TESE DE

MESTRADO

UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE ALGUMAS PRESCRIÇÕES PARA O CÁLCULO DA ENERGIA EM SISTEMAS GRAVITACIONAIS

PAULO ISRAEL TRAJTENBERG

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, JANEIRO DE 1997.

Dedicatória

Dedico esta tese aos meus pais, ROSA TRAJTENBERG e SALOMÃO TRAJTENBERG (*in memoriam*), dos quais herdei o amor à Filosofia, à Ciência e à Música, à minha esposa, SURAIA EL-KADDOUM TRAJTENBERG e à minha filha MARÍLIA EL-KADDOUM TRAJTENBERG, com as quais compartilhei momentos decisivos para a elaboração desta tese

Agradecimentos

- A NELSON PINTO NETO, por ter me introduzido neste fascinante tema da energia gravitacional, pela paciência e atenção a mim dispensadas, enfim, por ter me concedido o privilégio de ser seu orientando. Espero que a conclusão desta tese não seja um fim, mas o começo de uma nova etapa, na qual os laços profissionais e, se me permite, fraternais que nos uniu durante a elaboração deste trabalho possam ser aprofundados.

- A JOSÉ MARTINS SALIM, por ter dado o impulso inicial que possibilitou a realização deste trabalho.

- A MARIO NOVELLO, por sua liderança tão necessária ao desenvolvimento da Ciência neste país, por sua corajosa opção por uma Ciência comprometida mais com suas próprias leis do que com as leis de mercado e por fim, pelo intèresse demonstrado e pelas estimulantes discussões que, espero, possam ter continuidade no futuro.

- A MYRIAN SIMÕES COUTINHO, por ser esta extraordinária figura humana de rara competência profissional, cuja colaboração foi essencial para a conclusão desta tese.

- Aos meus amigos MARCELO LIMA, RENATO KIPPLERT, VITORIO LORENCI, HUMBERTO BELICH e à minha amiga MARTHA CRISTINA MOTTA, pelos quais tenho grande admiração e apreço e cuja colaboração foi fundamental, quero dizer que as palavras são por demais limitadas para expressar toda a minha infinita gratidão.

- Gostaria também de agradecer a todos que, com sincera amizade, me deram forças para seguir adiante, em especial à minha irmã LILIAN TRAJTENBERG, à ROXANA VALADÃO e à minha sogra, D. ALZIRA MOCKDECE EL-KADDOUM.

- Ao C.N.P.Q. pelo apoio financeiro.

- À S.E.E. pela licença concedida.

Resumo

Com base no formalismo lagrangeano da gravitação, as leis de conservação que descrevem os sistemas gravitacionais são deduzidas e suas propriedades analisadas no contexto de diferentes prescrições, a saber: O formalismo pseudotensorial, o método de Komar, o formalismo de Deser, Grishchuk, Petrov e Popova e o método de Brown e York. Aplicações ao cálculo da energia em sistemas gravitacionais simples, seja como propriedade local ou global, são efetuadas e os resultados obtidos a partir dos diversos métodos são comparados, a fim de estabelecer em quais das citadas prescrições o conceito de energia gravitacional é mais consistente fisicamente.

Summary

On the basis of the gravitational Lagrangean formalism, the conservation laws that describe gravitational systems are deducted and its properties are analysed in the context of different prescriptions, namely: the pseudotensorial formalism, Komar's method, the formalism by Deser, Grishchuk, Petrov and Popova, and the method by Brown and York. Applications to the energy calculation in simple gravitational systems (both as local and global properties) are made and the results obtained from the various methods are compared, in order to establish in which of the above prescriptions the concept of gravitational energy is more physically consistent.

Índice

Notação e convenções

- Índices gregos tomam valores (0,1,2,3) e índices latinos (0,2,3) ou (1,2,3), conforme se refiram a uma hipersuperfície tipo tempo ou tipo espaço, respectivamente.

- A métrica do espaço-tempo é $g_{\mu\nu}$ e sua assinatura $(-+++)$, sendo $g = \det g_{\mu\nu}$.

- A derivada simples será designada pelo símbolo " . "

- A derivada covariante de tensores no espaço-tempo será designada por "$\|$".

- O símbolo " ; " designa a derivada covariante em relação ao espaço de fundo ou a uma hipersuperfície tipo espaço, dependendo do contexto.

- Será adotado o sistema de unidades no qual $c = G = 1$ e $\kappa = 8\pi$, onde κ é a constante de Einstein.

- Tensor de Rieman: $R^{\alpha}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}$.

-Tensor de Ricci: $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$.

- Escalar de curvatura: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

- Tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.

- $dS_{\mu} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}dx^{\alpha}dx^{\beta}dx^{\gamma}$ designa o elemento de hipersuperfície formado pelos vetores dx^{α}, dx^{β} e dx^{γ}, sendo $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ o tensor completamente anti-simétrico de quarta ordem.

- $dS_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$ é o elemento de superfície formado pelos vetores dx^{α} e dx^{β}.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Com o advento da Teoria da Relatividade Geral (T.R.G.) e o consequente estabelecimento das equações de Einstein para o campo gravitacional

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

foram estruturados os fundamentos teóricos necessários à formulação relativística das leis de conservação de momento e energia. Neste sentido, a fim de proceder à tal generalização, procurou-se atribuir ao fluxo e à densidade de energia e momento nos sistemas gravitacionais certas propriedades físicas básicas consistentes com a T.R.G.. Primeiramente, visto que os sistemas gravitacionais são constituidos em parte pela matéria e em parte pelo campo gravitacional admitiu-se que em cada ponto de universo dado é necessário considerar, além do tensor momento-energia da matéria, uma contribuição extra ao fluxo e à distribuição de energia e momento do sistema associada exclusivamente ao campo gravitacional. Assim, no que diz respeito aos sistemas gravitacionais, apenas o momento e a energia totais, incluindo a contribuição da matéria e do campo gravitacional são conservados.

Não obstante, o significado físico desta contribuição do campo gravitacional, em especial da densidade de energia gravitacional, tem sido objeto de constantes especulações em física teórica, seja pela diversidade de maneiras pelas quais se pode definir leis de conservação na T.R.G., seja porque tais termos dependem sensivelmente da escolha do sistema de coordenadas, ou ainda pela sua não invariância sob transformações de calibre, o que resulta num quadro de ambiguidades que não permite atribuir à quantidade local de energia e momento gravitacionais um conteúdo físico bem definido.

Um exame mais atento revela que, por trás destas ambiguidades, oculta-se o princípio fundamental da T.R.G., qual seja, o princípio de equivalência. Com efeito, tal princípio estabelece localmente uma equivalência física completa entre um observador acelerado no vácuo, isto é, em ausência de campo gravitacional, e um observador fixo na presença de um campo gravitacional constante. Desta forma, admitindo que a energia gravitacional esta de algum modo vinculada à presença de campo gravitacional, verifica-se que o princípio de equivalência impõe à este último uma natureza dual que é incompatível com um significado físico não ambíguo, ou seja, independente do observador (e portanto da escolha do sistema de coordenadas) para a quantidade local de energia gravitacional.

Neste contexto, a proposta do presente trabalho de tese consiste, por um lado, em apresentar uma exposição concisa porém detalhada de alguns dos principais métodos elaborados para obtenção de leis de conservação na T.R.G. a qual, sem a pretensão de esgotar o tema, é suficientemente ampla para abranger um período que vai de 1916 até 1993. Por outro lado, através da aplicação de tais métodos na descrição de sistemas gravitacionais simples e de uma análise crítica de suas propriedades e características peculiares, pretende-se aferir o grau de ambiguidade de cada método no que diz respeito ao significado físico da energia gravitacional, seja em relação à sua distribuição local ou como propriedade física global do sistema.

Procurando seguir a ordem cronológica segundo a qual os referidos métodos surgiram na literatura, esta tese foi estruturada da seguinte maneira:

No capítulo II, contendo 5 seções, será tratado o assim chamado formalismo pseudotensorial [1, 2, 3, 5]. As duas primeiras seções apresentam uma discussão genérica das principais características deste formalismo, mostrando a sua consistência com as equações de Einstein e enfatizando as ambiguidades que provêm da dependência não trivial dos pseudotensores com relação à escolha do sistema de coordenadas. Numa abordagem mais quantitativa, as duas seções seguintes contêm a dedução das expressões para os pseudotensores em termos da métrica e suas derivadas, as quais serão usadas posteriormente no cálculo da energia em sistemas gravitacionais simples. O capítulo se encerra com uma seção dedicada ao método de Komar [6] que, partindo da relação entre leis de conservação e simetrias, mostrou ser possível definir na T.R.G. uma infinidades de quantidades ou cargas conservadas, cada uma associada a determinada simetria, com a vantagem de que tais cargas não dependem da escolha do sistema de coordenadas, embora muitas vezes não se possa atribuir à tais quantidades nenhum significado físico de interesse.

No capítulo III será examinado um formalismo alternativo para a gravitação [7, 8] no qual o espaço-tempo Einsteniano é desmembrado num espaço de fundo Ricci-plano arbitrariamente fixado que constitui, por definição, uma entidade puramente matemática, sem significado físico, e num campo tensorial de spin dois, definido neste espaço de fundo, ao qual se associa o campo gravitacional.

A primeira seção contem a dedução das equações de movimento do campo gravitacional tal como definido acima. A partir destas mesmas equações é definido o tensor momento-energia do campo gravitacional, o que permite uma representação tensorial para as leis de conservação nos sistemas gravitacionais.

Na seção seguinte, são deduzidas relações entre este tensor momento-energia e os pseudotensores, mostrando que neste novo formalismo os pseudotensores são verdadeiros tensores.

As ambiguidades que resultam da dependência de calibre do referido tensor momento-energia e dos pseudotensores são discutidas nas duas últimas seções, com ênfase na analogia que se verifica entre estas transformações de calibre e as transformações de coordenadas.

Finalmente, o capítulo IV abordará o formalismo quase local de Brown e York [9]. A primeira seção discute formalmente os aspectos gerais deste método, que consiste numa generalização da teoria clássica de Hamilton-Jacobi para o caso gravitacional, resultando na definição de uma densidade de energia quase local, isto é, definida sobre uma superfície bidimensional, cuja integral ao longo de toda a superfície corresponde à energia total contida no interior da mesma. A segunda e última seção contem algumas aplicações simples do referido método, mostrando que no limite newtoniano, pelo menos nos caso analisados, a energia de Brown e York está diretamente relacionada à energia potencial gravitacional clássica do sistema.

Capítulo 2

O FORMALISMO PSEUDOTENSORIAL

1 LEIS DE CONSERVAÇÃO NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Como foi mencionado na Introdução, nos sistemas gravitacionais, só são conservados o momento e a energia totais, isto é, da matéria junto com o seu campo gravitacional .

A fim de verificar a consistência de tal hipótese com as equações de Einstein, consideremos primeiramente que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ obedece às identidades de Bianchi

$$G^{\nu}_{\mu||\nu} \equiv 0. \tag{2.1}$$

o que resulta, tendo em vista as equações de Einstein, na lei de conservação covariante da matéria,

$$T^{\nu}_{\mu||\nu} = 0. \tag{2.2}$$

Explicitando os termos embutidos na derivada covariante e usando as relações Riemanianas entre as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e a métrica $g_{\mu\nu}$ dadas por

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \tag{2.3}$$

e também

$$\Gamma_{\alpha} \equiv \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} = (\sqrt{-g})_{,\alpha} / \sqrt{-g}. \tag{2.4}$$

a equação (2.2) pode ser escrita como:

$$(\sqrt{-g} T^{\nu}_{\mu})_{,\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}_{,\mu}. \tag{2.5}$$

Tal equação mostra que, nos sistemas gravitacionais descritos pela T.R.G., a energia e o momento da matéria não são conservados, já que a divergência do tensor momento energia da matéria não é nula. Uma vez que os sistemas gravitacionais são compostos por matéria e campo gravitacional, esta contribuição extra à variação do tensor momento-energia da matéria pode ser interpretada físicamente como o resultado da transferência de energia e momento entre o campo gravitacional e a matéria quando de sua mútua interação sugerindo, como já foi observado, que o campo gravitacional atua como fonte extra de energia e momento, somando-se à contribuição da matéria.

Por outra parte, a fim de assegurar a conservação do momento e da energia, cada variação no momento e na energia da matéria deve ser compensada exatamente por uma variação igual e contrária no momento e na energia do campo. Tal condição implica que o lado direito de (2.5) pode ser expresso sob a forma de uma divergência de acordo com

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g}\; T_{\alpha\beta}\; g^{\alpha\beta}_{,\mu} = (\sqrt{-g} t^{\nu}_{\mu})_{,\nu}, \tag{2.6}$$

para alguma função t^{ν}_{μ} da métrica e suas derivadas. Neste caso, a lei de conservação covariante (2.2) pode ser reduzida à uma lei de conservação ordinária, expressa na forma de uma típica equação de continuidade, onde esta contribuição do campo gravitacional aparece explicitamente. De fato, definindo

$$\mathcal{T}_{\mu}^{\nu} = \sqrt{-g}(T_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}), \qquad (2.7)$$

pode-se escrever, tendo em vista (2.5) , (2.6) e (2.7)

$$\mathcal{T}_{\mu,\nu}^{\nu} = 0. \qquad (2.8)$$

Assim, de acordo com as hipóteses anteriormente introduzidas acerca das leis de conservação na T.R.G., a quantidade $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$, assim como definida em (2.7) e (2.8) pode ser naturalmente interpretada como sendo o fluxo e a densidade total de momento e energia devido à presença da matéria e do campo gravitacional, este último contribuindo com o termo adicional t_{μ}^{ν}.

Para chegar ao resultado (2.6) a fim de que se possa formular as leis relativísticas de conservação de acordo com (2.7) e (2.8), consideremos novamente as equações de Einstein (1.1). Usando estas equações para eliminar $T_{\alpha\beta}$ no termo a esquerda em (2.6) resulta:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}_{,\mu} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}_{,\mu}. \qquad (2.9)$$

Por outro lado, como se sabe [2], as equações de Einstein podem ser obtidas do princípio de mínima ação variando-se a ação de Hilbert

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int L^{(H)} d^4x, \qquad (2.10)$$

com a lagrangeana de Hilbert $L^{(H)}$ dada por:

$$L^{(H)} = R\sqrt{-g}. \qquad (2.11)$$

De acordo com a sua definição, tal lagrangeana contem derivadas da métrica em segunda ordem. No entanto, uma vez que as equações de Einstein são equações diferenciais de segunda ordem, é suficiente que a lagrangeana cuja variação conduz a tais equações contenha as derivadas da métrica até primeira ordem.

De fato, é possível, por meio de operações algébricas simples, desmembrar a lagrangeana de Hilbert numa parte L contendo apenas a métrica e suas derivadas primeiras, dada por

$$L = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma_{\alpha}), \tag{2.12}$$

e num termo em forma de uma divergência total, irrelevante quando da variação da ação, de forma que L e $L^{(H)}$ fornecem as mesmas equações de movimento[2].

Assim,variando a ação com respeito ao tensor métrico, pode-se escrever

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa}\int \delta L^{(H)} d^4x = -\frac{1}{2\kappa}\int \delta L d^4x = -\frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} d^4x. \tag{2.13}$$

Segue então que

$$\frac{\delta L}{\delta g^{\alpha\beta}} \equiv \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}\right] = \sqrt{-g}G_{\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

Substituindo este resultado em (2.9) obtem-se:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}_{.\mu} = \frac{1}{2\kappa}g^{\alpha\beta}_{.\mu}\left[\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}\right)\right]. \tag{2.15}$$

O termo à direita na última equação ainda pode ser escrito como:

$$\frac{1}{2\kappa}\left[-\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(g^{\alpha\beta}_{.\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}\right) + \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}\frac{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}{\partial x^{\mu}}\right]. \tag{2.16}$$

Reconhecendo que a soma dos dois últimos termos nesta equação é simplesmente $\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}$ e usando a identidade

$$\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\delta^{\nu}_{\mu}L\right). \tag{2.17}$$

resulta, finalmente,

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}_{.\mu} = \frac{1}{2\kappa}\left[\delta^{\nu}_{\mu}L - g^{\alpha\beta}_{.\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{.\nu}}\right]_{.\nu}. \tag{2.18}$$

que é a forma divergente procurada.

Assim, comparando com (2.6), o termo gravitacional t_μ^ν pode ser definido de maneira tal que

$$\sqrt{-g}t_\mu^\nu = \frac{1}{2\kappa}\left[\delta_\mu^\nu L - g^{\alpha\beta}_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{,\nu}}\right]. \tag{2.19}$$

Vale acrescentar que o resultado (2.19), obtido exclusivamente por meio das equações de Einstein, constitui um resultado geral da teoria de campo, válido não apenas para o campo gravitacional. De fato, se $L(A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots}; A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots,\lambda})$ é a lagrangeana para o campo livre descrito pelos potenciais $A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots}$, então o fluxo e a densidade de energia e momento canonicamente conjugados à $A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots}$ pode ser definido como

$$\sqrt{-g}t_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu L - A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots,\mu}\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots,\nu}}. \tag{2.20}$$

Usando as equações de Euler-Lagrange para esta lagrangeana

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots,\nu}}\right) = \frac{\partial L}{\partial A^{\alpha\beta\ldots}_{\rho\sigma\ldots}}. \tag{2.21}$$

é possível mostrar que, na ausência de interação com outros campos, tal quantidade é conservada o que, de acordo com (2.7) e (2.8), permite interpretá-la como a contribuição do campo ao fluxo e à densidade de energia e momento [2]. É evidente que no caso do campo gravitacional, descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, (2.20) se reduz à forma (2.19).

Embora as hipóteses (2.7), (2.8), (2.19) assumidas para o fluxo e a densidade de energia e momento nos sistemas gravitacionais sejam consistentes com a T.R.G. e suficientes para o cálculo de $\mathcal{T}_\mu^\nu$, o campo gravitacional vai se destacar com respeito a outras interações existentes na natureza por uma série de ambiguidades relativas ao significado físico da quantidade local de energia e momento gravitacionais , que provém do comportamento não tensorial de $\mathcal{T}_\mu^\nu$. De fato, como se observa de (2.12) e (2.19), a parte gravitacional de $\mathcal{T}_\mu^\nu$ contem derivadas da métrica até primeira ordem de forma que, analogamente às conexões $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, sua lei de transformação quando da mudança do sistema de coordenadas contem termos não homogêneos. Desta forma, $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$ é referido na literatura como o pseudotensor momento-energia.[1] A próxima seção será dedicada à discussão de tais ambiguidades.

[1] Em alguns textos o termo pseudotensor se refere a quantidades cuja lei de transformação é homogênea e envolve o assim chamado jacobiano da transformação. Nesta tese tais quantidades, também conhecidas como tensores relativos, serão designadas por densidades tensoriais. Não obstante, no contexto das discussões desenvolvidas neste capítulo e no próximo o termo pseudotensor designa apenas quantidades não tensoriais no sentido estrito da palavra, ou seja, cuja lei de transformação contem termos não homogêneos

2 AMBIGUIDADES INERENTES AO FORMALISMO PSEUDOTENSORIAL

Como foi observado ao final da seção anterior, $\mathcal{T}_\mu^\nu$ é um pseudotensor, isto é, não se comporta como um tensor sob transformações gerais de coordenadas. Verifica-se, no entanto, que este comportamento não tensorial é consequencia das hipóteses (2.7) e (2.8) anteriormente assumidas para $\mathcal{T}_\mu^\nu$.

Com efeito, se $\mathcal{T}_\mu^\nu$ fosse uma densidade tensorial de peso 1, como sugere a definição (2.7), sua divergência $\mathcal{T}_{\mu,\nu}^\nu$, a qual envlove a derivada simples de $\mathcal{T}_\mu^\nu$, não seria, em geral, uma densidade tensorial. Consequentemente, tal divergência não seria necessariamente nula em todos os sistemas de coordenadas, o que é fisicamente absurdo, já que momento e energia não podem deixar de se conservar apenas devido a uma transformação de coordenadas, sem que haja algum processo físico envolvido. Assim, a hipótese de que $\mathcal{T}_\mu^\nu$ seja uma densidade tensorial é incompatível com a exigência de invariância das leis de consevação na T.R.G..

Por outro lado, como pode ser verificado diretamente de (2.19), o princípio de equivalência assegura que o termo gravitacional t_μ^ν pode sempre ser anulado num ponto de universo dado se definirmos em sua vizinhança um sistema de coordenadas inercial, o que demonstra o caráter pseudotensorial deste termo.

Desta forma, no contexto do formalismo aqui desenvolvido, a natureza pseudotensorial de $\mathcal{T}_\mu^\nu$, a qual provem do termo gravitacional, é uma condição necessária a fim de adequar $\mathcal{T}_\mu^\nu$ aos princípios e leis que fundamentam a T.R.G., como o princípio de equivalência e as leis relativísticas de conservação de energia e momento.

