Tese de Doutorado

Formalismo de Curvatura Nula e Sistemas BRST

Luiz Cláudio Queiroz Vilar

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUÍSAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, março de 1997

Aos meus pais e à minha noiva

Agradecimentos

Agradeço a todos que ao longo desses anos passaram pelo Departamento de Campos e Partículas, e o tornaram um ambiente ótimo para pesquisa. Em particular, gostaria de citar os que com quem colaborei nesse período: Marcelo Carvalho, André Maurício C. de Souza, Luis Alberto W. Toro, Cláudio A. Sasaki, Vítor R. Lemes, Ozemar S. Ventura, José Helayël Neto e, obviamente, meu orientador, Silvio P. Sorella.

Resumo

Iniciamos discutindo a renormalização algébrica da teoria $\mathcal{W}_3$, onde mostramos a existência da decomposição da derivada exterior como um comutador BRST.

A seguir, propomos um novo formalismo que permite obter as transformações BRST dos campos de diversas teorias a partir de uma única equação de curvatura nula. Esta equação é de grande utilidade para solucionar o problema de cohomologia associado à condição consistência BRST.

Dividimos esse estudo em duas partes. Na primeira, analisamos as teorias em que o conjunto de campos cobre todos os possíveis graus de forma compatíveis com as dimensões do espaço-tempo. Denominamos esse caso de multipleto completo e nele se incluem, por exemplo, as teorias topológicas do tipo Schwarz. Na segunda parte, analisa-se o caso em que o conjunto de campos não é suficiente para cobrir todos os graus de forma. Este caso, denominado de multipleto incompleto, inclui as teorias de Yang-Mills.

No último capítulo, mostramos como adaptar o formalismo de curvatura nula para o superespaço $N = 1$, $D = 4$.

Para maior facilidade do leitor, listamos abaixo os trabalhos publicados referentes à tese:

M. Carvalho, L.C. Queiroz Vilar e S.P. Sorella, Int. J. Mod. Phys. A27 (1995) 3877;

M. Carvalho, L.C. Queiroz Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, J. Math. Phys. 37 (1996) 5310;

M. Carvalho, L.C. Queiroz Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, J. Math. Phys. 37 (1996) 5325;

L.C. Queiroz Vilar, C.A.G. Sasaki e S.P. Sorella, "Superspace Descent Equations and Zero Curvature Formalism of the Four Dimensional $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theories", submetido a Int. J. Mod. Phys.

Abstract

We begin by working out the algebraic analysis of the $\mathcal{W}_3$ theory. We show, in particular, that the exterior space-time derivative can be decomposed as a BRST commutator.

Then, we propose a formalism which allows to obtain the BRST transformations of a large class of field models from a unique equation, which takes the form of a zero curvature condition. The latter provides us a straightforward way in order to obtain the BRST cohomology classes.

The present work is divided in two parts. In the first one, we discuss models whose field content spans all possible form degrees compatible with the space-time dimension. This case, referred as the complete ladder case, covers, for instance, the topological theories of Schwarz type. In the second part, we deal with the case in which the field content does not span all form degrees. This case, called the noncomplete ladder case, allows to accomodate Yang-Mills type theories.

In the last chapter, the zero curvature formalism is adapted to the case of $N = 1$ super-Yang-Mills in $D = 4$ superspace.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Ao longo deste texto estaremos sempre nos referindo a teorias nas quais possa ser definido um operador de BRST nilpotente módulo equações de movimento [1]. Nestas, poderemos sempre definir uma identidade de Slavnov-Taylor (ou "Master Equation" [2]) e um operador com número de "ghost" $N_g = 1$ denominado operador linearizado de Slavnov-Taylor. Em geral, esse operador terá a forma

$$B \;=\; \int d^D x \sum_i \left(\frac{\delta\,\Sigma}{\delta\,\phi_i} \frac{\delta}{\delta\,\phi_i^*} \;+\; \frac{\delta\,\Sigma}{\delta\,\phi_i^*} \frac{\delta}{\delta\,\phi_i} \right) \;, \tag{1.1}$$

onde ϕ_i representa o conteúdo de campos da teoria, ϕ_i^* as respectivas fontes externas de BRST (os anticampos de Batalin-Vilkovisky) e por Σ entendemos a ação total

$$\Sigma \;=\; S_{inv} + \; S_{fc} \;+\; S_{ext}$$

composta do setor clássico S_{inv} mais os termos de fixação de calibre S_{fc} e o termo de fontes externas S_{ext}. Σ será sempre renormalizável por "power-counting", não sendo admitida a presença de constantes de acoplamento com dimensões negativas. A identidade de Slavnov-Taylor, expressando o conjunto de simetrias de Σ,

$$B\,\Sigma \;=\; 0 \;, \tag{1.2}$$

vai então implicar automaticamente a nilpotência do operador linearizado

$$B\,B \;=\; 0\,. \tag{1.3}$$

A análise da renormalizabilidade da teoria descrita por Σ nasce da questão das propriedades clássicas da teoria serem preservadas ou não ao nível quântico. Podemos dividir esse estudo em duas partes [3]: na primeira nos questionamos se as simetrias clássicas de Σ podem ser mantidas pela introdução de oportunos contratermos não invariantes que compensem as possíveis quebras geradas pelas correções quânticas à teoria; na segunda parte analisamos se as correções quânticas invariantes segundo as simetrias originais podem ser reabsorvidas redefinindo os parâmetros de Σ, como as constantes de acoplamento, massas, parâmetros de calibre e amplitudes dos campos. A primeira parte descrita acima constitui a análise das anomalias da teoria, a segunda o estudo de sua estabilidade. No contexto da renormalização algébrica que começamos a introduzir acima, essas questões se tornam problemas matemáticos bem definidos.

As correções quânticas à ação Σ levam a uma ação efetiva Γ, que é o funcional de vértice gerador das funções de Green 1-partícula irredutíveis,

$$\Gamma \;=\; \Sigma \;+\; O(\hbar). \tag{1.4}$$

Essas correções podem levar a uma quebra quântica das simetrias clássicas da teoria, a partir de uma ordem n na expansão em $\hbar$, por exemplo. Isto é descrito na forma de uma identidade de Slavnov-Taylor anômala para Γ,

$$B\,\Gamma \;=\; \hbar^n\,\mathcal{A} \;+\; O(\hbar^{n+1}), \tag{1.5}$$

onde $\mathcal{A}$ representa as possíveis anomalias da teoria no primeiro nível não trivial onde elas apareceriam. Pelo Princípio de Ação Quântica [4], $\mathcal{A}$ é um polinômio local integrado (ou, mais geralmente, uma série formal de potências) nos campos e suas derivadas, com dimensões restringidas pelo "power-counting", e com $N_g = 1$. E pela nilpotência de B, vemos que as anomalias são invariantes de Slavnov-Taylor

$$B\,\mathcal{A} \,=\, 0\,. \tag{1.6}$$

Esta relação constitui a chamada condição de consistência de Wess-Zumino sobre as anomalias.

Observamos que as eqs.(1.3) e (1.6) definem um problema de cohomologia para o operador B. Se a sua solução mais geral puder ser escrita como uma variação de Slavnov-Taylor, *i.e.*

$$\mathcal{A} \,=\, B\,\widetilde{\Delta}\,, \tag{1.7}$$

com um $\widetilde{\Delta}$ local, então poderemos redefinir a ação quântica

$$\widetilde{\Gamma} \,=\, \Gamma \,-\, \hbar^n\widetilde{\Delta} \tag{1.8}$$

de forma a mostrar que a identidade de Slavnov-Taylor ainda é mantida até a ordem $\hbar^{n+1}$

$$B\,\widetilde{\Gamma} \,=\, O(\hbar^{n+1})\,. \tag{1.9}$$

A iteração desse procedimento leva a conclusão de que a identidade de Slavnov-Taylor é preservada a todas as ordens da expansão perturbativa e, portanto, de que a teoria não é anômala.

No entanto, se o termo de quebra não puder ser escrito como uma variação de Slavnov-Taylor, *i.e.*, se a cohomologia de B apresentar um elemento não trivial no setor com $N_g = 1$ e demais dimensões respectivas, então $\mathcal{A}$ representará uma verdadeira anomalia que não poderá ser eliminada por qualquer redefinição da ação quântica com contratermos locais. Como observação deve-se comentar que essa ainda não será a palavra final sobre a não renormalizabilidade da teoria, pois ainda restará a hipótese de fazermos o coeficiente da anomalia nulo, como acontece por exemplo com as teorias de Yang-Mills acopladas à matéria em 4 dimensões em que podemos escolher as representações livres de anomalia para os férmions. Anulado o coeficiente da anomalia na primeira ordem em que ela aparece, o problema se transfere para a ordem seguinte, que passa a ser então a primeira ordem não trivial onde poderemos aplicar novamente o Pricípio de Ação Quântica. Este então garante a mesma solução $\mathcal{A}$ não trivial para o problema de cohomologia e vemos ressurgir a possibilidade de termos uma anomalia. No caso das teorias de Yang-Mills mencionadas, um teorema de não renormalização garante que uma vez anulado o coeficiente da anomalia de calibre na primeira ordem, ele automaticamente se anula em todas as ordens, garantindo a renormalizabilidade da teoria [5].

Uma vez encontrados os contratermos não invariantes $\widetilde{\Delta}$ com os quais redefiniremos a ação quântica, eq.(1.8), vemos por (1.7) que estes são sempre definidos a menos de objetos Ω invariantes sob a ação do operador de Slavnov-Taylor

$$B\,\Omega \,=\, 0\,, \tag{1.10}$$

onde Ω é um polinômio integrado nos campos ϕ e ϕ^* e nas suas derivadas, e possui os números quânticos da ação clássica: $N_g = 0$ e dimensões restringidas pelo "power-counting". O problema descrito pelas eqs.(1.3) e (1.10) é novamente um problema de cohomologia para o operador B. Sua solução mais geral conterá então uma parte cohomologicamente trivial, $B\,\tilde{\omega}$, e outra, ω, que não pode ser escrita como uma variação B

$$\Omega \,=\, \omega \,+\, B\,\tilde{\omega}\,, \qquad \omega \,\neq\, B\,\hat{\omega}\,. \tag{1.11}$$

Como dissemos acima, a estabilidade da teoria estará assegurada se pudermos redefinir seus parâmetros de forma a absorver os cociclos contidos em Ω. Por outro lado, objetos triviais não devem estar associados a grandezas observáveis, já que sendo o vácuo invariante segundo as simetrias em jogo, esses objetos possuem valor esperado de vácuo nulo. Assim, reunindo esses dois pontos, chegamos a uma interpretação física fundamental dos diferentes comportamentos cohomológicos presentes na solução Ω. As contribuições triviais estarão associadas às renormalizações dos parâmetros não físicos, como os parâmetros de gauge e as amplitudes dos campos, e portanto às dimensões anómalas da equação de Callan-Symanzik. E os elementos ω da cohomologia em (1.11) aos parâmetros físicos, como as constantes de acoplamento e as massas. Isto é, a presença de uma contribuição não trivial a Ω vai indicar a possibilidade de termos uma função beta não nula.

Resumindo, o que pode ser concluído a partir das eqs.(1.3), (1.6) e (1.10) é que o estudo da renormalização de uma teoria pode ser transcrito no estudo do problema de cohomologia do operador de Slavnov-Taylor, definido no espaço dos polinômios locais integrados nos campos e derivadas, nos setores de N_g iguais a zero (estabilidade) e um (anomalia), e dimensões determinadas pelo "power-counting".

Porém, soluções da cohomologia de Slavnov-Taylor não são usualmente simples de serem obtidas. Quando a teoria ainda apresenta simetrias globais ou discretas que supõem-se serem preservadas ao nível quântico, então elas podem ser usadas para reduzir o espaço dos polinômios invariantes sob B, onde devemos procurar a solução da cohomologia. Mas, em geral, não dispomos de um número de simetrias suficiente para provocar uma redução significativa e temos que buscar um método geral de solução.

Um método bem estabelecido para o caso de teorias de calibre [6, 7] consiste então em realizar uma extensão do problema de cohomologia em D (par) dimensões para $D+2$ dimensões espaço-temporais. Neste espaço encontramos facilmente objetos pertencentes a cohomologia local de B, dados pelos polinômios invariantes com grau de forma $D+2$ construídos com as curvaturas, identificados com as classes de Chern de ordem $\frac{D}{2}+1$. O fato desses polinômios serem também fechados, pela identidade de Bianchi, permite a construção de uma condição de horizontalidade, a chamada Fórmula Russa [6, 8]. Esta, em conjunto com a fórmula de homotopia de Cartan [7], leva a uma solução particular da condição de Wess-Zumino em D dimensões. No entanto, esse método possui alguns problemas, que já se tornam claros a partir desse breve resumo. A solução que é obtida no final possuirá, naturalmente, a forma de uma integral de homotopia, que nem sempre é possível de ser realizada (que é o caso da anomalia de calibre supersimétrica [49, 50, 51, 52], que será discutida no Cap.5). Além disso, não é garantido que o método tenha uma aplicação geral, pois os resultados estão bem estabelecidos somente para teorias de calibre em dimensões pares de espaço-tempo [9], necessitando de adaptações específicas em outros casos [10]. E finalmente, ele também não assegura que, para qualquer outro caso, a solução encontrada seja sempre a mais geral possível.

Podemos buscar uma outra alternativa para tornar o problema mais tratável transcrevendo-o do nível integrado para o não integrado. Assim, o estudo da cohomologia integrada de um operador nilpotente de Slavnov-Taylor B num setor arbitrário de número de "ghost" G e grau de forma D

$$B\,\Omega^G = 0 \quad , \quad \Omega^G = \int \omega_D^G \tag{1.12}$$

pode ser transcrito como um problema de cohomologia local módulo derivada total

$$B\,\omega_D^G + d\,\omega_{D-1}^{G+1} = 0 \,, \tag{1.13}$$

onde o índice inferior indica o grau de forma e o superior o número de "ghost" do cociclo, e $d = dx^\mu \partial_\mu$ é a derivada exterior do espaço-tempo. Esta satisfaz em conjunto com o operador B a álgebra

$$B^2 = d^2 = Bd + dB = 0 \,. \tag{1.14}$$

Aplicando B na eq.(1.13) e utilizando as relações algébricas acima obtemos

$$d\,B\,\omega_{D-1}^{G+1} = 0 \,,$$

que pelo Lema de Poincaré algébrico [10],

$$d\,\Delta_j^i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta_j^i = d\,\Delta_{j-1}^i \,,$$

implica a nova equação

$$B\,\omega_{D-1}^{G+1} + d\,\omega_{D-2}^{G+2} = 0 \,.$$

A iteração desse processo leva a um sistema de equações usualmente chamadas equações de descida

$$
\begin{aligned}
B\,\omega_D^G \;+\; d\,\omega_{D-1}^{G+1} &= 0\,, \\
B\,\omega_{D-1}^{G+1} \;+\; d\,\omega_{D-2}^{G+2} &= 0\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdot & \\
\cdots\cdots\cdots\cdot & \\
B\,\omega_1^{G+D-1} + d\omega_0^{G+D} &= 0\,, \\
B\,\omega_0^{G+D} &= 0\,,
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

onde os ω_j^{G+D-j} $(0 \leq j \leq D)$ são polinômios locais nos campos e derivadas com número de "ghost" $G+D-j$ e grau de forma j. O problema de resolver o conjunto de equações de descida (1.15) é um problema de cohomologia de B módulo d, as correspondentes classes de cohomologia sendo dadas pelas soluções de (1.15) que não podem ser escritas na forma

$$
\begin{aligned}
\omega_j^{G+D-j} &= B\,\tilde{\omega}_j^{G+D-j-1} + d\,\tilde{\omega}_{j-1}^{G+D-j}\,, \qquad 1 \leq j \leq D\,, \\
\omega_0^{G+D} &= B\,\tilde{\omega}_0^{G+D-1}\,,
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

com os $\tilde{\omega}$ polinômios locais. É importante observar que no nível não integrado perde-se a propriedade de se realizar integrações por partes, o que implica que campos e derivadas tem que ser tomados agora como variáveis independentes.

Obviamente, o conhecimento da solução mais geral das equações de descida (1.15) fornece imediatamente as classes da cohomologia integrada do operador B. De fato, uma vez que o sistema (1.15) tenha sido resolvido, a integração no espaço-tempo da equação (1.13) fornecerá a solução geral da condição (1.12).

A vantagem dessa abordagem ao problema de cohomologia está no fato de que a última equação do sistema (1.15) é uma equação de cohomologia local, em vez de uma cohomologia módulo d. Para este tipo de equação existem métodos sistemáticos de solução, como a técnica das sequências espectrais [11, 12, 13]. A desvantagem está em que agora temos que resolver todo o sistema de equações de descida (1.15), o que, no caso de termos um grande número de polinômios a cada nível do sistema, pode novamente tornar o problema de difícil tratamento na prática.

Justamente para desenvolver um método geral que permita encontrar a solução do sistema completo de equações de descida, é definido um operador δ que decompõe a derivada exterior como um comutador BRST

$$d \;=\; [\delta, B] \;. \tag{1.17}$$

Este operador possui número de "ghost" -1 e grau de forma 1. Apesar de não ser necessário (e não ser verdade no caso específico das teorias de Yang-Mills, como veremos posteriormente), podemos supor por simplicidade que

$$[\delta, d] \;=\; 0 \;. \tag{1.18}$$

Aplicando o operador de decomposição δ na última das equações de descida (1.15) e utilizando (1.17), obtemos

$$B\,\left(\delta\,\omega_0^{G+D}\right) + d\,\omega_0^{G+D} \;=\; 0 \;.$$

Comparando com a penúltima equação do sistema (1.15), vemos que uma solução particular desta é dada por

$$\omega_1^{G+D-1} \;=\; \delta\,\omega_0^{G+D} \;. \tag{1.19}$$

A solução geral para ω_1^{G+D-1} irá conter ainda, além das contribuições triviais da forma (1.16), os possíveis elementos não triviais da cohomologia local de B no setor das um formas com $N_g = G + D - 1$. Mas, novamente, em se tratando de um problema local, as técnicas padrão mencionadas acima se aplicam, e a solução geral é factível de ser encontrada.

É fácil mostrar neste momento que a aplicação repetida do operador δ no cociclo

ω_0^{G+D} fornecerá uma solução não trivial explícita para os cociclos mais altos ω_j^{G+D-j}

$$\omega_j^{G+D-j} = \frac{\delta^j}{j!}\omega_0^{G+D} , \qquad j = 1, ..., D . \tag{1.20}$$

Vemos então que, devido ao operador δ, a caracterização da cohomologia de B módulo d é essencialmente reduzida a um problema de cohomologia local. Esta última fórmula, simples e elegante em sua forma, mostra a utilidade da introdução do operador de decomposição cuja existência é bem geral. De fato, a decomposição (1.17) está presente num amplo conjunto de modelos de teoria de campos, tais como teorias tipo Yang-Mills em qualquer número de dimensões [14, 15, 16], gravitação [17], modelos topológicos do tipo Schwarz ou Witten [18, 19, 20, 21], teoria de cordas [22, 23], gravitação W_3 [24], e teorias supersimétricas $N = 1$ de Yang-Mills em quatro dimensões no superespaço [25]. Ao longo deste texto serão abordados praticamente todos esses exemplos, com maior ou menor profundidade de acordo com os desenvolvimentos originais obtidos.

Mas o tema central que pretendemos explorar é o que denominamos formalismo de curvatura nula [16, 21]. A existência da decomposição (1.17) permite codificar todo o sistema BRST acima descrito em duas equações básicas. A primeira resume todo o sistema de equações de descida (1.15) na equação

$$\tilde{d}\,\tilde{\omega} = 0 , \tag{1.21}$$

onde $\tilde{d}$ é o operador nilpotente determinado por

$$\tilde{d} = e^{\delta}\, s\, e^{-\delta} , \qquad \tilde{d}^2 = 0 , \tag{1.22}$$

e

$$\tilde{\omega} = e^{\delta}\,\omega_0 . \tag{1.23}$$

A segunda, a equação de curvatura nula propriamente dita, é dada por

$$\tilde{d}\,\tilde{A} + \tilde{A}^2 = 0 , \tag{1.24}$$

com $\widetilde{A}$ sendo determinado pela transformação do "ghost" segundo a decomposição δ,

$$\widetilde{A} = e^{\delta}\, c\,. \tag{1.25}$$

No multipleto $\widetilde{A}$ deverão estar contidos todos os campos da teoria, e ele será denominado completo ou incompleto caso ele expanda ou não todos os possíveis graus de forma do espaço. A equação de curvatura nula (1.24) irá então fornecer todas as transformações de BRST dos campos da teoria. A semelhança de (1.24) com a usual transformação de BRST do "ghost" também não é fortuita. De fato, veremos ao longo do texto como a decomposição mapeia a transformação do "ghost" no sistema completo de transformações de cada teoria. E, principalmente, como subproduto desta propriedade, teremos que as classes de cohomologia nos diversos níveis das equações de descida serão determinadas diretamente dos polinômios invariantes construídos com os cociclos

$$Tr\left(\frac{\widetilde{A}^n}{n!}\right)\,.$$

A tese está dividida como segue. No próximo capítulo, o método de renormalização algébrica será exemplificado através do estudo das anomalias das teorias $\mathcal{W}_3$ [24]. No terceiro, introduziremos o conceito do multipleto completo, que será aplicado a diversas teorias topológicas [21]. No quarto, abordaremos as teorias que não podem ser descritas por um multipleto completo, como é o caso das teorias de Yang-Mills [16]. E no último, mostraremos como podemos levar esses conceitos para o superespaço, tratando o caso do Yang-Mills supersimétrico $N = 1$ em $D = 4$ [25]. No final, seguem as conclusões, com um resumo do estado atual desta pesquisa e as perspectivas futuras .

Capítulo 2

Caracterização Algébrica das Anomalias na Gravitação $\mathcal{W}_3$ Quiral

Neste capítulo será dado um exemplo completo da utilização do operador de decomposição δ na solução do problema de renormalização no caso da gravitação $\mathcal{W}_3$ [24].

As álgebras $\mathcal{W}$ [26] são uma extensão da álgebra de Virasoro. Elas descrevem as relações de comutação entre as componentes do tensor momento-energia (T_{++}, T_{--}) e as correntes $(W_{+++...}, W_{---...})$ de helicidade superior (ver ref.[27] para uma introdução geral).

Entre as várias álgebras $\mathcal{W}$ consideradas na literatura, as chamadas algebras $\mathcal{W}_3$ desempenham um papel especial, devido ao fato de terem realizações simples como teorias de campo. O modelo correpondente, conhecido como gravitação $\mathcal{W}_3$, fornece uma generalização da ação da corda bosônica. Ele aparece tanto numa versão não quiral [28], quanto na versão quiral [29] que será analisada aqui. O conteúdo clássico da teoria é dado por um conjunto de campos escalares livres ϕ^i $(i = 1, ..., D)$ que são usados para estudar a álgebra de correntes dos operadores de helicidade dois T_{++} e três W_{+++}, na chamada realização não-linear [27] dada por

$$T_{++} = \frac{1}{2}\partial_+\phi^i\partial_+\phi^i, \qquad W_{+++} = \frac{1}{3}d_{ijk}\partial_+\phi^i\partial_+\phi^j\partial_+\phi^k \ . \tag{2.1}$$

As quantidades d_{ijk} são totalmente simétricas e escolhidas para satisfazerem

$$d^{m}_{(ij}d_{k)lm} = \delta_{(ij}\delta_{k)l} \ , \tag{2.2}$$

e no caso presente, para evitar complicações técnicas desnecessárias, serão tomadas a traço nulo

$$d^{i}_{ij} = 0 \ . \tag{2.3}$$

Os operadores em (2.1) podem ser incluídos na ação escalar livre se acoplados a campos externos h_{--}, B_{---},

$$S_{inv} \ = \ \int d^2x \ \left(\frac{1}{2}\partial_+\phi^i\partial_-\phi^i \ - \ h_{--}T_{++} \ - \ B_{---}W_{+++}\right) \ , \tag{2.4}$$

e este será o ponto de partida clássico. É um fato notável que esta ação exiba um conjunto de invariâncias locais que podem ser fixadas de calibre usando o procedimento de Batalin-Vilkovisky [2]. Os termos de fixação de calibre da ação (2.4), usando um calibre tipo Landau, são escritos como

$$\begin{aligned} S_{fc} &= \textstyle\int \ d^2x \ s \ \left(b_{++}h_{--} \ + \ \beta_{+++}B_{---}\right) \\ &= -\textstyle\int d^2x \ b_{++}\left(\partial_-c_- - h_{--}\partial_+c_- + \partial_+h_{--}c_- + 2\left(\partial_+B_{---}\gamma_{--} - B_{---}\partial_+\gamma_{--}\right)T_{++}\right) \\ &\quad -\textstyle\int d^2x \ \beta_{+++}\left(\partial_-\gamma_{--} - h_{--}\partial_+\gamma_{--} + 2\partial_+h_{--}\gamma_{--} + \partial_+B_{---}c_- - 2B_{---}\partial_+c_-\right) \ , \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde (c_-, γ_{--}) e (b_{++}, β_{+++}) são respectivamente um par de campos de "ghost" e "antighost" e s denota o operador de BRST cuja ação nos campos é especificada por

$$\begin{aligned} sc_- &= c_-\partial_+c_- + 2\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}T_{++} \ , \\ s\gamma_{--} &= c_-\partial_+\gamma_{--} - 2\partial_+c_-\gamma_{--} \ , \\ s\phi^i &= c_-\partial_+\phi^i + \gamma_{--}d^i_{jk}\partial_+\phi^j\partial_+\phi^k + 2b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i \ , \\ sh_{--} &= \partial_-c_- - \ h_{--}\partial_+c_- + \partial_+h_{--}c_- + 2 \ \left(\partial_+B_{---}\gamma_{--} - B_{---}\partial_+\gamma_{--}\right)T_{++} \ , \\ sB_{---} &= \partial_-\gamma_{--} - h_{--}\partial_+\gamma_{--} + 2\partial_+h_{--}\gamma_{--} + \partial_+B_{---}c_- - 2B_{---}\partial_+c_- \ , \end{aligned}$$

$$sb_{++} \;=\; s\beta_{+++} = 0 \;,$$

e

$$s\;(S_{inv} + S_{fc}) \;=\; 0\;.$$

Para a renormalização das simetrias, ainda resta o acoplamento das transformações não lineares de BRST acima de $(\phi^i, c_-, \gamma_{--})$ com fontes externas (Y^i, τ_+, ρ_{++})

$$S_{ext} = \int d^2x \,\left(Y^i s\phi^i + \tau_+ sc_- + \rho_{++} s\gamma_{--} \right) \;,$$

a partir de onde se verifica que a ação total Σ

$$\Sigma \;=\; S_{inv} + S_{fc} + S_{ext} \tag{2.6}$$

satisfaz a identidade de Slavnov-Taylor [29]

$$\mathcal{S}(\Sigma) \;=\; 0\;, \tag{2.7}$$

com

$$\mathcal{S}(\Sigma) \;=\int d^2x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta Y^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau_+}\frac{\delta\Sigma}{\delta c_-} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho_{++}}\frac{\delta\Sigma}{\delta\gamma_{--}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta b_{++}}\frac{\delta\Sigma}{\delta h_{--}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\beta_{+++}}\frac{\delta\Sigma}{\delta B_{---}} \right)\,. \tag{2.8}$$

Como no caso da corda bosônica [30], a identidade (2.7) é o ponto de partida para o estudo das propriedades das funções de Green do modelo com inserções dos operadores compostos (T_{++}, W_{+++}), fornecendo uma caracterização da álgebra de correntes (T, W).

