Tese de Mestrado

Eletromagnetismo Auto-Dual em (3+3) Dimensões e Massa Topológica no Espaço de Minkowski

Carlos Henrique de Souza Cruz

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Outubro de 1997

AGRADECIMENTOS

Esses anos de CBPF estão coincidindo com um período feliz, em que a minha vida mudou bastante. Eu agradeço muito a Deus, foi ele quem me trouxe a essa etapa a que todos os alunos de Pós-Graduação devem chegar: A TESE.

Ao longo desse caminho, pude contar com a ajuda inestimável de pessoas e instituições, sem as quais esse trabalho não seria realizado. Tais pessoas a quem devo a mais profunda gratidão são:

O professor José Abdalla Helayël-Neto, que aceitou me orientar, mesmo não me conhecendo direito e, ainda por cima, em situação desfavorável. Sem ele, essa tese provavelmente não teria sido feita;

O professor A. O. Caride, outro que não me conhecia, e que me deu um voto de confiança em um momento difícil;

A Myriam Simões Coutinho, que é uma das engrenagens principais desse Centro de Pesquisas Físicas, e que sempre me tratou bem todas as vezes em que eu precisei de seus serviços;

O professor Sebastião Alves Dias;

O Grupo de Física Teórica da Universidade Católica de Petrópolis, pela hospitalidade e, principalmente, pela inestimável ajuda prestada por dois de seus membros: as senhoritas Patrícia Duarte Peres e Patricia Macedo da C. Jorge, a quem sou grato pelo trabalho de digitação da Tese;

O CNPq, que, através do seu programa de bolsas que nunca falhou, prestou um grande apoio;

A minha esposa, pelo encorajamento e incentivo.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta Tese, o meu muito obrigado.

Índice

RESUMO

Estuda-se, nesta tese, uma série de propriedades referentes às representações tensoriais e espinoriais do grupo $SO_0(3,3)$. Em particular, chama-se a atenção para os campos tensoriais de rank-2 com field-strength auto-dual, e para os férmions de Majorana-Weyl. Constrói-se um modelo-de-gauge Abeliano auto-dual e, por redução dimensional para o espaço de Minkowski, chega-se a uma teoria-de-gauge com termo de massa topológica que acopla um campo-de-gauge de natureza vetorial a um potencial-de-gauge tipo 2-forma.

INTRODUÇÃO

Na busca de uma melhor compreensão das simetrias internas em teorias de campos no espaço-tempo ordinário, $D = (1+3)$, tem sido utilizado, freqüentemente, o artifício de se trabalhar com espaços de dimensões mais altas, e, baseando-se em suas propriedades características, são geradas sistematicamente, mediante algum "ANSATZ"' de redução dimensional [1], teorias quadridimensionais com as simetrias que, aparentemente, são introduzidas de forma ad hoc.

O chamado mecanismo de redução dimensional de Kaluza-Klein vem sendo aplicado exaustivamente no programa de construção de teorias de supersimetria e supergravidade estendidas [2], e, mesmo em conexão com os modelos de superstrings, vem sendo utilizado na tentativa de se construir modelos unificados com fenomenologia viável em 4 dimensões [3] .

Geralmente, o espaço de dimensão superior utilizado possui apenas uma dimensão de caráter temporal, sendo as demais de natureza espacial. Todavia, em vista da conjectura de Atiyah [4] de que teorias-de-gauge auto-duais em um espaço-tempo do tipo $D = (2+2)$ podem, quando reduzidas para $D = (1+2)$ e $D = (1+1)$, produzir interessantes modelos integráveis e conformes, estudamos nesta tese teorias-de-gauge Abelianas em um espaço-tempo hexadimensional do tipo $D = (3+3)$.

Espaços com 3 dimensões temporais certamente irão nos levar a dificuldades com a causalidade. Porém, já é claro [5] que a redução dimensional de coordenadas temporais extras pode levar a teorias consistentes com a causalidade e a unitariedade em 4 dimensões, desde que convenientes truncamentos de campos sejam efetuados.

A contribuição básica deste trabalho está em mostrar que um termo de massa topológica, tipo Chern-Simons em 4 dimensões, origina-se de um modelo-de-gauge Abeliano auto-dual definido em *D=(3+3)*. A relação entre este fato e a massa topológica no espaço de Minkowski fundamenta-se num mecanismo de redução dimensional aqui proposto [6].

Para discutir este resultado, realizamos um estudo sistemático do espaço-tempo *D=(3+3)*, que é apresentado da seguinte maneira: no Capítulo 1, discutimos algumas propriedades do grupo de Lorentz $SO_o(3,3)$, e analisamos alguns detalhes de uma teoria-de-gauge Abeliana com potencial anti-simétrico em 6-dimensões, onde a auto-dualidade é característica marcante. No Capítulo 2, discutimos as representações espinoriais de $SO_o(3,3)$, devido à necessidade de introduzir matéria fermiônica. Concluímos que é possível definir férmions de Majorana-Weyl, o que não ocorre em determinados espaços-tempo. A existência destes parece sempre possível em modelos-de-gauge auto-duais. Finalmente, no Capítulo 3, propomos o nosso mecanismo de redução dimensional e obtemos, do modelo auto-dual proposto, o termo de Chern-Simons, que conecta um campo vetorial de gauge a um campo tensorial de rank-2 em 4 dimensões. Concluímos o trabalho e tentamos imaginar algumas paisagens que o mesmo possa vir um dia a revelar, pela mente e disposição de quem possa se interessar. Um Apêndice é incluído, com a finalidade de ilustrar a contagem de graus-de-liberdade de que se fala no Capítulo 2.

Capítulo 1

O grupo $SO_o\,(3,3)$

Neste capítulo, apresentaremos a métrica do nosso espaço, estabeleceremos algumas convenções e definiremos alguns objetos que iremos utilizar. Com alguns desses resultados, veremos que é possível, no espaço $D = (3+3)$, impor a condição de auto-dualidade sobre um tensor totalmente antissimétrico real de rank-3.

$SO_o\,(3,3)$ será definido como o subgrupo das transformações lineares que preservam a nossa métrica e têm determinante igual a um. Os geradores de $SO_o\,(3,3)$ serão determinados a partir de uma transformação infinitesimal. Os elementos dos geradores serão expressos de um modo sintético e, a partir disso, uma álgebra de Lie para eles será apresentada. Uma possível representação para $SO_o\,(3,3)$ também será dada.

A partir de um tensor antissimétrico, $B_{\mu\nu}$, construiremos um outro tensor, totalmente antissimétrico, de rank-3, $G_{\mu\nu\kappa}$, que será invariante sob uma transformação específica de $B_{\mu\nu}$. As componentes independentes de $B_{\mu\nu}$ e de $G_{\mu\nu\kappa}$, quando olhadas sob o ponto-de-vista das rotações no espaço 3-D podem ser consideradas como vetores ou escalares. O tensor dual a $G_{\mu\nu\kappa}$, $\widetilde{G}_{\mu\nu\kappa}$, será considerado. Um conjunto de equações tipo-Maxwell serão propostas para $G_{\mu\nu\kappa}$ e o seu dual. Tais equações serão escritas em tèrmos das componentes de $G_{\mu\nu\kappa}$ e de $\widetilde{G}_{\mu\nu\kappa}$. Terminaremos o capítulo mostrando que, se a condição de auto-dualidade é imposta sobre $G_{\mu\nu\kappa}$, essas equações, no vácuo, associam-se em pares.

1.1 O Espaço de Dimensão $D = (3+3)$

1.1.1 Convenções e Auto-dualidade em $D = (3+3)$.

O espaço $D = 3+3$ é aqui definido como sendo aquele que possui 3 dimensões tipo- tempo e 3 dimensões tipo-espaço.

Deveremos usar em todo este trabalho a notação do 6-vetor:

$$x^{\mu} = \left(t, x, y, z, T, \overline{T}\right) \text{ e } x_{\mu} = \left(t, -x, -y, -z, T, \overline{T}\right). \tag{1.1}$$

A conversão de x^{μ} para x_{μ} é obtida através da relação

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} x^{\nu}, \tag{1.2}$$

onde $\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = \eta_{44} = \eta_{55} = 1$, sendo os demais $\eta_{\mu\nu}$ nulos. Muitas vezes, é conveniente usar a matriz

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Adotaremos a notação x^i para indicar as componentes x, y, z do 6-vetor e x^0, x^4, x^5 para indicar a primeira, a quinta e a sexta componentes do 6-vetor, respectivamente.

$$x^i = -x_i = (x, y, z)\,; x^0 = x_0 = t\,; x^4 = x_4 = T\,; x^5 = x_5 = \overline{T} \tag{1.4}$$

Índices gregos serão usados para as componentes do 6-vetor, e índices latinos para as componentes espaciais somente.

Em nosso trabalho, algumas vezes, faremos uso de um tensor totalmente antissimétrico de rank-6, definido abaixo, bem como de relações envolvendo a contração desse tensor com ele mesmo em alguns dos seus índices. Esse tensor, que recebe o nome de tensor de Levi-Civita, é dado por:

$$\epsilon^{012345} = -\epsilon_{012345} = 1. \tag{1.5}$$

Algumas relações úteis são as seguintes:

$$\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma} = 6\begin{pmatrix} \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\kappa} + \delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\rho}_{\kappa}\delta^{\sigma}_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\kappa}\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \\ -\delta^{\lambda}_{\nu}\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\kappa} - \delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\kappa}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\lambda}_{\kappa}\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu} \end{pmatrix} \tag{1.6.a}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma\lambda}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma} = -24\left(\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\mu}\right) \tag{1.6.b}$$

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma\lambda\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma} = 120\delta^{\sigma}_{\mu} \tag{1.6.c}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\lambda}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\lambda} = -720 = -6!, \tag{1.6.d}$$

onde $\delta^{\mu}_{\nu} = 1$ se $\mu = \nu$ e 0 se $\mu \neq \nu$.

A utilidade de uma das relações acima pode ser ilustrada mostrando que no espaço $D = 3+3$ é possível impor a condição de auto-dualidade para um tensor real totalmente antissimétrico de rank-3.

Seja

$$\widetilde{T}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha\beta\gamma}T^{\alpha\beta\gamma}, \tag{1.7}$$

onde $T^{\alpha\beta\gamma}$ é um tensor totalmente antissimétrico. Tomando o dual de (1.7), temos

$$\widetilde{\widetilde{T}}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha\beta\gamma}\widetilde{T}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha\beta\gamma}\frac{1}{3!}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma}T_{\lambda\rho\sigma} = T_{\mu\nu\kappa}, \tag{1.8}$$

onde foi utilizado o resultado (1.6.a). Se agora postularmos a auto-dualidade

$$\widetilde{T}_{\mu\nu\kappa} = T_{\mu\nu\kappa}, \tag{1.9}$$

temos, de (1.9) e de (1.8), que

$$\tilde{\tilde{T}}_{\mu\nu\kappa} = \tilde{T}_{\mu\nu\kappa} = T_{\mu\nu\kappa}, \tag{1.10}$$

de onde concluímos que a auto-dualidade pode ser imposta sobre um tensor totalmente antissimétrico de rank-3 no espaço $D = (3+3)$.

