

TESE DE  
DOUTORADO

**TEORIA DE PERTURBAÇÕES  
NO UNIVERSO DE  
SCHWARZSCHILD**

**Renato Klippert Barcellos**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, 27 DE FEVEREIRO DE 1998

# Dedicatória

Aos tão queridos familiares e amigos, por me terem ensinado

*I WALK THE MAZE OF MOMENTS  
BUT EVERYWHERE I TURN TO  
BEGINS A NEW BEGINNING  
BUT NEVER FINDS A FINISH;*

*I WALK TO THE HORIZON  
AND THERE I FIND ANOTHER  
IT ALL SEEMS SO SURPRISING  
AND THEN I FIND THAT I KNOW.*

*ENYA, fragmento de ANYWHERE IS*

# Agradecimentos

- A Mário Novello, o chefe, pela orientação do presente trabalho, pelo estímulo que representa sua própria maneira de ser e, sobretudo, pelo carinhoso laço de amizade com que habilmente cativa seus alunos;
- A Maria Luiza Klippert, Luiz Klippert Barcellos, Marina Martins Barcellos e Claire Heck, os familiares, pelo carinho e apoio à continuidade deste trabalho, e cuja distância paradoxalmente os aproxima;
- A Vitorio Alberto De Lorenci e Marcelo Costa de Lima, os fiéis companheiros. *meus colegas de copo e de cruz*, pela valiosa troca de realizações que me proporcionaram;
- A José Martins Salim, Martha Christina Motta da Silva e Sandra Liliana Sautú, os colegas, pelas preciosas fatias que me roubaram do coração;
- A Myriam Simões Coutinho, Simone Santana Franco e Sônia Ribeiro da Silva Ferreira, as secretárias, pelos infindáveis auxílios e gentilezas;
- A Clara e Hannah, as crianças, pela graça e esperança que representam;
- A Júlio Cesar Neves Pessanha e Carolina Ninô Curi Kachan, grandes amigos, pelo exemplo de vida que proporcionam a quem os tenha conhecido;
- Aos familiares daqueles acima, que me são tão caros, e ainda que não citados explicitamente (por uma injustificável economia de espaço), não os poderia esquecer;
- Aos demais amigos, que embora perdidos no tempo, não foram perdidos da lembrança;
- Ao CNPq, pelo financiamento deste trabalho.

# Resumo

## Teoria de Perturbações no Universo de Schwarzschild

O estudo das perturbações lineares via o formalismo das Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação foi recentemente aplicado à estabilidade do modelo cosmológico padrão de Friedmann [1]. Desde a introdução dessa representação da teoria de Einstein [2], todavia, nenhuma aplicação parece ter sido feita visando a análise de modelos não-conformalmente planos.

O presente trabalho utiliza esse formalismo para obter soluções livres do problema de gauge, e geometricamente equivalente àquela obtida pelo método usual de expansão das perturbações do tensor métrico (ver [3]). O método aqui adotado, contudo, explicita a possibilidade de existência de modos instáveis, contrariamente ao usualmente aceito [4].

Obtem-se ainda uma descrição Hamiltoniana alternativa para a solução clássica das equações de Einstein, sugerindo que outras estruturas perturbativas distintas possam ser também consideradas; ou ainda permitindo uma nova abordagem do problema da energia gravitacional.

# Summary

## **Perturbation Theory on Schwarzschild Universe**

The study of linear perturbations by means of the Quasi-Maxwellian Equations of Gravitation was recently applied to the stability of Friedmann cosmological standard model [1]. Since the introduction of such a representation of Einstein theory [2], however, no use of it seems to be already done in order to analyse non-conformally flat models.

This work makes use of that formalism looking for solutions which do not suffer the gauge problem and are geometrically equivalent to those obtained by the usual method of expanding perturbations on the metric tensor (see [3]). However, the present method allows room for unstable modes, contrary to usual acceptance [4].

We also get an alternative Hamiltonian description for the classical solution of Einstein equations, suggesting that other distinct perturbative structures could also be considered; or even allowing for a new approach to the problem of gravitational energy.

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| Dedicatória . . . . .                                 | i         |
| Agradecimentos . . . . .                              | ii        |
| Resumo . . . . .                                      | iii       |
| Abstract . . . . .                                    | iv        |
| Índice . . . . .                                      | v         |
| <br>  |           |
| Notação e convenções . . . . .                        | vii       |
| <br>  |           |
| Introdução . . . . .                                  | 1         |
| <br>  |           |
| <b>1 A Geometria de Schwarzschild . . . . .</b>       | <b>6</b>  |
| 1.1 Interpretação Física da Congruência . . . . .     | 9         |
| 1.2 Formulação Hamiltoniana . . . . .                 | 10        |
| 1.2.1 Geometria de Reissner-Nordström . . . . .       | 13        |
| <br>  |           |
| <b>2 Teoria das Perturbações . . . . .</b>            | <b>15</b> |
| <br>  |           |
| <b>3 A Escolha da Base . . . . .</b>                  | <b>22</b> |
| 3.1 A Base Tensorial . . . . .                        | 24        |
| 3.1.1 A Forma Geral da Base Tensorial . . . . .       | 27        |
| 3.1.2 A Base Tensorial Restrita . . . . .             | 31        |
| <br>  |           |
| <b>4 Perturbações Escalares e Vetoriais . . . . .</b> | <b>36</b> |
| <br>  |           |
| <b>5 Perturbações Tensoriais . . . . .</b>            | <b>38</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.1      | Limites Assintóticos . . . . .  | 43        |
| 5.2      | Uma Solução Particular . . . . .  | 45        |
| 5.3      | Perturbações Tensoriais Induzidas em Variáveis Dependentes de Calibre . . | 47        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>49</b> |
| <b>A</b> | <b>As Equações Quasi-Maxwellianas</b>                                     | <b>52</b> |
|          | <b>Referências</b>  | <b>55</b> |

# Notação e convenções

1. Todo Universo considerado nesse trabalho é suposto uma variedade diferenciável métrica Riemanniana 4-dimensional, descrita por um tensor métrico compatível com a Teoria da Relatividade Geral (TRG) — isto é, tal que seja simétrico, não degenerado e de assinatura Lorentziana negativa  $(-2)$ .
2. Todas as perturbações consideradas neste trabalho serão supostas de origem geométrica (isto é, não analisaremos eventuais perturbações de caráter topológico).
3. Utilizaremos unidades geométricas por simplicidade de notação, de forma que

$$8\pi G = c = 1$$

4. Utilizaremos amplamente o sistema de coordenadas [5] esférico-polares ortogonais  $(t, r, \Theta, \varphi)$ , definidas na região aberta

$$t \in (-\infty, +\infty)$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\Theta \in (0, \pi)$$

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

A origem espacial  $r = 0$  não é incluída na variedade. Para grande parte das aplicações será necessário restringir o domínio da variável radial para a região externa ao horizonte de eventos.

5. O presente trabalho tem por tema o estudo da geometria externa a uma distribuição de matéria estática, esfericamente simétrica e compacta. A solução das equações da TRG para este caso, denominada solução de Schwarzschild [6], assume uma massa total Newtoniana  $M$ , localizada por simplicidade na origem do sistema de coordenadas. Em torno desta (embora não necessariamente em seu exterior) está presente um horizonte de eventos, definido pela região  $r = r_S$  onde  $r_S \stackrel{\text{def}}{=} 2M$ .
6. Índices gregos ( $\alpha, \beta \dots = 0, 1, 2, 3$ ) são utilizados em componentes de tensores em base de coordenadas.
7. Simetrização e anti-simetrização de tensores
- (a) Parêntesis (“(”, “)”) em torno de dois ou mais índices indicam a componente completamente simétrica do tensor (ou simetrização) com respeito aos referidos índices;
- (b) Colchetes (“[”, “]”) em torno de dois ou mais índices indicam a componente completamente anti-simétrica (ou anti-simetrização) com respeito aos mesmos;
- (c) O fator combinatório  $1/n!$  está sempre incluído na convenção de simetria, onde  $n$  é posto (número de índices) envolvido pela operação. Por exemplo

$$\Gamma^\alpha_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2!}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu}).$$

## 8. Derivadas

- (a) A derivada simples (parcial ou  $\partial$ ), na notação de Einstein, é usualmente denotada pelo símbolo “,” seguido do respectivo índice;
- (b) As derivações covariantes relativas ao espaço perturbado e de background são ambas denotadas (quando não houver ambigüidade) pelo símbolo “:” ou  $\nabla$  seguido do índice da derivada;
- (c) A derivada covariante de um objeto, projetada na direção da congruência fundamental (espacial, conforme Cap. 1)  $n^\mu$ , é denotada por um ponto (“.”) sobre

o objeto:

(d) A derivada covariante relativa ao espaço-tempo tridimensional do background é denotada por  $\parallel$  ou  $\hat{\nabla}$  seguido do índice de derivação.

9. Adotaremos os nomes de expansão, deformação (ou “shear”), vorticidade, aceleração, componentes elétrica e magnética do tensor de Weyl como igualmente válidos para grandezas análogas construídas a partir de congruências matemáticas (tal como  $n$ ) que não representam um (possível) observador físico. Assim, sua interpretação requererá um certo cuidado adicional.
10. Utilizaremos no apêndice os símbolos  $\pm$  e  $\mp$  de duplo sinal: o sinal superior, relativo à notação de Ellis [7], será assumido quando de sua utilização no capítulo 2 ( $n_\alpha$  não é tipo-tempo); o sinal inferior corresponde àquele usualmente assumido para a assinatura negativa, aqui adotada.
11. O símbolo  $\cong$  denota a avaliação formal da expressão precedente sobre a geometria de fundo adotada (Schwarzschild).
12. O símbolo  $\approx$  assume, no capítulo 1, o significado de ‘igualdade fraca’ do contexto de sistemas vinculados. No restante do trabalho será utilizado denotando um resultado aproximado.
13. Com freqüência denotaremos a completa contração de dois tensores de *rank* (ou posto) 2 na forma abreviada, como em  $\sigma : E \equiv \sigma^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}$ .
14. Utilizaremos com freqüência o símbolo  $\perp$  para denotar a projeção completa (isto é, em todos os índices tensoriais) — por meio do projetor  $h^\alpha_\beta \equiv \delta^\alpha_\beta + n^\alpha n_\beta$ , conforme Eq. (1.4) — das componentes dos objetos geométricos a que precede. Assim, por exemplo,  $\perp T_{\mu\nu} = h^\alpha_\mu h^\beta_\nu T_{\alpha\beta}$ .
15. O operador de Laplace-Beltrami de  $\Sigma_r$ ,  $\hat{\nabla}^2$ , atuando sobre vetores, é definido por

$$\hat{\nabla}^2 A_\epsilon \equiv h^\tau_\epsilon h^{\alpha\beta} \nabla_\alpha h^\lambda_r h^\nu_\beta \nabla_\nu A_\lambda$$

16. No capítulo 5 utilizaremos os símbolos  $\mathbb{1}$  denotando a matriz identidade com dimensões apropriadas (3 no caso da solução em 5.1) e  $M_{\odot}$  significando o valor atual da massa solar.

# Introdução

A teoria de perturbações, tal como o cálculo variacional, é uma das ferramentas mais largamente utilizadas na física. Sua aplicação à Teoria da Relatividade Geral (TRG), como forma de analisar a estabilidade de modelos da gravitação e da cosmologia, deve sua formulação mais natural ao trabalho pioneiro de Lifshitz e Khalatnikov [8], introduzindo a noção de perturbações  $\delta g_{\mu\nu}$  em uma geometria conhecida  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Neste trabalho já estava claro que certas complicações adicionais estavam presentes devido a presença de modos de calibre, perturbações na métrica passíveis de serem removidas por uma transformação de coordenadas. Os autores propuseram um método de eliminar estes modos do resultado *a posteriori* pelo conhecimento da forma explícita das transformações de coordenadas relevantes para o modelo dado (cosmologia de Friedmann).

Embora eficaz, esta solução não é prática para ser desenvolvida em um modelo genérico, dado que inclui os modos indesejáveis no cálculo para suprimi-los no resultado. Além disso não é claro que a solução esteja livre de outros modos de calibre, não reconhecidos inicialmente. Esta crítica aplica-se, em maior ou menor grau, aos trabalhos que são atualmente desenvolvidos com base em técnicas de calibre fixo. Embora uma observação efetiva (genérica) requeira de fato um calibre, tal não se deve à estrutura perturbativa, mas ao modo como a observação é realizada.

Para dar conta desta questão foi introduzido o formalismo invariante de calibre [9], ainda num contexto cosmológico. Para tanto obtém-se, por meios pouco algorítmicos, certas combinações escalares (denominadas *variáveis de Bardeen*) que, quando sujeitas a transformações de calibre, mantêm-se invariantes (em primeira ordem). Tais variáveis

representariam então o verdadeiro conteúdo perturbativo da solução.

A solução de Bardeen, no entanto, não é satisfatória do ponto de vista de uma teoria geométrica, por requerer o reconhecimento das transformações de calibre *a priori*. Ademais, supõe que modos de calibre de ordem superior não acoplam com os modos “reais” de primeira ordem. Além disso, as expressões para tais variáveis dependem da geometria de base (fundo, ou *background*) de uma forma não compreendida.

A análise da estabilidade da geometria de Schwarzschild utiliza usualmente o método de Lifshitz, e sua referência teórica é o trabalho de Regge e Wheeler [10]. Neste os autores analisam a decomposição espectral das perturbações lineares em termos de dois modos fundamentais, chamados “pares” e “ímpares”, mostrando que essa geometria é estável<sup>1</sup>. Uma grande dificuldade deste trabalho reside no uso explícito do sistema de coordenadas esférico-polares de Schwarzschild, o qual apresenta uma singularidade não-essencial no horizonte de eventos. A solução deste problema foi esboçada por Vishveshwara [4] por meio de uma conveniente transformação das soluções de Regge-Wheeler para coordenadas de Kruskal. Sua análise mostra que nenhum modo monocromático expande exponencialmente a partir de dados iniciais regulares no horizonte de eventos, resultado que será aqui questionado.

Uma característica importante destes trabalhos, aparentemente não percebida na literatura, consiste na sua inadequação à decomposição em harmônicos [8]; com efeito, os modos pares e ímpares são ambos obtidos a partir de derivação de escalares, donde apenas os graus de liberdade de *spin* 1 se encontram presentes. Em virtude de estarmos interessados, no presente trabalho, nas componentes intrinsecamente tensoriais, será necessário rever a estrutura da base a ser adotada.

O elemento fundamental na análise do problema de calibre na teoria de perturbações na TRG foi explicitado de modo claro e geométrico pelo hoje conhecido Lema de Stewart [14, 15]: variáveis invariantes de calibre exatas (escalares ou não) são aquelas que são identicamente nulas quando avaliadas no background. Este lema será um dos pilares da

---

<sup>1</sup>A demonstração é concluída somente para modos ímpares; sua extensão para modos pares deve-se a Zerilli [11, 12] (ver [13] para uma discussão suplementar sobre os harmônicos).

proposta apresentada no presente trabalho.

No sentido de Stewart, uma representação alternativa equivalente das equações de Einstein, as chamadas equações Quasi-Maxwellianas (RQM) da gravitação<sup>2</sup>, foi utilizada por Hawking [16]. Neste trabalho o autor argumenta que sua aplicabilidade ao formalismo perturbativo, em virtude do lema acima, é restrita ao problema da cosmologia padrão — um problema homogêneo, isotrópico e conformalmente plano.

Embora correto no sentido estrito, este argumento conduziu a um desfavorecimento demasiado (na opinião do autor deste trabalho) da RQM frente aos métodos baseados no programa de Lifshitz. Isto parece justificar o amplo uso [17] do formalismo complexo de Newmann-Penrose [18] — baseado nos harmônicos esferoidais com peso de spin [19], -- em particular no estudo de uma geometria de particular interesse, a solução astrofísica de Schwarzschild, que descreve o exterior de uma concentração de matéria neutra com simetria esférica (tais como estrelas estáticas). Apesar disto, é possível mostrar [20] que certos objetos deste formalismo complexo não são adequados ao estudo, por não serem fisicamente observáveis.

Todavia é possível, e deveras útil, recuperar o valor daquela representação: ela permite uma compreensão renovada dos fenômenos perturbativos de estruturas geométricas que não satisfazem o critério de Hawking. O presente trabalho a desenvolve para torná-la adequada (nos moldes de Stewart) à solução de Schwarzschild. Utilizando esta nova estrutura obtém resultados qualitativamente novos, como a localização espacial de modos monocromáticos instáveis (violando os resultados de estabilidade [10, 4] usualmente aceitos), por permitir uma visão original do problema. O autor acredita que o uso de representações deste tipo possam auxiliar na tarefa de analisar a estabilidade de soluções exatas genéricas das equações de Einstein.

A estrutura geral do trabalho é a seguinte:

## Cap. 1 – A Geometria de Schwarzschild descreve as características fundamen-

---

<sup>2</sup>Trata-se de equações de evolução e de vínculo para as componentes elétrica e magnética do tensor de Weyl (semelhante às equações de Maxwell), bem como para os parâmetros cinemáticos e dinâmicos que nelas figuram. Apresentamos no Apêndice A um resumo desta representação.

tais do modelo astrofísico de Schwarzschild para um corpo astrofísico espacialmente compacto, introduzindo suas convenções e notação. Obtem uma representação das equações de Einstein para esta geometria em termos de uma dinâmica Hamiltoniana unidimensional, distinta dos métodos usuais de minisuperespaço [21, 22].

**Cap. 2 – A Teoria das Perturbações** descreve o formalismo de perturbações a ser utilizado neste trabalho, introduzindo as variáveis adequadas (*i.e.*, invariantes de Stewart com significado geométrico) e obtendo equações exatas de propagação destas variáveis.

**Cap. 3 – A Escolha da Base** obtem a forma explícita das componentes harmônicas escalar, vetorial e tensorial (sendo esta última restrita) da base de Schwarzschild, e explicita as dificuldades envolvidas quando a escolha (arbitrária) de uma congruência fundamental induz uma cinemática contendo grandezas não escalares.

**Cap. 4 – Perturbações Escalares e Vetoriais** esboça a aplicação do método ao estudo de perturbações de matéria e da congruência que a descreve (parâmetros de expansão, deformação, vorticidade e aceleração) ampliando o conjunto de variáveis fundamentais a serem consideradas; o sistema resultante apresenta 13 dimensões (embora algumas sejam triviais), sendo assim suficientemente complicado para ser omitido num primeiro trabalho.

**Cap. 5 – Perturbações Tensoriais** descreve a aplicação do método acima para o caso de perturbações tensoriais, conhecidas como *ondas gravitacionais* (por não modificarem o conteúdo material do universo). Mostra que a geometria de Schwarzschild é particularmente sensível às perturbações tensoriais de baixas frequências.

**Cap. 6 – Conclusões** sumariza os resultados do capítulo 5 e fornece as principais conclusões e possíveis ampliações do presente trabalho.

**Apêndice A – As Equações Quasi-Maxwellianas** apresenta um sumário das Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação, bem como sua relação com as Equações de

Einstein.