A partir de (2.8), o operador linearizado de Slavnov-Taylor pode ser definido

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \;=\; \int d^2x\, & \frac{\delta\Sigma}{\delta Y^i}\frac{\delta}{\delta\phi^i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\phi^i}\frac{\delta}{\delta Y^i} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau_+}\frac{\delta}{\delta c_-} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c_-}\frac{\delta}{\delta\tau_+} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\rho_{++}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{--}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\gamma_{--}}\frac{\delta}{\delta\rho_{++}} \\ & - \frac{\delta\Sigma}{\delta b_{++}}\frac{\delta}{\delta h_{--}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta h_{--}}\frac{\delta}{\delta b_{++}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\beta_{+++}}\frac{\delta}{\delta B_{---}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta B_{---}}\frac{\delta}{\delta\beta_{+++}} \;, \end{aligned} \tag{2.9}$$

e, como mencionado anteriormente, pelo fato de Σ satifazer a identidade de Slavnov-

Taylor (2.7), o operador linearizado será naturalmente nilpotente

$$B^2 = 0 \ . \tag{2.10}$$

Na tabela abaixo são listadas as dimensões canônicas e números de "ghost" de todos os campos da teoria, junto com o Slavnov-Taylor:

	ϕ^i	h_{--}	B_{---}	c_-	γ_{--}	b_{++}	β_{+++}	Y^i	τ_+	ρ_{++}	B
N_g	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-2	-2	1
dim	0	0	-1	0	-1	1	2	1	1	2	1

Tabela 2.1: Números de "ghost" e dimensões.

Seguindo a análise feita na Introdução, eqs.(1.12 – 1.15), a condição de consistência de Wess-Zumino para a anomalia

$$B\,\mathcal{A} \;=\; 0 \;, \tag{2.11}$$

com

$$\mathcal{A} = \int \omega_2^1 \;, \tag{2.12}$$

irá no nível não integrado dar origem ao sistema de equações de descida

$$\begin{aligned} B\,\omega_2^1 \,+\, d\,\omega_1^2 &= 0 \,, \\ B\,\omega_1^2 \,+\, d\,\omega_0^3 &= 0 \,, \\ B\,\omega_0^3 &= 0 \,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde todos os ω são polinômios locais nos campos, fontes e suas derivadas, e pela Tabela 2.1, de dimensão três; d representa a derivada exterior $d = dx^+\partial_+ + dx^-\partial_-$.

É importante agora definir o espaço $\mathcal{V}$ em que B e d atuam. Levando em consideração que a ação clássica (2.6) tem uma simetria global óbvia para os campos de matéria ϕ^i, dada por deslocamentos constantes $\phi^i \rightarrow \phi^i + const$, e pela forma de seus acoplamentos com os campos de calibre h_{--} e B_{---}, estes só poderão contribuir para a ação efetiva Γ quando acompanhados de pelo menos uma derivada ∂_+. Assim segue que o espaço $\mathcal{V}$ pode ser identificado com o espaço dos polinômios nas variáveis

$\xi = (h_{--}, B_{---}, c_-, \gamma_{--}, b_{++}, \beta_{+++}, Y^i, \tau_+, \rho_{++})$ e $\partial_+\phi^i$ e suas derivadas, *i.e.*

$$\mathcal{V} \;=\; polinômios\ em\ \left(\partial_-^l\partial_+^m\xi,\ \partial_-^l\partial_+^{m+1}\phi^i\right)\;, \qquad l,m=0,1,\ldots\,. \tag{2.14}$$

As soluções das equações de descida (2.13) irão pertencer a este espaço, ω_2^1, ω_1^2 e ω_0^3 serão formas no espaço tempo cujos coeficientes serão elementos de $\mathcal{V}$.

E é nesse espaço em que serão definidos os operadores δ_+ e δ_- como

$$\delta_+ = \frac{\partial}{\partial c_-}\;, \tag{2.15}$$

e

$$\begin{aligned}\delta_- = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\ &\partial_-^p\partial_+^q h_{--}\frac{\partial}{\partial\partial_-^p\partial_+^q c_-} + \partial_-^p\partial_+^q B_{---}\frac{\partial}{\partial\partial_-^p\partial_+^q\gamma_{--}} - \partial_-^p\partial_+^q\tau_+\frac{\partial}{\partial\partial_-^p\partial_+^q b_{++}}\\ &-\partial_-^p\partial_+^q\rho_{++}\frac{\partial}{\partial\partial_-^p\partial_+^q\beta_{+++}} - \partial_-^p\partial_+^q Y^i\frac{\partial}{\partial\partial_-^p\partial_+^{q+1}\phi^i}\;.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Esses operadores irão satisfazer com B e d as relações algébricas

$$\{B,\delta_+\} = \partial_+\;, \qquad \{B,\delta_-\} = \partial_-\;,$$

e

$$\{\delta_+,\delta_-\} = 0\;, \qquad \{\delta_\pm, d\} = 0\;.$$

Assim, o operador δ

$$\delta \;=\; dx^+\delta_+ \;+\; dx^-\delta_- \tag{2.17}$$

obedece

$$[\delta, B] = d\;, \qquad\qquad [\delta, d] = 0\;, \tag{2.18}$$

e então ele pode ser identificado como o operador de decomposição (1.17) da gravitação $\mathcal{W}_3$ quiral.

Se supormos agora que a solução ω_0^3 da última equação da torre (2.13) já é conhecida, vemos que é imediato verificarmos que os cociclos mais altos ω_1^2 e ω_2^1 podem ser identificados com as aplicações de δ em ω_0^3:

$$\omega_1^2 \;=\; \delta\omega_0^3 \;=\; dx^+\delta_+\omega_0^3 \;+\; dx^-\delta_-\omega_0^3 \;, \tag{2.19}$$

e

$$\omega_2^1 \;=\; \frac{1}{2}\,\delta^2\omega_0^3 \;=\; -dx^+dx^-\delta_+\delta_-\omega_0^3 \;. \tag{2.20}$$

Assim, como havíamos anunciado na Introdução, a existência do operador de decomposição δ mapeia o problema de cohomologia módulo d em um problema de cohomologia local. Obviamente, a solução particular apresentada acima representa apenas uma parte da solução mais geral. Além das contribuições triviais da forma (1.16) que não tem maior interesse, ainda teríamos que levar em consideração possíveis contribuições não triviais advindas da cohomologia local nos setores superiores das equações de descida, *i.e.* soluções de

$$B\omega_1^2 \;=\; 0 \;, \tag{2.21}$$

e

$$B\omega_2^1 \;=\; 0 \;. \tag{2.22}$$

O estudo da cohomologia local do operador linearizado de Slavnov-Taylor em todos os setores das equações de descida (2.13) será então o assunto da próxima seção.

2.1 A Cohomologia do Operador de BRST

Para estudarmos a cohomologia local de B é introduzido o operador de filtragem

$$\widetilde{\mathcal{N}} \;=\; \int d^2x \, \left(\phi^i \frac{\delta}{\delta\phi^i} + Y^i \frac{\delta}{\delta Y^i}\right) \;, \tag{2.23}$$

que decompõe o operador B na forma

$$B = B^{(0)} + B^{(1)} + B^{(2)} + B^{(3)} \;, \tag{2.24}$$

com

$$\left[\widetilde{\mathcal{N}}\ , B^{(n)}\right] = nB^{(n)}\ , \qquad n = 0,1,2,3\ . \tag{2.25}$$

Explicitamente, os operadores $B^{(n)}$ na eq.(2.24) são dados por

$$\begin{aligned} B^{(0)} = \int d^2x \quad \Bigg(& \Big(c_-\partial_+\phi^i + 2b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i \Big)\frac{\delta}{\delta\phi^i} \\ & + c_-\partial_+ c_- \frac{\delta}{\delta c_-} \ + \ \Big(\partial_- c_- + c_-\partial_+ h_{--} - h_{--}\partial_+ c_-\Big)\frac{\delta}{\delta h_{--}} \\ & + \Big(c_-\partial_+\gamma_{--} + 2\gamma_{--}\partial_+ c_-\Big)\frac{\delta}{\delta\gamma_{--}} \\ & + \Big(-2B_{---}\partial_+ c_- + c_-\partial_+ B_{---}\Big)\frac{\delta}{\delta B_{---}} \\ & + \Big(\partial_-\gamma_{--} + 2\gamma_{--}\partial_+ h_{--} - h_{--}\partial_+\gamma_{--}\Big)\frac{\delta}{\delta B_{---}} \\ & + \Big(c_-\partial_+ b_{++} - 2b_{++}\partial_+ c_- + 2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++} - 3\beta_{+++}\partial_+\gamma_{--}\Big)\frac{\delta}{\delta b_{++}} \\ & + \Big(c_-\partial_+\beta_{+++} - 3\beta_{+++}\partial_+ c_-\Big)\frac{\delta}{\delta\beta_{+++}} \\ & + \Big(-\ \partial_+\partial_-\phi^i + \partial_+ h_{--}\partial_+\phi^i + h_{--}\partial_+{}^2\phi^i + 2\partial_+(b_{++}\partial_+ B_{---}\gamma_{--}\partial_+\phi^i) \\ & \qquad - 2\partial_+(b_{++}B_{---}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i) - \partial_+(Y^i c_-) - 2\partial_+(Y^i b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}) \\ & \qquad + 2\partial_+(\tau_+\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i)\Big)\frac{\delta}{\delta Y^i} \\ & + \Big(-\ \partial_-\beta_{+++} + h_{--}\partial_+\beta_{+++} + 3\beta_{+++}\partial_+ h_{--} \\ & \qquad + \partial_+(\rho_{++}c_-) + 2\rho_{++}\partial_+ c_-\Big)\frac{\delta}{\delta\rho_{++}} \\ & + \Big(-\ \partial_- b_{++} + 2b_{++}\partial_+ h_{--} + h_{--}\partial_+ b_{++} + 2B_{---}\partial_+\beta_{+++} + c_-\partial_+\tau_+ \\ & \qquad + 3\beta_{+++}\partial_+ B_{---} + 2\tau_+\partial_+ c_- + 3\rho_{++}\partial_+\gamma_{--} + 2\gamma_{--}\partial_+\rho_{++}\Big)\frac{\delta}{\delta\tau_+}\Bigg)\ , \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} B^{(1)} = \int d^2x \quad \Bigg(& \Big(d_{ijk}\gamma_{--}\partial_+\phi^j\partial_+\phi^k\Big)\frac{\delta}{\delta\phi^i} \\ & + \Big(d_{ijk}\partial_+ B_{---}\partial_+\phi^j\partial_+\phi^k + 2d_{ijk}B_{---}\partial_+\phi^j\partial_+^2\phi^k \\ & \qquad - 2\partial_+(d_{ijk}\gamma_{--}Y^j\partial_+\phi^k)\Big)\frac{\delta}{\delta Y^i} \Bigg)\ , \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$
\begin{aligned}
B^{(2)} = \int d^2x \quad \Bigg(& \Big(2\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}T_{++}\Big)\frac{\delta}{\delta c_-} + T_{++}\frac{\delta}{\delta b_{++}} - Y^i\partial_+\phi^i\frac{\delta}{\delta \tau_+} \\
& + \Big(2(\partial_+ B_{---}\gamma_{--} - B_{---}\partial_+\gamma_{--})T_{++} + 2Y^i\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i\Big)\frac{\delta}{\delta h_{--}} \\
& + \Big(-2\partial_+ b_{++}\gamma_{--}T_{++} - 4b_{++}\partial_+\gamma_{--}T_{++} - 2b_{++}\gamma_{--}\partial_+ T_{++}\Big)\frac{\delta}{\delta \beta_{+++}} \\
& + \Big(4b_{++}\partial_+ B_{---}T_{++} + 2\partial_+ b_{++}B_{---}T_{++} + 2b_{++}B_{---}\partial_+ T_{++} \\
& \quad + 4Y^i b_{++}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\phi^i + 2\partial_+ Y^i b_{++}\gamma_{--}\partial_+\phi^i \\
& \quad + 2Y^i\partial_+ b_{++}\gamma_{--}\partial_+\phi^i + 4Y^i b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\phi^i + 4\tau_+\partial_+\gamma_{--}T_{++} \\
& \quad + 2\partial_+\tau_+\gamma_{--}T_{++} + 2\tau_+\gamma_{--}\partial_+^2\phi^i\partial_+\phi^i\Big)\frac{\delta}{\delta \rho_{++}} \quad \Bigg) ,
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

$$
B^{(3)} = \int d^2x \left(W_{+++}\frac{\delta}{\delta \beta_{+++}} - d_{ijk}Y^i\partial_+\phi^j\partial_+\phi^k\frac{\delta}{\delta \rho_{++}} \quad \right) . \tag{2.29}
$$

Em particular, a nilpotência de B implica que

$$
\sum_{j=0}^{n} B^{(n-j)}B^{(j)} \;=\; 0 \; , \qquad n = 0, 1, 2, 3 \; , \tag{2.30}
$$

de tal forma que o operador $B^{(0)}$ também se torna nilpotente

$$
B^{(0)}B^{(0)} \;=\; 0 \; . \tag{2.31}
$$

A utilidade da decomposição acima está em um teorema geral de cohomologia BRST [11, 12, 13]. O teorema espectral estabelece que a cohomologia local do operador linearizado de Slavnov-Taylor B é isomórfica ao subespaço da cohomologia local de $B^{(0)}$

$$
B^{(0)}\Lambda = 0 \; . \tag{2.32}
$$

Para o estudo dessa cohomologia, podemos introduzir um novo operador de filtragem

$$\mathcal{N} \;=\; \int d^2x \left(c_- \frac{\delta}{\delta c_-} + h_{--} \frac{\delta}{\delta h_{--}} + B_{---} \frac{\delta}{\delta B_{---}} + \gamma_{--} \frac{\delta}{\delta \gamma_{--}} \right) . \tag{2.33}$$

Ele decompõe $B^{(0)}$ e Λ como

$$B^{(0)} = b^{(0)} + b^{(1)} + b^{(2)} , \tag{2.34}$$

e

$$\Lambda = \sum_{v=0}^{\infty} \Lambda^{(v)} , \tag{2.35}$$

com

$$\left[\mathcal{N}, b^{(v)}\right] = v b^{(v)} , \qquad \mathcal{N}\, \Lambda^{(v)} = v \Lambda^{(v)} . \tag{2.36}$$

A condição (2.32) se divide em um sistema de equações

$$\sum_{p=0}^{v} b^{(p)} \Lambda^{(v-p)} \;=\; 0 , \qquad v = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{2.37}$$

e, como antes, a nilpotência de $B^{(0)}$ implica

$$\sum_{k=0}^{q} b^{(q-k)} b^{(k)} \;=\; 0 , \qquad\qquad q = 0, 1, 2 \tag{2.38}$$

e, portanto, a nilpotência de $b^{(0)}$

$$b^{(0)} b^{(0)} \;=\; 0 . \tag{2.39}$$

Aplicando novamente o teorema espectral previamente citado, concluímos que a cohomologia de $B^{(0)}$ é agora por sua vez isomórfica a um subespaço da de $b^{(0)}$. Mas, como veremos, as filtragens sucessivas nos levaram finalmente a um operador nilpotente cuja estrutura é simples o suficiente para tornar controlável o cálculo de sua cohomologia. Os operadores $b^{(0)}$, $b^{(1)}$ e $b^{(2)}$ são computados como

$$
\begin{aligned}
b^{(0)} = \int d^2x \Big(\; & \partial_- c_- \frac{\delta}{\delta h_{--}} + \partial_- \gamma_{--} \frac{\delta}{\delta B_{---}} - \partial_+ \partial_- \phi^i \frac{\delta}{\delta Y^i} \\
& - \partial_- b_{++} \frac{\delta}{\delta \tau_+} - \partial_- \beta_{+++} \frac{\delta}{\delta \rho_{++}} \Big) ,
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

$$
\begin{aligned}
b^{(1)} = \int d^2x \Big(\; & c_- \partial_+ \phi^i \frac{\delta}{\delta \phi^i} + c_- \partial_+ c_- \frac{\delta}{\delta c_-} + \Big(c_- \partial_+ h_{--} - h_{--} \partial_+ c_- \Big) \frac{\delta}{\delta\, h_{--}} \\
& + \Big(c_- \partial_+ \gamma_{--} + 2\gamma_{--} \partial_+ c_- \Big) \frac{\delta}{\delta \gamma_{--}} \\
& + \Big(2\gamma_{--} \partial_+ h_{--} - h_{--} \partial_+ \gamma_{--} - 2B_{---} \partial_+ c_- + c_- \partial_+ B_{---} \Big) \frac{\delta}{\delta\, B_{---}} \\
& + \Big(c_- \partial_+ b_{++} - 2b_{++} \partial_+ c_- + 2\gamma_{--} \partial_+ \beta_{+++} - 3\beta_{+++} \partial_+ \gamma_{--} \Big) \frac{\delta}{\delta b_{++}} \\
& + \Big(c_- \partial_+ \beta_{+++} - 3\beta_{+++} \partial_+ c_- \Big) \frac{\delta}{\delta \beta_{+++}} \\
& + \Big(\partial_+ h_{--} \partial_+ \phi^i + h_{--} \partial_+{}^2 \phi^i - \partial_+ (Y^i c_-) \Big) \frac{\delta}{\delta Y^i} \\
& + \Big(h_{--} \partial_+ \beta_{+++} + 3\beta_{+++} \partial_+ h_{--} + \partial_+ (\rho_{++} c_-) + 2\rho_{++} \partial_+ c_- \Big) \frac{\delta}{\delta \rho_{++}} \\
& + \Big(2b_{++} \partial_+ h_{--} + h_{--} \partial_+ b_{++} + 2B_{---} \partial_+ \beta_{+++} + 3\beta_{+++} \partial_+ B_{---} \Big) \frac{\delta}{\delta \tau_+} \\
& + \Big(2\tau_+ \partial_+ c_- + c_- \partial_+ \tau_+ + 3\rho_{++} \partial_+ \gamma_{--} + 2\gamma_{--} \partial_+ \rho_{++} \Big) \frac{\delta}{\delta \tau_+} \Big) ,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

$$
\begin{aligned}
b^{(2)} = \int d^2x \Big(\; & \Big(2b_{++} \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+ \phi^i \Big) \frac{\delta}{\delta \phi^i} \\
& + \Big(2\partial_+ (b_{++} \partial_+ B_{---} \gamma_{--} \partial_+ \phi^i) - 2\partial_+ (b_{++} B_{---} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+ \phi^i) \Big) \frac{\delta}{\delta Y^i} \\
& - \Big(2\partial_+ (Y^i b_{++} \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--}) + 2\partial_+ (\tau_+ \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+ \phi^i) \Big) \frac{\delta}{\delta Y^i} \Big)
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

A expressão (2.40) mostra que as variáveis $(h, \partial_- c)$, $(B, \partial_- \gamma)$, $(-Y^i, \partial_+ \partial_- \phi^i)$, $(-\tau, \partial_- b)$, $(-\rho, \partial_- \beta)$ e suas derivadas estão agrupadas em dubletos de BRST [11, 12, 10], *i.e.*

$$
b^{(0)} \partial_-^l \partial_+^m u = \partial_-^l \partial_+^m v \;, \qquad b^{(0)} \partial_-^l \partial_+^m v = 0 \;, \tag{2.43}
$$

com

$$
\begin{aligned}
u &= \Big(h_{--}, B_{---}, -Y^i, -\tau_{+}, -\rho_{++}\Big) \ , \qquad (2.44) \\
v &= \Big(\partial_- c_-, \partial_- \gamma_{--}, \partial_+ \partial_- \phi^i, \partial_- b_{++}, \partial_- \beta_{+++}\Big) \ .
\end{aligned}
$$

E como é bem conhecido, a cohomologia não pode depender dessas variáveis [11, 12]. Segue então que, no espaço local $\mathcal{V}$, a cohomologia $\mathcal{H}(b^{(0)})$ de $b^{(0)}$ é expandida por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(b^{(0)}) &= \textit{polinômios nas variáveis } \Big(\partial_+^k \lambda,\ \partial_+^{k+1} \phi^i\Big) \ , \qquad k = 0, 1, 2, ... \\
& \qquad\qquad \lambda = (c_-, \gamma_{--}, b_{++}, \beta_{+++}) \ .
\end{aligned}
$$

Isto quer dizer que a cohomologia de $b^{(0)}$ terá todos os termos que pudermos construir com as variáveis acima com as dimensões adequadas para o problema de cohomologia que pretendemos estudar. No caso das equações de descida da anomalia, eq.(2.13), estamos interessados, para começar, no setor de dimensão três, número de "ghost" três e grau de forma zero. E podemos classificá-los segundo os autovalores v do operador de filtragem $\mathcal{N}$ de (2.33). A seguir são listados todos esses elementos:

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(3)} = \Big(\;& \partial_+^4 c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--}, \quad \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^5 \gamma_{--}, \quad \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} \partial_+^4 \gamma_{--}, \\
& c_- \partial_+ c_- \partial_+^2 c_-, \quad c_- \partial_+^4 c_- \gamma_{--}, \quad \partial_+ c_- \partial_+^3 c_- \gamma_{--}, \\
& c_- \partial_+^3 c_- \partial_+ \gamma_{--}, \quad \partial_+ c_- \partial_+^2 c_- \partial_+ \gamma_{--}, \quad c_- \partial_+^2 c_- \partial_+^2 \gamma_{--}, \\
& c_- \partial_+ c_- \partial_+^3 \gamma_{--}, \quad c_- \gamma_{--} \partial_+^5 \gamma_{--}, \quad c_- \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^4 \gamma_{--}, \\
& c_- \partial_+^2 \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--}, \quad \partial_+ c_- \gamma_{--} \partial_+^4 \gamma_{--}, \quad \partial_+ c_- \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--}, \\
& \partial_+^2 c_- \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--}, \quad \partial_+^2 c_- \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--}, \quad \partial_+^3 c_- \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} \\
& \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--}, \quad c_- \partial_+ c_- \gamma_{--} W_{+++}, \\
& c_- \partial_+ c_- \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+ \phi^i, \quad c_- \partial_+^2 c_- \gamma_{--} T_{++}, \\
& c_- \partial_+ c_- \partial_+ \gamma_{--} T_{++}, \quad c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} T_{++} T_{++}, \\
& c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+ \phi^j \partial_+ \phi^k d_{ijk}, \quad \partial_+ c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} W_{+++}, \\
& c_- \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} W_{+++}, \quad c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^3 \phi^i \partial_+ \phi^i, \\
& c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+^2 \phi^i, \quad \partial_+^2 c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} T_{++}, \\
& \partial_+ c_- \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} T_{++}, \quad c_- \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} T_{++}, \\
& \partial_+ c_- \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+ \phi^i, \quad c_- \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--} T_{++}, \\
& c_- \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+ \phi^i, \quad \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^3 \gamma_{--} T_{++}, \\
& \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} \partial_+^2 \phi^i \partial_+ \phi^i, \quad \gamma_{--} \partial_+ \gamma_{--} \partial_+^2 \gamma_{--} W_{+++} \Big) ,
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(4)} = \Big(\; & c_-\partial_+c_-\partial_+^2c_-\gamma_{--}b_{++}, \quad c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2b_{++}, \\
& c_-\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+b_{++}, \quad c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+b_{++}, \\
& \partial_+c_-\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}, \quad c_-\partial_+^3c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++}, \quad c_-\partial_+c_-\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\partial_+c_-\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++}, \quad c_-\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\beta_{+++}, \\
& c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\beta_{+++}, \quad c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+^2b_{++}, \\
& \partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+b_{++}, \quad c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\partial_+b_{++}, \\
& \partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++}, \quad \partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}b_{++}, \quad c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^4\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++}, \quad \partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\beta_{+++}, \\
& c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\beta_{+++}, \quad \gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}b_{++}, \\
& c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}T_{++}, \\
& c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++}T_{++}\Big) \; .
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

Observamos em particular que a cohomologia de $b^{(0)}$ com $v \geq 5$ é vazia. Isto implica que o sistema (2.37) reduz-se a um número finito de equações

$$
\begin{aligned}
b^{(0)}\,\Lambda^{(6)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(5)} \;+\; b^{(2)}\,\Lambda^{(4)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(5)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(4)} \;+\; b^{(2)}\,\Lambda^{(3)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(4)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(3)} \;+\; b^{(2)}\,\Lambda^{(2)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(3)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(2)} \;+\; b^{(2)}\,\Lambda^{(1)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(2)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(1)} \;+\; b^{(2)}\,\Lambda^{(0)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(1)} \;+\; b^{(1)}\,\Lambda^{(0)} \;&=\; 0\,, \\
b^{(0)}\,\Lambda^{(0)} \;&=\; 0\,,
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

com as condições com autovalores maiores ($v \geq 7$) correpondendo a cociclos triviais de $B^{(0)}$. Essas relações acima irão implicar restrições sobre os elementos da cohomologia de $b^{(0)}$ em (2.45) e (2.46) de forma a se obter os objetos pertencentes a cohomologia de $B^{(0)}$. Não é difícil então realizarmos essas restrições, chegando ao resultado que a cohomologia $\mathcal{H}(B^{(0)})$ no setor das zero formas com número de "ghost" três e dimensão três contem cinco classes distintas, cujos representantes podem ser escolhidos como

$$
\begin{aligned}
\Big(&\Big(c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}(\partial_+\phi^i\partial_+^3\phi^i - \partial_+^2\phi^i\partial_+^2\phi^i) + T_{++}\partial_+\gamma_{--}(\partial_+^2 c_-\gamma_{--} + 12c_-\partial_+^2\gamma_{--}) \Big), \\
&c_-\partial_+ c_-\partial_+^2 c_-,\; c_-\partial_+ c_-\gamma_{--}W_{+++},\; c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}T_{++}T_{++},\; c_-\partial_+ c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}T_{++} \Big)\,.
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Procedendo da mesma forma para os demais setores das equações de descida (2.13), *i.e.*, obtendo a cohomologia $\mathcal{H}(b^{(0)})$ e depois observando as restrições impostas por (2.37), chegamos a conclusão que a cohomologia $\mathcal{H}(B^{(0)})$ é vazia nos setores das um formas com dimensão três e número de "ghost" dois e no das dois formas com dimensão três e número de "ghost" um. Pelo teorema espectral isto significa que as únicas possíveis contribuições à anomalia (2.12) virão do setor das zero formas descrito acima, e ela dependerá essencialmente dos cociclos em (2.48), podendo então conter no máximo cinco elementos independentes.