Um tensor totalmente antissimétrico, $T_{\mu\nu\kappa}$, no espaço de $D = (3+3)$ possui, devido à antissimetria, 20 componentes independentes. A condição de auto-dualidade reduz ainda mais esse número de componentes. Um tensor auto-dual de rank-3 possui em $D = (3+3)$ apenas 10 componentes independentes.

1.2 O Grupo de Lorentz no Espaço $M^{3,3}$

As transformações lineares homogêneas consistindo de todas as matrizes reais, Λ, seis-por-seis, satisfazendo à condição:

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Lambda}^T = \boldsymbol{\eta}, \tag{1.11}$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}^T$ é a transposta de $\boldsymbol{\Lambda}$, formam um grupo que iremos denominar Grupo de Lorentz. As matrizes $\boldsymbol{\Lambda}$ deixam invariante a quantidade $\left(t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + T^2 + \overline{T}^2\right)$. Por esta razão este grupo também será chamado de $O\,(3,3)$. Se $L^{\mu}{}_{\nu}$ são os elementos da matriz $\boldsymbol{\Lambda}$, onde μ e ν são os índices da linha e coluna respectivamente, a equação acima pode ser escrita como

$$\eta_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\sigma} L^{\nu}{}_{\rho} = \eta_{\sigma\rho} \tag{1.12}$$

Esta expressão contém 21 condições sobre os 36 elementos das matrizes $\boldsymbol{\Lambda}$ seis-por-seis. Por esta razão, a matriz de transformação de Lorentz contém 15 parâmetros independentes.

Como o determinante de $\boldsymbol{\Lambda}^T$ é o mesmo de Λ, a condição da equação (1.11) nos leva a

$$\det(\boldsymbol{\Lambda}) = \pm 1 \tag{1.13}$$

O Grupo de Lorentz, com $\det(\boldsymbol{\Lambda}) = +1$, será designado por $SO_o\,(3,3)$.

1.3 Os geradores de $SO_o\,(3,3)$

Para obtermos os geradores de $SO_o\,(3,3)$, vamos considerar uma transformação infinitesimal $\Lambda = \mathbb{1} + \boldsymbol{\omega}$; e os elementos de $\boldsymbol{\omega}$ são muito menores que 1. Tal transformação deve satisfazer à relação (1.11). Desprezando os termos de ordem igual ou superior a 2, e usando a propriedade (1.2) de abaixamento e levantamento de índices, obtemos

$$\omega^{\mu\,\nu} = -\omega^{\nu\,\mu}. \tag{1.14}$$

Existem 15 matrizes seis-por-seis antissimétricas linearmente independentes, esse número é também o de parâmetros independentes de $\boldsymbol{\Lambda}$. Sendo assim, a matriz $\boldsymbol{\omega}$ pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\,\omega^{\alpha\beta}\,\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}, \tag{1.15}$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\,\beta} = -\boldsymbol{\Sigma}_{\beta\,\alpha}$ designa as 15 matrizes antissimétricas independentes. Os elementos de tais matrizes são obtidos da seguinte relação:

$$(\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} = \left(\delta^{\mu}_{\alpha}\eta_{\beta\nu} - \eta_{\alpha\nu}\delta^{\mu}_{\beta}\right) \tag{1.16}$$

As matrizes $\boldsymbol{\Lambda}$ de $SO_o\,(3,3)$ podem ser exponenciadas como:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\omega^{\alpha\beta}\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}\right)\right] \tag{1.17}$$

As matrizes $\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}$ são os geradores das transformações de Lorentz. Os elementos de tais matrizes são obtidos de (1.16).

1.4 Álgebra de Lie de $SO_o\,(3,3)$

Podemos verificar facilmente que os geradores de $SO_o\,(3,3)$ satisfazem à relação:

$$[\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_{\kappa\lambda}] = \eta_{\alpha\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\beta} - \eta_{\beta\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\alpha} + \eta_{\alpha\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\beta\kappa} - \eta_{\beta\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\kappa} \tag{1.18}$$

Para verificar essa relação, é necessário usar (1.16).Com isso, vemos que (1.18) vale para uma componente arbitrária. Logo vale para todas elas. O cálculo é realizado como segue

$$
\begin{aligned}
\left([\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_{\kappa\lambda}]\right)^{\mu}{}_{\nu} &= \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}\boldsymbol{\Sigma}_{\kappa\lambda} - \boldsymbol{\Sigma}_{\kappa\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}\right)^{\mu}{}_{\nu} \\
&= \eta_{\alpha\kappa}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\beta}\right)^{\mu}_{\nu} - \eta_{\beta\kappa}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\alpha}\right)^{\mu}_{\nu} + \eta_{\alpha\lambda}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\beta\kappa}\right)^{\mu}_{\nu} - \eta_{\beta\lambda}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\kappa}\right)^{\mu}_{\nu} \\
&= \left(\eta_{\alpha\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\beta} - \eta_{\beta\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\alpha} + \eta_{\alpha\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\beta\kappa} - \eta_{\beta\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\kappa}\right)^{\mu}_{\nu}
\end{aligned}
$$

logo

$$
[\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_{\kappa\lambda}] = \eta_{\alpha\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\beta} - \eta_{\beta\kappa}\boldsymbol{\Sigma}_{\lambda\alpha} + \eta_{\alpha\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\beta\kappa} - \eta_{\beta\lambda}\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha\kappa} \qquad (c.q.d.)
$$

1.5 Tensor de rank-2 como Potencial de Gauge

Um tensor antissimétrico, $B_{\mu\nu}$, no espaço $D = (3+3)$ tem 15 componentes independentes. Tais componentes, sob o ponto de vista das rotações tridimensionais, podem ser associadas a vetores ou a escalares:

$$B_{oi} \equiv V_i, \tag{1.19.a}$$

$$B_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} W_k, \tag{1.19.b}$$

$$B_{o4} \equiv S, \tag{1.19.c}$$

$$B_{o5} \equiv J, \tag{1.19.d}$$

$$B_{i4} \equiv U_i, \tag{1.19.e}$$

$$B_{i5} \equiv R_i, \tag{1.19.f}$$

$$B_{45} \equiv \phi. \quad (1.19.g)$$

Temos, assim, associados ao tensor $B_{\mu\nu}$, 4 vetores e 3 escalares (num total de 15 componentes).

A partir de $B_{\mu\nu}$, podemos definir um "field-strength", que será um tensor real, totalmente antissimétrico, de rank-3:

$$G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu B_{\nu\kappa} + \partial_\nu B_{\kappa\mu} + \partial_\kappa B_{\mu\nu}, \quad (1.20)$$

invariante sob a transformação de "gauge" sobre $B_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu; \quad (1.21)$$

nessa transformação, ξ_μ é um 6-vetor arbitrário.

As componentes independentes de $G_{\mu\nu\kappa}$ definem 20 campos invariantes de gauge como segue:

$$G_{oij} \equiv \epsilon_{ijk} E_\kappa, \quad (1.22.a)$$

$$G_{ij\kappa} \equiv \epsilon_{ijk} B, \quad (1.22.b)$$

$$G_{oi4} \equiv X_i, \quad (1.22.c)$$

$$G_{oi5} \equiv Y_i, \quad (1.22.d)$$

$$G_{ij4} \equiv \epsilon_{ijk} Z_\kappa, \quad (1.22.e)$$

$$G_{ij5} \equiv \epsilon_{ijk} \Sigma_\kappa, \quad (1.22.f)$$

$$G_{o45} \equiv \Delta \quad (1.22.g)$$

$$G_{i45} \equiv \Omega_i. \tag{1.22.h}$$

Os vetores $\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{Y}}, \vec{\mathbf{Z}}, \vec{\mathbf{\Sigma}}, \vec{\mathbf{\Omega}}$ e os escalares B e Δ que aparecem nas equações (1.22.a-h), podem ser expressos como derivadas dos potenciais $\vec{\mathbf{V}}, \vec{\mathbf{W}}, \vec{\mathbf{U}}, \vec{\mathbf{R}}, S, J$ e ϕ das equações (1.19.a-g). Basta, para isso, considerarmos a equação (1.20). Tais relações são:

$$\vec{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t} - \nabla \times \vec{\mathbf{V}}, \tag{1.23.a}$$

$$\vec{\mathbf{X}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial t} - \nabla S + \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial T}, \tag{1.23.b}$$

$$\vec{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{K}}}{\partial t} - \nabla J + \frac{\partial \vec{\mathbf{V}}}{\partial T}, \tag{1.23.c}$$

$$\vec{\mathbf{Z}} = \nabla \times \vec{\mathbf{U}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial T}, \tag{1.23.d}$$

$$\vec{\mathbf{\Sigma}} = \nabla \times \vec{\mathbf{K}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial T}, \tag{1.23.e}$$

$$\vec{\mathbf{\Omega}} = \nabla \phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{R}}}{\partial T} + \frac{\partial \vec{\mathbf{U}}}{\partial T}, \tag{1.23.f}$$

$$B = \nabla \cdot \vec{\mathbf{W}}, \tag{1.23.g}$$

$$\Delta = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial J}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial T}. \tag{1.23.h}$$

Da mesma forma, considerando (1.21) e o 6-vetor $\boldsymbol{\xi}^{\mu} \equiv \left(\alpha, \vec{\boldsymbol{\beta}}, \gamma, \lambda\right)$, as transformações de gauge são dadas por

$$\vec{\mathbf{V}}' = \vec{\mathbf{V}} - \nabla \alpha - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\beta}}}{\partial t}, \tag{1.24.a}$$

$$\vec{\mathbf{W}}' = \vec{\mathbf{W}} - \nabla \cdot \times \vec{\beta}, \tag{1.24.b}$$

$$\vec{\mathbf{U}}' = \vec{\mathbf{U}} - \nabla\gamma - \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial T}, \tag{1.24.c}$$

$$\vec{\mathbf{R}}' = \vec{\mathbf{R}} + \nabla\lambda - \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial T}, \tag{1.24.d}$$

$$S' = S + \frac{\partial\, \gamma}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial T}, \tag{1.24.e}$$

$$J' = J + \frac{\partial\, \lambda}{\partial t} - \frac{\partial \alpha}{\partial T}, \tag{1.24.f}$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\, \lambda}{\partial T} - \frac{\partial \gamma}{\partial T}. \tag{1.24.g}$$

Substituindo as equações (1.24) em (1.23), verificamos mais uma vez a invariância de gauge. De acordo com (1.7), o dual de $G_{\mu\nu\kappa}$ é dado por:

$$\widetilde{G}_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{3!}\epsilon_{\mu\nu\kappa\alpha\beta\gamma}G^{\alpha\beta\gamma}. \tag{1.25}$$

