da equação de Navier-Stokes (2.1), restando:

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad .$$

Isto equivale a dizer que a física do problema remete à idéia aristotélica de ausência de inércia. Se um dado nadador parar de nadar — ou, como diriam os caminhoneiros, “for na banguela” — ele pára quase que instantaneamente.

Os microorganismos precisam exercer um esforço constante se quiserem sobreviver.

2.3 Diferentes estilos

São muitas as técnicas desenvolvidas por esta vasta gama de habitantes microscópicos no que se refere à locomoção. Os diferentes “estilos de natação”, por assim dizer, acompanham as variadas formas e composições internas.

Há organismos que possuem um único flagelo, um caso típico e bastante conhecido sendo o espermatozóide. Este, em particular, limita-se a ondulá-lo em um plano. Já alguns protistas transformaram este apêndice único em uma espécie de “saca-rolhas”,

¹Dado o nosso tamanho e velocidade típicos, precisaríamos mergulhar em uma piscina de melado para sentir na pele, literalmente, como as bactérias vivem.

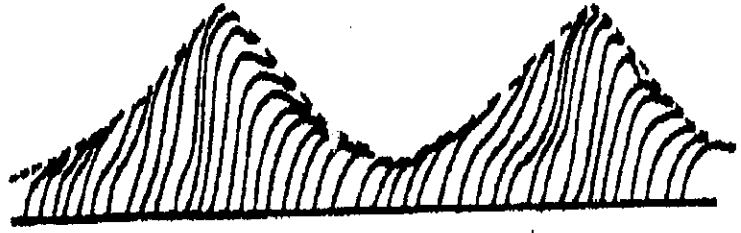
realizando uma ação helicoidal bastante eficiente. Há ainda aqueles organismos cujo flagelo único vai a frente, como que puxando (ou remando²) a estrutura principal.

Pares de flagelos também são encontrados na natureza. Geralmente se projetam a partir da frente do corpo do organismo e, acompanhando sua membrana, curvam-se para trás.

Os flagelos das bactérias são compostos por proteína sólida e, por isso, não permitem a propagação de uma onda ao longo de seu comprimento. Engenhosamente, estas organelas parecem girar ao redor de um eixo em suas bases. Sua curvatura constante, aliada a este movimento de rotação, cria a ilusão de uma onda propagada.

Já os cílios dos protistas têm grande flexibilidade. A natação destes outros organismos pode ser descrita através do modelo do envelope, proposto por Blake [B2]. Nele, imagina-se uma membrana externa à membrana do nadador, composta pelo contorno definido pela extremidade de cada cílio (o "envelope"). Podemos tratar o movimento coordenado de todos os cílios como a propagação de uma onda transversal nesta membrana-envelope. É deste estilo em particular que trata este trabalho.

²Este movimento aposto se explica pela presença de mastigonemas no referido flagelo, verdadeiros "remos" que aumentam o arrasto ao longo do eixo flagelar.



O modelo do envelope ([B2], pág.200).

Supõe-se que alguns organismos desprovidos de apêndices movem-se através de ondas longitudinais propagadas em suas membranas. Este modelo é proposto por Ehlers em [E1], e revisitado por Koiller [K1], como sendo a fonte de propulsão da cianobactéria *Synecococcus*.

Outros seres microscópicos, como os *Spiroquetos*, possuem flagelos internos. E há os nadadores misteriosos, cujo movimento de natação ainda não foi explicado. Koiller [K1] chama a atenção do leitor brasileiro para o (itálicos do autor) “*agregado magnetotático*” *carioca*, encontrado na lagoa Rodrigo de Freitas, Rio de Janeiro. Este organismo foi descrito por Farina *et al* em [F1].

Neste breve passeio pela biodiversidade microscópica, podemos ver que são muitas as opções que a natureza dá aos atletas de proporções diminutas.

2.4 Terra plana

A princípio, limitar um problema real para duas dimensões pode ser apenas um ar-

tifício pedagógico, uma certa “covardia mental” de lidar com as sutilezas e técnicas matemáticas da realidade tridimensional. Em micronatação isto não é necessariamente verdade.

Conforme Cooke ([C1]) descreve, há de fato um mundo bidimensional, com apenas algumas moléculas de largura, no rico habitat que separa o mar do céu. Na superfície das águas vive um sem número de criaturas unicelulares que podem muito bem ser consideradas bidimensionais. Outro exemplo real, já referido acima, é o caso do espermatozóide, cujo movimento flagelar se limita a um plano.

Obviamente este tratamento é muito menos abrangente do ponto de vista biológico. Matematicamente falando porém, ele abre caminhos para certas técnicas de análise complexa bastante engenhosas.

Shapere e Wilczek ([S1], [S2]) resolvem o caso em que o cilindro possui seção-reta circular, chegando a sugerir métodos para formatos quase circulares. Este trabalho se propõe a resolver o caso elíptico, bastante mais abrangente, expandindo as soluções obtidas por Ehlers [E2].

3 DIGRESSÃO MATEMÁTICA

...Sou apenas um dos muitos. No lugar de onde vim (...) existe uma multidão deles. ...De vez em quando, um ri e diz alguma coisa como: “ R_n é igual a h_n dividido por n fatorial vezes f de n , abre parênteses, a mais *teta*, fecha parênteses”. E os outros, que o entendem, fazem que sim com a cabeça e riem junto.

Teplotaxl, em *O diabo dos números*

3.1 A equação biharmônica

Quando o número de Reynolds é muito menor do que 1, vimos já que podemos aproximar a equação de Navier-Stokes (2.1) para a equação de Stokes:

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (3.1)$$

Relembrando, \vec{v} e P são campos a serem determinados no fluido. O primeiro é o campo vetorial de velocidades, enquanto o último é o campo escalar de pressão; η é a viscosidade do meio.

A essa equação junta-se outra, que nos dá a incompressibilidade do fluido em questão:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad .$$

Por fim, consideramos ainda a condição de não-deslizamento, fundamental neste limite em que trabalhamos:

$$\vec{v}|_{\text{membrana}} = \vec{V} \quad ,$$

onde \vec{V} é o campo de velocidades na membrana do organismo, uma condição de fronteira.

Outra condição de fronteira é:

$$\vec{v}|_{\infty} = 0 \quad .$$

Em duas dimensões, a divergência nula de \vec{v} nos diz que ele pode ser escrito como função de um campo escalar Ψ , a *função de corrente*. O “rotacional” deste campo Ψ é escrito como:

$$\vec{v} = \nabla \times \Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad .$$

Podemos escrever a vorticidade, $\vec{\omega}$, em função de Ψ , lembrando que $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$, *i.e.*, o vetor de vorticidade não está contido em nosso plano (x, y) .

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \nabla \times (\nabla \times \Psi) \quad ,$$

$$\vec{\omega} = -\nabla^2 \Psi \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\nabla^2 \Psi \quad .$$

Agora só precisamos tomar o rotacional de (3.1), lembrando que o termo com a pressão desaparece. Ficamos com:

$$0 = \nabla \times (\nabla^2 \vec{v}) = \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla^4 \Psi . \quad (3.2)$$

Esta é a equação bi-harmônica. Ela já foi alvo de extensos estudos na teoria de elasticidade em duas dimensões.

Aqui fica clara a utilidade da análise complexa para resolver a equação bi-harmônica. As funções que satisfazem (3.2) possuem uma representação bastante simples em termos de funções analíticas ([M1], pág. 109-112):

$$\frac{1}{2}\Psi(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1(z)} + \varphi_2(z) + \overline{\varphi_2(z)} ,$$

onde φ_1 e φ_2 são analíticas em $z = x + iy$. Daqui, podemos facilmente obter uma forma para a velocidade:

$$v(z) = \phi(z) - z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} , \quad (3.3)$$

onde $\phi(z) = \varphi_1(z)$ e $\psi(z) = \varphi_2'(z)$.

Vemos, então, que o nosso problema inicial de encontrar o campo vetorial de velocidades se resume a descobrir um par de funções analíticas no plano. Estas soluções dependerão, obviamente, da geometria do formato. De qualquer modo, elas poderão ser representadas por séries de potência, dando origem a velocidades indexadas v_n que chamaremos de modos de vibração.

3.2 Teoria de calibre

Queremos aqui chamar a atenção para algumas nuances de geometria diferencial, em particular aquelas usadas por Shapere e Wilczek [S1] na construção de uma teoria de calibre (*gauge*) para o movimento de um microorganismo.

O espaço de configuração, *i.e.* o espaço que abrange todas as possibilidades a serem tratadas, de um corpo deformável é o espaço que contém todos os possíveis formatos, devidamente localizados e orientados. Matematicamente falando, dado uma membrana \mathcal{R} , teremos seus formatos localizados $q : S^1 \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \partial\mathcal{R}$, formando o espaço \mathcal{Q} . Aqui, também devemos especificar os correspondentes campos de velocidade, \vec{v} .

Mas estamos preocupados, por ora, apenas com as deformações da membrana. Podemos, então, trabalhar em um espaço quociente de \mathcal{Q} , obtido ao declararmos equivalentes dois formatos idênticos em \mathcal{Q} , ainda que ocupando posições diferentes ou estando diferentemente orientados. Mais precisamente, fazemos o quociente de \mathcal{Q} pelo grupo $SE(3)$ das translações e rotações rígidas. Obtemos, assim, um espaço \mathcal{S} contendo o que chamaremos de formatos abstratos, s , e suas deformações infinitesimais \dot{s} .

O movimento do corpo no fluido é um resultado indireto da mudança de formatos intrínsecos. Ou, ainda, uma curva fechada³ em \mathcal{S} pode resultar em uma curva aberta em

³Obviamente uma curva aberta em \mathcal{S} também pode resultar em um deslocamento líquido. Mas neste caso o organismo não voltou ao formato inicial, descaracterizando nossa hipótese da existência de um

Q. O microorganismo nadou!

Discernir entre os caminhos fechados em \mathcal{S} úteis ao movimento é o segredo desta abordagem ao problema. Os matemáticos chamam esta natação de holonomia.

Geralmente a solução para este tipo de problema, em mecânica dos fluidos, é obtida em duas etapas. Define-se primeiramente o formato básico e propõe-se uma condição qualquer na fronteira, $\vec{V}_{\text{proposto}}$, correspondente à deformação intrínseca. Aqui não conseguimos fugir de uma ambigüidade: \vec{V} somado a um movimento rígido infinitesimal X é tão bom quanto \vec{V} , pois a deformação do formato básico é a mesma.

Na segunda etapa, obtém-se o \vec{V} correto, extraíndo-o do conjunto $\{\vec{V}_{\text{proposto}} + X\}$. Isso acontece ao impormos a condição física de que \vec{V} não provoca força ou torque totais líquidos sobre o fluido.

Vamos definir a transformação linear \mathcal{L} que associa o campo vetorial $\vec{V}_{\text{proposto}}$ à força e ao torque totais agindo sobre o organismo, $(\vec{F}, \vec{T})^4$. \mathcal{L} é geralmente chamado de operador de dissipação. Restrito a movimentos infinitesimais, é chamado de operador de resistência \mathcal{G} , sendo representado por uma matriz 6×6 simétrica, positiva definida.

formato básico.

⁴Tanto a força quanto o torque podem ser obtidos através de uma integração apropriada do tensor de *stress*, σ . Estas integrais podem ser encontradas em [K1] ou em qualquer texto introdutório de mecânica de fluidos.

O operador

$$A = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{L}$$

é chamado de 1-forma da conexão de Stokes. Sua imagem é a álgebra de Lie $SE(3)$. Para uma dada deformação intrínseca \dot{s} e um formato localizado q , há um único campo vetorial \vec{v} (ao longo da fronteira localizada) consistente com \dot{s} satisfazendo $A \cdot \vec{v} = 0$. Este campo vetorial dá o movimento infinitesimal correto do corpo no fluido, correspondente à deformação \dot{s} .

A passagem da solução proposta para a solução correta pode ser escrita, com um certo abuso de notação, como

$$\vec{v} = (I - A)\vec{V} \ .$$

Shapere e Wilczek ([S1], pág. 561) demonstram que, por construção, o operador A se transforma, sob uma transformação de calibre, como um potencial de calibre. Ainda segundo os citados autores, o surgimento de uma estrutura de calibre no contexto da mecânica de fluidos superviscosos é natural, visto que tais estruturas geralmente estão associadas a redundâncias na descrição de sistemas físicos (neste caso específico a redundância sendo a liberdade de escolha em localização e orientação de cada formato abstrato possível).

O problema dinâmico se reduz ao cálculo de um potencial de calibre.

3.3 O colchete de Lie

Ao final da seção 3.1, afirmei que nosso problema inicial era encontrar um campo vetorial de velocidades no fluido. Este campo é apenas isto: um início.

Este campo de velocidades, restrito à fronteira de nosso organismo, nos diz como esta se deforma. Para que estas deformações infinitesimais resultem em um deslocamento, é preciso que se alternem em diferentes modos de vibração. Sim, pois neste ambiente superviscoso, qualquer tentativa de movimento que implique em “braçadas” recíprocas (ou ainda, o acoplamento de um mesmo modo vibracional), resultará em um vai-veim do organismo como um todo⁵.

É evidente que não são quaisquer acoplamentos que provocarão um movimento. Sabemos, apenas, que o auto-acoplamento não é uma solução para um nadador muito pequeno. Para encontrarmos quais são os modos de vibração que provocam um deslocamento líquido precisamos ter uma medida de sua interação. Para isso, usaremos o *colchete de Lie*.

O colchete de Lie define um novo campo vetorial a partir de um par qualquer de campos vetoriais em uma variedade. Esta operação faz do espaço vetorial dos campos vetoriais infinitamente diferenciáveis de uma variedade uma álgebra de Lie.

⁵Bater pernas e oscilar uma barbatana são muito eficientes em altos números de Reynolds. Aqui, uma barbatana indo para a direita provocaria um movimento que seria revertido quando ela voltasse para a esquerda.

Álgebra de Lie nada mais é do que um espaço vetorial L possuindo uma operação bilinear antissimétrica (geralmente chamada de comutador) $L \times L \rightarrow L$ que satisfaça a identidade de Jacobi:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 .$$

Argumentos relevantes, bastante diretos e compreensíveis, a respeito dos colchetes de Lie podem ser encontrados em Arnold ([A1],pág.208-213).

Em particular, vemos que o colchete de Lie pode ser uma medida do “não-fechamento” de um par de fluxos em uma dada variedade. Em seu exemplo (pág. 212), Arnold propõe ao leitor que se faça um determinado percurso sobre uma variedade. Digamos, “duas unidades para a direita e uma para cima”. A ordem inversa deste percurso, partindo do mesmo ponto inicial, deveria terminar no mesmo ponto final. Isto aconteceria se os campos comutassem. O colchete de Lie (a diferença entre um caminho e outro) mede o “não-fechamento” deste percurso.

Assim, usaremos o colchete de Lie para calcular a não-comutatividade dos diferentes modos vibracionais realizados na membrana do microorganismo⁶. Obviamente não poderemos calcular todos os casos possíveis, visto que são infinitos.

⁶Qualquer um que já tenha estacionado um carro sabe da importância da não-comutatividade de certos campos vetoriais.