# Capítulo 1

## A Geometria de Schwarzschild

A geometria de Schwarzschild (daqui por diante denotaremos esta geometria por SU, por simplicidade de notação) é usualmente conhecida como o modelo de “Buraco Negro” da Relatividade Geral, caracterizado, no sistema de coordenadas (esférico-polares ortogonais) de Schwarzschild, por um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  cujo elemento de linha associado é

$$ds^2 = |1 - 2M/r| dt^2 - \left[ \frac{dr^2}{|1 - 2M/r|} + r^2 (d\Theta^2 + \text{sen}^2\Theta d\varphi^2) \right] \quad (1.1)$$

Observa-se que, nesta forma, a geometria é válida para qualquer valor de  $r \neq 2M$ , conforme a extensão de Kruskal-Szekeres [23]. Neste sistema de coordenadas, as conexões não-nulas associadas são

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= -\frac{M}{r^2} \frac{1}{1-2M/r} \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{M}{r^2} \frac{1}{1-2M/r} \\ \Gamma_{tt}^r &= -\frac{M}{r^2} (1 - 2M/r) \\ \Gamma_{\Theta\Theta}^r &= \text{sen}^{-2}\Theta \Gamma_{\varphi\varphi}^r = r |1 - 2M/r| \\ \Gamma_{r\Theta}^\Theta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = -\frac{1}{r} \\ \Gamma_{\Theta\varphi}^\varphi &= -\text{sen}^{-2}\Theta \Gamma_{\varphi\varphi}^\Theta = \text{cotg } \Theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Esta geometria é estática (atendo-nos à região *exterior*  $r > 2M$  ao buraco negro, conforme o teorema de Birkhoff [24]); sua única dependência não trivial, conforme decorre

dos vetores de Killing

$$\begin{aligned}\xi^{(0)} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial t \\ \xi^{(1)} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{sen } \varphi \partial/\partial \Theta + \text{cotg } \Theta \cos \varphi \partial/\partial \varphi \\ \xi^{(2)} &\stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi \partial/\partial \Theta - \text{cotg } \Theta \text{sen } \varphi \partial/\partial \varphi \\ \xi^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial \varphi\end{aligned}$$

dessa geometria, ocorre na coordenada radial  $r$ . Define-se, portanto, um vetor  $n$  do tipo *espaço* que representa esta dependência, na forma

$$n^\alpha = |1 - 2M/r|^{1/2} \delta_r^\alpha \quad (1.3)$$

Observa-se que este vetor  $n$  encontra-se já propriamente normalizado (*i.e.*  $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$ ).

Esta estrutura induz naturalmente a definição de uma família de sub-variedades tridimensionais (espaço-temporais!)  $\Sigma_r$ , ortogonais ao vetor  $n$ , com métricas (ditas horizontais)  $h_{\mu\nu}$ , parametrizadas pelo rótulo  $r$  (freqüentemente omitido no texto que segue). Desta forma temos

$${}^{(3)}ds^2 \equiv h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = |1 - 2M/r| dt^2 - r^2 (d\Theta^2 + \text{sen}^2 \Theta d\varphi^2) \quad (1.4)$$

É imediato que  $(h_{\mu\nu}, n^\alpha)$  não podem representar um modelo de descrição espacial vista por um observador real. Todavia, no que tange ao exterior à região “compacta” denominada horizonte de eventos ( $r = 2M$ ), aquele par apresenta comportamento diferenciável. Dessa forma restringir-nos-emos a esse domínio no que segue. Por analogia formal com a descrição cinemática usual de observadores, nos permitiremos proceder igualmente com  $n^\alpha$ . Desta forma, a decomposição de sua derivada covariante mostra que este vetor<sup>1</sup> não apresenta os análogos de aceleração nem de vorticidade: dizemos então que  $n^\alpha$  representa um “observador espacial” *geodético irrotacional*, cujos parâmetros análogos à expansão e

---

<sup>1</sup>Em todo este texto utilizamos indiscriminadamente o termo ‘vetor’ como equivalente de ‘congruência (ou campo) vetorial’, por simplicidade.

deformação (shear) se escrevem na forma

$$\theta = \frac{2 - 3M/r}{r \sqrt{1 - 2M/r}} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma^t_t &= -\frac{2}{3r} \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \\ \sigma^\Theta_\Theta &= \frac{1}{3r} \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \\ \sigma^\varphi_\varphi &= \frac{1}{3r} \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

A geometria (1.1) é caracterizada por meio das Equações de Einstein como representando um universo vazio, cujo tensor de Weyl, tal como descrito por  $n^\alpha$ , apresenta somente a componente elétrica,  $E_{\mu\nu} = W_{\mu\alpha\nu\beta} n^\alpha n^\beta$ , dada por

$$\begin{aligned} E^t_t &= -2M/r^3 \\ E^\Theta_\Theta &= M/r^3 \\ E^\varphi_\varphi &= M/r^3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

É um fato digno de nota que as equações (1.6) e (1.7) apresentam a mesma estrutura (conforme [25]), o que é evidenciado pela relação

$$E_{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}}{\sigma^{\epsilon\lambda} \sigma_{\epsilon\lambda}} \sigma_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

onde o coeficiente de proporcionalidade, denotando-o abreviadamente, é dado por

$$\frac{\sigma : E}{\sigma^2} = -\frac{\sqrt{1 - 2M/r}}{1 - 3M/r} \frac{3M}{r^2}$$

Esta notação simplificada será largamente utilizada no presente trabalho, e esta proporcionalidade constituir-se-á em uma das equações fundamentais para o desenvolvimento do método perturbativo proposto no Capítulo 2.

É também útil termos em mãos as expressões do tensor de curvatura de Riemann associado à sub-variedade  $\Sigma$ , obtido diretamente por substituição nas equações de Gauss-

Codazzi, assumindo a forma

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu\alpha\beta} &= \perp [R_{\mu\nu\alpha\beta} - n^2 (n_{\mu;\beta} n_{\nu;\alpha} - n_{\mu;\alpha} n_{\nu;\beta})] \\ &\cong \perp W_{\mu\nu\alpha\beta} + 2 \left( \frac{\theta}{3} h_{\mu[\beta} + \sigma_{\mu[\beta} \right) \left( \frac{\theta}{3} h_{\alpha]\nu} + \sigma_{\alpha]\nu} \right)\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\nu\beta} &= \perp [R_{\nu\beta} - n^2 (R_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu n^\alpha + n^\alpha{}_{;\beta} n_{\nu;\alpha} - n^\alpha{}_{;\alpha} n_{\nu;\beta})] \\ &\cong E_{\nu\beta} + \left( \frac{\theta}{3} h^\mu{}_\nu + \sigma^\mu{}_\nu \right) \left( \frac{\theta}{3} h_{\beta\mu} + \sigma_{\beta\mu} \right) - \theta \left( \frac{\theta}{3} h_{\nu\beta} + \sigma_{\nu\beta} \right)\end{aligned}\quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}\hat{R} &= R - n^2 \left( 2R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta + n^{\beta;\alpha} n_{\beta;\alpha} - n^\alpha{}_{;\alpha} n^\beta{}_{;\beta} \right) \\ &\cong \sigma^2 - \frac{2}{3}\theta^2\end{aligned}\quad (1.11)$$

## 1.1 Interpretação Física da Congruência

A impossibilidade de realização física como um observador real da congruência  $n^\alpha$  conduz-nos à questão da utilidade de seu uso como base para descrever a estrutura geométrica em estudo. Embora procedente, esta observação baseia-se em algumas noções subjetivas de interpretação, as quais se pretende aqui ampliar. Para tanto é importante ter em mente que, do ponto de vista estritamente matemático, nenhuma diferença conceitual há entre congruências do tipo espaço ou do tipo tempo; somente o que lhe é requerido é apresentar uma superfície global que lhe seja linearmente independente. Para o presente estudo esta última noção se confunde com aquela de ortogonalidade, justificando a construção da sub-variedade  $\Sigma$  como acima; mesmo estes conceitos deveriam ser revistos caso adotássemos uma congruência nula (ou seja, um vetor  $k^\alpha$  tal que  $k^\nu k_\nu = 0$ ).

Sejam quais forem os argumentos de natureza matemática, dificilmente aceitar-se-á de modo isento a referência a um "observador tipo espaço". Faz-se então necessário obter uma justificativa de mesma natureza. Embora esta não esteja disponível de forma definitiva é possível aceitar parcialmente a estrutura acima por comparação com aquela obtida por um observador convencional estático nas vizinhanças do 'buraco negro'. De fato, se assumirmos um vetor  $V^\alpha = (1 - 2M/r)^{-1/2} \delta_t^\alpha$  com norma positiva, obtem-se que este apresenta uma aceleração constante (correspondente à força Newtoniana necessária para suportá-lo estaticamente contra a atração gravitacional) dada por  $a_\alpha^{(V)} = -\frac{2M}{r^2} \delta_\alpha^r$ .

Esta resulta ser a única quantidade cinemática associada, e o tensor de Weyl decomposto por este observador apresenta somente a componente elétrica.

$$\begin{aligned} E^{(V)r}_r &= -2M/r^3 \\ E^{(V)\Theta}_\Theta &= M/r^3 \\ E^{(V)\varphi}_\varphi &= M/r^3 \end{aligned}$$

Observa-se que  $E^{(V)\mu}_\nu$  difere da equação (1.7) apenas pela ordem de seus autovalores (incluindo o zero), o que implica em particular que o tensor  $E^{2\mu}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} E^\mu_\epsilon E^\epsilon_\nu$  apresenta o mesmo traço que seu análogo definido a partir de  $V^\alpha$ : igual observação cabe para as demais potências do tensor misto  $E$ . Dado que estes traços são as únicas quantidades invariantes para caracterizar os objetos tensoriais<sup>2</sup>, sugere-se que a essência da interpretação física requerida para  $n^\alpha$  pode ser obtida através desta simetria na decomposição do tensor de Weyl em termos de suas componentes elétrica e magnética: basta intercambiar as coordenadas  $t$  e  $r$  para que o novo objeto seja referente ao “outro observador”.

Cumpramos notar que, em termos das duas congruências  $n$  e  $V$  temos

$$n_{\mu;\nu} \cong \left( \frac{\theta}{3} + 2\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \right) V_\mu V_\nu + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3}\theta - 2\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \right] p_{\mu\nu}$$

onde o projetor  $p_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - V_\mu V_\nu$  é a métrica induzida na 2-esfera ortogonal a ambos  $n$  e  $V$ . O termo entre colchetes na expressão acima é usualmente denominado “screen expansion” [27], ao passo que o primeiro coeficiente entre parêntesis coincide com o módulo  $|g^{\alpha\beta} a_\alpha^{(V)} a_\beta^{(V)}|^{1/2}$  do vetor  $a^{(V)}$ . Assim, ambos  $\theta$  e  $\sigma^3/\sigma^2$ , apresentam significado físico bem definido.

## 1.2 Formulação Hamiltoniana

Faremos nesta seção uma analogia formal entre dois problemas físicos de natureza

---

<sup>2</sup>Ver em Rodrigues *et al* [26] uma caracterização de tensores baseada nos seus escalares algébricos.

distinta: por um lado consideraremos as equações de Einstein para o vazio com simetria esférica (com determinante regular); por outro lado teremos o movimento unidimensional de uma partícula (livre na solução de Schwarzschild) a partir da origem da coordenada canônica. Veremos que ambos os problemas físicos acima podem — a menos de um parâmetro arbitrário, o qual pode ser pensado como uma eventual unidade fundamental de massa (tal como a massa  $M_{\text{Plank}}$ ) — ser correlacionados um para um. Dado que a energia de uma partícula é um conceito claramente definido, esperamos que essa analogia possa permitir uma nova perspectiva sobre a questão da energia gravitacional.

Por computação direta<sup>3</sup> da curvatura Riemanniana associada à geometria (1.1) — onde o fator  $(1 - 2M/r)$  foi substituído por uma função radial genérica  $A^2(r)$  — obtem-se as componentes não identicamente nulas do tensor de Ricci como sendo

$$\begin{aligned} R^t_t &= A A'' + A'^2 + \frac{2}{r} A A' \\ R^\theta_\theta = R^\phi_\phi &= -\frac{1}{r^2} [r (A^2 - 1)]' \end{aligned} \quad (1.12)$$

Lembrando-nos que Schwarzschild representa uma solução de vácuo ( $T^\mu_\nu = 0$ ) das Equações de Einstein

$$R^\mu_\nu = -k \left( T^\mu_\nu - \frac{1}{2} T \delta^\mu_\nu \right) \quad (1.13)$$

trataremos as equações (1.12)-(1.13) meramente como uma equação diferencial de segunda ordem sujeita a um vínculo de primeira ordem. Podemos então indagar-nos sobre a possibilidade de mudar a representação deste sistema, de modo a adquirir novas perspectivas sobre o problema. Não se trata aqui de uma mudança de coordenadas do espaço-tempo, como logo ficará transparente.

Definamos uma estrutura bidimensional, composta por duas coordenadas dinâmicas

---

<sup>3</sup>Ver Adler *et al* [28] para detalhes.

denotadas  $(q, p)$ , dependentes de um única variável cinemática  $t$ , pelas expressões

$$\begin{aligned} q &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1-A^2} \\ p &\stackrel{\text{def}}{=} 2r^2 A A' \\ t &\stackrel{\text{def}}{=} r \end{aligned} \quad (1.14)$$

A substituição de  $A^2 = 1 - 2M/r$  nas expressões (1.14) acima fornece  $(q = \frac{r}{2M}, p = 2M)$ . Ao invés de assumirmos este conhecimento *ab initio* iremos reformular o problema (1.12) em termos das novas variáveis como sendo

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{1-A^2} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{2r^2 A A'}{(1-A^2)^2} = \left( \frac{qp}{t} \right)^2 \frac{1}{p} \\ \dot{p} &= \frac{d}{dr} [2r^2 A A'] = \frac{2}{r} p + 2r^2 [A A'' + A'^2] = \frac{2}{r} p + 2r^2 \left[ -\frac{2}{r} A A' \right] = 0 \\ [r(A^2 - 1)]' &= [(A^2 - 1) + 2r A A'] = -\frac{1}{q} + \frac{p}{t} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Este sistema dinâmico vinculado admite uma formulação Hamiltoniana imediata, na forma

$$\begin{aligned} h(q, p) &= \ln \frac{p}{p_o} \\ \phi(q, p) &= qp - t \approx 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde  $p_o$  é uma constante positiva arbitrária<sup>4</sup>. Observa-se que, descrito desta forma, não é transparente o significado destas *variáveis canônicas*. Pode-se contudo dispor da liberdade de realizar transformações canônicas para tornar esta representação mais simples de ser interpretada matematicamente. Fazendo uso de uma função geradora de transformações canônicas<sup>5</sup> da forma  $F_3(p, Q) = -Q \sqrt{2 \ln \left( \frac{p}{p_o} \right)}$  resulta que as novas coorde-

<sup>4</sup>Dado que o momentum canônico  $p$  representa fisicamente a massa  $M$  da solução de Schwarzschild, e sendo  $p_o$  uma escala de  $p$ , poderemos eventualmente identificar  $p_o = 2M_P$  com  $M_P$  sendo o menor valor de massa com significado gravitacional (talvez a massa de Plank). Caso isso seja possível a função Hamiltoniana  $h$  tornar-se-ia não-negativa.

<sup>5</sup>Ver Goldstein [29] para a nomenclatura das funções geradoras de transformações canônicas.

nadas canônicas  $(Q, P)$  relacionam-se com as antigas  $(q, p)$  por

$$\begin{cases} Q = qp\sqrt{2 \ln(p/p_o)} \\ P = \sqrt{2 \ln(p/p_o)} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\begin{cases} q = \frac{Q}{p_o P} e^{-\frac{1}{2}P^2} \\ p = p_o e^{\frac{1}{2}P^2} \end{cases}$$

Dado que a função geradora adotada não depende explicitamente do parâmetro  $t$  de evolução do sistema resulta que, à semelhança das demais grandezas dinâmicas como os vínculos, a nova Hamiltoniana coincide com a antiga por meio das expressões (1.17)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(Q, P) &\equiv h(q(Q, P), p(Q, P)) = \frac{1}{2} P^2 \\ \Phi(Q, P; t) &= \frac{Q}{P} - t \approx 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

O sistema Hamiltoniano vinculado (1.18) acima admite interpretação física imediata de uma partícula livre cuja linha de universo passa pela origem da coordenada  $Q$  no instante  $t = 0$  (i.e., o fator  $A(r)$  diverge negativamente na origem radial  $r = 0$ ). O significado físico do vínculo é tão somente de fixar a condição inicial do movimento unidimensional da partícula, donde não há lugar para vínculos secundários nem vínculos de segunda classe. A única particularidade deste sistema reside na ausência de interpretação física para posições negativas ( $Q < 0$ ), que corresponderiam — via a solução para  $A(r)$  — a uma região com  $r/M < 0$ . Todavia, as funções radial  $r$  e massa  $M$  são, classicamente, ambas não-negativas para a solução considerada<sup>6</sup>.

### 1.2.1 Geometria de Reissner-Nordström

Pode-se proceder analogamente com a geometria de Reissner-Nordström, a qual tem a mesma forma geral (1.1) porém com  $M \mapsto M - \frac{Q^2}{4r}$ , que representa um buraco negro

---

<sup>6</sup>Seria possível interpretar essa região como sendo a extensão da Schwarzschild para uma variedade contendo estruturas do tipo “buraco de verme”, ou *wormhole*.

carregado eletricamente com carga  $Q$ . Para este caso não mais se trata de uma solução de vácuo, mas de um campo eletrostático de uma carga puntiforme  $Q$  localizada na origem. Definindo  $q_{RN} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \frac{Q^2}{2r^2} - A^2}$ ,  $p_{RN} \stackrel{\text{def}}{=} 2r^2 A A' + \frac{Q^2}{r}$ ,  $t_{RN} \stackrel{\text{def}}{=} r$  obtemos o correspondente sistema Hamiltoniano vinculado

$$\begin{cases} h_{RN}(q_{RN}, p_{RN}; t_{RN}) = \ln\left(\frac{p_{RN}}{p_0}\right) + \frac{3Q^2}{t_{RN}^2} q_{RN} \\ \phi_{RN}(q_{RN}, p_{RN}; t_{RN}) = p_{RN} - \frac{t_{RN}}{q_{RN}} \approx 0 \end{cases}$$

Por meio da mesma transformação canônica (1.17) acima obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{RN}(Q_{RN}, P_{RN}; t_{RN}) &= \frac{1}{2} P_{RN}^2 + \frac{3Q^2}{p_0 t_{RN}^2} \frac{Q_{RN}}{P_{RN}} e^{-\frac{1}{2} P_{RN}^2} \\ \Phi_{RN}(Q_{RN}, P_{RN}; t_{RN}) &= Q_{RN} - P_{RN} t_{RN} \approx 0 \end{aligned}$$

uma partícula com a mesma condição inicial que no caso de Schwarzschild, porém submetida a um potencial linear na coordenada  $Q_{RN}$  mas que, todavia, decai muito rapidamente com o momentum  $P_{RN}$ . A dependência com a velocidade no termo de potencial é típica de sistemas não-conservativos, embora seu sinal não lhe permita a interpretação de uma viscosidade: a presença do movimento contribui positivamente na Hamiltoniana (produzindo energia ao invés de a consumir).

A característica interessante desta estrutura consiste no fato de podermos adotar um valor infinitesimal de carga  $Q \ll M$  de forma a permitir-nos tratar a geometria de Reissner-Nordström como sendo (também) uma perturbação infinitesimal de (1.1); veremos que esta perspectiva não se coaduna com a hipótese de perturbações tensoriais. Sob este ponto de vista  $\mathcal{H}_{RN}$  representa uma partícula quase livre, com um potencial “anti-viscoso” pequeno. Embora esta caracterização se apresente num particular sistema de coordenadas, sabemos por construção tratar-se de duas geometrias distintas bem conhecidas.