Deste comportamento pseudotensorial resulta, em particular que, nos sistemas gravitacionais, a quantidade local de energia contida num dado elemento de volume d^3x,isto é, o produto $\mathcal{T}_0^0 d^3x$, não é, em geral, um invariante escalar tridimensional, dependendo sensivelmente do sistema de coordenadas espacial adotado. Pode ocorrer, por exemplo, que mesmo no espaço plano, caracterizado por ausência de matéria e gravitação, obtenhase, num dado sistema de coordenadas, uma densidade não nula de energia. Por outro lado, como já foi observado, mesmo em presença do campo gravitacional, a densidade de energia gravitacional num ponto dado será nula num sistema inercial definido em torno deste ponto. Desta forma, verifica-se que, neste formalismo pseudotensorial, é impossível dar à quantidade local de energia nos sistemas gravitacionais um significado físico não ambíguo, ou seja, independente do sistema de coordenadas.

Não obstante, mesmo fixando o sistema de coordenadas, verifica-se trivialmente que as leis de conservação (2.8) não são suficientes para definir $\mathcal{T}_\mu^\nu$ de maneira unívoca. De fato, uma solução natural para $\mathcal{T}_\mu^\nu$ pode ser encontrada na forma

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = H_{\mu,\lambda}^{[\nu\lambda]}, \tag{2.22}$$

onde $H_\mu^{[\nu\lambda]}$ é uma certa função da métrica e suas derivadas, sendo anti-simétrica nos índices ν e λ. Esta última condição conduz ao resultado desejado.

$$\mathcal{T}_{\mu,\nu}^\nu = H_{\mu,\lambda,\nu}^{[\nu\lambda]} \equiv 0. \tag{2.23}$$

No entanto, para cada forma funcional dada de $\mathcal{T}_\mu^\nu$ pode-se verificar facilmente que $H_\mu^{[\lambda\nu]}$ não é a única função que satisfaz às condições (2.22) e (2.23). De fato, considerando uma outra função $\Psi_\mu^{\nu\lambda}$ da métrica e suas derivadas, não necessariamente anti-simétrica nos índices superiores, cuja divergência seja identicamente nula, ou seja, tal que

$$\Psi_{\mu,\lambda}^{\nu\lambda} \equiv 0, \tag{2.24}$$

e definindo uma nova função $U_\mu^{\nu\lambda}$ dada por

$$U_\mu^{\nu\lambda} = H_\mu^{[\nu\lambda]} + \Psi_\mu^{\nu\lambda}, \tag{2.25}$$

segue de (2.24) que

$$U_{\mu,\lambda}^{\nu\lambda} = H_{\mu,\lambda}^{[\nu\lambda]} + \Psi_{\mu,\lambda}^{\nu\lambda} = H_{\mu,\lambda}^{[\nu\lambda]}. \tag{2.26}$$

de forma que não só $U_\mu^{\nu\lambda}$ conduz ao mesmo pseudotensor que $H_\mu^{[\nu\lambda]}$ como ainda satisfaz às condições de conservação (2.23). embora não seja necessariamente anti-simétrico em ν e λ

$$U_{\mu\ .\lambda.\nu}^{\nu\lambda} = H_{\mu\ .\lambda.\nu}^{[\nu\lambda]} \equiv 0. \tag{2.27}$$

Observa-se também que. considerando a semelhança entre as equações (2.23) e (2.24) para $\mathcal{T}_\mu^\nu$ e $\Psi_\mu^{\nu\lambda}$. podemos expressar este último, por analogia com o resultado (2.22). sob a forma de uma divergência anti-simétrica de acordo com

$$\Psi_\mu^{\nu\lambda} = A_{\mu\ .\alpha}^{\nu[\lambda\alpha]}. \tag{2.28}$$

Por outra parte. se em (2.25) o termo $\Psi_\mu^{\nu\lambda}$ for anti-simétrico em ν e λ. então a função anti-simétrica $S_\mu^{[\nu\lambda]}$ definida por

$$S_\mu^{[\nu\lambda]} = H_\mu^{[\nu\lambda]} + \Psi_\mu^{[\nu\lambda]} \tag{2.29}$$

é também uma solução para $\mathcal{T}_\mu^\nu$. pois satisfaz a condição de conservação (2.23). Neste caso. contudo. o pseudotensor obtido a partir de $S_\mu^{[\nu\lambda]}$ terá. em geral. uma forma funcional diferente daquele obtido a partir de $H_\mu^{[\nu\lambda]}$. De fato. uma vez que agora. ao invés de (2.24). é a condição de anti-simetria de $\Psi_\mu^{\nu\lambda}$. ou seja. de que a sua dupla divergência $\Psi_{\mu\ .\nu.\lambda}^{\nu\lambda}$ seja identicamente nula a única condição requerida. resulta que

$$S_{\mu\ .\lambda}^{[\nu\lambda]} \neq H_{\mu\ .\lambda}^{[\nu\lambda]}. \tag{2.30}$$

Do exposto acima. conclui-se que $\mathcal{T}_\mu^\nu$ pode ser derivado de um "superpotencial" $U_\mu^{\nu\lambda}$. definido a menos de certas funções anti-simétricas da métrica e suas derivadas. de acordo com

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = U_{\mu\ .\lambda}^{\nu\lambda}. \tag{2.31}$$

Por outra parte. com excessão dos casos em que passamos de um superpotencial anti-simétrico a outro, esta liberdade na escolha do superpotencial não implica necessáriamente numa nova expressão para $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$.

A forma (2.31) de expressar $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$ revela uma outra característica essencial deste formalismo pseudotensorial. De fato, considerando a integral em todo o espaço da densidade de energia e momento $\mathcal{T}_{\mu}^{0}$, pode-se definir a quantidade total de energia e momento do sistema de acordo com:

$$P_{\mu} = \int \mathcal{T}_{\mu}^{0} d^3x. \tag{2.32}$$

Substituindo nesta definição a forma (2.31) para $\mathcal{T}_{\mu}^{\nu}$ e tendo em vista (2.26), resulta:

$$P_{\mu} = \int U_{\mu\ ,\lambda}^{0\lambda} d^3x = \int H_{\mu\ ,\lambda}^{[0\lambda]} d^3x = \int H_{\mu\ ,i}^{[oi]} d^3x. \tag{2.33}$$

Transformando a última integral pelo teorema de Gauss obtem-se

$$P_{\mu} = \int_{S} H_{\mu}^{0i} dS_i. \tag{2.34}$$

onde S é uma suprefície no infinito que abarca todo o espaço e dS_i é o seu elemento de área. Já que os superpotenciais são funções da métrica e suas derivadas, deduz-se de (2.34) que P_{μ} está definido a partir dos valores assintóticos da métrica e suas derivadas em S. Consequentemente, se estas divergirem no infinito, o mesmo ocorrerá à P_{μ} obtendo-se, desta forma, um resultado sem significado físico.

Assim, observa-se como regra geral que, pelo menos para soluções das equações de Einstein sem constante cosmológica, neste formalismo pseudotensorial, apenas métricas assintoticamente Minkowskianas conduzem à resultados fisicamente consistentes para o momento e a energia totais do sistema.

Segue também de (2.34) que, se dois sistemas de coordenadas diferem em toda parte, mas são igualmente Minkowskianos no infinito, então P_{μ} terá o mesmo valor em ambos os sistemas.

Desta forma, embora não dando à localização da energia nos sistemas gravitacionais um significado físico preciso, o formalismo pseudotensorial vai atribuir à energia total do sistema tal significado, tornando-a independente do sistema de coordenadas, com a restrição de que em tais sitemas a métrica seja assintoticamente Minkowskiana no infinito.

3 CÁLCULO DOS PSEUDOTENSORES

Como foi demonstrado na seção anterior, o pseudotensor $\mathcal{T}_\mu^\nu$ pode ser derivado de um superpotencial $U_\mu^{\nu\lambda}$, o qual está definido a menos de certas funções anti-simétricas como em (2.28) e (2.29). Aproveitando esta liberdade na escolha do superpotencial, autores como Einstein, Tolman, Landau, Lifshitz e Moller prescreveram diferentes expressões para $U_\mu^{\nu\lambda}$ em termos da métrica e suas derivadas. Esta seção se ocupará do cálculo de tais expressões. Serão também discutidas algumas aplicações elementares a fim de dar uma abordagem mais quantitativa aos resultados ambíguos que caracterizam este formalismo pseudotensorial, antecipados de forma genérica na seção precedente.

3.1 O PSEUDOTENSOR DE EINSTEIN/TOLMAN

De acordo com a definição (2.7), $\mathcal{T}_\mu^\nu = \sqrt{-g}(T_\mu^\nu + t_\mu^\nu)$.

Partindo desta definição e usando as equações de Einstein para eliminar T_μ^ν, bem como as relações (2.14) e (2.19), o pseudotensor $\mathcal{T}_\mu^\nu$ pode ser expresso totalmente em função da lagrangeana L para o campo livre definida em (2.12) e suas derivadas funcionais $\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}}$ e $\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{,\lambda}}$ de acordo com:

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = -\frac{1}{\kappa}\left[g^{\alpha\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\lambda}}\right) - \frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}}\right] + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{,\nu}} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu L\right]. \tag{2.35}$$

Tal equação ainda pode ser escrita como:

$$\mathcal{T}_\mu^\nu = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(g^{\alpha\nu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\lambda}}\right) + \frac{1}{\kappa}\left[g^{\alpha\nu}_{,\lambda}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\lambda}} + g^{\alpha\nu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}} + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu L - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{\nu}}\right]. \tag{2.36}$$

Partindo da expressão (2.12) para L e das relações (2.3) e (2.4), as derivadas funcionais de L podem ser calculadas, resultando [4]

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}_{,\lambda}} = \sqrt{-g}\left[-\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\alpha}\delta^{\lambda}_{\beta} + \Gamma_{\beta}\delta^{\lambda}_{\alpha}) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho} - g^{\rho\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma})\right] \tag{2.37}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\beta}} = \sqrt{-g}\left[-\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\lambda} + \Gamma_{\alpha}\Gamma_{\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\lambda}(g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho} - g^{\rho\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\rho\sigma})\right] - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L. \tag{2.38}$$

Substituindo estas expressões em (2.36) e usando novamente (2.3) e (2.4) verifica-se que o segundo termo à direita se anula identicamente, de forma que (2.36) se reduz a:

$$\mathcal{T}^{\nu}_{\mu} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(g^{\alpha\nu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\lambda}}\right). \tag{2.39}$$

Comparando esta equação com (2.31) o superpotencial $U^{\nu\lambda}_{\mu}$ pode ser definido de acordo com

$$U^{\nu\lambda}_{\mu} = -\frac{1}{\kappa}g^{\alpha\nu}\frac{\partial L}{\partial g^{\alpha\mu}_{,\lambda}}. \tag{2.40}$$

O pseudotensor derivado deste superpotencial é conhecido na literatura como "pseudotensor de Tolman" [5]. Substituindo em (2.40) a expressão (2.37) e usando mais uma vez (2.3) e (2.4), o superpotencial de Tolman pode ser escrito diretamente em função da métrica e suas derivadas de acordo com [3]

$$U^{\nu\lambda}_{\mu} = \frac{g_{\mu\alpha}}{2\kappa\sqrt{-g}}\left[(-g)(g^{\nu\alpha}g^{\lambda\beta} - g^{\lambda\alpha}g^{\nu\beta})\right]_{,\beta} + \frac{1}{2\kappa}\left[\sqrt{-g}(\delta^{\lambda}_{\mu}g^{\alpha\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu}g^{\lambda\nu})\right]_{,\alpha}. \tag{2.41}$$

Como se depreende de sua definição, o superpotencial de Tolman é composto por dois termos anti-simétricos, a saber

$$H^{[\nu\lambda]}_{\mu} = \frac{g_{\mu\alpha}}{2k\sqrt{-g}}\left[(-g)(g^{\alpha\nu}g^{\lambda\beta} - g^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta})\right]_{,\beta} \tag{2.42}$$

e

$$A^{\nu[\lambda\alpha]}_{\mu,\alpha} = \frac{1}{2\kappa}\left[\sqrt{-g}(\delta^{\lambda}_{\mu}g^{\alpha\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu}g^{\lambda\nu})\right]_{,\alpha}. \tag{2.43}$$

O termo $A^{\nu[\lambda\alpha]}_{\mu,\alpha}$, como se pode verificar, tem a forma de uma divergência anti-simétrica e corresponde, de acordo com (2.28), à ambiguidade na escolha do superpotencial, podendo ser descartado. Já o termo $H^{[\nu\lambda]}_{\mu}$ como também se verifica, é uma função anti-simétrica da métrica e sua derivadas e corresponde à solução nartural para $\mathcal{T}^{\nu}_{\mu}$ preconizada em (2.22). Assim, omitindo o segundo termo à direita em (2.41) define-se o pseudotensor de Einstein E^{ν}_{μ} de acordo com

$$E^{\nu}_{\mu} = H^{[\nu\lambda]}_{\mu,\lambda} = \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{g_{\mu\alpha}}{\sqrt{-g}}\left[(-g)(g^{\alpha\nu}g^{\lambda\beta} - g^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta})\right]_{,\beta}\right]_{,\lambda}. \tag{2.44}$$

Consequentemente, os pseudotensores de Einstein e Tolman são identicos, diferindo apenas na escolha do superpotencial.

Outra propriedade importante é que o pseudotensor de Einstein/Tolman é definido exclusivamente ne forma mista $\mathcal{T}^{\nu}_{\mu}$. Com efeito, se partíssemos da lei de conservação covariante da matéria em sua forma contravariante

$$T^{\mu\nu}_{\ \ ||\nu} = 0. \tag{2.45}$$

não seria possível obter as simplificações necessárias que reduziriam tal equação a uma lei de conservação ordinária do tipo

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = 0. \tag{2.46}$$

a não ser no caso particular em que o sistema de coordenadas é inercial, quando então a derivada covariante pode ser substituida pela derivada simples e (2.45) se reduz à lei clássica de conservação de momento e energia da matéria. Além disto, supondo que os índices são abaixados ou levantados com a ajuda da métrica $g^{\mu\nu}$, a forma contravariante do pseudotensor de Einstein/Tolman, definida naturalmente por

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}\mathcal{T}^{\nu}_{\rho}, \tag{2.47}$$

não é simétrica em μ e ν o que, como se sabe, é uma condição necessária a fim de que se possa estabelecer a lei de consevação do momento angular para os sistemas gravitacionais.

3.2 O PSEUDOTENSOR DE LANDAU/LIFSHITZ

Partindo da idéia referida anteriormente de que a forma contravariante (2.45) se reduz a uma lei de conservação ordinária num sistema inercial. Landau e Lifshitz [2] definiram um pseudotensor contravariante $L^{\nu\mu}$, simétrico em ν e μ, de forma a permitir o estabelecimento da lei de consevação do momento angular nos sistemas gravitacionais.

Seja, então, um ponto de universo dado, em torno do qual se define um sistema inercial, o que é assegurado pelo princípio de equivalência. Já que, por hipótese, neste sistema de coordenadas as conexões são nulas no ponto dado, a lei de conservação covariante da matéria (2.45) se reduz, neste ponto, a uma lei de conservação ordinária de acordo com

$$T^{\nu\mu}_{,\nu} = 0. \tag{2.48}$$

Assim, no ponto dado, $T^{\mu\nu}$ pode ser expresso na forma

$$T^{\mu\nu} = U^{\mu[\nu\lambda]}_{,\lambda}. \tag{2.49}$$

onde $U^{\mu[\nu\lambda]}$ é um superpotencial anti-simétrico em ν e λ satisfazendo, portanto, à condição de conservação (2.48) sendo ainda, por construção, simétrico em μ e ν. Por outro lado, as equações de Einstein no ponto dado fornecem

$$\kappa T^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}_{L}. \tag{2.50}$$

onde o subindice L significa que apenas a parte linear do tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ é considerada, já que neste sistema de coordenadas as conexões são nulas no ponto dado.

Exprimindo $G^{\mu\nu}_{L}$ diretamente em função da métrica e suas derivadas e realizando operações algébricas simples chega-se, após eliminar os termos proporcionais à derivada primeira da métrica, a qual, por hipótese, é nula no ponto dado, ao seguinte resultado:

$$G_L^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-g)}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})]_{,\alpha}\right]_{,\beta}. \qquad (2.51)$$

Segue, então, de (2.50) e (2.51):

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{1}{(-g)}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})]_{,\alpha}\right]_{,\beta}. \qquad (2.52)$$

Como a métrica é constante no ponto dado, (2.52) ainda pode ser escrita na forma:

$$(-g)T^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}\left[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})\right]_{,\alpha,\beta}. \qquad (2.53)$$

O termo à direita na última equação é, como se pode verificar, anti-simétrico em ν e β e simétrico em ν e μ. Logo, ele tem as propriedades de simetria desejadas e corresponde, de fato, à forma $U^{\mu[\nu\beta]}$ preconizada para $T^{\mu\nu}$ em (2.49).

Introduzindo agora um sistema arbitrário de coordenadas, a relação (2.53), a qual foi obtida supondo nulas as conexões, não será mais válida. Em outras palavras, num sistema arbitrario de coordenadas, não vale mais a igualdade entre os termos à direita e à esquerda em (2.53). Designando então por $(-g)t^{\mu\nu}$ a diferença entre eles neste caso geral, e definindo

$$L^{\mu\nu} = (-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}), \qquad (2.54)$$

obtem-se, finalmente, a prescrição de Landau/Lifshitz para o pseudotensor momento-energia:

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}[(-g)(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha})]_{,\alpha,\beta}. \qquad (2.55)$$

Observa-se que um passo essencial foi a passagem de (2.52) a (2.53), sem a qual a simetria requerida em μ e ν não seria obtida.

3.3 O PSEUDOTENSOR DE MØLLER

O objetivo de Moller [3] foi dar à quantidade local de energia nos sistemas gravitacionais um significado físico não ambíguo, ou seja, independente do sistema de coordenadas espacial adotado, que os pseudotensores anteriores não lograram obter. Para tanto, aproveitando a liberdade na escolha do superpotencial, propõe adicionar ao superpotencial de Einstein $H_{\mu}^{[\nu\lambda]}$ um termo anti-simétrico conveniente, como em (2.29), de forma que o fluxo e a densidade de energia M_0^{μ} derivados deste novo superpotencial se comporte como uma densidade tensorial de peso 1 sob transformações puramente espaciais de coordenadas do tipo:

$$\bar{x}^0 = x^0; \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^l) \tag{2.56}$$

Tal condição assegura, em particular, que a energia contida localmente num elemento de volume d^3x, ou seja, o produto $M_0^0 d^3x$ seja um invariante escalar sob as transformações (2.56) e, consequentemente, não dependa do sistema de coordenadas espacial adotado.

Assim, introduzindo o superpotencial anti-simétrico $S_{\mu}^{[\nu\beta]}$ dado por

$$S_{\mu}^{[\nu\beta]} = H_{\mu}^{[\nu\beta]} + \Psi_{\mu}^{[\nu\beta]}, \tag{2.57}$$

onde

$$\Psi_{\mu}^{[\nu\beta]} = H_{\mu}^{[\nu\beta]} + \delta_{\mu}^{\beta} H_{\rho}^{\rho\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} H_{\rho}^{\rho\beta}, \tag{2.58}$$

o superpotencial de Moller é definido, de acordo com (2.57) e (2.58), como

$$S_{\mu}^{[\nu\beta]} = 2H_{\mu}^{[\nu\beta]} + \delta_{\mu}^{\beta} H_{\rho}^{\rho\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} H_{\rho}^{\rho\beta}. \tag{2.59}$$

Moller impos ainda a condição

$$\int \Psi_{\mu\ ,\beta}^{0\beta} d^3x \equiv 0. \tag{2.60}$$

a fim de preservar os resultados obtidos com o pseudotensor de Einstein para a energia e o momento totais do sistema.

Substituindo em (2.59) as expressões (2.42) para o superpotencial de Einstein e realizando operações algebricas elementares, $S_{\mu}^{[\nu\beta]}$ pode ser expresso totalmente em função da métrica e suas derivadas de acordo com

$$S_{\mu}^{[\nu\beta]} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}(g_{\mu\rho,\sigma} - g_{\mu\sigma,\rho})g^{\nu\sigma}g^{\beta\rho}. \tag{2.61}$$

Desta forma, o pseudotensor de Moller é definido como

$$M_{\mu}^{\nu} = S_{\mu\ ,\beta}^{[\nu\beta]} = \frac{1}{\kappa}[\sqrt{-g}(g_{\mu\rho,\sigma} - g_{\mu\sigma,\rho})g^{\nu\sigma}g^{\beta\rho}]_{,\beta}. \tag{2.62}$$

Por ser derivado de um suterpotencial anti-simétrico, M_{μ}^{ν} é automaticamente conservado:

$$M_{\mu,\nu}^{\nu} = S_{\mu\ ,\beta,\nu}^{[\nu\beta]} \equiv 0. \tag{2.63}$$

Em particular, o fluxo e a densidade de energia são dados por:

$$M_{0}^{\nu} = S_{0\ ,\beta}^{[\nu\beta]} \tag{2.64}$$

onde

$$S_{0}^{[\nu\beta]} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}(g_{0\rho,\sigma} - g_{0\sigma,\rho})g^{\nu\sigma}g^{\beta\rho}. \tag{2.65}$$

Uma vez que $g_{0\mu}$ se transforma como um 4-vetor covariante sob (2.56), como se pode verificar, e já que suas derivadas comparecem em (2.65) de forma antissimetrisada, $S_{0}^{[\nu\beta]}$ constitui uma densidade tensorial anti-simétrica de peso 1 com respeito a estas mesmas transformações. Considerando que a divergência de uma densidade tensorial anti-simétrica de peso 1 é também uma densidade tensorial de mesmo peso, conclui-se que o fluxo e a densidade de energia M_{0}^{ν}, tal como definido em (2.64), constitui uma densidade tensorial sob transformações puramente espaciais de coordenadas, o que atende aos requisitos exigidos por Moller.