Para chegar a forma final da anomalia, precisamos ainda completar a cohomologia do operador linearizado de Slavnov-Taylor B a partir do espaço determinado por (2.48). Observemos primeiramente que este espaço se decompõe de acordo com os autovalores do operador de filtragem (2.23) nos subespaços $Q^{(0)}$, $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$,

$$\widetilde{\mathcal{N}}\, Q^{(k)} = kQ^{(k)} , \tag{2.49}$$

com

$$Q^{(0)} = c^3 = c_-\partial_+c_-\partial_+^2c_- ; \tag{2.50}$$

$$Q^{(2)} = mQ_1^{(2)} + pQ_2^{(2)} , \tag{2.51}$$

onde (m, p) são coeficientes arbitrários e

$$Q_1^{(2)} = c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}T_{++} , \tag{2.52}$$

$$Q_2^{(2)} = c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\left(\partial_+\phi^i\partial_+^3\phi^i - \partial_+^2\phi^i\partial_+^2\phi^i\right) + T_{++}\partial_+\gamma_{--}\left(\partial_+^2c_-\gamma_{--} + \frac{1}{2}c_-\partial_+^2\gamma_{--}\right) ; \tag{2.53}$$

$$Q^{(3)} = c_-\partial_+c_-\gamma_{--}W_{+++} ; \tag{2.54}$$

$$Q^{(4)} = c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}T_{++}T_{++} . \tag{2.55}$$

Precisamos conferir agora se esses cociclos $B^{(0)}$ acima podem ser promovidos a cociclos não triviais de B, *i.e.*, veremos a possibilidade de completar $Q^{(0)}$, $Q_1^{(2)}$, $Q_2^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(4)}$ de forma a obter elementos da cohomologia de B. Isto significa encontrar, para cada $Q^{(k)}$, um termo $\mathcal{R}_{Q^{(k)}}$

$$Q^{(k)} \to \widehat{Q}^{(k)} = Q^{(k)} + \mathcal{R}_{Q^{(k)}} , \tag{2.56}$$

tal que

$$\begin{aligned} &i) \qquad B\widehat{Q}^{(k)} = 0 , \\ &ii) \qquad \widehat{Q}^{(k)} \neq B(...) . \end{aligned} \tag{2.57}$$

Obviamente, os objetos $\mathcal{R}_{Q^{(k)}}$ são sempre definidos módulo cociclos B triviais.

Em geral, completar a cohomologia de B é um problema trabalhoso. Normalmente teríamos que proceder como fizemos quando completamos a cohomologia de $B^{(0)}$ a partir de $\mathcal{H}(b^{(0)})$, abrindo a condição (i) em (2.57) de acordo com o filtro (2.23) e analisando as restrições sobre os coeficientes de cada classe de cohomologia definida por cada $Q^{(k)}$. No entanto, temos no caso presente uma alternativa que simplifica tremendamente o problema pela existência de uma combinação que permite mapear os elementos da cohomologia de $B^{(0)}$ em cociclos não triviais de B.

Assim, vamos discutir com detalhes o cociclo c^3 em (2.50). Para completá-lo, introduzimos a combinação que aqui é denominada fórmula *tipo Russa*

$$\widehat{c}_- = c_- - 2b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} \ . \tag{2.58}$$

Usando as eqs.(2.26 − 2.29), verificamos que $\widehat{c}_-$ transforma-se sob B da mesma forma que c_- se transforma sob $B^{(0)}$,

$$\begin{aligned} B\widehat{c}_- &= \widehat{c}_-\partial_+\widehat{c}_- \ , \\ B^{(0)}c_- &= c_-\partial_+c_- \ . \end{aligned}$$

É imediato então que o cociclo

$$\widehat{c}^3 = \widehat{c}_-\partial_+\widehat{c}_-\partial_+^2\widehat{c}_- \tag{2.59}$$

é B invariante, já satisfazendo a primeira condição de (2.57). E a partir da eq.(2.56), podemos calcular $\mathcal{R}_{c^3}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{c^3} = \widehat{c}^3 - c^3 \ = \ & -2c_-\partial_+c_-\left(\partial_+^2 b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} + 2\partial_+ b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\right) \\ & -2c_-\partial_+c_-\left(b_{++}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} + b_{++}\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\right) \\ & +2c_-\partial_+^2 c_-\left(\partial_+ b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} + b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\right) \\ & -2c_-\partial_+^2 c_- b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} \ . \end{aligned} \tag{2.60}$$

Note-se que $\mathcal{R}_{c^3}$ pertence ao subespaço do operador de filtragem $\widetilde{\mathcal{N}}$ com autovalor zero. Assim ele é necessariamente um cociclo $B^{(0)}$ exato

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{c^3} &= B^{(0)}\mathcal{M}^{(0)} \\
&= B^{(0)}\Big(\quad 4\partial_+^2 c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++} - 2\partial_+ c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++} \\
&\quad -2\partial_+ c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+ b_{++} + \tfrac{3}{4}c_-\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}b_{++} \\
&\quad +\tfrac{3}{2}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\beta_{+++} - \tfrac{1}{2}c_-\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}b_{++}\Big) .
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Pode-se mostrar agora que (2.59) tambem satisfaz o segundo requisito de (2.57). A prova por absurdo segue de supormos que

$$\tilde{c}^3 = B\Xi \ , \tag{2.62}$$

para algum polinômio Ξ local. Decompondo (2.62) por $\widetilde{\mathcal{N}}$ e lembrando que tanto c^3 quanto $\mathcal{R}_{c^3}$ pertencem ao subespaço com autovalor zero, obtemos

$$c^3 + \mathcal{R}_{c^3} = B^{(0)}\Xi \ .$$

Esta condição, devido à trivialidade de $\mathcal{R}_{c^3}$ em relação à $B^{(0)}$ determinada em (2.61), fornece

$$c^3 = B^{(0)}(\Xi - \mathcal{M}^{(0)}) \ ,$$

o que implicaria que c^3 seria $B^{(0)}$ trivial, em contradição com (2.48). Fica provado então que a expressão (2.59) define de fato uma classe de cohomologia do operador B no setor das zero formas com número de "ghost" e dimensão três. Em particular, a equação (2.58) mostrou-se uma forma elegante e imediata de se obter classes de cohomologia de B a partir daquelas de $B^{(0)}$, justificando a denominação de fórmula *tipo Russa.*

Passando agora para a análise dos demais cociclos $(2.52 - 2.55)$, pode-se facilmente verificar que a expressão $Q^{(4)}$ de (2.55) é B invariante,

$$BQ^{(4)} = 0 \ .$$

No entanto, devido a

$$Q^{(4)} = -B(c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++}T_{++}) \ ,$$

ele é cohomologicamente trivial. Já o cociclo $Q_2^{(2)}$ em (2.53) pode ser completado usando-se a fórmula *tipo Russa* novamente:

$$Q_2^{(2)} \rightarrow \widehat{Q}_2^{(2)} = Q_2^{(2)} + \mathcal{R}_{Q_2^{(2)}} \ , \tag{2.63}$$

com $\mathcal{R}_{Q_2^{(2)}}$ dado por

$$\mathcal{R}_{Q_2^{(2)}} = 3\widehat{c}_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}(\partial_+^3\gamma_{--}\beta_{+++} + \partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++}) \ . \tag{2.64}$$

Como no caso do cociclo $\widehat{c}^3$, pode-se mostrar que a expressão (2.63) não é B trivial, e assim identifica uma segunda classe de cohomologia.

Finalmente, os dois últimos cociclos $Q_1^{(2)}$ e $Q^{(3)}$ só fornecem uma quantidade B invariante na combinação

$$4Q_1^{(2)} + Q^{(3)} \ ,$$

que é trivial.

$$4Q_1^{(2)} + Q^{(3)} = -B(c_-\partial_+c_-\gamma_{--}\beta_{+++}) \ .$$

Resumindo, foram obtidos dois cociclos não triviais na cohomologia local de B nos setores das equações de descida (2.13), ambos pertencentes ao nível das zero-formas, com número de "ghost" e dimensão três. Eles determinam

$$\omega_0^3 = \left(\widehat{Q}^{(0)}, \widehat{Q}_2^{(2)}\right) \ , \tag{2.65}$$

e são descritos por

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}^{(0)} = \widehat{c}^3 \;\; &= \;\; c_-\partial_+ c_-\partial_+^2 c_- \\
&\quad -2c_-\partial_+ c_- \left(\partial_+^2 b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} + 2\partial_+ b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\right) \\
&\quad -2c_-\partial_+ c_- \left(b_{++}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} + b_{++}\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\right) \\
&\quad +2c_-\partial_+^2 c_- \left(\partial_+ b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} + b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\right) \\
&\quad -2c_-\partial_+^2 c_- b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} \; ,
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}_2^{(2)} \;\; &= \;\; \widehat{c}_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\left(\partial_+\phi^i\partial_+^3\phi^i - \partial_+^2\phi^i\partial_+^2\phi^i\right) \\
&\quad +T_{++}\partial_+\gamma_{--}\left(\partial_+^2\widehat{c}_-\gamma_{--} + \tfrac{1}{2}\widehat{c}_-\partial_+^2\gamma_{--}\right) \\
&\quad +3\widehat{c}_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}(\partial_+^3\gamma_{--}\beta_{+++} + \partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++}) \, .
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Isto conclui a análise da cohomologia de B.

2.2 As Anomalias de $\mathcal{W}_3$ Quiral

Já tendo caracterizado a cohomologia de B, pode-se agora partir para a solução da torre de equações (2.13) e encontrar as anomalias que ocorrem na extensão quântica da identidade de Slavnov-Taylor (2.7).

Usando a decomposição definida por (2.15), (2.16) e (2.17), e as equações (2.19), (2.20), é imediato conferir que para cada elemento de ω_0^3 em (2.65) corresponderá uma dois forma ω_2^1 que será uma solução não trivial da condição de consistência de Wess-Zumino ao nível não integrado

$$
\omega_2^1 = \left(\mathcal{U}_2^1, \mathcal{T}_2^1\right) \; ,
$$

com

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_2^1 &= -dx^+dx^- \quad \delta_+\delta_-\widehat{Q}^{(0)} \\
&= dx^+dx^- \quad \Big(\partial_+h_{--}\partial_+^2c_- - \partial_+^2h_{--}\partial_+c_- - 2\partial_+h_{--}\partial_+^2b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} \\
&\qquad -2\partial_+^2\tau_+\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} - 2B_{---}\partial_+c_-\partial_+^2b_{++}\partial_+\gamma_{--} \\
&\qquad +2\partial_+B_{---}\partial_+c_-\partial_+^2b_{++}\gamma_{--} \\
&\qquad -4\partial_+h_{--}\partial_+b_{++}\gamma_{--}\partial^2\gamma_{--} - 4\partial_+\tau_+\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} \\
&\qquad -4B_{---}\partial_+c_-\partial_+b_{++}\partial_+^2\gamma_{--} + 4\partial_+^2B_{---}\partial_+c_-\partial_+b_{++}\gamma_{--} \\
&\qquad -2\partial_+h_{--}b_{++}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} - 2\tau_+\partial_+c_-\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} \\
&\qquad -2\partial_+B_{---}\partial_+c_-b_{++}\partial_+^2\gamma_{--} + 2\partial_+^2B_{---}\partial_+c_-b_{++}\partial_+\gamma_{--} \\
&\qquad -2\partial_+h_{--}b_{++}\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--} - 2\tau_+\partial_+c_-\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--} \\
&\qquad -2B_{---}\partial_+c_-b_{++}\partial_+^3\gamma_{--} + 2\partial_+^3B_{---}\partial_+c_-b_{++}\gamma_{--} \\
&\qquad +2\partial_+^2h_{--}\partial_+b_{++}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} + 2\partial_+\tau_+\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--} \\
&\qquad +2B_{---}\partial_+^2c_-\partial_+b_{++}\partial_+\gamma_{--} - 2\partial_+B_{---}\partial_+^2c_-\partial_+b_{++}\gamma_{--} \\
&\qquad +2\partial_+^2h_{--}b_{++}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} + 2\tau_+\partial_+^2c_-\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--} \\
&\qquad +2B_{---}\partial_+^2c_-b_{++}\partial_+^2\gamma_{--} - 2\partial_+^2B_{---}\partial_+^2c_-b_{++}\gamma_{--} \Big) \,,
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_2^1 &= -dx^+dx^- \quad \delta_+\delta_-\widehat{Q}_2^{(2)} \\
&= dx^+dx^- \quad \Big(B_{---}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\phi^i\partial_+\phi^i \;-\; \partial_+B_{---}\gamma_{--}\partial_+^3\phi^i\partial_+\phi^i \\
&\quad -\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2Y^i\partial_+\phi^i \;-\; \gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}Y^i\partial_+^3\phi^i \\
&\quad -B_{---}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\phi^i\partial_+^2\phi^i \;+\; \gamma_{--}\partial_+B_{---}\partial_+^2\phi^i\partial_+^2\phi^i \\
&\quad +2\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+Y^i\partial_+^2\phi^i \;-\; \frac{1}{2}\partial_+B_{---}\partial_+^2\gamma_{--}T_{++} \\
&\quad +\frac{1}{2}\partial_+^2B_{---}\partial_+\gamma_{--}T_{++} \;+\; \frac{1}{2}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}Y^i\partial_+\phi^i \\
&\quad +3B_{---}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\beta_{+++} \;-\; 3\partial_+B_{---}\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\beta_{+++} \\
&\quad +3\partial_+^3B_{---}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\beta_{+++} \;+3\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^3\gamma_{--}\rho_{++} \\
&\quad +3B_{---}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++} \;-3\partial_+B_{---}\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++} \\
&\quad +3\partial_+^2B_{---}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+\beta_{+++} \;+3\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}\partial_+\rho_{++}\Big) \;.
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

Merece ser realçado novamente que as contribuições acima, em geral, representariam apenas uma parte da solução, mas que no caso presente são de fato a solução mais geral do sistema (2.13), devido à anulação da cohomologia local de B nos níveis superiores das equações de descida.

E finalmente os cociclos integrados são dados por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_u &= \int \mathcal{U}_2^1 \\
&= \int d^2x\Big(2c_-\partial_+^3h_{--} - 4\partial_+^3h_{--}\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}b_{++} + 4\partial_+^3c_-B_{---}\partial_+\gamma_{--}b_{++} \\
&\qquad - 4\partial_+^3c_-\gamma_{--}\partial_+B_{---}b_{++} - 4\partial_+^3c_-\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\tau_+\Big) \;,
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_T &= \int \mathcal{T}_2^1 \\
&= \int d^2x \bigg(2\Big(B_{---}\partial_+\gamma_{--} - \partial_+B_{---}\gamma_{--}\Big)\partial_+^3\phi^i\partial_+\phi^i \\
&\quad + \frac{3}{2}\Big(\partial_+^2B_{---}\partial_+\gamma_{--} - \partial_+B_{---}\partial_+^2\gamma_{--}\Big)T_{++} \\
&\quad + \Big(\partial_+^3B_{---}\gamma_{--} - B_{---}\partial_+^3\gamma_{--}\Big)T_{++} \\
&\quad - \gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2Y^i\partial_+\phi^i - \gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}Y^i\partial_+^3\phi^i \\
&\quad + 2\gamma_{--}\partial_+\gamma_{--}\partial_+Y^i\partial_+^2\phi^i + \frac{1}{2}\partial_+\gamma_{--}\partial_+^2\gamma_{--}Y^i\partial_+\phi^i\bigg) .
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

As equações (2.70) e (2.71) fornecem as expressões para as anomalias que surgem na gravitação $\mathcal{W}_3$ quiral. Elas estão em completo acordo com os resultados de computações de gráficos de Feynman a um "loop" feitos em [29], [31] e [32]. Em particular, o termo $\mathcal{A}_u$ de (2.70), também chamado de anomalia gravitacional universal, é facilmente reconhecido como uma generalização da anomalia de difeomorfismo da corda bosônica [30], enquanto que o segundo elemento $\mathcal{A}_T$ em (2.71) é uma anomalia dependente da matéria cuja origem pode ser creditada a não linearidade da álgebra $\mathcal{W}_3$ [29, 28, 31, 32]. Essa anomalia de matéria é uma novidade em relação à corda, pois depende explicitamente do "ghost" γ associado à corrente W. Na corda bosônica, além do cociclo c^3 que gera a anomalia de difeomorfismo, existe a presença de um segundo elemento não trivial na cohomologia dependente da matéria, mas que só poderia ser gerado por um gráfico de Feynman na presença de um potencial para a matéria ϕ^i [22]. A ausência desse potencial para a corda simplesmente implica que o coeficiente desse cociclo é nulo e, portanto, ele não gera uma anomalia de fato. Mas esse não é o caso aqui, até porque foi escolhido desde o início que se trabalharia com um espaço de campos, eq.(2.14), onde a matéria aparecesse com pelo menos uma derivada . Assim, o cociclo $\mathcal{A}_T$ poderá ter um coeficiente não nulo e gerar uma anomalia. E o fato de não ser possível se anular os coeficientes de ambas as anomalias simultaneamente leva ao resultado de que a realização não-linear (2.1) da álgebra $\mathcal{W}_3$ é necessariamente anômala [32].

Como conclusão se menciona que a anomalia $\mathcal{A}_T$ pode ser eliminada pela inclusão, na ação $\mathcal{W}_3$ inicial, de novos acoplamentos locais com os campos externos (h_{--}, B_{---}), denominados cargas de fundo, generalizando a realização das correntes T e W originais [29, 28, 31, 32]. Essas cargas são caracterizadas por um conjunto de novos coeficientes globais que, junto com os símbolos d_{ijk} iniciais, satisfazem uma série de vínculos determinados pelo fechamento da álgebra $\mathcal{W}_3$ [33]. Mas o que deve ficar claro é que isso não representa uma reabsorção da anomalia de matéria. Uma vez fixado o ponto de partida dado pela ação (2.6), não há forma alguma de se reabsorver qualquer uma das duas anomalias acima como um contratermo local.

Capítulo 3

Sistemas de Curvatura Nula com Multipleto Completo

Neste e no próximo capítulo iremos apresentar uma extensão dos resultados descritos na Introdução, realçando ainda mais a importância do operador de decomposição δ, através de uma profunda relação deste com a possibilidade de codificar todas as informações relevantes da estrutura BRST de uma teoria (as transformações dos campos, as classes de cohomologia, as soluções das equações de descida ...) numa única equação, que toma a forma de uma condição de curvatura nula [21].

Começamos por fixar a notação a ser adotada nestes dois capítulos. Iremos trabalhar em um espaço-tempo D dimensional equipado com um conjunto de campos denotado genericamente por $\left\{\varphi_q^p\right\}$, onde, como antes, p e q se referem respectivamente ao número de "ghost" e grau de forma. As componentes φ_q^p serão tratadas como variáveis comutantes ou anti-comutantes de acordo com o fato de seu grau total (a soma $p+q$) ser par ou ímpar e assumirão valores numa álgebra de Lie, $\varphi_q^p = \left(\varphi_q^p\right)^a T^a$, T^a sendo os geradores hermiteanos de um grupo de Lie $\mathcal{G}$ compacto e semi-simples. Além disso, assumiremos que os campos serão reunidos num único campo completo generalizado $\widetilde{A}$ de grau total um,

$$\widetilde{A} = \sum_{j=0}^{D} \varphi_j^{1-j} = \varphi_0^1 + \varphi_1^0 + \varphi_2^{-1} + \ldots + \varphi_D^{1-D} \ . \tag{3.1}$$

O nome completo é devido ao fato de que o conteúdo de campos da expansão (3.1) varre todos os graus de forma possíveis. A eq.(3.1) mostra que o campo generalizado $\widetilde{A}$ contem uma zero forma φ_0^1 com $N_g = 1$ e uma um forma φ_1^0 com $N_g = 0$. Esses campos serão naturalmente identificados com o campo de "ghost" de Fadeev-Popov e com a conexão de calibre de Yang-Mills. Por isso $\widetilde{A}$ será chamado de multipleto de calibre e as componentes φ_0^1 e φ_1^0 serão denotadas respectivamente por c e A, de tal forma que

$$\widetilde{A} = \sum_{j=0}^{D} \varphi_j^{1-j} = c + A + \varphi_2^{-1} + ... + \varphi_D^{1-D} \, . \tag{3.2}$$

Finalmente, o espaço funcional $\mathcal{E}$ onde o operador de BRST irá atuar é o espaço dos polinômios nos campos φ_j^{1-j} e nos seus diferenciais,

$$\mathcal{E} \;=\; \textit{polinômios em} \; \left(\varphi_j^{1-j}, \; d\varphi_j^{1-j}; \; 0 \leq j \leq D \right) \; ,$$

d sendo a derivada exterior definida como[1]

$$d\eta_q = dx^{\mu} \partial_{\mu} \eta_q$$

para qualquer q forma

$$\eta_q = \frac{1}{q!} \eta_{i_1 .... i_q} dx^{i_1} .... dx^{i_q} \; ,$$

onde um produto $\wedge$ está subentendido.

Devemos mencionar também que, como mostrado em [13, 34], o espaço dos polinômios de formas é suficiente para incluir as anomalias e as ações tipo Chern-Simons que podem ser naturalmente escritas em termos de formas diferenciais.

Para obtermos as transformações de BRST dos campos pertencentes ao multipleto de

[1] Observe que $d\varphi_D^{1-D}$ se anula automaticamente devido a dimensão do espaço-tempo.

calibre (3.2), introduzimos o operador generalizado de grau total um[2]

$$\tilde{d} = b + d \;, \tag{3.3}$$

e impomos a condição de curvatura nula

$$\tilde{d}\tilde{A} = i\tilde{A}^2 = \frac{i}{2}\left[\tilde{A}, \tilde{A}\right] \;, \tag{3.4}$$

onde $[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}\, ba$ representa o comutador graduado e $|a|$ o grau total de a.

Desenvolvendo a equação (3.4) em componentes e identificando os termos com o mesmo número de "ghost" e grau de forma, obtemos as seguintes transformações

$$\begin{aligned} bc &= ic^2 \;, \\ bA &= -dc + i\,[c, A] \;, \\ b\varphi_j^{1-j} &= -d\varphi_{j-1}^{2-j} + \frac{i}{2}\sum_{m=0}^{j}\left[\varphi_m^{1-m}, \varphi_{j-m}^{1-j+m}\right] \;, \qquad 2 \le j \le D \;, \end{aligned} \tag{3.5}$$

que verifica-se serem nilpotentes

$$b^2 = 0 \;. \tag{3.6}$$

Note-se que, como anunciado, as transformações das duas primeiras componentes do multipleto $\tilde{A}$ nada mais são que as familiares transformações de BRST do "ghost" de Faddeev-Popov e da conexão de Yang-Mills.

Podemos introduzir agora o operador δ definido por

$$\tilde{A} = e^{\delta} c \;, \tag{3.7}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \delta\varphi_j^{1-j} &= (j+1)\varphi_{j+1}^{-j} \;, \qquad 0 \le j \le D-1 \;, \\ \delta\varphi_D^{1-D} &= 0 \;. \end{aligned} \tag{3.8}$$

[2]Os operadores b e d aumentam respectivamente o número de "ghost" e o grau de forma de uma unidade.

Sua ação se estende imediatamente sobre os diferenciais ($d\varphi_j^{1-j}$, $0 \leq j \leq D$) como

$$
\begin{aligned}
&\delta d\varphi_j^{1-j} = (j+1) d\varphi_{j+1}^{-j} \,, \qquad 0 \leq j \leq D-2 \,, \\
&\delta d\varphi_{D-1}^{2-D} = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

As equações (3.8) e (3.9) mostram que o operador δ aumenta de uma unidade o grau de forma e diminui o número de "ghost" do mesmo valor, de tal forma que o seu grau total é nulo. É também facilmente verificado que, no espaço funcional $\mathcal{E}$, os operadores b e δ obedecem

$$
d = -[b, \delta] \,, \qquad [d, \delta] = 0 \,, \tag{3.10}
$$

e assim vemos que δ é na verdade o operador de decomposição apresentado em (1.17), (1.18) e que foi utilizado no capítulo anterior para resolver as equações de descida para a anomalia de $\mathcal{W}_3$.

Em particular, de (3.10), segue que

$$
\widetilde{d} = b + d = e^{\delta} b e^{-\delta} \,. \tag{3.11}
$$

Utilizando a equação acima em conjunto com (3.7) na interpretação dos elementos aparecendo na condição de curvatura nula (3.4), vemos que esta pode ser reescrita como

$$
\widetilde{d}\widetilde{A} = i\widetilde{A}^2 \quad \Longrightarrow \quad e^{\delta} b e^{-\delta} e^{\delta} c = i e^{\delta} c^2 \,, \tag{3.12}
$$

i.e., a eq.(3.4) decorre da existência da decomposição δ, que simplesmente mapeia a equação de transformação do "ghost" no sistema completo de transformações (3.5), que então podem ser reunidas numa única condição de curvatura nula. Isto não é surpreendente, já que, como é bem sabido, o campo de "ghost" c identifica a forma de Maurer-Cartan do grupo $\mathcal{G}$ e sua transformação de BRST nada mais é que a correspondente equação de Maurer-Cartan [6, 7, 35, 36], que é de fato uma condição de curvatura nula. Este é o sentido geométrico da equação (3.4).

Antes de passarmos a cohomologia de $\widetilde{d}$, vamos fazer uma revisão rápida da cohomologia local de b no espaço $\mathcal{E}$ que definimos acima [18, 19, 20]. Podemos computá-la utilizando a mesma técnica usada no caso $\mathcal{W}_3$. Introduzimos um operador de filtragem $\mathcal{N}$ definido por

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}\ \varphi_j^{1-j} = \varphi_j^{1-j}\ , \qquad 0 \leq j \leq D\ , \\
&\mathcal{N}\ d\varphi_j^{1-j} = d\varphi_j^{1-j}\ ,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

de acordo com o qual o operador de Slavnov-Taylor se decompõe como

$$
b = b_0 + b_1\ , \tag{3.14}
$$

com

$$
\begin{aligned}
&b_0 c = 0\ , \\
&b_0 \varphi_m^{1-m} = -d\varphi_{m-1}^{2-m}\ , \qquad b_0 d\varphi_{m-1}^{2-m} = 0\ , \qquad 1 \leq m \leq D\ ,
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

e

$$
b_0^2 = 0\ . \tag{3.16}
$$

Como já dissemos no capítulo anterior, dada uma filtragem $\mathcal{N}$, a cohomologia de b é isomórfica a um subespaço da cohomologia de b_0, e é nesta que nos concentraremos agora. Em particular, o que a equação (3.15) mostra é que todos os campos $\left(\varphi_j^{1-j},\ 1 \leq m \leq D\right)$ com grau de forma maior que zero e seus diferenciais estão agrupados em dubletos [3, 11, 12, 13]. E como é sabido, a cohomologia não depende dessas variáveis. Portanto, as classes de cohomologia de b_0 dependem somente do "ghost" c não diferenciado, sendo dadas por elementos do tipo

$$
\alpha_{i_1 \ldots . i_n} c^{i_1} \ldots . c^{i_n} \tag{3.17}
$$

com $\alpha_{i_1 \ldots . i_n}$ coeficientes arbitrários. Desta forma, pelo teorema citado, segue que a cohomologia de b também será dada por elementos do tipo (3.17) com a restrição de que os coeficientes $\alpha_{i_1 \ldots . i_n}$ sejam tensores invariantes do grupo de calibre $\mathcal{G}$ [13, 34, 37, 38].

Resumindo, a cohomologia do operador b no caso de multipleto completo é expandida por polinômios invariantes em c construídos com monômios do tipo

$$Tr\frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\qquad n\geq 1\,. \tag{3.18}$$

Observando agora a forma da condição de curvatura nula (3.4)

$$\tilde{d}\tilde{A}=i\tilde{A}^2$$

e lembrando que ela é o mapeamento e^{δ} da equação de transformação do "ghost" (3.12), não é difícil concluir a partir dos resultados acima que a cohomologia de $\tilde{d}$ é analogamente dada por polinômios invariantes construídos com monômios generalizados da forma

$$Tr\frac{\tilde{A}^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\qquad n\geq 1\,, \tag{3.19}$$

i.e.

$$\tilde{d}\,Tr\frac{\tilde{A}^{2n+1}}{(2n+1)!}=0\,,\qquad Tr\frac{\tilde{A}^{2n+1}}{(2n+1)!}\neq\tilde{d}\,\tilde{Q}^{2n}\,, \tag{3.20}$$

para qualquer polinômio local $\tilde{Q}^{2n}$.