# Capítulo 2

## Teoria das Perturbações

Desnecessário é dizer aqui a importância da aplicação da teoria das perturbações às geometrias usuais da Relatividade Geral, tais como o Universo homogêneo e isotrópico de Friedmann ou o cenário astrofísico isotrópico e estático do modelo de Schwarzschild (1.1). Embora muito trabalho se tenha já empreendido com este fim, pouco material existe que situe esta formulação em uma perspectiva simultaneamente **gauge-invariante**<sup>1</sup> e com conteúdo geométrico claro. Todavia tais conceitos parecem não ter migrado para o estudo de perturbações de estruturas localizadas<sup>2</sup>, o que dá lugar ao presente trabalho.

Ao estudarmos perturbações em Relatividade Geral deparamo-nos com (pelo menos) dois tensores métricos distintos: a geometria de fundo (ou background)  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  e a geometria perturbada em primeira ordem, convenientemente escrita na forma  $\hat{g}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ . Nesta expressão os coeficientes do tensor  $\delta g_{\mu\nu}$  são tomados como variáveis de campo independentes (exceto pela simetria). No entanto cumpre notar que  $\hat{g}_{\mu\nu}$  e  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  estão definidos em variedades diferentes, que devem ser, de algum modo, identificadas para dar significado às variações  $\delta g_{\mu\nu}$  acima. Não existe, contudo, uma identificação canônica, e o procedimento arbitrário que daí resulta ficou então conhecido como *o problema de gauge da Relatividade Geral*.

---

<sup>1</sup>Quanto à noção do termo *gauge* aqui subentendida, ver o trabalho original de Stewart *et al* [14] para o tratamento matemático geral, e [1, 30, 31, 32] para seu uso no estudo da cosmologia padrão.

<sup>2</sup>Ver em Chandrasekhar [3] uma excelente revisão sobre o tema seguindo a linha de raciocínio desenvolvida no trabalho pioneiro de Lifshitz e Khalatnikov [8].

O método perturbativo aqui empregado difere em parte daquele adotado pela dominante maioria das referências no tema<sup>3</sup>, e segue a idéia básica de implementar no formalismo a solução do problema acima desenvolvida por Stewart em termos de grandezas com significado geométrico simples (ainda que não passíveis de interpretação como medidas tomadas por um observador real). Esta consiste basicamente na constatação de que uma transformação de calibre arbitrária — a qual pode ser pensada como uma mudança de coordenadas aplicada à variedade de fundo — não pode ser responsável por gerar um tensor não nulo se o mesmo o era previamente. Desta forma o primeiro passo no estudo da estabilidade do modelo de Schwarzschild será voltado para obter equações exatas que descrevem a evolução de objetos geométricos que, quando avaliados no modelo em questão, anulam-se identicamente. Tais grandezas, em sendo covariantes e invariantes de calibre, são denominadas, no contexto do problema perturbativo da Relatividade Geral, *boas quantidades* [1, 30].

Observamos no capítulo 1 que a decomposição (3+1) na geometria (1.1) induzida pelo vetor  $n^\alpha$  conduz a um tensor de ‘shear’ degenerado (dois autovalores iguais), proporcional à componente “elétrica” do tensor de Weyl (1.6)-(1.7). Desta forma podemos introduzir os seguintes objetos geométricos

$$\bar{X}_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\mu\nu} - \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma_{\mu\nu}^2 + \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

$$Y_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} E_{\mu\nu} - \frac{E : \sigma}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

$$Z_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} H_{\mu\nu} - \frac{H : \sigma}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_{\mu\nu}^2 \equiv \sigma^\alpha{}_\mu \sigma_{\nu\alpha}$ .

Os tensores (2.1)-(2.2)-(2.3) apresentam as seguintes características algébricas: são simétricos, sem traço, “ortogonais” ao *shear* (i.e.,  $\sigma : X = \sigma : Y = \sigma : Z = 0$ )<sup>4</sup> e, o que

---

<sup>3</sup>Ver, por exemplo, em Hawking [16], Bruni [33] e Dunsby [30] formas distintas de aplicação deste conceito em âmbito cosmológico.

<sup>4</sup>Isto implica, em primeira ordem de perturbação, que  $0 = \delta(\sigma^{\alpha\beta} X_{\alpha\beta}) \approx \sigma^{\alpha\beta} \delta X_{\alpha\beta}$ , e analogamente para  $Y_{\alpha\beta}$  e  $Z_{\alpha\beta}$ . Assim os três tensores acima são (até esta ordem) ortogonais ao tensor de ‘shear’  $\sigma_{\mu\nu}$  do background. Este fato justificará a escolha da base tensorial ‘restrita’ (capítulo 3 seção 3.1.2).

é mais importante, são identicamente nulos sobre a geometria (1.1): assim, assumiremos que estes objetos constituem um conjunto (eventualmente completo) de “boas variáveis” perturbativas<sup>5</sup>.

Utilizando as equações Quasi-Maxwellianas da gravitação (ver apêndice A) podemos calcular a *propagação* dos tensores acima ao longo das geodésicas radiais representadas pelo vetor  $n^\alpha$ . Procuramos então reescrever o resultado em termos destes mesmos objetos, de forma a obter um sistema dinâmico fechado. Isto é realizado por meio das definições e propriedades algébricas dos tensores fundamentais bem como das relações de vínculo que compõe o sistema QM. Temos então, para a variável  $X$ , que

$$\begin{aligned}
\perp \dot{X}_{\mu\nu} &= \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} h_{(\mu}^\alpha \sigma_{\nu)}^\beta - \left( 2\sigma^{\alpha\beta} - 3 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma^2{}^{\alpha\beta} \right) \left( \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2{}_{\mu\nu} - \frac{2}{3} \frac{\sigma^2}{\sigma^3} h_{\mu\nu} \right) \right] \perp \dot{\sigma}_{\alpha\beta} \\
&= \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} h_{(\mu}^\alpha \sigma_{\nu)}^\beta + \frac{1}{\sigma^2} \left( \sigma^{\alpha\beta} - X^{\alpha\beta} \right) \left( \sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \right) \right] \times \\
&\times \left[ -\frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma^2{}_{\alpha\beta} + \frac{\sigma^2}{3} h_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} - \omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + a_{(\alpha;\beta)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \left( a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2 \right) h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} \right] \\
&= \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} h_{(\mu}^\alpha \sigma_{\nu)}^\beta + \frac{1}{\sigma^2} \left( \sigma^{\alpha\beta} - X^{\alpha\beta} \right) \left( \sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \right) \right] \times \\
&\times \left[ - \left( \frac{2}{3} \theta + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + \frac{\sigma;E}{\sigma^2} \right) \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} - Y_{\alpha\beta} - \omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + a_{(\alpha;\beta)} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \left( a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2 \right) h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} \right] \\
&= - \left( \frac{2}{3} \theta + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + \frac{\sigma;E}{\sigma^2} \right) \left[ \sigma_{\mu\nu} - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma^2{}_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \right] + \\
&+ \frac{1}{3} \left( a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2 \right) \left[ 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \right] + \left[ -\omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + a_{(\alpha;\beta)} + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} \right] \times \\
&\times \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} h_{(\mu}^\alpha \sigma_{\nu)}^\beta + \frac{1}{\sigma^2} \left( \sigma^{\alpha\beta} - X^{\alpha\beta} \right) \left( \sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2 \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \right) \right]
\end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Ver, no entanto, comentário sobre a escolha deste conjunto na Introdução.

ou seja,

$$\begin{aligned}
\perp \dot{X}_{\mu\nu} = & - \left( \frac{4}{3}\theta + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + 2\frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right) X_{\mu\nu} - 2\sigma^\lambda_{(\mu} X_{\nu)\lambda} - Y_{\mu\nu} + 2\frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma^\lambda_{(\mu} Y_{\nu)\lambda} + \\
& + \frac{1}{\sigma^2} X^{\alpha\beta} \left( Y_{\alpha\beta} - \frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} \right) \left[ \sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2\frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu} \right] + \\
& + \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - 2\frac{\sigma^2}{\sigma^3} h^\alpha_{(\mu} \sigma_{\nu)}^\beta + \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^{\alpha\beta} - X^{\alpha\beta}) (\sigma_{\mu\nu} - X_{\mu\nu} + 2\frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h_{\mu\nu}) \right] \times \\
& \times \left[ -\omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + a_{(\alpha;\beta)} + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} \right] + \frac{1}{3} (a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2) \left[ 2\frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Similarmente para o tensor  $Y_{\mu\nu}$  obtemos

$$\begin{aligned}
\perp \dot{Y}_{\mu\nu} = & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \perp \dot{E}_{\alpha\beta} - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \frac{E^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}}{\sigma : E} - 2\frac{\sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}}{\sigma^2} \right] \perp \dot{\sigma}_{\alpha\beta} \\
= & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \left[ -\theta E_{\alpha\beta} + 3\sigma^\lambda_{(\alpha} E_{\beta)\lambda} - \sigma : E h_{\alpha\beta} - h^\lambda_{(\alpha} \eta_{\beta)}{}^{\epsilon\tau} n_\tau H_{\lambda\epsilon;\tau} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \perp \left( q_{(\alpha;\beta)} + \Pi_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \Pi_{\alpha\beta} + \sigma^\lambda_{(\alpha} \Pi_{\beta)\lambda} + \omega^\lambda_{(\alpha} \Pi_{\beta)\lambda} \right) + \frac{1}{6} (q^\lambda{}_{;\lambda} + a_\lambda q^\lambda + \sigma^{\epsilon\gamma} \Pi_{\epsilon\gamma}) h_{\alpha\beta} \right] + \\
& - E^\lambda_{(\alpha} \omega_{\beta)\lambda} + 2H^\lambda_{(\alpha} \eta_{\beta)\lambda\epsilon\tau} n^\epsilon a^\tau - \frac{1}{2} (\rho + p) \sigma_{\alpha\beta} - a_{(\alpha} q_{\beta)} + \\
& - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \frac{Y^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}}{\sigma : E} - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \times \\
& \times \left[ -\frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{\sigma^2}{3} h_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} - \omega_\alpha \omega_\beta + a_\alpha a_\beta + \perp a_{(\alpha;\beta)} + \frac{1}{3} (\omega^2 - a^\lambda{}_{;\lambda}) h_{\alpha\beta} \right] \\
= & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \left\{ -\theta Y_{\alpha\beta} + 3\sigma^\lambda_{(\alpha} Y_{\beta)\lambda} - 3\frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left( -\sigma_{\alpha\beta}^2 - \frac{\sigma^2}{3} h_{\alpha\beta} \right) + \right. \\
& - h^\lambda_{(\alpha} \eta_{\beta)}{}^{\epsilon\tau} n_\tau \left[ Z_{\lambda\epsilon;\tau} + \sigma_{\lambda\epsilon} \left( \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \right)_{;\tau} \right] + \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \left[ H_{\alpha\beta} - h^\lambda_{(\alpha} \eta_{\beta)}{}^{\epsilon\tau} n_\tau \omega_{\lambda\epsilon;\tau} - 2a_{(\alpha} \omega_{\beta)} \right] + \\
& - E^\lambda_{(\alpha} \omega_{\beta)\lambda} + 2 \left[ Z^\lambda_{(\alpha} - \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \sigma^\lambda_{(\alpha} \eta_{\beta)\lambda\epsilon\tau} n^\epsilon a^\tau - a_{(\alpha} q_{\beta)} - \frac{1}{2} \perp \left[ q_{(\alpha;\beta)} + \dot{\Pi}_{\alpha\beta} + \frac{\theta}{3} \Pi_{\alpha\beta} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sigma^\lambda_{(\alpha} \Pi_{\beta)\lambda} + \omega^\lambda_{(\alpha} \Pi_{\beta)\lambda} \right] + \frac{1}{6} (q^\lambda{}_{;\lambda} + a^\lambda q_\lambda + \sigma^{\epsilon\gamma} \Pi_{\epsilon\gamma}) h_{\alpha\beta} \right\} + \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \frac{Y^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}}{\sigma : E} + \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \left[ -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} + Y_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \omega_\beta - a_\alpha a_\beta - a_{(\alpha;\beta)} + \frac{1}{3} (a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2) h_{\alpha\beta} \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\perp \dot{Y}_{\mu\nu} = & \\
= & -4\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma : E}{\sigma^2} X_{\mu\nu} + \left( \frac{\sigma : E}{\sigma^2} - \theta \right) Y_{\mu\nu} + 3\sigma^\lambda (\mu Y_\nu)_\lambda - \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau Z_{\lambda\epsilon;\gamma} + \\
& -\sigma^\lambda (\mu \omega_\nu)_\lambda + \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right] \left\{ 2Z^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma - Y^\lambda (\alpha \omega \beta)_\lambda - a_{(\alpha} q_{\beta)} - \frac{1}{2} \left[ \dot{\Pi}_{\alpha\beta} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{\theta}{3} - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right) \Pi_{\alpha\beta} + \sigma^\lambda (\alpha \Pi_\beta)_\lambda + \omega^\lambda (\alpha \Pi_\beta)_\lambda \right] + \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ \omega_\alpha \omega_\beta - a_\alpha a_\beta - a_{(\alpha;\beta)} \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{6} \left[ q^\lambda{}_{;\lambda} + a^\lambda q_\lambda + \sigma^{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} + 2\frac{\sigma : E}{\sigma^2} (a^\lambda{}_{;\lambda} - \omega^2) \right] h_{\mu\nu} + \\
& + \frac{1}{\sigma^2} Y^{\alpha\beta} \left[ Y_{\alpha\beta} + 2\frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} + \omega_\alpha \omega_\beta - a_\alpha a_\beta - a_{(\alpha;\beta)} \right] \sigma_{\mu\nu} + \\
& - \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \left\{ Z_{\mu\nu} + h^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\epsilon\gamma\tau} n^\tau \left[ \sigma_{\lambda\epsilon} \left( \ln \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \right)_{;\gamma} + \omega_{\lambda\epsilon;\gamma} \right] + 2\sigma^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma + 2a_{(\alpha \omega \beta)} \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Finalmente obtemos para o tensor  $Z_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\perp \dot{Z}_{\mu\nu} = & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \perp \dot{H}_{\alpha\beta} - \left[ \frac{\sigma : H}{\sigma^2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \left( H^{\alpha\beta} - 2\frac{\sigma : H}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \right) \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sigma^2} \right] \perp \dot{\sigma}_{\alpha\beta} \\
= & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \left\{ h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau E_{\lambda\epsilon;\gamma} - \theta H_{\alpha\beta} - 2E^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma + 3\sigma^\lambda (\alpha H_\beta)_\lambda + \right. \\
& - \omega^\lambda (\alpha H_\beta)_\lambda - \frac{1}{2} \left[ \sigma^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma + h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau \Pi_{\lambda\epsilon;\gamma} - q^\lambda \omega_\lambda h_{\alpha\beta} + 3q_{(\alpha \omega \beta)} \right] \left. \right\} + \\
& - \left[ \frac{\sigma : H}{\sigma^2} h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \left( H^{\alpha\beta} - 2\frac{\sigma : H}{\sigma^2} \sigma^{\alpha\beta} \right) \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sigma^2} \right] \left\{ -E_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} - \sigma^\lambda \alpha \sigma_{\beta\lambda} + a_{(\alpha;\beta)} + \right. \\
& + a_\alpha a_\beta - \omega_\alpha \omega_\beta + \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \omega^2 + \sigma^2 - a^\lambda{}_{;\lambda} \right) h_{\alpha\beta} \left. \right\} \\
= & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \left\{ h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau \left[ Y_{\lambda\epsilon;\gamma} + \left( \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right)_{;\gamma} \sigma_{\lambda\epsilon} \right] - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left( H_{\alpha\beta} + \right. \right. \\
& + h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau \omega_{\lambda\epsilon;\gamma} - 2a_{(\alpha \omega \beta)} \left. \right) - \theta H_{\alpha\beta} + 3\sigma^\lambda (\alpha H_\beta)_\lambda - \omega^\lambda (\alpha H_\beta)_\lambda + \\
& + \left( \frac{1}{2} q^\lambda \omega_\lambda - \sigma : H \right) h_{\alpha\beta} - 2Y^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma - \sigma^\lambda (\alpha \eta \beta)_{\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon \left( 2\frac{\sigma : E}{\sigma^2} a^\gamma - \frac{1}{2} q^\gamma \right) + \\
& - \frac{1}{2} h^\lambda (\alpha \eta \beta)^{\epsilon\gamma\tau} n_\tau \Pi_{\lambda\epsilon;\gamma} - \frac{3}{2} \omega_{(\alpha} q_{\beta)} \left. \right\} + \left[ \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \left( h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right) + \frac{Z^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \times \\
& \times \left[ -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} + Y_{\alpha\beta} - a_{(\alpha;\beta)} - a_\alpha a_\beta + \omega_\alpha \omega_\beta - \frac{1}{2} \Pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \omega^2 - a^\lambda{}_{;\lambda} \right) h_{\alpha\beta} \right]
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\begin{aligned}
\perp \dot{Z}_{\mu\nu} = & \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] h^\lambda_{(\alpha\eta\beta)} \epsilon^{\gamma\tau} n_\tau Y_{\lambda\epsilon;\gamma} - \left( \theta - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right) Z_{\mu\nu} + 3\sigma^\lambda_{(\mu} Z_{\nu)\lambda} + \\
& + \left[ h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \left\{ -\omega^\lambda_{(\alpha} Z_{\beta)\lambda} + \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \omega^\lambda_{(\alpha} \sigma_{\beta)\lambda} - 2Y^\lambda_{(\alpha\eta\beta)\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon a^\gamma + \right. \\
& - \sigma^\lambda_{(\alpha\eta\beta)\lambda\epsilon\gamma} n^\epsilon \left( 2\frac{\sigma : E}{\sigma^2} a^\gamma - \frac{1}{2}q^\gamma \right) - \frac{1}{2}h^\lambda_{(\alpha\eta\beta)} \epsilon^{\gamma\tau} n_\tau \Pi_{\lambda\epsilon;\gamma} + \\
& - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ h^\lambda_{(\alpha\eta\beta)} \epsilon^{\gamma\tau} n_\tau \omega_{\lambda\epsilon;\gamma} - 2\omega_{(\alpha} a_{\beta)} \right] + 3\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma : H}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}q^\lambda \omega_\lambda h_{\alpha\beta} + \\
& \left. - \sigma_{\lambda(\alpha\eta\beta)} \epsilon^{\gamma\tau} n_\tau \left( \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right)_{;\gamma} - \frac{3}{2}\omega_{(\alpha} q_{\beta)} \right\} + \left[ \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \left( h_\mu^\alpha h_\nu^\beta - \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right) + \frac{Z^{\alpha\beta}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu} \right] \times \\
& \times \left\{ -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} X_{\alpha\beta} + Y_{\alpha\beta} - a_{(\alpha;\beta)} - a_\alpha a_\beta + \omega_\alpha \omega_\beta - \frac{1}{2}\Pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{6}(\omega^2 - 2a^\lambda{}_{;\lambda}) h_{\alpha\beta} \right\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

As equações (2.4), (2.5) e (2.6) representam o núcleo fundamental que se propõe neste trabalho, fornecendo um sistema dinâmico para os tensores  $X_{\mu\nu}$ ,  $Y_{\mu\nu}$ ,  $Z_{\mu\nu}$  em termos dos parâmetros (tensoriais)  $\sigma_{\mu\nu}$ ,  $E_{\mu\nu}$ . Este sistema é fechado se o entendermos como descrevendo a 'propagação' dos tensores fundamentais  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  infinitesimais, dependendo do conhecimento prévio de  $\sigma$  e  $E$  da geometria de fundo (1.1).