As componentes de $\widetilde{G}_{\mu\nu\kappa}$ estão relacionadas àquelas de $\widetilde{G}_{\mu\nu\kappa}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{G}_{0ij} = \epsilon_{ijl}\Omega_l, \tag{1.26.a}$$

$$\widetilde{G}_{ijl} = \epsilon_{ijl}\Delta, \tag{1.26.b}$$

$$\widetilde{G}_{0i4} = \Sigma_i, \tag{1.26.c}$$

$$\widetilde{G}_{0i5} = -Z_i, \tag{1.26.d}$$

$$\widetilde{G}_{ij4} = \epsilon_{ijl} Y_l, \tag{1.26.e}$$

$$\widetilde{G}_{ij4} = \epsilon_{ijl} X_l, \tag{1.26.f}$$

$$\widetilde{G}_{045} = -B, \tag{1.26.g}$$

$$\widetilde{G}_{i45} = -E_i. \tag{1.26.h}$$

De forma semelhante ao Eletromagnetismo em $D = (1 + 3)$, vamos propor as seguintes "equações de movimento":

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}, \tag{1.27.a}$$

$$\partial_\mu \widetilde{G}^{\mu\nu\kappa} = 0, \tag{1.27.b}$$

onde $j^{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico de rank-2, com as seguintes componentes:

$$j_{0i} \equiv J_i, \tag{1.28.a}$$

$$j_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} j_k, \tag{1.28.b}$$

$$j_{05} \equiv \overline{K}, \tag{1.28.c}$$

$$j_{i4} \equiv L_i, \tag{1.28.d}$$

$$j_{i5} \equiv M_i, \tag{1.28.e}$$

$$j_{45} \equiv N. \tag{1.28.f}$$

Expresso em termos dos vetores $\vec{\boldsymbol{\xi}}, \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{Y}}, \vec{\mathbf{Z}}, \vec{\boldsymbol{\Sigma}}, \vec{\boldsymbol{\Omega}}$ e dos seguintes escalares B e Δ, o grupo de equações (1.27.a) é dado por:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial T} - \frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}}{\partial \overline{T}} = \vec{\mathbf{J}}, \tag{1.29.a}$$

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t} - \nabla B + \frac{\partial \vec{\mathbf{Z}}}{\partial T} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \overline{T}} = \vec{\mathbf{j}}, \tag{1.29.b}$$

$$\nabla \vec{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Delta}{\partial \overline{T}} = k, \tag{1.29.c}$$

$$\nabla \vec{\mathbf{Y}} - \frac{\partial \Delta}{\partial T} = \overline{k}, \tag{1.29.d}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\mathbf{Z}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial \overline{T}} = -\vec{\mathbf{L}}, \tag{1.29.e}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}}{\partial t} + \nabla \times \vec{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial T} = \vec{\mathbf{M}}, \tag{1.29.f}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\Omega}} = N. \tag{1.29.g}$$

Já o grupo de equações (1.27.b) assume a forma:

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{\Omega}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial T} - \frac{\partial \vec{\mathbf{Z}}}{\partial \overline{T}} = \mathbf{0}, \tag{1.30.a}$$

$$\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\Omega}}}{\partial t} - \nabla \Delta + \frac{\partial \vec{\mathbf{Y}}}{\partial T} - \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}}{\partial \overline{T}} = \mathbf{0}, \tag{1.30.b}$$

$$\nabla \vec{\boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\partial B}{\partial \overline{T}} = \mathbf{0}, \tag{1.30.c}$$

$$\nabla\vec{\mathbf{Z}} - \frac{\partial B}{\partial T} = 0, \qquad (1.30.d)$$

$$\frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial t} - \nabla\times\vec{\mathbf{Y}} - \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial\overline{\overline{T}}} = 0, \qquad (1.30.e)$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{Z}}}{\partial t} - \nabla\times\vec{\mathbf{X}} - \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial T} = 0, \qquad (1.30.f)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} - \nabla\vec{\xi} = 0. \qquad (1.30.g)$$

Da equação (1.10), vimos que no espaço $D = (3+3)$ é possível impor a auto-dualidade sobre um tensor antissimétrico de rank-3. O tensor $G_{\mu\nu\kappa}$ tem 20 componentes independentes. Impondo-se a condição de auto-dualidade sobre $G_{\mu\nu\kappa}$, essas componentes reduzem-se a 10, da seguinte forma:

$$\vec{\xi} = -\vec{\Omega},$$

$$B = -\Delta,$$

$$\vec{\mathbf{X}} = \vec{\Sigma},$$

$$\vec{\mathbf{Y}} = -\vec{\mathbf{Z}}.$$

A condição de auto-dualidade, vista em termos do grupo de equações (1.27) no vácuo, faz com que tais equações sejam associadas aos pares:

$$\nabla\times\vec{\xi} - \frac{\partial\vec{\mathbf{X}}}{\partial T} - \frac{\partial\vec{\mathbf{Y}}}{\partial\overline{T}} = \mathbf{0} \longrightarrow \nabla\times\vec{\Omega} + \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial T} - \frac{\partial Z}{\partial\overline{T}} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t} - \nabla B + \frac{\partial\vec{\mathbf{Z}}}{\partial T} + \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial\overline{T}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} - \nabla\Delta + \frac{\partial\vec{\mathbf{Y}}}{\partial T} - \frac{\partial\vec{\mathbf{X}}}{\partial\overline{T}} = 0$$

$$\nabla\vec{\mathbf{X}} + \frac{\partial\Delta}{\partial\overline{T}} = 0 \longrightarrow \nabla\vec{\Sigma} - \frac{\partial B}{\partial\overline{T}} = 0$$

$$\partial\vec{\mathbf{Y}} - \frac{\partial\Delta}{\partial T} = 0 \longrightarrow \nabla\vec{\mathbf{Z}} - \frac{\partial B}{\partial T} = 0$$

$$\frac{\nabla\vec{\mathbf{X}}}{\partial t} + \nabla\times\vec{\mathbf{Z}} + \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\overline{T}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial\vec{\Sigma}}{\partial t} - \nabla\times\vec{\mathbf{Y}} - \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial\overline{T}} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{\mathbf{Y}}}{\partial t} + \nabla\times\vec{\Sigma} - \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial T} = 0 \longrightarrow \frac{\partial\vec{\mathbf{Z}}}{\partial t} - \nabla\times\vec{\mathbf{X}} - \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial T} = 0$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} - \nabla\vec{\Omega} = 0 \longrightarrow \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla\vec{\xi} = 0$$

Concluindo este capítulo, seria interessante deixar claro que a auto-dualidade da teoria-de-gauge Abeliana definida pelo campo tensorial $B_{\mu\nu}$ é consistente do ponto-de-vista das equações de campo, como se viu anteriormente.

Sabe-se que, em D dimensões, uma 2-forma apresenta $\frac{(D-2)(D-3)}{2}$ graus-de-liberdade on-shell. No caso de $B_{\mu\nu}$, os 6 graus-de-liberdade tensoriais em 6 dimensões, ao sofrerem o mecanismo de redução dimensional para o espaço de Minkowski $D = (1+3)$, serão distribuídos em 2 graus-de-liberdade escalares e 4 graus-de-liberdade de natureza vetorial, como será visto no

Capítulo 3. Entretanto, seria ilustrativo, antes de passarmos ao processo de redução, estudarmos as representações espinoriais de $SO_o(3,3)$ e constatarmos que a auto-dualidade do modelo Abeliano é acompanhada da existência de espinores de Majorana-Weyl, que possibilitam a formulação de um interessante modelo supersimétrico. Este será o material que apresentaremos no Capítulo 2.

Capítulo 2

Espinores de $SO_o(3,3)$

Neste capítulo, começamos observando que um espinor genérico no espaço $D = (3+3)$ possui 8 componentes complexas. A dinâmica de tal espinor é governada por uma equação tipo-Dirac, onde aparecem matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\mu}$ satisfazendo à álgebra de Clifford. No espaço $D = (3+3)$, uma representação para tais matrizes será construída em termos das conhecidas matrizes-γ^{μ}, quatro-por-quatro, na representação de Dirac, da álgebra de Clifford do espaço-tempo $D = (1+3)$. As matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\mu}$ são utilizadas na seção seguinte para definir os geradores de $SO_o(3,3)$ representados no espaço 8-dimensional dos espinores.

É muito importante, para o desenvolvimento da teoria, que saibamos construir a partir dos espinores, grandezas que, sob transformações de Lorentz, tenham um caráter bem definido, ou seja, grandezas escalares, 6-vetores, etc. Para construir tais grandezas, definimos a operação que denominamos a conjugação de Dirac.

Pensando no acoplamento eletromagnético dos férmions de Dirac em $D = (3+3)$, e também na possibilidade de se estabelecer espinores de Majorana nesse espaço, definimos a matriz $\mathbf{C}$, que realiza a conjugação de carga sobre um espinor ψ. Tal matriz, no nosso espaço, será simétrica, o que possibilita a construção de espinores de Majorana não-triviais. Uma representação para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}$ onde tais espinores são reais é dada, e denominada Representação de Majorana.

A matriz $\mathbf{\Gamma}_7$, que comuta com todas as outras matrizes-$\mathbf{\Gamma}$ é introduzida, e, com ela, são definidos os espinores de Weyl Left-Handed e Right-Handed.

Os espinores que são, ao mesmo tempo de Majorana e de Weyl, existem no espaço $D = (3+3)$. Por último, uma representação para as $\mathbf{\Gamma}^{\mu}$ onde $\mathbf{\Gamma}_7$ é diagonal será dada, e denominála-emos de Representação de Weyl.

2.1 Espinores de Dirac no espaço $D = (3+3)$

Em um espaço de dimensão arbitrária, os Férmions de Dirac são representados por espinores com $2^{\left[\frac{D}{2}\right]}$ componentes complexas, onde $\left[\frac{D}{2}\right]$ indica a parte inteira de $\frac{D}{2}$, sendo D a dimensão do espaço [7]. No caso que estamos estudando, os espinores possuem oito componentes independentes. Um espinor será representado por uma matriz coluna.

$$\psi \equiv \begin{bmatrix} \zeta \\ \\ \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

onde $\boldsymbol{\zeta}$ e Π são uma forma condensada para escrever as componentes de ψ.

Assim como fazemos em $D = (1+3)$, vamos postular uma equação que estabelece uma dinâmica para os nossos espinores (2.1). Tal equação será denominada "Equação de Dirac", e será dada por

$$(i\boldsymbol{\Gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = 0. \tag{2.2}$$

Em (2.2), Γ^{μ} são matrizes oito-por-oito satisfazendo à relação algébrica:

$$\{\boldsymbol{\Gamma}^{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}^{v}\} = 2\eta^{\mu v}, \tag{2.3}$$

$\mu, v = 0,1,2,3,4,5.$

Uma representação possível para as matrizes-Γ^{μ} , que denominaremos Representação de Dirac, é a que segue:

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_4 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}^i \\ -\boldsymbol{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

As matrizes $\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma}^i$ (com $i = 1, 2, 3$) e $\boldsymbol{\gamma}^5$ são as conhecidas matrizes-$\boldsymbol{\gamma}$ do espaço $D = (1 + 3)$ na Representação de Dirac, $\boldsymbol{\sigma}^i$ são as conhecidas matrizes de Pauli e $\mathbb{1}_4$ e $\mathbb{1}_2$ são as matrizes identidades quatro-por-quatro e dois-por-dois, respectivamente.