Veremos, ainda, que o cálculo dos colchetes

$$[v_n, v_m] ,$$

para cada par (n, m) , nos dará um resultado na forma de uma série. Desta série isolaremos o termo com coeficiente constante, visto que é este termo que nos dá a translação do nadador. Não nos preocuparemos com o termo de rotação, uma vez que estamos tomando um formato com eixo de simetria e deformações simétricas a este eixo.

Os resultados serão coletados em uma matriz, chamada *matriz de curvatura*, \mathcal{F} .

3.4 Eficientes eficiências

Visando aproximar nosso modelo, admitidamente irreal, de uma realidade biológica, convém falarmos sobre a utilidade de certos acoplamentos entre as velocidades na membrana (as “braçadas” do nadador). Sim, pois até agora abordamos apenas seus possíveis deslocamentos, sem nos preocuparmos com a questão fundamental: qual a energia despendida pelo organismo ao realizar este ou aquele movimento? Qual sua *eficiência*?

Qualquer noção de eficiência para um caminho fechado, com período t , no espaço dos formatos abstratos \mathcal{S} pode ser associada à razão

$$\frac{X}{E} = \frac{X/t}{E/t} = \frac{\text{velocidade média}}{\text{potência média}} .$$

A partir desta primeira noção, podemos obter uma quantidade adimensional multiplicando

a razão acima por um “empuxo característico” \bar{T} . A forma resultante

$$\text{ef}_F = \frac{X\bar{T}}{E}$$

é identificada por Koiller e Delgado ([K4], pág. 3) como a eficiência de Froude.

Lighthill ([L1], pág. 115) define sua eficiência, por construção, independente ao tempo:

$$\text{ef}_L = \frac{(\text{velocidade média})^2}{\text{potência média}} .$$

Shapere e Wilzcek ([S2], pág. 589) dizem melhorar esta eficiência ao tomar:

$$\text{ef}_{sw} = \frac{\bar{U}/\bar{\mathcal{P}}}{(\bar{U}/\bar{\mathcal{P}})_{\max}} ,$$

onde \bar{U} é a velocidade média e $\bar{\mathcal{P}}$, a potência média. Esta definição está envolta em uma certa dose de controvérsia, visto que não deixa clara a suposta “melhoria” anunciada pelos autores (há, aparentemente, apenas uma renormalização em relação à eficiência que Koiller e Delgado — [K4], pág.3 — chamam de “a mais ingênua”, *most naive*).

Podemos, ainda, definir o que Koiller e Delgado ([K4], pág. 3) chamam de eficiência “ingênua” (*naive*). Esta eficiência será

$$\text{ef}_i = \frac{X}{\tau E} , \tag{3.4}$$

onde a divisão pelo período τ permite excluir as vibrações de longo período. Esta última apresenta um critério de “justiça”, uma vez que nos obriga a comparar apenas os modos de vibração com o mesmo período (de outro modo, poderíamos considerar o mesmo conjunto

de deformações, *i.e.* o mesmo deslocamento líquido, com diferentes períodos. Quanto mais lentas fossem as “braçadas”, menos energia despenderia o organismo e, portanto, mais eficiente ele seria.)

Esta definição de eficiência (3.4) aparece naturalmente uma vez equacionados o movimento e a energia despendida.

3.5 Um problema de autovalores

A potência P pode ser escrita como o produto escalar da força F com a velocidade v . Em notação complexa, equivale a dizer:

$$P = \text{Re}(F\bar{v}) \quad .$$

Como trataremos de uma série de diferentes velocidades v_n , vamos definir uma matriz \mathcal{K} , a matriz de potência, que encerrará nossos resultados.

Podemos escrever a densidade lagrangeana de nosso problema como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathcal{K}\dot{q}, \dot{q}) - \nu \frac{1}{2}(\mathcal{F}q, \dot{q}) \quad .$$

onde ν é o multiplicador de Lagrange, os parênteses representam o produto interno e q é um formato localizado.

As equações de Euler-Lagrange podem ser reduzidas a um sistema de primeira ordem:

$$\mathcal{K}\dot{q} = \nu\mathcal{F}q \quad .$$

Uma solução tentativa para o sistema acima é:

$$q = cV e^{i\Omega t} , \quad (3.5)$$

onde V é o autovetor. Isso nos dá:

$$\frac{i\Omega}{\nu} \mathcal{K}V = \mathcal{F}V ,$$

$$\mathcal{F}V = \lambda \mathcal{K}V ,$$

onde podemos perceber que, se \mathcal{K} fosse a matriz identidade, teríamos o problema de autovalores usual.

Poderíamos já multiplicar ambos os lados da equação acima pela matriz inversa de \mathcal{K} , obtendo o problema típico:

$$\mathcal{A}V = \lambda V , \quad \mathcal{A} = \mathcal{K}^{-1}\mathcal{F} .$$

Koiller e Delgado ([K4], pág. 6) chamam a atenção para o fato de que esta matriz \mathcal{A} não é antissimétrica (por construção, $\mathcal{A}^T = \mathcal{F}^T \mathcal{K}^{-1}$). Assim, sugerem eles, vamos definir:

$$W = \mathcal{K}^{\frac{1}{2}}V ,$$

$$B = \mathcal{K}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}\mathcal{K}^{-\frac{1}{2}} ,$$

de modo a ficarmos com:

$$BW = \lambda W . \quad (3.6)$$

(Repare que \mathcal{B} , por construção, é antissimétrica.)

Voltemos um pouco, em uma tentativa de calcular algum tipo de eficiência. Temos:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\tau (\mathcal{K}\dot{q}, \dot{q}) dt ,$$

a energia e :

$$X = \frac{1}{2} \int_0^\tau (\mathcal{F}q, \dot{q}) dt .$$

o deslocamento.

Lembrando que a forma proposta para a nossa solução é dada por (3.5), temos $\tau = 2\pi/\Omega$. Assim, podemos escrever nossa eficiência como:

$$\text{ef} = \frac{X\Omega}{E} ,$$

a menos de um fator 2π .

Manipulando devidamente as formas de E e X , chegamos em:

$$E = \frac{1}{2} \Omega^2 c^2 (\mathcal{K}V, V) \tau$$

e

$$X = -\frac{i}{2} \Omega c^2 (\mathcal{F}V, V) \tau .$$

Aqui, é importante notar que $\mathcal{F}V = \lambda \mathcal{K}V$, de nosso problema matricial original.

Então,

$$\text{ef} = \frac{X\Omega}{E} = -i\lambda .$$

lembrando que $\lambda = i\Omega/\nu$ é um autovalor do problema. Vemos desde já que todos os autovalores serão imaginários puros.

O problema da eficiência se resume a um problema de autovalores, o maior deles representando o modo de vibração mais eficiente.

4 O NADADOR CIRCULAR

4.1 As funções analíticas

Vimos já, na equação (3.3), que o campo de velocidades pode ser descrito, em todo o fluido, por duas funções analíticas, $\phi(z)$ e $\psi(z)$. Mais precisamente, na interface s entre o organismo e o meio, teremos:

$$v(s) = \phi(s) - s\overline{\phi'(s)} + \overline{\psi'(s)} . \quad (4.1)$$

Este problema apresenta uma solução bastante simples se o formato s for um círculo. Basta obter os coeficientes de Fourier em ambos os lados da equação e relacioná-los, como nos mostra Muskhelishvili ([M1], pág.198-201).

Como Shapiro e Wilczek ([S1], pág. 565, 566), vamos reproduzir aqui o raciocínio por trás de tais cálculos, para estabelecer nossa notação.

Vamos considerar as seguintes séries de Fourier (onde só tomaremos k negativos, pois queremos que esta solução para a fronteira seja extensível para todo o fluido, *i.e.* se anule no infinito):

$$\begin{aligned} v(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1} , \\ \phi(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^{k+1} , \\ \psi(s) &= \sum_{k=-1}^{\infty} b_k s^{k+1} . \end{aligned}$$

onde $s = e^{i\theta}$.

Podemos, então, reescrever (4.1) como:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k s^{k+1} = \sum_{k < 0} a_k s^{k+1} - \sum_{k < 0} (k+1) \bar{a}_k s^{-k+1} + \sum_{k < -1} \bar{b}_k s^{-k-1} .$$

Comparando os termos de coeficientes iguais, não é difícil chegar à conclusão que:

$$a_k = v_k \quad (k < 0) ,$$

$$b_{-2} = \bar{v}_0 ,$$

$$b_k = \bar{v}_{-k-2} + (k+3)v_{k+2} \quad (k < -2) .$$

Reconstruindo as funções $\phi(s)$ e $\psi(s)$, ficamos com:

$$\phi(s) = 0 \quad \psi(s) = \lambda s^{-n-1} \quad (n > -1) ,$$

$$\phi(s) = \lambda \quad \psi(s) = 0 \quad (n = -1) ,$$

$$\phi(s) = \lambda s^{n+1} \quad \psi(s) = \lambda(n+1)s^{n-1} \quad (n < -1) .$$

Ficamos, então, com:

$$v_n(z, \bar{z}) \begin{cases} \lambda_n z^{-n-1} & n > -1 \\ \lambda_{-1} & n = -1 \\ \lambda_n z^{n+1} - \lambda_n(n+1)z^{n-1}(z\bar{z} - 1) & n < -1 \end{cases}$$

Que é a fórmula da velocidade que usaremos para calcular tanto o colchete de Lie (e, portanto, \mathcal{F}) quanto a potência (\mathcal{K}).

4.2 Curvaturas, potência e a eficiência

Para o cálculo das curvaturas, precisamos ter em mente a fórmula do colchete de Lie, dada por:

$$[v_n, v_m] = \frac{\partial v_n}{\partial z} v_m + \frac{\partial v_n}{\partial \bar{z}} \bar{v}_m - \frac{\partial v_m}{\partial z} v_n - \frac{\partial v_m}{\partial \bar{z}} \bar{v}_n = \mathcal{F}_{nm} \quad (4.2)$$

Shapere e Wilzcek ([S1], pág. 577) subdividem a matriz \mathcal{F} em quatro:

$$[\epsilon v_n, \eta v_m] = \epsilon \eta \mathcal{F}_{nm} + \bar{\epsilon} \eta \mathcal{F}_{imn} + \epsilon \bar{\eta} \mathcal{F}_{m\bar{i}n} + \bar{\epsilon} \bar{\eta} \mathcal{F}_{i\bar{m}n} \quad ,$$

para abranger os casos onde o deslocamento da membrana é transversal ($\epsilon, \eta = 1$) ou longitudinal ($\epsilon, \eta = i$).

No presente trabalho vamos nos preocupar apenas com o caso $\eta = \epsilon = 1$, *i.e.* ondas transversais percorrendo a membrana do organismo bidimensional no sentido de seu eixo de simetria (em acordo com o modelo do envelope proposto por Blake [B2]).

Temos, então, que calcular os \mathcal{F}_{nm} . O cálculo é algo trabalhoso, mas não apresenta dificuldades⁷:

$$\mathcal{F}_{nm} = \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) \delta_{(n-m), (2k+1)} - \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1) \delta_{(m-n), (2k+1)} \quad .$$

⁷O formato elíptico será mais detalhado no próximo capítulo e no apêndice A.

O cálculo da potência despendida por um nadador circular é bastante simples e pode ser encontrado, em detalhes, no apêndice C (mais precisamente, na seção C.4). Basta lembrarmos que, partindo de $P = \text{Re}(F\bar{v}) = \mathcal{K}$, teremos:

$$\frac{1}{4\pi\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds = \mathcal{K} = -|\lambda_k|^2(k+1)\theta_{-k} + |\lambda_k|^2(k+1)\theta_k \quad ,$$

onde \mathcal{P} é a densidade de potência.

Quanto à eficiência, basta equacionarmos ambas as matrizes no problema de autovalores descrito na seção 3.5. De fato, isso foi feito com a ajuda do programa *MathLab*, os autovalores obtidos estando listados no apêndice E.

5 O NADADOR ELÍPTICO

elíptico: *adj. m.* 3. obscuro, ambíguo, reticente.

Dicionário Webster

5.1 Uma transformação conforme

Usaremos aqui técnicas padrão de variáveis complexas para computar a conexão de Stokes, *i.e.* a curvatura, de nosso nadador bidimensional. O domínio do fluido será representado pelo plano complexo. A membrana do organismo será Σ , um mapeamento conforme do círculo unitário γ dado por:

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{M}{\xi} \right) .$$

Assim, apesar de a fronteira do organismo com o fluido ser elíptica e estar no plano complexo z , faremos nossos cálculos para a curvatura no plano ξ onde o formato é, agora, um círculo unitário. Usaremos a mesma base utilizada por Shapere e Wilzcek [S1].

Nossa condição de fronteira (4.1) altera-se um pouco:

$$V(\sigma) = \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \quad (5.1)$$

Muskhelishvili ([M1], pág. 350-353) obtém as formas de ϕ e ψ . Ehlers ([E2], pág. 11) as apresenta dentro do contexto desejado:

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 0 & n > -1 \\ 0 & n = -1 \\ \lambda_n \xi^{n+1} & n < -1, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\psi(\xi) = \begin{cases} \bar{\lambda}_n \xi^{-n-1} & n > -1 \\ \bar{\lambda}_{-1} & n = -1 \\ \xi \frac{(1+M\xi^2)}{(\xi^2-M)} (n+1) \lambda_n \xi^n & n < -1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Substituindo estas fórmulas para o $v_n(\xi)$ ficamos com:

$$\begin{aligned} \lambda_n v_n(\xi, \bar{\xi}) &= \phi(\xi) - \frac{\bar{\xi}^2 (\xi^2 + M)}{\xi (\bar{\xi}^2 - M)} \phi'(\xi) + \overline{\psi(\xi)} \\ &= \begin{cases} \lambda_n \bar{\xi}^{-n-1} & n > -1 \\ \lambda_{-1} & n = -1 \\ \lambda_n \xi^{n+1} - (n+1) \frac{\bar{\xi}^2 (\xi^2 + M)}{\xi (\bar{\xi}^2 - M)} \bar{\lambda}_n \bar{\xi}^n + \bar{\xi} \frac{(1+M\bar{\xi}^2)}{(\bar{\xi}^2 - M)} (n+1) \bar{\lambda}_n \bar{\xi}^n & n < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

De posse da forma dos v_n podemos calcular a matriz de curvatura, \mathcal{F} , e a matriz de potência despendida, \mathcal{K} .

5.2 A matriz de curvatura

Ehlers ([E2], pág. 12) procede o cálculo da matriz de curvatura no caso mais simples onde n e m são maiores do que -1 . Neste trabalho estendemos o resultado para o caso

misto ($n > -1, m < -1$ e vice-versa) e para o caso em que n e m são menores do que -1 , bastante mais trabalhoso. Estes procedimentos são apresentados em detalhes no apêndice A. Aqui, vamos apenas expor os resultados obtidos.