Tendo já computado as cohomologias dos operadores b e $\tilde{d}$, podemos agora analisar a questão das equações de descida partindo de um setor arbitrário de número de "ghost" G e grau de forma D, eqs.(1.15) da Introdução,

$$\begin{aligned} &b\,\omega^{G+j}_{D-j}\;+\;d\,\omega^{G+j+1}_{D-j-1}\;=\;0\,,\qquad 0\leq j\leq D-1\,,\\ &b\,\omega^{G+D}_{0}\;=\;0\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Mas introduzindo o cociclo generalizado de grau total $(G+D)$

$$\tilde{\omega}^{G+D}\;=\;\sum_{j=0}^{D}\omega^{G+D-j}_{j}\,, \tag{3.22}$$

vemos que o conjunto completo de equações de descida (3.21) pode ser codificado na forma extremamente compacta

$$\widetilde{d}\,\widetilde{\omega}^{G+D} = 0 \ .$$

Isto é, vemos que o problema da procura da solução geral do sistema de equações de descida (3.21) é transcrito no problema de cohomologia local para o operador $\widetilde{d}$, que de fato já foi resolvido acima!

Assim, a solução geral do sistema (3.21) é dada por

$$\widetilde{\omega}^{G+D} = Tr\frac{\widetilde{A}^{G+D}}{(G+D)!} \ . \tag{3.23}$$

Realmente, a eq.(3.20) prova que os cociclos acima não só satisfazem o sistema (3.21) como representam a solução não trivial

$$\begin{aligned} &\omega_j^{G+D-j} \neq b\ Q_j^{G+D-1-j} + d\ Q_{j-1}^{G+D-j} \ , \qquad 1 \leq j \leq D \ , \\ &\omega_0^{G+D} \neq b\ Q_0^{G+D-1} \ . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Merece ser realçado, finalmente, que, como consequência do fato de que o multipleto $\widetilde{A}$, eq.(3.2), é a transformação δ do campo de "ghost" c, eq.(3.7), o cociclo generalizado (3.23) é a transformação δ do correspondente cociclo de "ghost" (3.18)

$$\widetilde{\omega}^{G+D} = Tr\frac{\widetilde{A}^{G+D}}{(G+D)!} = e^{\delta}\ Tr\left(\frac{c^{G+D}}{(G+D)!}\right) \ . \tag{3.25}$$

3.1 Exemplo I: A Teoria de Chern-Simons

Para um melhor entendimento da construção prévia, vamos agora discutir em detalhes o caso da teoria de Chern-Simons em três dimensões, correspondendo a $G = 0$ e $D = 3$. Este exemplo nos dará a oportunidade de esclarecer o sentido das componentes de número de "ghost" negativo $\left(\varphi_j^{1-j},\ 2 \leq j \leq D\right)$ do multipleto de calibre $\widetilde{A}$ (3.2). Como será visto, esses campos serão simplesmente as fontes externas de BRST (anti-campos de Batalin-Vilkovisky) necessárias para a definição adequada das transformações não lineares da conexão de calibre A e do "ghost" de Faddeev-Popov c. O operador b passará então ao status do operador linearizado de Slavnov-Taylor B e as fontes externas estarão naturalmente incluídas no formalismo de curvatura nula.

Em um espaço-tempo tri-dimensional, o multipleto completo de calibre $\widetilde{A}$ da eq.(3.2) assumirá a seguinte forma

$$\widetilde{A} = c + A + \gamma + \tau \ , \tag{3.26}$$

γ e τ identificando respectivamente as componentes de número de "ghost" negativo φ_2^{-1} e φ_3^{-2}. Da condição de curvatura nula (3.4) são obtidas as transformações

$$\begin{aligned}
bc &= ic^2 \ , \\
bA &= -dc + i\,[c, A] \ , \\
b\gamma &= -F + i\,[c, \gamma] \ , \\
b\tau &= -d\gamma + i\,[c, \tau] + i\,[A, \gamma] \ ,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

F sendo a dois forma de campo $F = dA - iA^2$. Como explicado antes, para encontrarmos a solução das equações de descida

$$\begin{aligned}
&b\,\omega^j_{3-j} + d\,\omega^{j+1}_{2-j} = 0 \ , \qquad 0 \leq j \leq 2 \ , \\
&b\,\omega^3_0 = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

basta expandirmos o cociclo generalizado de grau total três

$$\widetilde{\omega}^3 = \frac{1}{3!} Tr\ \widetilde{A}^3 \ . \tag{3.29}$$

Após uma fácil computação obtém-se

$$\frac{1}{3!} Tr\ \widetilde{A}^3 = \omega^3_0 + \omega^2_1 + \omega^1_2 + \omega^0_3 \ , \tag{3.30}$$

com

$$
\begin{aligned}
\omega_0^3 &= \frac{1}{3!} Tr\ c^3 \ , \\
\omega_1^2 &= \frac{1}{2} Tr\ c^2 A \ , \\
\omega_2^1 &= \frac{1}{2} Tr\ \left(c^2 \gamma + c A^2 \right) \ , \\
\omega_3^0 &= \frac{1}{2} Tr\ \left(c^2 \tau + c A \gamma + c \gamma A + \frac{A^3}{3} \right) \ .
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

E de

$$
-iTr \left(c^2 \tau + c A \gamma + c \gamma A \right) = -Tr AF + b\, Tr\, (c\tau + A\gamma) + d\ Tr c\gamma \ ,
$$

a três forma ω_3^0 pode ser reescrita como

$$
\omega_3^0 = \frac{-i}{2} Tr \left(AF + i \frac{A^3}{3} \right) + \frac{i}{2} b\ Tr\, (c\tau + A\gamma) + \frac{i}{2} d\ Tr c\gamma \ ,
$$

fornecendo então a ação invariante

$$
S = i \int \omega_3^0 = \frac{1}{2} \int Tr\ (AF + i \frac{A^3}{3}) - \frac{1}{2} b \int Tr\, (c\tau + A\gamma) \ , \tag{3.32}
$$

que é facilmente reconhecida como sendo a ação truncada [3] da teoria de calibre de Chern-Simons completamente quantizada. Em particular, vemos que as componentes (γ, τ) do multipleto de calibre (3.26) são as fontes externas de BRST associadas às transformações não lineares de A e c, e que b é o operador linearizado de Slavnov-Taylor da teoria cujas transformações são justamente as determinadas por (3.28).

3.2 Exemplo II: Teorias BF

O formalismo de curvatura nula pode ser estendido para incluir o caso em que os campos de calibre são acoplados a campos de matéria cujas quantizações requerem a introdução de multipletos completos de matéria. Um exemplo típico deste tipo de acoplamento é dado pelos sistemas BF topológicos [39, 40] cujas ações clássicas se escrevem como

$$Tr \int_{\mathcal{M}^D} \mathcal{B}^0_{D-2} F ,$$

onde F é a dois forma de curvatura de calibre, $\mathcal{B}^0_{D-2}$ é uma $(D-2)$ forma com número de "ghost" zero e $\mathcal{M}^D$ uma variedade D-dimensional sem fronteiras.

A inclusão dos campos de matéria segue da seguinte forma (ver também ref.[41]): introduzimos um conjunto de campos $\left(\mathcal{B}^{D-2}_0, \mathcal{B}^{D-3}_1, ..., \mathcal{B}^1_{D-3}, \mathcal{B}^{-1}_{D-1}, \mathcal{B}^{-2}_D\right)$ que junto com o campo de matéria $\mathcal{B}^0_{D-2}$ dão origem a um multipleto completo $\widetilde{\mathcal{B}}$ de grau total $D-2$

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \sum_{j=0}^{D} \mathcal{B}^{D-2-j}_j . \tag{3.33}$$

As transformações de Slavnov-Taylor das várias componentes são obtidas ao requerermos que $\widetilde{\mathcal{B}}$ seja covariantemente constante com respeito a derivada covariante generalizada $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{d} - i\left[\widetilde{A}, \ \right]$,

$$\widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{\mathcal{B}} = \widetilde{d}\widetilde{\mathcal{B}} - i\left[\widetilde{A}, \widetilde{\mathcal{B}}\right] = 0 . \tag{3.34}$$

Esta condição, quando expandida em termos do grau de forma e número de "ghost", fornece as seguintes transformações nilpotentes:

$$\begin{aligned}
b\mathcal{B}^{D-2}_0 &= i\left[c, \mathcal{B}^{D-2}_0\right] , \\
b\mathcal{B}^{D-2-j}_j &= -d\mathcal{B}^{D-1-j}_{j-1} + i\sum_{m=0}^{j}\left[\varphi^{1-m}_m, \mathcal{B}^{D-2-j+m}_{j-m}\right] , \qquad 1 \leq j \leq D .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Repetindo o mesmo procedimento da seção anterior e usando os resultados gerais das refs.[13, 34, 37, 38], pode-se facilmente conferir que, com a inclusão do multipleto de matéria, a cohomologia do operador b é dada por polinômios nas zero formas de "ghosts" $\left(c, \mathcal{B}^{D-2}_0\right)$ construídas com monômios fatorados do tipo

$$\left(Tr\frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \cdot Tr\left(\mathcal{B}^{D-2}_0\right)^m , \quad m, n \geq 1 . \tag{3.36}$$

A relação do multipleto $\widetilde{\mathcal{B}}$ com a zero forma de ghost $\mathcal{B}_0^{D-2}$ é totalmente análoga à que encontramos para o multipleto de calibre $\widetilde{A}$,

$$\widetilde{\mathcal{B}} = e^{\delta} \, \mathcal{B}_0^{D-2} \; , \tag{3.37}$$

ou

$$\begin{aligned} &\delta \, \mathcal{B}_j^{D-2-j} = (j+1)\mathcal{B}_{j+1}^{D-3-j} \; , \qquad 0 \leq j \leq D-1 \; , \\ &\delta \, \mathcal{B}_D^{-2} = 0 \; , \end{aligned} \tag{3.38}$$

e

$$\begin{aligned} &\delta \, d\mathcal{B}_j^{D-2-j} = (j+1)d\mathcal{B}_{j+1}^{D-3-j} \; , \qquad 0 \leq j \leq D-2 \; , \\ &\delta \, d\mathcal{B}_{D-1}^{-1} = 0 \; , \end{aligned} \tag{3.39}$$

de tal forma que as relações algébricas

$$d = -\,[b, \delta] \;, \qquad [\delta, d] = 0 \;,$$

são ainda satisfeitas.

No que concerne a cohomologia do operador generalizado $\widetilde{d}$ das eqs.(3.4) e (3.34), é imediatamente visto de (3.36) que ela é expandida por monômios fatorados nos multipletos $\widetilde{A}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ do tipo

$$\left(Tr \frac{\widetilde{A}^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \cdot Tr \left(\widetilde{\mathcal{B}}^m \right) \; . \tag{3.40}$$

Como discutido na seção anterior, a expansão da expressão acima (3.40) em termos do grau de forma e do número de "ghost" fornece uma solução das equações de descida (3.21) na presença do multipleto de matéria, reproduzindo então os resultados estabelecidos em [18]. Novamente,

$$\left(Tr \frac{\widetilde{A}^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \cdot Tr \left(\widetilde{\mathcal{B}}^m \right) \; = \; e^{\delta} \; \left(Tr \frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \cdot Tr \left(\mathcal{B}_0^{D-2} \right)^m \; ,$$

o que mostra que a cohomologia de $\widetilde{d}$ é a transformação δ daquela do operador b.

A interpretação dos campos que compõem os multipletos é agora imediata. Em um espaço-tempo de dimensão $D \geq 2$, o multipleto de calibre $\widetilde{A}$ contem $D-1$ componentes de número de "ghost" negativo, $\left(\varphi_2^{-1}, ..., \varphi_D^{1-D}\right)$, enquanto que o multipleto de matéria $\widetilde{\mathcal{B}}$ contem $D-2$ componentes de número de "ghost" positivo, $\left(\mathcal{B}_0^{D-2}, ..., \mathcal{B}_{D-3}^1\right)$, e duas de número de "ghost" negativo, $\left(\mathcal{B}_{D-1}^{-1}, \mathcal{B}_D^{-2}\right)$. O conjunto $\left(\mathcal{B}_0^{D-2}, ..., \mathcal{B}_{D-3}^1\right)$ vai então identificar a bem conhecida torre de "ghosts" de "ghosts" necessária para a quantização dos sistemas BF. As componentes $\left(\varphi_3^{-2}, ..., \varphi_D^{1-D}\right)$ são então as correspondentes $D-2$ fontes externas associadas às transformações não lineares dos "ghosts" de "ghosts" (ver eq.(3.35)), enquanto que φ_2^{-1} é a fonte externa para a $D-2$ forma $\mathcal{B}_{D-2}^0$. Finalmente, $\left(\mathcal{B}_{D-1}^{-1}, \mathcal{B}_D^{-2}\right)$ são as fontes associadas às duas primeiras componentes do multipleto de calibre, *i.e.* A e c. Concluímos assim observando que no caso dos sistemas BF as fontes externas são trocadas [18], de forma que as fontes para as componentes quantizadas do multipleto de matéria são agrupadas no multipleto de calibre e vice-versa.

Como última observação, por completeza, mostramos que a ação truncada (incluindo os "ghosts" de "ghosts" e as fontes externas) para os sistemas BF podem ser colocadas na forma simples [41]

$$S = Tr \int_{\mathcal{M}^D} \left[\widetilde{\mathcal{B}}\,(d\widetilde{A} - i\widetilde{A}^2)\right]_D^0 = -Tr \int_{\mathcal{M}^D} \left[\widetilde{\mathcal{B}}\; b\; \widetilde{A}\right]_D^0 , \tag{3.41}$$

onde $[\ ]_D^0$ significa a restrição a termos de número de "ghost" 0 e grau de forma D. A igualdade em (3.41) vem da condição de curvatura nula (3.4). Em particular, usando (3.34), mostra-se que a expressão (3.41) é invariante sob a ação do operador b,

$$bS = 0 , \tag{3.42}$$

equação esta expressando o conteúdo da identidade de Slavnov-Taylor.

3.3 Exemplo III: O Sistema de "ghost" $b-c$

Apresentamos aqui, como outro exemplo interessante de sistema de matéria, a formulação de curvatura nula do modelo $b-c$ em duas dimensões, cuja ação é escrita como

$$S_{b-c} = \int d^2x \, b_{++} \, \partial_- c_- \;, \tag{3.43}$$

onde os campos b e c são anti-comutantes e carregam respectivamente números de "ghost" -1 e 1.

Deve ser observado que, ao contrário dos exemplos anteriores, os campos aparecendo na ação clássica (3.43) não são naturalmente associados a formas diferenciais. Porém, veremos que, apesar do fato de esses campos não darem origem a uma estrutura de multipleto completo, este sistema acabará possuindo as mesmas propriedades algébricas dos modelos BF. A ação (3.43) é reconhecida como a parte de "ghost" da ação quantizada da corda bosônica[3], que é invariante sob a ação das seguintes transformações de BRST

$$\begin{aligned} sc_- &= c_- \partial_+ c_- \;, \\ sb_{++} &= -(\partial_+ b_{++}) c_- - 2b_{++} \partial_+ c_- \;. \end{aligned} \tag{3.44}$$

O lado direito da transformação de b_{++} é exatamente a componente T_{++} do tensor energia-momento correspondendo à ação (3.43), esta propriedade levando a uma interpretação topológica do modelo.

As transformações (3.44) são não lineares, o que significa que precisamos introduzir duas fontes externas, μ_{--} com $N_g = 0$ e l_{++-} com $N_g = -2$

$$S_{ext} = \int d^2x \; (\mu_{--} s b_{++} + l_{++-} s c_-) \;. \tag{3.45}$$

A ação completa

$$S = S_{b-c} + S_{ext} \tag{3.46}$$

[3]Como no caso de $\mathcal{W}_3$, nos limitaremos ao setor quiral da ação da corda bosônica. Não há maiores dificuldades na extensão não quiral.

obedece então a identidade de Slavnov-Taylor clássica

$$\int d^2x \left(\frac{\delta\, S}{\delta\, b_{++}} \frac{\delta\, S}{\delta\, \mu_{--}} + \frac{\delta\, S}{\delta\, l_{++-}} \frac{\delta\, S}{\delta\, c_-} \right) = 0 = \frac{1}{2} b S \,, \tag{3.47}$$

b denotando o operador linearizado nilpotente

$$b = \int d^2x \left(\frac{\delta\, S}{\delta\, b_{++}} \frac{\delta}{\delta\, \mu_{--}} + \frac{\delta\, S}{\delta\, \mu_{--}} \frac{\delta}{\delta\, b_{++}} + \frac{\delta\, S}{\delta\, l_{++-}} \frac{\delta}{\delta\, c_-} + \frac{\delta\, S}{\delta\, c_-} \frac{\delta}{\delta\, l_{++-}} \right) . \tag{3.48}$$

O operador b atua nos campos e nas fontes externas da seguinte forma

$$\begin{aligned} b c_- &= s c_- = c_- \partial_+ c_- \,, \\ b \mu_{--} &= \partial_- c_- + (\partial_+ \mu_{--})\, c_- - \mu_{--}\, (\partial_+ c_-) \,, \end{aligned} \tag{3.49}$$

e

$$\begin{aligned} b b_{++} &= s b_{++} = -(\partial_+ b_{++}) c_- - 2 b_{++} \partial_+ c_- \,, \\ b l_{++-} &= \partial_- b_{++} - (2 b_{++})\, \partial_+ \mu_{--} - \mu_{--} \partial_+ b_{++} + (\partial_+ l_{++-})\, c_- + 2 l_{++-} \partial_+ c_- \,. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Deve ser realçado que, devido ao fato de que a transformação de BRST de b_{++} é a componente T_{++} do tensor momento-energia, a diferenciação com respeito a fonte externa μ_{--} da transformação de Legendre da ação completa (3.46)

$$Z(j, \mu, l) = S + \int d^2x\, (j_c c + j_b b) \tag{3.51}$$

leva às funções de Green com inserções de T_{++}. Em outras palavras, a identidade de Slavnov-Taylor (3.47) é o ponto de partida para a caracterização da álgebra de correntes do tensor momento-energia.

Introduzindo agora os dois operadores funcionais [22]

$$W_+ = \int d^2x\, \frac{\delta}{\delta\, c_-} \,, \qquad W_- = \int d^2x \left(l_{++-} \frac{\delta\, S}{\delta\, b_{++}} + \mu_{--} \frac{\delta}{\delta\, c_-} \right) , \tag{3.52}$$

prova-se rapidamente que

$$\delta = dx^+ W_+ + dx^- W_- \tag{3.53}$$

satisfaz

$$d = -[b, \delta] \ , \qquad [d, \delta] = 0 \ ,$$

d representando a derivada exterior $d = dx^+\partial_+ + dx^-\partial_-$. A decomposição (3.10) está então realizada. Para que obtenhamos o conjunto de transformações (3.49) e (3.50) a partir de uma condição de curvatura nula, procedemos como antes definindo o análogo do multipleto de calibre (3.2)

$$\widetilde{c}_- = e^{\delta} c_- = c_- + dx^+ + dx^- \mu_{--} \ . \tag{3.54}$$

Introduzindo também o campo vetorial holomórfico $\widetilde{c} = \widetilde{c}_- dx^-$, facilmente se verifica que as eqs.(3.49) podem ser descritas por uma condição de curvatura nula

$$\widetilde{d}\widetilde{c} = \frac{1}{2}[\widetilde{c}, \widetilde{c}] = \mathcal{L}_{\widetilde{c}}\widetilde{c} \ , \tag{3.55}$$

onde, como usualmente, $\widetilde{d}$ é o operador

$$\widetilde{d} = e^{\delta} s e^{-\delta} = b + d \ ,$$

e $\mathcal{L}_{\widetilde{c}}$ representa a derivada de Lie com respeito ao campo vetorial[4] $\widetilde{c}$.

Definimos também o multipleto de matéria $\widetilde{b}_{++}$ como

$$\widetilde{b}_{++} = e^{\delta} b_{++} = b_{++} + dx^- l_{++-} \ , \tag{3.56}$$

ao qual associamos o diferencial quadrático holomórfico

$$\widetilde{b} = \widetilde{b}_{++} dx^+ \otimes dx^+ \ . \tag{3.57}$$

[4] Obviamente, o parênteses $[\widetilde{c}, \widetilde{c}]$ na eq.(3.55) refere-se agora ao parênteses de Lie de campos vetoriais.

Assim, as transformações (3.50) podem ser escritas como

$$\tilde{d}\tilde{b} - \mathcal{L}_{\tilde{c}}\tilde{b} = 0 \ . \tag{3.58}$$

Esta equação é a análoga da condição de covariância da matéria (3.34) e junto com a equação (3.55) caracteriza completamente o sistema $b - c$. Deve-se observar que, como acontece no caso dos modelos BF, as fontes externas (μ, l) estão misturadas, *i.e.*, a fonte μ associada a transformação não linear de b pertence ao multipleto de calibre $\tilde{c}$ e vice-versa.

Podemos considerar agora o problema da identificação das anomalias que afetam a identidade de Slavnov-Taylor (3.47) ao nível quântico, voltando a atenção para a solução das equações de descida

$$\begin{aligned} b\omega_2^1 + d\omega_1^2 &= 0 \ , \\ b\omega_1^2 + d\omega_0^3 &= 0 \ , \\ b\omega_0^3 &= 0 \ . \end{aligned} \tag{3.59}$$

A cohomologia do operador de BRST no setor das zero formas com $N_g = 0$ contém, no caso presente, um único elemento dado por [22]

$$\omega_0^3 = c_- \partial_+ c_- \partial_+^2 c_- \ . \tag{3.60}$$

Pela condição de curvatura nula (3.55), segue que o cociclo generalizado de grau total três

$$\tilde{\omega}^3 = \tilde{c}_- \partial_+ \tilde{c}_- \partial_+^2 \tilde{c}_- \tag{3.61}$$

pertence a cohomologia de $\tilde{d}$. A expansão de $\tilde{\omega}^3$ dará então a solução do sistema (3.59),

$$\tilde{\omega}^3 = \omega_0^3 + \omega_1^2 + \omega_2^1 \ , \tag{3.62}$$

com

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \left(c_-\partial_+ c_-\partial_+^2\mu_{--} - c_-\partial_+^2 c_-\partial_+\mu_{--} + \mu_{--}\partial_+ c_-\partial_+^2 c_-\right) dx^- + \left(\partial_+ c_-\partial_+^2 c_-\right) dx^+ \ , \\
\omega_2^1 &= \left(-\partial_+ c_-\partial_+^2\mu_{--} - \partial_+\mu_{--}\partial_+^2 c_-\right) dx^- dx^+ \ .
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Em particular,

$$
\int \omega_2^1 = 2\int dx^2 \ c_-\partial_+^3\mu_{--} \tag{3.64}
$$

é reconhecida como a tão bem conhecida anomalia de difeomorfismo que caracteriza a carga central na álgebra de correntes do tensor energia-momento.

Vamos concluir com a observação que a ação completa $b-c$ (3.46) pode ser escrita, em total analogia com a eq.(3.41), na forma

$$
S = \int \left[\tilde{b}_{++}\left(d\tilde{c}_- - \tilde{c}_-\partial_+\tilde{c}_-\right) dx^+\right]_2^0 = -\int \left[\tilde{b}_{++}\left(b\tilde{c}_-\right) dx^+\right]_2^0 \ , \tag{3.65}
$$

mostrando como o modelo $b-c$ pode ser interpretado como uma espécie de sistema BF bi-dimensional.

Capítulo 4

Sistemas de Curvatura Nula com Multipleto Incompleto

No capítulo precedente, analisamos a formulação de curvatura nula de sistemas descritos através de um campo multipleto completo, cujas componentes expandiam todos os possíveis graus de forma. O capítulo presente será dedicado a análise de sistemas de curvatura nula quando a condição de completeza do multipleto é relaxada [16]. O multipleto de calibre é então descrito por

$$\tilde{A} = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j^{1-j} = c + A + \varphi_2^{-1} + ... + \varphi_q^{1-q} , \qquad 1 \leq q < D , \tag{4.1}$$

D sendo a dimensão do espaço-tempo. Assumiremos, portanto, que as transformações BRST nilpotentes das componentes φ_j^{1-j} $(0 \leq j \leq q)$ de (4.1) serão as mesmas que as do caso completo, eq.(3.5),

$$\begin{aligned}
&bc = ic^2 , \\
&bA = -dc + i\,[c, A] , \\
&b\varphi_j^{1-j} = -d\varphi_{j-1}^{2-j} + \frac{i}{2}\sum_{m=0}^{j}\left[\varphi_m^{1-m}, \varphi_{j-m}^{1-j+m}\right] , \qquad 2 \leq j \leq q .
\end{aligned} \tag{4.2}$$

O espaço funcional $\mathcal{E}$ no qual trabalharemos será o mesmo espaço dos polinômios nos campos φ_j^{1-j} e nos seus diferenciais,

$$\mathcal{E} \ = \ polin\hat{o}mios\ em\ \left(\varphi_j^{1-j},\ d\varphi_j^{1-j};\ 0 \leq j \leq q\right) \ . \tag{4.3}$$

Já tendo definido as transformações de BRST, pode-se agora introduzir a decomposição de (1.17). O operador δ é determinado como

$$\begin{aligned}
&\widetilde{A} = e^{\delta} c \ , \\
&\delta\varphi_j^{1-j} = (j+1)\varphi_{j+1}^{-j} \ , \qquad 0 \leq j \leq q-1 \ , \\
&\delta\varphi_q^{1-q} = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta d\varphi_j^{1-j} &= (j+1) d\varphi_{j+1}^{-j} \ , \qquad 0 \leq j \leq q-2 \ , \\
\delta d\varphi_{q-1}^{2-q} &= q d\varphi_q^{1-q} - (q+1)\left(d\varphi_q^{1-q} - \frac{i}{2}\sum_{m=0}^{q}\left[\varphi_m^{1-m}, \varphi_{q-m+1}^{m-q}\right]\right) \ , \\
\delta d\varphi_q^{1-q} &= \frac{i}{2}(q+1)\sum_{j=1}^{q}\left[\varphi_{q+2-j}^{-1-q+m}, \varphi_m^{1-m}\right] \ .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Verifica-se facilmente que, no espaço funcional $\mathcal{E}$, os operadores b e δ de fato realizam a decomposição (1.17),

$$d = -[b, \delta] \ . \tag{4.6}$$

No entanto, comparando-se as eqs.(4.4) e (4.5) com as correspondentes ao caso completo, eqs.(3.8) e (3.9), vê-se que, enquanto a ação do operador δ nas componentes φ_j^{1-j} é a mesma, as transformações dos diferenciais de grau de forma superior, $d\varphi_{q-1}^{2-q}$ e $d\varphi_q^{1-q}$, agora não se anulam. Este fato implica que aqui, ao contrário do que ocorre no caso completo, δ não comuta mais com a derivada exterior d,

$$[d, \delta] \neq 0 \ . \tag{4.7}$$

Além desta relação, teremos que, dependendo da dimensão do espaço-tempo D e do número q de componentes do multipleto de calibre $\widetilde{A}$, os comutadores

$$[[[[d,\delta],\delta],\delta]...,\delta] \tag{4.8}$$

também poderão ser não nulos.