2.2 Representação de $\mathbf{SO}_0\,(3,3)$ no Espaço dos Espinores

É possível mostrar que $\mathbf{\Sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\mathbf{\Gamma}_\mu, \mathbf{\Gamma}_\nu]$ são os geradores do grupo de Lorentz satisfazendo à relação

$$[\mathbf{\Sigma}_{\mu\nu}, \mathbf{\Sigma}_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}\,\mathbf{\Sigma}_{\sigma\nu} - \eta_{v\rho}\,\mathbf{\Sigma}_{\sigma\mu} + \eta_{\mu\sigma}\mathbf{\Sigma}_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}\,\mathbf{\Sigma}_{\mu\rho}. \tag{2.5}$$

Sendo assim, uma representação para $\mathrm{SO}_0\,(3,3)$ pode ser dada por

$$\mathbf{R} = \exp\{\frac{1}{8}w^{\mu v}[\mathbf{\Gamma}_\mu, \mathbf{\Gamma}_v]\}. \tag{2.6}$$

Desejamos construir, agora, quantidades que sejam invariantes ou covariantes segundo o grupo de Lorentz. Tais quantidades serão úteis no desenvolvimento da dinâmica dos nossos espinores.

A matriz R não é unitária, pois nem todos os geradores $\sum_{\mu v}$ são anti-Hermitianos. Dessa forma, quantidades como $\psi^\dagger\,(x)\,\psi\,(x)$ não é invariante de Lorentz. Nossa proposta é definir uma operação de "Conjugação de Dirac"

$$\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\,\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^4\,\mathbf{\Gamma}^5, \tag{2.7.a}$$

$$\overline{\mathbf{M}} \equiv \left(\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^4\,\mathbf{\Gamma}^5\right)^{\dagger}\mathbf{M}^{\dagger}\left(\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^4\,\mathbf{\Gamma}^5\right), \tag{2.7.b}$$

onde $\mathbf{M}$ é uma matriz oito-por-oito arbitrária.

De (2.7.a) e (2.7.b), concluímos

$$\overline{\mathbf{M}\psi} = \overline{\psi}\ \overline{\mathbf{M}}, \tag{2.7.c}$$

$$\overline{\mathbf{M}\mathbf{N}} = \overline{\mathbf{N}}\,\overline{\mathbf{M}}, \tag{2.7.d}$$

$$\overline{i\psi} = -i\overline{\psi}, \tag{2.7.e}$$

$$\overline{i\mathbf{M}} = -i\overline{\mathbf{M}}. \tag{2.7.f}$$

De $\psi'(x') = \mathbf{R}\psi\,(x)$ temos, de acordo com (2.7.c), que $\overline{\psi'(x')} = \overline{\psi\,(x)}\,\overline{\mathbf{R}}$. Mas $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{-1}$. Dessa forma $\overline{\psi'(x')}\ \psi'(x') = \overline{\psi(x)}\ \psi(x)$ é um escalar de Lorentz.

Da invariância da equação de Dirac sob transformações de Lorentz, temos que $\overline{\mathbf{R}}\,\mathbf{\Gamma}^{\mu}\mathbf{R} = \Lambda^{\mu}_{v}\mathbf{\Gamma}^{v}$; sendo assim, concluímos que quantidades como

$\overline{\psi}'\,(x')\,\mathbf{\Gamma}^{\mu}\psi'\,(x) = \overline{\psi}\,(x)\,\overline{\mathbf{R}}\,\mathbf{\Gamma}^{\mu}\mathbf{R}\psi\,(x) = \Lambda^{\mu}_{v}\overline{\psi}\,(x)\,\mathbf{\Gamma}^{v}\psi\,(x)$

transformam-se como 6-vetores. De maneira bem parecida, é possível construir com os espinores $\psi\,(x)$ e $\overline{\psi}\,(x) = \psi^{\dagger}\,(x)\,\mathbf{\Gamma}^0\mathbf{\Gamma}^4\mathbf{\Gamma}^5$, grandezas que sob o ponto-de-vista das transformações de Lorentz, são bem-definidas (escalares, 6-vetores, tensores, etc.).

2.3 Conjugação de carga em $D = (3+3)$

É possível construir uma matriz $\mathbf{C}$ tal que

$$\mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_\mu^T\mathbf{C}^{-1} = -\mathbf{\Gamma}_\mu \tag{2.8.a}$$

e

$$\mathbf{C}^\dagger = \mathbf{C}^{-1}, \tag{2.8.b}$$

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}. \tag{2.8.c}$$

Tal matriz pode ser dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Gamma}^0\mathbf{\Gamma}^2\mathbf{\Gamma}^4\mathbf{\Gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0\gamma^2\gamma^5 \\ -\gamma^0\gamma^2\gamma^5 & 0 \end{pmatrix},$$

onde as matrizes-$\mathbf{\Gamma}$ estão na representação de Dirac (2.4).

A matriz $\mathbf{C}$ é usada para definir o espinor conjugado de carga

$$\psi^c \equiv \mathbf{C}\overline{\psi}^T. \tag{2.9}$$

Dado ψ, solução da equação $i\mathbf{\Gamma}^\mu\partial_\mu\psi - i\mathbf{\Gamma}^\mu A_\mu\psi - m\psi = 0$, podemos mostrar que ψ^c é solução da equação $i\mathbf{\Gamma}^\mu\partial_\mu\psi^c + i\mathbf{\Gamma}^\mu A_\mu\psi^c - m\psi^c = 0$; para fazer isso, tomamos sucessivamente o conjugado de Dirac e a transposta da primeira equação. A_μ designa um campo eletromagnético externo, ao qual o férmion descrito pelo espinor ψ é minimamente acoplado.

2.4 Espinores de Majorana

No espaço $D = (3+3)$, é possível ter espinores de Majorana, ou seja, espinores que são auto-conjugados de carga:

$$\psi^c = \psi. \tag{2.10}$$

Isso não é possível para espaços-tempo arbitrários. Dado um espaço-tempo de dimensão arbitrária, pode ocorrer que a matriz C não permita o resultado

$$(\psi^c)^c = \psi, \tag{2.11.a}$$

mas sim

$$(\psi^c)^c = -\psi. \tag{2.11.b}$$

As condições (2.11.b) e (2.10) implicam que os únicos espinores de Majorana possíveis são triviais, ou seja, iguais a zero. Portanto, um espaço-tempo arbitrário só admite espinores de Majorana se valer a condição (2.11.a).

Para sabermos a que condição uma matriz $\mathbf{C}$ deve satisfazer para que seja possível definir espinores de Majorana, devemos estudar o efeito de duas conjugações de carga sucessivas:

$$(\psi^c)^c = \mathbf{C}\overline{(\psi^c)}^T.$$

Mas $\overline{\psi^c} = \psi^T \mathbf{C}^{-1}$ logo a matriz $\mathbf{C}$ deve ser simétrica para permitir a existência de espinores de Majorana não triviais. Este é o caso de $\mathbf{C}$ no espaço $D = (3+3)$, como já havíamos antecipado em (2.8.c).

Um espinor de Majorana possui apenas quatro componentes complexas independentes. Na representação de Dirac, é dado por:

$$\psi = \begin{bmatrix} \zeta \\ \\ -\gamma^2\zeta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ i\psi_4^* \\ -i\psi_3^* \\ -i\psi_2^* \\ i\psi_1^* \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

onde γ^2 é uma das matrizes de Dirac quatro-por -quatro, dada em (2.4).

No espaço onde é possível definir espinores de Majorana não-triviais, pode-se encontrar uma representação para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}$ na qual tais espinores sejam reais.

$$\psi = \mathbf{C}\,\overline{\psi}^{T} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Gamma}^{5T}\boldsymbol{\Gamma}^{4T}\boldsymbol{\Gamma}^{0T}\psi^{*} = -\boldsymbol{\Gamma}^{5}\boldsymbol{\Gamma}^{4}\boldsymbol{\Gamma}^{0}\mathbf{C}\psi^{*}; \tag{2.13}$$

se $\mathbf{C} = -\boldsymbol{\Gamma}^{0}\boldsymbol{\Gamma}^{4}\boldsymbol{\Gamma}^{5}$, então $\psi = \psi^{*}$, ou seja, ψ é real.

Uma possível representação para as matrizes-$\boldsymbol{\Gamma}$, onde $\mathbf{C} = -\boldsymbol{\Gamma}^{0}\boldsymbol{\Gamma}^{4}\boldsymbol{\Gamma}^{5}$, pode ser dada por:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}^{0} = \begin{pmatrix} i\gamma^{3} & 0 \\ 0 & i\gamma^{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{1} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{2} \\ -\gamma^{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{2} = \begin{pmatrix} i\gamma^{5} & 0 \\ 0 & i\gamma^{5} \end{pmatrix} \\
&\boldsymbol{\Gamma}^{3} = \begin{pmatrix} i\gamma^{0} & 0 \\ 0 & i\gamma^{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{4} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{2} \\ \gamma^{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}^{5} = \begin{pmatrix} i\gamma^{1} & 0 \\ 0 & i\gamma^{1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Tal representação será denominada Representação de Majorana.

2.5 Espinores de Weyl

Independentemente da representação escolhida para as matrizes-Γ, é sempre possível definir

$$\boldsymbol{\Gamma}_{7} = \boldsymbol{\Gamma}^{0}\boldsymbol{\Gamma}^{1}\boldsymbol{\Gamma}^{2}\boldsymbol{\Gamma}^{3}\boldsymbol{\Gamma}^{4}\boldsymbol{\Gamma}^{5}, \tag{2.15}$$

tal que $\{\boldsymbol{\Gamma}_{7}, \boldsymbol{\Gamma}^{\mu}\} = \mathbf{0}$, $\forall\mu = 0,1,2,3,4,5$; $(\boldsymbol{\Gamma}_{7})^{2} = \mathbb{1}$; $\boldsymbol{\Gamma}_{7}^{\dagger} = \boldsymbol{\Gamma}_{7}$; $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_{7} = -\boldsymbol{\Gamma}_{7}$.

Com $\boldsymbol{\Gamma}_{7}$, podemos definir dois operadores

$$\mathbf{P}_{\pm} = \frac{\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\Gamma}_{7}}{2}, \tag{2.16.a}$$

satisfazendo às seguintes propriedades:

$$\mathbf{P}_{\pm}^{2} = \mathbf{P}_{\pm}, \tag{2.16.b}$$

$$\mathbf{P}_{\pm}\mathbf{P}_{\mp} = 0, \tag{2.16.c}$$

$$(\mathbf{P}_\pm)^\dagger = \mathbf{P}_\pm, \tag{2.16.d}$$

$$\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathbb{1}, \tag{2.16.e}$$

$$\overline{\mathbf{P}}_\pm = \mathbf{P}_\mp. \tag{2.16.f}$$

(2.16.a) - (2.16.e) estabelecem que $\mathbf{P}_\pm$ são operadores de projeção sobre subespaços ortogonais suplementares.