Reproduzindo o já citado trabalho de Ehlers, temos ($n, m < -1$):

$$[v_n, v_m] = \sum_k \left[\frac{\tilde{\lambda}_n \lambda_m M^k}{R} (m+1) \sigma^{-n+m+1+2k} - \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m M^k}{R} (n+1) \sigma^{n-m-1+2k} \right] ,$$

Dada a simetria de nosso problema, queremos apenas o termo de coeficiente constante das séries acima descritas (é este o termo que nos dá o movimento de translação).

$$\mathcal{F}_{nm} = \frac{\tilde{\lambda}_n \lambda_m}{R} M^{-\frac{m-n+1}{2}} (m+1) \delta_{(n-m), (2k+1)} - \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{-\frac{n-m+1}{2}} (n+1) \delta_{(m-n), (2k+1)} ,$$

$$n, m > -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Prosseguindo, agora, para o caso misto, temos:

$$\begin{aligned} [v_n, v_m] &= \sum_k \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} (m-n) M^k \sigma^{n-m+1+2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) M^k \sigma^{n+m+1-2k} + \\ &+ \sum_k \frac{\tilde{\lambda}_n \tilde{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} - \sum_k \frac{\tilde{\lambda}_n \lambda_m}{R} (m+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} \end{aligned}$$

que nos dá:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nm} &= \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{-\frac{n-m+1}{2}} (m-n) \delta_{(m-n), (2k+1)} + \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{\frac{n+m+1}{2}} (m+1) \left(\frac{n+m+1}{2} \right) \delta_{(n-m), (2k+1)} + \\ &- \left[\frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{\frac{n+m+1}{2}} + \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n+m+3}{2}} \left(\frac{n+m+3}{2} \right) \right] (m+1) \delta_{(n-m), (2k-1)} . \end{aligned}$$

$$n > -1 \quad , \quad m < -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

E

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nm} &= \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{-\frac{m-n+1}{2}} (n-m) \delta_{(n-m), (2k+1)} + \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n+m-1}{2}} (n+1) \left(\frac{n+m+1}{2} \right) \delta_{(n+m), (2k+1)} + \\ &- \left[\frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{\frac{n+m+1}{2}} + \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n-m-3}{2}} \left(\frac{n+m+3}{2} \right) \right] (n+1) \delta_{(n+m), (2k-1)} \quad , \end{aligned}$$

$$n < -1 \quad , \quad m > -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Por fim, vamos calcular o caso mais trabalhoso, $n, m < -1$:

$$\begin{aligned} [v_n, v_m] &= \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n-m) M^k o^{n-m+1-2k} + \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n-m) \times \\ &(k+1) M^{k+1} o^{-n-m-1+2k} + \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (m-n) (k+1) M^k o^{-n-m+1+2k} + \\ &+ \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1) M^k o^{n-m+1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \lambda_m}{R} (n+1) M^k o^{-n+m+1+2k} \end{aligned}$$

Que nos dará:

$$\mathcal{F}_{nm} = \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{\frac{m-n-1}{2}} (m+1) \delta_{(m-n), (2k+1)} - \frac{\bar{\lambda}_n \lambda_m}{R} M^{-\frac{n-m-1}{2}} (n+1) \delta_{(n-m), (2k+1)} \quad ,$$

$$n, m < -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Uma matriz de curvatura com $|u|, |v| < 5$ é apresentada no apêndice B.

5.3 A matriz de potência

Vamos desde já chamar a atenção para um fato notável (e aparentemente não percebido por tantos outros autores que pesquisam esta área em particular). A matriz de potência despendida de um nadador elíptico é a mesma de um nadador circular! Os cálculos que nos levam a esta afirmação estão apresentados em detalhe no apêndice C. Por ora, apenas vamos reproduzir os resultados obtidos.

Como a do círculo, nossa matriz de potência despendida é diagonal e seus componentes (a menos de fatores de normalização) são dados por

$$\mathcal{K}_{nm}|_{n=m=k} = -|\lambda_k|^2(k+1)\theta_{-k} + |\lambda_k|^2(k+1)\theta_k ,$$

onde θ_α é a função degrau, valendo 0 para α negativo e 1 para os outros casos. Esta matriz, com $|n|, |m| < 5$, está representada no apêndice D.

5.4 A eficiência

Uma vez de posse de ambas as matrizes, podemos proceder para o nosso problema de autovalores, conforme descrito na seção 3.5.

Este problema foi resolvido com o programa *MathLab*, onde calculamos várias possibilidades, tanto de formatos quanto de modos excitados. Mais precisamente, foram cinco os formatos utilizados como base para as deformações da membrana: $M = 0$ (o círculo),

$M = 0.1$ e $M = 0.2$ (elipses pouco excêntricas) e $M = 0.8$ e $M = 0.9$ (elipses muito excêntricas). Quanto ao número de modos excitados, resolvemos o problema primeiramente com os cinco primeiros, depois com os dez primeiros, depois com os trinta primeiros e, por fim, utilizamos dez modos entre 30 e 39.

As tabelas de todos os autovalores dos casos calculados são dadas no apêndice E.

As conclusões podem ser vistas no próximo capítulo.

6 CONCLUSÕES

O primeiro passo para o conhecimento é saber que somos ignorantes.

Lord David Cecil

Como já foi dito nos capítulos precedentes, o problema de autovalores — que acusará os modos de vibração mais eficientes — foi resolvido com a ajuda do programa *MathLab*.

Uma vez obtidas as fórmulas das matrizes de curvatura e potência despendida, fez-se um programa que constrói ambas e calcula os referidos autovalores da matriz composta $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{F}$.

São estes autovalores, penosamente listados no apêndice E, que nos dão a já falada medida de eficiência.

Iterou-se a rotina para vários casos distintos, alterando-se tanto a deformação do formato (representada pelo valor de M) quanto a quantidade de modos utilizados. Esperávamos, com isso, obter algum padrão que nos levasse a alguma conclusão.

De fato, podemos afirmar que os modos mais altos são mais eficientes. Uma breve inspeção dos números obtidos⁸ nos mostra que o valor absoluto dos autovalores aumenta

⁸Examine-os por sua própria conta e risco...

à medida que mais e mais modos são considerados. E não diminui significativamente ao excluirmos os primeiros modos de vibração.

Realmente, examinamos este comportamento com modos altíssimos (que não são reproduzidos neste trabalho escrito), entre 30000 e 30009, e pudemos constatar que a eficiência aumenta. Este aumento, no entanto, é cada vez menor, acenando para um limite superior como o proposto por Shapere e Wilczek ([S2], pág.591).

Esta preferência natural por altos modos de vibração poderia explicar porque a natureza optou por dotar certos organismos de cílios. As tensões seriam muito grandes na membrana física do organismo se ela de fato precisasse se contorcer tão violentamente. Assim, a “membrana-envelope” (os cílios, conforme proposto por Blake [B2]) teria surgido, livre para oscilar com a violência que fosse necessária.

Outro fato, aparentemente inédito, que este trabalho traz é quanto a potência despendida por um nadador não-circular. Vimos já que um organismo elíptico gasta a mesma energia do que um organismo em forma de círculo. Koiller ([K1], pág.148) aumenta a abrangência deste “milagre” (palavra do autor) para as curvas que obedecem a transformação conforme:

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{M}{\xi^m} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

onde $m = 1$ é, obviamente, o caso tratado neste trabalho.

Para o futuro, planejamos duas linhas distintas de continuidade a este trabalho:

1. Cálculo das curvaturas para um formato qualquer. Este problema já estava em andamento, com o auxílio logístico do Laboratório Nacional de Computação Científica. Consiste em um cálculo numérico, feito em FORTRAN, dos colchetes de Lie para um formato bidimensional arbitrário. Por razões externas este programa foi posto em um hiato.

2. Oscilações assimétricas. Ao examinarmos as clipses muito alongadas, percebemos facilmente que nosso modelo deixa um pouco a desejar. Seria natural que um organismo com aspecto longilíneo se movesse como o fazem seres reais de tal configuração. Assim, se a parte esquerda da membrana vai para a esquerda (afastando-se do centro do organismo), a parte direita deveria também ir para a esquerda (aproximando-se do centro, portanto). Este movimento lembra o de uma cobra.

Estas linhas de pesquisa serão retomadas muito brevemente.

Assim, voltamos ao nosso nadador clíptico de duas dimensões, nadando em um oceano viscoso, oscilando violentamente sua membrana externa, em busca de uma máxima eficiência. É em função dele que foi realizado este trabalho. Um brinde a este "atleta"!

Apêndice A. CÁLCULO DAS CURVATURAS

A.1 A forma da velocidade

Para o cálculo das curvaturas, precisamos ter em mente a fórmula do colchete de Lie, dada por:

$$[v_n, v_m] = \frac{\partial v_n}{\partial z} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial z} v_n + \frac{\partial v_n}{\partial \xi} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial \xi} v_n \quad .$$

No nosso caso em particular, visto que estamos trabalhando em um mapeamento conforme do círculo unitário, devemos atentar ao detalhe que a variável de derivação é ξ e não z . Assim, teremos:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \quad ,$$

pois

$$z = R \left(\xi + \frac{M}{\xi} \right) \quad .$$

Segundo Ehlers ([E2],pág. 11), temos:

$$\lambda_n v_n(\xi, \bar{\xi}) \begin{cases} \lambda_n \xi^{-n-1} & n > -1 \\ \lambda_{-1} & n = -1 \\ \lambda_n \xi^{n+1} - (n+1) \frac{\xi^2 (\xi^2 - M)}{\xi (\xi^2 - M)} \lambda_n \xi^n + \xi \frac{(1 - M/\xi^2)}{(\xi^2 - M)} (n+1) \lambda_n \xi^n & n < -1 \end{cases}$$

Precisamos, então, calcular três casos distintos:

1. $n > -1$ e $m > -1$;
2. $n > -1$ e $m < -1$ (e vice-versa);
3. $n < -1$ e $m < -1$.

A.2 Cálculo do caso 1.

Aqui, temos:

$$\lambda_n v_n = \lambda_n \tilde{\xi}^{-(n+1)} \quad \text{e} \quad \lambda_m v_m = \lambda_m \tilde{\xi}^{-(m+1)} .$$

E

$$[v_n, v_m] = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial \xi} v_n \right) + \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\tilde{\xi}^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{v}_m - \frac{\partial v_m}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{v}_n \right) .$$

Os dois primeiros termos são obviamente nulos pois v_n e v_m não dependem de ξ . Assim,

ficamos com:

$$[v_n, v_m] = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\tilde{\xi}^2}\right)} \left\{ \left[-\lambda_n (n+1) \tilde{\xi}^{-(n+2)} \right] \left[\lambda_m \tilde{\xi}^{-(m+1)} \right] - \left[-\lambda_m (m+1) \tilde{\xi}^{-(m+2)} \right] \left[\lambda_n \tilde{\xi}^{-(n+1)} \right] \right\}$$

Restringindo ao círculo (*i.e.*, $\xi \mapsto o$ e $\tilde{\xi} \mapsto o^{-1}$), temos

$$[v_n, v_m] = \frac{1}{R(1 - Mo^2)} \left[-\lambda_n (n+1) o^{n+2} \lambda_m o^{-m-1} + \lambda_m (m+1) o^{m+2} \lambda_n o^{-n-1} \right] .$$

Procedendo as simplificações adequadas, ficamos com:

$$[v_n, v_m] = \sum_k \left[\frac{\bar{\lambda}_n \lambda_m M^k}{R} (m+1) \sigma^{-n+m+1+2k} - \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m M^k}{R} (n+1) \sigma^{n-m+1-2k} \right], \quad (\text{A.1})$$

onde fizemos

$$\frac{1}{1 - M\sigma^2} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k}.$$

A.3 Cálculo do Caso 2.

Agora temos:

$$v_n = \lambda_n \bar{\xi}^{-(n+1)}$$

e

$$v_m = \lambda_m \xi^{m+1} - (m+1) \frac{\bar{\xi}^2 \xi^2 + M}{\xi \xi^2 - M} \bar{\lambda}_m \xi^m + \frac{1 + M \bar{\xi}^2}{\xi^2 - M} (m+1) \bar{\lambda}_m \bar{\xi}^{m+1}.$$

Novamente, devemos fazer:

$$[v_n, v_m] = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial \xi} v_n \right) + \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\bar{\xi}^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \bar{\xi}} \bar{v}_m - \frac{\partial v_m}{\partial \bar{\xi}} \bar{v}_n \right). \quad (\text{A.2})$$

onde o primeiro termo, que chamaremos de A , é identicamente nulo, pois v_n não apresenta dependência em ξ .

Já sabemos que:

$$\frac{\partial v_n}{\partial \bar{\xi}} = -(n+1) \lambda_n \bar{\xi}^{-(n+2)}.$$

Vamos agora calcular as derivadas de v_m :

$$\frac{\partial v_m}{\partial \xi} = (m+1)\lambda_m \xi^m - \bar{\lambda}_m(m+1) \frac{\bar{\xi}^{m+2}}{\xi^2 - M} \frac{\xi^2 - M}{\xi^2} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_m}{\partial \xi} = & \lambda_m(m+1) \left\{ -\frac{\xi^2 + M}{\xi} \left[\frac{(m+2)\xi^{m+1}}{\xi^2 - M} - \frac{2\bar{\xi}^{m+3}}{(\xi^2 - M)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(m+1)\bar{\xi}^m + (m+3)M\bar{\xi}^{m+2}}{\xi^2 - M} - 2\frac{\bar{\xi}^{m+2} + M\bar{\xi}^{m+4}}{(\xi^2 - M)^2} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O segundo termo de (A.2), C , é calculado por:

$$C = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left[(m+1)\lambda_m \xi^m - \bar{\lambda}_m(m+1) \frac{\bar{\xi}^{m+2}}{\xi^2 - M} \frac{\xi^2 - M}{\xi^2} \right] \lambda_n \bar{\xi}^{-(n+1)} ;$$

restrito ao círculo unitário, isso nos dá:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{\lambda_n(m+1)}{R \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right)} \left[\lambda_m \sigma^m - \bar{\lambda}_m \frac{\sigma^{-(m+2)}}{\sigma^{-2} - M} \frac{\sigma^2 - M}{\sigma^2} \right] \sigma^{n+1} . \\ C' &= \frac{\lambda_n(m+1)}{R} \left[\frac{\lambda_m \sigma^{n+m+1}}{1 - \frac{M}{\sigma^2}} - \bar{\lambda}_m \frac{\sigma^{n-m+1}}{1 - M\sigma^2} \right] . \end{aligned}$$

Novamente faremos:

$$\frac{1}{1 - M\sigma^2} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k}$$

e, desta vez também,

$$\frac{1}{1 - \frac{M}{\sigma^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{-2k}$$

(este último passo nos é assegurado percebendo que $M < 1$ e $|\sigma| = 1$).