Realiza-se desta forma o que foi preconizado na Introdução (ver comentário acima da eq.(1.18)), quando anunciamos que a comutação de d e δ não seria sempre válida, e isto exige para o caso presente uma análise diferente da que vinha sendo feita até então, até porque o ambiente de teorias que estaremos descrevendo irá diferir do antecedente.

A condição de curvatura nula será ainda obtida a partir da aplicação do operador e^δ na transformação do campo de "ghost" c

$$e^\delta b e^{-\delta} e^\delta c = i e^\delta c^2 \ . \tag{4.9}$$

Lembrando que $\widetilde{A} = e^\delta c$ e definindo, como antes, o operador generalizado $\widetilde{d}$ como

$$\widetilde{d} = e^\delta b e^{-\delta} \ ,$$

obtemos a condição de curvatura nula

$$\widetilde{d}\widetilde{A} = i\widetilde{A}^2 \tag{4.10}$$

para o caso de multipleto não completo. A equação (4.10) é, no entanto, apenas aparentemente similar à condição correspondente ao caso completo, eq.(3.4). Na verdade, devido às eqs.(4.6) e (4.8), o operador $\widetilde{d}$ será dado agora por

$$\widetilde{d} = b + d + \sum_{n\geq 2}^{D} \frac{1}{n!} \underbrace{[\delta,[\delta,[\delta,.....,d]]]}_{\text{(n-1)-vezes}} \ , \tag{4.11}$$

de forma que, definindo os operadores

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^{-1} &= \frac{1}{2}[\,\delta\,,\,d\,]\;, \\
\mathcal{G}_3^{-2} &= \frac{1}{3!}\left[\,\delta\left[\delta,d\right]\right] = \frac{1}{3}\left[\delta,\mathcal{G}_2^{-1}\right]\;, \\
\mathcal{G}_4^{-3} &= \frac{1}{4!}\left[\delta,\left[\delta,\left[\delta,d\right]\right]\right] = \frac{1}{4}\left[\delta,\mathcal{G}_3^{-2}\right]\;, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

nós temos

$$
\widetilde{d} = b + d + \sum_{n\geq 2}^{D}\mathcal{G}_n^{1-n}
\tag{4.13}
$$

com

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^{-1} &= \frac{1}{2}[\,\delta\,,\,d\,]\;, \\
\mathcal{G}_n^{1-n} &= \frac{1}{n}\left[\delta,\mathcal{G}_{n-1}^{2-n}\right]\;, \qquad n>2\;.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Vemos então que, no caso não completo, a condição de curvatura nula é acompanhada por um conjunto de operadores $\mathcal{G}_n^{1-n}$ em involução, de acordo com a eq.(4.14). A origem destes operadores, de fato, deve-se ao caráter não completo do multipleto de calibre, e as suas formas explícitas podem ser facilmente obtidas a partir de suas definições (4.12), usando (4.4) e (4.5). O número de operadores $\mathcal{G}_n^{1-n}$ que não se anulam identicamente, como veremos depois através de exemplos, irá depender tanto da dimensão do espaço-tempo D quanto do número q de componentes do multipleto de calibre $\widetilde{A}$. Pela experiência anterior com o multipleto completo, é imediato concluir que quando $q = D$ esses operadores não estarão presentes. Mas o mais importante é que a existência deles implica que a cohomologia do operador $\widetilde{d}$ não é mais diretamente relacionada a aquela do operador $d+b$. Então, as classes de cohomologia de $\widetilde{d}$ não fornecerão imediatamente uma solução para as equações de descida. A forma como a cohomologia do caso completo, eq.(3.25), será alterada para que tenhamos as soluções do caso não completo é o assunto da próxima seção.

Antes de terminar esta seção, uma observação merece ser feita. No capítulo anterior foi mostrado que as transformações de Slavnov-Taylor decorriam de se postular uma condição de curvatura nula para o multipleto de gauge. Neste capítulo já foi adotada a alternativa de se partir das transformações (4.2) para os campos e destas obteve-se a condição de curvatura nula decorrente da existência da decomposição delta. No entanto, se tivéssemos partido novamente de uma condição de curvatura nula, a conclusão seria que seríamos forçados, de qualquer forma, a introduzir os operadores $\mathcal{G}_n^{1-n}$ para evitar o aparecimento de vínculos sobre as componentes do multipleto não completo de calibre $\widetilde{A}$.

4.1 Solução das Equações de Descida

O trabalho de se calcular a cohomologia do operador de BRST b, devido ao caráter não completo de $\widetilde{A}$, será bastante simplificado pela introdução das seguintes curvaturas generalizadas R_{m+1}^{1-m} de grau total dois:

$$R_{m+1}^{1-m} = d\varphi_m^{1-m} - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{m}\left[\varphi_k^{1-k}, \varphi_{m+1-k}^{k-m}\right] , \qquad 1 \leq m \leq q . \tag{4.15}$$

Em particular, para $m = 1$ a expressão (4.15) reduz-se a

$$R_2^0 = dA - iA^2 = F ,$$

recuperando-se assim a usual curvatura de calibre. Para $m > 1$, as curvaturas terão $N_g < 0$ e estarão associadas aos campos φ_k^{1-k} $(k \geq 2)$ no multipleto de calibre (4.1). A vantagem de se trabalhar com as curvaturas reside no fato delas se transformarem covariantemente sob a ação do operador de BRST,

$$bR_{m+1}^{1-m} = i\left[c, R_{m+1}^{1-m}\right] . \tag{4.16}$$

Essa propriedade, seguindo o já amplamente tratado caso de Yang-Mills [13, 34, 37, 38], sugere a conveniência de se usar as curvaturas R_{m+1}^{1-m} como variáveis independentes, em vez dos diferenciais $d\varphi_k^{1-k}$. Consequentemente, o espaço funcional $\mathcal{V}$ com o qual se trabalhará será dado por [1]

$$\mathcal{V} \;=\; \textit{polinômios em} \left(c \,,\; A \,,\; \varphi_j^{1-j},\;\; 2 \leq j \leq q \,;\; dc \,,\; R_{m+1}^{1-m},\; 1 \leq m \leq q\right) \,, \tag{4.17}$$

e, utilizando (4.15), teremos o seguinte conjunto de transformações nilpotentes de BRST:

$$\begin{aligned}
&bc = ic^2 \,, \\
&bA = -dc + i\,[c, A] \,, \\
&b\varphi_m^{1-m} = i\,[c, \varphi_m^{1-m}] - R_m^{2-m} \,, \qquad 2 \leq m \leq q \,, \\
&bdc = i\,[c, dc] \,, \\
&bR_{j+1}^{1-j} = i\left[c, R_{j+1}^{1-j}\right] \,, \qquad 1 \leq j \leq q \,.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Podemos partir agora para a solução da cohomologia de b. Definindo o operador de filtragem $\mathcal{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}c = c \,, \quad \mathcal{N}A = A \,, \\
&\mathcal{N}\varphi_m^{1-m} = \varphi_m^{1-m} \,, \quad 2 \leq m \leq q \,, \\
&\mathcal{N}dc = dc \,, \quad \mathcal{N}R_{j+1}^{1-j} = R_{j+1}^{1-j} \,, \quad 1 \leq j \leq q \,,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

o operador de BRST se decompõe como

$$b = b_0 + b_1 \,,$$

com

$$\begin{aligned}
&b_0 c = 0 \,, \\
&b_0 A = -dc \,, \quad b_0 dc = 0 \,, \\
&b_0\varphi_m^{1-m} = -R_m^{2-m} \,, \quad b_0 R_m^{2-m} = 0 \,, \quad 2 \leq m \leq q \,, \\
&b_0 R_{q+1}^{1-q} = 0 \,, \\
&b_0^2 = 0 \,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

As equações (4.20) mostram que todas as variáveis, excetuando a zero forma de "ghost" c e a curvatura mais alta R_{q+1}^{1-q}, estão agrupadas em dubletos de BRST. Isto implica que

[1] Implicitamente admitimos aqui a introdução dos duais em $\mathcal{V}$, através da operação de "Hodge".

a cohomologia de b_0 e, por sua vez, a de b dependem somente de c e de R^{1-q}_{q+1}. Mais precisamente, usando os resultados gerais das referências [13, 34, 37, 38], segue que a cohomologia de b no espaço funcional $\mathcal{V}$ é expandida por polinômios invariantes nas variáveis $\left(c, R^{1-q}_{q+1}\right)$ construídos com monômios fatorizados na forma

$$\left(Tr\frac{c^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\cdot Tr\left(R^{1-q}_{q+1}\right)^m \ , \qquad n,m=1,2,\ldots \ . \tag{4.21}$$

Observa-se então que a cohomologia do operador de BRST no caso do multipleto não completo, além dos usuais cociclos de "ghost" ($Tr\ c^{2n+1}$), inclui também polinômios nas curvaturas R^{1-q}_{q+1}. Deve ser notado também que, sendo o número de "ghost" negativo para a curvatura R^{1-q}_{q+1} quando $q>1$, a cohomologia de b terá contribuições não triviais em setores com carga negativa.

Como mencionado antes, a presença dos operadores $\mathcal{G}^{1-n}_n$ na condição de curvatura nula (4.10) requer uma ligeira modificação, em relação ao caso do multipleto completo, no processo de subida das equações de descida (1.15)

$$\begin{aligned} &b\,\omega^{G+j}_{D-j} \ + \ d\,\omega^{G+j+1}_{D-j-1} \ = \ 0\ , \qquad 0\leq j\leq D-1\ , \\ &b\,\omega^{G+D}_0 \ = \ 0\ . \end{aligned} \tag{4.22}$$

De fato, repetindo o mesmo argumento do capítulo anterior, chega-se à conclusão que, uma vez obtida a solução ω^{G+D}_0 da última equação do sistema (4.22), uma expressão explícita para os polinômios mais altos ω^{G+D-j}_j é fornecida pelo cociclo generalizado $\widetilde{\omega}^{G+D}$ de grau total $G+D$

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^{G+D} &= \sum_{j=0}^{D}\omega^{G+D-j}_j\ , \\ \widetilde{\omega}^{G+D} &= e^{\delta}\left(\omega^{G+D}_0+\sum_{j=q+1}^{D}\Omega^{G+D-j}_j\right)\ , \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde ω^{G+D}_0 é

$$\omega^{G+D}_0 = Tr\frac{c^{G+D}}{(G+D)!}\ , \tag{4.24}$$

e as quantidades Ω_j^{G+D-j} são determinadas recursivamente através de condições de consistência

$$\begin{cases} b\,\Omega_j^{G+D-j} = (j-1)(-1)^j \mathcal{G}_j^{1-j}\omega_0^{G+D} + \sum\limits_{k=2}^{(j-1)} (k-1)(-1)^k \mathcal{G}_k^{1-k}\Omega_{j-k}^{G+D-j+k} \,, \\ \Omega_{j-k}^{G+D-j+k} = 0 \qquad \text{se} \qquad (j-k) < q+1 \,. \end{cases} \tag{4.25}$$

Pelas eqs.(4.23) e (4.25), vemos como a solução da torre (4.22) no caso não completo é deformada em relação à solução correspondente do caso completo, eq.(3.25), pela inclusão dos cociclos Ω_j^{G+D-j}.

4.2 Exemplo I: Yang-Mills como um Sistema de Curvatura Nula

Como primeiro exemplo importante de um sistema de multipleto não completo, será apresentada a formulação de curvatura nula da teoria de calibre de Yang-Mills pura, numa dimensão de espaço-tempo arbitrária, correspondendo ao multipleto generalizado com $q = 1$,

$$\widetilde{A} = c + A \,.$$

É importante lembrar que, já que as teorias de Yang-Mills não são renormalizáveis segundo o critério de "power-counting" em dimensões de espaço-tempo maiores que quatro, nessas dimensões os campos A e c serão tomados como campos externos não quantizados acoplados a correntes de campos de matéria quânticos. Assim, a existência de anomalias de calibre ao nível quântico irá corresponder a violações de leis de conservação de correntes de matéria e ao aparecimento de termos de Schwinger na álgebra de correntes correspondente. Não é difícil verificar-se que neste caso a consistência da condição de curvatura nula (4.10) requer que somente o primeiro operador $\mathcal{G}_2^{-1}$ da eq.(4.13) seja não nulo. Então, para o operador $\widetilde{d}$ obtém-se

$$\widetilde{d} = b + d + \mathcal{G}_2^{-1} \ , \tag{4.26}$$

e de

$$\widetilde{d}\widetilde{A} = i\widetilde{A}^2 \ , \tag{4.27}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} bc &= ic^2 \ , \\ bA &= -dc + i\left[c, A\right] \ , \end{aligned} \tag{4.28}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{-1}c &= -dA + iA^2 = -F \ , \\ \mathcal{G}_2^{-1}dc &= i\left[A, F\right] \ , \\ \mathcal{G}_2^{-1}A &= \mathcal{G}_2^{-1}F = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Pelas equações (4.4) e (4.5), para o operador δ tem-se que

$$\begin{aligned} \delta c &= A \ , \qquad & \delta dc &= -dA + 2iA^2 \ , \\ \delta A &= 0 \ , \qquad & \delta dA &= 0 \ , \end{aligned} \tag{4.30}$$

e

$$\begin{aligned} & d = -\left[b, \delta\right] \ , \quad \mathcal{G}_2^{-1} = \tfrac{1}{2}\left[\delta, d\right] \ , \\ & \left[\delta, \mathcal{G}_2^{-1}\right] = \left[b, \mathcal{G}_2^{-1}\right] = \left[d, \mathcal{G}_2^{-1}\right] = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.31}$$

No que concerne a solução das equações de descida (4.22), serão dadas as soluções finais nos setores das anomalias de calibre, $N_g = 1$, e de contratermos de Chern-Simons, $N_g = 0$ (uma discussão detalhada de como construir explicitamente essas soluções pode ser encontrada em [14, 15]):

$$\omega_{2n}^1 = \sum_{p=0}^{n} \frac{i^{(n-p)}}{(2n-p+1)!p!} \left(\mathcal{P}(c, F^p, (A^2)^{n-p}) + i(n-p)\mathcal{P}([c, A], F^p, A, (A^2)^{n-p})\right) \ , \tag{4.32}$$

e

$$\omega^0_{2n+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{i^{(n-p)}}{(2n-p+1)!p!} \mathcal{P}(F^p, A, (A^2)^{n-p}) \ , \tag{4.33}$$

onde a dimensão do espaço-tempo varia segundo o inteiro $n = 1, 2, ...$, $\mathcal{P}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, ..., \mathcal{J}_n)$ descreve os polinômios invariantes definidos por [6]

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, ..., \mathcal{J}_n) = \mathcal{J}_1^{a_1} \mathcal{J}_2^{a_2} ...... \mathcal{J}_n^{a_n} \, STr(T^{a_1} T^{a_2} ..... T^{a_n}) \ , \tag{4.34}$$

STr representando o traço simetrizado , e onde, seguindo a notação de Zumino [7], foi usado que

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, ..., \mathcal{J}^p) = P(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \underbrace{\mathcal{J}, ..., \mathcal{J}}_{\text{p-vezes}}) \ . \tag{4.35}$$

É importante enfatizar que as equações (4.32) e (4.33) representam uma das mais compactas expressões para a anomalia de calibre e para o termo de Chern-Simons numa dimensão arbitrária de espaço-tempo.

4.3 Exemplo II: Sistemas BF Massivos

Neste segundo exemplo, iremos mostrar que podemos adaptar o formalismo apresentado neste capítulo para o caso de mais de um multipleto não completo, numa forma bastante similar ao caso BF do capítulo anterior. De uma forma mais simplificada, nos limitaremos à análise do caso abeliano. Teremos então um multipleto de calibre para o campo de Maxwell

$$\widetilde{A} = c + A \ , \tag{4.36}$$

com as transformações abelianas de BRST,

$$\begin{aligned} bc &= 0 \ , \\ bA &= -dc \ , \end{aligned} \tag{4.37}$$

e as transformações segundo $\mathcal{G}_2^{-1}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{-1} c &= -dA \;, \\ \mathcal{G}_2^{-1} A &= 0 \;, \end{aligned} \tag{4.38}$$

sendo determinadas pela condição

$$\tilde{d}\,\tilde{A} \;=\; 0 \;. \tag{4.39}$$

Teremos também um multipleto $\widetilde{B}$ para um campo associado a uma dois forma de calibre B, mas que aqui terá dimensão um. Esse multipleto terá a forma

$$\widetilde{B} \;= e^{\delta}\,\phi \;=\; \phi \;+\; \xi \;+\; B \;, \tag{4.40}$$

onde ϕ é uma zero forma com N_g dois e dimensão -1, e ξ uma um forma com N_g um e dimensão zero. Suas transformações serão determinadas a partir da condição

$$\tilde{d}\,\widetilde{B} \;=\; 0 \;. \tag{4.41}$$

Esta indica que, além das usuais transformações de BRST

$$\begin{aligned} b\phi &= 0 \;, \\ b\xi &= -d\phi \;, \\ bB &= -d\xi \;, \end{aligned} \tag{4.42}$$

e as geradas pelo operador $\mathcal{G}_2^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{-1} \xi &= -dB \;, \\ \mathcal{G}_2^{-1} \phi &= \mathcal{G}_2^{-1} B = 0 \;, \end{aligned} \tag{4.43}$$

teremos ainda transformações geradas por um operador $\mathcal{G}_3^{-2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3^{-2}\phi &= \tfrac{1}{2}dB \ , \\ \mathcal{G}_3^{-2}\xi &= \mathcal{G}_3^{-2}B = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Além do conteúdo de campos determinado acima, admitiremos ainda a presença de uma constante massiva m.

Quanto à cohomologia local do operador b, imediatamente concluímos que ela é expandida pelos polinômios nos campos c, ϕ, e nas "curvaturas" dA e dB. Então, as equações de descida dadas por

$$\tilde{d}\,\tilde{\omega} \ = \ 0 \, , \tag{4.45}$$

com

$$\tilde{\omega} \ = e^{\delta}\,\omega_4^0 \ = \ \omega_0^4 \ + \ \omega_1^3 \ + \ \omega_2^2 \ + \ \omega_3^1 \ + \ \omega_4^0 \, , \tag{4.46}$$

possuirão contribuições locais nos níveis das zero formas,

$$\Lambda_0^4 = \alpha\, m^2\phi^2 \ , \tag{4.47}$$

das dois formas,

$$\Lambda_2^2 = \ \beta\, m\,(\phi dA) \ \ , \tag{4.48}$$

das três formas,

$$\Lambda_3^1 = \ \gamma\, m\,(cdB) \ \ , \tag{4.49}$$

e, finalmente, duas contribuições no nível da ação,

$$\Lambda_4^0 \ = \lambda \ \left(dB\right)^2 \ + \ \rho \ \left(dA\right)^2 \ , \tag{4.50}$$

onde α, β, γ, λ e ρ são constantes arbitrárias.

Expandindo os diversos termos na eq.(4.45), e separando segundo o grau de forma, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
b\,\omega_0^4 &= 0\,, \\
b\,\omega_1^3 &= -\,d\omega_0^4\,, \\
b\,\omega_2^2 &= -\,d\omega_1^3 \;-\; \mathcal{G}_2^{-1}\omega_0^4\,, \\
b\,\omega_3^1 &= -\,d\omega_2^2 \;-\; \mathcal{G}_2^{-1}\omega_1^3 \;-\; \mathcal{G}_3^{-2}\omega_0^4\,, \\
b\,\omega_4^0 &= -\,d\omega_3^1 \;-\; \mathcal{G}_2^{-1}\omega_2^2 \;-\; \mathcal{G}_3^{-2}\omega_1^3\,.
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Para que possamos identificar as soluções das equações de descida, os termos em $\mathcal{G}$ devem então ser expressados na forma de variações de BRST mais derivadas totais. Feito isso, e usando os resultados da cohomologia local, eqs.(4.47) a (4.50), a solução final para o nível superior, módulo derivadas totais e variações de BRST, é mostrada ser da forma

$$
\Omega_4 \;=\; \frac{\beta}{6} m\; B\, dA \;+\; \frac{\gamma}{4} m\; A\, dB \;+\; \lambda\; (dB)^2 \;+\; \rho\; (dA)^2\;. \tag{4.52}
$$

Aqui observamos um fenômeno que sempre é possível quando tratamos de multipletos incompletos e temos a ação de operadores $\mathcal{G}$. Uma das soluções locais da cohomologia, justamente a que estava no nível das zero formas dada na eq.(4.47), foi obstruída no processo de subida das equações de descida. Assim, apesar dela estar presente nos níveis inferiores, ela não fornece uma contribuição no nível da ação, como podemos concluir pelo fato da solução final (4.52) não apresentar um termo com coeficiente α.

A ação que obtemos pela integração de (4.52), *i.e.*

$$
\Sigma \;=\; \int d^4x\; \Big(\; km\; B\, dA \;+\; \lambda\, (dB)^2 \;+\; \rho\, (dA)^2 \;\Big)\;, \tag{4.53}
$$

com k uma redefinição das constantes β e γ, é bastante conhecida pelo fato de, mantendo a invariância de calibre, fornecer explicitamente uma massa para o campo de calibre A, evitando o mecanismo de Higgs [42]. Como observação final, resta o comentário de que até hoje não é conhecida uma generalização não abeliana para esse modelo BF massivo.

Capítulo 5

O Formalismo de Curvatura Nula para as Teorias de Yang-Mills Supersimétricas N=1 no Superespaço

Todo o procedimento BRST de quantização algébrica pode ser facilmente adaptado de forma a incluir o caso das teorias de calibre renormalizáveis supersimétricas $N = 1$ no superespaço para quatro dimensões espaço-temporais, para as quais um conjunto de equações de descida no superespaço já foi estabelecido [43, 44, 45]. A solução dessas equações, tanto quanto no caso não supersimétrico, fornece diretamente todas as anomalias de calibre e os contratermos invariantes de BRST numa forma manisfestamente supersimétrica [25].

No entanto, deve-se observar que no caso supersimétrico tanto a derivação da versão no superespaço das equações de descida quanto a construção de uma solução são mais complexas que no caso não supersimétrico. Em grande parte, isto se deve à álgebra das derivadas covariantes espinoriais D_α e $\overline{D}_{\dot\alpha}$ e aos vínculos de (anti)quiralidade de alguns dos supercampos que caracterizam a teoria.

Neste capítulo, a fórmula de decomposição (1.17) será estendida para o caso da teoria de Yang-Mills supersimétrica $N = 1$, fornecendo assim um caminho simples para a solução das equações de descida no superespaço. Mais ainda, como no caso não supersimétrico, as fórmulas de decomposição permitirão colocar tanto as transformações BRST quanto as equações de descida supersimétricas em um formalismo de curvatura nula, revelando então um contexto puramente geométrico no superespaço.

Mas, antes de se iniciar a apresentação dessa construção algébrica, vamos começar pela fixação das notações. O conteúdo de supercampos que será utilizado ao longo deste capítulo será o conjunto padrão de supercampos das teorias super-Yang-Mills $N = 1$, *i.e.*, o supercampo vetorial ϕ e as superconexões de calibre φ_α e $\overline{\varphi}_{\dot{\alpha}}$. Estas são definidas por

$$\varphi_\alpha \equiv e^{-\phi} D_\alpha e^{\phi} , \qquad \overline{\varphi}_{\dot{\alpha}} \equiv e^{\phi} \overline{D}_{\dot{\alpha}} e^{-\phi} , \tag{5.1}$$

onde D_α e $\overline{D}_{\dot{\alpha}}$ são as derivadas de supersimetria usuais [1]:

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, D_\beta\} &= \left\{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 , \\ D_\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Introduzindo agora os "ghosts" quiral e antiquiral de Faddeev-Popov c e $\overline{c}$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} c = D_\alpha \overline{c} = 0 ,$$

para as transformações nilpotentes de BRST no superespaço obtém-se

$$\begin{aligned} se^{\phi} &= e^{\phi} c - \overline{c} e^{\phi} , \\ sc &= -c^2 , \\ s\overline{c} &= -\overline{c}^2 , \\ s\varphi_\alpha &= -D_\alpha c - \{c, \varphi_\alpha\} , \\ s\overline{\varphi}_{\dot{\alpha}} &= -\overline{D}_{\dot{\alpha}} \overline{c} - \{\overline{c}, \overline{\varphi}_{\dot{\alpha}}\} , \end{aligned} \tag{5.3}$$

[1] As convenções de supersimetria usadas aqui são as mesmas que as da ref.[46].

com

$$\{s, D_\alpha\} = \left\{s, \overline{D}_{\dot\alpha}\right\} = 0 \ .$$

Para uso futuro, serão dadas também as transformações de BRST das supercurvaturas F_α quiral e $\overline{F}_{\dot\alpha}$ antiquiral

$$\begin{aligned} F_\alpha &\equiv \overline{D}^2 \varphi_\alpha \ , & \overline{D}_{\dot\alpha} F_\alpha &= 0 \ , \\ \overline{F}_{\dot\alpha} &\equiv D^2 \overline{\varphi}_{\dot\alpha} \ , & D_\alpha \overline{F}_{\dot\alpha} &= 0 \ , \\ sF_\alpha &= -\{c, F_\alpha\} \ , & s\overline{F}_{\dot\alpha} &= -\{\bar{c}, \overline{F}_{\dot\alpha}\} \ . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Os números quânticos, *i.e.* as dimensões, os números de "ghost" e as cargas $\mathcal{R}$, de todos os campos são listados na tabela a seguir:

	s	D_α	$\overline{D}_{\dot\alpha}$	ϕ	c	$\bar{c}$	φ_α	$\overline{\varphi}_{\dot\alpha}$	F_α	$\overline{F}_{\dot\alpha}$
dim	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
N_g	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$\mathcal{R}$	0	1	-1	0	0	0	1	-1	-1	1

Tabela 5.1: Cargas$\mathcal{R}$, dimensões e números de "ghost"

Os campos serão tratados como comutantes ou anticomutantes de acordo com o seu grau total, agora tomado como a soma do seu número de "ghost" com o número de índices espinoriais. Todos os campos assumirão valores numa álgebra de Lie e o grupo de calibre $\mathcal{G}$ será tomado como um grupo de Lie semisimples com geradores antihermitianos T^a.

O conjunto de campos $(c, \bar{c}, \phi, \varphi_\alpha, \overline{\varphi}_{\dot\alpha})$ e suas derivadas covariantes vai então definir o espaço local básico para o estudo das equações de descida no superespaço. Observemos também que, devido ao fato de que D e $\overline{D}$ possuem dimensão $\frac{1}{2}$, o número de derivadas covariantes torna-se limitado por exigência do "power-counting". Por exemplo, como veremos nas próximas seções, a análise da condição de consistência no superespaço tanto para a anomalia axial $U(1)$ quanto para a de calibre requer o uso de séries de potências formais locais nas variáveis $(c, \bar{c}, \phi, \varphi_\alpha, \overline{\varphi}_{\dot\alpha})$ de dimensão 2. Não custa lembrar também que o caráter não polinomial de certas expressões no superespaço deve-se a adimensionalidade do campo ϕ. Finalmente, sempre que as derivadas espaço-temporais ∂_μ aparecerem estará subentendida a sua substituição pelas derivadas covariantes $D, \overline{D}$, de acordo com a álgebra de supersimetria (5.2).