Dado um espinor genérico, ψ, os espinores $\psi_L \equiv \mathbf{P}_+\psi$ e $\psi_R \equiv \mathbf{P}_-\psi$ são auto-vetores de $\mathbf{\Gamma}_7$ com auto-valores $+1$ e -1, respectivamente. Os auto-vetores de $\mathbf{\Gamma}_7$ com auto-valores $+1$ e -1 são denominados espinores de Weyl left-handed e espinor de Weyl right-handed, respectivamente.

Tais espinores, na representação de Dirac (2.4), são dados por

$$\psi_L = \begin{bmatrix} \zeta \\ \\ i\,\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ i\psi_1 \\ i\psi_2 \\ i\psi_3 \\ i\psi_4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_R = \begin{bmatrix} \zeta \\ \\ -i\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ -i\psi_1 \\ -i\psi_2 \\ -i\psi_3 \\ -i\psi_4 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

2.6 Espinores de Majorana-Weyl

É possível definir, no espaço $D = (3+3)$, espinores que são simultaneamente auto-conjugados de carga e auto-vetores de $\mathbf{\Gamma}_7$. Tais espinores são denominados espinores de Majorana-Weyl e satisfazem às condições seguintes:

$$\begin{matrix} \mathbf{C}\overline{\psi}^T = \psi \\ \mathbf{\Gamma}_7\psi = \pm\psi \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{C}\overline{(\pm\mathbf{\Gamma}_7\psi)}^T = \psi$$

$$\pm\mathbf{C}\left(\overline{\psi}\mathbf{\Gamma}_7\right)^T = \psi$$

$$\pm\mathbf{C}\left(\overline{\psi}\mathbf{\Gamma}_7\right)^T = \psi$$

$$\pm\mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_7^T\overline{\psi}^T = \psi \Rightarrow \mp \quad \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}_7^T\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\right)\overline{\psi}^T = \psi$$

$$\pm\mathbf{\Gamma}_7\mathbf{C}\,\overline{\psi}^T = \psi \Rightarrow \quad \mathbf{\Gamma}_7\psi = \pm\psi = \pm\mathbf{\Gamma}_7\psi,$$

$$\text{com } \psi \neq 0.$$

Um espinor L-Handed de Majorana-Weyl na representação de Dirac (2.4) pode ser escrito como

$$\psi_{(M-W)_L} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -\psi_2^* \\ \psi_1^* \\ i\psi_1 \\ i\psi_2 \\ -i\psi_2^* \\ i\psi_1^* \end{bmatrix},$$

ao passo que um espinor R-Handed de M-W será dado por

$$\psi_{(M-W)_R} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_2^* \\ -\psi_1^* \\ -i\psi_1 \\ -i\psi_2 \\ -i\psi_2^* \\ i\psi_1^* \end{bmatrix}.$$

2.7 Representação de Weyl para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}$

Podemos encontrar, para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}$, uma representação onde $\mathbf{\Gamma}_7$ seja dada por

$$\Gamma_7 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Tal representação será denominada representação de Weyl e pode ser escrita como abaixo:

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \; , \; \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \Gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^1 \\ i\gamma^1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^3 \\ i\gamma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este resultado é bastante relevante por estabelecer de maneira explícita a relação existente entre $SO_o(3,3)$ e $SL(4,R)$: este último aparece como o grupo de recobrimento universal de $SO_o(3,3)$, o que pode ser reformulado dizendo-se que estes dois grupos são localmente isomórficos.

Concluindo, neste capítulo, foram apresentadas as diferentes modalidades de espinores que podem ser definidos em $D = (3+3)$, e o mais interessante resultado é a existência de férmions de Majorana-Weyl. Pudemos encontrar uma representação para a álgebra de Clifford na qual as matrizes - Γ^μ são puramente imaginárias e os espinores de Majorana -Weyl reduzem-se a 4 componentes reais, o que traz uma grande simplificação na formulação de um modelo supersimétrico em $D = (3+3)$.

A seguir, voltaremos à questão do modelo de gauge auto-dual e, finalmente, estudá-lo-emos do ponto-de-vista do espaço de Minkowski.

Capítulo 3

Auto-Dualidade e Massa Topológica

Neste capítulo, tratamos a questão de reduzir nosso modelo, inicialmente formulado em $D = (3+3)$, para um modelo em $D = (1+3)$. Primeiramente, realizamos tal programa com o modelo Abeliano baseado em $B_{\mu\nu}$, e indicamos que essa redução leva-nos a equações de movimento consistentes com o que já havíamos visto no Capítulo 2. Em seguida, mostramos poder obter do modelo auto-dual 6-dimensional o termo de Chern-Simon em $D = (1+3)$.

3.1 Redução do Modelo Tensorial Abeliano

No Capítulo 1, introduzimos as equações de movimento tipo-Maxwell para um tensor real totalmente antissimétrico de rank-3:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} = j^{\nu\kappa}. \tag{3.1}$$

Tal equação pode ser obtida do seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} G_{\mu\nu\kappa} G^{\mu\nu\kappa} + j_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

impondo-se que

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{3} G^{\mu\nu\kappa} \left(\delta G^{\mu\nu\kappa}\right) + j_{\mu\nu} \left(\delta B^{\mu\nu}\right) = 0,$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\partial G_{\mu\nu\kappa}}{\partial\left(\partial_\lambda B_{\rho\sigma}\right)}\delta\left(\partial_\lambda B_{\rho\sigma}\right)\right]G^{\mu\nu\kappa} + j_{\mu\nu}\left(\delta B^{\mu\nu}\right),$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \partial_\mu\left(\delta B_{\nu\kappa}\right)G^{\mu\nu\kappa} + j^{\nu\kappa}\left(\delta B_{\nu\kappa}\right) \\
&= \partial_\mu\left(\delta B_{\nu\kappa}G^{\mu\nu\kappa}\right) - \left(\delta B_{\nu\kappa}\right)\left(\delta_\mu G^{\mu\nu\kappa}\right) + j^{\nu\kappa}\left(\delta B_{\nu\kappa}\right).
\end{aligned}$$

A primeira parcela da quarta igualdade é uma 6-divergência, que se anula ao integrarmos em todo o espaço:

$$\delta\mathcal{L} = \left[\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} - j^{\nu\kappa}\right]\left(\delta B_{\nu\kappa}\right) = 0.$$

$\delta B_{\nu\kappa}$ são variações arbitrárias, logo

$$\partial_\mu G^{\mu\nu\kappa} - j^{\nu\kappa} = 0.$$

Os índices em (3.1) podem assumir qualquer um dos seguintes valores $\{0,1,2,3,4,5\}$; sendo assim, no que se segue, passaremos a distingüir duas situações possíveis: uma delas, quando os índices forem do espaço $D = (3+3)$, e a outra quando os índices forem do espaço $D = (1+3)$. No primeiro caso, usaremos para representar tal índice uma letra grega acrescida de um símbolo "chapéu"; por exemplo, $\widehat{\mu}$. No segundo caso, apenas uma letra grega, sem nenhum acréscimo de sinal, será usada:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= 0,1,2,3,4,5, \qquad (3.3)\\
\mu &= 0,1,2,3.
\end{aligned}$$

Esclarecido isto, iremos realizar, agora, a redução dimensional de nosso modelo, formulado em seis dimensões, para um modelo em quatro dimensões.

Para o vácuo, as equações (3.1) tornam-se

$$\partial_{\widehat{\mu}} G^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}} = 0, \tag{3.4}$$

e o Lagrangeano (3.2)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} G_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}} G^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}}, \tag{3.5}$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} \left\{ G_{\mu\nu\kappa} G^{\mu\nu\kappa} + 3G_{\mu\nu 4} G^{\mu\nu 4} + 3G_{\mu\nu 5} G^{\mu\nu 5} + 6G_{\mu 45} G^{\mu 45} \right\}. \tag{3.6}$$

Em $G_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}} = \partial_{\widehat{\mu}} B_{\widehat{\nu}\widehat{\kappa}} + \partial_{\widehat{\nu}} B_{\widehat{\kappa}\widehat{\mu}} + \partial_{\widehat{\kappa}} B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$, postulamos que qualquer que sejam as componentes $B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}$, elas não dependem nem de T e nem de $\overline{T}$, de tal modo que

$$\partial_4 B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = \frac{\partial B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}}{\partial T} = 0; \; \partial_5 B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = \frac{\partial B_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}}{\partial \overline{T}} = 0. \tag{3.7}$$

Este "ansatz" de redução dimensional, em que se postula a independência em algumas das coordenadas extras, não introduz nenhum parâmetro com dimensão de comprimento, não gerando, conseqüentemente, excitações massivas na teoria reduzida [1].

Da definição de $G_{\widehat{\mu}\widehat{\nu}\widehat{\kappa}}$ e de (3.7) , temos

$$G_{\mu\nu 4} = \partial_\mu B_{\nu 4} - \partial_\nu B_{\mu 4}, \tag{3.8.a}$$

$$G_{\mu\nu 5} = \partial_\mu B_{\nu 5} - \partial_\nu B_{\mu 5}, \tag{3.8.b}$$

$$G_{\mu 45} = \partial_\mu B_{45}. \tag{3.8.c}$$

Definindo

$$\left. \begin{array}{l} B^{\mu 4} \equiv B^{\mu 1} \\ B^{\mu 5} \equiv B^{\mu 2} \end{array} \right\} \Rightarrow \; B^{\mu a}, \text{ onde } a = 1, 2, \tag{3.9}$$

$$\text{e} \quad B^{45} \equiv \phi,$$

substituindo (3.9) em (3.8) , e depois substituindo o resultado em (3.6) , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \tfrac{1}{6} \Big\{ & G_{\mu\nu\kappa} G^{\mu\nu\kappa} + 3 \left(\partial_\mu B^1_\nu - \partial_\nu B^1_\mu\right) \left(\partial^\mu B^{\nu 1} - \partial^\nu B^{\mu 1}\right) + \\ & + 3 \left(\partial_\mu B^2_\nu - \partial_\nu B^2_\mu\right) \left(\partial^\mu B^{\nu 2} - \partial^\nu B^{\mu 2}\right) + 6\, \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \} \Big\} . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definindo $F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu$, e substituindo em (3.10) , temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} \left\{ G_{\mu\nu\kappa} G^{\mu\nu\kappa} + 3\, F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu a} + 6 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right\}, \tag{3.11}$$

onde a repetição do índice "a" indica soma sobre o mesmo.

A ação, S, para o nosso problema pode ser dada por

$$S = \int d^6 x\, \mathcal{L}' = \tfrac{1}{12} \int dx^\alpha\, dx^4 dx^5 \left\{ G_{\mu\nu\kappa}\, G^{\mu\nu\kappa} + 3\, F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu a} + 6 \partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi \right\},$$

onde $\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \mathcal{L}$. Esta substituição é lícita, uma vez que as equações de movimento são as mesmas, tanto para $\mathcal{L}$ quanto para $\mathcal{L}'$. Além do mais, ela é bem apropriada, pois, como veremos adiante, em $\mathcal{L}'$ aparecerá o termo $\left(\frac{1}{4}\right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, que é o Lagrangeano de Maxwell em $D = (1+3)$, a menos do sinal.