Estas três equações, no entanto, não são independentes, mas estão sujeitas aos vínculos representados por (A.2)-(A.3). Reescrevendo-as em termos das variáveis escolhidas obtém-se diretamente

$$\begin{aligned}
h_\epsilon^\alpha h^{\mu\nu} Y_{\alpha\mu;\nu} = & \eta_\epsilon^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \sigma^\lambda_\alpha Z_{\beta\lambda} - 3 \left( Z_{\epsilon\lambda} + \frac{\sigma : H}{\sigma^2} \sigma_{\epsilon\lambda} \right) \omega^\lambda - \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \left[ h_\epsilon^\alpha h^{\mu\nu} \omega_{\alpha\mu;\nu} + \right. \\
& + \frac{2}{3}h_\epsilon^\alpha \theta_{;\alpha} + (\sigma_{\epsilon\lambda} + \omega_{\epsilon\lambda}) a^\lambda - q_\epsilon \left. \right] - \sigma^\lambda_\epsilon \left( \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right)_{;\lambda} + \frac{1}{3}h_\epsilon^\alpha \rho_{;\alpha} + \\
& + \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{\epsilon\lambda} - 3\omega_{\epsilon\lambda}) q^\lambda - h_{\epsilon\alpha} \Pi^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + \Pi_{\epsilon\lambda} a^\lambda \right] - \frac{\theta}{3} q_\epsilon
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
h_\epsilon^\alpha h^{\mu\nu} Z_{\alpha\mu;\nu} = & \eta_\epsilon^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \sigma^\lambda_\alpha Y_{\beta\lambda} + 3 \left( Y_{\epsilon\lambda} + \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \sigma_{\epsilon\lambda} \right) \omega^\lambda + (\rho + p) \omega_\epsilon + \\
& + \frac{1}{2} \eta_\epsilon^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \left[ q_{\alpha;\beta} + \Pi^\lambda_\alpha (\sigma_{\beta\lambda} - \omega_{\beta\lambda}) \right]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Cabe ainda mencionar que os vínculos adicionais (A.13) e (A.11) não fornecem expressões suplementares para as variáveis fundamentais, mas são somente definem novos objetos invariantes de calibre. A primeira destas equações já foi utilizada quando da obtenção de (2.4)-(2.5)-(2.6), sendo portanto desnecessária. Poderíamos no entanto questionar-nos

quanto a uma possível perda de informação quanto à segunda relação acima nesta passagem. Escrevemos

$$h_\epsilon^\alpha h^{\mu\nu} X_{\alpha\mu;\nu} = -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} h^\alpha_\epsilon \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\alpha\mu;\nu} + \left[ \sigma^\alpha_\epsilon - \lambda^\alpha_\epsilon + \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} h^\alpha_\epsilon \right] \frac{(\sigma^3/\sigma^2)_{;\alpha}}{(\sigma^3/\sigma^2)} + h^\alpha_\epsilon \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \frac{\sigma^2}{3} \right)_{;\alpha} + \left( h^\alpha_\epsilon - \frac{\sigma^2}{\sigma^3} \sigma^\alpha_\epsilon \right) \left[ h^{\mu\nu} \omega_{\alpha\mu;\nu} + \frac{2}{3} \theta_{;\alpha} + (\sigma_{\alpha\lambda} + \omega_{\alpha\lambda}) a^\lambda - q_\alpha \right]$$

onde o primeiro termo do lado direito representa uma nova quantidade invariante. Não a assumiremos como pertencente ao conjunto fundamental por tratar-se de uma relação envolvendo derivadas dos elementos que descrevem a estrutura cinemática da geometria de fundo; além disto, trata-se de uma grandeza vetorial, sem contribuição devido à componente tensorial das perturbações. Caso semelhante se dá com (A.13).

De acordo com o procedimento geral da análise de perturbações em harmônicos, vamos decompor os tensores (2.1)-(2.2)-(2.3)

$$\begin{aligned} \delta X_{\mu\nu}(x) &= \sum_{\lambda_s} X_{(\lambda_s)}(r) Q_{\mu\nu}^{(\lambda_s)}(x) + \sum_{\lambda_v} X_{(\lambda_v)}(r) P_{\mu\nu}^{(\lambda_v)}(x) + \sum_{\lambda_t} X_{(\lambda_t)}(r) U_{\mu\nu}^{(\lambda_t)}(x) \\ \delta Y_{\mu\nu}(x) &= \sum_{\lambda_s} Y_{(\lambda_s)}(r) Q_{\mu\nu}^{(\lambda_s)}(x) + \sum_{\lambda_v} Y_{(\lambda_v)}(r) P_{\mu\nu}^{(\lambda_v)}(x) + \sum_{\lambda_t} Y_{(\lambda_t)}(r) U_{\mu\nu}^{(\lambda_t)}(x) \quad (2.9) \\ \delta Z_{\mu\nu}(x) &= \sum_{\lambda_s} Z_{(\lambda_s)}(r) Q_{\mu\nu}^{*(\lambda_s)}(x) + \sum_{\lambda_v} Z_{(\lambda_v)}(r) P_{\mu\nu}^{*(\lambda_v)}(x) + \sum_{\lambda_t} Z_{(\lambda_t)}(r) U_{\mu\nu}^{*(\lambda_t)}(x) \end{aligned}$$

onde os sub-índices  $s, v, t$  referem-se às componentes escalar, vetorial, tensorial respectivamente.  $Q_{\mu\nu}^{(\lambda_s)}(x)$  é a componente sem traço da segunda derivada covariante de  $Q^{(\lambda_s)}(x)$ , a base escalar;  $P_{\mu\nu}^{(\lambda_v)}(x)$  é a componente sem traço da derivada covariante de  $P_\alpha^{(\lambda_v)}(x)$ , a base vetorial.  $U_{\mu\nu}^{(\lambda_t)}(x)$  é a base tensorial descrita no capítulo 3. Observa-se que  $Q_{\mu\nu}^{*(\lambda_s)}(x) \equiv 0$  — não existe o rotacional de um escalar, — e foi incluído acima apenas para manter a simetria das expressões (2.9).

Embora explicitando a dependência radial, as expressões (2.9) acima não apresentam quebra de covariância, visto que a coordenada radial da geometria (1.1) pode ser definida covariantemente através dos parâmetros cinemáticos de  $n^\alpha$  por

$$r = \frac{1}{\sqrt{|\theta^2/3 - \sigma^2/2|}} \quad (2.10)$$

# Capítulo 3

## A Escolha da Base

No estudo de perturbações da geometria de Schwarzschild é freqüente [20, 34, 35, 36] na literatura, desde o trabalho original de Regge e Wheeler [10] o uso de uma base complexa de harmônicos com peso de spin [19], adequada para expandir quantidades típicas do formalismo de Newman-Penrose [18]. Esta decomposição, contudo, mistura características intrínsecas de uma estrutura tensorial (ver abaixo) com propriedades específicas dessas quantidades (em particular o fato de serem escalares). Como não visamos aplicações complexas, será importante introduzir aqui o significado que o presente trabalho empresta ao termo *base*.

Chama-se *base* de uma variedade ao conjunto completo de autofunções solução do operador escalar de Laplace-Beltrami (ou Laplaciano  $\nabla^2$ ) para ela construído. Para nosso propósito fundamental de analisar a estabilidade da geometria de Schwarzschild (1.1), a variedade em questão<sup>1</sup> é a sub-variedade  $\Sigma$  ortogonal ao vetor  $n^\alpha$ . Neste caso o Laplaciano se escreve formalmente como

$$\hat{\nabla}^2 \stackrel{\text{def}}{=} h^{\alpha\beta} \perp \nabla_\alpha \perp \nabla_\beta \perp$$

onde  $\perp$  subentende a projeção completa dos objetos (tensores) na sub-variedade  $\Sigma$  por

---

<sup>1</sup>Em verdade estamos interessados em uma sub-variedade desta, compatível com a estrutura perturbativa estabelecida no capítulo 2, conforme veremos na subseção 3.1.2.

meio do tensor métrico  $h_{\mu\nu}$  (1.4).

A componente escalar da base de Schwarzschild é uma função  $Q(r)$  tal que

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}^2 Q &= -\lambda_s Q \\ \dot{Q} &\equiv Q_{;\alpha} n^\alpha = \kappa_s Q\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $\kappa_s$  é uma função radial arbitrária,

$$\hat{\nabla}^2 Q = \frac{1}{1 - 2M/r} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 Q}{\partial \Theta^2} + \cotg \Theta \frac{\partial Q}{\partial \Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} \right]$$

representa o Laplaciano escalar de  $Q$ , o autovalor  $\lambda_s$  apresenta componente discreta (momentum angular  $l_s$ ) e contínua (frequência  $\omega_s$ )

$$\lambda_s = \frac{\omega_s^2}{1 - 2M/r} - \frac{l_s(l_s + 1)}{r^2}$$

O rótulo  $s$  refere-se a quantidades associadas à componente escalar da base. Com isto o harmônico escalar apresenta a forma geral

$$Q(t, r, \Theta, \varphi) = e^{\pm i\omega_s t} e^{\int^r \frac{\kappa_s dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}}} Y_{l_s}^{m_s}(\Theta, \varphi)\tag{3.2}$$

onde  $Y_{l_s}^{m_s}$  são os harmônicos esféricos usuais.

A componente vetorial corresponde ao vetor  $P^\alpha$  solução das equações

$$\begin{aligned}P_\alpha n^\alpha &= 0 \\ \hat{\nabla}_\nu P^\nu &\equiv h^\beta{}_\nu P^\beta{}_{;\nu} = 0 \\ \hat{\nabla}^2 P^\nu &= -\lambda_\nu P^\nu \\ \perp \dot{P}^\nu &\equiv \perp P^\nu{}_{;\alpha} n^\alpha = \kappa_\nu P^\nu\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde  $\kappa_v$  depende arbitrariamente de  $r$ , com autovalor discreto

$$\lambda_v = \frac{1}{2} \frac{l_v(l_v + 1)}{r^2}$$

O rótulo  $v$  refere-se às quantidades associadas à componente vetorial da base. A solução é dada por

$$\begin{aligned} P^t &= \sqrt{1 - 2M/re} \int^r \frac{\kappa_v dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}} Y_{l_v}^{m_v}(\Theta, \varphi) \\ P^\varphi &= (A + Bt)re \int^r \frac{\kappa_v dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}} \sin \Theta Y_{l_v}^{m_v'}(\Theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{N} \ni |m_v| \leq l_v$ ,  $\mathcal{N} \ni |m_v'| \leq l_v'$  com  $l_v' = 1/2 + \sqrt{9/4 + l_v(l_v + 1)}$ . Esta última relação evidencia que somente uma das componentes acima pode ser não-nula para um  $l_v$  arbitrário -- se ambos  $l_v$  e  $l_v'$  são supostos naturais segue que  $l_v = 0$ ,  $l_v' = 1$ .

No presente trabalho, no entanto, não estamos interessados nas componentes escalares nem vetoriais. Desta forma as expressões acima servem como complemento do formalismo, para eventuais extensões futuras.

### 3.1 A Base Tensorial

A componente tensorial da base de Schwarzschild refere-se à solução  $U_{\mu\nu} = U_{\mu\nu}(x)$  do sistema

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu} n^\nu &= 0 \\ U_{[\mu\nu]} &= 0 \\ h^{\mu\nu} U_{\mu\nu} &= 0 \\ \hat{\nabla}_\nu U^{\mu\nu} \equiv \perp h^\beta{}_\nu U^{\mu\beta}{}_{;\nu} &= 0 \\ \hat{\nabla}^2 U_{\mu\nu} &= -\lambda U_{\mu\nu} \\ \perp \hat{U}_{\mu\nu} \equiv \perp U_{\mu\nu;\alpha} n^\alpha &= \kappa U_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde  $\lambda$  representa o autovalor associado à solução  $U_{\mu\nu}$ . A rigor deveríamos indexar esta solução com um rótulo que distinguísse o respectivo autovalor, como em (2.9). Não

adotaremos este procedimento por simplicidade de notação, baseando-nos no fato que estamos interessados somente em seu uso como elementos de expansão de perturbações lineares, de forma que não há espaço para acoplamento entre autofunções com autovalores distintos. Em verdade, ou o autovalor aparece explicitamente nas equações ou não apresenta qualquer relevância.

A última das equações (3.5) não é estritamente necessária, podendo alterar-se arbitrariamente seu lado direito<sup>2</sup>. Isto se deve ao fato que esta relação descreve como variam os tensores  $U_{\mu\nu}$  ao “evolurem” da hipersuperfície  $\Sigma_{r_0}$  para uma vizinha  $\Sigma_r$ , não correspondendo portanto ao seu comportamento em uma mesma sub-variedade.

As equações algébricas de (3.5) evidenciam tratar-se essencialmente de um objeto tensorial 3-dimensional de rank 2, simétrico (*i.e.*, contendo cinco componentes algebricamente independentes). Estas estão sujeitas aos três vínculos diferenciais representados pela equação de divergência<sup>3</sup>: estas, no entanto, não são todas independentes, como veremos no cálculo que segue, onde persistem (em princípio) três graus de liberdade para descrever a componente tensorial de um tensor de posto 2.

A partir desta componente tensorial é possível construir sua correspondente componente dual, um objeto tensorial quiral adequado para expandir tensores axiais, dada por

$$U^*_{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} h^\lambda_{(\mu} \eta_{\nu)}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma U_{\lambda\alpha;\beta} \quad (3.6)$$

Visto ser construído intrinsecamente na hipersuperfície  $\Sigma$ , decorre que este objeto deverá igualmente possuir propriedades tensoriais adequadas: ser simétrico, sem traço e sem divergência. Enquanto as duas primeiras propriedades equivalem a restringir *a priori* o número de componentes (algebricamente independentes) da base, a ausência de

---

<sup>2</sup>No uso da solução explícita (3.22) do sistema (3.5), ao estudar perturbações tensoriais (cap. 5), assumiremos  $\kappa = 0$  por simplicidade de apresentação, **sem** perda de generalidade.

<sup>3</sup>Cumprir notar que os tensores de Regge-Wheeler [10], bem como os de Zerilli [12] e de Moncrief [13], **não** satisfazem essa condição.

divergência conduz a certos vínculos não triviais. Explicitamente temos

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla} \cdot U^*_{\alpha} &= \hat{\nabla}^3 U^*_{\alpha\beta} = \hat{\nabla}^3 \left[ h^{\lambda(\alpha} \eta_{\beta)}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \hat{\nabla}_{\sigma} U_{\rho\lambda} \right] = h^{\lambda(\alpha} \eta_{\beta)}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \hat{\nabla}^{\beta} \hat{\nabla}_{\sigma} U_{\rho\lambda} \\
&= h^{\lambda(\alpha} \eta_{\beta)}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \left[ \hat{\nabla}_{\sigma} \hat{\nabla}^{\beta} U_{\rho\lambda} - \left( \hat{R}_{\rho}^{\epsilon}{}_{\sigma}{}^{\beta} U_{\epsilon\lambda} + \hat{R}_{\lambda}^{\epsilon}{}_{\sigma}{}^{\beta} U_{\rho\epsilon} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} \eta^{\beta\rho\sigma\tau} n_{\tau} \left( \hat{R}_{[\rho}^{\epsilon}{}_{\sigma\beta]} U_{\alpha\epsilon} + \hat{R}_{\alpha}^{\epsilon}{}_{\sigma\beta} U_{\rho\epsilon} \right) + \eta_{\alpha}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \left[ \hat{\nabla}_{\sigma} \left( \hat{\nabla}^{\beta} U_{\rho\beta} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left( \hat{R}_{[\rho}^{\epsilon}{}_{\sigma]\beta} \right) U_{\epsilon\beta} - \hat{R}^{\epsilon}{}_{\sigma} U_{\rho\epsilon} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{4} \eta^{\beta\rho\sigma\tau} n_{\tau} \hat{R}_{\alpha}^{\epsilon}{}_{\sigma\beta} U_{\rho\epsilon} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \hat{R}^{\epsilon}{}_{\sigma} U_{\rho\epsilon} \\
&= -\frac{1}{4} \eta^{\beta\rho\sigma\tau} n_{\tau} \perp \left[ R_{\alpha\epsilon\sigma\beta} + 2 \left( \sigma_{\epsilon|\sigma} + \frac{\theta}{3} h_{\epsilon|\sigma} \right) \left( \sigma_{\beta|\alpha} + \frac{\theta}{3} h_{\beta|\alpha} \right) \right] U^{\epsilon}{}_{\rho} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha}^{\rho\sigma\tau} n_{\tau} \times \\
&\quad \times \perp \left[ R^{\epsilon}{}_{\sigma} + R_{\gamma}^{\epsilon}{}_{\beta\sigma} n^{\beta} n^{\gamma} + \left( \sigma^{\epsilon\lambda} + \frac{\theta}{3} h^{\epsilon\lambda} \right) \left( \sigma_{\lambda\sigma} + \frac{\theta}{3} h_{\lambda\sigma} \right) - \theta \left( \sigma^{\epsilon}{}_{\sigma} + \frac{\theta}{3} h^{\epsilon}{}_{\sigma} \right) \right] U_{\rho\epsilon} \\
&= -\frac{1}{2} W_{\alpha\beta\mu\nu}^* n^{\nu} U^{\beta\mu} - \frac{1}{2} \eta^{\beta\mu\nu\tau} n_{\tau} \left[ \left( \frac{2}{3} \theta + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + \frac{\sigma E}{\sigma^2} \right) h_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \right] \sigma^{\lambda}{}_{\mu} U_{\nu\lambda} \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sigma_{\alpha\beta} - \left( \frac{2}{3} \theta + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + 2 \frac{\sigma E}{\sigma^2} \right) h_{\alpha\beta} \right] \eta^{\beta\mu\nu\tau} n_{\tau} \sigma^{\lambda}{}_{\mu} U_{\nu\lambda} = 0
\end{aligned}$$

donde obtemos que

$$\sigma^{\lambda}{}_{[\mu} U_{\nu]\lambda} = 0 \quad (3.7)$$

Esta equação, devido à simetria dos tensores  $\sigma_{\mu\nu}$  e  $U_{\mu\nu}$ , implica que

$$U_{t\theta} = U_{t\varphi} = 0 \quad (3.8)$$

Estudaremos na subseção 3.1.1 a solução sistema (3.5) na sua forma mais ampla, ou seja, contendo o maior número possível de componentes independentes. A seguir veremos, na subseção 3.1.2 como uma solução distinta pode ser obtida restringindo o número de componentes da base. Ademais, é esta última solução que será utilizada no problema perturbativo desenvolvido no Capítulo 2.