Feito isso, chegamos a:

$$C = \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m (m+1) M^k}{R} \sigma^{n+m-1-2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m (m+1) M^k}{R} \sigma^{n-m+1+2k} \quad (\text{A.5})$$

O terceiro termo da equação (A.2), que chamaremos de B , é calculado a seguir:

$$B = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left[-(n+1) \lambda_n \bar{\xi}^{-(n+2)} \right] \left[\bar{\lambda}_m \bar{\xi}^{m+1} - \lambda_m (m+1) \frac{\bar{\xi}^2 + M}{\bar{\xi}} \frac{\xi^{m+2}}{\xi^2 - M} + \lambda_m (m+1) \frac{\xi^{m+1} + M \xi^{m+3}}{\xi^2 - M} \right]$$

Como de costume, restringiremos ao círculo:

$$B = \frac{1}{R(1 - M\sigma^2)} \left[-(n+1) \lambda_n \sigma^{n+2} \right] \left[\bar{\lambda}_m \sigma^{-(m+1)} - \lambda_m (m+1) \frac{\sigma^{-2} + M}{\sigma^{-1}} \frac{\sigma^{m+2}}{\sigma^2 - M} + \lambda_m (m+1) \frac{\sigma^{m+1} + M \sigma^{m+3}}{\sigma^2 - M} \right]$$

$$B = - \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m (n+1)}{R} \frac{\sigma^{n-m+1}}{1 - M\sigma^2}$$

$$B = - \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m (n+1) M^k}{R} \sigma^{n-m+1+2k} \quad (\text{A.6})$$

Por fim, vamos calcular o quarto e último termo da expressão (A.2), que chamaremos

de D :

$$D = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left\{ -\lambda_m (m+1) \frac{\xi^2 + M}{\xi} \left[\frac{(m+2)\xi^{m+1}}{\xi^2 - M} - \frac{2\xi^{m+3}}{(\xi^2 - M)^2} \right] + \lambda_m (m+1) \left[\frac{(m+1)\xi^m + (m+3)M\xi^{m+2}}{\xi - M} - 2 \frac{\xi^{m+2} + M\xi^{m+4}}{(\xi^2 - M)^2} \right] \right\} \left[\lambda_n \bar{\xi}^{-(n+1)} \right]$$

No círculo, temos:

$$D = \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m (m+1) \sigma^{-(n+1)}}{R(1-M\sigma^2)} \left\{ -\frac{\sigma^2 + M}{\sigma} \left[\frac{(m+2)\sigma^{-(m+1)}}{\sigma^{-2} - M} - \frac{2\sigma^{-(m+3)}}{(\sigma^{-2} - M)^2} \right] + \left[\frac{(m+1)\sigma^{-m} + (m+3)M\sigma^{-(m+2)}}{\sigma^{-2} - M} - 2\frac{\sigma^{-(m+2)} + M\sigma^{-(m+4)}}{(\sigma^{-2} - M)^2} \right] \right\}$$

$$D = \frac{\lambda_n \lambda_m (m+1) \sigma^{-(n+1)}}{R(1-M\sigma^2)^2} (-\sigma^{-m+2} + M\sigma^{-m})$$

Aqui, faremos:

$$\frac{1}{(1-M\sigma^2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k \sigma^{2k},$$

resultando em:

$$D = -\sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m M^k (k+1)(m+1)}{R} \sigma^{-n-m+1+2k} + \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m M^{k+1} (k+1)(m+1)}{R} \sigma^{-n-m-1+2k} \quad (\text{A.7})$$

Agora, lembrando que $A = 0$, basta tomarmos (A.5), (A.6) e (A.7) para fazermos:

$$[v_n, v_m] = A + B - C - D$$

$$[v_n, v_m] = -\sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1) M^k \sigma^{n-m+1+2k} - \left[\sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) M^k \sigma^{m-m+1-2k} \right] - \left[-\sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} \right]$$

$$+ \left[\sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} \right]$$

$$\begin{aligned} [v_n, v_m] &= \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} (m-n) M^k \sigma^{n-m+1-2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) M^k \sigma^{n+m+1-2k} + \\ &+ \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m-1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Lembrando que (A.8) vale para o caso $n > -1$ e $m < -1$. Para obtermos o caso inverso, é só trocarmos n por m e vice-versa na equação acima:

$$\begin{aligned} [v_n, v_m] &= \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \lambda_m}{R} (n-m) M^k \sigma^{m-n+1+2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1) M^k \sigma^{n+m+1-2k} + \\ &+ \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m+1+2k} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde agora temos $n < -1$ e $m > -1$.

A.4 Cálculo do Caso 3.

Neste último caso, devemos fazer:

$$[v_n, v_m] = \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial \xi} v_n \right) + \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2}\right)} \left(\frac{\partial v_n}{\partial \xi} v_m - \frac{\partial v_m}{\partial \xi} v_n \right). \quad (\text{A.10})$$

com

$$v_n = \lambda_n \xi^{n+1} - (n+1) \frac{\bar{\xi}^2 \xi^2 + M}{\xi \xi^2 - M} \bar{\lambda}_n \bar{\xi}^n + \frac{1 + M \bar{\xi}^2}{\xi^2 - M} (n+1) \bar{\lambda}_n \bar{\xi}^{n+1} .$$

e

$$v_m = \lambda_m \xi^{m+1} - (m+1) \frac{\bar{\xi}^2 \xi^2 + M}{\xi \xi^2 - M} \bar{\lambda}_m \bar{\xi}^m + \frac{1 + M \bar{\xi}^2}{\xi^2 - M} (m+1) \bar{\lambda}_m \bar{\xi}^{m+1} .$$

As derivadas com respeito a ξ e a $\bar{\xi}$ já foram calculadas para o caso anterior e podem ser vistas nas expressões (A.3) e (A.4).

A fim de enxugarmos nossa notação, vamos primeiramente restringir estas expressões ao círculo unitário para depois calcularmos os termos de (A.10).

$$v_n|_o = \lambda_n \sigma^{n+1} \quad \text{e} \quad v_m|_o = \lambda_m \sigma^{m+1} ;$$

$$v_n|_o = \bar{\lambda}_n \sigma^{-(n+1)} \quad \text{e} \quad v_m|_o = \bar{\lambda}_m \sigma^{-(m+1)} .$$

E

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v_n}{\partial \xi} \right|_o &= (n+1) \lambda_n \sigma^n - \lambda_n (n+1) \frac{\sigma^{-n}}{1 - M \sigma^2} + \bar{\lambda}_n (n+1) \frac{\sigma^{-(n+2)}}{1 - M \sigma^2} , \\ \left. \frac{\partial v_m}{\partial \xi} \right|_o &= (m+1) \lambda_m \sigma^m - \lambda_m (m+1) \frac{\sigma^{-m}}{1 - M \sigma^2} + \bar{\lambda}_m (m+1) \frac{\sigma^{-(m+2)}}{1 - M \sigma^2} , \\ \left. \frac{\partial v_n}{\partial \bar{\xi}} \right|_o &= -\frac{\lambda_n (n+1)}{1 - M \sigma^2} (\sigma^{-n+2} - M \sigma^{-n}) \end{aligned}$$

e

$$\left. \frac{\partial v_m}{\partial \bar{\xi}} \right|_o = -\frac{\lambda_m (m+1)}{1 - M \sigma^2} (\sigma^{-m+2} - M \sigma^{-m}) .$$

Calculando o primeiro termo de (A.10), A' , temos:

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right)} \left[(n+1)\lambda_n \sigma^n - \bar{\lambda}_n(n+1) \frac{\sigma^{-n}}{1 - M\sigma^2} + \bar{\lambda}_n(n+1)M \frac{\sigma^{-(n+2)}}{1 - M\sigma^2} \right] \lambda_m \sigma^{m+1} \\
A' &= \frac{\lambda_m(n+1)\sigma^{m+1}}{R \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right)} \left[\lambda_n \sigma^n - \frac{\bar{\lambda}_n}{1 - M\sigma^2} \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right) \right] \\
A' &= \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1)M^k \sigma^{n+m+1-2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \lambda_m}{R} (n+1)M^k \sigma^{-n+m+1+2k} \quad . \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Para o terceiro termo de (A.10), B' , temos:

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{1}{R(1 - M\sigma^2)} \left[-\frac{\bar{\lambda}_n(n+1)}{1 - M\sigma^2} (\sigma^{-n+2} - M\sigma^{-n}) \right] \bar{\lambda}_m \sigma^{-(m+1)} \quad , \\
B' &= \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m (n+1)}{R(1 - M\sigma^2)^2} (M\sigma^{-n-m-1} - \sigma^{-n-m+1}) \quad , \\
B' &= \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1)M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1)M^k \sigma^{-n-m+1+2k} \quad . \\
& \hspace{20em} (\text{A.12})
\end{aligned}$$

Continuando, vamos calcular o segundo termo de (A.10), C' :

$$\begin{aligned}
C' &= \frac{1}{R \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right)} \left[(m+1)\lambda_m \sigma^m - \bar{\lambda}_m(m+1) \frac{\sigma^{-m}}{1 - M\sigma^2} + \bar{\lambda}_m(m+1)M \frac{\sigma^{-(m+2)}}{1 - M\sigma^2} \right] \lambda_n \sigma^{n+1} \\
C' &= \frac{\lambda_n(m+1)\sigma^{n+1}}{R \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right)} \left[\lambda_m \sigma^m - \frac{\bar{\lambda}_m}{1 - M\sigma^2} \left(1 - \frac{M}{\sigma^2}\right) \right] \\
C' &= \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1)M^k \sigma^{n+m+1-2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)M^k \sigma^{n-m+1+2k} \quad . \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

É, finalizando:

$$D' = \frac{1}{R(1-M\sigma^2)} \left[-\frac{\lambda_m(m+1)}{1-M\sigma^2} (\sigma^{-m+2} - M\sigma^{-m}) \right] \lambda_n \sigma^{-(n+1)} \quad ,$$

$$D' = \frac{\lambda_n \lambda_m (m+1)}{R(1-M\sigma^2)^2} (M\sigma^{-n-m-1} - \sigma^{-n-m+1}) \quad ,$$

$$D' = \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} \quad .$$

(A.14)

Agora já podemos calcular o colchete

$$[v_n, v_m] = A' + B' - C' - D'$$

$$\begin{aligned} [v_n, v_m] &= \left[\sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1) M^k \sigma^{n+m+1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1) M^k \sigma^{-n+m+1+2k} \right] + \\ &+ \left[\sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (n+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} \right] + \\ &- \left[\sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) M^k \sigma^{n+m+1+2k} - \sum_k \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1) M^k \sigma^{n-m+1+2k} \right] + \\ &- \left[\sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^{k+1} \sigma^{-n-m-1+2k} - \sum_k \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} (m+1)(k+1) M^k \sigma^{-n-m+1+2k} \right] \end{aligned}$$

Que resulta em:

$$\begin{aligned}
[e_n, e_m] &= \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n-m) M^k a^{n \cdot m \cdot 1 \cdot 2k} + \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n-m)(k+1) M^{k+1} a^{-n-m-1 \cdot 2k+1} \\
&+ \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m-n)(k+1) M^k a^{-n-m-1 \cdot 2k} + \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (m+1) M^k a^{n-m+1 \cdot 2k+1} \\
&- \sum_k \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} (n+1) M^k a^{-n \cdot m \cdot 1 \cdot 2k} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

A.5 A matriz de curvatura

Para construir a matriz de nosso interesse, precisamos apenas isolar os termos constantes dos somatórios das fórmulas (A.1), (A.8), (A.9) e (A.15). Isto por que são estes termos que nos dão a translação do organismo.

Assim, ficamos com:

$$\mathcal{F}_{nm} = \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{-\frac{n-m+1}{2}} (m+1) \delta_{(n-m), (2k+1)} - \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{-\frac{n-m+1}{2}} (n+1) \delta_{(m-n), (2k+1)} \ ,$$

$$n, m > -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{nm} &= \frac{\lambda_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{-\frac{n-m+1}{2}} (m-n) \delta_{(n-m), (2k+1)} + \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n+m+1}{2}} (m+1) \left(\frac{n+m+1}{2} \right) \delta_{(n+m), (2k+1)} + \\
&- \left[\frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{\frac{n+m+1}{2}} + \frac{\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n-m-3}{2}} \left(\frac{n+m+3}{2} \right) \right] (m+1) \delta_{(n+m), (2k-1)} \ ,
\end{aligned}$$

$$n > -1 \quad , \quad m < -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \ .$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nm} &= \frac{\tilde{\lambda}_n \lambda_m}{R} M^{-\frac{m-n+1}{2}} (n-m) \delta_{(m-n), (2k-1)} + \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n-m-1}{2}} (n+1) \left(\frac{n+m+1}{2} \right) \delta_{(n-m), (2k-1)} \\ &- \left[\frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{\frac{n+m-1}{2}} + \frac{\tilde{\lambda}_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{\frac{n-m-1}{2}} \left(\frac{n+m+3}{2} \right) \right] (n+1) \delta_{(n-m), (2k-1)} \quad , \end{aligned}$$

$$n < -1 \quad , \quad m > -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

e, por fim,

$$\mathcal{F}_{nm} = \frac{\lambda_n \tilde{\lambda}_m}{R} M^{\frac{m-n-1}{2}} (m+1) \delta_{(m-n), (2k-1)} - \frac{\lambda_n \lambda_m}{R} M^{-\frac{n-m-1}{2}} (n+1) \delta_{(n-m), (2k-1)} \quad ,$$

$$n, m < -1 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \quad .$$

Estas são as fórmulas alimentadas ao programa *MathLab* para que se possa resolver o problema de autovalores. No apêndice seguinte, vemos uma matriz com $|n|, |m| < 5$.

Apêndice B. MATRIZ DE CURVATURA PARA

A ELIPSE ($\lambda_n = \lambda_m = 1$)

	$m = 0$	$m = 1$	$m = -2$	$m = 2$	$m = -3$	$m = 3$	$m = -4$	$m = 4$
$n = 0$	0	$-\frac{1}{R}$	0	0	0	$-\frac{M}{R}$	0	0
$n = 1$	$\frac{1}{R}$	0	$\frac{M+1}{R}$	$-\frac{2}{R}$	0	0	0	$-\frac{2M}{R}$
$n = -2$	0	$-\frac{M+1}{R}$	0	0	$\frac{1}{R}$	$-\frac{2M^2+M-1}{R}$	0	0
$n = 2$	0	$\frac{2}{R}$	0	0	$2\frac{M+1}{R}$	$-\frac{3}{R}$	0	0
$n = -3$	0	0	$-\frac{1}{R}$	$-2\frac{M+1}{R}$	0	0	$\frac{2}{R}$	$-\frac{2M^2+M-1}{R}$
$n = 3$	$\frac{M}{R}$	0	$\frac{2M^2+M-1}{R}$	$\frac{3}{R}$	0	0	$3\frac{M+1}{R}$	$-\frac{1}{R}$
$n = -4$	0	0	0	0	$-\frac{2}{R}$	$-3\frac{M+1}{R}$	0	0
$n = 4$	0	$-\frac{2M}{R}$	0	0	$2\frac{2M^2+M-1}{R}$	$\frac{1}{R}$	0	0

Apêndice C. CÁLCULO DA POTÊNCIA DESPENDIDA

C.1 A fórmula da potência

A potência P pode ser escrita como o produto escalar da força F com a velocidade v .

Em notação complexa, equivale a dizer:

$$P = \text{Re}(Fv) \quad .$$

Sendo extremamente rigoroso, devo ressaltar que trataremos, aqui, primeiramente da densidade de potência, \mathcal{P} , obtida como função da densidade de força, \mathfrak{F} .

Já sabemos que a velocidade é dada por:

$$v = \bar{\psi}(z) + \phi(z) - z\bar{\phi}'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \sigma^{n+1} \quad .$$

A densidade de força será:

$$\mathfrak{F} = 2\mu \left[2\text{Re}(\phi')\hat{N} + (\bar{\psi}' - z\bar{\phi}'')\hat{N} \right] \quad ,$$

onde \hat{N} é o vetor normal dado por $-i\frac{dz}{ds}$.