Usando um artifício muito comum, que é o de considerar as coordenadas extras, T e $\overline{T}$, periódicas, temos:

$$S = L_1 L_2 \int dx^\alpha \left\{ \frac{1}{12} G_{\mu\nu\kappa}\, G^{\mu\nu\kappa} + \frac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} \partial_\mu\, \phi\, \partial^\mu \phi \right\}, \tag{3.12}$$

onde L_1 e L_2 são os períodos de T e $\overline{T}$, respectivamente. De (3.12) , temos:

$$\begin{aligned} \delta S &= L_1 L_2 \int dx^\alpha \left\{ \tfrac{1}{6} \left(\delta\, G_{\mu\nu\kappa}\right) G^{\mu\nu\kappa} + \tfrac{1}{2} \left(\delta F^a_{\mu\nu}\right) F^{\mu\nu a} + \left(\partial_\mu\, \delta\, \phi\right) \left(\partial^\mu \phi\right) \right\}, \\ &= L_1 L_2 \int dx^\alpha \Big\{ \tfrac{1}{6} \left(\partial_\mu \delta\, B_{\nu\mu} + \partial_\nu \delta\, B_{k\mu} + \partial_\kappa \delta\, B_{\mu\nu}\right) G^{\mu\nu\kappa} + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} \left(\partial_\mu \delta\, B_{\nu 4} - \partial_\nu \delta\, B_{\mu 4}\right) F^{\mu\nu 1} + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2} \left(\partial_\mu\, \delta\, B_{\nu 5} - \partial_\nu\, \delta\, B_{\mu 5}\right) F^{\mu\nu 2} + \left(\partial^\mu \delta\, B_{45}\right) \left(\partial^\mu B^{45}\right) \Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta S = L_1\, L_2 \int dx^\alpha \Big\{ & \tfrac{1}{2} \left(\partial_\mu \delta\, B_{\nu k}\right) G^{\mu\nu\kappa} + \left(\partial_\mu \delta\, B_{\nu 4}\right) F^{\mu\nu 1} + \\ & + \left(\partial_\mu \delta\, B_{\nu 5}\right) F^{\mu\nu 2} + \left(\partial_\mu \delta\, B_{45}\right) \left(\partial^\mu B^{45}\right) \} , \end{aligned}$$

$$\delta S = L_1\, L_2 \int dx^{\alpha} \left\{ \tfrac{1}{2} \left[\partial_{\mu} \left(\delta\, B_{\nu k}\, G^{\mu\nu\kappa} \right) - \delta\, B_{\nu k}\, \partial_{\mu}\, G^{\mu\nu\kappa} \right] + \right.$$
$$+ \left[\partial_{\mu} \left(\delta\, B_{\nu 4}\, F^{\mu\nu 1} \right) - \delta\, B_{\nu 4}\, \partial_{\mu}\, F^{\mu\nu 1} \right] +$$
$$+ \left[\partial_{\mu} \left(\delta\, B_{\nu 5}\, F^{\mu\nu 2} \right) - \delta\, B_{\nu 5}\, \partial_{\mu}\, F^{\mu\nu 2} \right] +$$
$$\left. + \left[\partial_{\mu} \left(\delta\, B_{45}\, \partial^{\mu}\, B^{45} \right) - \delta\, B_{45}\, \partial^{\mu}\, \partial^{\mu}\, B^{45} \right] \right\},$$

$$\delta S = -L_1 L_2 \int dx^{\alpha} \left\{ \tfrac{1}{2}\, \partial_{\mu}\, G^{\mu\nu\kappa} + \eta^{4k}\, \partial_{\mu}\, F^{\mu\nu 1} + \eta^{5\kappa}\, \partial_{\mu}\, F^{\mu\nu 2} \right.$$
$$\left. + \eta^{\nu\, 4} \eta^{k5}\, \partial_{\mu}\, \partial_{\mu}\, B^{45} \right\} \delta B_{\nu\kappa} = 0.$$

Logo:

$$\frac{1}{2}\, \partial_{\mu}\, G^{\mu\nu\kappa} + \eta^{4k} \partial_{\mu} F^{\mu\nu 1} + \eta^{5\kappa} \partial_{\mu}\, F^{\mu\nu 2} + \eta^{\nu 4} \eta^{\kappa 5}\, \partial_{\mu} \partial^{\mu} B^{45} = 0. \tag{3.13}$$

Da equação acima, temos que, para $\nu, \kappa = 0, 1, 2, 3,$

$$\partial_{\mu}\, G^{\mu\nu\kappa} = 0. \tag{3.14}$$

A equação (3.14) é consistente com as equações de campo definidas no modelo $D = (3+3)$. Como exemplo, vamos considerar o caso com $\nu = 0$ e $\kappa = i$, do que decorre:

$$\partial_j G^{j0i} = 0 \;\rightarrow\; \nabla \times \vec{\xi} = 0.$$

Estes resultados ilustram o que o modelo proposto em $(3+3)$ dimensões produz na teoria reduzida para o espaço de Minkowski mediante a adoção do "ansatz" de redução de Scherk [1].

No Capítulo 2, viu-se que o modelo auto-dual em $D = (3+3)$ fornece três vetores e um escalar, que são equivalentes a um tensor antissimétrico e um quadrivetor, A_{μ}, em $D = (3+3)$. Veremos agora que, se propusermos um esquema alternativo de redução dimensional, poderemos, a partir da auto-dualidade em $D = (3+3)$, chegar ao termo topológico de massa:

$$\epsilon^{u\,\nu\,k\,\lambda} B_{u\,\nu}\, \partial_{\kappa}\, A_{\lambda}, \tag{3.15}$$

o qual, no espaço de Minkowski, em conjunção com o termo de propagação para os campos vetorial e tensorial, permite a introdução de um bóson vetorial massivo sem o recurso ao setor de escalares de Higgs [10].

Seja

$$S = \alpha \int d^6 \widehat{x}\, \widehat{H}^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\widehat{\gamma}} (\widehat{G}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\,\widehat{\gamma}} - \frac{1}{3!}\, \widehat{\epsilon}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\,\widehat{\gamma}\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\, \widehat{G}^{\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}), \qquad (3.16)$$

onde α é uma constante arbitrária , $\widehat{H}^{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\,\widehat{\gamma}}$ são multiplicadores de Lagrange e todos os índices com chapéu referem-se ao espaço $D = (3+3)$:

$$\begin{aligned} S = \alpha \int d^6 \widehat{x}\, \Big\{ & \widehat{H}^{\alpha\beta\gamma} [\widehat{G}_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{1}{3!}\, \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\, \widehat{G}^{\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}] + \\ & + 3\widehat{H}^{\alpha\beta 4} [\widehat{G}_{\alpha\beta 4} - \tfrac{1}{3!}\, \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 4\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\, \widehat{G}^{\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}] + \\ & + 3\widehat{H}^{\alpha\beta 5} [\widehat{G}_{\alpha\beta 5} - \tfrac{1}{3!}\, \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 5\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\, \widehat{G}^{\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}] + \\ & + 6\widehat{H}^{\alpha 4 5} [\widehat{G}_{\alpha 4 5} - \tfrac{1}{3!}\, \widehat{\epsilon}_{\alpha 4 5\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}\, \widehat{G}^{\widehat{\lambda}\widehat{\rho}\widehat{\sigma}}] \Big\}. \end{aligned} \qquad (3.17)$$

Baseando-se em recente resultado encontrado na ref.[8], propomos abaixo um "ansatz" alternativo de redução dimensional:

$$\widehat{B}_{\alpha 4} = \widehat{B}_{\alpha 5} = \widehat{B}_{45} = 0, \qquad (3.18.a)$$

$$\partial_4 \widehat{B}_{\alpha\beta} = \partial_5 \widehat{B}_{\alpha\beta} = 0. \qquad (3.18.b)$$

Como conseqüência das equações $(3.18.a - b)$, temos

$$\widehat{G}_{\alpha\beta 4} = \widehat{G}_{\alpha\beta 5} = \widehat{G}_{\alpha 45} = 0. \qquad (3.18.c)$$

Substituindo $(3.18.c)$ na equação (3.17) , chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned} S = \alpha \int d^6 \widehat{x}\, \Big\{ & \widehat{H}^{\alpha\beta\gamma}\, \widehat{G}_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{1}{3!} \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma} \widehat{H}^{\alpha\beta\gamma} \widehat{G}^{\lambda\rho\sigma} + \\ & - \tfrac{1}{2} \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 4\lambda\rho\sigma} \widehat{H}^{\alpha\beta 4} \widehat{G}^{\lambda\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} \widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 5\lambda\rho\sigma} \widehat{H}^{\alpha\beta 5} \widehat{G}^{\lambda\rho\sigma} + \\ & - \widehat{\epsilon}_{\alpha\lambda\rho\sigma 45} \widehat{H}^{\alpha 45} \widehat{G}^{\lambda\rho\sigma} \Big\}. \end{aligned} \qquad (3.19)$$

Todos os índices envolvidos na expressão acima assumem, agora, apenas os valores: 0,1,2,3; sendo assim, podemos escrever:

$$\widehat{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\lambda\rho\sigma}\widehat{H}^{\alpha\beta\gamma}\widehat{G}^{\lambda\rho\sigma}=\widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 4\lambda\rho\sigma}\widehat{H}^{\alpha\beta 4}\widehat{G}^{\lambda\rho\sigma}=\widehat{\epsilon}_{\alpha\beta 5\lambda\rho\sigma}\widehat{H}^{\alpha\beta 5}\widehat{G}^{\lambda\rho\sigma}=0. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.19), concluímos que

$$S=\alpha\int d^6\widehat{x}\left\{\widehat{H}^{\alpha\beta\gamma}\widehat{G}_{\alpha\beta\gamma}-\widehat{\epsilon}_{\alpha\lambda\rho\sigma 45}\widehat{H}^{\alpha 45}\widehat{G}^{\lambda\rho\sigma}\right\}. \tag{3.21}$$

Definindo agora:

$$\widehat{B}_{\alpha\beta}\left(\widehat{x^{\mu}}\right)\equiv F\left(T,\overline{T}\right)\widehat{B}_{\alpha\beta}\left(t,x,y,z\right)\equiv F\left(v,\omega\right)\widehat{B}_{\alpha\beta}\left(x^{\mu}\right) \tag{3.22.a}$$

$$\widehat{H}^{\alpha\beta\gamma}=\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\,g\left(v,\omega\right)\,A_{\lambda}\left(x^{\mu}\right), \tag{3.22.b}$$

$$\widehat{H}^{\alpha\,45}=g\left(v,\omega\right)\,A^{\alpha}\left(x^{\mu}\right), \tag{3.22.c}$$

como conseqüência das equações anteriores, obtemos que

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon^{\delta\tau\sigma\rho}\partial_{\tau}\widehat{B}_{\sigma\rho}\left(\widehat{\widehat{x}^{\mu}}\right)\\ &= \frac{F\left(v,w\right)}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon^{\delta\tau\sigma\rho}\partial_{\tau}B_{\sigma\rho}\left(x^{\mu}\right).\end{aligned} \tag{3.23}$$