### 3.1.1 A Forma Geral da Base Tensorial

A base tensorial  $U_{\mu\nu}$ , sujeita ao vínculo adicional (3.8), tem a forma

$$\begin{aligned} U_{tt}(x^\rho) &= \gamma(t, r, \Theta, \varphi) \\ U_{\Theta\Theta}(x^\rho) &= \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \Psi(t, r, \Theta, \varphi) \\ U_{\Theta\varphi}(x^\rho) &= \frac{1}{\text{sen}\Theta} \Phi(t, r, \Theta, \varphi) \end{aligned}$$

com  $U_{\varphi\varphi} = \frac{r^2 \text{sen}^2\Theta}{1-2M/r} \gamma - \Psi$  devido à condição de traço nulo. As equações da divergência da base tensorial são

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^\beta U_{t\beta} &= \frac{1}{1-2M/r} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \\ \hat{\nabla}^\beta U_{\Theta\beta} &= -\frac{1}{r^2 \text{sen}^3\Theta} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \text{sen}\Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} - \frac{r^2}{1-2M/r} \text{sen}^2\Theta \cos\Theta \gamma \right] \\ \hat{\nabla}^\beta U_{\varphi\beta} &= -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\Theta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \text{sen}\Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \frac{r^2}{1-2M/r} \text{sen}^2\Theta \cos\Theta \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

A equação de propagação de  $U_{\mu\nu}$  para além da hipersuperfície  $\Sigma$  fornece a dependência radial das funções como

$$\begin{aligned} \gamma(t, r, \Theta, \varphi) &= (1-2M/r) e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1-2M/r'}}} \tilde{\gamma}(t, \Theta, \varphi) \\ \Psi(t, r, \Theta, \varphi) &= r^2 e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1-2M/r'}}} \tilde{\Psi}(t, \Theta, \varphi) \\ \Phi(t, r, \Theta, \varphi) &= r^2 e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1-2M/r'}}} \tilde{\Phi}(t, \Theta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se a função radial  $\kappa = \text{const.}$  podemos calcular a integral explicitamente

$$\int^r \frac{dr'}{\sqrt{1-2M/r'}} = r \sqrt{1-2M/r} + 2M \text{arctgh} \sqrt{1-2M/r}$$

A equação de autovalores do sistema (3.5) toma a forma explícita

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2M/r} \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial \Theta^2} + \cotg \Theta \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2 \tilde{\gamma}}{\partial \varphi^2} \right] &= \lambda \tilde{\gamma} \\ \frac{1}{1-2M/r} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \Theta^2} - \cotg \Theta \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \varphi^2} + 2 \left( \tilde{\Psi} - \frac{\cos \Theta}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \varphi} \right) \right] &= \lambda \tilde{\Psi} \\ \frac{1}{1-2M/r} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \Theta^2} - \cotg \Theta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \varphi^2} + 2 \left( \tilde{\Phi} + \frac{\cos \Theta}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \varphi} \right) \right] &= \lambda \tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Devido à independência temporal de  $\gamma$  (3.9), a primeira das equações (3.11) pode ser imediatamente integrada, correspondendo à forma usual dos harmônicos esféricos

$$\tilde{\gamma} = \sum_{m=-l}^l \left[ A_m^{(\gamma)} P_l^m(\cos \Theta) + B_m^{(\gamma)} Q_l^m(\cos \Theta) \right] \left[ C_m^{(\gamma)} \cos m\varphi + D_m^{(\gamma)} \text{sen } m\varphi \right]$$

Para tanto devemos ter  $\lambda = l(l+1)/r^2$  onde  $l$  é um inteiro não-negativo. Como consequência da dependência radial (3.10) o termo de derivadas temporais deve ser nulo para cada uma das equações (3.11). Com isto a dependência temporal de  $\tilde{\Psi}$  e de  $\tilde{\Phi}$  é afim.

Isolando  $\gamma$  e suas derivadas nas equações (3.9), bem como tomando derivadas destas equações (o que é válido por serem identicamente nulas), podemos colocar as equações (3.11) na forma

$$\begin{aligned} -r^2 \Delta \tilde{\gamma} - \lambda r^2 \tilde{\gamma} &= 0 \\ -r^2 \Delta \tilde{\Psi} + (2 - \lambda r^2) \tilde{\Psi} &= 2 \cos^2 \Theta \tilde{\gamma} \\ -r^2 \Delta \tilde{\Phi} + (2 - \lambda r^2) \tilde{\Phi} &= -2 \cos \Theta \frac{\partial \tilde{\gamma}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde definimos o operador Laplaciano de uma função escalar em  $\Sigma$  (coincide com  $\hat{\nabla}^2$ ) na forma

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (1 - 2M/r)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \cotg \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

e  $\tilde{\gamma}$  tem a forma geral obtida acima (ou seja, é uma função dada). Assim o sistema encontra-se formalmente desacoplado, ainda que com termos não-homogêneos. Sua solução

geral na forma completa é dada por

$$\begin{aligned}
\gamma &= (1 - 2M/r)e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}}} \sum_{m=-l}^l \left[ A_m^{(\gamma)} P_l^m(\cos \Theta) + B_m^{(\gamma)} Q_l^m(\cos \Theta) \right] \\
&\quad \left[ C_m^{(\gamma)} \cos m\varphi + D_m^{(\gamma)} \sin m\varphi \right] \\
\Psi &= r^2 e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}}} \left\{ \sum_{m'=-l'}^{l'} (E_{m'} + F_{m'} t) \left[ A_{m'}^{(\Psi)} P_{l'}^{m'}(\cos \Theta) + B_{m'}^{(\Psi)} Q_{l'}^{m'}(\cos \Theta) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ C_{m'}^{(\Psi)} \cos m'\varphi + D_{m'}^{(\Psi)} \sin m'\varphi \right] + \Psi_p(t, \Theta, \varphi) \right\} \\
\Phi &= r^2 e^{\int^r \frac{\kappa dr'}{\sqrt{1 - 2M/r'}}} \left\{ \sum_{m''=-l''}^{l''} (E_{m''} + F_{m''} t) \left[ A_{m''}^{(\Phi)} P_{l''}^{m''}(\cos \Theta) + B_{m''}^{(\Phi)} Q_{l''}^{m''}(\cos \Theta) \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ C_{m''}^{(\Phi)} \cos m''\varphi + D_{m''}^{(\Phi)} \sin m''\varphi \right] + \Phi_p(t, \Theta, \varphi) \right\}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde  $l' = \sqrt{l(l+1) + 9/4} - 1/2$ . Se  $l \geq |m|$  são naturais então  $P_l^m(\cos \Theta)$  são os polinômios associados de Legendre e  $Q_l^m(\cos \Theta)$  as funções associadas de Legendre. As funções  $\Psi_p, \Phi_p$  representam soluções particulares quaisquer do sistema (3.12). Escrevendo formalmente estas funções não-homogêneas na forma

$$\begin{aligned}
\Psi_p &= \sum_{m=-l}^l \left[ A_m^{(\Psi)}(\Theta) P_l^m(\cos \Theta) + B_m^{(\Psi)}(\Theta) Q_l^m(\cos \Theta) \right] \left[ C_m^{(\Psi)} \cos m\varphi + D_m^{(\Psi)} \sin m\varphi \right] \\
\Phi_p &= \sum_{m=-l}^l \left[ A_m^{(\Phi)}(\Theta) P_l^m(\cos \Theta) + B_m^{(\Phi)}(\Theta) Q_l^m(\cos \Theta) \right] \left[ C_m^{(\Phi)} \cos m\varphi + D_m^{(\Phi)} \sin m\varphi \right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

e substituindo essa solução no sistema (3.12) obtemos que  $C_m^{(\Psi)} = D_m^{(\Phi)}/m = C_m^{(\gamma)}$ ,  $D_m^{(\Psi)} = -C_m^{(\Phi)}/m = D_m^{(\gamma)}$ . Os coeficientes  $A_m(\Theta), B_m(\Theta)$  devem satisfazer às equações ordinárias

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{d}{d\Theta} + \left( \cotg \Theta + 2 \frac{\frac{dP_{l'}^m(\cos \Theta)}{d\Theta}}{P_{l'}^m(\cos \Theta)} \right) \right] \frac{dA_{m'}^{(\Psi)}(\Theta)}{d\Theta} &= 2A_m^{(\gamma)} \cos^2 \Theta \frac{P_l^m(\cos \Theta)}{P_{l'}^m(\cos \Theta)} \\
\left[ \frac{d}{d\Theta} + \left( \cotg \Theta + 2 \frac{\frac{dP_{l''}^m(\cos \Theta)}{d\Theta}}{P_{l''}^m(\cos \Theta)} \right) \right] \frac{dA_{m''}^{(\Phi)}(\Theta)}{d\Theta} &= 2A_m^{(\gamma)} \cos \Theta \frac{P_l^m(\cos \Theta)}{P_{l''}^m(\cos \Theta)}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

e analogamente para os coeficientes  $B(\Theta)$  em função de  $Q_{l'}^m(\cos \Theta)$ . As equações (3.15) têm, ambas, a forma

$$\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{f(\Theta)} \frac{df(\Theta)}{d\Theta} Y = Z(\Theta)$$

onde  $f(\Theta) = \sin \Theta (P_l^m(\cos \Theta))^2$ . Essa equação tem solução imediata na forma

$$Y(x) = \frac{1}{f(\Theta)} \int^{\Theta} f(\Theta') Z(\Theta') d\Theta'$$

Com isso as funções não-homogêneas  $\Psi_p$ ,  $\Phi_p$  ficam determinadas por (3.14) com

$$\begin{aligned} A_m^{(\Psi)}(\Theta) &= \int^{\Theta} d\Theta' \frac{1}{\sin \Theta' [P_{l'}^m(\cos \Theta')]^2} \int^{\Theta'} d\Theta'' 2A_m^{(\gamma)} \cos^2 \Theta'' \sin \Theta'' P_{l'}^m(\cos \Theta'') P_l^m(\cos \Theta'') \\ B_m^{(\Psi)}(\Theta) &= \int^{\Theta} d\Theta' \frac{1}{\sin \Theta' [Q_{l'}^m(\cos \Theta')]^2} \int^{\Theta'} d\Theta'' 2B_m^{(\gamma)} \cos^2 \Theta'' \sin \Theta'' Q_{l'}^m(\cos \Theta'') Q_l^m(\cos \Theta'') \\ A_m^{(\Phi)}(\Theta) &= \int^{\Theta} d\Theta' \frac{1}{\sin \Theta' [P_{l'}^m(\cos \Theta')]^2} \int^{\Theta'} d\Theta'' 2A_m^{(\gamma)} \cos \Theta'' \sin \Theta'' P_{l'}^m(\cos \Theta'') P_l^m(\cos \Theta'') \\ B_m^{(\Phi)}(\Theta) &= \int^{\Theta} d\Theta' \frac{1}{\sin \Theta' [Q_{l'}^m(\cos \Theta')]^2} \int^{\Theta'} d\Theta'' 2B_m^{(\gamma)} \cos \Theta'' \sin \Theta'' Q_{l'}^m(\cos \Theta'') Q_l^m(\cos \Theta'') \end{aligned} \quad (3.16)$$

Observa-se, em particular, que a solução geral (3.13) não apresenta dependência temporal na forma oscilatória, como seria de esperar para uma geometria estática. Isto se deve ao vínculo imposto pela divergência nula. Este fato será revisto na subseção 3.1.2, onde obteremos uma dependência temporal satisfatória — embora a dependência no setor angular resulte restrita.

Observamos ainda que, embora o sistema (3.12) esteja formalmente integrado, as soluções acima não apresentam um comportamento razoável, visto que não existe solução tal que  $l, l'$  sejam simultaneamente naturais (como requerem os polinômios de Legendre) senão para o par  $l = 0, l' = 1$ . Além disso resta verificar se tais expressões satisfazem aos vínculos (3.9). Todavia, é imediato observar que as soluções (3.13) obtidas acima (3.14, 3.16) não são raízes desses vínculos para nenhuma escolha possível das constantes arbitrárias que figuram em (3.13) tal que o número de componentes da base permaneça inalterado.

Não faremos uso, neste trabalho, da base geral discutida acima (nem sequer de sua eventual existência), mas tão somente da base de uma sub-variedade tal que a componente  $\gamma$  é identicamente nula (ou seja, intrinsecamente relativa às coordenadas angulares). Isto evita o vínculo  $\partial\gamma/\partial t = 0$ , possibilitando a existência de soluções não contidas nas

expressões (3.13), (3.14) e (3.16) acima, conforme veremos na subseção 3.1.2.

### 3.1.2 A Base Tensorial Restrita

Além das equações (3.5), admitiremos que, conforme a aplicação prevista no capítulo 2, esta base seja tal que sua contração completa com a deformação seja identicamente nula,  $\sigma : U \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{\alpha\beta} U_{\alpha\beta} = 0$ . Este vínculo adicional equivale a dizer que uma sub-variedade (na realidade um espaço vetorial) das funções tensoriais está sendo considerada. Isto significa, em componentes, que  $U_{tt} = 0$ . Lembrando que  $U_{t\Theta} = U_{t\varphi} = 0$  (3.8) obtem-se que a base tensorial satisfaz ao vínculo adicional

$$U_{\alpha\beta} V^\beta = 0 \quad (3.17)$$

Desta forma, as componentes não nulas da base tensorial  $U_{\mu\nu}$  correspondem somente ao setor angular. Denominando-as por

$$\begin{aligned} U_{\Theta\Theta}(x^\rho) &= \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \Psi(t, r, \Theta, \varphi) \\ U_{\Theta\varphi}(x^\rho) &= \frac{1}{\text{sen}\Theta} \Phi(t, r, \Theta, \varphi) \end{aligned}$$

com  $U_{\varphi\varphi} = -\Psi$ . Resulta que a equação da divergência de  $U_{\mu\nu}$  tem a forma

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}^\beta U_{\Theta\beta} &= -\frac{1}{r^2 \text{sen}^2\Theta} \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \right] \\ \hat{\nabla}^\beta U_{\varphi\beta} &= -\frac{1}{r^2 \text{sen}\Theta} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} - \frac{1}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Derivando as equações (3.18) com respeito às variáveis angulares e substituindo no resultado estas mesmas expressões obtem-se duas equações parciais desacopladas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Theta^2} + \cotg\Theta \frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2} + \cotg\Theta \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

A equação radial do sistema (3.5) torna-se

$$\begin{aligned}
\text{sen}^2\Theta \perp \dot{U}_{\Theta\Theta} &= \sqrt{1 - 2M/r} \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\Psi \right] = \kappa \Psi \\
\text{sen}\Theta \perp \dot{U}_{\Theta\varphi} &= \sqrt{1 - 2M/r} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \frac{2}{r}\Phi \right] = \kappa \Phi \\
-\perp \dot{U}_{\varphi\varphi} &= \sqrt{1 - 2M/r} \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\Psi \right] = \kappa \Psi
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A equação de autovalores do sistema (3.5), escrita em componentes, tem a forma

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}^2 U_{\Theta\Theta} &= \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \left[ (1 - 2M/r)^{-1} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{2}{r^2}\Psi \right] \\
\hat{\nabla}^2 U_{\Theta\varphi} &= \frac{1}{\text{sen}\Theta} \left[ (1 - 2M/r)^{-1} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{2}{r^2}\Phi \right] \\
\hat{\nabla}^2 U_{\varphi\varphi} &= - \left[ (1 - 2M/r)^{-1} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \frac{2}{r^2}\Psi \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Obtemos assim as equações de dependência radial (3.20), temporal (3.21) e angular (3.19) das componentes da base tensorial  $U_{\mu\nu}$  que satisfazem o sistema diferencial (3.5). A integração coerente destes sistemas desacoplados é imediata e resulta na solução

$$\begin{aligned}
U_{\Theta\Theta} &= G(r) (A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t) [(C + D \cos \Theta)/\text{sen} \Theta (E \cos \varphi + F \text{sen} \varphi) + K]/\text{sen}^2 \Theta \\
U_{\Theta\varphi} &= -G(r) (A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t) [(D + C \cos \Theta)/\text{sen} \Theta (F \cos \varphi - E \text{sen} \varphi) + L]/\text{sen} \Theta \\
U_{\varphi\varphi} &= -G(r) (A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t) [(C + D \cos \Theta)/\text{sen} \Theta (E \cos \varphi + F \text{sen} \varphi) + K]
\end{aligned} \tag{3.22}$$

onde  $A, B, C, D, E, K, L$  são constantes arbitrárias, e definimos por conveniência a função auxiliar

$$G(r) \stackrel{\text{def}}{=} r^2 e^{\int^r \frac{\kappa(r')}{\sqrt{1 - 2M/r'}} dr'}$$

e o autovalor é dado por

$$\lambda \equiv \frac{2}{r^2} + \frac{\omega^2}{1 - 2M/r}, \quad \omega \in (0, \infty) \tag{3.23}$$

Observa-se que a solução obtida representa uma família a um parâmetro  $\omega$  (contínuo), que caracteriza a frequência própria de oscilação do modo considerado. Todavia, as

equações (3.21) admitem solução também para frequências imaginárias:

$$\begin{aligned}
 U_{\Theta\Theta} &= G(r) (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) [(C + D \cos \Theta) / \text{sen } \Theta (E \cos \varphi + F \text{sen } \varphi) + K] / \text{sen}^2 \Theta \\
 U_{\Theta\varphi} &= -G(r) (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) [(D + C \cos \Theta) / \text{sen } \Theta (F \cos \varphi - E \text{sen } \varphi) + L] / \text{sen } \Theta \\
 U_{\varphi\varphi} &= -G(r) (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}) [(C + D \cos \Theta) / \text{sen } \Theta (E \cos \varphi + F \text{sen } \varphi) + K]
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

onde o novo autovalor é

$$\lambda \equiv \frac{2}{r^2} - \frac{\omega^2}{1 - 2M/r}, \quad \omega \in (0, \infty)
 \tag{3.25}$$

A presença das exponenciais positivas, correspondendo ao coeficiente  $A$  em (3.24), confere às soluções associadas um caráter de instabilidade. A possibilidade de construir perturbações tensoriais instáveis, analisadas no Capítulo 5, traduzir-se-á em encontrar soluções de equações diferenciais expandidas na base (3.24) ao invés de (3.22). Explcitaremos o cálculo apenas para esta última, obtendo a eventual solução instável pela operação  $\omega \mapsto i\omega$  aplicada<sup>4</sup> sobre a solução já obtida para o caso estável.

Ademais, cumpre notar que os modos acima — sejam eles estáveis (3.22) ou instáveis (3.24) — não transportam momentum angular; este fato, embora notável, pode ser observado diretamente das equações de vínculo (3.19), antes mesmo da integração do sistema. Esta ausência se constitui na principal diferença no conceito de perturbação tensorial aqui apresentado. Em restringindo a base tensorial é, em princípio, possível que seus coeficientes perturbativos sejam mais gerais que na formulação usual (o que efetivamente parece ocorrer no capítulo 5). Contudo isso não deveria ser surpreendente, visto que a base restrita é 2-dimensional.