Outra característica notável é que, ao contrário dos outros pseudotensores, cuja parte gravitacional contem derivadas da métrica até primeira ordem, o correspondente termo na prescrição de Moller contem derivadas de segunda ordem na métrica, e portanto não se anula necessariamente num sistema de coordenadas inercial, a não ser que o espaço seja totalmente plano, quando então será nulo em qualquer sistema de coordenadas. Já para o cálculo da energia total do sistema na prescrição de Moller, sendo a densidade de energia M_0^0 uma densidade escalar sob transformações puramente espaciais, a restrição à métricas assintoticamente Minkowskianas não é mais necessária.

Embora tendo dado à energia local nos sistemas gravitacionais um significado físico menos ambíguo que os pseudotensores de Einstein/Tolman e Landau/Lifshitz, o pseudotensor de Moller não constitui uma densidade tensorial com respeito às transformações gerais de coordenadas, que podem incluir o tempo. Em particular, a densidade e o fluxo de momento M_i^ν não é uma densidade tensorial, mesmo sob as transformações (2.56).

3.4 APLICAÇÕES AO CÁLCULO DA DENSIDADE DE ENERGIA E DA ENERGIA TOTAL

Pode-se agora verificar diretamente, a partir das expressões (2.44), (2.55) e (2.62) propostas para o pseudotensor momento-energia, os resultados ambíguos que caracterizam o formalismo pseudotensorial, antecipados na seção precedente.

Consideremos primeiramente a solução de Schwarzschild na sua forma assintótica, expressa em coordenadas cartesianas isotrópicas de acordo com

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + (1 + \frac{2m}{r})(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (2.66)$$

onde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e m é um parâmetro que no limite clássico pode ser identificado com a massa gravitacional total experimentada por uma partícula teste a qual, sob a ação deste campo, realiza uma geodésica no infinito. Assim, se a equivalência entre massa e energia estabelecida pela teoria especial da relatividade é também válida na T.R.G., tal parâmetro corresponde também à energia total contida no campo de Schwarzschild. De fato, calculando a energia total contida em todo o espaço de Schwarzchild na prescrição de Einstein resulta, de acordo com (2.34):

$$P_0 = m. \tag{2.67}$$

Introduzindo agora as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), a solução de shwarzschild pode ser expressa, como usualmente, na forma:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})dt^2 + (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2(dr^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{2.68}$$

Calculando novamente a energia total na prescrição de Einstein neste novo sistema de coordenadas obtem-se agora um resultado infinito. Tal comportamento é consequencia do fato de que a métrica usada não é assintoticamente Minkowskiana, como foi observado ao final da seção anterior. Já na prescrição de Moller, neste novo sistema de coordenadas, obtem-se novamente o resultado (2.67), mostrando, como já foi mencionado, que nesta prescrição não é preciso restringir-se à métricas assintoticamente Minkowskianas.

Como um último exemplo, consideremos o cálculo efetuado por Virbhadra [12, 13, 14] que, utilizando o formalismo pseudotensorial, obteve as densidades de energia nas prescrições de Einstein,Tolman, Landau/Lifishitz e Moller para a solução de Reissner-Nordström em dois sistemas de coordenadas distintos, ambos assintoticamente Minkowskianos.

Assim, expressando inicialmente a solução de Reissner-Nordström no sistema de coordenadas (T, x, y, z) de acordo com

$$ds^2 = -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + (1 - B)(dT + dr)^2. \qquad (2.69)$$

onde $B = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ e $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 > r_0^2$, com r_0 representando o horizonte de eventos de Reissner-Nordström. Virbhadra encontra para a densidade de energia nas várias prescrições o resultado

$$E_0^0 = L^{00} = 1/2M_0^0 = \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \qquad (2.70)$$

Observa-se que, de acordo com tal resultado, quando $Q = 0$, o que corresponde à solução de Shwarzchild, onde a energia é de origem puramente gravitacional, a densidade de energia é identicamente nula em todo o espaço exterior ao horizonte de eventos, que é a região onde a métrica (2.69) está definida. Desta forma, ainda de acordo com (2.70), pode-se dizer que a energia gravitacional está totalmente confinada no espaço interior ao horizonte de eventos, não se espalhando para o espaço exterior a este horizonte, onde somente energia de origem eletromagnética pode ser encontrada.

Realizando agora uma simples transformação de coordenadas na variável temporal dada por

$$T = t + \int (B^{-1} - 1)dr. \qquad (2.71)$$

a solução de Reissner-Nordström pode ser expressa no novo sistema de coordenadas (t, x, y, z) como

$$ds^2 = -Bdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + (B^{-1} - 1)dr^2. \qquad (2.72)$$

Para esta métrica, as prescrições de Einstein e Moller fornecem o mesmo resultado (2.70), enquanto que o pseudotensor de Landau/Lifshitz conduz à expressão

$$L^{00} = \frac{-Q^4 + Q^2 r(r + 4m) - 4m^2 r^2}{8\pi r^4 [Q^2 + r(r - 2m)]^2}. \qquad (2.73)$$

Este exemplo mostra que a energia total na prescrição de Landau-Lifshitz pode depender do sistema de coordenadas mesmo quando tais sistemas são igualmente minkowskianos no infinito. Tal discrepância mostra, mais uma vez que, neste formalismo pseudotensorial, não é possível, em geral, atribuir um significado físico preciso à densidade de energia nos sistemas gravitacionais.

Embora autores importantes como Landau e Lifichitz [2], por exemplo, rejeitassem a possibilidade de se atribuir qualquer significado físico à localização da energia gravitacional, a partir da década de 50 retomou-se o interesse por uma formulação verdadeiramente tensorial das leis de conservação na T.R.G. já que tal formulação permite, em princípio, definir a quantidade local de energia nos sistemas gravitacionais como um invariante escalar, ou seja, como uma entidade física independente do sistema de coordenadas adotado. A próxima seção e os capítulos seguintes desta tese serão dedicados à discussão destes novos métodos tensoriais.

4 PSEUDOTENSORES E SIMETRIAS: A PRESCRIÇÃO DE KOMAR

Como observado ao final da seção anterior, os resultados ambíguos obtidos a partir do formalismo pseudotensorial para a densidade de energia e a energia total nos sistemas gravitacionais provocaram a necessidade de uma formulação alternativa, onde as leis de conservação relativísticas fossem expressas por equações verdadeiramente tensoriais.

É neste contexto que, seguindo os passos de Moller, Komar [6] abre novo campo de investigação ao considerar a estreita relação existente entre leis de conservação e propriedades de invariância das leis físicas sob certos grupos de transformações de simetria. De fato, pode-se mostrar, por exemplo, que as leis clássicas de conservação de momento e energia da matéria estão relacionadas às simetrias por translações e rotações rígidas infinitesimais no espaço-tempo de Minkowski.

Com relação às equações de Einstein, que descrevem os sistemas gravitacionais, são as transformações gerais de coordenadas que constituem o grupo de simetria da teoria. Pode-se então, da mesma forma, associar a cada transformação infinitesimal de coordenadas caracterizada pelo descriptor $\epsilon^\alpha(x)$ uma "carga", a qual é conservada, obtendo-se assim uma infinidade de leis de conservação que são generalizações das leis de conservação de energia e momento. Reciprocamente, a cada lei de conservação construida a partir das expressões de Einstein, Moller etc., é possível associar um descriptor $\epsilon^\alpha(x)$, que define uma certa transformação infinitesimal de coordenadas $x'^\alpha = x^\alpha + \epsilon^\alpha(x)$.

Assim, a proposta de Komar foi, tal como ocorre em Mecânica, associar as translações rígidas no tempo à lei da conservação da energia, segundo a prescrição de Moller. Com este objetivo Komar define a densidade e o fluxo de carga generalizada de acordo com [1, 6]:

$$D^\mu = 2\kappa[\epsilon^\alpha S_\alpha^{[\mu\nu]}]_{,\nu}, \tag{2.74}$$

onde $S_\alpha^{[\mu\nu]}$ é o superpotencial de Moller (2.61).

Pode-se ver claramente que D^μ é identicamente conservado, já que $S_\alpha^{[\mu\nu]}$ é anti-simétrico em μ e ν:

$$D^\mu_{,\mu} = 2\kappa[\epsilon^\alpha S_\alpha^{[\mu\nu]}]_{,\nu,\mu} \equiv 0. \tag{2.75}$$

Além disso, para translações rígidas no tempo, quando então $\epsilon^\alpha = \delta_0^\alpha$, (2.75) se reduz à lei da conservação da energia na prescrição de Moller,como exigido por Komar.

Em termos do tensor métrico, D^μ pode ser expresso, de acordo com (2.61) por

$$D^\mu = 2[\sqrt{-g}\epsilon^\alpha(g_{\alpha\sigma,\rho} - g_{\alpha\rho,\sigma})g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}]_{,\nu}. \tag{2.76}$$

Não obstante, nesta forma, D^μ não constitui um vetor, como é desejável, a fim de que a carga $dQ = D^\mu dS_\mu$ contida no elemento de hipersuperficie dS_μ seja um escalar.

Ocorre que, tal como os pseudotensores, D^μ não está definido de maneira unívoca pela lei de conservação (2.75). De fato definindo

$$U^\mu = D^\mu + \Psi^{[\mu\nu]}_{,\nu}. \tag{2.77}$$

com $\Psi^{[\mu\nu]}$ anti-simétrico em μ e ν obtem-se, tendo em vista a conservação de D^μ

$$U^\mu_{,\mu} = D^\mu_{,\mu} + \Psi^{[\mu\nu]}_{,\nu,\mu} = 0, \tag{2.78}$$

de modo que U^μ é igualmente conservado sendo, portanto, uma solução aceitável para o fluxo generalizado de energia.

Tal como Moller, Komar usou esta liberdade a fim de obter para o fluxo generalizado uma expressão vetorial, adicionando à D^μ o termo anti-simétrico

$$\Psi^{[\mu\nu]}_{,\nu} \equiv W^\mu = 2[\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}(\epsilon^\alpha_{,\rho}g_{\alpha\sigma} - \epsilon^\alpha_{,\sigma}g_{\alpha\rho})]_{,\nu} \tag{2.79}$$

e obtendo:

$$U^\mu = D^\mu + W^\mu = 2[\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}(\epsilon_{\sigma,\rho} - \epsilon_{\rho,\sigma})]_{,\nu}. \tag{2.80}$$

Por ser o termo entre parenteses na última equação a derivada anti-simetrisada de um vetor, U^μ pode ser expresso na forma covariante:

$$U^\mu = 2[\sqrt{-g}(\epsilon^{\nu\|\mu} - \epsilon^{\mu\|\nu})]_{,\nu} = 2\sqrt{-g}[\epsilon^{\nu\|\mu} - \epsilon^{\mu\|\nu}]_{\|\nu}. \tag{2.81}$$

Assim, define-se o fluxo generalizado de energia de Komar por:

$$E^\mu = 2[\epsilon^{\mu\|\nu} - \epsilon^{\nu\|\mu}]_{\|\nu}. \tag{2.82}$$

A anti-simetria do termo entre colchetes na última equação assegura a conservação covariante de E^μ:

$$E^\mu_{\|\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}E^\mu)_{,\mu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}[\sqrt{-g}(\epsilon^{\mu\|\nu} - \epsilon^{\nu\|\mu})]_{,\nu,\mu} \equiv 0. \tag{2.83}$$

Consideremos em seguida uma região R do espaço-tempo compreendida entre duas hipersuperfícies tipo espaço definidas pelas equações t = cte e t' = cte, correspondentes à dois instantes de tempo dados t e $t' > t$. Tal região admite ainda como fronteira lateral uma hipersuperfície ^3S que representa a evolução temporal entre os dois instantes dados do infinito espacial. Integrando a equação (2.83) na região R e usando o teorema de Gauss para transformar esta integral de volume sobre R numa integral de superfície estendida às fronteiras de R, tais como definidas acima, obtem-se:

$$0 = \int_R E^\mu_{\|\mu}\sqrt{-g}d^4x = \int_{t'} E^\mu dS_\mu - \int_t E^\mu dS_\mu. \tag{2.84}$$

A integral sobre a hipersuperfície ^3S pode ser omitida, já que no infinito espacial não há campo nem matéria, de forma que a densidade de energia E^μ é identicamente nula nesta hipersuperfície.

Assim, na sua forma integral, a lei de conservação covariante (2.83) permite definir a energia total de Komar $E(\epsilon)$, que, para sistemas fechados, é conservada no tempo, como se pode verificar de (2.84):

$$E(\epsilon) = \frac{1}{2\kappa}\int E^{\mu} dS_{\mu} = \frac{1}{2\kappa}\int E^{0} dv. \tag{2.85}$$

onde a última integral se extende à uma hipersuperfície tipo espaço cujo elemento de volume é dv.

Observa-se que, quando $\epsilon^{\alpha} = \delta_{0}^{\alpha}$, o termo W^{μ} definido em (2.79) se anula e E^{μ} se reduz às expressões de Moller para o fluxo e a densidade de energia. Consequentemente, num sistema de coordenadas onde $\epsilon^{\alpha} = \delta_{0}^{\alpha}$ a energia total generalizada $E(\delta_{0}^{\alpha})$ é equivalente à de Moller.

Como foi demonstrado na seção anterior, a energia total na prescrição de Moller é independente do sistema de coordenadas espacial adotado. Tal propriedade corresponde aqui ao fato de que se $\epsilon^{\alpha} = \delta_{0}^{\alpha}$ num dado sistema de coordenadas, suas componentes são invariantes sob transformações puramente espaciais de coordenadas, ou seja, que não envolvem o tempo.

Por outra parte, sendo E^{μ} uma divergência, sua integral estendida a um volume tridimensional dado pode ser transformada pelo teorema de Gauss a uma integral sobre a superfície que o abarca:

$$E(\epsilon) = \frac{1}{2\kappa}\int E^{\mu} dS_{\mu} = \frac{1}{\kappa}\int (\epsilon^{\mu\|\nu} - \epsilon^{\nu\|\mu}) dS_{\mu\nu}. \tag{2.86}$$

Vale notar que, se ϵ^{μ} for um vetor arbitrário, não estando necessáriamente associado a qualquer métrica, não se pode atribuir à $E(\epsilon)$, assim como definido em (2.86), nenhum significado físico, sendo tal relação, neste caso, meramente uma definição matemática. Desta forma, considerando que nos sistemas gravitacionais as grandezas físicas que obedecem à leis de conservação são determinadas a partir do tensor métrico, se ϵ^{μ} for um vetor de Killing, ou seja, se a métrica dada admite uma simetria, o conteudo físico de $E(\epsilon)$ pode ser resgatado uma vez que, neste caso, ϵ^{μ} e, consequentemente, $E(\epsilon)$ podem ser definidos a partir da métrica dada.

Além disto, quando ϵ^α é um vetor de Killing, pode-se mostrar que $E(\epsilon)$ não depende da superfície dada, contanto que esta englobe toda a matéria do sistema. De fato, usando a condição de Killing

$$\epsilon_{\mu||\nu} + \epsilon_{\nu||\mu} = 0. \tag{2.87}$$

e as propriedades de simetria dos índices do tensor de curvatura quando de sua permutação cíclica

$$R_{\gamma[\mu\alpha\beta]} \equiv 0. \tag{2.88}$$

a identidade

$$\epsilon_{\mu||\alpha||\beta} - \epsilon_{\mu||\beta||\alpha} = \epsilon^\gamma R_{\gamma\mu\alpha\beta} \tag{2.89}$$

se reduz a

$$\epsilon_{\beta||\mu||\alpha} = \epsilon^\gamma R_{\alpha\gamma\beta\mu}. \tag{2.90}$$

Contraindo em α e β e elevando o índice μ resulta:

$$\epsilon^{\nu||\mu}_{\ \ ||\nu} = \epsilon^\alpha R^\mu_\alpha. \tag{2.91}$$

Tendo em vista a expressão que define E^μ e usando novamente (2.87) obtem-se, finalmente:

$$E^\mu = 2(\epsilon^{\mu||\nu} - \epsilon^{\nu||\mu})_{||\nu} = -4\epsilon^{\nu||\mu}_{\ \ ||\nu} = -4\epsilon^\alpha R^\mu_\alpha. \tag{2.92}$$

Assim, se ϵ^α é um vetor de Killing, E^μ é identicamente nulo em pontos onde não há matéria já que nestes pontos, de acordo com as equações de Einstein, $R^\mu_\alpha = 0$.

Seja agora V um volume encerrado entre duas superfícies S e S' que envolvem toda a matéria. Logo, E^μ será nulo em todo V uma vez que, por construção, não há matéria neste volume. Desta forma:

$$\int_V E^\mu dS_\mu = 0. \tag{2.93}$$

Já que V é limitado por S e S', o teorema de Gauss fornece:

$$\int_S (\epsilon^{\mu||\nu} - \epsilon^{\nu||\mu}) dS_{\mu\nu} - \int_{S'} (\epsilon^{\mu||\nu} - \epsilon^{\nu||\mu}) dS_{\mu\nu} = 0. \tag{2.94}$$

Conclui-se então que a carga generalizada $E(\epsilon)$ é independente da superfície se esta abarca toda a matéria, como se queria demonstrar.

Devido à imediata analogia que se pode fazer com a lei de Gauss do eletromagnetismo, o resultado (2.94) pode ser considerado como uma generalização desta lei aplicada ao campo gravitacional, onde a quantidade $E(\epsilon)$ pode, pelo menos para o caso de ϵ^μ ser um vetor de Killing, ser naturalmente identificada como a carga total generalizada contida no interior da superfície dada.

Capítulo 3

O FORMALISMO TENSORIAL

1 O TENSOR MOMENTO-ENERGIA DE DESER, GRISHCHUK, PETROV E POPOVA

No método idealizado por Deser e posteriormente generalizado por Grishchuk, Petrov e Popova (D.G.P.P.) [7, 8], em lugar do espaço Einsteniano de métrica $g_{\mu\nu}$, em relação ao qual não se pode , em geral, estabelecer as leis de conservação relativísticas em forma tensorial, é introduzido um "espaço de fundo" puramente matemático, em relação ao qual tais leis de conservação podem ser expressas por equações tensoriais, sendo as quantidades conservadas verdadeiros tensores com respeito às transformações gerais de coordenadas neste espaço de fundo, o que permite definir o tensor momento-energia do campo gravitacional.

Tal espaço de fundo é ainda caracterizado pela métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ e pelas conexões $C^{\alpha}_{\mu\nu}$. As relações entre estas quantidades e suas correspondentes no espaço Einsteniano usual, a saber, a métrica $g_{\mu\nu}$ e as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, são definidas neste formalismo introduzindo dois novos campos $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ de forma que:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}(\gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}) \tag{3.1}$$

e

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Assim, neste formalismo, o espaço-tempo Einsteniano é concebido como uma combinação de um espaço de fundo e de um campo tensorial, definido neste espaço de fundo, ao qual é associado o campo gravitacional e cujos índices, por suposto, são abaixados ou levantados com a ajuda da métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$.

Observa-se que, uma vez que tal espaço de fundo é definido "a priori", sua geometria não é determinada pelo campo gravitacional, como ocorre na teoria Einsteniana, de forma que os campos $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ definidos acima podem ser considerados como variáveis independentes da métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$.