Considerando ainda que

$$\epsilon_{\alpha\,\lambda\rho\sigma 45}\sim\epsilon_{\alpha\lambda\rho\sigma}\ \text{(onde “ $\sim$ ” significa “identificado com ”)},$$

e substituindo as equações $(3.22.b-c)$, (3.23) e (3.24) em (3.21), mostramos que

$$\begin{aligned}S &= \alpha\int d^6\widehat{x}\left\{\left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}g\left(v,w\right)A_{\lambda}\left(x^{\mu}\right)\right)\left(\frac{F\left(v,w\right)}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\epsilon^{\delta\tau\sigma\rho}\partial_{\tau}B_{\sigma\rho}\left(x^{\mu}\right)\right)+\right.\\ &\left.-\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\left(g\left(v,w\right)A^{\alpha}\left(x^{\mu}\right)\right)\left(\frac{F\left(v,w\right)}{2}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\delta}\,\epsilon_{\delta\tau\nu\kappa}\partial^{\tau}B^{\nu\kappa}\left(x^{\mu}\right)\right)\right\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S &= \alpha \int d^6\widehat{x} \frac{F(v,w)\, g(v,w)}{2} \left\{ \left(\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \right) \epsilon^{\delta\tau\sigma\rho} A_\lambda (x^\mu)\, \partial_\tau B_{\sigma\rho} (x^\mu) + \right. \\
&\left. - \left(\epsilon_{\alpha\lambda\rho\sigma} \epsilon^{\lambda\rho\sigma\delta} \right) \epsilon_{\delta\tau\nu\kappa} A^\alpha (x^\mu)\, \partial^\tau B^{\nu\kappa} (x^\mu) \right\}.
\end{aligned}
$$

Mas,

$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -6\delta^\lambda_\delta,$

$\epsilon_{\alpha\lambda\rho\sigma} \epsilon^{\lambda\rho\sigma\delta} = 6\delta^\delta_\alpha;$

logo,

$$
\begin{aligned}
S &= \alpha \int d^6\widehat{x} \frac{F(v,w)\, g(v,w)}{2} \left\{ -6\delta^\lambda_\delta \epsilon^{\delta\tau\sigma\rho} A_\lambda (x^\mu)\, \partial_\tau B_{\sigma\rho} (x^\mu) + \right. \\
&\left. -6\delta^\delta_\alpha \epsilon_{\delta\tau\nu\kappa} A^\alpha (x^\mu)\, \partial^\tau B^{\nu\kappa} (x^\mu) \right\},
\end{aligned}
$$

$$
S = -\alpha \int d^6\widehat{x}\, 6F(v,\omega)\, g(v,\omega)\, \varepsilon^{\lambda\tau\sigma\rho}\, A_\lambda\,(x)\, \partial_\tau\, B_{\sigma\rho}\,(x^\mu), \tag{3.24}
$$

$$
S = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dv\, d\omega\, F(v,\omega)\, g(v,\omega) \right) \int d^4x \left(-6\alpha\, \varepsilon^{\lambda\rho\sigma\eta}\, A_\lambda\,(x)\, \partial_\rho\, B_{\sigma\eta}\,(x) \right). \tag{3.25}
$$

Na expressão (3.19), $F(v,\omega)$ e $g(v,\omega)$ foram consideradas periódicas com período 2π. Se considerarmos agora que

$$
\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} dv\, d\omega\, F(v,\omega)\, g(v,\omega) = \beta, \tag{3.26}
$$

onde β é uma constante arbitrária, temos para (3.19) o seguinte resultado

$$
S = -6\alpha\beta \int d^4x\, \varepsilon^{\lambda\rho\sigma\eta}\, A_\lambda\,(x)\, \partial_\rho\, B_{\sigma\eta}\,(x), \tag{3.27}
$$

que contém o termo topológico necessário.

Uma proposta para as funções $F(v,\omega)$ e $g(v,\omega)$ pode ser dada por

$$
\begin{aligned}
F(v,\omega) &= \cos(mv)\cos(n\omega) \text{ onde } m \text{ e } n \text{ são constantes} \\
g(n,\omega) &= \frac{\beta}{(3\pi)^2}\left[2+3\cos(mv)\right]\left[2+3\cos(n\omega)\right]
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

3.2 O Modelo Reduzido

O termo de Chern-Simons misto, acoplando um potencial vetorial a uma 2-forma de gauge, apresenta propriedades peculiares no que diz respeito ao espectro de partículas. É possível, através do mesmo, descrever um modelo com campo vetorial massivo, sem apelo a escalares de Higgs [9]. Tais modelos foram, e vêm sendo estudados, sob diferentes pontos-de-vista. Por exemplo, a discussão da questão de monopólos magnéticos de Dirac em teorias-de-gauge massivas [10], a possibilidade de se estender o modelo para grupos não-Abelianos e, mais recentemente, a sua supersimetrização,com vistas ao estudo de soluções do tipo-vórtice e aplicações às cordas cósmicas [11].

Convém, entretanto, deixar claro que a conexão entre auto-dualidade em $D = (3+3)$ e massa topológica no espaço de Minkowski é um resultado que depende fortemente do mecanismo proposto para a redução dimensional. Todavia, esta é a estratégia usualmente adotada ao se trabalhar com as teorias do tipo Kaluza-Klein: as propriedades topológicas e geométricas de um espaço de dimensão superior são usadas para justificar uma série de hipóteses e resultados aparentemente arbitrários em dimensões mais baixas. Porém, uma vez adotado um preciso esquema de redução, estes decorrem naturalmente da geometria do espaço superior.

Por exemplo, se a redução dimensional é feita à la Scherk, ou se é realizada uma compactificação espontânea, na teoria reduzida aparecem, ou não, modos de massa nula. Em nosso caso, procuramos vislumbrar um ansatz de redução consistente, e que fosse capaz de justificar a massa topológica em $D = (1+3)$ em termos da auto-dualidade característica de $D = (3+3)$.

CONCLUSÕES GERAIS E PAISAGENS IMAGINÁVEIS

Considerando a importância de um termo topológico de massa em 4 dimensões [9] , propusemo-nos, nesta tese a compreendê-lo como subproduto de alguma teoria-de-gauge definida em um espaço-tempo de dimensão superior a 4. Esta é uma atitude bastante difundida em modelos-de-gauge para a descrição das interações fundamentais. Sendo assim, concentramo-nos num espaço do tipo $D = (3+3)$, e analisamos as conseqüências de um modelo Abeliano auto-dual definido no mesmo. A possibilidade de tal modelo leva-nos a concluir que a auto-dualidade do Eletromagnestimo em $D = (3+3)$ pode responder pela existência de um termo de massa topológico em $D = (1+3)$, desde que se adote uma certa prescrição de redução dimensional. Tal resultado abre-nos a perspectiva de ir além com a redução dimensional, o que poderá gerar interessantes modelos integráveis em $D = (1+2)$. Também, a construção de um modelo supersimétrico em $D = (3+3)$ é uma etapa natural no prosseguimento desse trabalho [12] , tendo em vista que, no Capítulo 2, toda a ferramenta técnica para a formulação da supersimetria $N = 1 - D = (3+3)$ é fornecida.

Apêndice A

Resultados Auxiliares sobre Férmions em $D = (3+3)$

Uma representação possível para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$ é dada por

$$\mathbf{\Gamma}^{\mu} = \mathbb{1}_2 \otimes \gamma^{\mu}, \tag{1-a}$$

$$\mathbf{\Gamma}^{4,5} = \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \otimes \gamma^5, \tag{1-b}$$

onde $\mathbb{1}_n$ é a matriz identidade $n \times n$; γ^{μ} e γ^5 são matrizes 4×4 satisfazendo à relação $\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$, e $\{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = \mathbf{0}$, com $\eta^{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$; $\boldsymbol{\sigma}_1$ e $\boldsymbol{\sigma}_2$ são duas das matrizes de Pauli.

De $(1-a)$ e $(1-b)$, temos

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{\Gamma}^{\mu}, \mathbf{\Gamma}^{\nu}\} = \mathbf{\Gamma}^{\mu}\mathbf{\Gamma}^{\nu} + \mathbf{\Gamma}^{\nu}\mathbf{\Gamma}^{\mu} &= (\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^{\mu})(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^{\nu}) + \\
&\quad (\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^{\nu})(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^{\mu}) \\
&= (\mathbb{1}_2\,\mathbb{1}_2) \otimes (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) \quad + \\
&\quad + \ (\mathbb{1}_2\mathbb{1}_2) \otimes (\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) \\
&= \mathbb{1}_2 \otimes \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} \\
&= \mathbb{1}_2 \otimes 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \\
&= 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_8,
\end{aligned}$$

$$\{\mathbf{\Gamma}^{\mu}, \mathbf{\Gamma}^{4,5}\} = \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \otimes \{\gamma^{\mu}, \gamma^5\} = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{\Gamma}^0)^2 = \mathbf{\Gamma}^0 \mathbf{\Gamma}^0 = (\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^0)(\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^0) = (\mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_4) = \mathbb{1}_8,$$

$$(\mathbf{\Gamma}^i)^2 = -\mathbb{1}_8,$$

$$(\mathbf{\Gamma}^{4,5})^2 = \mathbb{1}_8,$$

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \mathbb{1} \otimes \gamma^0 = \mathbf{\Gamma}^{0\dagger},$$

$$\mathbf{\Gamma}^i = (\mathbb{1} \otimes \gamma^i) = -\mathbf{\Gamma}^{i\dagger},$$

$$\mathbf{\Gamma}^{4,5} = \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \otimes \gamma_5 = (\mathbf{\Gamma}^{4,5})^\dagger.$$

As relações acima podem ser resumidas como

$$\left\{\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}, \mathbf{\Gamma}^{\widehat{\nu}}\right\} = 2\,\eta^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}}\mathbb{1}_8, \tag{2}$$

onde $\eta^{\widehat{\mu}\widehat{\nu}} = diag\,(1,-1,-1,-1,1,1)$, ou seja, as matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$ satisfazem à álgebra de Clifford. Escrevendo explícitamente tais matrizes, vemos que estas assumem a seguinte estrutura em blocos:

$$\mathbf{\Gamma}^\mu = \begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{bmatrix} (3-a)\,;\ \mathbf{\Gamma}^4 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_5 \\ \gamma_5 & 0 \end{bmatrix} (3-a)\,;\ \mathbf{\Gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & -i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{bmatrix} (3-c)\,.$$