Com efeito, um exemplo simples deste fato já ocorre na esfera unitária 2-dimensional

$${}^{(esf)}ds^2 = d\Theta^2 + \text{sen}^2\Theta d\varphi^2$$

---

<sup>4</sup>A redenominação das constantes arbitrárias  $A$  e  $B$ , necessária para explicitar essa simetria entre as soluções (3.22) e (3.24) não é relevante.

para a qual a correspondente base tensorial

$$U_{\mu\nu}^{(esf)} = \begin{pmatrix} \psi^{(esf)}/\text{sen}^2\Theta & \gamma^{(esf)}/\text{sen}\Theta \\ \gamma^{(esf)}/\text{sen}\Theta & -\dot{\psi}^{(esf)} \end{pmatrix}$$

apresenta divergência

$$\text{div } U_{\alpha}^{(esf)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \left[ \frac{\partial\psi^{(esf)}}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial\gamma^{(esf)}}{\partial\varphi} \right] \\ \frac{1}{\text{sen}\Theta} \left[ \frac{\partial\gamma^{(esf)}}{\partial\Theta} - \frac{1}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial\dot{\psi}^{(esf)}}{\partial\varphi} \right] \end{pmatrix} = 0$$

tal que sua forma desacoplada

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} + \cotg\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \psi^{(esf)} &= 0 \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial\Theta^2} + \cotg\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] \gamma^{(esf)} &= 0 \end{aligned}$$

explicita a ausência de momentum angular. É curioso, entretanto, que semelhante efeito não ocorre nas bases escalar e vetorial.

Decorre da solução (3.22) acima que a componente dual da base tensorial tem forma igualmente 2-dimensional

$$\begin{aligned} U^*_{\Theta\varphi} &= \frac{(1-2M/r)^{-1/2}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial}{\partial t} U_{\Theta\Theta} \\ U^*_{\varphi\varphi} &= \frac{(1-2M/r)^{-1/2}}{\text{sen}\Theta} \frac{\partial}{\partial t} U_{\Theta\varphi} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Será importante no uso da base tensorial observar que, devido a propriedade (3.17),  $\sigma^\mu{}_\nu = -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} [h^\mu{}_\nu - 3V^\mu V_\nu]$  implica que a contração do tensor de shear com a base tensorial  $U_{\mu\nu}$  pode ser expressa na forma

$$\sigma^\lambda{}_\mu U_{\nu\lambda} = -\frac{\sigma^3}{\sigma^2} U_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

Equação análoga é válida para a base dual.

Com isto podemos explicitar a operação de dupla dualidade sobre a base tensorial

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}^{**} &= h^\lambda{}_{(\mu}\eta_{\nu)}{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \hat{\nabla}_\beta \left[ h^\epsilon{}_{(\alpha}\eta_{\lambda)}{}^{\rho\sigma\tau} n_\tau \hat{\nabla}_\sigma U_{\rho\epsilon} \right] = \frac{1}{2} h_{\lambda(\mu}\eta_{\nu)\alpha\beta\gamma} \left[ \eta^{\lambda\rho\sigma\tau} h^{\alpha\epsilon} + \eta^{\alpha\rho\sigma\tau} h^{\lambda\epsilon} \right] n^\gamma n_\tau \hat{\nabla}^\beta \hat{\nabla}_\sigma U_{\rho\epsilon} \\
&= -(4!) \frac{1}{2} h_{\lambda(\mu} \left[ \delta^{\lambda\alpha}{}_{\nu)} \delta^\rho{}_\alpha \delta^\sigma{}_\beta \delta^{\tau\gamma} h^{\alpha\epsilon} + \delta^{\lambda\alpha}{}_{\nu)} \delta^\rho{}_\alpha \delta^\sigma{}_\beta \delta^{\tau\gamma} h^{\lambda\epsilon} \right] n^\gamma n_\tau \hat{\nabla}^\beta \hat{\nabla}_\sigma U_{\rho\epsilon} \\
&= \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left[ h^{\epsilon\rho} \hat{\nabla}^2 U_{\rho\epsilon} - \hat{\nabla}^\rho \hat{\nabla}^\epsilon U_{\rho\epsilon} \right] + \frac{1}{2} \left[ h^3{}_{(\mu} h^{\rho\nu)} \left( \hat{\nabla}_\beta \hat{\nabla}^\epsilon U_{\rho\epsilon} - h^{\sigma\epsilon} \hat{\nabla}_\beta \hat{\nabla}_\rho U_{\sigma\epsilon} \right) \right] + \\
&\quad - \left[ h^\epsilon{}_{(\mu} h^{\epsilon\nu)} \left( \hat{\nabla}^2 U_{\rho\epsilon} - \hat{\nabla}^\sigma \hat{\nabla}_\rho U_{\epsilon\sigma} \right) \right] = \lambda U_{\mu\nu} + h^\alpha{}_{(\mu} h^{\beta\nu)} \hat{\nabla}^\epsilon \hat{\nabla}_\alpha U_{\beta\epsilon} \\
&= \lambda U_{\mu\nu} + h^\alpha{}_{(\mu} h^{\beta\nu)} \left[ \hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}^\epsilon U_{\beta\epsilon} + \left( \hat{R}^\tau{}_{\beta\alpha}{}^\epsilon U_{\tau\epsilon} + \hat{R}^\tau{}_{\epsilon\alpha}{}^\epsilon U_{\beta\tau} \right) \right] \\
&= \lambda U_{\mu\nu} + h^\alpha{}_{(\mu} h^{\beta\nu)} \left\{ \perp \left[ -R_{\alpha\beta\gamma\tau} - 2 \left( \sigma_{\beta[\gamma} + \frac{\theta}{3} h_{\beta[\gamma} \right) \left( \sigma_{\tau]\alpha} + \frac{\theta}{3} h_{\tau]\alpha} \right) \right] U^{\beta\tau} + \right. \\
&\quad \left. + \perp \left[ R^\lambda{}_\alpha + R^\lambda{}_{\epsilon\alpha\tau} n^\epsilon n^\tau + \left( \sigma^{\lambda\epsilon} + \frac{\theta}{3} h^{\lambda\epsilon} \right) \left( \sigma_{\epsilon\alpha} + \frac{\theta}{3} h_{\epsilon\alpha} \right) - \theta \left( \sigma^\lambda{}_\alpha + \frac{\theta}{3} h^\lambda{}_\alpha \right) \right] U_{\gamma\lambda} \right\} \\
&= \left[ \lambda - \frac{\theta^2}{3} + \theta \frac{\sigma^3}{\sigma^2} - 3 \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma : E}{\sigma^2} - \left( 2 \left( \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \right)^2 - \frac{\sigma^2}{3} \right) \right] U_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

na forma

$$U_{\mu\nu}^{**} = \left[ \lambda - \frac{\theta^2}{3} + \theta \frac{\sigma^3}{\sigma^2} - 3 \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \right] U_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

A existência de relações da forma (3.27) e (3.28) representam a particularidade do sistema de Schwarzschild que permite a aplicação do método do capítulo 2, possibilitando a completa fatoração da base nas equações (2.9). Nestes casos o uso da base restrita (3.22) — ainda que não explicitamente — permitirá então transformar equações diferenciais parciais tensoriais (tais como as que regem as perturbações tensoriais propostas) em equações diferenciais ordinárias escalares.

# Capítulo 4

## Perturbações Escalares e Vetoriais

Ao estabelecermos, no Capítulo 5 a seguir, o núcleo de equações (5.2) a partir de (2.4, 2.5, 2.6), desconsideraremos as perturbações no termo  $\hat{\nabla}_\alpha \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2}$  por apresentar somente a contribuição dos termos escalar e vetorial. Para tratar dessas componentes<sup>1</sup>, contudo, faz-se necessário ampliar o conjunto de variáveis perturbativas. Assim a propagação daquele gradiente ao longo da congruência  $n$  fornece

$$\begin{aligned} \perp \left[ \hat{\nabla}_\alpha \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right] &= \perp h_\alpha^\beta \left[ \left( \dot{h}_3^\lambda \nabla_\lambda + \nabla_n \nabla_\beta \right) \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right] = \perp \left\{ a_\alpha \nabla_n \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} + h_\alpha^\beta \left[ \nabla_\beta \nabla_n \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} - (\nabla_\beta n^\lambda) \nabla_\lambda \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \left[ 2a_\alpha + \hat{\nabla}_\alpha \right] \nabla_n \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} - \left( \frac{\theta}{3} h_\alpha^\beta + \sigma_\alpha^\beta + \omega \alpha^\beta \right) \nabla_\beta \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

onde o primeiro termo deve ser expandido em termos das derivadas radiais de  $\sigma_{\mu\nu}$  e  $E_{\mu\nu}$ , sendo estas obtidas das expressões (A.5, A.9) no apêndice. Somente apresentaremos aqui o cálculo correto até primeira ordem de perturbação. Assim, lembrando que as derivadas  $\hat{\nabla}$  das funções do 'background' são nulas, o primeiro termo acima resulta

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\alpha \left\{ \left[ \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\mu\nu} \right] \perp \dot{E}_{\mu\nu} + \frac{1}{\sigma^2} \left[ E^{\mu\nu} - 2 \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \sigma^{\mu\nu} \right] \perp \dot{\sigma}_{\mu\nu} \right\} &\approx \\ \approx \hat{\nabla}_\alpha \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \sigma^{\mu\nu} \left[ -\theta E_{\mu\nu} + 3 \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \sigma_{\mu\nu}^2 \right] + \frac{1}{\sigma^2} \left( -\frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \sigma^{\mu\nu} \right) \left[ \left( \frac{\sigma^3}{\sigma^2} - \frac{2}{3} \theta - \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right) \sigma_{\mu\nu} \right] \right\} \\ = \hat{\nabla}_\alpha \left[ \left( -\frac{\theta}{3} + 5 \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right) \frac{\sigma_{:E}}{\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Necessário, devido à presença essencial do momentum angular, se quisermos determinar correções perturbativas no horizonte [37, 38], as quais dependem da escolha de calibre.

Desta forma a propagação dessa quantidade introduz uma nova, dada pela derivada do termo entre parêntesis na última igualdade acima, cuja equação de propagação deve também ser considerada. Nesta o último termo consiste no cálculo anterior: para os demais temos o mesmo algoritmo acima para a comutação das derivadas  $\nabla_n$  e  $\hat{\nabla}$ . Os termos remanescentes são calculados

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma^3}{\sigma^2}\right)' &= \frac{\sigma^3}{(\sigma^2)^2} \sigma^{\mu\nu} \perp \dot{\sigma}_{\mu\nu} \approx \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma : E}{\sigma^2} \\ \dot{\theta} &\approx -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^2 - \frac{1}{2}(\rho + p)\theta \\ (\sigma^2)' &\approx \sigma : E \\ \dot{\rho} &\approx -\theta(\rho + p) \end{aligned}$$

onde já incluímos as duas últimas grandezas escalares que apareceriam sob derivação na hipersuperfície. Desta forma, se colecionarmos os resultados, obteremos um sistema composto pelos 4 tensores  $X_{\mu\nu}$ ,  $Y_{\mu\nu}$ ,  $Z_{\mu\nu}$ ,  $\Pi_{\mu\nu}$  e os 3 vetores  $\omega_\mu$ ,  $a_\mu$ ,  $q_\mu$ , juntamente com os 4 gradientes projetados

$$\hat{\nabla}_\alpha \theta, \quad \hat{\nabla}_\alpha \frac{\sigma^3}{\sigma^2}, \quad \hat{\nabla}_\alpha \sigma^2, \quad \hat{\nabla}_\alpha \frac{\sigma : E}{\sigma^2}$$

e os 2 escalares  $\rho$  e  $\frac{\sigma : H}{\sigma^2}$  (lembrando que as equações de estado termodinâmicas fornecem  $p = \lambda\rho$  e  $\Pi_{\mu\nu} = \xi\sigma_{\mu\nu}$ ), totalizando treze variáveis perturbativas independentes. Não analisaremos a estabilidade desse sistema no presente trabalho.

# Capítulo 5

## Perturbações Tensoriais

No presente trabalho estamos interessados somente na componente tensorial, e dado que limitar-nos-emos a perturbações lineares não ocorre acoplamento entre modos distintos. Com isso faremos a hipótese de trabalho

$$X_{(\lambda_s)}(r) = X_{(\lambda_v)}(r) = Y_{(\lambda_s)}(r) = Y_{(\lambda_v)}(r) = Z_{(\lambda_v)}(r) = 0 \quad (5.1)$$

Para simplificar a grafia das expressões resultantes, haja visto o número de termos envolvidos, omitiremos o sinal de soma — as quais representam, de fato, integrais na frequência  $\omega$  — bem como o rótulo, e escreveremos  $\lambda := \lambda_t$  (conforme notação do capítulo 3).

Substituindo nas equações (2.4)-(2.5)-(2.6) as expansões (2.9) e fazendo uso das propriedades (3.5), (3.27) e (3.28) da base tensorial (3.22)<sup>1</sup> obtida no capítulo 3, e mantendo somente os termos lineares nos escalares infinitesimais  $X_{(\lambda)}(r)$ ,  $Y_{(\lambda)}(r)$ ,  $Z_{(\lambda)}(r)$  — os quais, por simplicidade, serão aqui denotados por  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente — obtemos

$$\begin{aligned} [\dot{X} + \left(\frac{4}{3}\theta - \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + 2\frac{\sigma:E}{\sigma^2}\right) X + 3Y] U_{\mu\nu} &= 0 \\ [\dot{Y} + \left(4\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma:E}{\sigma^2}\right) X + \left(\theta + 3\frac{\sigma^3}{\sigma^2} - \frac{\sigma:E}{\sigma^2}\right) Y + \left(-\frac{\theta^2}{3} + \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \left(\theta - 3\frac{\sigma:E}{\sigma^2}\right) + \lambda\right) Z] U_{\mu\nu} &= 0 \\ [\dot{Z} - Y + \left(\theta + 3\frac{\sigma^3}{\sigma^2} - \frac{\sigma:E}{\sigma^2}\right) Z] U_{\mu\nu}^* &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

---

<sup>1</sup>Lembrando a observação que segue à Eq. (3.25) no que tange à análise da estabilidade da geometria.

Introduziremos agora, para descrever a "evolução" do sistema (5.2), uma notação matricial 3-dimensional. Definimos

$$\mathcal{X} := \begin{pmatrix} k_1 X \\ k_2 Y \\ k_3 Z \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

onde os parâmetros  $k_i$  são dados por

$$\begin{aligned} k_1 &= e^{\int^r \left( \frac{4}{3}\theta - \frac{\sigma^3}{\sigma^2} + 2\frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2} \right) (r') dr'} \\ k_2 &= e^{\int^r \left( \theta + 3\frac{\sigma^3}{\sigma^2} - \frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2} \right) (r') dr'} \\ k_3 &= e^{\int^r \left( \theta + 3\frac{\sigma^3}{\sigma^2} - \frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2} \right) (r') dr'} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Com isto obtemos

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathcal{M} \cdot \mathcal{X} \quad (5.5)$$

onde

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & d \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a &= -3\frac{k_1}{k_2} \\ b &= -\frac{k_2}{k_1} \left( 4\frac{\sigma^3}{\sigma^2} \frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2} \right) \\ c &= \frac{k_3}{k_2} \\ d &= \frac{k_2}{k_3} \left[ \frac{\theta^2}{3} - \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \left( \theta - 3\frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2} \right) - \lambda \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

É notável que somente o coeficiente  $d$  nas expressões (5.6) acima carrega a memória da frequência característica  $\omega$  do modo correspondente, codificada no parâmetro  $\lambda$  (3.22).

Das expressões (1.5), (1.6) e (1.7) resulta que as integrais que figuram nas expressões (5.4) podem ser reduzidas algebricamente ao cálculo de

$$\begin{aligned} \int^r \theta(r') dr' &= \int^r \frac{1}{r'} \frac{(2 - 3M/r')}{\sqrt{1 - 2M/r'}} dr' \\ \int^r \frac{\sigma^3}{\sigma^2}(r') dr' &= -\int^r \frac{1}{3r'} \frac{(1 - 3M/r')}{\sqrt{1 - 2M/r'}} dr' \\ \int^r \frac{\sigma \cdot E}{\sigma^2}(r') dr' &= -\int^r \frac{3M}{r'^2} \frac{\sqrt{1 - 2M/r'}}{(1 - 3M/r')} dr' = -(3M)^2 \left[ \sqrt{1 - 2M/r} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{1 - 2M/r} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 - 2M/r} + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right] \end{aligned}$$

Observa-se que as duas primeiras integrais acima expressam-se em termos de

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{x(x-2M)}}$$

para  $n = \{0, 1\}$ , sendo ambas tabeladas [39]. Com isto obtemos que os parâmetros de renormalização  $k_i$  (5.4) são dados<sup>2</sup> por

$$\begin{aligned} k_1 &= \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+1}}{\sqrt{1-2M/r-1}} \right]^3 \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+\sqrt{1/3}}}{\sqrt{1-2M/r-\sqrt{1/3}}} \right]^{2/\sqrt{3}} e^{-9\sqrt{1-2M/r}} \\ k_2 &= \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+1}}{\sqrt{1-2M/r-1}} \right] \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+\sqrt{1/3}}}{\sqrt{1-2M/r-\sqrt{1/3}}} \right]^{1/\sqrt{3}} e^{-2\sqrt{1-2M/r}} \\ k_3 &= k_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde os coeficientes da matriz  $\mathcal{M}$  (5.6) que fornece a dinâmica do sistema têm a forma

$$\begin{aligned} a &= -3 \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+1}}{\sqrt{1-2M/r-1}} \right]^2 \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r+\sqrt{1/3}}}{\sqrt{1-2M/r-\sqrt{1/3}}} \right]^{1/\sqrt{3}} e^{-7\sqrt{1-2M/r}} \\ b &= -\frac{4M}{r^3} \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r-1}}{\sqrt{1-2M/r+1}} \right]^2 \left[ \frac{\sqrt{1-2M/r-\sqrt{1/3}}}{\sqrt{1-2M/r+\sqrt{1/3}}} \right]^{1/\sqrt{3}} e^{7\sqrt{1-2M/r}} \\ c &= 1 \\ d &= -\frac{\omega^2}{1-2M/r} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Os coeficientes  $k_i$  foram escolhidos de modo a obtermos uma matriz  $\mathcal{M}$  algebricamente simples:  $Tr \mathcal{M} = \det \mathcal{M} = 0$ . Esta matriz apresenta três autovetores distintos

$$\begin{cases} \mathcal{M} \cdot \mathcal{V}_\pm = \pm \psi \mathcal{V}_\pm \\ \mathcal{M} \cdot \mathcal{V}_o = 0 \end{cases} \quad \psi = \sqrt{ab+cd} \quad (5.9)$$

<sup>2</sup>Nas expressões de  $k_i$  (5.7) e de  $a, b$  (5.8) foram omitidas (por simplicidade de notação) constantes multiplicativas arbitrárias, decorrentes das integrais formais em (5.4). No que segue, contudo, suporemos fixadas tais constantes de tal forma que  $k_i(r_o) = 1$ .

dados em termos dos coeficientes da matriz  $\mathcal{M}$ , Eq. (5.6), por

$$\mathcal{V}_{\pm} = \begin{pmatrix} a \\ \pm\psi \\ c \end{pmatrix} \quad \mathcal{V}_o = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Embora este sistema (5.5) seja de difícil solução analítica exata<sup>3</sup>, é possível obter aspectos qualitativos de interesse do problema sem requerer uma análise numérica. Da definição de  $\psi$ , Eq. (5.9) escrita em termos das expressões explícitas (5.8) acima temos  $\psi^2 = 12M/r^3 - \omega^2/(1 - 2M/r)$ , donde  $\psi \in \mathcal{R}$  se, e somente se, a frequência  $\omega$  estiver restrita ao intervalo

$$\omega \in (0, \sqrt{\frac{12M}{r^3}(1 - 2M/r)}] \quad (5.11)$$

A curva (Fig. 5.1) que descreve a máxima frequência de oscilação correspondente assemelha-se, nesta região, àquela de um espectro térmico<sup>4</sup> (todavia decaindo mais lentamente que este), atingindo sua magnitude máxima

$$M\omega_{max} = \frac{9}{32}\sqrt{2} \approx 0.3977 \quad (5.12)$$

para

$$r_{max} = \frac{8}{3}M$$

Tais modos correspondem, tipicamente, a frequências de oscilação temporal da ordem de  $2/5$  (em unidades geométricas por unidade de massa da fonte, o que equivale a cerca de  $30MHz$  para  $M \approx 3M_{\odot}$ ) ou menores.