Pode-se introduzir agora os operadores ζ_α e $\overline{\zeta}_{\dot\alpha}$, de número de "ghost" -1 e grau total zero, definidos por

$$
\begin{aligned}
\zeta_\alpha c \;=\; \varphi_\alpha\,, \qquad & \overline{\zeta}_{\dot\alpha}\overline{c} \;=\; \overline{\varphi}_{\dot\alpha}\,, \\
\zeta_\alpha \overline{c} \;=\; \overline{\zeta}_{\dot\alpha} c \;=\; \zeta_\alpha\phi \;=\; & \overline{\zeta}_{\dot\alpha}\phi \;=0\,, \\
\zeta_\alpha\, \varphi_\beta \;=\; \overline{\zeta}_{\dot\alpha}\, & \varphi_\beta \;=\; 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

É praticamente imediato conferir que eles satisfazem as seguintes relações algébricas:

$$
\begin{aligned}
\left[\zeta_\alpha, s\right] \;&=\; D_\alpha\,, \\
\left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, s\right] \;&=\; \overline{D}_{\dot\alpha}\,, \\
\left[\zeta_\alpha, \zeta_\beta\right] \;&=\; \left[\zeta_\alpha, \overline{\zeta}_{\dot\beta}\right] \;=\; \left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, \overline{\zeta}_{\dot\beta}\right] \;=\; 0\,,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

que nada mais são que o análogo à decomposição (1.17), do caso não supersimétrico, para o caso das derivadas covariantes supersimétricas. Os operadores ζ_α e $\overline{\zeta}_{\dot\alpha}$ são então os operadores de decomposição supersimétricos, que serão extremamente úteis na solução das equações de descida no superespaço.

5.1 Relações Algébricas

Podemos começar a construção da álgebra completa para ζ_α e $\overline{\zeta}_{\dot\alpha}$ observando primeiramente que estes operadores não comutam com as derivadas covariantes de supersimetria D, $\overline{D}$. Atavés das eqs.(5.5) tem-se, em completa analogia com o caso Yang-Mills não supersimétrico, que

$$
\begin{aligned}
\left[\overline{\zeta}_{\dot\beta}, D_\alpha\right] \;&=\; \left[\zeta_\alpha, \overline{D}_{\dot\beta}\right] \;=\; -\,G_{\alpha\dot\beta}\,, \\
\left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right] \;&=\; \left[\zeta_\alpha, D_\beta\right] \;=\; 0\,,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

onde o novo operador $G_{\alpha\dot\beta}$ tem número de "ghost" -1 e atua nos campos na forma

$$
\begin{aligned}
G_{\alpha\dot\alpha} c &= \overline{D}_{\dot\alpha}\varphi_\alpha \,, \qquad G_{\alpha\dot\alpha}\overline{c} = D_\alpha \overline{\varphi}_{\dot\alpha} \,, \\
G_{\alpha\dot\alpha}\, \phi &= G_{\alpha\dot\alpha}\, \varphi_\beta = G_{\alpha\dot\alpha}\, \overline{\varphi}_{\dot\beta} = 0 \,,
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\{G_{\alpha\dot\alpha}, s\} &= \left\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\right\} \,, \\
\left[\zeta_\alpha, G_{\beta\dot\beta}\right] = \left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, G_{\beta\dot\beta}\right] &= \left\{G_{\alpha\dot\alpha}, G_{\beta\dot\beta}\right\} = 0 \,.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

De (5.9), e lembrando a álgebra de supersimetria (5.2), vemos que $G_{\alpha\dot\beta}$ realiza a decomposição da derivada espaço-temporal. Da mesma forma, o operador não anticomuta com as derivadas D, $\overline{D}$:

$$
\{G_{\alpha\dot\alpha}, D_\beta\} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\overline{R}_{\dot\alpha} \,, \quad \left\{G_{\alpha\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} R_\alpha \,, \tag{5.10}
$$

onde R_α e $\overline{R}_{\dot\alpha}$ tem número de "ghost" -1 e geram as transformações

$$
\begin{aligned}
R_\alpha c &= F_\alpha \,, \qquad \overline{R}_{\dot\alpha}\overline{c} = \overline{F}_{\dot\alpha} \,, \\
R_\alpha \overline{c} &= 2\overline{D}_{\dot\alpha} D_\alpha \overline{\varphi}^{\dot\alpha} + D_\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\varphi}^{\dot\alpha} + (D_\alpha\overline{\varphi}_{\dot\alpha})\overline{\varphi}^{\dot\alpha} + \overline{\varphi}_{\dot\alpha}\left(D_\alpha\overline{\varphi}^{\dot\alpha}\right) \,, \\
\overline{R}_{\dot\alpha} c &= 2D^\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\varphi_\alpha + \overline{D}_{\dot\alpha} D^\alpha \varphi_\alpha + \left(\overline{D}_{\dot\alpha}\varphi^\alpha\right)\varphi_\alpha + \varphi^\alpha\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\varphi_\alpha\right) \,, \\
R_\alpha\, \phi &= R_\alpha\, \varphi_\beta = R_\alpha\, \overline{\varphi}_{\dot\beta} = R_\alpha\, F_\beta = R_\alpha\, \overline{F}_{\dot\beta} = 0 \,, \\
\overline{R}_{\dot\alpha}\, \phi &= \overline{R}_{\dot\alpha}\, \varphi_\beta = \overline{R}_{\dot\alpha}\, \overline{\varphi}_{\dot\beta} = \overline{R}_{\dot\alpha}\, F_\beta = \overline{R}_{\dot\alpha}\, \overline{F}_{\dot\beta} = 0.
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

Além disso, temos ainda

$$
\begin{aligned}
[R_\alpha, s] &= [R_\alpha, D_\beta] = [R_\alpha, \overline{D}_{\dot\beta}] = [R_\alpha, G_{\alpha\dot\beta}] = 0 \,, \\
[R_\alpha, \zeta_\beta] &= [R_\alpha, \overline{\zeta}_{\dot\beta}] = [R_\alpha, R_\beta] = [R_\alpha, \overline{R}_{\dot\beta}] = 0 \,.
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

Concluindo esta seção, são tabelados os números quânticos dos operadores que compõem as relações algébricas (5.6), (5.7), (5.10)

	ζ^{α}	$\overline{\zeta}^{\dot\alpha}$	$G^{\alpha\dot\alpha}$	R^{α}	$\overline{R}^{\dot\alpha}$
dim	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
N_g	-1	-1	-1	-1	-1
$\mathcal{R}$	1	-1	0	-1	1

Tabela 5.2: Cargas $\mathcal{R}$, dimensões e números de "ghost"

5.2 A Condição de Curvatura Nula

Tendo caracterizado todos os operadores necessários para a consistência da decomposição supersimétrica (5.6), vamos passar a análise dos aspectos geométricos das relações algébricas obtidas até o momento. Com esse intuito, é útil introduzirmos um conjunto de parâmetros globais e^{α}, $\overline{e}^{\dot\alpha}$ e $\widetilde{e}^{\alpha\dot\alpha}$ de número de "ghost" um, naturalmente associados aos operadores ζ_{α}, $\overline{\zeta}_{\dot\alpha}$ e $G_{\alpha\dot\alpha}$, e que obedecem as relações

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha}\, e^{\beta} \;&=\; \overline{e}^{\dot\alpha}\, \overline{e}^{\dot\beta} \;=\; \widetilde{e}^{\alpha\dot\alpha}\, \widetilde{e}^{\beta\dot\beta} \;=\; 0 \;, \\
\left[e^{\alpha}, \overline{e}^{\dot\beta}\right] \;&=\; \left[e^{\alpha}, \widetilde{e}^{\beta\dot\beta}\right] \;=\; \left[\widetilde{e}^{\alpha\dot\alpha}, \overline{e}^{\dot\beta}\right] \;=\; 0 \;,
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

e

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha}\, \widetilde{e}^{\beta\dot\alpha} \;&=\; -\tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\, e^{\gamma}\, \widetilde{e}^{\dot\alpha}_{\gamma} \;, \\
\widetilde{e}^{\alpha\dot\alpha}\, \overline{e}^{\dot\beta} \;&=\; \tfrac{1}{2}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\, \widetilde{e}^{\alpha}_{\dot\gamma}\, \overline{e}^{\dot\gamma} \;, \\
e^{\alpha}\, \widetilde{e}^{\beta\dot\alpha}\, \overline{e}^{\dot\beta} \;&=\; -\tfrac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\, e^{\gamma}\, \widetilde{e}_{\gamma\dot\gamma}\, \overline{e}^{\dot\gamma} \;,
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

fixando as propriedades de simetria dos produtos de dois parâmetros com respeito aos seus índices espinoriais. Não é difícil de se construir uma realização explícita para esses parâmetros em termos de constantes de estatística padrão, para que se torne claro a estrutura das relações acima. Assim

$$
e^{\alpha} \;=\; \lambda^{\alpha}\theta \;, \quad \overline{e}^{\dot\alpha} \;=\; \lambda^{\dot\alpha}\vartheta \;, \quad \widetilde{e}^{\beta\dot\beta} \;=\; \lambda^{\beta\dot\beta}\Psi \;,
$$

onde λ^{α} e $\lambda^{\dot\alpha}$ são espinores constantes e θ, ϑ e Ψ são variáveis de Grassman independentes.

	e^{α}	$\overline{e}^{\dot\alpha}$	$\widetilde{e}^{\alpha\dot\alpha}$
dim	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
N_g	1	1	1
$\mathcal{R}$	0	0	0

Tabela 5.3: Cargas$\mathcal{R}$, dimensões e números de "ghost"

Este conjunto de parâmetros, e suas relações descritas acima, são fundamentais para que possamos construir, a partir das relações algébricas definidas na última seção, uma álgebra para os operadores de decomposição que seja realizada "on-shell" sobre todos os campos da teoria.

Definindo agora os operadores nilpotentes adimensionais ζ, $\overline{\zeta}$ e G como

$$\zeta = \zeta^{\alpha} e_{\alpha} , \quad \overline{\zeta} = \overline{\zeta}_{\dot\alpha} \overline{e}^{\dot\alpha} , \quad G = G^{\alpha}_{\dot\alpha} \widetilde{e}^{\dot\alpha}_{\alpha} ,$$

é imediato verificar-se que eles possuem número de "ghost" zero e carga $\mathcal{R}$ respectivamente 1, -1, 0, e que a sub-álgebra gerada por ζ_{α}, $\overline{\zeta}_{\dot\alpha}$ e $G_{\alpha\dot\beta}$, *i.e.*

$$\begin{aligned} [\zeta_{\alpha}, \zeta_{\beta}] &= \left[\zeta_{\alpha}, \overline{\zeta}_{\dot\beta}\right] = \left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, \overline{\zeta}_{\dot\beta}\right] = 0 , \\ \left[\zeta_{\alpha}, G_{\beta\dot\beta}\right] &= \left[\overline{\zeta}_{\dot\alpha}, G_{\beta\dot\beta}\right] = \left\{G_{\alpha\dot\alpha}, G_{\beta\dot\beta}\right\} = 0 , \end{aligned}$$

pode ser reescrita simplesmente como

$$\left[\zeta, \overline{\zeta}\right] = [\zeta, G] = \left[\overline{\zeta}, G\right] = 0 .$$

Analogamente, introduzindo os operadores nilpotentes $\widetilde{G}$, D, $\overline{D}$, R, $\overline{R}$, ∂, $\widetilde{\partial}$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{G} &= G^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\, e_{\alpha}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \,, \\
D &= D^{\alpha}\, e_{\alpha} \,, \qquad \overline{D} = \overline{D}_{\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \,, \\
R &= R^{\alpha}\, \widetilde{e}_{\alpha\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \,, \qquad \overline{R} = \overline{R}_{\dot{\alpha}}\, e^{\alpha}\, \widetilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} \,, \\
\widetilde{\partial} &= \left\{D^{\alpha}, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\right\} e_{\alpha}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \,, \qquad \partial = \left\{D^{\alpha}, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\right\} \widetilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} \,,
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

é imediato conferir que todas as relações algébricas (assim como as transformações dos campos), equações (5.6), (5.7), (5.9), (5.10) e (5.12), podem ser transcritas na seguinte notação livre de índices:

$$
\begin{aligned}
[\zeta, s] &= D \,, & \left[\overline{\zeta}, s\right] &= \overline{D} \,, & \left\{\widetilde{G}, s\right\} &= \widetilde{\partial} \,, & [G, s] &= \partial \,, \\
\{s, D\} &= 0 \,, & \left\{s, \overline{D}\right\} &= 0 \,, & \left[s, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \{s, \partial\} &= 0 \,, \\
\left[D, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \left[\overline{D}, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \{D, \partial\} &= 0 \,, & \left\{\overline{D}, \partial\right\} &= 0 \,, \\
[D, \zeta] &= 0 \,, & \left[\overline{D}, \overline{\zeta}\right] &= 0 \,, & \left[\overline{D}, \zeta\right] &= \widetilde{G} \,, & \left[D, \overline{\zeta}\right] &= \widetilde{G} \,, \\
\left[\partial, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \left[G, \widetilde{G}\right] &= 0 \,, & \left[\zeta, \widetilde{G}\right] &= 0 \,, & \left[\overline{\zeta}, \widetilde{G}\right] &= 0 \,, \\
[G, \partial] &= 0 \,, & \left[\widetilde{G}, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \left[G, \widetilde{\partial}\right] &= 0 \,, & \left\{\widetilde{G}, \partial\right\} &= 0 \,,
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

$$
\begin{array}{llll}
\left\{\widetilde{G},D\right\} = 0\,, & \left\{\widetilde{G},\overline{D}\right\} = 0\,, & [D,G] = \frac{\overline{R}}{2}\,, & \left[G,\overline{D}\right] = \frac{R}{2}\,, \\
\left[\zeta,\tilde{\partial}\right] = 0\,, & \left[\overline{\zeta},\tilde{\partial}\right] = 0\,, & [\zeta,\partial] = \frac{\overline{R}}{2}\,, & \left[\partial,\overline{\zeta}\right] = \frac{R}{2}\,, \\
[\zeta,R] = 0\,, & \left[\zeta,\overline{R}\right] = 0\,, & \left[\overline{\zeta},R\right] = 0\,, & \left[\overline{\zeta},\overline{R}\right] = 0\,, \\
\left[R,\tilde{\partial}\right] = 0\,, & \left[\overline{R},\tilde{\partial}\right] = 0\,, & \{R,\partial\} = 0\,, & \left\{\overline{R},\partial\right\} = 0\,, \\
\{D,R\} = 0\,, & \left\{\overline{D},R\right\} = 0\,, & \left\{D,\overline{R}\right\} = 0\,, & \left\{\overline{D},\overline{R}\right\} = 0\,, \\
\left\{\widetilde{G},R\right\} = 0\,, & \left\{\widetilde{G},\overline{R}\right\} = 0\,, & [G,R] = 0\,, & \left[G,\overline{R}\right] = 0\,, \\
\{s,R\} = 0\,, & \left\{s,\overline{R}\right\} = 0\,, & \left\{R,\overline{R}\right\} = 0\,, &
\end{array}
$$

Prossegue-se agora mostrando-se que, como anunciado no início deste capítulo, as transformações supersimétricas de BRST (5.3), (5.4) podem ser obtidas através de uma condição de curvatura nula generalizada. Introduz-se o operador δ,

$$
\delta = \zeta + \overline{\zeta} - G\,, \tag{5.17}
$$

que de fato realiza a decomposição completa de todas as derivadas

$$
[s,\delta] = -D - \overline{D} - \partial\,.
$$

Definindo também, identicamente ao caso não supersimétrico, a transformação δ do operador de BRST s como

$$
\tilde{d} = e^{\delta}\, s\, e^{-\delta}\,, \tag{5.18}
$$

obtém-se

$$
\tilde{d} = s + D + \overline{D} + \partial - \widetilde{G} + \frac{1}{2}\,\overline{R} - \frac{1}{2}R\,, \tag{5.19}
$$

$$\tilde{d}\,\tilde{d} \;=\; 0\,,$$

de tal forma que, chamando $\tilde{A}$ e $\tilde{\overline{A}}$ as transformações δ dos "ghosts" quiral e antiquiral $(c,\overline{c})$

$$\tilde{A} \;=\; e^{\delta}\,c \;=\; c \,+\, \varphi \,+\, \overline{D}\,\varphi\,, \qquad \varphi \;=\; \varphi^{\alpha}e_{\alpha}\,, \tag{5.20}$$

$$\tilde{\overline{A}} \;=\; e^{\delta}\,\overline{c} \;=\; \overline{c} \,+\, \overline{\varphi} \,+\, D\,\overline{\varphi}\,, \qquad \overline{\varphi} \;=\; \overline{\varphi}_{\dot{\alpha}}\overline{e}^{\dot{\alpha}}\,, \tag{5.21}$$

segue que transformações de BRST de $(c,\overline{c})$ implicam as equações de curvatura nula

$$e^{\delta}\,s\,e^{-\delta}\,e^{\delta}\,c \;=\; -e^{\delta}\,c^{2} \;\Longrightarrow\; \tilde{d}\,\tilde{A} \,+\, \tilde{A}^{2} \;=\; 0\,, \tag{5.22}$$

e

$$e^{\delta}\,s\,e^{-\delta}\,e^{\delta}\,\overline{c} \;=\; -e^{\delta}\,\overline{c}^{2} \;\Longrightarrow\; \tilde{d}\,\tilde{\overline{A}} \,+\, \tilde{\overline{A}}^{2} \;=\; 0\,. \tag{5.23}$$

Confirma-se facilmente que as equações (5.22) e (5.23) reproduzem todas as transformações de BRST (5.3), (5.4) bem como o conjunto completo de equações (5.8)—(5.11). Vê-se então que, em completa analogia com o caso não supersimétrico, as equações de curvatura nula (5.22) e (5.23) estão profundamente relacionadas com a existência dos operadores ζ_{α} e $\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}$. Merece ser sublinhado aqui que o operador nilpotente $\tilde{d}$ na eq.(5.19) irá ter um papel importante na discussão das equações de descida no superspaço . Por exemplo, como veremos explicitamente na próxima seção, as equações de descida no superespaço correspondendo aos contratermos invariantes de BRST podem ser notavelmente obtidas da equação

$$\tilde{d}\,\tilde{\omega} \;=\; 0\,, \tag{5.24}$$

onde $\tilde{\omega}$ é um cociclo apropriado de dimensão zero e número de "ghost" três, cujos coeficientes de sua expansão de Taylor nos parâmetros globais $(e^{\alpha}, \overline{e}^{\dot{\alpha}}, \tilde{e}^{\alpha\dot{\alpha}})$ são polinômios no superespaço . A equação (5.24) pode também ser aplicada para caracterizar as equações de descida da anomalia $U(1)$. Na Seção 5.5 veremos que uma ligeira modificação da eq.(5.24) permitirá tratar também o caso da anomalia de calibre de Yang-Mills. Em todos esses casos, os coeficientes das componentes de $\tilde{\omega}$ não excederão a dimensão dois, esta dimensão sendo tomada como o limite superior de nossa análise das equações de descida no superespaço. Em outras palavras, no que segue nos limitaremos ao estudo das soluções das diversas equações de descida no espaço dos funcionais locais com dimensão menor ou igual a dois. Em particular, de acordo com a tabela (5.1), isto implicará que o número máximo de derivadas covariantes $D, \overline{D}$ presentes em cada componente de $\tilde{\omega}$ será quatro.

Para concluir esta seção, a seguinte observação precisa ser feita. Estando interessados nas equações de descida envolvendo funcionais de superespaço de dimensão menor ou igual a dois, dever-se-ia ter conferido o fechamento da álgebra (5.16) construída com os operadores $(s, \zeta, \overline{\zeta}, G, \tilde{G}, D, \overline{D}, R, \overline{R}, \partial, \tilde{\partial})$ sobre todos os campos e suas derivadas covariantes até, e inclusive, a dimensão dois. Não é difícil de se convencer que, na verdade, existe uma quebra no fechamento desta álgebra no nível mais alto de dimensão dois. No entanto, como usualmente ocorre em supersimetria, mostra-se que os termos de quebra são proporcionais as equações de movimento correspondentes a ação de super-Yang-Mills $N = 1$ puro, implicando então o fechamento "on-shell" da álgebra. A avaliação do comutador entre os operadores ζ e s aplicado ao supercampo de curvatura de calibre F^{α} fornece

$$[\zeta \, , \, s] \; F \; = \; - \; [\varphi \, , \, F] \; . \tag{5.25}$$

O lado direito da equação (5.25) pode ser reescrito como

$$[\zeta \, , \, s] \; F \; = D \, F \; - \; (\; D \, F \; + \; [\varphi \, , \, F] \;) \; ,$$

de forma que, lembrando que

$$D \, F \; + \; [\varphi \, , \, F] \; = -\frac{1}{2} e^{\gamma} \tilde{e}_{\gamma\dot{\gamma}} \overline{e}^{\dot{\gamma}} \; (D^{\alpha} \, F_{\alpha} \; + \; \{\varphi^{\alpha} \, , \, F_{\alpha}\}) \; = \; 0 \tag{5.26}$$

é precisamente a equação de movimento para a ação de super-Yang-Mills $N = 1$ puro, obtém-se

$$[\zeta\ ,\ s]\ F\ = D\ F\ -\ \text{eq. de movimento}\ .$$

É importante enfatizar aqui que o fechamento "on-shell" da álgebra não representa, na verdade, uma obstrução real a solução das condições de consistência no superespaço. De fato, pode-se observar da equação (5.26) e da tabela (5.1) que as equações de movimento de Yang-Mills têm dimensão dois. Então, elas poderiam eventualmente contribuir somente no nível mais alto das equações de descida. Realmente, o fechamento "on-shell" da álgebra (5.16) reside no fato de que estamos trabalhando sem o uso das fontes externas de BRST , que, como é bem sabido, permitem que se leve em consideração adequadamente as equações de movimento, reestabelecendo assim o desejado fechamento "off-shell". Além disso, como mostrado em [43, 44, 46], essas fontes externas não contribuem para a cohomologia de BRST nos casos considerados aqui da anomalia quiral $U(1)$, da anomalia de calibre, bem como da ação invariante. Por esta razão, elas não precisaram ser introduzidas. De qualquer forma, no Ap.C será mostrado como a definição de campos externos apropriados permite que as equações de movimento de Yang-Mills possam ser levadas em consideração de uma forma simples.

5.3 Equações de Descida Não Quirais para a Ação Invariante

A análise das equações de descida no superespaço começa pela consideração da condição de consistência de BRST correspondente a ação invariante de Yang-Mills na forma não quiral, *i.e.*

$$s \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, \mathcal{L}^0 \ = \ 0 \Longrightarrow s\, \mathcal{L}^0 \ = \ D^\alpha\, \mathcal{L}^1_\alpha \ + \ \overline{D}_{\dot\alpha}\, \mathcal{L}^{1\dot\alpha}\ , \tag{5.27}$$

onde $\mathcal{L}^0$ é uma série de potências local de dimensão dois e número de "ghost" zero. De acordo com o que foi afirmado na última seção, o conjunto completo de equações de descida no superespaço que caracterizam $\mathcal{L}^0$ pode ser obtido diretamente da equação generalizada

$$\widetilde{d}\,\widetilde{\omega} \;=\; 0\,, \tag{5.28}$$

com $\widetilde{\omega}$ um cociclo generalizado de dimensão zero e número de "ghost" três, cuja expansão de Taylor nos parâmetros globais $(e^{\alpha}, \widetilde{e}^{\alpha\dot{\alpha}}, \overline{e}^{\dot{\alpha}})$ é dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega} \;=\; & \omega^3 + \omega^{2\,\alpha}\, e_{\alpha} + \overline{\omega}^2_{\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} + \widetilde{\omega}^{2\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}\, \widetilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} + \widetilde{\omega}^{1\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}\, e_{\alpha}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \\ & + \omega^{1\,\alpha}\, \widetilde{e}_{\alpha\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} + \overline{\omega}^1_{\dot{\alpha}}\, e^{\alpha}\, \widetilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} + \omega^0\, e^{\alpha}\, \widetilde{e}_{\alpha\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}}\,.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Os coeficientes $(\omega^3, \omega^{2\,\alpha}, \overline{\omega}^2_{\dot{\alpha}}, \widetilde{\omega}^{2\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}, \widetilde{\omega}^{1\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}, \omega^{1\,\alpha}, \overline{\omega}^1_{\dot{\alpha}}, \omega^0)$ são séries de potências locais nos supercampos com os seguintes números quânticos

	ω^3	$\omega^{2\,\alpha}$	$\overline{\omega}^2_{\dot{\alpha}}$	$\widetilde{\omega}^{2\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}$	$\widetilde{\omega}^{1\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}}$	$\omega^{1\,\alpha}$	$\overline{\omega}^1_{\dot{\alpha}}$	ω^0
dim	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
N_g	3	2	2	2	1	1	1	0

Tabela 5.4: Dimensões e números de "ghost"

Em particular se observa que o coeficiente ω^0 na expressão (5.29) tem a mesma dimensão da ação invariante que se procura, justificando assim a escolha dos números quânticos de $\widetilde{\omega}$ na eq.(5.28).