Por razões que ficarão claras mais adiante admite-se, por hipótese, que o espaço de fundo seja Ricci-plano, ou seja:

$$R^{\rho}_{\alpha\beta} = 0. \tag{3.3}$$

Vale notar também que, partindo da definição (3.1), a inversa da densidade da métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ só pode ser expressa em termos da forma covariante $h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}h^{\alpha\beta}$ por meio de uma série infinita de acordo com:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\{\gamma_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\rho}h^{\rho}_{\nu} - h_{\mu\rho}h^{\rho}_{\lambda}h^{\lambda}_{\nu} + \ldots\}. \tag{3.4}$$

Toda uma nova formulação da gravitação, equivalente à de Einstein, pode agora ser desenvolvida, escolhendo como variáveis dinâmicas os campos $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ os quais, de acordo com as definições (3.1) e (3.2), são campos tensoriais definidos no espaço de fundo. Desta forma, a ação de Hilbert para o campo gravitacional

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int R\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{3.5}$$

quando expressa em termos de $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ toma a forma covariante

$$S = -\frac{1}{2\kappa}\int L d^4x. \tag{3.6}$$

onde

$$L = \tilde{h}^{\mu\nu}(K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu}) + (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})(KK)_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Nesta última equação foram usadas as seguintes definições:

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}\ ,\ \tilde{h}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-\gamma}h^{\mu\nu}. \tag{3.8}$$

$$K_{\mu} \equiv K^{\alpha}_{\alpha\mu} \tag{3.9}$$

e

$$(KK)_{\mu\nu} \equiv K^{\alpha}_{\mu\nu}K_{\alpha} - K^{\alpha}_{\mu\beta}K^{\beta}_{\nu\alpha}. \tag{3.10}$$

sendo que (;) denota a derivada covariante com respeito ao espaço de fundo. Foram ainda omitidos da lagrangeana em (3.7) os termos:

$$L_0 = \sqrt{-\gamma}R^{o}\ ,\ L_1 = \tilde{h}^{\mu\nu}R^{o}_{\mu\nu}\ e\ L_2 = [\tilde{\gamma}^{\mu\nu}K^{\alpha}_{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\alpha\beta}K_{\beta}]_{,\alpha}. \tag{3.11}$$

os quais, como se verá a seguir, não contribuem para a variação da ação, que agora pode ser considerada como a ação para os campos $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$. Assim, a variação da ação (3.6) com respeito à estes campos, considerados como variáveis independentes, conduz às seguintes equações de movimento:

$$\frac{\delta L}{\delta\tilde{h}^{\mu\nu}} = K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu} = 0 \tag{3.12}$$

e

$$\frac{\delta L}{\delta K^{\alpha}_{\mu\nu}} = -\tilde{h}^{\mu\nu}_{;\alpha} + (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})K_{\alpha} - (\tilde{\gamma}^{\mu\rho} + \tilde{h}^{\mu\rho})K^{\nu}_{\rho\alpha} - (\tilde{\gamma}^{\nu\rho} + \tilde{h}^{\nu\rho})K^{\mu}_{\rho\alpha} = 0. \tag{3.13}$$

Quanto aos termos L_0, L_1 e L_2 definidos acima, pode-se ver que sua exclusão não altera as equações de movimento, uma vez que L_0 não depende de $\tilde{h}^{\mu\nu}$ ou $K^{\alpha}_{\mu\nu}$. $\delta L_1 = \delta \tilde{h}^{\mu\nu} R^{o}_{\mu\nu} = 0$, já que o espaço de fundo é Ricci-plano e $\delta L_2 = [\tilde{\gamma}^{\mu\nu}\delta K^{\alpha}_{\mu\nu} - \tilde{\gamma}^{\alpha\beta}\delta K_{\beta}]_{,\alpha}$, sendo uma divergência, gera um termo de superfície nulo uma vez que, por hipótese, $\delta K^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ nos limites de integração da ação.

A equivalência entre este formalismo e a teoria de Einstein da gravitação pode ser agora apreciada substituindo as definições (3.1) e (3.2) nas equações de campo (3.12) e (3.13). Enquanto que a primeira conduz, junto com (3.3), às equações de Einstein no vácuo

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{3.14}$$

a equação (3.13) reestabelece a hipótese Einsteniana de que o espaço-tempo é uma variedade Riemaniana de métrica $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu}_{\|\alpha} = 0. \tag{3.15}$$

Por outra parte, combinando-se as equações (3.1) e (3.13) chega-se à relação

$$K^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu;\nu} + g_{\beta\nu;\mu} - g_{\mu\nu;\beta}) \tag{3.16}$$

a qual, vale notar, é consistente com (3.2). Tal relação também mostra que $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ depende da inversa de $g^{\mu\nu}$ a qual, de acordo com (3.4), só pode ser expressa por meio de uma série infinita em $h_{\mu\nu}$. Assim, $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ e, consequentemente, o lado esquerdo de (3.12) constituem séries infinitas em $h_{\mu\nu}$, sendo esta última uma equação diferencial de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$.

A fim de obter para $h_{\mu\nu}$ uma equação diferencial de segunda ordem consistente com (3.12) na qual os termos lineares apareçam de forma explícita pode-se, primeiramente, abaixar os índices μ e ν em (3.13) com a ajuda da métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ resultando, após simplificar o fator $\sqrt{-\gamma}$,

$$[\mu\nu,\alpha] \equiv -h_{\mu\nu;\alpha} + (\gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})K_{\alpha} - \gamma_{\mu\rho}K^{\rho}_{\alpha\nu} - \gamma_{\nu\rho}K^{\rho}_{\alpha\mu} - h^{\rho}_{\mu}\gamma_{\sigma\nu}K^{\sigma}_{\rho\alpha} - h^{\rho}_{\nu}\gamma_{\sigma\mu}K^{\sigma}_{\rho\alpha} = 0. \tag{3.17}$$

A seguir, combinam-se estas equações de maneira conveniente, permutando ciclicamente os índices μ, ν, α de acordo com:

$$[\alpha\mu, \nu] + [\nu\alpha, \mu] - [\mu\nu, \alpha] = 0. \tag{3.18}$$

Após derivar esta equação covariantemente com respeito à x^β, contrair com α e usar (3.12) chega-se, finalmente, à seguinte expressão:

$$G^L_{\mu\nu} = -(KK)_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^\alpha_\alpha + Q^\alpha_{\mu\nu;\alpha}, \tag{3.19}$$

onde

$$\begin{aligned} 2Q^\alpha_{\mu\nu} &= -\gamma_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}K^\alpha_{\rho\sigma} + h_{\mu\nu}K^\alpha - h^{pha}_\mu K_\nu - h^\alpha_\nu K_\mu + \\ &+ h^\rho_\mu(K^\alpha_{\rho\nu} - K^\sigma_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\sigma\nu}) + h^\rho_\nu(K^\alpha_{\rho\mu} - K^\sigma_{\rho\lambda}\gamma^{\alpha\lambda}\gamma_{\sigma\mu}) \\ &+ h^{\alpha\rho}(K^\sigma_{\rho\mu}\gamma_{\sigma\nu} + K^\sigma_{\rho\nu}\gamma_{\sigma\mu}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

e $G^L_{\mu\nu}$, contendo apenas termos lineares em $h_{\mu\nu}$, é definido como

$$2G^L_{\mu\nu} = [\gamma_{\mu\nu}h^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}h_{\mu\nu} - \delta^\alpha_\mu h^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu h^\beta_\mu]_{;\alpha;\beta}. \tag{3.21}$$

Desta forma, a equação (3.19) é escrita de tal maneira que à esquerda, em $G^L_{\mu\nu}$, estão contidos todos os termos lineares, enquanto que o termo à direita, sendo quadrático em $h_{\mu\nu}$ e $K^\alpha_{\mu\nu}$, constitui, de acordo com (3.4) e (3.16), uma série infinita contendo tão somente termos não lineares em $h_{\mu\nu}$.

Sendo o campo gravitacional suficientemente débil, como na aproximação clássica newtoniana, os termos não lineares em (3.19) podem ser desprezados, o que resulta na teoria linear

$$G^L_{\mu\nu} = 0. \tag{3.22}$$

Esta equação pode ser formalmente reconhecida como a generalização covariante da equação para um campo de spin 2 não massivo e sem auto-interação. Consequentemente, na medida em que os termos à direita em (3.19) não são mais desprezíveis, o campo gravitacional pode ser tratado neste formalismo como um campo não massivo de spin 2 dotado de auto-interação.

Vale notar ainda que, sendo o termo à direita em (3.19) uma série infinita em $h_{\mu\nu}$, este formalismo corresponde a uma teoria infinitamente não linear na qual o campo gravitacional atua como fonte de si mesmo. Neste sentido, pode-se dizer que a energia gravitacional, assim como qualquer outra forma de energia, é fonte de gravitação sugerindo, desta forma, que o citado termo fonte em (3.19) corresponde ao tensor momento-energia do próprio campo gravitacional.

De fato, esta interpretção é plenamente justificada quando se calcula o tensor momento-energia como usualmente, variando-se a ação com respeito à métrica do espaço onde tal ação é definida. Visto que no formalismo de D.G.P.P. a ação é definida no espaço de fundo, o tensor momento-energia neste formalismo é obtido variando-se a ação (3.6) com respeito à métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$ de forma que

$$\kappa t_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta L}{\delta\gamma^{\mu\nu}}. \tag{3.23}$$

onde L é a lagrangeana (3.7). Está claro que uma variação em $\gamma_{\mu\nu}$ afetará as conexões $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ embutidas nas derivadas covariantes que aparecem em L, sendo a correspondente variação $\delta C^{\alpha}_{\mu\nu}$ dada por:

$$\delta C^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\delta\gamma_{\beta\mu;\nu} + \delta\gamma_{\beta\nu;\mu} - \delta\gamma_{\mu\nu;\beta}). \tag{3.24}$$

Já que nesta teoria a geometria do espaço de fundo não é determinada pelo campo gravitacional, pode-se tratar os campos $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$, que constituem as grandezas dinâmicas da teoria, como variáveis independentes da métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$. Assim, a variação da ação com respeito à métrica de fundo pode ser expressa na forma:

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa}\int \{\tilde{h}^{\mu\nu}(K^{\rho}_{\mu\nu}\delta C_{\rho} - 2K^{\alpha}_{\rho\nu}\delta C^{\rho}_{\mu\alpha} + K_{\rho}\delta C^{\rho}_{\mu\nu}) + \delta\tilde{\gamma}^{\mu\nu}(KK)_{\mu\nu} + \delta[\tilde{h}^{\mu\nu}(KK)_{\mu\nu}]\}d^4x. \tag{3.25}$$

O cálculo do primeiro termo entre parênteses sob o sinal de integral pode ser realizado diretamente, substituindo as expessões (3.24) e integrando por partes. Quanto ao segundo e terceiro termos, é mais conveniente considerar a variação com respeito à $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ e usar a relação:

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta}{\delta\gamma^{\mu\nu}} = \frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}^{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}}. \tag{3.26}$$

Deste cálculo resulta, precisamente

$$\kappa t_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta L}{\delta\gamma^{\mu\nu}} = -(KK)_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(KK)^{\alpha}_{\alpha} + Q^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha}. \tag{3.27}$$

em concordância com (3.19).

É interessante observar que o artfício proposto neste formalismo de D.G.P.P., a saber, a decomposição da conexão $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ e da densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$, o que permite considerar a variação com respeito à $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ como no cálculo precedente, introduz uma simplificação notável no sentido de que o termo de terceira ordem $\tilde{h}^{\mu\nu}(KK)_{\mu\nu}$ que aparece em (3.25) é independente de $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ e portanto, de acordo com (3.26) e (3.23), não contribui com nenhum termo adicional para o tensor momento-energia. Por suposto, se partíssemos da decomposição $g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$ tal simplificação não seria possível [7].

A teoria pode ser ampliada para incluir a contribuição da matéria adicionando-se o correspondente tensor momento-energia de acordo com:

$$G^{L}_{\mu\nu} = \kappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}). \tag{3.28}$$

Tal procedimento equivale a admitir o acoplamento mínimo entre a matéria e o campo gravitacional. De fato, a fim de que a teoria de D.G.P.P. seja consistente com a T.R.G., a dependência funcional da lagrangeana da matéria $L^{(m)}$ com respeito à métrica de fundo $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$, que na teoria de D.G.P.P. determina a contribuição da matéria ao fluxo e à densidade de energia e momento, deve ser igual à dependência de $L^{(m)}$ com respeito à $\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}$, que determina o tensor momento-energia da matéria na T.R.G. Pode-se mostrar que a condição que verifica tal equivalência é que a dependência funcional de $L^{(m)}$ com respeito à $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ e $\tilde{h}^{\mu\nu}$ seja da forma:

$$L^{(m)}(\tilde{\gamma}; \tilde{h}) = L^{(m)}(\tilde{\gamma} + \tilde{h}). \tag{3.29}$$

De fato, neste caso obtem-se:

$$\frac{\delta L^{(m)}}{\delta \tilde{\gamma}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L^{(m)}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \frac{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}}{\delta \tilde{\gamma}^{\mu\nu}} = \frac{\delta L^{(m)}}{\delta \tilde{g}^{\alpha\beta}} \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \frac{\delta L^{(m)}}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}}. \tag{3.30}$$

Assim, de acordo com a hipótese de acoplamento mínimo, a lagrangeana da matéria em presença do campo gravitacional é obtida da lagrangeana da matéria $L^{(m)}(\tilde{\gamma})$ na ausência do campo, simplesmente substituindo $\tilde{\gamma}^{\mu\nu}$ por $\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}$. Desta forma, a hipótese de acoplamento mínimo implica que a interação entre a matéria e o campo gravitacional é determinada exclusivamente a partir da métrica Einsteniana $g^{\mu\nu}$ e independe da maneira pela qual tal métrica é decomposta, sendo esta decomposição um artifício puramente matemático, sem significado físico. Em outras palavras, no que diz respeito à interação entre a matéria e o campo gravitacional, a métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ é inobservável. Observa-se ainda que neste caso admitiu-se como válido o princípio de equivalência, no sentido de que a ação do campo gravitacional sobre si próprio e sobre a matéria, independente de sua natureza, é sempre a mesma.

A partir do resultado geral (3.28) é possível estabelecer leis de conservação tensoriais definidas no espaço de fundo para o fluxo e a densidade totais de momento e energia da matéria junto com o campo gravitacional. De fato pode-se mostrar que o termo $G^{L}_{\mu\nu}$ obedece à identidade

$$G^{L;\nu}_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{3.31}$$

resultando, de acordo com (3.28), na lei tensorial de conservação

$$(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})^{;\nu} = 0. \tag{3.32}$$

2 OS PSEUDOSTENSORES NO FORMALISMO DE DESER, GRISHCHUK, PETROV E POPOVA

Será mostrado nesta seção como os pseudotensores de Landau/Lifshitz, Einstein e Moller, definidos originalmente em termos da métrica Einsteniana $g^{\mu\nu}$ e suas derivadas, podem ser relacionados com os campos tensoriais $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ definidos no formalismo desenvolvido na seção anterior. Ao admitir a possibilidade de tais relações e considerando que $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ são campos tensoriais no espaço de fundo, fica claro que, embora não sendo verdadeiros tensores com respeito ao espaço Einsteniano de métrica $g^{\mu\nu}$, os pseudotensores constituem grandezas tensoriais com respeito às transformações gerais de coordenadas definidas no espaço de fundo.

De fato, considerando os pseudotensores de Einstein e Landau/Lifshitz como funções da densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ pode-se escrever

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}[\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu}]_{,\alpha,\beta} \tag{3.33}$$

e

$$E^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2\kappa}[\tilde{g}_{\mu\lambda}(\tilde{g}^{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\lambda\beta}\tilde{g}^{\alpha\nu})_{,\alpha}]_{,\beta}, \tag{3.34}$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a inversa de $\tilde{g}^{\mu\nu}$.

Por outro lado, como se sabe, devido à presença de um termo não homogêneo na lei de transformação das conexões, é sempre possível estabelecer em cada ponto do espaço de fundo um sistema de coordenadas local inercial no qual as conexões de fundo $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ sejam identicamente nulas no ponto dado e onde a métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}$, no mesmo ponto, assume os valores Minkovskianos $\eta_{\mu\nu}$. Observa-se ainda que, neste sistema de coordenadas, sendo nulas as conexões, as derivadas covariantes de tensores que, por sua vez, são também tensores, se confundem com as derivadas simples.

Ocorre que, por construção, a densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial com respeito às transformações gerais de coordenadas definidas no espaço de fundo. Assim, do que foi dito acima, as expressões para os pseudotensores de Landau/Lifichitz e Einstein, tal como definidas em (3.33) e (3.34) podem, em cada ponto dado do espaço de fundo, ser interpretadas como tensores expressos num sistema de coordenadas local inercial definido neste ponto[1]. Desta forma, se agora introduzimos um sistema de coordenadas arbitrário onde, por suposto, as conexões $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ não são necessariamente nulas, as expressões de $L^{\mu\nu}$ e E^{ν}_{μ} neste novo sistema de coordenadas podem ser imediatamente generalizadas, bastando substituir as derivadas simples pelas derivadas covariantes com respeito às conexões de fundo $C^{\alpha}_{\mu\nu}$, resultando:

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}[\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\mu\beta}\tilde{g}^{\alpha\nu}]_{;\alpha;\beta} \tag{3.35}$$

e

$$E^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2\kappa}[\tilde{g}_{\mu\lambda}(\tilde{g}^{\lambda\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\lambda\beta}\tilde{g}^{\alpha\nu})_{;\alpha}]_{;\beta}. \tag{3.36}$$

Já a densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ e as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são decompostas, neste caso geral, de acordo com (3.1) e (3.2). Substituindo estas expessões em (3.35) e (3.36) é possível obter as relações desejadas, exprimindo $L^{\mu\nu}$ e E^{ν}_{μ} como funções tensoriais explícitas dos campos $h^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$. Deste modo, para o pseudotensor de Landau/Lifshitz obtem-se

$$L^{\mu\nu} = (-\gamma)\{\mathcal{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}[h^{\mu\nu}h^{\alpha\beta} - h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta}]_{;\alpha;\beta}\}. \tag{3.37}$$

onde

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}[\gamma^{\alpha\beta}h^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}h^{\alpha\beta} - \gamma^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} - \gamma^{\nu\alpha}h^{\mu\beta}]_{;\alpha;\beta}. \tag{3.38}$$

De acordo com (3.21) e (3.28),verifica-se que $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ é precisamente o tensor momento-energia total da matéria junto com o campo gravitacional definido no formalismo de D.G.P.P. Assim, com respeito ao espaço de fundo, $L^{\mu\nu}$ é uma densidade tensorial de peso 2.

Quanto ao pseudotensor de Einstein, alguma dificuldade pode aparecer devido à presença do termo $\tilde{g}_{\mu\nu}$, o qual só pode ser expresso em função de $h_{\mu\nu}$ por meio de uma série infinita como em (3.4). Tal dificuldade é contornada observando que, por meio de

[1] O mesmo argumento também é válido com respeito ao espaço Einsteniano. Neste caso, contudo, obteríamos como resultado o tensor nulo pois em tal sistema de coordenadas $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$

operações algébricas simples, o pseudotensor de Einstein pode ser expresso na forma

$$E^{\nu}_{\mu} = \frac{1}{2\kappa}\{\sqrt{-\gamma}A^{\nu\beta\alpha}_{\mu\ ;\alpha} - \tilde{g}_{\mu\rho;\alpha}(\tilde{g}^{\rho\nu}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\rho\beta}\tilde{g}^{\alpha\nu})\}_{;\beta}. \tag{3.39}$$

onde $A^{\nu\beta\alpha}_{\mu}$ é um tensor com respeito ao espaço de fundo, anti-simétrico em ν e β e definido de acordo com

$$A^{\nu\beta\alpha}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}(\gamma^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}) - \delta^{\beta}_{\mu}(\gamma^{\alpha\nu} + h^{\alpha\nu}). \tag{3.40}$$

Por outro lado, de acordo com a relação (3.16), pode-se escrever

$$\tilde{g}_{\mu\rho;\alpha} = K^{\lambda}_{\alpha\mu}\tilde{g}_{\lambda\rho} + K^{\lambda}_{\rho\alpha}\tilde{g}_{\lambda\mu} - K_{\alpha}\tilde{g}_{\mu\rho}. \tag{3.41}$$

Substituindo este último resultado em (3.39) obtem-se, finalmente,

$$E^{\nu}_{\mu} = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2\kappa}[A^{\nu\beta\alpha}_{\mu\ ;\alpha} - K^{\lambda}_{\alpha\mu}A^{\nu\beta\alpha}_{\lambda} + K_{\alpha}A^{\nu\beta\alpha}_{\mu}]_{;\beta}. \tag{3.42}$$

o que mostra que E^{ν}_{μ} é uma densidade tensorial de peso 1 com respeito ao espaço de fundo. Da mesma forma, a relação entre o pseudotensor de Einstein e o tensor momento-energia de D.G.P.P. é dada, de acordo com (3.38) e (3.42), por:

$$E^{\nu}_{\mu} = \sqrt{-\gamma}\{\mathcal{T}^{\nu}_{\mu} + \frac{1}{2\kappa}[K_{\alpha}A^{\nu\beta\alpha}_{\mu} - K^{\lambda}_{\mu\alpha}A^{\nu\beta\alpha}_{\lambda} - (\gamma^{\alpha\beta}h^{\nu}_{\mu} - \gamma^{\alpha\nu}h^{\beta}_{\mu})_{;\alpha}]_{;\beta}\}. \tag{3.43}$$

Com respeito ao pseudotensor de Moller, partindo da expressão

$$M^{\nu}_{\mu} = 2E^{\nu}_{\mu} + \delta^{\beta}_{\mu}H^{\rho\nu}_{\rho;\beta} - \delta^{\nu}_{\mu}H^{\rho\beta}_{\rho;\beta}. \tag{3.44}$$

que constitui a generalização covariante da relação entre os pseudotensores de Einstein e Moller obtem-se, para o superpotencial de Einstein contraido $H^{\rho\beta}_{\rho}$ o resultado:

$$H^{\rho\beta}_{\rho} = \frac{1}{2\kappa}[\tilde{g}^{\alpha\beta}_{;\alpha} + K_{\alpha}\tilde{g}^{\alpha\beta}]. \tag{3.45}$$

Substituindo este resultado em (3.44) e tendo em vista as relações (3.42) e (3.40) obtem-se, finalmente,

$$M_{\mu}^{\nu} = -\frac{\sqrt{-\gamma}}{\kappa}[K_{\alpha\mu}^{\cdot\lambda} A_{\lambda}^{\nu\beta\alpha}]_{;\beta}, \tag{3.46}$$

de forma que M_{μ}^{ν} é uma densidade tensorial de peso 1 no espaço de fundo. Verifica-se que neste caso, não é possível estabelecer uma relação entre o pseudotensor de Moller e o tensor momento-energia de D.G.P.P. [10]

Observa-se que os pseudotensores de Einstein, Landau/Lifshitz e Moller, bem como o tensor momento-energia de D.G.P.P. diferem entre si por termos anti-simétricos, de forma que todos eles obedecem à leis de conservação tensoriais do tipo

$$U^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \tag{3.47}$$

onde $U^{\mu\nu}$ é qualquer uma das expressões tensoriais para o fluxo e a densidade de energia e momento definidas anteriormente.