Todavia é possível violar a condição (5.11) utilizando a solução tensorial instável (3.24),

<sup>3</sup>Apresentaremos a seguir sua descrição assintótica (seção 5.1).

<sup>4</sup>Observa-se que a expressão a seguir é formalmente equivalente à lei de deslocamento de Wien, visto que, de acordo com a termodinâmica de buracos negros [40] é possível associar-lhes uma temperatura  $T_{BH}$  proporcional ao inverso de sua massa  $M$ . Entretanto cumpre notar que a Fig. 5.1 não é um gráfico de *Intensidade*  $\times$  *Comprimento de onda*, mas sim de  $(\text{Frequência})^2 \times \text{Posição}$ . Desta forma a aparente analogia parece pouco relevante, e não será considerada no presente trabalho.

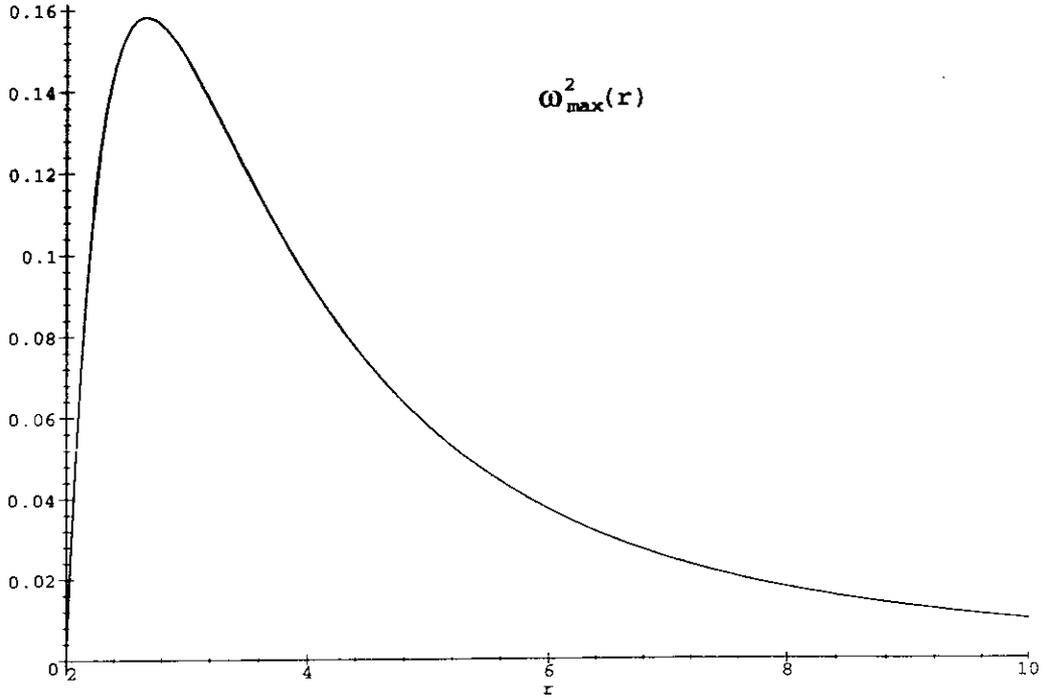


Figura 5.1: Freqüência máxima  $\omega$  de oscilação do modo tensorial (3.23) tal que  $v(r) \in \mathcal{R}$ .

donde  $\omega \mapsto i\omega$  fornece

$$\psi^2 = \frac{12M}{r^3} + \frac{\omega^2}{1 - 2M/r} \quad (5.13)$$

Assim  $\psi$  torna-se real para qualquer valor da freqüência  $\omega$ .

Observa-se que os autovetores (5.10) dependem explicitamente da coordenada radial, e sua álgebra apresenta uma matriz

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_+ \\ \mathcal{V}_- \\ \mathcal{V}_o \end{pmatrix} \bullet = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}B \\ C & D_+ & D_- \\ C & D_- & D_+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{V}_+ \\ \mathcal{V}_- \\ \mathcal{V}_o \end{pmatrix}$$

com coeficientes

$$\begin{aligned} A &= \frac{ac+bd}{ac+bd} & B &= \frac{bc-bc}{ac+bd} \\ C &= \frac{ad-ad}{ac+bd} & D_{\pm} &= \frac{1}{2} \left( \frac{ac+bd}{ac+bd} \pm \frac{\psi}{\psi} \right) \end{aligned}$$

mais complicada do que a matriz  $\mathcal{M}$  original. Este fato torna pouco prático o uso dos autovetores  $\mathcal{V}_k$  para a expansão do vetor de perturbação  $\mathcal{X}$ .

## 5.1 Limites Assintóticos

A estrutura algébrica de  $\mathcal{M}$  permite grande simplificação no limite assintótico de  $r \approx r_o$ . Neste caso a equação (5.5) apresenta solução na forma

$$\mathcal{X}(r) \approx e^{(r-r_o) \cdot \mathcal{M}(r_o)} \mathcal{X}(r_o) \quad (5.14)$$

Observando que

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 & ad \\ 0 & \psi^2 & 0 \\ bc & 0 & cd \end{pmatrix}$$

donde  $\mathcal{M}^3 = \psi^2 \mathcal{M}$ , a exponencial da matriz acima se escreve

$$\begin{aligned} e^{(r-r_o) \cdot \mathcal{M}(r_o)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (r-r_o)^k \mathcal{M}^k(r_o) \\ &= \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (r-r_o)^{(2k+1)} \mathcal{M}^{(2k+1)}(r_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (r-r_o)^{2k} \mathcal{M}^{2k}(r_o) \\ &= \mathbb{1} + \frac{\mathcal{M}(r_o)}{\psi(r_o)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} [(r-r_o)\psi(r_o)]^{(2k+1)} + \frac{\mathcal{M}^2(r_o)}{\psi^2(r_o)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} [(r-r_o)\psi(r_o)]^{2k} \\ &= \mathbb{1} + \frac{\sinh\left(\frac{(r-r_o)\psi(r_o)}{\psi(r_o)}\right)}{\psi(r_o)} \mathcal{M}(r_o) + \frac{\cosh\left(\frac{(r-r_o)\psi(r_o)}{\psi(r_o)}\right) - 1}{\psi^2(r_o)} \mathcal{M}^2(r_o) \end{aligned}$$

onde, por consistência, somente o primeiro termo das séries acima deve ser considerado. A solução (5.14) acima, válida para  $r \sim r_o$ , está claramente bem definida para qualquer ponto inicial  $r_o$  distinto das raízes de  $\psi(r)$ , e tem comportamento diferenciável nessa região.

O outro limite assintótico de interesse,  $r \gg r_o$ , requer uma análise bastante distinta.

O sistema (5.5) pode ser substituído genericamente por uma única equação diferencial ordinária de terceira ordem para  $k_3 Z^5$ .

$$(k_3 Z)''' = A_2(k_3 Z)'' + A_1(k_3 Z)' + A_0(k_3 Z) \quad (5.15)$$

sendo as demais amplitudes perturbativas obtidas a partir da solução de (5.15) por derivação:  $k_2 Y = (k_3 Z)' / c$ ,  $k_1 X = [(k_2 Y)' - d(k_3 Z)] / b$ . Os coeficientes  $A_i$ , associados à base estável (3.22), são dados por

$$\begin{aligned} A_2 &= 2\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{b}}{b} \underset{r \gg r_o}{\approx} -\frac{3}{r} \\ A_1 &= \psi^2 + \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{b}}{b} \frac{\dot{c}}{c} \underset{r \gg r_o}{\approx} -\omega^2 \\ A_0 &= cd \left[ \frac{d}{d} - \frac{b}{b} \right] \underset{r \gg r_o}{\approx} -\frac{3}{r} \omega^2 \end{aligned}$$

desde que  $\omega r \gg 1$  (o que é compatível com o limite em questão). A equação (5.15) pode ser facilmente resolvida reescrevendo-a em termos de  $F[k_3 Z] \stackrel{\text{def}}{=} (k_3 Z)'' + \omega^2(k_3 Z)$  como

$$\dot{F} + \frac{3}{r} F = 0 \quad (5.16)$$

A solução para o coeficiente de Fourier  $Z(r)$  neste limite é então

$$k_3(r)Z(r) \underset{r \gg r_o}{\approx} A \sin \omega r + B \cos \omega r + \left\{ \int^r dr' \left[ \frac{1}{\cos^2 \omega r'} \int^{r'} dr'' \left( \frac{r_o}{r''} \right)^3 \cos \omega r'' \right] \right\} \quad (5.17)$$

onde  $A$ ,  $B$ , bem como  $r_o$ , são constantes de integração.

De posse das soluções assintóticas (5.14) e (5.17) podemos interpretar fisicamente a Figura 5.1 acima.

- **Solução estável** – Para este caso a curva (5.11) ilustrada na Figura 5.1 apresenta uma estreita faixa de modos localmente oscilatórios (região abaixo da curva) sepa-

---

<sup>5</sup>Embora formalmente qualquer das três variáveis seja equivalente para ser definida diretamente, as equações diferenciais alternativas resultantes são mais complicadas.

rada da região com modos localmente amplificados (ou amortecidos) com respeito à distância à origem, limitada às frequências<sup>6</sup>  $\omega < \omega_{max}(r_o) \lesssim \frac{2}{5M}$ . Todos esses modos, entretanto, têm comportamento oscilatório a grandes distâncias (5.17).

- **Solução instável** - Neste caso  $\psi(r)$  é real, donde as funções trigonométricas que aparecem em (5.14) são efetivamente hiperbólicas. Dado que essas relações são corretas somente até primeira ordem em  $(r - r_o)$  esta diferença é mais sutil do que aparenta, representando apenas uma tendência à amplificação/amortecimento ou à oscilação conforme o caso. Na expressão (5.17) as funções trigonométricas elípticas tornam-se igualmente hiperbólicas, devido à “rotação de Wick” na frequência. Com isto o modo instável se constitui de amplificação/amortecimento radial com frequência dependente de posição:  $\psi(r_0)$  para  $r \approx r_o$ , e  $\omega$  para  $r \rightarrow \infty$ : observa-se que  $\lim_{r \rightarrow \infty} |\psi| = \omega$ , donde esses limites assintóticos devem admitir solução analítica regular. Todavia, as soluções contendo exponenciais (radiais) crescentes de (5.17) devem ser fisicamente eliminadas<sup>7</sup>, restando somente os termos de amortecimento (radial) exponencial. Com isso, a única possibilidade de observação desses modos temporalmente instáveis, se as correspondentes soluções assintóticas forem efetivamente compatíveis, está espacialmente confinada à vizinhança imediata de  $r_o$  onde a perturbação foi produzida.

## 5.2 Uma Solução Particular

Embora o sistema (5.2) seja de difícil de ser resolvido exatamente no caso geral, é possível obter soluções analíticas reduzindo-lhe o número de variáveis por meio de uma escolha adequada de vínculos *ad hoc* (ou seja, efetivados pela perturbação sem que fossem

---

<sup>6</sup>É notável a existência de um espectro cosmológico de ondas gravitacionais de (muito) baixas frequências passíveis de serem detectadas por sua interação com sistemas binários [41]. Isto sugere a existência de uma relação entre a magnitude desta frequência característica e a ordem de grandeza do horizonte (cuja natureza física é claramente distinta) em cada caso.

<sup>7</sup>Lembramos que estamos analisando a transformada de Fourier temporal das perturbações, e uma tal divergência no infinito impossibilita a obtenção de uma solução inicial (externa ao horizonte) que seja globalmente infinitesimal, conforme requer a hipótese perturbativa.

necessários).

Observamos que, devido à estrutura da matriz  $\mathcal{M}$ , a variável  $Y$  desempenha um papel distinguido das demais. Temos

$$(k_2 Y)' = b k_1 X + d k_3 Z$$

Se supusermos válido o vínculo adicional

$$Z = -\frac{k_1 b}{k_3 d} X \quad (5.18)$$

resulta que a grandeza  $k_2 Y$  é constante, donde

$$Y(r) = \frac{1}{k_2(r)} Y(r_0) \quad (5.19)$$

Derivando o vínculo adicional (5.18) obtemos que  $X$  e  $Y$  relacionam-se por

$$\frac{k_1}{b} \left( \frac{\dot{b}}{b} - \frac{\dot{d}}{d} \right) X + \psi^2 k_2 Y = 0 \quad (5.20)$$

Dado que o coeficiente de  $X$  em (5.18) decai na forma  $r^{-3}$  enquanto que na expressão (5.20) acima comporta-se a grandes distâncias aproximadamente com  $r^7$  ao passo que — seja na decomposição (3.22) ou (3.24) —  $\psi^2 \sim r^0$ , o sistema encontra-se resolvido:  $Y$  é obtido de (5.19), donde (5.20) fornece  $X$  e, com isto,  $Z$  é dado por (5.18). Assim resulta que  $X \sim 1/r^7$ ,  $Y \sim 1/r$  e  $Z \sim 1/r^{10}$ .

O comportamento de  $Y$  dado por (5.19) é relevante na estabilidade da solução de Schwarzschild. De (5.4) observa-se que  $k_2$  não depende de  $\omega$ . Lembrando que  $Y(r_0)$  pode depender arbitrariamente (e até mesmo descontinuamente) da frequência  $\omega$  resulta que a dependência temporal desse modo particular pode ser livremente escolhida, seja usando a decomposição (3.22) ou (3.24). Com isto obtemos que qualquer função do tempo  $F(t)$  (diferenciável e tal que  $F(t_0)$  é infinitesimal), multiplicada pelas funções radiais e angulares de (3.22) e dividida por  $k_2$ , pode ser tomada como a amplitude da perturbação

no coeficiente do tensor  $Y_{\mu\nu}$  em (2.9).

### 5.3 Perturbações Tensoriais Induzidas em Variáveis Dependentes de Calibre

Embora as perturbações de variáveis dependentes da escolha de calibre não sejam objetos fisicamente significativos por construção, ainda assim podemos estar interessados em seu comportamento. Sumarizaremos aqui os efeitos da perturbação tensorial (3.22) sobre os objetos geométricos não-invariantes obtidos no capítulo 1.

Da decomposição do tensor de Weyl em componentes elétrica e magnética temos

$$W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = \left\{ \left[ \left( \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \left( \delta_\mu^\epsilon \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\epsilon \right) - \eta^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}{}^{\epsilon\lambda} \right] E^\rho{}_\epsilon + \right. \\ \left. - \left[ \left( \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \eta_{\mu\nu}{}^{\epsilon\lambda} + \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} \left( \delta_\mu^\epsilon \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\epsilon \right) \right] H^{\rho\epsilon} \right\} n^\sigma n^\lambda \quad (5.21)$$

Observando que o último termo do coeficiente de  $E^\rho{}_\epsilon$  em (5.21) pode ser reescrito em função do símbolo de permutações de Levi-Civita como  $+\epsilon^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\epsilon\lambda}$ , a perturbação no tensor de Weyl é naturalmente induzida por perturbações em  $E$  e  $H$  (na forma mista)

$$\delta W^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \approx \left\{ \left[ \left( \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \left( \delta_\mu^\epsilon \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\epsilon \right) - \eta^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}{}^{\epsilon\lambda} \right] \delta E^\rho{}_\epsilon + \right. \\ \left. - \left[ \left( \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta \right) \eta_{\mu\nu}{}^{\epsilon\lambda} + \eta_{\alpha\beta\rho\sigma} \left( \delta_\mu^\epsilon \delta_\nu^\lambda - \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\epsilon \right) \right] \delta H^{\rho\epsilon} \right\} n^\sigma n^\lambda \quad (5.22)$$

Das definições de  $X_{\mu\nu}$ ,  $Y_{\mu\nu}$ ,  $Z_{\mu\nu}$  aliadas às propriedades algébricas da base tensorial é imediato que

$$\begin{aligned} \delta X^\mu{}_\nu &\approx 3\delta\sigma^\mu{}_\nu \\ \delta Y^\mu{}_\nu &\approx \delta E^\mu{}_\nu + \frac{\sigma}{\sigma^2} E \delta\sigma^\mu{}_\nu \approx \delta E^\mu{}_\nu + \frac{1}{3} \frac{\sigma}{\sigma^2} E \delta X^\mu{}_\nu \\ \delta Z^\mu{}_\nu &\approx \delta H^\mu{}_\nu \end{aligned} \quad (5.23)$$

Perturbações tensoriais na geometria são ligadas às perturbações acima na forma

$$\delta g_{\mu\nu} \approx \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \left( \frac{1}{3} \delta X_{\mu\nu} - \delta \sigma_{\mu\nu} \right) \approx \frac{\sigma^3}{\sigma^2} \left[ \frac{1}{3} \delta X_{\mu\nu} + \frac{\sigma : E}{\sigma^2} (\delta Y_{\mu\nu} - \delta E_{\mu\nu}) \right] \quad (5.24)$$

# Capítulo 6

## Conclusões

A teoria da Relatividade Geral apresenta uma estrutura matemática ainda pouco entendida até hoje: o conjunto de todas as geometrias possíveis que apresentem caracter Lorentziano, usualmente referido como “superespaço” (embora seja imediato que não se trata de um espaço *stritu sensu*, visto que a soma de duas geometrias pode não ser uma geometria admissível). Assim, ainda que tal estrutura se apresente logicamente subjacente no presente trabalho, procurou-se evitar referência ao seu uso explícito. Com isso propõe-se uma abordagem da teoria de perturbações no contexto relativístico baseada diretamente em tensores ‘observáveis’ (*i.e.*, objetos com significado geométrico direto definido pela teoria). Além disso, tais objetos foram selecionados pelo critério de invariância de calibre (GI) definido pelo teorema de Stewart [14] aplicado ao modelo em estudo.

A praticidade da abordagem proposta baseia-se na eficácia de obtenção de equações de evolução para as quantidades fundamentais selecionadas. Em trabalhos recentes, aplicados ao modelo homogêneo e isotrópico de Friedmann ([1, 31, 32]), verificou-se que estas equações eram as equações Quasi-Maxwellianas da gravitação (QM), um formalismo dinamicamente equivalente ([42, 43]) às equações de Einstein. Visto que os próprios objetos primários dependem do modelo, suas equações dinâmicas não podem ser dadas *a priori*. Ainda assim, assumiu-se no presente trabalho que estas deveriam ser semelhantes às QM, donde foram deduzidas no capítulo 2 a partir deste formalismo. A possibilidade desta

dedução no presente caso (aliada a outros exemplos, como na geometria de Kasner [44]) sugere que o formalismo QM desempenha um papel conceitual mais importante do que aparenta à primeira vista<sup>1</sup>.

A simplicidade aparentemente perdida pela cuidadosa escolha das variáveis é readquirida no âmbito da decomposição das perturbações em harmônicos. Por completeza, devido a questão dos graus de liberdade tensoriais [8], e também para fixar a nomenclatura, apresenta-se no capítulo 3 a forma explícita da base tensorial de Schwarzschild, definida a partir da congruência  $n^\alpha$  (capítulo 1). Evidenciou-se desta forma todos os vínculos necessários, e escrevendo-os em equações covariantes possibilita-se fazer uso desta base (transformar equações tensoriais parciais em escalares ordinárias) sem requerer sua forma explícita (dependente de coordenadas) até a fase de interpretação das soluções obtidas.