Assim, temos:

$$\frac{\mathcal{P}}{2\mu} ds = \text{Re} \left\{ \left(\sum_n \bar{\lambda}_n \bar{\sigma}^{n+1} \right) \left[\sum_m -(\phi'_m + \bar{\phi}'_m) idz + (\bar{\psi}'_m - z\bar{\phi}''_m) id\bar{z} \right] \right\} \quad . \quad (\text{C.1})$$

Mas é muito importante ressaltar que estaremos trabalhando em um formato diferente do círculo unitário. Mais precisamente, nossa fronteira é uma elipse, cuja transformação conforme é dada por:

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \frac{M}{\xi} \right) .$$

Assim, as derivadas mostradas na equação (C.1) (tomadas em relação a z) precisam ser devidamente convertidas para as variáveis corretas (ξ), como segue:

$$\phi'(z) = \frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{\frac{d\phi}{d\xi}}{\frac{dz}{d\xi}} = \frac{\frac{d\phi}{d\xi}}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} = \frac{\dot{\phi}(\xi)}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} ;$$

$$\psi'(z) = \frac{\dot{\psi}(\xi)}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} ;$$

$$\phi''(z) = \frac{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right) \ddot{\phi}(\xi) - 2 \frac{RM}{\xi^3} \dot{\phi}(\xi)}{R^3 \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)^3} ;$$

e

$$dz = R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right) d\xi .$$

Assim, reescrevendo (C.1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}}{2\mu} ds = & \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_n \bar{\lambda}_n \bar{\sigma}^{n+1} \right) \left[\sum_m - \left(\frac{\dot{\phi}_m}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} + \frac{\bar{\psi}_m}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} \right) R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right) d\xi + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(\left(\frac{\bar{\psi}_m}{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)} \right) - R \left(\xi + \frac{M}{\xi} \right) \frac{R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right) \ddot{\phi}_m - 2 \frac{RM}{\xi^3} \dot{\phi}_m}{R^3 \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right)^3} \right) R \left(1 - \frac{M}{\xi^2} \right) d\bar{\xi} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Esta é a fórmula da potência.

C.2 Manipulações algébricas

Visando enxugar nossa notação, vamos nos reportar ao círculo antes de substituir as formas de ϕ e ψ . É só tomarmos ($\xi \rightarrow \sigma$), lembrando que devemos fazer $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$. Com isso, e simplificando a expressão (C.2), ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{P}}{2\mu} ds = & \operatorname{Im} \left\{ \left(\sum_n \bar{\lambda}_n \bar{\sigma}^{n+1} \right) \left[- \sum_m \left\{ \dot{\phi}_m + \left[\frac{\sigma^2 - M}{\sigma^2 (1 - M\sigma^2)} + \frac{2(\sigma^2 + M)}{(1 - M\sigma^2)^2} M \right] \bar{\phi}_m \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{\psi}_m}{\sigma^2} - \frac{\left(\sigma + \frac{M}{\sigma} \right)}{\sigma^2 (1 - M\sigma^2)} \bar{\phi}_m \right\} d\sigma \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

É bom chamarmos a atenção para o fato de que as funções ϕ e ψ ainda não foram

restritas ao círculo, suas formas sendo:

$$\phi_m(\xi) = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ 0 & m = -1 \\ \lambda_m \xi^{m-1} & m < -1. \end{cases}$$

e

$$\psi_m(\xi) = \begin{cases} \lambda_m \xi^{-m-1} & m > -1 \\ \bar{\lambda}_{-1} & m = -1 \\ \xi \frac{(1+M\xi^2)}{(\xi^2-M)} (m+1) \lambda_m \xi^m & m < -1. \end{cases}$$

Estas formas serão inseridas em (C.3), e então restringiremos novamente ao círculo (para transformar os ξ restantes em σ adequadamente). Mas o resultado nos daria uma expressão bastante grande e de difícil manuseio. Vamos, *a priori*, desmembrar esta expressão.

Primeiramente, devemos ressaltar que apenas ψ existe para $p \geq -1$. Assim, se os termos que contém ϕ (na verdade, suas derivadas) podem ser representados em um somatório de $-\infty$ a -1 , o termo em ψ deve ser desmembrado em dois novos termos: um a ser agrupado no somatório anterior e outro levando em conta valores de p maiores que -1 . Ficamos com:

$$\oint_{S^1} \frac{\mathcal{P}}{2\mu} ds \underbrace{\sum_{n,m=-1} \text{Im}(\bar{\lambda}_n \lambda_m A_{nm}) + \sum_{n,m=-1} \text{Im}(\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m B_{nm})}_{\bar{v}}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\sum_{n,m < -1} \text{Im}(\bar{\lambda}_n \lambda_m C_{nm})}_{\phi} + \underbrace{\sum_{n,m < -1} \text{Im}(\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m D_{nm})}_{\bar{\phi}} + \\
& + \underbrace{\sum_{n,m < -1} \text{Im}(\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m E_{nm})}_{\bar{\phi}} \quad , \tag{C.4}
\end{aligned}$$

onde $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$ e E_{nm} são integrais em σ a serem detalhadas a seguir. Percebamos, no entanto, que isolamos ambos os λ e incorporamos o fator σ proveniente da velocidade à formula das funções ϕ e ψ .

C.3 Sete integrais e uma solução

O cálculo de A_{nm} é trivial:

$$A_{nm} = \oint_{S^1} (\sigma^{-n-1}) \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \overline{\left(\frac{d}{d\xi} \xi^{-m-1} \right)}_{\xi \rightarrow \sigma} d\sigma = -(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+p-1} d\sigma \quad .$$

O cálculo de B_{nm} , por sua vez, mostra-se bastante trabalhoso:

$$\begin{aligned}
B_{nm} & = \oint_{S^1} (\sigma^{-n-1}) \left(\frac{1}{\sigma^2} \right) \overline{\left\{ \frac{d}{d\xi} \left[\frac{(1+M\xi^2)}{(\xi^2-M)} (m+1)\xi^{m+1} \right] \right\}}_{\xi \rightarrow \sigma} d\sigma \\
& = (m+1) \left[(m+1) \oint_{S^1} \left(\frac{\sigma^2+M}{1-M\sigma^2} \right) \sigma^{-n-m-3} d\sigma - 2(M^2+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^{-n-m-1}}{(1-M\sigma^2)^2} d\sigma \right] \quad .
\end{aligned}$$

Prosseguindo, temos:

$$C_{nm} = \oint_{S^1} (\sigma^{-n-1}) \left(\frac{d}{d\xi} \xi^{m+1} \right)_{\xi \rightarrow \sigma} d\sigma = (m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma \quad ;$$

$$\begin{aligned}
D_{nm} &= \oint_{S^1} (\sigma^{-n-1}) \left[\frac{\sigma^2 - M}{\sigma^2(1 - M\sigma^2)} + \frac{2(\sigma^2 + M)}{(1 - M\sigma^2)^2} M \right] \overline{\left(\frac{d}{d\xi} \xi^{m+1} \right)}_{\xi \rightarrow \sigma} d\sigma \\
&= (m+1) \left[\oint_{S^1} \frac{\sigma^2 - M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma + 2M \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right] ;
\end{aligned}$$

e, por fim,

$$E_{nm} = \oint_{S^1} \sigma^{-n-1} \frac{\sigma + \frac{M}{\sigma}}{\sigma^2(1 - M\sigma^2)} \overline{\left(\frac{d^2}{d\xi^2} \xi^{m+1} \right)}_{\xi \rightarrow \sigma} d\sigma = m(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma .$$

Reunidas todas sob a fórmula (C.2), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds &= \sum_{n, m > -1} \operatorname{Im} \left[\bar{\lambda}_n \lambda_m (-1)(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma \right] + \\
&+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left\{ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m \left[(m+1)^2 \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma - \right. \right. \\
&+ \left. \left. 2(M^2 + 1)(m+1) \oint_{S^1} \frac{1}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right] \right\} + \\
&+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left[\bar{\lambda}_n \lambda_m (m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma \right] + \\
&+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left\{ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m \left[(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 - M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma + \right. \right. \\
&+ \left. \left. 2M(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right] \right\} + \\
&+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left[\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m m(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma \right] .
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Podemos, então, concentrar nossos esforços na solução das sete integrais apresentadas:

1. $-(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma$.
2. $(m+1)^2 \oint_{S^1} \frac{\sigma^2+M}{1-M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma$.
3. $-2(M^2+1)(m+1) \oint_{S^1} \frac{1}{(1-M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma$.
4. $(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma$.
5. $(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2-M}{1-M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma$.
6. $2M(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2+M}{(1-M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma$.
7. $m(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2+M}{1-M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma$.

C.4 Interlúdio circular

Para termos um certo parâmetro de comparação, vamos calcular primeiramente o caso do círculo, onde M é zero. As integrais dadas na seção anterior transformam-se em:

1. $-(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma = -2\pi i(m+1)\delta_{nm} \quad (m > -1)$.
2. $(m+1)^2 \oint_{S^1} \sigma^{-n-m-1} d\sigma = 2\pi i(m+1)^2\delta_{n-m} \quad (m < -1)$.
3. $-2(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n-m-1} d\sigma = -4\pi i(m+1)\delta_{n-m} \quad (m < -1)$.
4. $(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n+m-1} d\sigma = 2\pi i(m+1)\delta_{nm} \quad (m < -1)$
5. $(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n-m-1} d\sigma = 2\pi i(m+1)\delta_{n-m} \quad (m < -1)$.

6. Identicamente nula.

$$7. \quad m(m+1) \oint_{S^1} \sigma^{-n-m-1} d\sigma = 2\pi i m(m+1) \delta_{n-m} \quad (m < -1) \quad .$$

Desde já, podemos ver que as integrais 1 e 4 não dependem de M , portanto serão as mesmas não importando a excentricidade da elipse.

Para podermos reunir os valores obtidos individualmente em uma única fórmula, vamos introduzir a função degrau, θ_k , com a seguinte propriedade: $\theta_k = 0$ $k < 0$ e $\theta_k = 1$ $k \geq 0$.

Assim, para $n = k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds &= \text{Im} \left\{ -\bar{\lambda}_k \lambda_k (k+1) 2\pi i \theta_{-k} + \bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_{-k} (1-k)^2 2\pi i \theta_k - \bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_{-k} (1-k) 4\pi i \theta_k + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}_k \lambda_k (k+1) 2\pi i \theta_k + \bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_{-k} (1-k) 2\pi i \theta_k - \bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_{-k} (-k)(1-k) 2\pi i \theta_k \right\} \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds &= \underbrace{-|\lambda_k|^2 (k+1) 2\pi \theta_{-k} + |\lambda_k|^2 (k+1) 2\pi \theta_k}_{\kappa'} + \\ &\quad + \underbrace{\bar{\lambda}_k \bar{\lambda}_{-k} \left[(1-k)^2 - 2(1-k) + (1-k) + k(1-k) \right]}_{\text{zero!}} 2\pi \theta_k \quad . \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4\pi\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds = \kappa' \quad , \quad (C.6)$$

onde κ' pode ser prontamente obtido de κ' .

C.5 De volta à elipse

Vamos, então, calcular a potência despendida para uma elipse qualquer:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds &= \mathcal{K}' + \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left\{ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m \left[(m+1)^2 \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma - \right. \right. \\
 &+ \left. \left. 2(M^2 + 1)(m+1) \oint_{S^1} \frac{1}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right] \right\} + \\
 &+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left\{ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m \left[(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 - M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. 2M(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right] \right\} + \\
 &+ \sum_{n, m < -1} \operatorname{Im} \left[\bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m m(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma \right].
 \end{aligned}$$

Mais uma vez, vamos nos concentrar nas integrais caso a caso. Primeiramente:

$$(m+1)^2 \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma = (m+1)^2 \left(\oint_{S^1} \frac{\sigma^{-n-m-1}}{1 - M\sigma^2} d\sigma + M \oint_{S^1} \frac{\sigma^{-n-m-3}}{1 - M\sigma^2} d\sigma \right).$$

Como $M\sigma^2 < 1$, temos:

$$\frac{1}{1 - M\sigma^2} = \sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 (m+1)^2 \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma &= (m+1)^2 \left[\oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right. \\
 &+ \left. M \oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-3} d\sigma \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m+1)^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k 2\pi i \delta_{k, (\frac{n+m}{2})} + \sum_{k=0}^{\infty} M^{k+1} 2\pi i \delta_{k, (\frac{n+m+2}{2})} \right) \\
&= (m+1)^2 M^{\frac{n+m}{2}} (\theta_{\frac{n+m}{2}} + M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}}) 2\pi i .
\end{aligned}$$

(As funções θ aparecem pois $k \geq 0$.)

Prosseguindo com as outras integrais, temos:

$$-2(m+1)(M^2+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^{-n-m-1}}{(1-M\sigma^2)^2} d\sigma ,$$

onde agora usaremos que:

$$\frac{1}{(1-M\sigma^2)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k \sigma^{2k} .$$

Assim:

$$\begin{aligned}
&-2(m+1)(M^2+1) \oint_{S^1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k \sigma^{2k} \right] \sigma^{-n-m-1} d\sigma = \\
&= -2(m+1)(M^2+1) \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1) M^k 2\pi i \delta_{k, (\frac{n+m}{2})} \right] = \\
&= -(m+1)(M^2+1)(n+m+2) M^{\frac{n+m}{2}} 2\pi i \theta_{\frac{n+m}{2}} .
\end{aligned}$$

Prosseguindo, temos:

$$(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 - M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma \quad (m+1) \left[\oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right]$$

$$\begin{aligned}
& - M \oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-3} d\sigma \Big] \\
= & (m+1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m}{2}\right)} - \sum_{k=0}^{\infty} M^{k+1} 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m+2}{2}\right)} \right) \\
= & (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} (\theta_{\frac{n+m}{2}} - M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}}) 2\pi i \quad ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2M(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{(1 - M\sigma^2)^2} \sigma^{-n-m-1} d\sigma & = 2M(m+1) \left\{ \oint_{S^1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k \sigma^{2k} \right] \sigma^{-n-m+1} d\sigma \right. \\
& \quad \left. + M \oint_{S^1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k \sigma^{2k} \right] \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right\} \\
= & 2M(m+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^k 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m-2}{2}\right)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) M^{k+1} 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m}{2}\right)} \right] \\
= & 2(m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left[\frac{n+m}{2} \theta_{\frac{n+m-2}{2}} + \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{n+m}{2} + 1 \right) M^2 \theta_{\frac{n+m}{2}} \right] 2\pi i \\
= & (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left[(n+m) \theta_{\frac{n+m-2}{2}} \right. \\
& \quad \left. + (n+m+2) M^2 \theta_{\frac{n+m}{2}} \right] 2\pi i \quad ;
\end{aligned}$$

$$-m(m+1) \oint_{S^1} \frac{\sigma^2 + M}{1 - M\sigma^2} \sigma^{-n-m-3} d\sigma \quad -m(m+1) \left[\oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-1} d\sigma \right]$$

$$\begin{aligned}
& + M \oint_{S^1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k \sigma^{2k} \right) \sigma^{-n-m-3} d\sigma \Big] \\
= & -m(m+1) \left(\sum_{k=0}^{\infty} M^k 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m}{2}\right)} + \sum_{k=0}^{\infty} M^{k+1} 2\pi i \delta_{k, \left(\frac{n+m+2}{2}\right)} \right) \\
= & -m(m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left(\theta_{\frac{n+m}{2}} + M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}} \right) 2\pi i \quad .
\end{aligned}$$