Conclui-se, desta forma que, embora tendo logrado exibir o fluxo e a densidade de energia e momento nos sistemas gravitacionais como um tensor, o que permite dar à quantidade local de energia e momento gravitacionais um significado físico independente do sistema de coordenadas, D.G.P.P. não introduzem nenhuma forma nova, ou mesmo única, de representar as leis de conservação relativísticas, já que neste formalismo os pseudotensores também são tensores com respeito ao espaço de fundo. De fato verifica-se que mesmo eliminando o problema da dependência do sistema de coordenadas, as ambiguidades relacionadas ao cálculo da quantidade local de energia e momento não desaparecem , uma vez que, na teoria de D.G.P.P. o campo gravitacional admite uma invariância de calibre, sendo tanto os pseudotensores quanto o tensor momento-energia de D.G.P.P. dependentes deste calibre. É o que será demonstrado nas próximas seções deste capítulo.

3 INVARIÂNCIA DE CALIBRE NA TEORIA DE DESER, GRICHSHUK,PETROV E POPOVA

Como foi mencionado anteriormente, outro aspecto de interesse teórico revelado no formalismo desenvolvido por D.G.P.P. é que, neste formalismo, o campo gravitacional pode ser tratado como um campo de spin 2 dotado de auto-interação definido num certo espaço de fundo Ricci-plano arbitrariamente fixado. Tais propriedades permitem uma abordagem alternativa à doutrina Einsteniana, segundo a qual o próprio campo gravitacional determina a geometria do espaço onde está definido. Na teoria de D.G.P.P., ao contrário, o espaço é definido "a priori", ou seja, de forma independente do campo, o que permite dar à gravitação um tratamento análogo ao que é dado em física teórica a outras interações existentes na natureza como o campo eletromagnético, por exemplo. Esta analogia torna-se ainda mais completa se considerarmos que na teoria de D.G.P.P. o campo gravitacional admite uma invariância de calibre, como será demonstrado a seguir.

Embora partindo de um ponto de vista não geométrico, a teoria de D.G.P.P. é, no que diz respeito à seus resultados, equivalente à de Einstein, como se mostrou na seção I, o que sugere a existência de uma estreita relação entre a invàriancia por transformação de coordenadas na teoria de Einstein e esta invariância de calibre verificada na teoria de D.G.P.P..

De fato, se $\xi^\alpha(x)$ é um campo vetorial arbitrário infinitesimal, o qual define uma transformação de coordenadas infinitesimal dada por

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x). \tag{3.48}$$

a densidade da métrica $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}$, sendo uma densidade tensorial, pode ser expressa nas novas coordenadas de acordo com

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x') = J\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta}(x). \tag{3.49}$$

onde J é o jacobiano da transformação. Retendo apenas termos lineares em ξ^α a inversa da transformação (3.48) pode ser definida como:

$$x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha(x'). \tag{3.50}$$

Consequentemente, mantendo a mesma ordem de grandeza em ξ^α, o jacobiano da transformação será dado por

$$J = 1 - \xi^\sigma_{,\sigma}. \tag{3.51}$$

Substituindo as duas últimas equações em (3.49) chega-se ao importante resultado

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \pounds^{(1)}_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x). \tag{3.52}$$

onde

$$\pounds^{(1)}_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = -\tilde{g}^{\mu\nu}_{,\lambda}\xi^\lambda + \tilde{g}^{\lambda\mu}\xi^\nu_{,\lambda} + \tilde{g}^{\lambda\nu}\xi^\mu_{,\lambda} - \tilde{g}^{\mu\nu}\xi^\sigma_{,\sigma}. \tag{3.53}$$

De acordo com sua definição, a quantidade $\pounds^{(1)}_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}$, a qual é designada na literatura como a derivada de Lie de $\tilde{g}^{\mu\nu}$ na direção de ξ^α, permite comparar a forma funcional da densidade da métrica transformada $\tilde{g}'^{\mu\nu}(x)$ com a forma funcional da densidade da métrica original $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$. Como se verá a seguir, é precisamente esta propriedade da derivada de Lie que vai permitir tratar as transformações de coordenadas como transformações de calibre do campo gravitacional.

Em continuação, a derivada de Lie em segunda ordem em ξ^α pode ser formalmente definida como

$$\pounds^{(2)}_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \pounds^{(1)}_\xi [\pounds^{(1)}_\xi \tilde{g}^{\mu\nu}]. \tag{3.54}$$

e analogamente para as derivadas de Lie de ordem superior. Se a derivada de Lie atua sobre um objeto geométrico que contem índices covariantes e contravariantes, a definição (3.53) pode ser generalizada, resultando em

$$\pounds^{(1)}_\xi \tilde{A}^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} = -\xi^\lambda \tilde{A}^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots,\lambda} + \xi^\alpha_{,\lambda}\tilde{A}^{\lambda\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} + \ldots - \xi^\lambda_{,\mu}\tilde{A}^{\alpha\beta\ldots}_{\lambda\nu\ldots} - \ldots - \xi^\sigma_{,\sigma}\tilde{A}^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}. \tag{3.55}$$

com expressões análogas para as derivadas de Lie de ordem superior.

Para obter as transformações de calibre que, na teoria de D.G.P.P. correspondem às transformações gerais de coordenadas, consideremos inicialmente a relação (3.52) entre a densidade da métrica antes e após a transformação (3.48). Decompondo a densidade da métrica não transformada $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ de acordo com (3.1), a densidade da métrica transformada pode ser expressa na forma:

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \pounds_{\xi}^{(1)}(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}). \tag{3.56}$$

Assim sendo, já que a derivada de Lie é um operador linear, a densidade da métrica transformada pode ser decomposta de duas maneiras distintas, porém equivalentes, a saber[2]

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \tilde{h}'^{\mu\nu}(x) \tag{3.57}$$

e

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{*\mu\nu}(x) + \tilde{h}^{*\mu\nu}(x). \tag{3.58}$$

onde, por comparação com (3.56) definem-se:

$$\tilde{h}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \pounds_{\xi}^{(1)}(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}). \tag{3.59}$$

$$\tilde{\gamma}^{*\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}^{\mu\nu}(x) + \pounds_{\xi}^{(1)}\tilde{\gamma}^{\mu\nu} \tag{3.60}$$

e

$$\tilde{h}^{*\mu\nu}(x) = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \pounds_{\xi}^{(1)}\tilde{h}^{\mu\nu}. \tag{3.61}$$

Na forma (3.57), como se pode observar, a transformação atua apenas sobre o campo $\tilde{h}^{\mu\nu}$, deixando invariante a métrica $\gamma^{\mu\nu}(x)$ do espaço de fundo. Neste contexto, de acordo

---

[2]Poderíamos ainda decompor a densidade da métrica na forma $\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{\gamma}'^{\mu\nu}(x) + \tilde{h}^{\mu\nu}(x)$ onde $\tilde{\gamma}'^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \pounds_{\xi}^{(1)}(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})$. No entanto tal decomposição pode ser descartada já que, neste caso, o espaço de fundo não seria Ricci-plano.

com D.G.P.P., a transformação (3.59) pode ser considerada como uma "verdadeira" transformação de calibre da teoria. No entanto, o mesmo não se pode afirmar de (3.61), já que na forma "híbrida" (3.58), a transformação atua tanto no campo quanto no espaço de fundo, alterando a métrica $\gamma^{\mu\nu}(x)$ mantendo-a, porém, Ricci-plana.

Da mesma forma, as conexões $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, as quais se transformam sob (3.48) de acordo com

$$\Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(x) + \pounds^{(1)}_{\xi}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(x), \tag{3.62}$$

permitem introduzir o calibre "verdadeiro"

$$K'^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = K^{\alpha}_{\mu\nu}(x) + \pounds^{(1)}_{\xi}(C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}), \tag{3.63}$$

onde foi usada a decomposição (3.2) e supôs-se que as conexões $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ do espaço de fundo não são afetadas pela transformação.

Considerando agora uma transformação de coordenadas arbitrária, isto é, não infinitesimal, a diferença ξ^{α} entre as coordenadas originais x e as coordenadas transformadas x' não é mais despresível, de forma que, neste caso geral, a relação (3.52) entre $\tilde{g}'^{\mu\nu}(x)$ e $\tilde{g}^{\mu\nu}(x)$ deve ser generalizada para incluir a contribuição das derivadas de Lie em todas as ordens em ξ^{α}, o que resulta na série infinita

$$\tilde{g}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{g}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_{\xi}\tilde{g}^{\mu\nu}, \tag{3.64}$$

com $\pounds^{(k)}_{\xi}$ representando a derivada de Lie de ordem k.

Da mesma forma, as transformações (3.59) e (3.63) podem ser generalizadas para

$$\tilde{h}'^{\mu\nu}(x) = \tilde{h}^{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_{\xi}(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}) \tag{3.65}$$

e

$$K'^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = K^{\alpha}_{\mu\nu}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \pounds^{(k)}_{\xi} (C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}). \tag{3.66}$$

Estas são, segundo D.G.P.P., as transformações de calibre do campo gravitacional que correspondem, na teoria de Einstein, às transformações gerais de coordenadas.

Verifiquemos agora se (3.65) e (3.66) constituem de fato transformações de simetria da teoria examinando inicialmente como se transforma a ação de D.G.P.P. sob estas transformações. Partindo da lagrangeana de D.G.P.P. na forma

$$L = \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})[K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu}]. \tag{3.67}$$

onde agora acrescentou-se o termo L^2 definido em (3.11) o qual, sendo uma divergência total não altera as equações de movimento, a sua variação δL quando da aplicação de uma transformação de calibre infinitesimal sobre os campos $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ é expressa por:

$$\delta L = (\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu})[\delta K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - \delta K_{\mu;\nu} + \delta(KK)_{\mu\nu}] + \delta\tilde{h}^{\mu\nu}[K^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} - K_{\mu;\nu} + (KK)_{\mu\nu}]. \tag{3.68}$$

Observa-se que nesta variação a métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ não é afetada pala transformação, já que esta é supostamente uma verdadeira transformação de calibre, isto é, atua apenas sobre os campos $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$.

Em primeira ordem em ξ^{α}, de acordo com (3.59) e (3.63), as variações em $\tilde{h}^{\mu\nu}$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}$ são dadas por

$$\delta\tilde{h}^{\mu\nu} = \pounds^{(1)}_{\xi}(\tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{h}^{\mu\nu}) \tag{3.69}$$

e

$$\delta K^{\alpha}_{\mu\nu} = \pounds^{(1)}_{\xi}(C^{\alpha}_{\mu\nu} + K^{\alpha}_{\mu\nu}). \tag{3.70}$$

Substituindo estes resultados em (3.68), pode-se mostrar, após um cálculo bastante laborioso que aqui será omitido, que δL se reduz à seguinte expressão:

$$\delta L = \text{div} - R^{o}_{\alpha\beta}\pounds^{(1)}_{\xi}(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta}). \qquad (3.71)$$

O termo designado como div na última equação, representa uma série de divergências totais envolvendo ξ^{α} e suas derivadas.

Para o caso mais geral correspondente às transformações (3.65) e (3.66), quando então ξ^{α} é um vetor arbitrário, isto é, não infinitesimal, a expressão (3.71) pode ser formalmente generalizada , acrescentando-se as contribuições da derivada de Lie em todas as ordens em ξ^{α} o que resulta em:

$$L(h', k') = L(h, K) - R^{o}_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_{\xi}(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta}) + \text{div}. \qquad (3.72)$$

Consequentemente, a variação da ação de D.G.P.P. quando da aplicação das transformações gerais (3.65) e (3.66) é dada por:

$$\delta S = -\frac{1}{2\kappa}\int \delta L d^4x = -\frac{1}{2\kappa}\int [\text{div} - R^{o}_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds(k)_{\xi}(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})]d^4x. \qquad (3.73)$$

Introduzindo a hipótese adicional de que ξ^{α} e suas derivadas se anulam nos limites de integração da ação, as divergências totais que aparecem sob o sinal de integral na última equação podem ser descartadas, pois geram termos de superfície nulos. Assim, com condições de contorno apropriadas, a variação δS será nula, ou seja, a ação será invariante sob as transformações (3.65) e (3.66) se o espaço de fundo for Ricci-plano, ou seja, se $R^{o}_{\alpha\beta} = 0$, o que tem sido admitido desde o início.

Desta forma, as transformações (3.65) e (3.66) pertencem ao grupo de covariância da teoria, ou seja, se $h^{\mu\nu}(x)$ e $K^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$ são soluções das equações de movimento, então $h'^{\mu\nu}(x)$ e $K'^{\alpha}_{\mu\nu}(x)$, tal como definidas em (3.65) e (3.66), também são soluções. Além disto, uma vez que, por construção, as transformações (3.65) e (3.66) não atuam sobre a métrica de fundo $\gamma^{\mu\nu}$ que, na teoria de D.G.P.P. pode ser considerada como grandeza absoluta, estas são também transformações de simetria, justificando a designação de "verdadeiro calibre" proposta por D.G.P.P.

É interessante observar que as transformações (3.65) e (3.66) constituem uma generalização das transformações de calibre do campo eletromagnético. Realmente, da mesma forma que o potencial vetor do campo eletromagnético $A_\mu(x)$, sendo um campo tensorial de primeira ordem, está definido a menos de um campo escalar $\Lambda(x)$, o potencial gravitacional $h^{\mu\nu}(x)$, sendo um campo tensorial de segunda ordem, está definido a menos de um campo vetorial $\xi^\alpha(x)$.

Naturalmente, a propriedade de covariância das transformações (3.65) e (3.66) poderia ter sido obtida diretamente, substituindo estas transformações nas equações de movimento. Neste caso verifica-se que tanto o termo $G^L_{\mu\nu}(h)$ quanto o tensor momento-energia $t_{\mu\nu}(h, K)$ dependem de calibre, mas esta dependência é de tal forma que as correspondentes variações $\delta G^L_{\mu\nu}$ e $\delta t_{\mu\nu}$ cancelam-se mutuamente, assegurando, desta forma, a covariância da teoria.

De fato, por um lado, considerando a linearidade de $G^L_{\mu\nu}$:

$$G^L_{\mu\nu}(h') = G^L_{\mu\nu}(h) + G^L_{\mu\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_\xi(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})\right]. \tag{3.74}$$

Assim, a variação em $G^L_{\mu\nu}$ quando mudamos o calibre do potencial gravitacional de $\tilde{h}^{\mu\nu}(x)$ para $\tilde{h}'^{\mu\nu}(x)$ de acordo com (3.65) é dada por

$$\delta G^L_{\mu\nu} = G^L_{\mu\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\pounds^{(k)}_\xi(\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta})\right]. \tag{3.75}$$

Nesta última equação o operador $G^L_{\mu\nu}$ atua sobre o termo entre colchetes da mesma forma que em (3.21) atua sobre $h^{\alpha\beta}$. Por outro lado, como foi demonstrado acima, as transformações (3.65) e (3.66) pertencem ao grupo de covariância da teoria, de modo que, por hipótese,

$$G^L_{\mu\nu}(h') = \kappa t_{\mu\nu}(h', K'). \tag{3.76}$$

4 AMBIGUIDADES NO CÁLCULO DO TENSOR MOMENTO-ENERGIA

Examinaremos nesta seção, por meio de um exemplo específico, as ambiguidades verificadas no cálculo do tensor momento-energia de D.G.P.P., em especial no cálculo da densidade de energia t^{00}, e que resultam da dependência de calibre do referido tensor, como discutido na seção anterior.

Com este objetivo, calculemos a densidade de energia na prescrição de D.G.P.P. para a métrica de Reissner-Nordström e comparemos os resultados aqui obtidos com aqueles obtidos por Virbhadra para a mesma métrica [12, 13, 14], já enunciados ao final do capítulo II.

A fim de aproveitar a simetria esférica que caracteriza esta solução, vamos introduzir as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) e exprimir os dois elementos de linha assintóticamente cartesianos usados por Virbhadra nestas coordenadas. Desta forma, o primeiro elemento de linha (2.69) quando escrito nas novas coordenadas (T, r, θ, ϕ) é expresso como

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2) + (1 - B)(dT + dr)^2, \tag{3.79}$$

onde $B = 1 - 2m/r + Q^2/r^2$.

Já o segundo elemento de linha (2.72), agora escrito nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) é dado por

$$ds^2 = -Bdt^2 + B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{3.80}$$

Observemos que, assim como antes, as métricas (3.79) e (3.80) estão relacionadas pela transformação

$$T = t + \int (B^{-1} - 1)dr. \tag{3.81}$$

Determinemos em seguida, para as duas métricas dadas acima, a densidade de energia t^{00}

Segue então de (3.74) que

$$t_{\mu\nu}(h', K') = t_{\mu\nu}(h, K) + \frac{1}{\kappa} G^L_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{L}^{(k)}_{\xi} (\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta}) \right]. \tag{3.77}$$

Consequentemente, sob as transformações dadas,

$$\delta t_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \delta G^L_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} G^L_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{L}^{(k)}_{\xi} (\tilde{\gamma}^{\alpha\beta} + \tilde{h}^{\alpha\beta}) \right]. \tag{3.78}$$

Assim, a dependência de calibre do tensor momento-energia surge como uma condição necessária para garantir a invariância das equações de movimento sob as transformações (3.65) e (3.66). Neste aspecto, o campo gravitacional difere do campo eletromagnético, cujo tensor momento-energia é independente de calibre.

na prescrição de D.G.P.P., aqui definida, de acordo com (3.38), como:

$$t^{00}(\gamma, h) = \frac{1}{2\kappa}[\gamma^{00}h^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}h^{00} - 2\gamma^{0\alpha}h^{0\beta}]_{;\alpha;\beta}. \tag{3.82}$$

Escolhendo inicialmente um espaço de fundo tal que, nas coordenadas (T, r, θ, ϕ) a métrica de fundo $\gamma_{\mu\nu}(x)$ corresponda ao elemento de linha plano em coordenadas esféricas, ou seja

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

o potencial gravitacional $h^{\mu\nu}(x)$ é então dado por

$$h^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) - \gamma^{\mu\nu}(x). \tag{3.84}$$

já que neste caso, $\sqrt{-\gamma} = \sqrt{-g} = r^2\mathrm{sen}\theta$, sendo $g^{\mu\nu}(x)$ a métrica não transformada (3.79). Assim, obtem-se para $h^{\mu\nu}(x)$ o resultado:

$$h^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} B-1 & 1-B & 0 & 0 \\ 1-B & B-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

Substituindo (3.83) e (3.85) em (3.82) obtem-se, finalmente

$$t^{00}(\gamma, h) = \frac{Q^2}{8\pi r^4}. \tag{3.86}$$

em conformidade com os resultados obtidos por Virbhadra usando o formalismo pseudotensorial para a mesma métrica em coordenadas assintoticamente cartesianas (T, x, y, z) [12, 13, 14].

Apliquemos agora a transformação (3.81). Do ponto de vista da teoria de Einstein, esta é uma transformação de coordenadas na qual uma mesma geometria, é representada em dois sistemas de coordenadas distintos, (T, r, θ, ϕ) e (t, r, θ, ϕ).

Todavia, de acordo com a discussão desenvolvida na última seção, na teoria de D.G.P.P. tal transformação pode ser considerada como uma transformação de calibre, ou seja, que atua exclusivamente no campo, sem afetar as variáveis que descrevem o espaço de fundo onde tal campo está definido.

Adotando esta última interpretação determinemos, a partir da métrica transformada (3.80), o potencial transformado $h'^{\mu\nu}(x)$ expresso como função das coordenadas originais (T, r, θ, ϕ), de acordo com a relação:

$$h'^{\mu\nu}(x) = g'^{\mu\nu}(x) - \gamma^{\mu\nu}(x). \tag{3.87}$$

Nesta última equação, $g'^{\mu\nu}(x)$ é a métrica transformada (3.80) expressa como função das coordenadas originais (T, r, θ, ϕ). Além disto, como $\sqrt{-\gamma} = \sqrt{-g'} = r^2 \mathrm{sen}\theta$, tais termos podem ser omitidos. Observa-se que a mesma métrica de fundo plana (3.83) é usada para determinar o novo potencial, em concordância com a forma (3.57), segundo a qual a transformação é de puro calibre, ou seja, não atua sobre o espaço de fundo.