As perturbações escalares e vetoriais da geometria de Schwarzschild são esboçadas (capítulo 4), estabelecendo suas variáveis fundamentais e mostrando que sua dinâmica consiste num sistema acoplado de 13 dimensões, motivo pelo qual não foi analisado no presente trabalho.

A noção de base tensorial é revista criticamente (capítulo 3), construindo-se explicitamente as soluções. As expressões então obtidas têm natureza distinta dos tradicionais modos “pares” e “ímpares” (os quais seriam intrinsecamente escalares); obtém-se a forma geral da base tensorial e verifica-se que a mesma não é compatível com os vínculos necessários à sua definição. Analisa-se então sua forma restrita (seção 3.1.2), mostrando que esta não propaga momentum angular.

A aplicação da proposta propriamente dita (capítulo 5) evidencia que as ondas tensoriais de Schwarzschild (entendidas como perturbações tensoriais lineares) apresentam uma dinâmica tridimensional; todavia existem indícios (autovetor com autovalor nulo, ou a solução particular da seção 5.2) que sugerem ser possível, em certos casos limite, reduzi-la a duas variáveis. Este fato possibilitará a aplicação de um grande número de resultados de natureza genérica válidos para sistemas lineares bidimensionais; em parti-

---

<sup>1</sup>Hawking [16] sugere que sua aplicação seja restrita a modelos conformalmente planos. Embora correto, tal postura parece ingênua por não permitir divisar extensões tais como as aqui obtidas.

cular, uma proposta de quantização do sistema perturbativo (alternativa à [45, 13]) em verdade um formalismo semi-clássico que assume as Hamiltonianas como operadores definidos no espaço de Hilbert das perturbações e as quantiza em torno da solução clássica -- desenvolvida em [46].

Este resultado, bem como a construção de um formalismo Hamiltoniano alternativo para o minisuperespaço (não se trata do método de Wheeler-DeWitt [21, 22], o qual carece da noção de 'evolução') obtida no capítulo 1.2, fornece uma nova perspectiva de representação da **energia gravitacional por analogia formal**<sup>2</sup>, uma noção que está longe de ser bem compreendida.

Da solução particular<sup>3</sup>, bem como da solução geral assintótica do sistema clássico explicita-se a existência de modos instáveis, a despeito de resultados contrários na literatura (o autor acredita que esta não-concordância deve-se à definição do modo *tensorial* aqui apresentada ser algo distinta da presente naqueles trabalhos): este resultado inclui a localização espacial dos modos instáveis, bem como seu espectro típico de frequência de amplificação (ou atenuação). Em discussões realizadas durante a apreciação deste trabalho, contudo, a efetiva existência desses modos (instáveis) não ficou satisfatoriamente estabelecida, devido a critérios de normalizabilidade da solução tensorial (3.24). Além disso, a análise assintótica foi restrita a modos monocromáticos: todavia é possível, em princípio (como vimos no caso da solução particular), obter pacotes de onda divergentes a partir de modos estáveis (o converso é igualmente possível, tal como demonstrado explicitamente em [4]).

---

<sup>2</sup>Ver em [47] uma aplicação deste conceito no contexto cosmológico.

<sup>3</sup>Cuja justificativa é plausível, embora devesse ser matematicamente demonstrada a partir da solução de Tolman.

# Apêndice A

## As Equações Quasi-Maxwellianas

As Equações Quasi-Maxwellianas da Gravitação<sup>1</sup> (A.2)-(A.13) constituem um formalismo alternativo (mas equivalente) para as equações de Einstein<sup>2</sup>. Com efeito, usando as equações de Einstein e a definição do tensor de Weyl, podemos escrever as Identidades de Bianchi na forma

$$\begin{aligned} W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} &= R^{\mu[\alpha;\beta]} - \frac{1}{6}g^{\mu[\alpha}R^{;\beta]} \\ &= -T^{\mu[\alpha;\beta]} + \frac{1}{3}g^{\mu[\alpha}T^{;\beta]} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Decompondo o tensor de Weyl em função de suas partes elétrica

$$E_{\alpha\beta} = \pm W_{\alpha\mu\beta\nu}n^{\mu}n^{\nu}$$

e magnética

$$H_{\alpha\beta} = \pm W^*_{\alpha\mu\beta\nu}n^{\mu}n^{\nu}$$

---

<sup>1</sup>Apresentaremos aqui essas equações na convenção de Ellis [7] (sinal superior) e negativa (sinal inferior). Nas aplicações faremos uso da primeira, apesar da assinatura do tensor métrico ser distinta, visto que a congruência adotada no presente texto apresenta norma negativa. Além disso, a definição do escalar  $\sigma^2$  é ligeiramente diferente naquele trabalho.

<sup>2</sup>Ver em Salim [42] a discussão desta equivalência, demonstrada por Lichnerowicz [43].

podemos projetar a divergência covariante do tensor de Weyl de 4 formas independentes

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} n_\beta n_\mu h_\alpha{}^\sigma$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} \eta^{\sigma\lambda}{}_{\alpha\beta} n_\mu n_\lambda$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} h_\mu{}^{(\sigma} \eta^{\tau)\lambda}{}_{\alpha\beta} n_\lambda$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} n_\beta h_{\mu(\tau} h_{\sigma)\alpha}$$

tais que sua forma assemelha-se às Equações de Maxwell do Eletromagnetismo Clássico. Assim as Equações Quasi-Maxwellianas da gravitação se escrevem na forma

$$h^\alpha{}_\epsilon h^{\mu\nu} E_{\alpha\mu;\nu} \mp \eta_\epsilon{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \sigma^\lambda{}_\alpha H_{\beta\lambda} + 3H_{\epsilon\lambda} \omega^\lambda = \frac{1}{3} h^\alpha{}_\epsilon \rho_{;\alpha} \mp \frac{1}{3} \theta q_\epsilon + \pm \frac{1}{2} \left( \sigma_{\epsilon\lambda} q^\lambda - h_{\epsilon\alpha} \Pi^{\alpha\beta}{}_{;\beta} - 3\omega_{\epsilon\lambda} q^\lambda \pm \Pi_{\epsilon\lambda} a^\lambda \right) \quad (\text{A.2})$$

$$h^\alpha{}_\epsilon h^{\mu\nu} H_{\alpha\mu;\nu} \pm \eta_\epsilon{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \sigma^\lambda{}_\alpha E_{\beta\lambda} - 3E_{\epsilon\lambda} \omega^\lambda = (\rho + p) \omega_\epsilon + \pm \frac{1}{2} \eta_\epsilon{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \left[ \pm q_{\alpha;\beta} + \Pi^\lambda{}_\alpha (\sigma_{\beta\lambda} - \omega_{\beta\lambda}) \right] \quad (\text{A.3})$$

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dot{H}_{\alpha\beta} - h^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)}{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma E_{\lambda\alpha;\beta} + 2E^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)\lambda\alpha\beta} n^\alpha a^\beta + \theta H_{\mu\nu} - H^\lambda{}_{(\mu} [3\sigma_{\nu)\lambda} + \omega_{\nu)\lambda}] + \sigma^{\alpha\beta} H_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left( \sigma^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)\lambda\alpha\beta} n^\alpha q^\beta \pm h^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)}{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \Pi_{\lambda\alpha;\beta} + 3\omega_{(\mu} q_{\nu)} + -\omega_\alpha q^\alpha h_{\mu\nu} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$h_\mu^\alpha h_\nu^\beta \dot{E}_{\alpha\beta} + h^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)}{}^{\alpha\beta\gamma} n_\gamma H_{\lambda\alpha;\beta} - 2H^\lambda{}_{(\mu} \eta_{\nu)\lambda\alpha\beta} n^\alpha a^\beta + \theta E_{\mu\nu} - E^\lambda{}_{(\mu} [3\sigma_{\nu)\lambda} + \omega_{\nu)\lambda}] + \sigma^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[ (\rho + p) \sigma_{\mu\nu} + h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\pm \dot{\Pi}_{\alpha\beta} + q_{(\alpha;\beta)}) + \pm \Pi^\lambda{}_{(\mu} (\sigma_{\nu)\lambda} - \omega_{\nu)\lambda}) + \frac{1}{3} \theta \Pi_{\mu\nu} \right] \mp a_{(\mu} q_{\nu)} + \pm \frac{1}{6} (q^\alpha{}_{;\alpha} \pm q^\alpha a_\alpha \pm \Pi_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}) h_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

As Identidades de Bianchi contraídas, juntamente com as Equações de Einstein, fornecem a lei de conservação

$$R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2} R^{;\mu} \longleftrightarrow T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Podemos projetar esta equação tanto na direção da congruência  $n_\mu$  quanto em seu espaço (Lorentziano) ortogonal  $\Sigma$ , de onde obtemos

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta \pm q^\alpha a_\alpha + q^\alpha{}_{;\alpha} \pm \Pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$(\rho + p)a_\epsilon + h^\alpha{}_\epsilon (\dot{q}_\alpha + p_{;\alpha} + \Pi_\alpha{}^\beta{}_{;\beta}) + \left(\frac{4}{3}\theta h_{\epsilon\lambda} + \sigma_{\epsilon\lambda} + \omega_{\epsilon\lambda}\right) q^\lambda = 0 \quad (\text{A.7})$$

Da definição do tensor de curvatura de Riemann

$$2n_{\mu;[\alpha\beta]} \equiv n_{\mu;\alpha\beta} - n_{\mu;\beta\alpha} = R_{\mu\epsilon\alpha\beta}n^\epsilon$$

temos a evolução das quantidades cinemáticas dadas por

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^2 \mp 2\omega^2 - a^\alpha{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \quad (\text{A.8})$$

$$h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\theta\sigma_{\mu\nu} + \sigma^\lambda{}_\mu\sigma_{\nu\lambda} + E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Pi_{\mu\nu} - \frac{1}{3}(\sigma^2 + \omega^2 - a^\lambda{}_{;\lambda})h_{\mu\nu} + \\ -h^\alpha{}_{(\mu}h^\beta{}_{\nu)}a_{\alpha;\beta} \mp a_\mu a_\nu + \omega_\mu\omega_\nu = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$h^\alpha{}_\epsilon \dot{\omega}_\alpha = -\frac{2}{3}\theta\omega_\epsilon + \sigma^\lambda{}_\epsilon\omega_\lambda + \frac{1}{2}\eta_\epsilon{}^{\alpha\beta\gamma}n_\gamma a_{\alpha;\beta} \quad (\text{A.10})$$

Além das relações acima, a definição de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  fornece 3 vínculos adicionais entre as quantidades cinemáticas:

$$h^\alpha{}_\epsilon [\theta_{;\alpha} - h^{\mu\nu}(\sigma_{\alpha\mu\nu} - \omega_{\alpha\mu;\nu})] + (\sigma_{\epsilon\lambda} + \omega_{\epsilon\lambda})a^\lambda = q_\epsilon \quad (\text{A.11})$$

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} = 2\omega^\alpha a_\alpha \quad (\text{A.12})$$

$$H_{\mu\nu} = 2a_{(\mu}\omega_{\nu)} - h^\lambda{}_{(\mu}\eta_{\nu)}{}^{\alpha\beta\gamma}n_\gamma (\sigma_{\lambda\alpha;\beta} + \omega_{\lambda\alpha;\beta}) \quad (\text{A.13})$$

# Referências

- [1] M. Novello, J.M. Salim, M.C. Motta da Silva, S.E.C.E. Jorás, R. Klippert, “Minimal Closed Set of Observables in the Theory of Cosmological Perturbations”, *Phys. Rev. D* **51**, 2 p. 450-461 (1995); **52**, 2 p. 730-742 (1995).
- [2] P. Jordan, J. Ehlers, R. Sachs, *Akad. Wiss. Lt. Mainz Abh. Math. Nat. Kl.* **1** p. 3-60 (1949).
- [3] S. Chandrasekhar (1992), “*The Mathematical Theory of Black Holes*”, Oxford Science Publication, NY.
- [4] C.V. Vishveshwara, “Stability of the Schwarzschild Metric”, *Phys. Rev. D* **1**, 10 p. 2870-2879 (1970).
- [5] E.T. Newman, R. Penrose, “Note on the Bondi-Metzner-Sachs Group”, *J. Math. Phys.* **7**, 5 p. 863-870 (1966).
- [6] K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.* p. 189-196 (1916).
- [7] G.F.R. Ellis, “Relativistic Cosmology”, *Proceedings of the Enrico Fermi International School of Physics*, Course XLVII, Academic, London p. 104-182 (1971).
- [8] E.M. Lifshitz, I.N. Khalatnikov, “Investigations in Relativistic Cosmology”, *Adv. Phys.* **12** p. 185-249 (1963).

- [9] J.M. Bardeen, "Gauge-Invariant Cosmological Perturbations", *Phys. Rev. D* **22**, 8 p. 1882-1905 (1980).
- [10] T. Regge, J.A. Wheeler, "Stability of a Schwarzschild Singularity". *Phys. Rev.* **108**, 4 p. 1063-1069 (1957).
- [11] F.J. Zerilli, "Effective Potential For Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations", *Phys. Rev. Lett.* **24**, 13 p. 737-738 (1970).
- [12] F.J. Zerilli, "Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics", *Phys. Rev. D* **2**, 10 p. 2141-2160 (1970); "Tensor Harmonics in Canonical Form for Gravitational Radiation and Other Applications", *J. Math. Phys.* **11**, 7 p. 2203-2208 (1970).
- [13] V. Moncrief, "Gravitational Perturbations of Spherically Symmetric Systems I. The Exterior Problem", *Ann. Phys.* **88** p. 323-342 (1974).
- [14] J.M. Stewart, M. Walker, "Perturbations of Spacetimes in General Relativity", *Proc. R. Soc. London A* **341** p. 49-74 (1974).
- [15] J.M. Stewart, "Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker Cosmological Models", *Class. Q. Grav.* **7** p. 1169-1180 (1990).
- [16] S.W. Hawking, "Perturbations of an Expanding Universe", *Astrophys. J.* **145** p. 544-554 (1966).
- [17] S. Droz, E. Poisson, "Gravitational Waves from Inspiring Compact Binaries: Second Post-Newtonian Waveforms as Search Templates", *Phys. Rev. D* **56**, 8 p. 4449-4454 (1997).
- [18] E.T. Newman, R. Penrose, "An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients", *J. Math. Phys.* **3**, 3 p. 566-578 (1962).

- [19] J.N. Goldberg, A.J. MacFarlane, E.T. Newman, F. Rohrlich, E.C.G. Sudarshan, "Spin-s Spherical Harmonics and 'thop'", *J. Math. Phys.* (NY) **8**, 11 p. 2155-2161 (1967).
- [20] J.M. Bardeen, W.H. Press, "Radiation Fields in Schwarzschild Background", *J. Math. Phys.* **14**, 1 p. 7-19 (1973).
- [21] J.A. Wheeler (1968), "*Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics*" em *Battelle Rencontres*, Benjamin, NY.
- [22] J.A. Wheeler, M.C. DeWitt, B.S. DeWitt, "*Geometrodynamics and the Issue of the Final State*", Escola de Verão de Física Teórica Les Houches 1963, Gordon & Breach Science Publishers, p. 315-520 (1964).
- [23] M.D. Kruskal, "Maximal Extension of Schwarzschild Metric", *Phys. Rev.* **119** p. 1743-1745 (1960); G. Szekeres, "On the Singularities of a Riemannian Manifold", *Publ. Mat. Debrecen* **7** p. 285-301 (1960).
- [24] G. Birkhoff (1923), "Relativity and Modern Physics", Harvard UP, Cambridge.
- [25] A. Barnes, R.R. Rowlingson, "Irrotational Perfect Fluids With a Purely Electric Weyl Tensor", *Class. Q. Grav.* **6** p. 949-960 (1989).
- [26] R. Rodrigues, R. Klippert, "*Inverting Matrix Problems*", (em preparação).
- [27] E. Zafiris, "Incorporation of Space-Time Symmetries in Einstein Field Equations", *J. Math. Phys.* **38**, 11, p. 5854-5877 (1997).
- [28] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer (1975), "*Introduction to General Relativity*" 2<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill Book Company.
- [29] H. Goldstein (1950), "*Classical Mechanics*" 2<sup>a</sup> ed., Addison-Wesley Publishing Company.

- [30] P.K.S. Dunsby, "The Covariant Approach to Cosmological Density Perturbations", NATO Advanced Research Workshop on The Origin of Structure in the Universe, Château du Pont d'Oye, Bélgica (1992).
- [31] S.E.C.E. Jorás (1994), "*Perturbações Escalares no Universo de Friedman-Robertson-Walker*", dissertação de mestrado do CBPF.
- [32] R. Klippert (1994), "*Teoria de Perturbações Vetoriais e Tensoriais no Universo de Friedmann*", dissertação de mestrado do CBPF.
- [33] M. Bruni, G.F.R. Ellis, P.K.S. Dunsby, "Gauge-Invariant Perturbations in a Scalar Field Dominated Universe", *Class. Q. Grav.* **9** p. 921-945 (1992).
- [34] E. Poisson, "Gravitational Radiation From a Particle in Circular Orbit Around a Black Hole", *Phys. Rev. D* **47**, 4 p. 1497-1510: (in collaboration with C. Cutler, L.S Finn and G.J. Sussman) p. 1511-1518 (1993).
- [35] C.T. Cunnigham, R.H. Price, V. Moncrief, "Radiation From Collapsing Relativistic Stars II. Linearized Even-Parity Radiation", *Astrophys. J.* **230** p. 870-892 (1979).
- [36] S.A. Teukolsky, "Perturbations of a Rotating Black Hole", *Astrophys. J.* **185** p. 635-647, 649-673 (1973).
- [37] R.J. Gleiser, "Mass Correction and Gravitational Energy Radiation in Black-Hole Perturbation Theory", *Class. Q. Grav.* **14** p. 1911-1916 (1997).
- [38] M.C. de Lima, I.D. Soares (1997), "Gravitational Wave Emission and Mass Extraction from a Perturbed Schwarzschild Black Hole", Notas de Física do CBPF, pré-print CBPF-NF-046/97.
- [39] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik (1983), "*Table of Integrals, Series and Products - Corrected and Enlarged Edition*" (4<sup>a</sup> edição, 4<sup>a</sup> impressão), Academic Press.
- [40] J.M. Bardeen, B. Carter, S.W. Hawking, "The Four Laws of Black Hole Mechanics", *Commun. Math. Phys.* **31** p. 161-170 (1973).

**“TEORIA DE PERTURBAÇÕES NO UNIVERSO DE  
SCHWARZSCHILD”**

**RENATO KLIPPERT BARCELLOS**

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



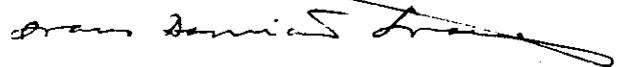
MARIO NOVELLO - Presidente



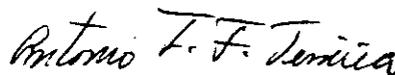
NAZIRA ABACHE TOMIMURA



RUBEM ANDROVANDI



IVANO DAMIÃO SOARES



ANTONIO TEIXEIRA



OSÉ MARTINS SALIM

Rio de Janeiro, 27 de fevereiro de 1998