Então, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds & = \mathcal{K}' + \sum_{n, m < -1} \text{Im} \left\{ \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m \left\{ (m+1)^2 M^{\frac{n+m}{2}} \left(\theta_{\frac{n+m}{2}} + M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}} \right) \right. \right. \\
& - (m+1)(M^2+1)(n+m+2) M^{\frac{n+m}{2}} \theta_{\frac{n+m}{2}} + (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left(\theta_{\frac{n+m}{2}} - M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}} \right) \\
& + (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left[(n+m) \theta_{\frac{n+m-2}{2}} + (n+m+2) M^2 \theta_{\frac{n+m}{2}} \right] \\
& \left. \left. - m(m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left(\theta_{\frac{n+m}{2}} + M^2 \theta_{\frac{n+m+2}{2}} \right) \right\} 2\pi i \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4n\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds & = \mathcal{K} + \sum_{n, m < -1} \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left\{ (n+m) \theta_{\frac{n+m-2}{2}} \right. \\
& + \left[(m+1) - (M^2+1)(n+m+2) + 1 + (n+m+2) M^2 - p \right] \theta_{\frac{n+m}{2}} \\
& \left. + \left[(m+1) M^2 - M^2 - m M^2 \right] \theta_{\frac{n+m+2}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4n\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds = \mathcal{K} + \sum_{n, m < -1} \bar{\lambda}_n \bar{\lambda}_m (m+1) M^{\frac{n+m}{2}} \left[(n+m) \theta_{\frac{n+m-2}{2}} - (n+m) \theta_{\frac{n+m}{2}} \right] \quad .$$

Lembrando que $\frac{n+m}{2}$ deve ser inteiro, vamos agora analisar cuidadosamente o termo

entre os colchetes, nos três casos possíveis:

$$\frac{n+m}{2} < 0 \left(\Rightarrow \frac{n+m-2}{2} < 0 \right) \Rightarrow \theta_{\frac{n+m-2}{2}} = \theta_{\frac{n+m}{2}} = 0$$

$$\left[(n+m)\theta_{\frac{n+m-2}{2}} - (n+m)\theta_{\frac{n+m}{2}} \right] = 0 \quad ;$$

$$\frac{n+m}{2} = 0 \left(\Rightarrow \frac{n+m-2}{2} < 0 \right) \Rightarrow \theta_{\frac{n+m-2}{2}} = 0 \quad \theta_{\frac{n+m}{2}} = 1$$

$$\left[(n+m)\theta_{\frac{n+m-2}{2}} - (n+m)\theta_{\frac{n+m}{2}} \right] = -(n+m) = 0 \quad ;$$

$$\frac{n+m}{2} > 0 \left(\Rightarrow \frac{n+m-2}{2} \geq 0 \right) \Rightarrow \theta_{\frac{n+m-2}{2}} = \theta_{\frac{n+m}{2}} = 1$$

$$\left[(n+m)\theta_{\frac{n+m-2}{2}} - (n+m)\theta_{\frac{n+m}{2}} \right] = (n+m) - (n+m) = 0 \quad .$$

Isto é impressionante, pois nos deixa com:

$$\frac{1}{4\pi\mu} \oint_{S^1} \mathcal{P} ds = \mathcal{K} = -|\lambda_k|^2(k+1)\theta_{-k} + |\lambda_k|^2(k+1)\theta_k \quad ,$$

que é exatamente o resultado do círculo! Assim, vemos que não importa a excentricidade M da elipse tomada como formato, a potência dispendida por nosso nadador será a mesma que ele dispenderia se tivesse a forma de um círculo! Este é um resultado notável.

Apêndice D. MATRIZ DE POTÊNCIA PARA A ELIPSE ($\lambda_n = \lambda_m = 1$)

	$m = 0$	$m = 1$	$m = -2$	$m = 2$	$m = -3$	$m = 3$	$m = -4$	$m = 4$
$n = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	2	0	0	0	0	0	0
$n = -2$	0	0	1	0	0	0	0	0
$n = 2$	0	0	0	3	0	0	0	0
$n = -3$	0	0	0	0	2	0	0	0
$n = 3$	0	0	0	0	0	4	0	0
$n = -4$	0	0	0	0	0	0	3	0
$n = 4$	0	0	0	0	0	0	0	5

Apêndice E. AUTOVALORES CALCULADOS

Primeiramente, procedemos o cálculo para $M = 0$, *i.e.* o círculo. Estes são os resultados obtidos através do programa *MathLab*:

$m=5$ (cinco primeiros modos)

$$0.0000 + 1.9906i$$

$$0.0000 - 1.9906i$$

$$0.0000 + 1.7650i$$

$$0.0000 - 1.7650i$$

$$0.0000 + 0.3052i$$

$$0.0000 - 0.3052i$$

$$0.0000 + 0.7612i$$

$$0.0000 - 0.7612i$$

$$0.0000 + 1.2583i$$

$$0.0000 - 1.2583i$$

$m=10$ (10 primeiros modos)

$$0.0000 + 2.4008i$$

$$0.0000 - 2.4008i$$

$$0.0000 + 2.3471i$$

$$0.0000 - 2.3471i$$

$$0.0000 + 2.0381i$$

0.0000 - 2.0381i

0.0000 + 1.9158i

0.0000 - 1.9158i

0.0000 + 1.5989i

0.0000 - 1.5989i

0.0000 + 1.3735i

0.0000 - 1.3735i

0.0000 + 1.1115i

0.0000 - 1.1115i

0.0000 + 0.7572i

0.0000 - 0.7572i

0.0000 + 0.5604i

0.0000 - 0.5604i

0.0000

0.0000

m=30 (trinta primeiros modos)

0.0000 + 2.7016i

0.0000 - 2.7016i

0.0000 + 2.6967i

0.0000 - 2.6967i

0.0000 + 2.6237i

0.0000 - 2.6237i

0.0000 + 2.6147i

0.0000 - 2.6147i

0.0000 + 2.5296i

0.0000 - 2.5296i

0.0000 + 2.5152i

0.0000 - 2.5152i

0.0000 + 2.4174i

0.0000 - 2.4174i

0.0000 + 2.3960i

0.0000 - 2.3960i

0.0000 + 2.2869i

0.0000 - 2.2869i

0.0000 + 2.2568i

0.0000 - 2.2568i

0.0000 + 2.1385i

0.0000 - 2.1385i

0.0000 + 2.0978i

0.0000 - 2.0978i

0.0000 + 1.9735i

0.0000 - 1.9735i

0.0000 + 1.9201i

0.0000 - 1.9201i

$0.0000 + 1.7935i$

$0.0000 - 1.7935i$

$0.0000 + 1.7248i$

$0.0000 - 1.7248i$

$0.0000 + 1.6004i$

$0.0000 - 1.6004i$

$0.0000 + 1.5138i$

$0.0000 - 1.5138i$

$0.0000 + 1.3963i$

$0.0000 - 1.3963i$

$0.0000 + 1.2894i$

$0.0000 - 1.2894i$

$0.0000 + 1.1826i$

$0.0000 - 1.1826i$

$0.0000 + 1.0541i$

$0.0000 - 1.0541i$

$0.0000 + 0.9592i$

$0.0000 - 0.9592i$

$0.0000 + 0.8105i$

$0.0000 - 0.8105i$

$0.0000 + 0.7248i$

$0.0000 - 0.7248i$

0.0000 + 0.5605i

0.0000 - 0.5605i

0.0000 + 0.4788i

0.0000 - 0.4788i

0.0000 + 0.2229i

0.0000 - 0.2229i

0.0000 + 0.3038i

0.0000 - 0.3038i

0.0000

0.0000

m= 10 (modos entre 30 e 39)

0.0000000000000000 + 2.64980730820964i

0.0000000000000000 - 2.64980730820964i

0.0000000000000000 + 2.65289979620871i

0.0000000000000000 - 2.65289979620871i

0.0000000000000000 + 2.37491733361529i

0.0000000000000000 - 2.37491733361529i

0.0000000000000000 + 2.37782455988169i

0.0000000000000000 - 2.37782455988169i

0.0000000000000000 + 1.93904951248952i

0.0000000000000000 - 1.93904951248952i

0.0000000000000000 + 1.94163959952485i

0.0000000000000000 - 1.94163959952485i
 0.0000000000000000 + 1.37087259832083i
 0.0000000000000000 - 1.37087259832083i
 0.0000000000000000 + 1.37371546936352i
 0.0000000000000000 - 1.37371546936352i
 0.0000000000000000 + 0.70836332815756i
 0.0000000000000000 - 0.70836332815756i
 0.0000000000000000 + 0.71387150246632i
 0.0000000000000000 - 0.71387150246632i
 0.0000000000000000
 0.0000000000000000

Agora para uma elipse pouco excêntrica ($M = 0.1$):

$m=5$ (cinco primeiros modos)

0.0000 + 0.3187i
 0.0000 - 0.3187i
 0.0000 + 0.8705i
 0.0000 - 0.8705i
 0.0000 + 1.3475i
 0.0000 - 1.3475i
 0.0000 + 1.9664i
 0.0000 - 1.9664i
 0.0000 + 1.7671i

0.0000 - 1.7671i

m=10 (10 primeiros modos)

0.0000 + 0.6728i

0.0000 - 0.6728i

0.0000 + 0.8851i

0.0000 - 0.8851i

0.0000 + 1.2631i

0.0000 - 1.2631i

0.0000 + 1.5046i

0.0000 - 1.5046i

0.0000 + 1.7128i

0.0000 - 1.7128i

0.0000 + 2.2845i

0.0000 - 2.2845i

0.0000 + 2.2427i

0.0000 - 2.2427i

0.0000 + 2.0519i

0.0000 - 2.0519i

0.0000 + 1.9531i

0.0000 - 1.9531i

0.0000

0.0000

m=30 (trinta primeiros modos)

0.0000 + 0.2844i

0.0000 - 0.2844i

0.0000 + 0.3910i

0.0000 - 0.3910i

0.0000 + 0.6088i

0.0000 - 0.6088i

0.0000 + 0.7073i

0.0000 - 0.7073i

0.0000 + 0.9046i

0.0000 - 0.9046i

0.0000 + 0.9999i

0.0000 - 0.9999i

0.0000 + 1.1672i

0.0000 - 1.1672i

0.0000 + 1.2680i

0.0000 - 1.2680i

0.0000 + 1.4004i

0.0000 - 1.4004i

0.0000 + 1.5075i

0.0000 - 1.5075i

0.0000 + 1.6079i

0.0000 - 1.6079i

0.0000 + 1.7153i

0.0000 - 1.7153i

0.0000 + 1.7897i

0.0000 - 1.7897i

0.0000 + 1.8911i

0.0000 - 1.8911i

0.0000 + 1.9455i

0.0000 - 1.9455i

0.0000 + 2.0369i

0.0000 - 2.0369i

0.0000 + 2.0763i

0.0000 - 2.0763i

0.0000 + 2.1562i

0.0000 - 2.1562i

0.0000 + 2.1843i

0.0000 - 2.1843i

0.0000 + 2.2528i

0.0000 - 2.2528i

0.0000 + 2.2725i

0.0000 - 2.2725i

0.0000 + 2.3305i

0.0000 - 2.3305i

0.0000 + 2.3441i

0.0000 - 2.3441i

0.0000 + 2.4884i

0.0000 - 2.4884i

0.0000 + 2.4848i

0.0000 - 2.4848i

0.0000 + 2.4491i

0.0000 - 2.4491i

0.0000 + 2.4432i

0.0000 - 2.4432i

0.0000 + 2.3928i

0.0000 - 2.3928i

0.0000 + 2.4020i

0.0000 - 2.4020i

0.0000

0.0000

m= 10 (modos entre 30 e 39)

0.0000000000000000 + 2.46894771109970i

0.0000000000000000 - 2.46894771109970i

0.0000000000000000 + 2.47165275261634i

0.0000000000000000 - 2.47165275261634i

$$0.000000000000000 + 2.33440156631747i$$

$$0.000000000000000 - 2.33440156631747i$$

$$0.000000000000000 + 2.33721244035184i$$

$$0.000000000000000 - 2.33721244035184i$$

$$0.000000000000000 + 2.05624940731919i$$

$$0.000000000000000 - 2.05624940731919i$$

$$0.000000000000000 + 2.05896062858182i$$

$$0.000000000000000 - 2.05896062858182i$$

$$0.000000000000000 + 0.86415899714557i$$

$$0.000000000000000 - 0.86415899714557i$$

$$0.000000000000000 + 0.87117969178285i$$

$$0.000000000000000 - 0.87117969178285i$$

$$0.000000000000000 + 1.57415292985078i$$

$$0.000000000000000 - 1.57415292985078i$$

$$0.000000000000000 + 1.57714454454410i$$

$$0.000000000000000 - 1.57714454454410i$$

$$0.000000000000000$$

$$0.000000000000000$$

E, para $M = 0.2$:

$n = 5$ (cinco primeiros modos)

$$0.0000 + 0.3271i$$

$$0.0000 - 0.3271i$$

0.0000 + 0.9909i

0.0000 - 0.9909i

0.0000 + 1.4391i

0.0000 - 1.4391i

0.0000 + 1.9431i

0.0000 - 1.9431i

0.0000 + 1.7648i

0.0000 - 1.7648i

m= 10 (10 primeiros modos)

0.0000 + 0.8096i

0.0000 - 0.8096i

0.0000 + 1.0230i

0.0000 - 1.0230i

0.0000 + 1.4172i

0.0000 - 1.4172i

0.0000 + 1.6315i

0.0000 - 1.6315i

0.0000 + 1.8161i

0.0000 - 1.8161i

0.0000 + 1.9804i

0.0000 - 1.9804i

0.0000 + 2.0572i

0.0000 - 2.0572i

0.0000 + 2.1826i

0.0000 - 2.1826i

0.0000 + 2.1504i

0.0000 - 2.1504i

0.0000

0.0000

m= 30 (30 primeiros modos)