Substituindo (3.80) e (3.83) em (3.87) segue que:

$$h'^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 - B^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.88}$$

Assim pode-se dizer que, na linguagem de D.G.P.P., a transformação de coordenadas (3.81) corresponde a uma mudança de calibre de $h^{\mu\nu}(x)$, como definido em (3.85) para $h'^{\mu\nu}(x)$ dado em (3.88), onde, por suposto, $h^{\mu\nu}(x)$ e $h'^{\mu\nu}(x)$ estão relacionados pela transformação de calibre (3.65).

Substituindo na fórmula (3.82) os valores dados em (3.83) e (3.88) resulta, para a densidade de energia neste novo calibre:

$$t^{00}(\gamma, h') = \frac{Q^2r^2 - 4m^2r^2 + 6mQ^2r - 3Q^4}{8\pi(r^2 - 2mr + Q^2)^3}. \tag{3.89}$$

Desta forma, tal como o pseudotensor de Landau/Lifshitz, o tensor momento-energia de D.G.P.P. é fortemente afetado pela transformação, mudando completamente a sua forma funcional. No entanto, enquanto que a discrepância verificada por Virbhadra no pseudotensor de Landau/Lifshitz pode ser atribuida ao seu comportamento não tensorial sob transformações gerais de coordenadas, esta mesma discrepância, à luz das idéias introduzidas por D.G.P.P., está relacionada à dependência de calibre do referido pseudotensor, como mostra a relação (3.37) anteriormente deduzida entre o pseudotensor de Landau/Lifshitz e o tensor momento-energia de D.G.P.P.. Como estamos interessados apenas na densidade de energia, tal relação é agora expressa na forma [3]:

$$L^{00} = t^{00} + \frac{1}{2\kappa}[h^{00}h^{\alpha\beta} - h^{0\alpha}h^{0\beta}]_{;\alpha;\beta}. \tag{3.90}$$

Com efeito, usando (3.85) para o potencial não transformado $h^{\mu\nu}(x)$ e substituindo em (3.90), verifica-se que o segundo termo à direita anula-se identicamente, resultando

$$L^{00}(h) = t^{00}(h) = \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \tag{3.91}$$

como havíamos obtido anteriormente.

Se agora aplicamos a transformação, alterando o calibre de $h^{\mu\nu}(x)$ para $h'^{\mu\nu}(x)$ dado

[3]Os termos relativos ao determinante da métrica que aparecem em (3.37) e na definição do pseudotensor de Landau/Lifshitz podem ser cancelados, uma vez que $g = g' = \gamma = -r^4\mathrm{sen}^2\theta$.

por (3.88), resulta, para o segundo termo à direita em (3.90):

$$[h'^{00}h'^{\alpha\beta} - h'^{0\alpha}h'^{0\beta}]_{;\alpha;\beta} = \frac{-Q^2 + 6mQ^4 r + r^2(3Q^4 - 12m^2Q^2) + r^3(8m^3 - 4mQ^2)}{8\pi r^2(r - 2mr + Q^2)^3}. \quad (3.92)$$

Assim, substituindo (3.89) e (3.92), correspondentes a este novo calibre, em (3.90) obtem-se, finalmente:

$$L^{00}(h') = \frac{-Q^6 + 6mQ^4 r - 12m^2Q^2r^2 + r^3(8m^3 + 2mQ^2) + r^4(Q^2 - 4m^2)}{8\pi r^2(r^2 - 2mr + Q^2)^3}. \quad (3.93)$$

Realizando nesta última equação operações algébricas elementares, é possível reduzi-la à forma (2.73), que é a expressão encontrada por Virbhadra para a densidade de energia na prescrição de Landau/Lifshitz quando da aplicação da transformação de coordenadas (3.81) [14].

Conclui-se então que, sob a ação da transformação de calibre $h^{\mu\nu}(x) \to h'^{\mu\nu}(x)$, onde $h^{\mu\nu}(x)$ e $h'^{\mu\nu}(x)$ são dados por (3.85) e (3.88), o pseudotensor de Landau/Lifshitz se transforma exatamente como se tivesse sofrido a ação da transformação de coordenadas (3.81), revelando, desta forma, uma equivalência completa entre as transformações de coordenadas e estas transformações de puro calibre definidas na teoria de D.G.P.P..

A título de ilustração, recalculemos a densidade de energia na prescrição de D.G.P.P. para a métrica de Reissner-Nordström na forma transformada (3.80) permitindo agora que a transformação dada atue também no espaço de fundo, isto é, escolhendo como métrica de fundo a métrica transformada $\gamma^{*\mu\nu}$ dada por

$$\gamma^*_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\gamma_{\alpha\beta}(x), \quad (3.94)$$

onde x e x' representam, respectivamente, as coordenadas originais (T, r, θ, ϕ) e as coordenadas transformadas (t, r, θ, ϕ), obtidas das anteriores pela transformação (3.81) , sendo $\gamma_{\mu\nu}$ a métrica de fundo original dada em (3.83).

Segue então de (3.94) que:

$$\gamma^{*}_{\mu\nu}(x') = \begin{pmatrix} -1 & 1 - B^{-1} & 0 & 0 \\ 1 - B^{-1} & 1 - (B^{-1} - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \mathrm{sen}^2\theta \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

Expressando esta métrica de fundo transformada e a métrica de Reissner-Nordström transformada (3.80) como funções das coordenadas originais x , o novo potencial $h^{*\mu\nu}(x)$ pode ser agora definido como:

$$h^{*\mu\nu}(x) = g'^{\mu\nu}(x) - \gamma^{*\mu\nu}(x). \tag{3.96}$$

Nesta versão, a transformação corresponde à forma híbrida preconizada em (3.58) onde, por suposto, a relação entre $h^{\mu\nu}$ e $h^{*\mu\nu}$ é dada por (3.61), quando generaliza-se esta expressão para todas as ordens em ξ^{α}.

Substituindo (3.80) e (3.95) em (3.96) obtem-se:

$$h^{*\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 1 - B^{-1} - (B^{-1} - 1)^2 & B^{-1} - 1 & 0 & 0 \\ B^{-1} - 1 & B - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.97}$$

Levando estes valores em (3.82) resulta:

$$t^{00}(\gamma^{*}, h^{*}) = \frac{2Q^4 + Q^2 r^2 - 4mQ^2 r}{8\pi r^2 (r^2 - 2mr + Q^2)^2}. \tag{3.98}$$

Por suposto, a variação aqui verificada na densidade de energia t^{00} com respeito ao resultado original (3.86) corresponde à componente (00) da derivada de Lie do tensor momento-energia $t^{\mu\nu}$. Assim, pode-se entender tal variação como o resultado da transformação do tensor momento-energia $t^{\mu\nu}$ gerada exclusivamente por uma mudança no sistema de coordenadas que descreve o espaço de fundo, no caso, a transformação (3.81), de modo que

$$t'^{\mu\nu}(\gamma^*, h^*) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} t^{\alpha\beta}(\gamma, h). \tag{3.99}$$

Observa-se, no entanto, que o resultado (3.89), que provém de uma transformação de puro calibre, não pode ser explicado desta forma.

Com base nos resultados aqui obtidos, pode-se deduzir que as ambiguidades verificadas no formalismo pseudotensorial com respeito à quantidade local de energia nos sistemas gravitacionais não desaparecem neste formalismo tensorial de D.G.P.P.. No entanto, enquanto que no formalismo pseudotensorial tais ambiguidades estão relacionadas à dependência com respeito ao sistema de coordenadas da quantidade local de energia, no formalismo de D.G.P.P. estas ambiguidades provêm da dependência com respeito às transformações de puro calibre do tensor momento-energia.

Capítulo 4

O FORMALISMO DE BROWN E YORK

1 A ENERGIA QUASE LOCAL DE BROWN E YORK

Em recente formalismo introduzido por Brown e York [9] é possível definir para os sistemas gravitacionais uma quantidade quase local de energia de maneira análoga à definição de energia mecânica na teoria de Hamilton-Jacobi.

Com efeito, ao invés de fixar as condições de contorno, isto é, as coordenadas e o tempo nos limites de integração da ação e variar as trajetórias, elegendo como solução aquela que extremiza a ação, como é de uso comum no cálculo variacional, na teoria de Hamilton-Jacobi as trajetórias são fixadas pelas equações de movimento, isto é, admite-se que o sistema evolua no tempo realizando tão somente trajetórias fisicamente possíveis as quais, por suposto, são soluções destas equações de movimento, enquanto que as condições de contorno são variadas, o que resulta numa variação da própria ação. Assim, na teoria de Hamilton-Jacobi, a ação S_{cl}, para trajetórias clássicas fisicamentes possíveis pode ser considerada como uma função ordinária das condições de contorno, ou seja, das coordenadas e do tempo nos instantes inicial e final.

As taxas de variação desta função, ou seja, da ação S_{cl}, com relação às coordenadas e ao tempo (iniciais ou finais) podem ser obtidas expressando-se a variação δS_{cl} da ação para trajetórias reais do sistema em termos das variações arbitrárias δq^i e δt aplicadas às coordenadas e ao tempo nos instantes inicial ou final.

Para estabelecer tal relação, consideremos a ação S associada ao sistema mecânico dado na sua forma canônica de acordo com

$$S = \int_{t'}^{t''} [p_i \frac{dq^i}{dt} - H(p_i, q^i, t)]dt. \tag{4.1}$$

onde $H(q^i, p_i, t)$ é a Hamiltoniana do sistema, p_i é o momento canonicamente conjugado à coordenada q^i e a integral é calculada entre dois instantes dados t' e $t'' > t'$ correspondentes às configurações inicial e final do sistema. Introduzindo agora um novo parâmetro λ para descrever a evolução do sistema tal que $t = t(\lambda)$, a ação (4.1) pode ser reparametrizada na forma

$$S = \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda [p_i \dot{q}^i - \dot{t} H(q^i, p_i, t)] \tag{4.2}$$

onde, por definição, $t' = t(\lambda')$, $t'' = t(\lambda'')$ e o ponto significa a derivada com respeito à λ.

Efetuando variações arbitrárias nas coordenadas e no tempo e integrando por partes, a variação δS da ação nesta forma parametrisada pode ser expressa como:

$$\delta S = (\text{termos associados as eq. de movimento}) + p_i \delta q^i |_{\lambda'}^{\lambda''} - H \delta t |_{\lambda'}^{\lambda''}. \tag{4.3}$$

Assim, se as coordenadas e o tempo são fixados nos instantes inicial e final, ou seja, se $\delta q^i(\lambda') = \delta q^i(\lambda'') = 0$ e, analogamente, $\delta t(\lambda') = \delta t(\lambda'') = 0$, a condição de extremo $\delta S = 0$ fornece as equações de movimento cujas soluções $\{q^i(\lambda), t(\lambda)\}$ correspondem às trajetórias clássicas fisicamente possíveis do sistema. Por outro lado, considerando apenas tais soluções clássicas fisicamente possíveis, os termos relativos às equações de movimento se anulam e (4.3) se reduz a:

$$\delta S_{cl} = p_{i_{cl}} \delta q^i |_{\lambda'}^{\lambda''} - H_{cl} \delta t |_{\lambda'}^{\lambda''}. \tag{4.4}$$

Finalmente, fixando, por exemplo, as condições iniciais, ou seja, pondo $\delta q^i(\lambda') = \delta t(\lambda') = 0$ e mantendo arbitrárias as variações das coordenadas e do tempo no instante final resulta:

$$\delta S_{cl} = p_{i_{cl}} \delta q^i - H_{cl} \delta t. \tag{4.5}$$

onde, para simplificar a notação, foi omitido o símbolo λ''.

Este último resultado permite exprimir as taxas de variação da ação S_{cl} com respeito às coordenadas e ao tempo de acordo com as chamadas equações de Hamilton-Jacobi na forma

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}|_{t''} = -H_{cl}(q, p) \tag{4.6}$$

e

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial q^i}|_{t''} = p_{i\,cl}. \tag{4.7}$$

Assim, na teoria de Hamilton-Jacobi, a energia do sistema no estado final (ou inicial), representada aqui pelo Hamiltoniano H, é definida como o negativo da taxa de variação da ação com respeito ao instante final (ou inicial), supondo que o sistema evolua segundo as equações de movimento e que as coordenadas são fixadas nos limites de integração da ação, ou seja, nos instantes inicial e final:

$$E = H = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}|_{t''}. \tag{4.8}$$

Da mesma forma, generalizando as idéias de Hamilton-Jacobi para os sistemas gravitacionais e usando o formalismo $3+1$ da gravitação, no qual se admite que o espaço-tempo é folheado por hipersuperfícies t = cte, onde t é um parâmetro temporal escolhido de forma arbitrária, na prescrição de Brown e York a quantidade quase local de energia contida numa região Σ de fronteira S selecionada numa dada hipersuperfície t = cte é definida a partir do negativo da derivada funcional da ação que descreve tal sistema gravitacional em relação à chamada função lapso N, que mede a taxa de variação, com respeito ao parametro t, do tempo próprio medido pelo observador u^μ perpendicular à hipersuperfície t = cte em S. Admite-se, como na teoria de Hamilton-Jacobi, que as hipersuperfícies t = cte evoluam segundo as equações de movimento que são, neste caso, as equações de Einstein.

Para chegar a este resultado seja, como antes, uma região Σ de fronteira S e consideremos sua evolução no tempo entre dois instantes t' e $t'' > t'$. Tal conjunto de hipersuperfícies Σ limitadas por S, com t variando entre t' e t'' formam, no espaço-tempo, um 4-volume M, o qual é folheado por tais hipersuperfícies, tendo como fronteiras uma hipersuperfície lateral ${}^3S$, que descreve a evolução de S entre t' e t'' , e as hipersuperfícies Σ' e Σ'' definidas nas hipersuperfícies t' = cte e t'' = cte e limitadas pelas interseções destas hipersuperfícies com a hipersuperfície ${}^3S$.

Considerando M como a região do espaço-tempo sobre a qual se define a ação para o sistema gravitacional dado, estabelacer as condições de contorno nos limites de integração da ação significa agora estabelacer as geometrias que caracterizam as hipersuperfícies Σ', Σ'' e ${}^3S$, que constituem as fronteiras de M, tanto do ponto de vista intrínseco como extrínseco, ou seja, é necessário especificar não só as trimétricas h'_{ij}, h''_{ij} e γ_{ij} que definem as propriedades geométricas intrínsecas às hipersuperfícies t' = cte, t'' = cte e ${}^3S$, mas também a maneira pela qual tais hipersuperfícies foram curvadas em relação ao espaço-tempo quadrimensional que as envolve.

Tal curvatura extrínseca, por sua vez, pode ser naturalmente determinada pela variação do unitário normal à hipersuperfície, quando nos deslocamos ao longo de seus vetores tangentes. Assim,define-se a curvatura extrínseca de uma hipersuperfície como a projeção na hipersuperfície da taxa de variação covariante, ao longo da hipersuperfície, de seu vetor unitário normal. Designando por u^{μ} e n^{μ}, respectivamente, os unitários normais às hipersuperfícies t = cte e ${}^3S$, as correspondentes curvaturas extrínsecas são então dadas por

$$K_{\mu\nu} = -h^{\alpha}_{\mu} u_{\nu||\alpha} \tag{4.9}$$

e

$$\Theta_{\mu\nu} = -\gamma_\mu^\alpha n_{\nu||\alpha}, \tag{4.10}$$

onde h_μ^α e γ_μ^α são os projetores sobre as hipersuperfícies $t =$ cte e ${}^3S$, definidos por:

$$h_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha + u^\alpha u_\mu \tag{4.11}$$

e

$$\gamma_\mu^\alpha = \delta_\mu^\alpha - n^\alpha n_\mu. \tag{4.12}$$

Uma vez que são projeções sobre as hipersuperfícies correspondentes, $K_{\mu\nu}$ e $\Theta_{\mu\nu}$ podem também ser considerados como tensores definidos na própria hipersuperfície onde são projetados, sendo então designados por K_{ij} e Θ_{ij}, onde os índices i, j referem-se às coordenadas internas definidas na hipersuperfície.

Seja agora $\{X^\alpha\}$ um sistema de coordenadas quadrimensional definido arbitrariamente sobre o espaço-tempo e consideremos uma folheação típica, na qual as hipersuperfícies são rotuladas por um parâmetro t definido por uma função arbitrária das coordenadas $\{X^\alpha\}$, de modo que cada fatia da folheação pode ser caracterizada por uma equação do tipo $t(X^\alpha) =$ cte. Já que uma variedade tridimensional não requer mais do que tres coordenadas para especificar univocamente cada um de seus pontos, cada evento no espaço-tempo pode ser univocamente caracterizado por uma quádrupla de números (x^i, t), onde $\{x^i\}$ são tres parâmetros arbitrários que definem um sistema de coordenadas tridimensional na hipersuperfície onde se localiza o evento e t é o parametro que rotula as hipersuperfícies da folheação $t(X^\alpha)$ a que foi submetido o espaço-tempo. Assim, as hipersuperfícies $t(X^\alpha) =$ cte admitem também uma representação paramétrica na forma:

$$X^\alpha = f^\alpha(x^i, t), \tag{4.13}$$

onde f^α são quatro funções contínuas compatíveis com a folheação $t(X^\alpha)$ dada, através das quais os parametros (x^i) são definidos.

Interpretando (4.13) como uma relação de transformação entre as coordenadas $\{X^\alpha\}$ e $\{x^i, t\}$, é possível mostrar que o elemento de linha $dS^2 = g_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu$ nas novas coordenadas pode ser expresso na forma

$$dS^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j). \tag{4.14}$$

onde N e N^i são, respectivamente, as chamadas funções lapso e deslocamento e h_{ij} é a componente (ij) da métrica transformada, ou seja

$$g'_{ij} = h_{ij} = X^\alpha_{,i}X^\beta_{,j}g_{\alpha\beta}. \tag{4.15}$$

Observa-se que, de acordo com a sua definição, h_{ij} é a trimétrica intrínseca à hipersuperfície $t(X^\alpha) =$ cte induzida por $g_{\alpha\beta}$, ou seja, que determina a distância espacial $dl^2 = h_{ij}dx^i dx^j$ entre dois pontos na hipersuperfície cujas coordenadas diferem de dx^i.

Para demonstrar (4.14) e esclarecer o significado das funções lapso e deslocamento,consideremos o vetor deformação N^α dado por:

$$N^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial t}. \tag{4.16}$$

Decorre de sua definição, que N^α é um vetor tangente às linhas coordenadas de t, isto é, às linhas de universo definidas pelas equações $x^i =$ cte as quais, por construção, interceptam as hipersuperfícies $t =$ cte em pontos de mesmas coordenadas intrínsecas $\{x^i\}$. Como as coordenadas intrínsecas $\{x^i\}$ e o parâmetro t são definidos de maneira arbitrária, N^α admite, em geral, componentes ao longo das direções tangentes e normal à hipersuperfície. Pode-se mostrar agora que tais componentes correspondem às funções lapso e deslocamento usadas para exprimir o elemento de linha (4.14). De fato, uma vez que, por definição, $X^\alpha_{,i} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i}$ é um vetor tangente à hipersuperfície na direção das linhas coordenadas de x^i e $n_\alpha = -N\frac{\partial t}{\partial X^\alpha}$ é o seu unitário normal, onde N é aqui apenas um fator de normalização a fim de que $n^\alpha n_\alpha = -1$, as componentes de N^α ao longo das direções perpendicular e tangentes à hipersuperfície serão dadas por:

$$X^\alpha u_\alpha = -N\frac{\partial X^\alpha}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X^\alpha} = -N \tag{4.17}$$

e

$$g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta_{,i} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial X^\alpha}{\partial t}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} = g'_{0i}(x,t) \equiv N_i(x,t). \tag{4.18}$$

Desta forma, o fator de normalização N esta associado à componente de X^α ao longo do unitàrio normal à hipersuperfície, enquanto que as componentes de X^α tangentes à hipersuperfície correspondem às componentes g'_{0i} do tensor métrico transformado, como se observa de (4.18), as quais podem ser consideradas como as componentes de um covetor tridimensional N_i definido na hipersuperfície.

Assim,visto que os vetores u^α e $X^\alpha_{,i}$ são ortogonais e considerando os resultados fornecidos por (4.17) e (4.18), X^α pode ser decomposto ao longo de u^α e $X^\alpha_{,i}$ na forma

$$X^\alpha = Nu^\alpha + N^i X^\alpha_{,i}. \tag{4.19}$$

com N^i sendo a forma contravariante do trivetor N_i definido em(4.18) e cujos índices são abaixados ou levantados com a ajuda da trimétrica h_{ij}, ou seja, $N_i = h_{ij}N^j$.

Usando agora a equação (4.19) para determinar a componente (00) do tensor métrico transformado obtem-se

$$g'_{00} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial X^\alpha}{\partial t}\frac{\partial X^\beta}{\partial t} = g_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = -N^2 + N^i N_i. \tag{4.20}$$

Finalmente, reunindo os resultados obtidos em (4.15), (4.18) e (4.20), a métrica transformada $g'_{\mu\nu}(x^i,t)$ pode ser expressa em termos da trimétrica h_{ij} e das componentes N e N^i de X^α de acordo com:

$$dS^2 = g'_{00}dt^2 + 2g'_{0i}dx^i dt + g'_{ij}dx^i dx^j = -N^2dt^2 + h_{ij}(N^i dt + dx^i)(N^j dt + dx^j). \tag{4.21}$$

Consequentemente, por comparação com (4.14), verifica-se que as funções lapso e deslocamento podem ser identificadas, respectivamente, como as componentes do vetor deformação N^α nas direções normal e tangencial à hipersuperfície $t =$ cte, tal como definidas em (4.19).