A condição generalizada (5.28) é facilmente desenvolvida, fornecendo o conjunto de equações

$$
\begin{aligned}
s\,\omega^0 &= -\tfrac{1}{2}D^\alpha\omega^1{}_\alpha + \tfrac{1}{2}\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\omega}^{1\,\dot\alpha} + \tfrac{1}{4}\overline{R}_{\dot\alpha}\overline{\omega}^{2\,\dot\alpha} + \tfrac{1}{4}R^\alpha\omega^2_{\ \alpha} \\
&\quad -\tfrac{1}{4}\left\{D^\alpha,\overline{D}_{\dot\alpha}\right\}\widetilde{\omega}^{1\,\dot\alpha}_{\ \ \alpha} - \tfrac{1}{4}G^\alpha_{\dot\alpha}\,\widetilde{\omega}^{2\,\dot\alpha}_{\ \ \alpha}\ , \\
s\,\overline{\omega}^1_{\ \dot\alpha} &= -\tfrac{1}{2}\left\{D^\alpha,\overline{D}_{\dot\alpha}\right\}\omega^2_{\ \alpha} - \tfrac{1}{2}D^\alpha\,\widetilde{\omega}^2_{\ \alpha\dot\alpha} + \tfrac{1}{2}\overline{R}_{\dot\alpha}\,\omega^3\ , \\
s\,\widetilde{\omega}^{1\,\alpha}_{\ \ \dot\alpha} &= -D^\alpha\,\overline{\omega}^2_{\ \dot\alpha} - \overline{D}_{\dot\alpha}\,\omega^{2\,\alpha} + G^\alpha_{\dot\alpha}\,\omega^3\ , \\
s\,\omega^{1\,\alpha} &= \tfrac{1}{2}\left\{D^\alpha,\overline{D}_{\dot\alpha}\right\}\overline{\omega}^{2\,\dot\alpha} + \tfrac{1}{2}\,\overline{D}_{\dot\alpha}\,\widetilde{\omega}^{2\,\alpha\dot\alpha} - \tfrac{1}{2}R^\alpha\,\omega^3\ , \qquad (5.30) \\
s\,\overline{\omega}^2_{\ \dot\alpha} &= -\overline{D}_{\dot\alpha}\,\omega^3\ , \\
s\,\widetilde{\omega}^{2\,\alpha}_{\ \ \dot\alpha} &= \left\{D^\alpha,\overline{D}_{\dot\alpha}\right\}\omega^3\ , \\
s\,\omega^{2\,\alpha} &= -D^\alpha\,\omega^3\ , \\
s\,\omega^3 &= 0\ .
\end{aligned}
$$

Estas equações ainda não representam a versão final das equações de descida no superespaço, devido à presença dos operadores $(G_{\alpha\dot\alpha}, R_\alpha, \overline{R}_{\dot\alpha})$. No entanto, será mostrado que esses termos não desejados podem ser reescritos como cociclos BRST puros ou como derivadas totais de superespaço, significando que eles podem ser eliminados através de uma redefinição dos cociclos ω 's presentes nas equações (5.30). Pode-se primeiro observar que uma solução particular da torre (5.30) pode ser totalmente expressa em termos do cociclo invariante de BRST ω^3. De fato, devido às equações de curvatura nula (5.18), (5.22) e (5.23), é imediato que o sistema (5.30) é resolvido por

$$
\widetilde{\omega} = e^\delta\,\omega^3\ , \qquad (5.31)
$$

que quando escrito em componentes fornece as seguintes expressões

$$
\begin{aligned}
\omega^{2\,\alpha} &= \zeta^{\alpha}\,\omega^{3} \,, \\
\tilde{\omega}^{2\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}} &= G^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\,\omega^{3} \,, \\
\overline{\omega}^{2}_{\dot{\alpha}} &= \overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}\,\omega^{3} \,, \\
\omega^{1\,\alpha} &= \tfrac{1}{2}\,G^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\,\overline{\zeta}^{\dot{\alpha}}\,\omega^{3} \,, \\
\tilde{\omega}^{1\,\alpha}_{\;\dot{\alpha}} &= \zeta^{\alpha}\,\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}\,\omega^{3} \,, \\
\overline{\omega}^{1}_{\dot{\alpha}} &= -\tfrac{1}{2}\,G^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\,\zeta_{\alpha}\,\omega^{3} \,, \\
\omega^{0} &= \tfrac{1}{4}\,\zeta^{\alpha}\,G_{\alpha\dot{\alpha}}\,\overline{\zeta}^{\dot{\alpha}}\,\omega^{3} \,.
\end{aligned}
\qquad (5.32)
$$

Agora, a partir dos resultados na cohomologia de BRST [44, 45, 47] (ver Ap.B), tem-se que a forma mais geral para ω^3 pode ser identificada com o monômio invariante de "ghost"

$$
Tr\left(\frac{c^3}{3}\right) \,, \qquad (5.33)
$$

que, é claro, é determinado módulo um cociclo trivial exato de BRST. Relembrando então que pelo Ap.B a diferença ($Tr\ c^3 - Tr\ \overline{c}^3$) é cohomologicamente trivial, *i.e.*

$$
Tr\ c^3 \;-\; Tr\ \overline{c}^3 \;=\; s\,(...) \,,
$$

pode-se escolher para ω^3 a expressão simétrica [2]

$$
\omega^3 \;=\; Tr\left(\frac{c^3}{3}\right) \;+\; Tr\left(\frac{\overline{c}^3}{3}\right) \,. \qquad (5.34)
$$

[2]Deve-se observar que devido à anti-hermiticidade dos geradores T^a, o cociclo ($Tr\ c^3 +\ Tr\ \overline{c}^3$) é real.

Por outro lado, não é difícil de se mostrar que todos os termos $R^\alpha\,\omega^3$, $\overline{R}_{\dot\alpha}\,\omega^3$, $R^\alpha\,\omega^2_\alpha$, $\overline{R}_{\dot\alpha}\,\overline{\omega}^{2\,\dot\alpha}$ no lado direito das equações (5.30) são cociclos BRST triviais. Considerando, por exemplo, o primeiro termo, através das relações (5.12), tem-se que

$$s\,R^\alpha\,\omega^3 \;=\; R^\alpha\,s\,\omega^3 \;=\; 0\,, \tag{5.35}$$

que implica que $R^\alpha\,\omega^3$ pertence à cohomologia de s no setor de número de "ghost" dois e dimensão um meio. E já que a cohomologia de BRST é vazia neste setor (ver Ap.B), segue então que

$$R^\alpha\,\omega^3 \;=\; s\,\Lambda^{1\,\alpha}\,, \tag{5.36}$$

e da mesma forma

$$\overline{R}^{\dot\alpha}\,\omega^3 \;=\; s\,\overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha}\,. \tag{5.37}$$

De fato, de

$$\begin{aligned}
R^\alpha\,Tr\left(\frac{c^3}{3}\right) &= s\,Tr\left(cR^\alpha c\right) \;=\; s\,Tr\left(cF^\alpha\right)\,,\\
\overline{R}^{\dot\alpha}\,Tr\left(\frac{c^3}{3}\right) &= s\,Tr\left(c\overline{R}^{\dot\alpha}c\right)\,,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
R^\alpha\,Tr\left(\frac{\overline{c}^3}{3}\right) &= s\,Tr\left(\overline{c}R^\alpha\overline{c}\right)\,,\\
\overline{R}^{\dot\alpha}\,Tr\left(\frac{\overline{c}^3}{3}\right) &= s\,Tr\left(\overline{c}\overline{R}^{\dot\alpha}\overline{c}\right) = s\,Tr\left(\overline{c}\overline{F}^{\dot\alpha}\right)\,,
\end{aligned}$$

tem-se que $\Lambda^{1\,\alpha}$ e $\overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha}$ podem ser identificados, módulo termos triviais, com

$$\Lambda^{1\,\alpha} \;=\; Tr\left(cF^\alpha\right) + Tr\left(\overline{c}R^\alpha\overline{c}\right)\,, \qquad \overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha} \;=\; Tr\left(\overline{c}\overline{F}^{\dot\alpha}\right) \;+\; Tr\left(c\overline{R}^{\dot\alpha}c\right)\,, \tag{5.38}$$

onde $\overline{R}^{\dot\alpha}c$ e $R^\alpha\overline{c}$ são dados nas equações (5.11).

Da mesma forma, tem-se

$$\begin{aligned} R^{\alpha}\,\omega^{2}_{\ \alpha} &= R^{\alpha}\,\zeta_{\alpha}\,\omega^{3} = \zeta_{\alpha}\,R^{\alpha}\,\omega^{3} = \zeta_{\alpha}\,s\,\Lambda^{1\,\alpha} \\ &= s\left(\zeta_{\alpha}\,\Lambda^{1\,\alpha}\right) + D_{\alpha}\,\Lambda^{1\,\alpha}\,, \end{aligned} \tag{5.39}$$

mostrando que $R^{\alpha}\,\omega^{2}_{\ \alpha}$ é um cociclo trivial de BRST mais uma derivada total de superespaço. As mesmas conclusões valem para $\overline{R}_{\dot{\alpha}}\,\overline{\omega}^{2\,\dot{\alpha}}$, e podem ser estendidas por argumentos similares para incluir os termos $G^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\,\widetilde{\omega}^{2\,\dot{\alpha}}_{\ \alpha}$, $\left\{D^{\alpha},\overline{D}_{\dot{\alpha}}\right\}\widetilde{\omega}^{1\,\dot{\alpha}}_{\ \alpha}$, $D^{\alpha}\,\widetilde{\omega}^{2}_{\alpha\dot{\alpha}}$ e $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\widetilde{\omega}^{2\,\alpha\dot{\alpha}}$. Por exemplo, quanto a este último elemento, não é difícil mostrar a validade da identidade

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\widetilde{\omega}^{2\,\alpha\dot{\alpha}} = \overline{D}_{\dot{\alpha}}D^{\alpha}\,\overline{\omega}^{2\,\dot{\alpha}} + \overline{D}^{2}\,\omega^{2\,\alpha} + s\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\widetilde{\omega}^{1\,\alpha\dot{\alpha}}\right)\,,$$

onde o último termo à direita, por só receber contribuições do setor trivial da cohomologia como pode ser concluído pelas equações (5.32) e (5.34), não será considerado explicitamente.

O resultado final é que as equações (5.30) podem ser reescritas sem a presença dos operadores R e G, levando assim à versão final das equações de descida para a ação invariante,

$$
\begin{aligned}
s\,\left(\omega^0 + \tfrac{1}{4}\overline{\zeta}_{\dot\alpha}\,\overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha} + \tfrac{1}{4}\zeta^\alpha\,\Lambda^1_{\ \alpha}\right) &= -\tfrac{1}{2}\,D^\alpha\,\left(\omega^1_{\ \alpha} + \tfrac{1}{2}\Lambda^1_\alpha\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,\overline{D}_{\dot\alpha}\,\left(\overline{\omega}^{1\,\dot\alpha} - \tfrac{1}{2}\overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha}\right)\,, \\
s\,\left(\overline{\omega}^1_{\ \dot\alpha} - \tfrac{1}{2}\overline{\Lambda}^1_{\ \dot\alpha}\right) &= -\tfrac{1}{2}\,\overline{D}_{\dot\alpha}D^\alpha\,\omega^2_{\ \alpha} - D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\,\omega^2_{\ \alpha} - \tfrac{1}{2}\,D^2\,\overline{\omega}^2_{\ \dot\alpha}\,, \\
s\,\left(\omega^{1\,\alpha} + \tfrac{1}{2}\Lambda^{1\,\alpha}\right) &= \tfrac{1}{2}\,D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\,\overline{\omega}^{2\,\dot\alpha} + \overline{D}_{\dot\alpha}D^\alpha\,\overline{\omega}^{2\,\dot\alpha} + \tfrac{1}{2}\,\overline{D}^2\,\omega^{2\,\alpha}\,, \\
s\,\overline{\omega}^2_{\ \dot\alpha} &= -\overline{D}_{\dot\alpha}\,\omega^3\,, \\
s\,\omega^{2\,\alpha} &= -D^\alpha\,\omega^3\,, \\
s\,\omega^3 &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Em particular, a primeira equação do sistema acima mostra então que a ação invariante $\mathcal{L}^0$ pode ser identificada com

$$
\mathcal{L}^0 = \omega^0 + \frac{1}{4}\overline{\zeta}_{\dot\alpha}\,\overline{\Lambda}^{1\,\dot\alpha} + \frac{1}{4}\zeta^\alpha\,\Lambda^1_{\ \alpha}\,. \tag{5.41}
$$

Esta expressão deve ser entendida módulo cociclos triviais de BRST ou derivadas totais de superespaço. Sua não trivialidade reside, usando-se o argumento cohomológico padrão [8, 37], na não trivialidade do cociclo de "ghost" (5.34). Retomando as expressões (5.32) e (5.38), para $\mathcal{L}^0$ obtém-se

$$
\mathcal{L}^0 = \frac{1}{4}Tr\,\left(\varphi^\alpha\,F_\alpha\right) + \frac{1}{4}Tr\,\left(\overline{\varphi}_{\dot\alpha}\,\overline{F}^{\dot\alpha}\right)\,,
$$

que, quando integrado com a medida completa de superespaço $d^4x\ d^2\theta\ d^2\overline{\theta}$, fornece a familiar lagrangiana invariante N=1 supersimétrica de Yang-Mills:

$$S_{YM} = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, \mathcal{L}^0 = \frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\theta\, Tr\ F^\alpha F_\alpha + \frac{1}{4}\int d^4x\, d^2\overline{\theta}\, Tr\ \overline{F}_{\dot\alpha}\overline{F}^{\dot\alpha}.$$

5.4 Equações de Descida Quirais para a Anomalia $U(1)$

A condição de consistência para a anomalia axial $U(1)$ é escrita no superespaço na forma [45, 46]

$$s\int d^4x\, d^2\overline{\theta}\, K^0 = 0 \Longrightarrow s\, K^0 = \overline{D}_{\dot\alpha}\, \overline{K}^{1\dot\alpha}\,, \tag{5.42}$$

onde K^0 e $\overline{K}^{1\dot\alpha}$ têm dimensões dois e três meios e números de "ghost" zero e um respectivamente. K^0 tem então os mesmos números quânticos da ação invariante considerada na última seção, a única diferença residindo no fato de que a medida de superespaço aqui, $d^4x\ d^2\overline{\theta}$, é quiral, em vez da vetorial $d^4x\ d^2\overline{\theta}\ d^2\theta$. Por isso, as equações de descida para K^0 são obtidas tomando-se o limite quiral das equações vetoriais (5.30). Atuando-se com o operador de BRST na segunda equação da condição (5.42), resulta

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\, s\, \overline{K}^{1\dot\alpha} = 0\,. \tag{5.43}$$

Usando-se os resultados dados no Ap.A, segue que a solução geral da equação (5.43) é dada por

$$\begin{aligned} s\,\overline{K}^{1\dot\alpha} &= \left(\overline{D}^{\dot\alpha}\, D^\alpha + 2\ D^\alpha\, \overline{D}^{\dot\alpha}\right) K^2_\alpha\,, \\ \overline{D}^2\, K^2_\alpha &= 0\,, \end{aligned} \tag{5.44}$$

onde K^2_α é um polinômio local de dimensão um meio e número de "ghost" dois. Atuando-se novamente com o operador de BRST na eq.(5.44) tem-se

$$\left(\overline{D}^{\dot\alpha}\, D^\alpha \,+\, 2\; D^\alpha\, \overline{D}^{\dot\alpha}\right)\, s\, K^2_\alpha \,=\, 0\,, \tag{5.45}$$

que de acordo com o Ap.A implica

$$\begin{aligned} s\; K^2_\alpha \;&=\; D^\alpha\, K^3\,, \\ \overline{D}^2\, D^\alpha\, K^3 \;&=\; 0\,, \qquad D^2\, \overline{D}^{\dot\alpha}\, K^3 \,=\, 0\,, \end{aligned}$$

com K^3 sendo um polinômio local de dimensão zero e número de "ghost" três. Finalmente, de

$$D^\alpha\, s\; K^3 \,=\, 0\,,$$

segue que

$$s\, K^3 \,=\, 0\,.$$

Resumindo, as equações de descida no superespaço para anomalia quiral $U(1)$ são

$$\begin{aligned} s\, K^0 \;&=\; \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{K}^{1\,\dot\alpha}\,, \\ s\,\overline{K}^1_{\ \dot\alpha} \;&=\; \left(2D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha} \,+\, \overline{D}_{\dot\alpha}D^\alpha\right)\, K^2_{\ \alpha}\,, \\ s\, K^{2\,\alpha} \;&=\; D^\alpha\, K^3\,, \\ s\, K^3 \;&=\; 0\,, \end{aligned} \tag{5.46}$$

com os vínculos

$$\begin{aligned} \overline{D}^2\, K^2_\alpha \,=\, 0\,, \\ \overline{D}^2\, D^\alpha\, K^3 \,=\, D^2\, \overline{D}^{\dot\alpha}\, K^3 \,=\, 0\,. \end{aligned} \tag{5.47}$$

A presença destes vínculos, que aqui são obtidos como uma consequência inevitável da estrutura do superespaço, constitui uma diferença com relação as equações de descida apresentadas na literatura [45]. Apesar disto, como veremos em breve, as soluções então apresentadas do sistema (5.46) sem a presença dos vínculos podem ser enquadradas como soluções particulares do sistema (5.46) – (5.47).

Relembrando o resultado (5.34) da última seção, a solução K^3 mais geral é dada a princípio por

$$K^3 = \left(Tr\frac{c^3}{3} + Tr\frac{\overline{c}^3}{3} \right) + s\,\Delta^2 \,,$$

para alguma série de potências local Δ^2. É interessante observar que os cociclos com número de "ghost " dois e dimensão zero vão ser completamente fixados pela restrição de que suas variações segundo s satisfaçam os vínculos (5.47), de forma que a dependência funcional de K^3 acima na sua forma mais geral não é alterada. Assim , este cociclo pode ser reescrito como

$$K^3 = \left(Tr\frac{c^3}{3} + \alpha Tr\frac{\overline{c}^3}{3} \right) \,, \tag{5.48}$$

onde α é um coeficiente arbitrário relativo entre os setores quiral e antiquiral advindo da contribuição trivial Δ^2 mais geral.

Atuando agora com o operador ζ_α em ambos os lados da última das eqs.(5.46) e usando a decomposição (5.6), para K^2_α resulta

$$K^2_\alpha = -\zeta_\alpha\, K^3 + s\,\Delta^1_\alpha \,.$$

Novamente, não é difícil provar que a imposição dos vínculos (5.47) estabelecem uma expressão única para Δ^1_α,

$$\Delta^1_\alpha = Tr\,(c\,\varphi_\alpha) \;,$$

de tal forma que K^2_α também fica totalmente deteminado,

$$K^2_\alpha = Tr\,(c\,D_\alpha\, c) \;.$$

Vê-se assim que no caso quiral, devido aos vínculos (5.47), as contribuições triviais de BRST são unicamente fixadas nos níveis mais baixos das equações de descida. Repetindo o mesmo procedimento e usando as relações (5.7), obtém-se para $\overline{K}^{1\dot{\alpha}}$

$$\overline{K}^{1\dot{\alpha}} = G^{\alpha\dot{\alpha}} K^2_\alpha - \overline{\Lambda}^{1\dot{\alpha}} + D^\alpha \overline{D}^{\dot{\alpha}} Tr\left(c\,\varphi_\alpha\right) + Tr\left(\bar{c}\,\overline{F}^{\dot{\alpha}}\right) + s\,\Delta^{0\dot{\alpha}} , \qquad (5.49)$$

onde o cociclo $\overline{\Lambda}^{1\dot{\alpha}}$ é o mesmo que aquele determinado na eq.(5.38), *i.e.*

$$\overline{\Lambda}^{1\dot{\alpha}} = Tr\left(c\,\overline{R}^{\dot{\alpha}}\,c\right) + Tr\left(\bar{c}\,\overline{F}^{\dot{\alpha}}\right) .$$

Assim, segue que

$$\overline{K}^{1\dot{\alpha}} = -\,2\,Tr\left(D^\alpha\, c\,\overline{D}^{\dot{\alpha}}\,\varphi_\alpha\right) + s\,\Delta^{0\dot{\alpha}} . \qquad (5.50)$$

Finalmente, atuando com o operador $\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}$ em ambos os lados da equação

$$s\,\overline{K}^1_{\ \dot{\alpha}} = \left(2D^\alpha \overline{D}_{\dot{\alpha}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}} D^\alpha\right) K^2_\alpha ,$$

para o último nível K^0 encontra-se que

$$K^0 = -\,\overline{\zeta}_{\dot{\alpha}}\,\overline{K}^{1\dot{\alpha}} + Tr\left(2\varphi^\alpha F_\alpha + \overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\varphi^\alpha\,\overline{D}^{\dot{\alpha}}\,\varphi_\alpha\right) ,$$

reproduzindo a bem conhecida expressão para a anomalia quiral supersimétrica U(1)

$$K^0 = Tr\left(2\varphi^\alpha F_\alpha - \overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\varphi^\alpha\,\overline{D}^{\dot{\alpha}}\,\varphi_\alpha\right) - \overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\Delta^{0\dot{\alpha}} . \qquad (5.51)$$

Observe-se que a dependência no setor antiquiral foi totalmente perdida ao longo da subida das equações de descida, como pode ser visto, por exemplo, pela supressão da constante α, que inicialmente parametrizava esse setor na eq.(5.48), nas demais soluções. Isto mostra que a própria estrutura das equações de descida, em conjunto com os vínculos (5.47), é suficiente para assegurar a dependência exclusiva no setor quiral da solução final (5.51) sem que seja necessário impor-se qualquer tipo de restrição arbitrária sobre o espaço funcional de campos onde está definido o problema ou mesmo sobre as próprias soluções, como foi feito na ref.[45]. No entanto, deve-se realçar que as expressões para os cociclos K^3, K^2_α, $\overline{K}^{1\dot\alpha}$ e K^0 encontrados aqui são completamente equivalentes às de [45], *i.e.* a diferença é sempre um cociclo BRST exato ou uma derivada total de superespaço.

5.5 A Anomalia de Calibre Supersimétrica

Como último exemplo desta análise em superespaço, considera-se o caso da anomalia de calibre supersimétrica. Como antes, inicia-se pela derivação das correspondentes equações de descida. Estas, como mencionado na Seção 5.2, podem ser obtidas pela adição de um termo extra apropriado no lado direito da equação de covariância generalizada (5.24). A presença deste termo vem na verdade da trivialidade [44] dos cociclos de "ghost" $(Tr\ c^{2n+1} - Tr\ \overline{c}^{2n+1})$, $n \geq 1$,

$$s\,\Omega^{2n} = Tr\,\frac{c^{2n+1}}{2n+1} - Tr\,\frac{\overline{c}^{2n+1}}{2n+1}\,, \tag{5.52}$$

$\Omega^{\ 2n}$ sendo um funcional local adimensional de $(\phi, c, \overline{c})$ com número de "ghost" $2n$. Então, atuando com o operador e^δ em ambos os lados da eq.(5.52) e lembrando as definições (5.20) e (5.21), chega-se à versão modificada da equação de covariância generalizada (5.24) que se procurava,

$$\begin{aligned} \tilde{d}\,\tilde{\Omega} &= Tr\,\frac{\tilde{A}^{2n+1}}{2n+1} - Tr\,\frac{\tilde{\overline{A}}^{2n+1}}{2n+1}\,, \\ \tilde{\Omega} &= e^\delta\,\Omega^{2n}\,. \end{aligned} \tag{5.53}$$

As equações de descida para a anomalia de calibre seguem então da eq.(5.53) quando $n = 2$, *i.e.*

$$\begin{aligned} \tilde{d}\,\tilde{\Omega} &= \frac{1}{5}\,Tr\left(\tilde{A}^5 - \tilde{\overline{A}}^5\right)\,, \\ \tilde{\Omega} &= e^\delta\,\Omega^4\,. \end{aligned} \tag{5.54}$$

Para se confirmar que a equação acima realmente caracteriza a anomalia de calibre, expande-se (5.54) em componentes. Expandindo $\tilde{\Omega}$ nos parâmetros globais $(e^{\alpha}, \overline{e}^{\dot{\alpha}}, \tilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha})$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Omega} \;=\; & \Omega^4 + \Omega^{3\,\alpha}\, e_{\alpha} + \overline{\Omega}^{3}_{\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} + \tilde{\Omega}^{3\,\alpha}_{\dot{\alpha}}\, \tilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} + \tilde{\Omega}^{2\,\alpha}_{\dot{\alpha}}\, e_{\alpha}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \\
& + \Omega^{2\,\alpha}\, \tilde{e}_{\alpha\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} + \overline{\Omega}^{2}_{\dot{\alpha}}\, e^{\alpha}\, \tilde{e}^{\dot{\alpha}}_{\alpha} + \Omega^{1}\, e^{\alpha}\, \tilde{e}_{\alpha\dot{\alpha}}\, \overline{e}^{\dot{\alpha}} \;,
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

e eliminando os termos em G e R , como foi feito na Seção 5.3, chega-se às conhecidas equações de descida para a anomalia de calibre no superespaço

$$
\begin{aligned}
s\,\Omega^1 &= D^{\alpha}\,\Omega^2_{\alpha} + \overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\Omega^{2\dot{\alpha}} \;, \\
s\,\Omega^2_{\alpha} &= -\overline{D}^2\Omega^3_{\alpha} + \left(2\overline{D}_{\dot{\alpha}}D_{\alpha} + D_{\alpha}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\right)\overline{\Omega}^{3\dot{\alpha}} \\
&\quad + 2\,Tr\left(\left(D_{\alpha}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\overline{c}\right)\left(\overline{c}\overline{D}^{\dot{\alpha}}\overline{c} + \overline{D}^{\dot{\alpha}}\overline{c}\,\overline{c}\right)\right) \;, \\
s\,\overline{\Omega}^{2\dot{\alpha}} &= D^2\overline{\Omega}^{3\dot{\alpha}} - \left(2D^{\alpha}\overline{D}_{\dot{\alpha}} + \overline{D}_{\dot{\alpha}}D^{\alpha}\right)\Omega^3_{\alpha} \\
&\quad - 2\,Tr\left(\left(\overline{D}^{\dot{\alpha}}D^{\alpha}c\right)\left(cD_{\alpha}c + D_{\alpha}c\,c\right)\right) \;, \\
s\,\Omega^3_{\alpha} &= D_{\alpha}\,\Omega^4 + Tr\left(c^3 D_{\alpha}c\right) \;, \\
s\,\overline{\Omega}^{3\dot{\alpha}} &= -\overline{D}^{\dot{\alpha}}\,\Omega^4 + Tr\left(\overline{c}^3\overline{D}^{\dot{\alpha}}\overline{c}\right) \;, \\
s\,\Omega^4 &= \tfrac{1}{5}Tr\left(c^5 - \overline{c}^5\right) \;.
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

Vê-se em particular que, integrando a primeira equação em (5.56) no superespaço, o cociclo Ω^1 obedece exatamente a condição de consistência de Wess-Zumino para uma possível quebra da invariância de calibre

$$s \int d^4x \, d^2\theta \, d^2\overline{\theta} \, \Omega^1 = 0 \, ,$$

identificando então a anomalia de Yang-Mills supersimétrica.

De forma a encontrar uma solução das equações de descida (5.56), usa-se o mesmo procedimento de subida dos exemplos anteriores, obtendo-se as seguintes expressões não triviais

$$\begin{aligned}
\Omega^3_\alpha &= -\,\zeta^\alpha\, \Omega^4 - Tr\,(\varphi^\alpha\, c^3) \, , \\
\overline{\Omega}^{3\dot\alpha} &= \overline{\zeta}_{\dot\alpha}\, \Omega^4 - Tr\,(\overline{\varphi}_{\dot\alpha}\, \overline{c}^3) \, , \\
\Omega^2_\alpha &= G_{\alpha\dot\alpha}\, \overline{\zeta}^{\dot\alpha}\, \Omega^4 + \overline{D}_{\dot\alpha}\, \overline{\zeta}^{\dot\alpha}\, \zeta_\alpha\, \Omega^4 \\
&\quad - Tr\left(\overline{\varphi}_{\dot\alpha} \left(D_\alpha \overline{\varphi}^{\dot\alpha}\right) \overline{c}^2 - \overline{\varphi}_{\dot\alpha}\, \overline{c} \left(D_\alpha \overline{\varphi}^{\dot\alpha}\right) \overline{c} + \overline{\varphi}_{\dot\alpha}\, \overline{c}^2\, D_\alpha \overline{\varphi}^{\dot\alpha}\right) \\
&\quad + 2\, Tr\left((D_\alpha \overline{\varphi}_{\dot\alpha}) \left(\overline{c}\,\overline{D}^{\dot\alpha}\overline{c} + \overline{D}^{\dot\alpha}\overline{c}\,\overline{c}\right)\right) \, , \\
\overline{\Omega}^{2\dot\alpha} &= G^{\alpha\dot\alpha}\, \zeta_\alpha\, \Omega^4 + D^\alpha\, \overline{\zeta}^{\dot\alpha}\, \zeta_\alpha\, \Omega^4 \\
&\quad + Tr\left(\varphi^\alpha \left(\overline{D}^{\dot\alpha} \varphi_\alpha\right) \overline{c}^2 - \varphi^\alpha\, \overline{c} \left(\overline{D}^{\dot\alpha} \varphi_\alpha\right) \overline{c} + \varphi^\alpha\, \overline{c}^2\, \overline{D}^{\dot\alpha} \varphi_\alpha\right) \\
&\quad - 2\, Tr\left(\left(\overline{D}^{\dot\alpha} \varphi_\alpha\right) (c D_\alpha c + D_\alpha c\, c)\right) \, ,
\end{aligned} \tag{5.57}$$

e, por último, para a anomalia de calibre

$$\Omega^1 = 2\,\zeta^\alpha\, G_{\alpha\dot\alpha}\, \overline{\zeta}^{\dot\alpha}\, \Omega^4$$

$$+2\,Tr\left(F^\alpha\, c\, \varphi_\alpha \;-\; F^\alpha\, \varphi_\alpha\, c \;+\; \left(\overline{D}_{\dot\alpha}\, \varphi^\alpha\right)\left(\overline{D}^{\dot\alpha}\, \varphi_\alpha\right) c\right) \qquad (5.58)$$

$$-2\,Tr\left(\overline{F}_{\dot\alpha}\, \overline{c}\, \overline{\varphi}^{\dot\alpha} \;-\; \overline{F}_{\dot\alpha}\, \overline{\varphi}^{\dot\alpha}\, \overline{c} \;+\; \left(D^a\, \overline{\varphi}_{\dot\alpha}\right)\left(D_\alpha\, \overline{\varphi}^{\dot\alpha}\right)\overline{c}\right) .$$

Deve-se observar que uma expressão explícita final para a anomalia de calibre depende do conhecimento do cociclo Ω^4, solução da última das equações de descida (5.56). Este ponto é particularmente importante e merece alguns esclarecimentos que são feitos a seguir.