0.0000 + 0.3667i

0.0000 - 0.3667i

0.0000 + 0.5031i

0.0000 - 0.5031i

0.0000 + 0.7773i

0.0000 - 0.7773i

0.0000 + 0.8872i

0.0000 - 0.8872i

0.0000 + 1.1219i

0.0000 - 1.1219i

0.0000 + 1.2204i

0.0000 - 1.2204i

0.0000 + 1.4002i

0.0000 - 1.4002i

$0.0000 + 0.0000i$

$0.0000 - 0.0000i$

$0.0000 + 1.5041i$

$0.0000 - 1.5041i$

$0.0000 + 1.6305i$

$0.0000 - 1.6305i$

$0.0000 + 1.7317i$

$0.0000 - 1.7317i$

$0.0000 + 1.8176i$

$0.0000 - 1.8176i$

$0.0000 + 1.9045i$

$0.0000 - 1.9045i$

$0.0000 + 1.9623i$

$0.0000 - 1.9623i$

$0.0000 + 2.0310i$

$0.0000 - 2.0310i$

$0.0000 + 2.0695i$

$0.0000 - 2.0695i$

$0.0000 + 2.1216i$

$0.0000 - 2.1216i$

$0.0000 + 2.1470i$

$0.0000 - 2.1470i$

$0.0000 + 2.1856i$

$0.0000 - 2.1856i$

$0.0000 + 2.2024i$

$0.0000 - 2.2024i$

$0.0000 + 2.2306i$

$0.0000 - 2.2306i$

$0.0000 + 2.2417i$

$0.0000 - 2.2417i$

$0.0000 + 2.2623i$

$0.0000 - 2.2623i$

$0.0000 + 2.2698i$

$0.0000 - 2.2698i$

$0.0000 + 2.2848i$

$0.0000 - 2.2848i$

$0.0000 + 2.2898i$

$0.0000 - 2.2898i$

$0.0000 + 2.3139i$

$0.0000 - 2.3139i$

$0.0000 + 2.3114i$

$0.0000 - 2.3114i$

$0.0000 + 2.3014i$

$0.0000 - 2.3014i$

0.0000 + 2.3048i

0.0000 - 2.3048i

m= 10 (modos entre 30 e 39)

0.00000000000000 + 1.04140286707439i

0.00000000000000 - 1.04140286707439i

0.00000000000000 + 1.04998045978505i

0.00000000000000 - 1.04998045978505i

0.00000000000000 + 1.78178352873996i

0.00000000000000 - 1.78178352873996i

0.00000000000000 + 1.78482574601873i

0.00000000000000 - 1.78482574601873i

0.00000000000000 + 2.15437759118370i

0.00000000000000 - 2.15437759118370i

0.00000000000000 + 2.15736723619910i

0.00000000000000 - 2.15736723619910i

0.00000000000000 + 2.28559863017986i

0.00000000000000 - 2.28559863017986i

0.00000000000000 + 2.28841109488605i

0.00000000000000 - 2.28841109488605i

0.00000000000000 + 2.31094984856223i

0.00000000000000 - 2.31094984856223i

0.00000000000000 + 2.31335897250321i

0.0000000000000000 - 2.31335897250321i

0.0000000000000000

0.0000000000000000

Para $M = 0.8$, teremos:

$m=5$ (5 primeiros modos)

0.0000 + 0.2192i

0.0000 - 0.2192i

0.0000 + 2.4541i

0.0000 - 2.4541i

0.0000 + 2.2320i

0.0000 - 2.2320i

0.0000 + 1.5896i

0.0000 - 1.5896i

0.0000 + 1.7465i

0.0000 - 1.7465i

$m=10$ (10 primeiros modos)

0.0000 + 3.3162i

0.0000 - 3.3162i

0.0000 + 3.1829i

0.0000 - 3.1829i

0.0000 + 2.6730i

0.0000 - 2.6730i

0.0000 + 2.5366i

0.0000 - 2.5366i

0.0000 + 1.9557i

0.0000 - 1.9557i

0.0000 + 1.8473i

0.0000 - 1.8473i

0.0000 + 1.5241i

0.0000 - 1.5241i

0.0000 + 1.6856i

0.0000 - 1.6856i

0.0000 + 1.6116i

0.0000 - 1.6116i

0.0000

0.0000

m=30 (30 primeiros modos)

0.0000 + 4.9168i

0.0000 - 4.9168i

0.0000 + 4.8579i

0.0000 - 4.8579i

0.0000 + 4.6372i

0.0000 - 4.6372i

$$0.0000 + 4.6247i$$

$$0.0000 - 4.6247i$$

$$0.0000 + 3.5428i$$

$$0.0000 - 3.5428i$$

$$0.0000 + 3.4912i$$

$$0.0000 - 3.4912i$$

$$0.0000 + 3.4241i$$

$$0.0000 - 3.4241i$$

$$0.0000 + 3.3723i$$

$$0.0000 - 3.3723i$$

$$0.0000 + 2.8077i$$

$$0.0000 - 2.8077i$$

$$0.0000 + 2.7534i$$

$$0.0000 - 2.7534i$$

$$0.0000 + 2.5952i$$

$$0.0000 - 2.5952i$$

$$0.0000 + 2.5438i$$

$$0.0000 - 2.5438i$$

$$0.0000 + 2.2765i$$

$$0.0000 - 2.2765i$$

$$0.0000 + 2.2255i$$

$$0.0000 - 2.2255i$$

0.0000 + 2.1052i

0.0000 - 2.1052i

0.0000 + 2.0625i

0.0000 - 2.0625i

0.0000 + 1.9280i

0.0000 - 1.9280i

0.0000 + 1.8901i

0.0000 - 1.8901i

0.0000 + 1.8184i

0.0000 - 1.8184i

0.0000 + 1.7847i

0.0000 - 1.7847i

0.0000 + 1.5208i

0.0000 - 1.5208i

0.0000 + 1.7175i

0.0000 - 1.7175i

0.0000 + 1.6910i

0.0000 - 1.6910i

0.0000 + 1.6532i

0.0000 - 1.6532i

0.0000 + 1.5646i

0.0000 - 1.5646i

0.0000 + 1.5734i

0.0000 - 1.5734i

0.0000 + 1.5879i

0.0000 - 1.5879i

0.0000 + 1.6016i

0.0000 - 1.6016i

0.0000 + 1.6313i

0.0000 - 1.6313i

0.0000

0.0000

m= 10 (modos entre 30 e 39)

0.0000000000000000 + 4.01627378781699i

0.0000000000000000 - 4.01627378781699i

0.0000000000000000 + 4.02985524789160i

0.0000000000000000 - 4.02985524789160i

0.0000000000000000 + 3.4199776490559i

0.0000000000000000 - 3.4199776490559i

0.0000000000000000 + 3.41578957598279i

0.0000000000000000 - 3.41578957598279i

0.0000000000000000 + 2.25930012105492i

0.0000000000000000 - 2.25930012105492i

0.0000000000000000 + 2.26028170207694i

0.0000000000000000 - 2.26028170207694i

0.0000000000000000 + 1.86656574801981i

0.0000000000000000 - 1.86656574801981i

0.0000000000000000 + 1.86567639413769i

0.0000000000000000 - 1.86567639413769i

0.0000000000000000 + 1.62846277683567i

0.0000000000000000 - 1.62846277683567i

0.0000000000000000 + 1.62800672615778i

0.0000000000000000 - 1.62800672615778i

0.0000000000000000

0.0000000000000000

E, finalmente, para $M = 0.9$:

$m=5$ (5 primeiros modos)

0.0000 + 2.7878i

0.0000 - 2.7878i

0.0000 + 2.4708i

0.0000 - 2.4708i

0.0000 + 0.1807i

0.0000 - 0.1807i

0.0000 + 1.5930i

0.0000 - 1.5930i

0.0000 + 1.7222i

0.0000 - 1.7222i

m=10 (10 primeiros modos)

0.0000 + 4.2483i

0.0000 - 4.2483i

0.0000 + 3.9921i

0.0000 - 3.9921i

0.0000 + 2.8181i

0.0000 - 2.8181i

0.0000 + 2.6567i

0.0000 - 2.6567i

0.0000 + 1.9548i

0.0000 - 1.9548i

0.0000 + 1.8327i

0.0000 - 1.8327i

0.0000 + 1.6441i

0.0000 - 1.6441i

0.0000 + 1.4861i

0.0000 - 1.4861i

0.0000 + 1.5532i

0.0000 - 1.5532i

0.0000

0.0000

m=30 (30 primeiros modos)

$$0.0000 + 7.2418i$$

$$0.0000 - 7.2418i$$

$$0.0000 + 7.1988i$$

$$0.0000 - 7.1988i$$

$$0.0000 + 6.3767i$$

$$0.0000 - 6.3767i$$

$$0.0000 + 6.2629i$$

$$0.0000 - 6.2629i$$

$$0.0000 + 4.4509i$$

$$0.0000 - 4.4509i$$

$$0.0000 + 4.3424i$$

$$0.0000 - 4.3424i$$

$$0.0000 + 3.6971i$$

$$0.0000 - 3.6971i$$

$$0.0000 + 3.6251i$$

$$0.0000 - 3.6251i$$

$$0.0000 + 2.9851i$$

$$0.0000 - 2.9851i$$

$$0.0000 + 2.9141i$$

$$0.0000 - 2.9141i$$

$$0.0000 + 2.5990i$$

0.0000 - 2.5990i

0.0000 + 2.5448i

0.0000 - 2.5448i

0.0000 + 2.2634i

0.0000 - 2.2634i

0.0000 + 2.2129i

0.0000 - 2.2129i

0.0000 + 2.0547i

0.0000 - 2.0547i

0.0000 + 2.0082i

0.0000 - 2.0082i

0.0000 + 1.8734i

0.0000 - 1.8734i

0.0000 + 1.8331i

0.0000 - 1.8331i

0.0000 + 1.7538i

0.0000 - 1.7538i

0.0000 + 1.7158i

0.0000 - 1.7158i

0.0000 + 1.6518i

0.0000 - 1.6518i

0.0000 + 1.6214i

0.0000 - 1.6214i

0.0000 + 1.5842i

0.0000 - 1.5842i

0.0000 + 1.5580i

0.0000 - 1.5580i

0.0000 + 1.4778i

0.0000 - 1.4778i

0.0000 + 1.5311i

0.0000 - 1.5311i

0.0000 + 1.4902i

0.0000 - 1.4902i

0.0000 + 1.4998i

0.0000 - 1.4998i

0.0000 + 1.5138i

0.0000 - 1.5138i

0.0000

0.0000

m=10 (modos entre 30 e 39)

0.0000000000000000 + 5.63618091494766i

0.0000000000000000 - 5.63618091494766i

0.0000000000000000 + 5.65560490564521i

0.0000000000000000 - 5.65560490564521i

0.0000000000000000 + 3.63216354542612i
0.0000000000000000 - 3.63216354542612i
0.0000000000000000 + 3.62964830355149i
0.0000000000000000 - 3.62964830355149i
0.0000000000000000 + 2.25387445275070i
0.0000000000000000 - 2.25387445275070i
0.0000000000000000 + 2.25331838179370i
0.0000000000000000 - 2.25331838179370i
0.0000000000000000 + 1.79269734619847i
0.0000000000000000 - 1.79269734619847i
0.0000000000000000 + 1.79208465971845i
0.0000000000000000 - 1.79208465971845i
0.0000000000000000 + 1.55059361825307i
0.0000000000000000 - 1.55059361825307i
0.0000000000000000 + 1.55034521800589i
0.0000000000000000 - 1.55034521800589i
0.0000000000000000
0.0000000000000000

Apêndice F. CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

F.1 Geometria diferencial

Nas seções 3.2 e 3.3 falamos sobre a teoria de calibre e o colchete de Lie. Gostaríamos aqui de, através da geometria diferencial, relacionar ambos os conceitos. Para isso, faremos referência ao livro de Choquet-Bruhat, *et al.*, [C2].

Os pioneiros em micronatação (Blake, Lighthill e Purcell, entre outros) não se preocuparam em construir um arcabouço geométrico que sustentasse suas conclusões. Fisicamente consistentes e empiricamente comprovadas, as respostas que nos dão os citados autores sugerem a continuidade deste estudo.

O trabalho de Shapere e Wilczek [S1] vem de encontro a estes anseios. A teoria de calibre proposta por eles permite uma visualização geométrica do movimento de um microorganismo através de um fluido devido a deformações em sua membrana.

Os autores consideram o espaço \mathcal{Q} como o espaço que contém todos os formatos possíveis do microorganismo, em todas as possíveis posições no fluido.

O espaço \mathcal{S} , quociente de \mathcal{Q} , é definido como sendo composto por todas as possíveis formas assumidas pela membrana de nosso nadador, independentemente de sua localização.

Resumidamente, podemos dizer que temos:

\mathcal{Q}	Espaço total
\mathcal{S}	Base (fibrado principal)
G	Grupo
\mathcal{G}	Álgebra de Lie
$x \in \mathcal{G} \rightarrow e^x \in G$	Aplicação exponencial

O sistema de coordenadas utilizado, em \mathcal{S} , será denotado por $\{s_1, \dots, s_m\}$ e, observando que não há uma seção local que possa ser considerada canônica ou natural (resultando, assim, na importância da teoria de calibre aqui aplicada), a seção local para \mathcal{Q} será $q = q(s)$. A parametrização correspondente para \mathcal{Q} é $(s, x) \rightarrow e^x \cdot q(s)$.

Localmente, podemos escrever o levantamento horizontal dos campos $\partial_j = \frac{\partial}{\partial s_j}$ como:

$$H_j = \frac{\partial}{\partial s_j} + b^j(s) \cdot q(s) \quad ,$$

onde as matrizes $b^j(s)$ pertencem à álgebra de Lie (\mathcal{G}).

Estes levantamentos podem ser estendidos como campos vetoriais para um aberto em \mathcal{Q} se tomarmos $e^{x*} \cdot H_j$, onde o asterisco representa uma derivada.

Aqui já podemos atentar que se denotarmos por A a 1-forma da conexão, temos

$$A \left(\frac{\partial}{\partial s_j} \right) = -b^j(s) \quad ,$$

pois $A(H_j) = 0$ por construção.

Vamos agora calcular o colchete de Lie para dois campos assim construídos:

$$[e^{x^\bullet} \cdot H_j, e^{x^\bullet} \cdot H_k]_{q(s)} = [H_j, H_k]_{e^{x^\bullet} q(s)} = e^{x^\bullet} [H_j, H_k]_{q(s)} \quad .$$

Podemos fazer a conta apenas em $q(s)$:

$$[\partial_j + b^j q, \partial_k + b^k q] = [\partial_j, \partial_k] + [\partial_j, b^k q] + [b^j q, \partial_k] + [b^j q, b^k q] \quad .$$

O primeiro termo evidentemente é nulo. Usando as fórmulas do comutador em coordenadas ([C2], pág. 134), obtemos (pertencente ao espaço tangente à fibra)

$$[H_j, H_k] = \sum_{\ell} \left(\partial_j b_{\ell}^k(s) - \partial_k b_{\ell}^j(s) \right) \frac{\partial}{\partial x_{\ell}} + \left[b^j(s) \frac{\partial}{\partial x}, b^k(s) \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad ,$$

onde o último termo representa o comutador na álgebra de Lie.

Resumidamente, temos a seguinte relação:

$$[H_j, H_k] = \partial_j b^k - \partial_k b^j + [b^j, b^k] \in \mathcal{G} \quad ,$$

que pode ser vista em [C2], pág. 375, ainda que escrita em outros termos (partindo-se da equação estrutural de Cartan).

Aqui, podemos já vislumbrar uma interpretação física: varrendo um retângulo infinitesimal no espaço dos formatos nas direções $j, k, -j, -k$, nos deslocamos em \mathcal{Q} na direção vertical, infinitesimalmente, por:

$$\partial_j b^k - \partial_k b^j + [b^j, b^k] \in \mathcal{G} \quad .$$

Por fim, se denotarmos por F a curvatura da conexão, temos

$$F \left(\frac{\partial}{\partial s_j}, \frac{\partial}{\partial s_k} \right) = -A \left(\frac{\partial}{\partial s_j}, \frac{\partial}{\partial s_k} \right) = -\partial_j b^k + \partial_k b^j - [b^j, b^k] \quad .$$

F.2 Força e torque nulos

Na seção 3.2, pág. 14, falamos que o campo de velocidades correto é obtido de uma família de campos vetoriais através de uma imposição adicional puramente física: o organismo não pode exercer força ou torque líquidos sobre o fluido.