Por outro lado, para o observador u^α perpendicular à hipersuperfície $t =$ cte, o intervalo dS^2 medido entre dois eventos infinitesimalmente próximos (x^i, t) e $(x^i + dx^i, t + dt)$ é, por definição

$$dS^2 = -d\mathcal{T}^2 + h_{ij}dl^i dl^j, \tag{4.22}$$

onde $d\mathcal{T}$ e $dl^2 = h_{ij}dl^i dl^j$ são, respectivamente, o intervalo de tempo próprio e o quadrado da distância espacial entre os eventos medido por este observador. Comparando esta equação com (4.14) resulta que

$$d\mathcal{T} = N dt \tag{4.23}$$

e

$$dl^i = N^i dt + dx^i. \tag{4.24}$$

Verifica-se desta forma que a função lapso N mede a taxa de variação com respeito ao parâmetro t do tempo próprio medido pelo observador u^α pependicular à hipersuperfície $t =$ cte, enquanto que as funções deslocamento N^i, uma vez que se $dx^i = 0$ a equação (4.24) se reduz a $dl^i = N^i dt$, medem as taxas de variação com respeito ao mesmo parâmetro dos deslocamentos espaciais medidos por este observador u^α, ao longo das direções tangentes à hipersuperfície, entre dois eventos conectados pela linha de universo $x^i =$ cte e definidos pela intercerptação desta linha com duas hipersuperfícies infinitesimalmente próximas $t =$ cte e $t + dt =$ cte.

Se agora usamos a métrica (4.14) e a definição de curvatura extrínseca, a integral que define a ação de Hilbert para o campo gravitacional pode ser expressa de maneira apropriada em termos da função lapso N, das componentes K_{ij} do tensor de curvatura extríseca à hipersuperfície $t = $ cte e da sua métrica intrínseca h_{ij} na forma [9, 11]

$$S = \int_M \sqrt{-g} R d^4x = \int_M N\sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R)dt d^3x + (\text{termos de superfície}). \quad (4.25)$$

onde ${}^3R$ e $K = h_{ij}K^{ij}$ são, respectivamente, os escalares de curvatura intrínseca e extrínseca das hipersuperfícies $t = $ cte. Obseva-se também que, partindo da definição (4.9), K_{ij} pode ser expresso como

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N}[\dot{h}_{ij} - N_{(i;j)}], \quad (4.26)$$

onde o ponto significa derivação com respeito ao parâmetro t e o símbolo : representa a derivada covariante compatível com a trimétrica h_{ij} intrínseca à hipersuperfície $t = $ cte, isto é, tal que $h_{ij;l} = 0$. Assim, K_{ij} está essencialmente relacionado à taxa de variação temporal da trimétrica h_{ij}.

Já os termos de superfície assinalados à direita de (4.25) são integrais definidas sobre as hipersuperfícies $t' = $ cte, $t'' = $ cte e ${}^3S$ que constituem as fronteiras de M, e envolvem as trimétricas h'_{ij}, h''_{ij} e γ_{ij} bem como as curvaturas extrínsecas K_{ij} e Θ_{ij} que definem as condições de contorno sobre estas hipersuperfícies limítrofes. Contanto que as condições de contorno sobre as hipersuperfícies limítrofes de M estejam fixadas, tais termos de superfície podem ser descartados, porquanto não contribuem na variação da ação. Assim, a ação para o campo gravitacional está sempre definida a menos de certos termos de superfície que são funcionais das trimétricas h'_{ij}, h''_{ij} e γ_{ij} e das curvaturas extrínsecas K_{ij} e Θ_{ij} que caracterizam as hipersuperfícies limítrofes $t' = $ cte, $t'' = $ cte e ${}^3S$, os quais podem ser acrescentados à ação sem alterar as equações de movimento.

Considerando esta ambiguidade na definição da ação, Brown e York definem a ação para o campo gravitacional de acordo com [9]

$$S = \frac{1}{2\kappa}\int_M \sqrt{-g} R d^3x dt + \frac{1}{\kappa}\int_{t'}^{t''} \sqrt{h} K d^3x - \frac{1}{\kappa}\int_{{}^3S} \sqrt{-\gamma}\Theta d^3x - S_0. \quad (4.27)$$

onde $\Theta = \gamma_{ij}\Theta^{ij}$ é o escalar de curvatura extrínseca à ${}^3S$ e o símbolo $\int_{t'}^{t''}$ significa $\int_{t''} - \int_{t'}$. Observa-se que nesta forma a ação não depende das derivadas segundas de h_{ij} com respeito ao parâmetro t de modo que, ao variar as condições de contorno sobre as hipersuperfícies limítrofes é preciso especificar apenas as variações δh_{ij} e $\delta\gamma_{ij}$. Quanto ao termo S_0, este representa um funcional arbitrário das condições de contorno sobre as hipersuperfícies limítrofes $t' = cte$, $t'' = cte$ e ${}^3S$, como mergulhadas num certo espaço de referência prèviamente definido, sendo introduzido a fim de dar conta da ambiguidade na definição da ação. No contexto do formalismo de Brown e York, tal ambiguidade vai estar relacionada à arbitrariedade que se tem na escolha do ponto zero de energia. Admite-se, em geral, que a energia quase local contida numa região de uma hipersuperfície plana imersa num espaço-tempo plano seja nula. Embora S_0 possa ,em geral, depender das trimétricas h'_{ij} e h''_{ij}, como se verá a seguir, para o cálculo da energia quase local é suficiente considerar sua dependência com respeito à γ_{ij}.

A fim de generalizar para os sistemas gravitacionais a relação clássica entre a hamiltoniana, ou seja, a energia do sistema, e a taxa de variação temporal da ação, notemos que, se a hipersuperfície ${}^3S$, tal como definida anteriormente, representa a evolução temporal de uma superfície bidimensional S, então, definindo de maneira arbitrária um sistema de coordenadas bidimensional (x^a, x^b) sobre S, e sendo σ_{ab} a métrica intrínseca à S neste sistema de cooordenadas, qualquer intervalo sobre ${}^3S$ pode ser expresso como

$$dS^2|_{^3S} = \gamma_{ij}dx^i dx^j = -N^2dt^2 + \sigma_{ab}(N^a dt + dx^a)(N^b dt + dx^b). \tag{4.28}$$

onde cada um dos índices i, j referem-se aos tres graus de liberdade que podem ser definidos nesta hipersuperfície, sendo N^a e N^b as componentes do vetor deslocamento ao longo das direções tangentes à S. Vale notar que em (4.28) está implícito que no folheamento a que foi submetido o espaço-tempo, as hipersuperfícies t = cte são ortogonais à ${}^3S$, de forma que seus respectivos unitários normais satisfazem à condição $u^\alpha n_\alpha = 0$. Assim, n_α é um vetor totalmente contido na hipersuperfície t = cte, e se confunde com o unitário normal à S em cada ponto. Por outro lado, tal condição de ortogonalidade

Uma vez introduzido este tensor momento-energia quase local total, a energia total, incluindo a contribuição da matéria e do campo gravitacional, contida localmente no interior de uma região Σ de fronteira S selecionada numa hipersuperfície $t =$ cte é definida na prescrição de Brown e York como [9]

$$E = \int_S \xi \sqrt{\sigma} d^2x. \tag{4.38}$$

onde x^a são coordenadas intrínsecas à S, σ_{ab} sua métrica intrínseca e ξ, a densidade superficial de energia definida localmente em S, é a projeção na direção do unitário normal à hipersuperfície $t =$ cte do tensor momento-energia quase local:

$$\xi = u_i u_j T^{ij} = \frac{2u_i u_j}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \gamma_{ij}}. \tag{4.39}$$

Para avaliar a analogia entre esta definição de energia e a definição clássica de energia na teoria de Hamilton-Jacobi, consideremos um intervalo arbitrário em ${}^3S$ como definido em (4.28). Segue então que:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial N} = -2N\delta_i^0 \delta_j^0. \tag{4.40}$$

Por outro lado, lembrando que a função lapso N é um fator de normalização, o unitário normal à hipersuperfície $t =$ cte no sistema de coordenadas $(x^0 = t, x^a, x^b)$ adotado para exprimir a métrica (4.28) é dado por

$$u_i = -N \frac{\partial t}{\partial x^i} = -N\delta_i^0. \tag{4.41}$$

Consequentemente, tendo em vista (4.40),

$$u_i u_j = -\frac{N}{2} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial N}. \tag{4.42}$$

Substituindo esta última equação em (4.39) e já que $\sqrt{-\gamma} = N\sqrt{\sigma}$ resulta que

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\delta S_{cl}}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial N} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\delta S_{cl}}{\delta N}. \tag{4.43}$$

Assim, para a energia total E contida em S obtem-se, finalmente:

$$E = -\int_S \frac{\delta S_{cl}}{\delta N} d^2x. \tag{4.44}$$

Desta forma, em estreita analogia com a relação clássica entre a energia e a taxa de variação temporal da ação estabelecida pela teoria de Hamilton-Jacobi, a energia quase local de Brown e York contida no interior de uma superfície S está relacionada ao negativo da variação da ação S_{cl} com respeito à função lapso N, que determina o tempo próprio $d\mathcal{T} = Ndt$ medido por um observador ortogonal à hipersuperfície t = cte que envolve S, quando estendemos esta variação à todos os pontos de S.

A energia total E pode também ser expressa diretamente em função das condições de contorno sobre S, a saber, sua métrica intrínseca $\sigma_{\mu\nu}$ e sua curvatura extrínseca $k_{\mu\nu}$, que caracteriza a maneira pela qual S é mergulhada na hipersuperfície t = cte que a abrange. Tal curvatura extrínseca é definida de maneira usual, como a projeção ao longo de S, da taxa de variação covariante do unitário normal à S

$$k_{\mu\nu} = -\sigma^{\alpha}_{\mu} n_{\nu;\alpha}, \tag{4.45}$$

onde σ^{α}_{μ} é o projetor sobre S, dado por

$$\sigma^{\alpha}_{\mu} = h^{\alpha}_{\mu} - n^{\alpha} n_{\mu}. \tag{4.46}$$

e o ponto e vírgula representa a derivada covariante compatível com a métrica intrínseca à hipersuperfície t = cte na qual S está imersa, sendo definida como a projeção na hipersuperfície t = cte da derivada covariante de n_ν:

$$n_{\nu;\alpha} = h^\rho_\nu h^\sigma_\alpha n_{\rho||\sigma}. \tag{4.47}$$

Por outro lado, de acordo com sua definição, a densidade superficial de energia ξ envolve a projeção de π^{ij} ao longo do unitário u^α normal à hipersuperfície t = cte. Usando (4.32) para determinar esta projeção, e considerando que $u_\alpha u^\alpha = -1$, obtem-se:

$$u_i u_j \pi^{ij} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\gamma}(\Theta + u_i u_j \Theta^{ij}). \tag{4.48}$$

O escalar de curvatura extrínseca $\Theta = \gamma_{ij}\Theta^{ij}$ e a sua projeção $u_i u_j \Theta^{ij}$, por sua vez, podem ser determinados exprimindo o tensor de curvatura extrínseca $\Theta_{\mu\nu}$ de maneira adequada, em termos de suas projeções ao longo de S e perpendicular à S, o que pode ser feito usando a identidade $\Theta_{\mu\nu} \equiv \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \Theta_{\alpha\beta}$ e desmembrando δ^α_μ numa parte que projeta ao longo da hipersuperfície t = cte e noutra que projeta perpendicularmente à ela de acordo com

$$\delta^\alpha_\mu = h^\alpha_\mu - u^\alpha u_\mu. \tag{4.49}$$

onde foi usada a definição (4.11).

Os projetores h^α_μ e γ^α_μ, por sua vez, de acordo com (4.11), (4.12) e (4.46), admitem uma decomposição ao longo de S e perpendicular à S na forma

$$h^\alpha_\mu = \sigma^\alpha_\mu + n^\alpha n_\mu \tag{4.50}$$

e

$$\gamma^\alpha_\mu = \sigma^\alpha_\mu - u^\alpha u_\mu. \tag{4.51}$$

Resulta então que, em termos de suas projeções ao longo de S e perpendicular à S, a curvatura extrínseca à ${}^3S$ pode ser expressa como [9]

$$\Theta_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu n_\alpha a^\alpha + 2\sigma^\alpha_{(\mu} u_{\nu)} n^\beta K_{\alpha\beta}. \tag{4.52}$$

onde a^α é a acelaração do unitário normal u^α dada por

$$a^\alpha = u^\alpha_{\|\rho} u^\rho, \tag{4.53}$$

sendo que em (4.52) a condição de ortogonalidade $u^\alpha n_\alpha = 0$ está implícita.

Desta forma, de acordo com (4.52), resulta que:

$$\Theta \equiv \Theta^\mu_\mu = k - n_\alpha a^\alpha \tag{4.54}$$

e

$$u_i u_j \Theta^{ij} = n_\alpha a^\alpha. \tag{4.55}$$

onde k é o escalar de curvatura extrínseca de S.

Substituindo estes resultados em (4.48) obtem-se, finalmente:

$$u_i u_j \pi^{ij} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\gamma}(k - n_\alpha a^\alpha + n_\alpha a^\alpha) = \frac{\sqrt{-\gamma}}{2\kappa} k. \tag{4.56}$$

Desta forma, a projeção de π^{ij} na direção ortogonal à hipersuperfície t = cte que contem S esta essencialmente relacionada ao escalar de curvatura extrínseca de S como mergulhada nesta hipersuperfície. Da mesma forma, a projeção ao longo de u_i do termo π_0^{ij}, que surge devido à arbitrariedade que se tem ao definir a ação, vai estar relacionada ao escalar de curvatura extrínseca de S como mergulhada numa hipersuperfície de referência definida arbitrariamente. Assim, a densidade quase local de energia ξ pode ser expressa como

$$\xi = \frac{2u_i u_j}{\sqrt{-\gamma}}(\pi^{ij} - \pi_0^{ij}) = \frac{1}{\kappa}(k - k_0). \tag{4.57}$$

onde, em analogia com (4.56) define-se:

$$u_i u_j \pi_0^{ij} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\gamma}k_0. \tag{4.58}$$

Finalmente, para a energia total E contida em S resulta:

$$E = \frac{1}{\kappa}\int_S \sqrt{\sigma}(k - k_0)d^2x. \tag{4.59}$$

Nas últimas três equações, k e k_0 são, respectivamente, os escalares de curvatura extrínseca de S como mergulhada na hipersuperfície $t =$ cte dada e o escalar de curvatura extrínseca de S, isto é, de uma superfície de mesma métrica intrínseca σ_{ab} de S, como mergulhada numa hipersuperfície de referência. Observa-se que nesta hipersuperfície de referência, $k = k_0$ e, de acordo com (4.57), $\xi = 0$. Assim, a arbitrariedade que se tem na escolha desta hipersuperfície de referência equivale à liberdade na escolha do nível zero de energia. Admite-se em geral, como espaço de referência, uma hipersuperfície plana mergulhada num espaço-tempo plano, como já observado (veja, no entanto, a referência [10]).

2 CÁLCULO DA ENERGIA QUASE LOCAL

Em prosseguimento à analise feita nos capítulos anteriores usando os formalismos pseudotensorial e o de DGPP, calculemos agora, usando o formalismo de Brown e York, a energia contida no universo de Reissner-Nordström.

Em coordenadas de Shwartzschild (t, r, θ, ϕ), o elemento de linha de Reissner-Nordström pode ser expresso por

$$dS^2 = -Bdt^2 + B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.60}$$

onde $B = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$.

Escolhendo t como o parâmetro que rotula as hipersuperfícies e (r, θ, ϕ) como suas coordenadas intrínsecas, as funções lapso e deslocamento , de acordo com (4.14), são dadas por:

$$N = \sqrt{B} \ , N^i = N_i = 0. \tag{4.61}$$

Já o elemento de linha de uma típica hipersuperfície t = cte nestas coordenadas é dado por

$$dl^2 = B^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.62}$$

o que define a trimétrica h_{ij}.

O unitário normal à hipersuperfície t = cte nestas coordenadas pode ser obtido a partir da condição de normalização $g^{\mu\nu}u_\mu u_\nu = -1$ considerando que, por definição, este vetor não tem componentes ao longo da hipersuperfície t = cte. Resulta então que

$$u_\mu = -B^{1/2}\delta^0_\mu , \ u^\mu = B^{-1/2}\delta^\mu_0. \tag{4.63}$$

Da mesma forma, adotando como superfície S a superfície definida pela equação $x^1 = r$ = cte, seu unitário normal será dado por $n_\mu = C\delta^1_\mu$, onde C é uma função determinada pela condição de normalização $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = 1$. Assim, para o unitário normal à S obtem-se

$$n_\mu = B^{-1/2}\delta^1_\mu,\ n^\mu = B^{1/2}\delta^\mu_1, \tag{4.64}$$

já que, para a métrica dada, $g^{11} = B = \Lambda^2$.
Pode-se verificar por um cálculo direto, que, de acordo com (4.63) e (4.64), u^μ e n_μ satisfazem à condição de ortogonalidade $u^\mu n_\mu = 0$.

Em continuação, o escalar de curvatura extrínseca de S como mergulhada numa típica hipersuperfície $t =$ cte da folheação é, por definição,

$$k \equiv k^\mu_\mu = -\sigma^\alpha_\mu h^\rho_\alpha h^{\mu\beta} n_{\beta\|\rho}. \tag{4.65}$$

De acordo com as definições dos projetores σ^α_μ e h^α_μ e a condição de ortogonalidade $u^\mu n_\mu = 0$, k pode ainda ser expresso como

$$k = -\sigma^{\alpha\beta} n_{\alpha\|\beta},\quad \sigma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta - n^\alpha n^\beta. \tag{4.66}$$

Usando as expressões para $g^{\alpha\beta}$, u^μ e n^μ dadas em (4.60), (4.63) e (4.64), resulta que as únicas componentes não nulas de $\sigma^{\alpha\beta}$ são dadas por

$$\sigma^{22} = g^{22} = r^{-2},\ \sigma^{33} = g^{33} = r^{-2}\mathrm{sen}^{-2}\theta. \tag{4.67}$$

Substituindo estes resultados em (4.66) segue que

$$k = -r^{-2}n_{2\|2} - r^{-2}\mathrm{sen}^{-2}\theta\, n_{3\|3}. \tag{4.68}$$

As derivadas covariantes na última expressão podem ser calculadas diretamente, resultando:

$$n_{2\|2} = rB^{1/2},\ n_{3\|3} = r\mathrm{sen}^2\theta B^{1/2}. \tag{4.69}$$

Assim, o escalar de curvatura extrínseca k é dado por

$$k = -2r^{-1}B^{1/2}. \tag{4.70}$$

Para o cálculo do termo k_0, adotemos como espaço de referência uma hipersuperfície plana mergulhada num espaço-tempo plano cujo elemento de linha nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) é dado por

$$dS^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.71}$$

O unitário normal à hipersuperfície $t =$ cte será agora dado por

$$u_\mu = -\delta^0_\mu \;,\; u^\mu = \delta^\mu_0. \tag{4.72}$$

Para o unitário normal à superfície S definida por $x^1 = r =$ cte obtem-se

$$n^\mu = \delta^\mu_1 \;,\; n_\mu = \delta^1_\mu. \tag{4.73}$$

Um cálculo semelhante ao anterior fornece

$$k_0 = -r^{-2}n_{2\|2} - r^{-2}\text{sen}^{-2}\theta n_{3\|3}. \tag{4.74}$$

Para u_μ e n^μ dados em (4.72) e (4.73) e considerando a métrica plana (4.71) resulta que

$$n_{2\|2} = r \;,\; n_{3\|3} = r\text{sen}^2\theta. \tag{4.75}$$

Substituindo estes resultados em (4.74) obtem-se, finalmente,

$$k_0 = -2r^{-1}. \tag{4.76}$$

Desta forma, a densidade de energia quase local é dada por

$$\xi = \frac{1}{8\pi}(k - k_0) = \frac{r^{-1}}{4\pi}(1 - B^{1/2}). \tag{4.77}$$

Para a energia total contida em S resulta,

$$E = \int_S \xi\sqrt{\sigma}d^2x = R(1 - B^{1/2}), \tag{4.78}$$

onde R é o raio da superfície S.

Para interpretar este resultado, suponhamos primeiramente que $Q = 0$. Neste caso, a expansão do lado direito de (4.78) até 2ª ordem em m/R fornece,

$$E \approx m + \frac{m^2}{2R}, \tag{4.79}$$

o que corresponde ao limite clássico newtoniano.