5.5.1 O Caráter Não Polinomial da Anomalia de Calibre Supersimétrica

É conhecido que, devido a um teorema de Ferrara, Girardello, Piguet e Stora [48], a anomalia de calibre no superespaço não pode ser expressa como um polinômio nas variáveis $(\varphi_\alpha, \lambda_\alpha \equiv e^{\varphi} D_\alpha\, e^{-\varphi})$ e suas derivadas covariantes. Na verdade, todas as expressões fechadas para a anomalia de calibre no superespaço conhecidas até hoje foram obtidas por meio de procedimentos de transgressão homotópicos [49, 50, 51, 52], e mostram um caráter altamente não polinomial na superconexão de calibre. Por outro lado, na abordagem realizada aqui, o simples conhecimento do cociclo Ω^4 produziria uma expressão fechada para a anomalia de calibre supersimétrica sem fazer-se uso de qualquer integral de homotopia. Obviamente, isto implicaria num conhecimento mais profundo desta anomalia. E não é difícil de se concluir que resolver a equação

$$s\,\Omega^4 = \tfrac{1}{5} Tr\left(c^5 - \overline{c}^5\right) \qquad (5.59)$$

não é um trabalho trivial. Isto, na verdade, se deve ao fato de que a transformação do supercampo vetorial ϕ

$$s\, e^{\phi} \;=\; e^{\phi}\, c \;-\; \overline{c}\, e^{\phi} \;,$$

quando escrita em termos de ϕ, assume a forma não polinomial

$$s\, \phi \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\phi}\, (c+\overline{c}) \;+\; \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\phi}\, \left[\coth\left(\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}\right)\right]\, (c-\overline{c}) \;, \tag{5.60}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\phi}\, \cdot \;=\; [\phi,\, \cdot\,] \;,$$

e

$$\coth\left(\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}\right) \;=\; \frac{e^{\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}} \;+\; e^{-\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}}}{e^{\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}} \;-\; e^{-\frac{\mathcal{L}_{\phi}}{2}}} \;.$$

Em outras palavras, pode-se afirmar que, devido ao teorema de Ferrara, Girardello, Piguet e Stora [48], a não polinomialidade da anomalia de calibre supersimétrica provem da não polinomialidade do cociclo Ω^4. Pelo que sabemos, uma forma fechada para Ω^4 ainda não foi estabelecida.

A fórmula (5.60) pode ser expandida em potências de ϕ, permitindo resolver a equação (5.59) ordem por ordem. Por exemplo, em primeira aproximação, que corresponde ao limite abeliano, retem-se somente os termos lineares das transformações de BRST, *i.e.*

$$s \;\longrightarrow\; s_{ab}$$

com

$$\begin{aligned} s_{ab}\, \phi \;&=\; c \;-\; \overline{c} \;, \\ s_{ab}\, c \;&=\; s_{ab}\, \overline{c} \;=\; 0 \;, \end{aligned}$$

e pode ser facilmente confirmado que

$$Tr\left(c^5 \;-\; \overline{c}^5\right) \;=\; s_{ab}\, Tr\left(\phi\left(c^4 \;+\; c^3\, \overline{c} \;+\; c^2\, \overline{c}^2 \;+\; c\, \overline{c}^3 \;+\; \overline{c}^4\right)\right) \;, \tag{5.61}$$

o que comprova [3], de fato, a trivialidade de $Tr\,(c^5\; -\; \bar{c}^5)$.

Como conclusão desta seção, é dada uma solução explícita para a anomalia de calibre (5.58) até segunda ordem no supercampo vetorial ϕ,

$$
\begin{aligned}
\Omega^1 \;&=\; -2\,Tr\left(D^\alpha\phi\,\overline{D}^2 D_\alpha\phi\, c \;+\; \overline{D}^2 D^\alpha\phi\; D_\alpha\phi\, c \;-\; \left(\overline{D}_{\dot\alpha} D^\alpha\phi\right)\left(\overline{D}^{\dot\alpha} D_\alpha\phi\right) c\right) \\
&\qquad 2\,Tr\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\phi\; D^2\overline{D}^{\dot\alpha}\phi\,\bar{c} \;+\; D^2\overline{D}_{\dot\alpha}\phi\,\overline{D}^{\dot\alpha}\phi\,\bar{c} \;-\; \left(D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\phi\right)\left(D_\alpha\overline{D}^{\dot\alpha}\phi\right)\bar{c}\right)\;,
\end{aligned}
\tag{5.62}
$$

que é reconhecida como equivalente à da ref.[44]. Deve ser observado que esta expressão acima não recebe contribuições do termo em Ω^4, já que estas seriam pelo menos de ordem três em ϕ, como pode ser confirmado aplicando-se a combinação $\zeta^\alpha\, G_{\alpha\dot\alpha}\,\overline{\zeta}^{\dot\alpha}$ no cociclo da eq.(5.61).

Apêndice A

Soluções Algébricas no Superespaço

São dadas aqui as soluções algébricas [44, 45, 46, 53] necessárias para a análise das equacões de descida supersimétricas. Todas estas soluções são construídas com supercampos. Elas devem sempre ser entendidas módulo termos que resolvam automaticamente as equações correspondentes mas que não possam ser escritos na mesma forma algébrica das soluções. A existência de tais termos particulares depende fortemente do conteúdo de supercampos do modelo sob consideração.

O primeiro resultado estabelece que a solução da equação seguinte no superespaço,

$$\overline{D}^2 Q = 0 \,,$$

pode ser escrita em geral como

$$Q = \overline{D}_{\dot\alpha} \mathcal{M}^{\dot\alpha} \,,$$

para algum supercampo $\mathcal{M}^{\dot\alpha}$.

O segundo resultado importante diz respeito à solução da seguinte equação

$$\left(2\overline{D}_{\dot\alpha} D_\alpha + D_\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\right) \overline{Q}^{\dot\alpha} = \overline{D}^2 Q_\alpha \,.$$

Para os supercampos $\overline{Q}^{\dot\alpha}$ e Q_α tem-se as soluções

$$\overline{Q}^{\dot\alpha} = \overline{D}^{\dot\alpha} \mathcal{M} ,$$

$$Q_\alpha = -D_\alpha \mathcal{M} ,$$

com $\mathcal{M}$ sendo um supercampo arbitrário. Observa-se agora, em particular, que, para o conteúdo de campos da teoria analisada no Capítulo 5 e devido ao fato de que o "ghost" c é um supercampo quiral, o termo $Tr\,(cD_\alpha c)$ é aniquilado automaticamente pelo operador $\overline{D}^2$. Assim, já que ele não pode ser escrito como uma derivada total de superespaço, ele deve ser incluído na expressão dada para Q_α.

Considerando a equação

$$D^\alpha Q_\alpha = \overline{D}_{\dot\alpha} \overline{Q}^{\dot\alpha} ,$$

tem-se a solução algébrica

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\overline{D}^2 \mathcal{P}_\alpha + \left(2\overline{D}_{\dot\alpha}D_\alpha + D_\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\right) \overline{\mathcal{P}}^{\dot\alpha} + D^\beta \mathcal{N}_{(\alpha\beta)} , \\ \overline{Q}^{\dot\alpha} &= -D^2 \overline{\mathcal{P}}^{\dot\alpha} + \left(2D^\alpha\overline{D}^{\dot\alpha} + \overline{D}^{\dot\alpha}D^\alpha\right) \mathcal{P}_\alpha + \overline{D}_{\dot\beta}\overline{\mathcal{N}}^{(\dot\alpha\dot\beta)} , \end{aligned} \tag{A.1}$$

com $\mathcal{P}_\alpha$ e $\mathcal{N}_{(\alpha\beta)}$ supercampos apropriados. Obviamente, a existência de um supercampo simétrico $\mathcal{N}_{(\alpha\beta)}$ depende da dimensão e do número de "ghost" de Q_α. Por exemplo, no caso das equações de descida vetoriais (5.40), nas quais Q_α corresponde a $s(\omega^1_\alpha + \frac{1}{2}\Lambda^1_\alpha)$, não é difícil conferir que $\mathcal{N}_{(\alpha\beta)}$ não pode estar presente devido aos números quânticos do problema.

Em particular, no caso das equações de descida quirais consideradas na Seção 5.4, a equação $(A.1)$ implica que a solução mais geral de (5.43) é dada de fato por

$$s\,\overline{K}^{1\dot\alpha} = \left(\overline{D}^{\dot\alpha} D^\alpha + 2\; D^\alpha \overline{D}^{\dot\alpha}\right) K^2_\alpha ,$$

com o vínculo

$$\overline{D}^2 K_\alpha^2 = 0 .$$

Apêndice B

A Cohomologia de BRST no Superespaço

Neste apêndice serão resumidos alguns dos principais resultados concernentes à cohomologia de BRST no superespaço para teorias de Yang-Mills supersimétricas N=1. As várias classes da cohomologia de BRST são rotuladas pelo número de "ghost" g e pelos índices espinoriais.

Seguem os seguintes resultados [44, 45, 47]:

1. As classes de cohomologia de BRST no espaço das séries de potências formais locais invariantes de BRST A^g com dimensão 2 e número de "ghost" positivo g são vazias.

2. As classes de cohomologia no espaço das séries de potências locais invariantes A^g_α e $\overline{A}^g_{\dot{\alpha}}$ com dimensão $\frac{3}{2}$ e número de "ghost" $g = 1, 2$ or 3 são vazias.

3. As classes de cohomologia no espaço das séries de potências locais invariantes A^g_α e $\overline{A}^g_{\dot{\alpha}}$ com dimensão $\frac{1}{2}$ e número de "ghost" g maior que zero são vazias.

4. As classes de cohomologia no espaço das séries de potências locais invariantes B^g com dimensão 0, número de "ghost" g, e pelo menos de ordem $g + 1$ nos campos são vazias.

5. As classes de cohomologia no espaço das séries de potências locais invariantes C^g com dimensão 0, número de "ghost" g maior que zero e de ordem g nos campos são vazias.

Como conclusão, segue que, no setor exclusivo de "ghosts", as classes de cohomologia de BRST são dadas por polinômios construídos a partir de monômios do tipo

$$Tr\frac{c^{2n+1}}{2n+1}\,, \qquad n \geq 1\,, \tag{B.1}$$

ou

$$Tr\frac{\bar{c}^{2n+1}}{2n+1}\,, \qquad n \geq 1\,. \tag{B.2}$$

Resta ainda a ser feita a observação que as duas expressões acima, $(B.1)$ e $(B.2)$, na verdade não definem classes de cohomologia diferentes. Em vez disso, elas são equivalentes devido à trivialidade da combinação [44, 46]

$$Tr\frac{c^{2n+1}}{2n+1} - Tr\frac{\bar{c}^{2n+1}}{2n+1} = s\,\Omega^{2n}\,,$$

para uma série de potências local arbitrária Ω^{2n}. Este resultado mostra como as expressões $(B.1)$ e $(B.2)$ estão relacionadas através de um cociclo de BRST exato.

Apêndice C

O Fechamento "Off-Shell" da Álgebra dos Operadores de Decomposição Supersimétricos

Neste apêndice será mostrado como o fechamento "off-shell" da álgebra (5.16) pode ser obtido de uma forma simples pela introdução de um campo externo η apropriado. Assim, seja η um supercampo com dimensão 2 e número de "ghost" -1, cuja transformação de BRST seja dada por

$$
\begin{aligned}
s\,\eta &= [\eta\,,\,c] + 2\,(D\,F + [\varphi\,,\,F])\;\;, \\
s^2\,\eta &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Modificando neste momento o operador ζ,

$$
\zeta\,F = -\frac{1}{2}\,\eta\,,
$$

é facilmente verificado que o comutador (5.25)

$$
[\zeta\,,\,s]\,F = -\zeta\,[c\,,\,F] + \frac{1}{2}\,s\,\eta = D\,F\,,
$$

fornece agora a derivada covariante de F sem que se faça uso das equações de movimento, fechando desta forma a álgebra (5.16) "off-shell". Conclui-se observando que o campo externo η não pode contribuir para as classes de cohomologia de BRST relevantes para os exemplos considerados aqui devido aos seus números quânticos.

Conclusão

Mostramos ao longo do texto como a existência da decomposição δ numa vasta gama de teorias permitiu a descrição de seus tratamentos quânticos num ambiente unificador, o qual denominamos formalismo de curvatura nula.

Merecem ser realçados ainda pontos que chamam a atenção naturalmente.

Quando abordamos as teorias descritas por um multipleto completo, vimos como as teorias topológicas do tipo Schwarz (como o Chern-Simons, o BF topológico, ...) se enquadravam nesse contexto. Por outro lado, é conhecido o resultado de que a decomposição δ é de fato uma simetria realizada para estas teorias (com uma quebra clássica linear), que pode ser estendida quanticamente, e que está por trás da finitude desses modelos [18, 19, 3]. A questão então se impõe naturalmente: existirá alguma correlação entre o fato de termos uma identidade de Ward associada à decomposição δ em multipletos completos e a natureza topológica dessas teorias?

Esta constitui uma extensão do nosso trabalho apresentado até aqui. Podemos já antecipar o resultado, que é afirmativo. De fato, conseguimos provar como a caracterização de uma teoria topológica, via trivialidade do tensor energia-momento, leva à definição de uma identidade de Ward associada à decomposição. Temos também comprovação de que, escolhidas bases de formas associadas a um ou mais multipletos completos, a imposição da decomposição leva à reconstrução das teorias topológicas. Esse mecanismo, inclusive, pode ser pensado como um gerador de candidatas a novas teorias topológicas, em outras dimensões ou envolvendo novos multipletos, por exemplo.

Outra extensão já em andamento diz respeito ao tratamento da teoria topológica de Witten [54], e de se explorar a sua conexão com teorias supersimétricas $N = 2$ de

Yang-Mills em $4D$ [55], correlacionando-se a cohomologia destas últimas com a famosa cohomologia equivariante da primeira [54, 56].

Encontram-se também em andamento a análise das teorias supersimétricas de Chern-Simons $N = 1$ e $N = 2$ em $3D$ no superespaço.

Bibliografia

[1] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, *Ann. Phys.* 98 (1976) 287;

[2] I.A. Batalin e G.A. Vilkovisky, *Phys. Lett.* B102 (1981) 27;
I.A. Batalin e G.A. Vilkovisky, *Phys. Rev.* D28 (1983) 2567;

[3] O. Piguet e S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization,* Monographs Series, m 28, Springer-Verlag, Berlin, 1995;

[4] Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* D6 (1972) 2145;
Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* D6 (1972) 2161;
T.E. Clark e J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* B113 (1976) 109;

[5] S.L. Adler e W.A. Bardeen, *Phys. Rev.* 182 (1969) 1517;
A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 1198;
J.H. Lowenstein e B. Schroer, *Phys. Rev.* D7 (1975) 1929;
G. Costa, J. Julve, T. Marinucci e M. Tonin, *Nuovo Cimento* 38A (1977) 373;
G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi e R. Collina, *Commun. Math. Phys.* 72 (1980) 239;
O. Piguet e S. Sorella, *Nucl. Phys.* B381 (1992) 373;
O. Piguet e S. Sorella, *Nucl. Phys.* B395 (1993) 661;

[6] R. Stora, Continuum Gauge Theories, in *New Developments in Quantum Field Theories and Statistical Mechanics,* Cargèse Lectures 1976, eds. M. Lévy e P. Mitter, NATO ASI series, New York: Plenum Press 1977;

R. Stora, Algebraic Structure and Topological Origin of Anomalies, in *Recent Progress in Gauge Theories,* Cargèse Lectures 1983, ed. H. Lehmann, NATO ASI series, New York: Plenum Press 1984;

[7] B. Zumino, Chiral Anomalies and Differential Geometry, in *Relativity, Groups and Topology II*, Les Houches 1983, eds. B.S. DeWitt e R. Stora, North Holland, Amsterdam, 1984;
B. Zumino, Y.S. Wu e A. Zee, *Nucl. Phys.* B239 (1984) 477;
J. Mañes, R.Stora e B. Zumino, *Comm. Math. Phys.* 102 (1985) 157;

[8] L. Baulieu, *Nucl. Phys.* B241 (1984) 557;
L. Baulieu e J. Thierry-Mieg, *Phys. Lett.* B145 (1984) 53;
R.D. Ball, *Phys. Rep.* 182 (1989) 1;

[9] M. Dubois-Violette, M. Talon e C.M. Viallet, *Phys. Lett.* B158 (1985) 231;

[10] F. Brandt, N. Dragon e M. Kreuzer, *Nucl. Phys.* B340 (1990) 187;

[11] J.A. Dixon, *Comm. Math. Phys.* 139 (1991) 495;

[12] C. Becchi, A. Blasi, G. Bonneau, R. Collina e F. Delduc, *Comm. Math. Phys.* 120 (1988) 121;

[13] F. Brandt, N. Dragon e M. Kreuzer, *Phys. Lett.* B231 (1989) 263; *Nucl. Phys.* B332 (1990) 224, 250;

[14] S. P. Sorella, *Commun. Math. Phys.* 157 (1993) 231;

[15] S.P. Sorella e L. Tataru, *Phys. Lett.* B324 (1994) 351;

[16] M. Carvalho, L. C. Q. Vilar, C. A. G. Sasaki e S. P. Sorella, *J. Math. Phys.* 37 (1996) 5325;

[17] M. Werneck de Oliveira e S.P. Sorella, *Int. J. Mod. Phys.* A9 (1994) 2979;
O. Moritsch, M. Schweda e S.P. Sorella, *Class. Quantum Grav.* 11 (1994) 1225;

O. Moritsch e M. Schweda, *Helv. Phys. Acta* 67 (1994) 289;

P.A. Blaga, O. Moritsch, M. Schweda, T. Sommer, L. Tataru e H. Zerrouki, *Algebraic structure of gravity in Ashtekar variables*, REP.TUW 94-19;

O. Moritsch, M. Schweda, T. Sommer, L. Tataru e H. Zerrouki, *BRST cohomology of Yang-Mills gauge fields in the presence of gravity in Ashtekar variables*, REP.TUW 94-17;

[18] E. Guadagnini, N. Maggiore e S.P. Sorella, *Phys. Lett.* B255 (1991) 65;
N. Maggiore e S.P. Sorella, *Int. J. Mod. Phys.* A8 (1993) 929;
C. Lucchesi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B395 (1993) 325;
D. Birmingham e M. Rakowski, *Phys. Lett.* B275 (1992) 289;
D. Birmingham e M. Rakowski, *Phys. Lett.* B289 (1992) 271;

[19] F. Delduc, F. Gieres e S.P. Sorella, *Phys. Lett.* B225 (1989) 367;
F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet e S.P. Sorella, *Nucl. Phys.* B346 (1990) 313;
O. Piguet, *On the Role of Vector Supersymmetry in Topological Field Theory*, UGVA-DPT 1995/02-880, hep-th/9502033;

[20] A Brandhuber, O. Moritsch, M.W. de Oliveira, O. Piguet e M. Schweda, *Nucl. Phys.* B341 (1994) 173;

[21] M. Carvalho, L. C. Q. Vilar, C. A. G. Sasaki e S. P. Sorella, *J. Math. Phys.* 37 (1996) 5310;

[22] M.W. de Oliveira, M. Schweda e S.P. Sorella, *Phys. Lett.* B315 (1993) 93;
G. Bandelloni e S. Lazzarini, *J. Math. Phys.* 34 (1993) 5413;
L. Tataru e I.V. Vancea, *Int. J. Mod. Phys.* 11 (1996) 375;

[23] A. Boresch, M. Schweda e S.P. Sorella, *Phys. Lett.* B328 (1994) 36;

[24] M. Carvalho, L.C. Queiroz Vilar e S.P. Sorella, *Int. J. Mod. Phys.* A27 (1995) 3877;

[25] L.C. Queiroz Vilar, C. A. G. Sasaki e S.P. Sorella, *Superspace Descent Equations and Zero Curvature Formalism of the Four Dimensional N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theories*, submetido a International Jounal of Modern Physics A;

[26] A.B. Zamolodchikov, *Teor. Mat. Fiz.* 65 (1985) 205;
V.A. Fateev e A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* B280 (1987) 644;
J. Thierry-Mieg, *Phys. Lett.* B197 (1987) 368;
V.A. Fateev e S. Lykanov, *Int. J. Mod. Phys.* A3 (1988) 507;

[27] C.M. Hull, Classical and Quantum $\mathcal{W}$-gravity, *Summer School in High Energy Physics and Cosmology, Trieste 1992, I.C.T.P.;*

[28] K. Schoutens, A. Sevrin e P. van Nieuwenhuizen, *Comm. Math. Phys.* 124 (1989) 87;
E. Bergshoeff, C.N. Pope, L.J. Romans, E. Sezgin, X. Shen e K.S. Stelle, *Phys. Lett.* B243 (1990) 350;
K. Schoutens, A. Sevrin e P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* B243 (1990) 245;
K. Schoutens, A. Sevrin e P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* B364 (1991) 584;
A.T. Ceresole, M. Frau, J. McCarthy e A. Lerda, *Phys. Lett.* B265 (1991) 72;
E. Bergshoeff, C.N. Pope, L.J. Romans, E. Sezgin, X. Shen e K.S. Stelle, *Nucl. Phys.* B363 (1991) 163;

[29] C.M. Hull, *Phys. Lett.* B240 (1990) 110; *Nucl. Phys.* B353 (1991) 707; *Phys. Lett.* B259 (1991) 68; *Nucl. Phys.* B364 (1991) 621; *Phys. Lett.* B269 (1991) 257; *Nucl. Phys.* B367 (1991) 731; *Comm. Math. Phys.* 156 (1993) 245; *Int. J. Mod. Phys.* A8 (1993) 2419;

[30] L. Baulieu, C. Becchi e R. Stora, *Phys. Lett.* B180 (1986) 55;
C. Becchi, *Nucl. Phys.* B304 (1988) 513;

[31] S. Vandoren e A. Van Proeyen, *Nucl. Phys.* B411 (1994) 257;

[32] C.N. Pope, L.J. Romans e K.S. Stelle, *Phys. Lett.* B268 (1991) 167; *Phys. Lett.* B269 (1991) 287;
R. Mohayee, C.N. Pope, K.S. Stelle e K.W.Xu, *Nucl. Phys.* B433 (1995) 712;
H. Lu, C.N. Pope, K.Thielemans, X.J. Wang e K.W. Xu, *Int. J. Mod. Phys.* A10 (1995) 2123;

[33] L.J. Romans, *Nucl. Phys.* B352 (1991) 829;

[34] M. Dubois-Violette, M. Henneaux, M. Tallon e C.M. Viallet, *Phys. Lett.* B289 (1992) 361;

[35] T. Eguchi, B. Gilkey e J. Hanson, *Phis. Rev.* 6 (1980) 213;

[36] J. Thierry-Mieg, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 2834;
J. Thierry-Mieg, *Nuovo Cim.* 56A (1980) 396;
L. Bonora e P. Cotta-Ramusino, *Comm. Math. Phys.* 87 (1983) 589;

[37] M. Dubois-Violette, M. Tallon e C.M. Viallet, *Comm. Math. Phys.* 102 (1985) 105;

[38] G. Barnich, F. Brandt e M. Henneaux, *Comm. Math. Phys.* 174 (1995) 57, 93;

[39] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski e G. Thompson, *Phys. Rep.* 209 (1991) 129;

[40] G.T. Horowitz, *Comm. Math. Phys.* 125 (1989) 417;
G.T. Horowitz e M. Srednicki, *Comm. Math. Phys.* 130 (1990) 83;
M. Blau e G. Thompson, *Ann. Phys. (N.Y.)* 205 (1991) 130;

[41] M. Abud, J.P. Ader e L. Cappielo, *Nuovo Cim.* 105A (1992) 1507;

[42] T.J. Allen, M.J. Bowick e A. Lahiri, *Mod. Phys. Lett.* A6 (1991) 559; *Phys. Lett.* B237 (1990) 47;

[43] O. Piguet e K. Sibold, *Nucl. Phys.* B197 (1982) 257;
O. Piguet and K. Sibold, *Nucl. Phys.* B197 (1982) 272;

[44] O. Piguet e K. Sibold, *Nucl. Phys.* B247 (1984) 484;

[45] O. Piguet e K. Sibold, *Intern. Journ. Mod. Phys.* A4 (1986) 913;
C. Lucchesi, O. Piguet e K. Sibold, *Helv. Phys. Acta* 61 (1988) 321;

[46] O. Piguet e K. Sibold, *"Renormalized Supersymmetry"*, series *"Progress in Physics" vol. 12 (Birkhäuser Boston Inc., 1986);*

[47] M. Porrati, *Z. Phys.* C32 (1986) 65;

[48] S. Ferrara, L. Girardello, O. Piguet e R. Stora, *Phys. Lett.* B157 (1985) 179;

[49] N.K. Nielsen, *Nucl. Phys.* B244 (1984) 499;

[50] G. Girardi, R. Grimm e R. Stora, *Phys. Lett.* B156 (1985) 203;

[51] L. Bonora, P. Pasti e M. Tonin, *Nucl. Phys.* B261 (1985) 249;
L. Bonora, P. Pasti e M. Tonin, *Phys. Lett.* B156 (1985) 341;

[52] E. Guadagnini e M. Mintchev, *Nucl. Phys.* B269 (1986) 543;
E. Guadagnini, K. Konishi e M. Mintchev, *Phys. Lett.* B157 (1985) 37;

[53] O. Piguet, *comunicações privadas;*

[54] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* 117 (1988) 353; *Comm. Math. Phys.* 118 (1988) 411;

[55] N. Maggiore, *Int. J. Mod. Phys.* A10 (1995) 3781, 3937;

[56] S. Ouvry, R. Stora e P. Van Baal, *Phys. Lett.* B220 (1989) 159.

“FORMALISMO DE CURVATURA NULA E SISTEMAS BRST”

LUIZ CLAUDIO QUEIROZ VILAR

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Silvio Paolo Sorella - Presidente

Marcelo Caminha Gomes

Olivier Piguet

Adolfo PedroCarvalho Malbouisson

José Abdalla Helayël-Neto

Bert Schroer – Convidado Especial

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 27 de março de 1997