Este aparente paradoxo, a existência de movimento na ausência de forças, já era esperado, visto que estamos no limite aristotélico onde não há inércia. Gostaríamos aqui de tentar esclarecer um pouco melhor esta questão através de dois argumentos distintos.

F.2.1 Mecânica do contínuo

Considere um microorganismo \mathcal{M} nadando em um ambiente \mathcal{F} . As equações do movimento são obtidas via leis de balanço para o meio contínuo composto $\mathcal{M} \cup \mathcal{F}$.

O balanço de forças resulta nas equações, onde σ é o tensor das tensões,

$$\nabla \sigma_f = \rho_f \dot{v}_f, \quad \nabla \sigma_m = \rho_m \dot{v}_m$$

válidas no interior do microorganismo \mathcal{M} (índice m) e no interior do fluido \mathcal{F} (índice f), respectivamente.

Para o balanço de forças na interface fluido-microorganismos ($\partial\mathcal{M}$) temos

$$\sigma \cdot \hat{n} = (\sigma_f - \sigma_m) \cdot \hat{n} = 0.$$

Desprezando a inércia do microorganismo (que aqui podemos chamar de uma mera inclusão no fluido), segue que $\nabla \sigma_m = 0$, donde, pelo teorema da divergência, concluímos que

$$\int \sigma_m \cdot \hat{n} = 0.$$

Usando a relação na equação de balanço de forças na fronteira segue que

$$\int \sigma_f \cdot \hat{n} = 0,$$

que nada mais é que a força F . O argumento para o torque é similar.

Observe que na verdade não foi necessário assumir que o meio era fluido. Bastou apenas desprezar a inércia da inclusão (microorganismo).

F.2.2 Mecânica de partículas

Consideremos um sistema lagrangeano descrito por coordenadas generalizadas q, Q , onde q descreve o “organismo” e Q o meio externo.

Por simplicidade usamos coordenadas cartesianas. Denotemos os potenciais

$$V_{\text{org}}(q), \quad V_{\text{meio}}(Q), \quad V_{\text{int}}(q, Q).$$

Assim, podemos escrever as equações de movimento:

$$mq'' = -\nabla_q V_{\text{org}}(q) - \nabla_q V_{\text{int}}(q, Q)$$

$$MQ'' = -\nabla_Q V_{\text{meio}}(Q) - \nabla_Q V_{\text{int}}(q, Q)$$

A notação envolve multi-índices e/ou adaptação para meios contínuos.

Desprezando a inércia do organismo, a primeira equação se torna um vínculo entre q e Q :

$$\nabla_q V_{\text{org}}(q) = -\nabla_q V_{\text{int}}(q, Q)$$

Sabemos, dos fundamentos da mecânica, que as forças $V_{q_i}(q)$ entre os elementos constituintes do organismo satisfazem seis relações dadas pelas condições de força e torque totais zero. Isto ocorre se assumimos que o potencial interno $V_{\text{org}}(q)$ é invariante por translações e rotações (e.g., se dependem das distâncias mútuas entre os elementos do organismo).

Tendo em vista o vínculo dado acima, estas condições valem também para as forças que o organismo exerce sobre o meio:

$$\sum_{q_i} V_{q_i}(q, Q) = 0, \quad \sum_{q_i} q_i \times V_{q_i}(q, Q) = 0.$$

F.3 Um problema isoperimétrico

Na seção 3.5 deste trabalho as equações de Euler-Lagrange foram utilizadas para obter um problema matricial cujos autovalores seriam justamente as eficiências dos diferentes “estilos” de natação. Pretende-se aqui mostrar que a matemática deste problema específico já foi muito bem estudada. Para isso, um bom livro de cálculo das variações pode ser consultado. Nesta seção faz-se referência a Sagan [S3], capítulo 6.

Em 1744, Leonard Euler formulou o *problema isoperimétrico* geral como sendo um caso particular do mais abrangente problema de Lagrange de cálculo das variações.

Nesta particularização, quer-se achar uma função vetorial (y_1, \dots, y_m) que minimize o funcional

$$I[y_1, \dots, y_m] = \int_a^b f[x, y_1(x), \dots, y_m(x), y_1'(x), \dots, y_m'(x)] dx \quad ,$$

que satisfaz as condições iniciais

$$y_i(a) = y_i^a \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

e as condições finais

$$y_i(b) = y_i^b \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad ,$$

e nos dê

$$\int_a^b f_1[x, y_1(x), \dots, y_m(x), y_1'(x), \dots, y_m'(x)] dx = l_1$$

⋮

$$\int_a^b f_\mu [x, y_1(x), \dots, y_m(x), y_1'(x), \dots, y_m'(x)] dx = l_\mu \quad ,$$

onde l_1, \dots, l_μ são números⁹.

Visto que é um caso particular de um problema mais genérico, podemos usar um arsenal desenvolvido para o problema de Lagrange em nossa abordagem ao problema isoperimétrico. Em particular, vamos introduzir uma função

$$y_0(x) = \int_a^x f [t, y_1(t), \dots, y_m(t), y_1'(t), \dots, y_m'(t)] dt \quad .$$

Visto que

$$y_0' = f(t, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m') \quad , \quad y_0(a) = 0 \quad ,$$

$$y_0(b) = \int_a^b f [x, y_1(x), \dots, y_m(x), y_1'(x), \dots, y_m'(x)] dx \quad ,$$

⁹No problema generalizado de Lagrange estas últimas integrais são substituídas por um sistema sub-determinado de equações diferenciais :

$$\varphi_1(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m') = 0$$

⋮

$$\varphi_\mu(x, y_1, \dots, y_m, y_1', \dots, y_m') = 0$$

$$\mu < m \quad .$$

O problema isoperimétrico nada mais é do que um problema de Lagrange cujas equações de vínculo já foram resolvidas explicitamente para y_1', \dots, y_μ' .

podemos reformular nosso problema de Lagrange.

Queremos encontrar uma função vetorial $(m + 1)$ -dimensional

$$\hat{y} = [y_0(x), \dots, y_m(x)] \quad .$$

que seja solução para o sistema de $\mu + 1$ equações diferenciais

$$y'_0 - f(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m) = 0$$

$$\varphi_1(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m) = 0$$

$$\varphi_\mu(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m) = 0 \quad ,$$

satisfazendo as condições iniciais $y_0(a) = 0$, $y_i(a) = y_i^a$ ($i = 1, 2, \dots, m$) e as condições finais $y_i(b) = y_i^b$ ($i = 1, 2, \dots, m$) e que $y_0(b)$ seja um mínimo.

A fim de uniformizar nossa notação, podemos substituir a primeira das equações diferenciais acima por

$$\varphi_0(x, y_1, \dots, y_m, y'_0, \dots, y'_m) = 0 \quad ,$$

o que nos permite definir a função vetorial $\hat{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_\mu)$.

Assim, o que queremos é encontrar uma função vetorial $\hat{y}(x)$ que satisfaça às equações diferenciais $\hat{\varphi}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 0$, com condições iniciais $\hat{y}(a) = \hat{y}^a$ e finais $\hat{y}(b) = \hat{y}^b$ tais que $y_0(b)$ seja um mínimo. Assim formulado, este problema é conhecido como problema de Mayer.

Uma boa interpretação geométrica para este problema é considerarmos que a curva $\hat{y} = \hat{y}(x)$, no espaço x, \hat{y} , satisfazendo $\hat{\varphi}(x, \hat{y}, \hat{y}') = 0$, começa no ponto $[a, \hat{y}(a)] = (a, 0, y_1^a, \dots, y_n^a)$ e termina com a menor coordenada y_0 possível em uma linha L através de $(b, 0, y_1^b, \dots, y_n^b)$ paralela ao eixo y_0 .

Sagan ([S3], pág. 332) retrata, em seu teorema 6.2, a regra do multiplicador (de Lagrange) para o problema de Mayer. Ele diz que para $\hat{y} = \hat{y}(x) \in C_{sP}^1[a, b]^{n+1}$ que satisfaça

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y'_k} \right) = \mu + 1 \quad \forall x \in [a, b] \quad ,$$

com $\nu = 0, 1, \dots, \mu$ e $k = 0, 1, \dots, n$, é necessário que exista uma função vetorial $(\mu + 1)$ -dimensional

$$\hat{\lambda} = [\lambda_0(x), \dots, \lambda_\mu(x)] \neq (0, \dots, 0), \quad \hat{\lambda} \in C_{sP}[a, b] \quad ,$$

tal que $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(x)$ juntamente com $\hat{y} = \hat{y}(x)$ satisfaçam — também com as equações de vínculo — as $n + 1$ equações

$$h_{y'_k}[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x), \hat{\lambda}(x)] = \int_a^x h_{y'_k}[s, \hat{y}(s), \hat{y}'(s), \hat{\lambda}(s)] ds + C_k$$

com $k = 0, 1, \dots, n$, para certas constantes C_0, \dots, C_n em todos os pontos exceto onde $\hat{y}' = \hat{y}'(x)$ apresentar uma descontinuidade.

Podemos aplicar este teorema ao problema de Lagrange, reescrevendo-o como:

Se $(y_1, \dots, y_n) \in C_{sP}^1[a, b]^n$ é uma solução do problema de Lagrange e se as

condições

$$\text{rank} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y'_k} \right) = \mu$$

e

$$f, \varphi_1, \dots, \varphi_\mu \in C^1(\mathcal{D}_1)$$

(onde $\mathcal{D}_1 = \{(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_n) | a \leq x \leq b, -\infty < y_i < \infty, -\infty < y'_i < \infty, i = 1, 2, \dots, n\}$) são satisfeitas, então é necessária a existência de uma função vetorial $\hat{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_\mu) \neq (0, \dots, 0)$, $\hat{\lambda} \in C_{sp}[a, b]^{\mu+1}$, $\lambda_0 = \text{constante}$ tal que, além das equações de vínculo, as equações

$$h_{y'_k}^L[x, y_i(x), y'_i(x), \hat{\lambda}(x)] = \int_a^x h_{y'_k}^L[t, y_i(t), y'_i(t), \hat{\lambda}(y)] dt + C_k$$

com $i, k = 1, \dots, n$, são satisfeitas para certas constantes C_k .

Sagan tece vários comentários a respeito deste problema mas podemos aqui ir direto ao seu teorema 6.5 (pág. 342). Ali, vemos que para que $(y_1, \dots, y_m) \in C^1[a, b]^m$ seja uma solução do problema isoperimétrico como inicialmente formulado nesta seção, é necessário que exista $\mu + 1$ constantes $(\lambda_0, \dots, \lambda_\mu) \neq (0, \dots, 0)$ de modo que

$$h_{y'_k}^I(x, y_i, y'_i, \hat{\lambda}) - \frac{d}{dx} h_{y'_k}^I(x, y_i, y'_i, \hat{\lambda}) = 0$$

com $i, k = 1, \dots, m$ e

$$h^I(x, y_i, y'_i, \hat{\lambda}) = \lambda_0 f(x, y_i, y'_i) + \sum_{\rho=1}^{\mu} \lambda_\rho f_\rho(x, y_i, y'_i)$$

Agora sim podemos nos reportar ao nosso problema original, bastando entender que os y são nossos q (e, portanto, os y' são os \dot{q}) e o x é o nosso t . Como temos um único vínculo, nosso μ vale um. Aonde Sagan ([S3],pág. 340) escreve

$$\int_a^b f_\rho(x, y_i, y'_i) dx = l_\rho$$

nós temos nosso familiar

$$\int \mathcal{F} dt = X .$$

Sendo o nosso problema um problema isoperimétrico, fica fácil entender porque não aparece, nas equações de movimento, uma derivada sequer do multiplicador de Lagrange.

BIBLIOGRAFIA

- [A1] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*.
Second edition, Springer-Verlag.
- [B1] Batchelor, G.K. *An introduction to fluid mechanics*.
Cambridge University Press (1970).
- [B2] Blake, J. R. *A spherical envelope approach to ciliary propulsion*.
J. Fluid Mechanics , **6**, parte 1, 199–208 (1971).
- [C1] Cooke, J. *The restless kingdom*. Facts on File (1991)
- [C2] Choquet-Bruhat, Y; DeWitt-Morette, C.; Dillard-Beck, M.
Analysis, manifolds and physics.
North-Holland (1987).

- [E1] Ehlers, K.; Samuel, A.; Berg, H.; Montgomery, R.
Do cyanobacteria swim using traveling surface waves?
Proc. Nat. Acad. Sci., **93**, 8340–8343 (1996)
- [E2] Ehlers, K. *The geometry of swimming at low Reynolds number.*
Em preparação (1998).
- [F1] Farina, M; Esquivel, D.M.S.; Lins de Barros, H.G.P.
Magnetic iron-sulphur crystals from a magnetotactic microorganism.
Nature **343**, 6255, 256–258 (1990).
- [K1] Koiller, J. *Microbiofluidodinâmica.*
Minicurso a ser ministrado no XXI CNMAC.
- [K2] Koiller, J.; Ehlers, K.; Montgomery, R.
Problems and progress in microswimming.
J. Nonlinear Science, **6**, 507–541 (1996).

- [K3] Koiller, J.; Raupp, M.A.; Delgado, J.; Ehlers, K.
Spectral methods for Stokes flows. Comp. Appl. Math., a aparecer (1998).
- [K4] Koiller, J.; Delgado, J. *On efficiency calculations for nonholonomic locomotion systems*. Reports Math. Physics, a aparecer (1998).
- [L1] Lighthill, J.M. *On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds number*.
Commun. Pure Appl. Math., **5**, 109–118 (1952).
- [M1] Muskhelishvili, N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*.
P. Noordhoff, Groningen-Holland (1953).
- [P1] Purcell, E.M. *Life at low Reynolds number*.
American Journal of Physics, **45**, número 1, 3–11 (1977).
- [S1] Shapere, A.; Wilczek, F. *Geometry of self-propulsion at low Reynolds number*.
J. Fluid. Mechanics **198**, 557–585 (1989).

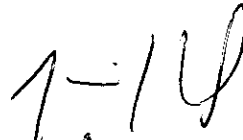
[S2] Shapere, A.; Wilczek, F. *Efficiencies of self-propulsion at low Reynolds number*.
J. Fluid Mechanics **198**, 587–599 (1989).

[S3] Sagan, H. *Introduction to the calculus of variations*.
Dover Publications, Inc., Nova Iorque (1969).

**“EFICIÊNCIA DE UM MICRONADADOR ELÍPTICO EM
DUAS DIMENSÕES”**

Alexandre Cherman

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

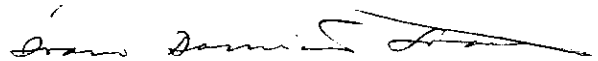


Jair Koeller - Presidente



Fernando Pereira Duda

Fernando Pereira Duda



Ívano Damião Soares



José Abdalla Helayel-Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 25 de agosto de 1998