Para uma superfície no infinito, que engloba todo o espaço, $R \to \infty$ e $E = m$. Assim, a energia total contida em todo o espaço pode ser identificada como a massa total do sistema. Para o caso de uma distribuição finita de matéria, por exemplo, esta energia total consiste, neste limite clássico, na soma da energia associada à matéria com a energia potencial gravitacional newtoniana armazenada no sistema, correspondente ao trabalho necessário para formar o sistema trazendo todos os elementos de massa do infinito. Desta forma, a energia E contida numa superfície esférica de raio R que envolve toda a matéria do sistema pode ser calculada subtraindo-se da energia total m a quantidade de energia armazenada no espaço exterior à superfície que corresponde, no limite clássico, à energia potencial gravitacional newtoniana associada ao trabalho necessário para trazer cada elemento de massa do sistema do infinito até a superfície dada.

De fato, para R finito, notemos que o termo de segunda ordem $m^2/2R$ é precisamente o negativo da energia potencial gravitacional newtoniana armazenada numa casca esférica de raio R e massa m, quando trazemos todos os seus elementos de massa do infinito. Assim, de acordo com (4.79), a energia quase local E contida no interior de uma superfície esférica de raio R consiste, neste limite clássico, em subtrair da energia total m, tal como definida acima, a energia potencial gravitacional necessária para trazer todos elementos de massa do infinito até a superfície. Em outras palavras, a energia quase local E contida no interior da superfície dada consiste, no limite clássico newtoniano, na soma da energia associada à matéria contida na superfície com a energia potencial gravitacional newtoniana associada ao trabalho necessário para trazer todos os elementos de massa desta matéria da superfície até suas posições finais no interior de tal superfície.

Finalmente, se $Q \neq 0$, a expansão até primeira ordem em m fornece

$$E = m - \frac{Q^2}{2R}. \tag{4.80}$$

o que coincide com o resultado obtido por Virbhadra para a mesma métrica usando o formalismo pseudotensorial, significando que a energia contida no interior de uma superfície de raio R, exterior ao horizonte de eventos , é a energia total m subtraida da energia contida exteriormente à R devido à presença da carga Q, correspondendo ao segundo termo à direita na última equação.

A fim de verificar a consistência destes resultados, calculemos novamente a energia quase local para a métrica de Reissner-Nordström usando agora o sistema de coordenadas (T, r, θ, ϕ), obtido do anterior pela transformação

$$T = t + \int (B^{-1} - 1)dr. \tag{4.81}$$

Neste sistema de coordenadas a métrica de Reissner-Nordström é expressa como

$$dS^2 = -BdT^2 + 2(1 - B)drdT + (2 - B)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.82}$$

Usando esta métrica para calcular as funções deslocamento obtem-se

$$N_1 = 1 - B,\ N_2 = N_3 = 0 \tag{4.83}$$

e

$$N^1 = (1 - B)(2 - B)^{-1},\ N^2 = N^3 = 0. \tag{4.84}$$

Partindo da relação $g_{00} = -N^2 + N^i N_i$ obtem-se para a função lapso

$$N = (2 - B)^{-1/2}. \tag{4.85}$$

Com estas definições, os unitários normais às hipersuperfícies $T = cte$ e ^3S são dados por:

$$u_\mu = [-(2 - B)^{-1/2}, 0, 0, 0],\ u^\mu = [(2 - B)^{1/2}, -(2 - B)^{-1/2}(1 - B), 0, 0] \tag{4.86}$$

e

$$n_\mu = [0, B^{-1/2}, 0, 0],\ n^\mu = [B^{-1/2}(1 - B), B^{1/2}, 0, 0], \tag{4.87}$$

onde, como antes, foi adotada a superfície S definida por $x^1 = r = cte$. Observemos que, nestas coordenadas, o folheamento não é ortogonal para r finito

$$n^\mu u_\mu = (B - 1)[B(2 - B)]^{-1/2} \neq 0. \tag{4.88}$$

Neste caso, o formalismo de Brown e York, tal como desenvolvido aqui, só é aplicável se S for uma superfície no infinito, quando então $u_\mu n^\mu \to 0$.

Passemos agora ao cálculo do escalar de curvatura extrínseca de S como mergulhada na hipersuperfície $T = cte$ cujo elemento de linha é dado por:

$$dl^2 = (2 - B)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.89}$$

Com as expressões de u^μ, n^μ e h_{ij} dadas em (4.86), (4.87) e (4.89) e usando o mesmo procedimento anterior, obtem-se, finalmente,

$$k = -1/2(1-B)^4(2-B)^{-2}B^{-5/2}B_{,1} - 2r^{-1}B^{1/2}. \tag{4.90}$$

Para o cálculo do termo k_0, obervemos que no novo sistema de coordenadas a métrica plana (4.71) é expressa na forma

$$dS^2 = -dT^2 - 2(B^{-1}-1)drdT + [1-(B^{-1}-1)^2]dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \tag{4.91}$$

Para as funções deslocamento obtemos agora,

$$N_1 = 1 - B^{-1},\ N_2 = N_3 = 0 \tag{4.92}$$

e

$$N^1 = (1-B^{-1})[1-(B^{-1}-1)^2]^{-1},\ N^2 = N^3 = 0. \tag{4.93}$$

e para a função lapso,

$$N = [1-(B^{-1}-1)^2]^{-1/2}. \tag{4.94}$$

Quanto aos unitários normais u^μ e n^μ, sendo S a superfície $x^1 = r = cte$ obtem-se:

$$u_\mu = \{-[1-(B^{-1}-1)^2]^{-1/2}, 0, 0, 0\},\ u^\mu = \{[1-(B^{-1}-1)^2]^{1/2}, (B^{-1}-1)[1-(B^{-1}-1)^2]^{-1/2}, 0, 0\} \tag{4.95}$$

e

$$n_\mu = \{0, 1, 0, 0\},\ n^\mu = \{1-B^{-1}, 1, 0, 0\}. \tag{4.96}$$

Um cálculo semelhante ao anterior conduz ao resultado

$$k_0 = -2r^{-1}. \tag{4.97}$$

Desta forma,

$$E = \frac{1}{8\pi}\int_S \sqrt{\sigma}(k - k_0)d^2x = -\frac{1}{4}r^2(1-B)^4(2-B)^{-2}B^{-5/2}B_{,1} + R(1-B^{1/2}). \quad (4.98)$$

Quando $R \to \infty$, o primeiro termo à direita na última equação torna-se desprezível, enquanto que a expansão do segundo termo em primeira ordem em m fornece

$$E = m - \frac{Q^2}{2R}, \quad (4.99)$$

em concordância com os resultados anteriores. Segue também de (4.99) que, para uma superfície no infinito que engloba todo o espaço, $E = m$, como deveríamos esperar.

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Com base na discussão desenvolvida nos capítulos anteriores acerca dos diferentes métodos pelos quais é possível estabelecer leis de conservação para os sistemas gravitacionais e considerando os resultados obtidos quando da aplicação de tais métodos ao cálculo da densidade de energia e da energia total em sistemas gravitacionais simples vamos, nesta última parte, resumir as conclusões que podem ser extraídas a respeito do grau de ambiguidade dos referidos métodos no que tange ao significado físico da energia gravitacional.

Primeiramente, da análise desenvolvida no capítulo 2, fica claro que no formalismo pseudotensorial a energia, seja como propriedade local ou global do sistema, depende, em geral, da escolha do sistema de coordenadas de forma que neste formalismo o conceito de energia gravitacional conduz à resultados ambíguos e não raro, fisicamente inconsistentes. Já as cargas conservadas definidas no método tensorial de Komar, descrito na última seção deste capítulo são, por construção, invariantes escalares, o que elimina o problema da dependência do sistema de coordenadas. No entanto, tal método só é aplicável se a métrica dada admite vetores de Killing. De fato, apenas neste caso as cargas de Komar podem ser definidas diretamente a partir do tensor métrico adquirindo, desta forma, um conteúdo físico, ao invés de constituirem meramente uma definição matemática. Em particular, se a métrica admite um vetor de Killing tipo tempo, a carga de Komar associada à esta isometria pode ser interpretada como energia, coincidindo com a definição de Moller nos sistemas de coordenadas onde tal vetor é dado na forma $\epsilon^\alpha = \delta_0^\alpha$. Não obstante, enquanto que a energia de Moller é invariante apenas sob transformações puramente espaciais de coordenadas, a energia de Komar é invariante sob transformações gerais.

Com relação ao método de D.G.P.P. descrito no capítulo 3, pode-se deduzir que a dependência de calibre do tensor momento-energia de D.G.P.P. é inteiramente análoga à dependência dos pseudotensores com relação ao sistema de coordenadas. De fato, como foi demonstrado na seção (3.3) e exemplificado nos cálculos realizados na seção (3.4), cada transformação de coordenadas pode ser associada, na teoria de D.G.P.P., a uma certa transformação de calibre. Assim, as ambiguidades que caracterizam o formalismo pseudotensorial, em especial quanto à densidade de energia gravitacional, não são eliminadas nesta versão tensorial das leis de conservação proposta por D.G.P.P.. Em particular verifica-se que, mesmo em presença de campo gravitacional, a densidade de energia gravitacional pode ser anulada, como no formalismo pseudotensorial, pela escolha de um sistema de coordenadas localmente inercial cuja existência é assegurada pelo princípio de equivalência ou, como no formalismo de D.G.P.P., pela escolha adequada de calibre.

Observa-se também que, de acordo com o que foi discutido na seção (3.1), admitindo a hipótese de acoplamento mínimo, no que concerne à interação entre a matéria e o campo gravitacional e do campo gravitacional com ele mesmo, a métrica de fundo é inobservável, ou seja, destituida de significado físico. Entretanto, na medida em que esta hipótese pode ser relaxada, admitindo que diferentes tipos de matéria se acoplem com o campo gravitacional de diferentes maneiras, ou ainda que o campo gravitacional se acople consigo mesmo diferentemente do resto da matéria [15], a métrica de fundo pode ser definida a partir de quantidades fisicamente mensuráveis adquirindo assim conteúdo físico. Vale notar que numa teoria onde a métrica de fundo é fisicamente determinada seria possível, em princípio, definir um tensor momento-energia independente de calibre. De fato, neste caso, não existe "a priori" uma invariância de calibre compatível com todos os diferentes tipos de aclopamento, de modo que a solução $h_{\mu\nu}(x)$ para o campo gravitacional deve ser única, ou seja, não está definida a menos de transformações de calibre.

Um outro ponto a destacar é que, assim como o tensor momento-energia de D.G.P.P., os pseudotensores são tensores com respeito ao espaço de fundo e dependem de calibre, como foi demonstrado na seção (3.2). Assim, as quantidades conservadas definidas nos formalismos pseudotensorial e de D.G.P.P. têm basicamente as mesmas propriedades. Por outro lado, como já foi observado, a dependência com relação ao sistema de coordenadas que caracteriza o formalismo pseudotensorial surge, no formalismo de D.G.P.P., sob a forma de uma dependência de calibre. Neste sentido pode-se afirmar que os formalismos de D.G.P.P. e pseudotensorial, não obstante suas diferenças conceituais intrínsecas, constituem formas equivalentes de representar as leis de conservação dos sistemas gravitacionais.

Quanto ao método de Brown e York, descrito no capítulo 4, observa-se primeiramente que neste formalismo a energia quase local contida no interior de uma superfície S é definida como a integral de superfície sobre S de um invariante escalar sendo, portanto, independente do sistema de coordenadas usado para expressar a referida integral. Logo, no formalismo de Brown e York, para a definição da quantidade quase local de energia não é necessário especificar o sistema de coordenadas, como ocorre no formalismo pseudotensorial e, em menor grau, no de D.G.P.P. No entanto, ao contrário destes, onde a densidade de energia pode ser definida localmente em cada ponto, no formalismo de Brown e York tal quantidade só pode ser definida quase- localmente, ou seja, sobre uma superfície que contenha o ponto dado. Por outra parte, a energia de Brown e York depende, em geral, da superfície dada, mesmo que esta englobe toda a matéria, com excessão dos casos em que a geometria admita vetores de Killing, quando então é possível definir cargas conservadas à maneira de Komar, ou seja, independente da superfície dada [9].

A fim de estabelacer critérios gerais que permitam ordenar os vários métodos descritos segundo suas propriedades comuns, comparemos os resultados fornecidos pelos referidos métodos para a energia total contida no interior de uma superfície dada considerando um exemplo específico particularmente simples, qual seja, a energia $E(R)$ contida no campo de Reissner-Nordström dentro de uma esfera de raio R com centro na origem.

Assim, de acordo com os resultados obtidos por Virbhadra, discutidos na seção (2.4), e os cálculos realizados nas seções (3.4) e (4.2), expressando o elemento de linha de Reissner-Nordström em coordenadas assintoticamente cartesianas (T, x, y, z) de acordo com

$$dS^2 = -dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + (1 - B)(dT + dr)^2, \tag{5.1}$$

onde $B = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ e $dr = xdx + ydy + zdz$, as prescrições de Einstein, Tolman, Landau/Lifshitz e D.G.P.P. fornecem para $E(R)$ o valor:

$$E(R) = m - \frac{Q^2}{2R}. \tag{5.2}$$

Já nas prescrições de Moller e Komar $E(R)$ é dado por

$$E(R) = m - \frac{Q^2}{R}. \tag{5.3}$$

Com relação à prescrição de Brown e York, para valores assintóticos de R, isto é, nas regiões de campo fraco que correspondem ao limite newtoniano, a expressão obtida para $E(R)$ admite uma expansão que, até segunda ordem em m e Q fornece

$$E(R) = m + \frac{m^2}{2R} - \frac{Q^2}{2R}. \tag{5.4}$$

Ainda com base nos resultados das seções (2.4), (3.4) e (4.2), consideremos agora o elemento de linha de Reissner-Nordström expresso em novas coordenadas assintoticamente cartesianas (t, x, y, z) obtidas das anteriores por uma simples transformação de coordenadas de forma que:

$$dS^2 = -Bdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + (B^{-1} - 1)dr^2. \tag{5.5}$$

Verifica-se que, neste novo sistema de coordenadas, as prescrições de Einstein/Tolman, Moller, Komar e Brown/York fornecem os mesmos resultados anteriores, enquanto que os métodos de D.G.P.P. e Landau/Lifshitz conduzem à expressões completamente diferentes evidenciando assim o caráter ambíguo que estes dois métodos atribuem à energia nos sistemas gravitacionais.

Tal ambiguidade pode ser igualmente apreciada com relação ao pseudotensor de Einstein comparando os resultados fornecidos nesta prescrição para a energia contida no campo de Schwarzchild em diferentes sistemas de coordenadas assintoticamente cartesianos. Assim, expressando o elemento de linha de Schwarzchild em coordenadas cartesianas isotrópicas de acordo com

$$dS^2 = -\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2 dt^2 + \left(1+\frac{m}{2r}\right)^4 (dx^2+dy^2+dz^2). \tag{5.6}$$

a prescrição de Einstein fornece, para valores assintóticos de R,

$$E(R) = m - \frac{m^2}{2R}. \tag{5.7}$$

Por outro lado, usando os dois sistemas assintóticamente cartesianos definidos acima e pondo $Q = 0$ a fim de converter a solução de Reissner-Nordström na de Schwarzchild, obtem-se nesta mesma prescrição de Einstein, de acordo com (5.2), um resultado diferente uma vez que agora o termo quadrático em m não aparece. Desta forma verifica-se que nas prescrições de Einstein e Landau/Lifshitz a energia total pode depender do sistema de coordenadas mesmo quando consideramos apenas sistemas assintóticamente cartesianos, como convém ao formalismo pseudotensorial.

Voltando aos resultados (5.3), (5.2) e (5.4) obtidos para a solução de Reissner-Nordström observa-se que, com excessão do termo quadrático em m, que não aparece nos outros métodos, para valores assintóticos de R, a prescrição de Brown/York fornece basicamente o mesmo resultado que as prescrições de Einstein/Tolman, Landau/Lifshitz e D.G.P.P., o qual difere daquele obtido usando os métodos de Moller e Komar sugerindo, desta forma, que a definição de energia proposta por Moller e Komar é essencialmente distinta daquelas propostas pelos outros autores acima citados, embora todos os métodos concordem quanto ao valor da energia total $E(\infty)$ contida numa superfície de raio infinito que engloba todo o espaço, indentificando-a com a massa total do sistema.

A natureza desta diferença conceitual entre as definições de energia de Moller e Komar e a dos outros autores pode ser melhor compreendida considerando as propriedades dos vários métodos tal como foram discutidas nos capítulos anteriores, em especial o fato de que a carga de Komar contida no interior de uma superfície dada não depende da superfície se esta inclui toda a matéria do sistema. Neste sentido, em analogia com a definição de carga dada pela lei de Gauss do eletromagnetismo, as energias de Moller e Komar podem ser identificadas com a massa gravitacional contida na superfície dada e, portanto, correpondem às fontes do campo gravitacional. De fato, por sua própria definição, a massa gravitacional não depende da superfície dada se esta inclui toda a matéria do sistema, ou seja, se a superfície contem a totalidade das fontes do campo.

Por outro lado, de maneira semelhante à definição da quantidade de energia armazenada no campo eletromagnetico criado por um sistema de cargas, que no caso eletroestático corresponde à energia potencial do sistema, o conceito de energia nas prescrições de Einstein, Tolman, Landau/Lifshitz, D.G.P.P. e Brown/York inclui, além da matéria, a energia gravitacional propriamente dita que, no limite clássico se reduz à energia potencial newtoniana do sistema. Observa-se que nesta concepção a energia depende da superfície dada, mesmo que esta inclua toda a matéria. Vale notar ainda que, pelo menos para métricas assintoticamente planas, a energia contida em todo o espaço, incluindo a contribuição da matéria e do campo gravitacional, corresponde à massa gravitacional experimentada por uma partícula teste que, sob a ação deste campo, realiza uma geodésica no infinito. Assim, para uma superfície de raio infinito que abarca todo o espaço ambas as concepções de energia acima descritas coincidem com a massa total m do sistema gravitacional em questão.

Para finalizar, considerando as características peculiares aos vários métodos aqui discutidos, pode-se concluir que os métodos de Komar e Brown/York são os que apresentam os resultados mais consistentes no que diz respeito à energia dos sistemas gravitacionais, seja como propriedade local ou global do sistema. De fato, em ambos os métodos a energia não depende da escolha de coordenadas ou de calibre, como nos formalismos pseudotensorial e de D.G.P.P.. Em especial, verifica-se que na aproximação não relativística, o método de Brown/York é aquele que apresenta o resultado mais consistente, pois é o único que, nesta aproximação, contém o termo $\frac{m^2}{2R}$ que representa a energia potencial newtoniana armazenada numa casca esférica de raio R e massa m. Além disto, a energia de Brown e York não depende da existência de vetores de Killing, como no método de Komar.

Referências

[1] P.G. Bergman, " Conservation Laws in General Relativity as The Generators of Coordinate Transformations " . Phis. Rev., 112, 287 (1958)

[2] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, "Teoria do Campo"(ED. Mir. Moscou. 1980)

[3] C. Moller, "On the Localization of the Energy of a Physical System in the General Theory of Relativity". Ann. Phys. 4. 347 (1958)

[4] C.Moller. "The Theory of Relativity ". Oxford University (1972)

[5] R.C.Tolman " On The Use of The Energy-Momentum Principle in General Relativity ". Phis. Rev.. 35. 875 (1930)

[6] A. Komar. "Covariant Conservation Laws in General Relativity". Phys. Rev. 113. 934 (1959)

[7] S.Deser. "Self-Interaction and Gauge Invariance", General Relativity and gravitation 1, 9 (1970)

[8] L.P.Grishchuk. A.N. Petrov and A.D. Popova, "Exact Theory of the (Einstein) Gravitational Field in an Arbitrary Background Space-Time". Commun. Math. Phys. 94, 379 (1984)

[9] J.D.Brown and J.W.York Jr.. "Quasilocal Energy and Conserved Charges Derived From the Gravitational Action". Phys. Rev. D 47, 1407 (1993)

[10] N. Pinto-Neto and I. Damião Soares, "The Gravitational Energy in Asynptotically Anti- De Sitter Spacetimes", Phis. Rev. D 52. 5665 (1995)

[11] N.Pinto-Neto "Formalismo Hamiltoniano da Gravitação ", notas não publicadas (1991)

[12] K.S.Virbhadra, "Energy Distribuition in Kerr-Newman Spacetime in Einstein's as Well as Moller's prescriptions ". Phis. Rev. D, 42, 2919 (1990)

[13] K.S.Virbhadra "Energy Associated With a Kerr-Newman Black Hole ", Phis. Rev. D, 41. 1086 (1990)

[14] K.S. Virbhadra, "A Comment on the Energy-Momentum Pseudotensor of Landau and Lifshitz", Phis. Letters A 157. 195 (1991)

[15] M. Novello, V.A. De Lorenci and L.R. de Freitas " Does the Gravitational Waves Travel at Light Velocity? ", Notas de Física, C.B.P.F. (1996)

"UMA ANÁLISE COMPARATIVA DE ALGUMAS PRESCRIÇÕES PARA O CÁLCULO DA ENERGIA DE SISTEMAS GRAVITACIONAIS"

Paulo Israel Trajtenberg

Tese de Mestrado apresentada no Cen-
Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Nelson Pinto Neto

Nelson Pinto Neto - Presidente

Maurício Ortiz Calvão

Mario Novello

Rio de Janeiro, 07 de março de 1997