Se tomarmos as matrizes-γ^μ na representação de Dirac para a álgebra de Clifford do espaço $D = (3+3)$, onde

$$\left(\gamma^0\right)^T = \gamma^0 \tag{4-a}$$

$$\left(\gamma^1\right)^T = -\gamma^1 \tag{4-b}$$

$$\left(\gamma^2\right)^T = \gamma^2 \tag{4-c}$$

$$\left(\gamma^3\right)^T = -\gamma^3 \tag{4-d}$$

$$(\gamma_5)^T = \gamma_5, \tag{4-e}$$

podemos escrever as seguintes relações de simetria:

$$(\mathbf{\Gamma}^o)^T = \mathbf{\Gamma}^0 \qquad (5-a)$$

$$\left(\mathbf{\Gamma}^1\right)^T = -\mathbf{\Gamma}^1 \qquad (5-b)$$

$$\left(\mathbf{\Gamma}^2\right)^T = \mathbf{\Gamma}^2 \qquad (5-c)$$

$$\left(\mathbf{\Gamma}^3\right)^T = -\mathbf{\Gamma}^3 \qquad (5-d)$$

$$\left(\mathbf{\Gamma}^4\right)^T = \mathbf{\Gamma}^4 \qquad (5-e)$$

$$\left(\mathbf{\Gamma}^5\right)^T = -\mathbf{\Gamma}^5. \qquad (5-f)$$

Nos capítulos anteriores, vimos que um dos requisitos fundamentais para a existência de espinores de Majorana no espaço $D = (3+3)$ é que a matriz de conjugação de carga "$\mathbf{C}$" seja simétrica, além do mais temos:

$$\mathbf{C}\,\mathbf{\Gamma}^T_{\widehat{\mu}}\,\mathbf{C}^{-1} = -\mathbf{\Gamma}_{\widehat{\mu}}. \qquad (6)$$

Uma representação possível para $\mathbf{C}$ pode ser dada por

$$\mathbf{C} = i\mathbf{\Gamma}^1\mathbf{\Gamma}^3\mathbf{\Gamma}^5, \qquad (7)$$

$\mathbf{C}^T = i\,(\mathbf{\Gamma}^5)^T\;(\mathbf{\Gamma}^3)^T\;(\mathbf{\Gamma}^1)^T = -i\,\mathbf{\Gamma}^5\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^1 = -i\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^5\,\mathbf{\Gamma}^3 = i\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^5 = C$
$\mathbf{C}^\dagger = i\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^5.$

Temos, assim,

$$\mathbf{C}^T = \mathbf{C}. \qquad (8)$$

Além do mais,

$$\left\{\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^0\right\} = \left[\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^1\right] = \left\{\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^2\right\} = \left[\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^3\right] = \left\{\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^4\right\} = \left[\mathbf{C},\mathbf{\Gamma}^5\right] = \mathbf{0}. \tag{9}$$

A matriz $\mathbf{C} = i\mathbf{\Gamma}^1\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^5$ satisfaz a todos os requisitos necessários a uma matriz de conjugação de carga no espaço $D = (3+3)$. Segundo a representação $(3-a,c)$, temos para a matriz $\mathbf{C}$ explicitamente:

$$\mathbf{C} = i\begin{bmatrix} \gamma^1 & 0 \\ 0 & \gamma^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma^3 & 0 \\ 0 & \gamma^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i\gamma_5 \\ i\gamma_5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\gamma^2\gamma^0 \\ i\gamma^2\gamma^0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Para a matriz-$\mathbf{\Gamma}^7$, definida como

$$\mathbf{\Gamma}^7 = \mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^2\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^4\,\mathbf{\Gamma}^5, \tag{11-a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}^7 &= (\mathbb{1}_2\otimes\gamma^0)\,(\mathbb{1}_2\otimes\gamma^1)\,(\mathbb{1}_2\otimes\gamma^2)\,(\mathbb{1}_2\otimes\gamma^3)\,(\boldsymbol{\sigma}_1\otimes\gamma^5)\,(\boldsymbol{\sigma}_2\otimes\gamma_5)\\ &= (\mathbb{1}_2\mathbb{1}_2\mathbb{1}_2\mathbb{1}_2\,\boldsymbol{\sigma}_1\,\boldsymbol{\sigma}_2)\otimes(\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma_5\,\gamma_5)\\ &= \boldsymbol{\sigma}_3\otimes(i\,\gamma^0\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3)\,,\end{aligned}$$

$$\mathbf{\Gamma}^7 = \boldsymbol{\sigma}_3\otimes\gamma_5 = \begin{bmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 \end{bmatrix}. \tag{11-b}$$

Um espinor de Majorana deve satisfazer à condição

$$\widehat{\psi} = \mathbf{C}\,\overline{\widehat{\psi}}^T, \tag{12}$$

onde

$$\overline{\widehat{\psi}} \equiv \widehat{\psi}^\dagger\mathbf{\Gamma}^0\mathbf{\Gamma}^4\mathbf{\Gamma}^5. \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\psi} = \mathbf{C}\,\overline{\widehat{\psi}}^T &= (i\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^5)\left(\widehat{\psi}^\dagger\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^4\,\mathbf{\Gamma}^5\right)^T\\ &= \left(i\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^5\right)\left(i\,\mathbf{\Gamma}^{5T}\,\mathbf{\Gamma}^{4T}\,\mathbf{\Gamma}^{0T}\,\widehat{\psi}^*\right)\\ &= i\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^4\widehat{\psi}^*,\end{aligned}$$

$$\widehat{\psi} = i\,\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^4\widehat{\psi}^*, \tag{14-a}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^* \\ \boldsymbol{\xi}^* \end{bmatrix}, \qquad (14-b)$$

onde $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$ é uma forma compacta de escrever as oito componentes de $\boldsymbol{\psi}$. $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$, individualmente, representam dois grupos de quatro componentes de $\boldsymbol{\psi}$. $\begin{bmatrix} 0 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & 0 \end{bmatrix}$ é a representação em blocos de $i\mathbf{\Gamma}^0\,\mathbf{\Gamma}^1\,\mathbf{\Gamma}^3\,\mathbf{\Gamma}^4$.

Logo

$$\boldsymbol{\xi} = -\,\gamma^2\boldsymbol{\eta}^*, \qquad (15)$$

e um espinor de Majorana pode ser escrito como

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_{Majorana} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ -\gamma^2\boldsymbol{\eta}^* \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Espinores de Weyl são auto-estados de $\mathbf{\Gamma}^7$ com dois auto-valores possíveis $+1$ e -1; tais auto-estados são denominados espinores de Weyl left-handed e espinores de Weyl right-handed, respectivamente. Para um espinor de Weyl L-handed, temos:

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_L = \mathbf{\Gamma}_7\widehat{\boldsymbol{\psi}}_L = (\boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \gamma_5)\,\widehat{\boldsymbol{\psi}}_L$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_5 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\eta} = \gamma_5\boldsymbol{\eta}$$
$$\boldsymbol{\xi} = -\gamma_5\boldsymbol{\xi}.$$

Logo, um espinor de Weyl L-handed deve apresentar a estrutura

$$\widehat{\boldsymbol{\psi}}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_L \\ \boldsymbol{\xi}_R \end{bmatrix}, \qquad \text{(17-a)}$$

onde a notação $\boldsymbol{\eta}_L$ e $\boldsymbol{\xi}_R$ indica que $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$ são auto-estados de γ_5 com auto-valores $+1$ e -1, respectivamente.

Um espinor de Weyl R-handed é dado por

$$\widehat{\psi}_R = \begin{bmatrix} \eta_R \\ \xi_L \end{bmatrix}. \tag{17-b}$$

No espaço $D = (3+3)$ é possível definir espinores de Majorana-Weyl, ou seja, espinores que são espinores de Majorana e Weyl ao mesmo tempo. Um espinor de Majorana-Weyl L-handed será dado por:

$$\psi_{(M-W)_L} = \begin{bmatrix} \eta_L \\ -\gamma^2\eta_L^* \end{bmatrix}. \tag{18-a}$$

Por outro lado, um espinor de Majorana-Weyl R-handed será dado por:

$$\psi_{(M-W)_R} = \begin{bmatrix} \eta_R \\ -\gamma^2\eta_R^* \end{bmatrix}. \tag{18-b}$$

Mostraremos, agora, que com a notação para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$ dadas em (1-a,b), as densidades de Lagrangeano, ou equivalentemente as ações para os espinores de Dirac e os de Majorana-Weyl em $D = (3+3)$ são reduzidos em termos de espinores de Dirac e de Majorana em $D = (1+3)$.

Considere a densidade de Lagrangeano dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\overline{\widehat{\psi}}\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\overleftrightarrow{\partial_{\widehat{\mu}}}\widehat{\psi} - m\overline{\widehat{\psi}}\widehat{\psi} = \frac{i}{2}\left\{\overline{\widehat{\psi}}\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\left(\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi}\right) - \left(\partial_{\widehat{\mu}}\overline{\widehat{\psi}}\right)\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\widehat{\psi}\right\} - m\overline{\widehat{\psi}}\widehat{\psi}. \tag{19}$$

Ela nos dá, através das equações de Euler-Lagrange, a equação dinâmica a que ψ deve satisfazer para ser a solução do sistema "físico" considerado. Tal equação é dada por:

$$i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi} - m\widehat{\psi} = 0. \tag{20}$$

Tomando

$$\widehat{\psi} = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix}, \tag{21}$$

temos

$$\overline{\widehat{\psi}} = \widehat{\psi}^{\dagger}\mathbf{\Gamma}^0\mathbf{\Gamma}^4\mathbf{\Gamma}^5 = \begin{pmatrix} \eta^{\dagger} & \xi^{\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\gamma^0 & 0 \\ 0 & -i\gamma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\overline{\eta} & -i\overline{\xi} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

onde $\overline{\eta} \equiv \eta^{\dagger}\gamma^0$ e $\overline{\xi} = \overline{\xi}\gamma^0$, que são os conhecidos conjugados de Dirac em $D = (1+3)$.

$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\overline{\widehat{\psi}}\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\left(\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi}\right) - \frac{i}{2}\left(\partial_{\mu}\overline{\widehat{\psi}}\right)\mathbf{\Gamma}^{\mu}\widehat{\psi} - m\,\overline{\widehat{\psi}}\,\widehat{\psi}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\eta} & -\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^{\mu} & 0 \\ 0 & \gamma^{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{\mu}\eta \\ \partial_{\mu}\xi \end{pmatrix} + \\
& +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_{\mu}\overline{\eta} & -\partial_{\mu}\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma^{\mu} & 0 \\ 0 & \gamma^{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \\
& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\eta} & -\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_4\eta \\ \partial_4\xi \end{pmatrix} + \\
& -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{\eta} & -\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_5\eta \\ \partial_5\xi \end{pmatrix} + \\
& +\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \partial_4\overline{\eta} & -\partial_4\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \\
& +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_5\overline{\eta} & -\partial_5\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \\
& -m\begin{pmatrix} i\overline{\eta} & -i\overline{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando o artifício de redução dimensional, que é fazer com que os espinores não dependam das coordenadas extras, ou seja

$\partial_4\widehat{\psi} = \partial_5\widehat{\psi} = \mathbf{0}$,obtemos

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\eta}}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\boldsymbol{\eta}\right) + \tfrac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\xi}}\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu}\boldsymbol{\xi}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\overline{\boldsymbol{\eta}}\right)\gamma^{\mu}\boldsymbol{\eta} - \tfrac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\overline{\boldsymbol{\xi}}\right)\gamma^{\mu}\boldsymbol{\xi} +$$

$$-im\overline{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta} + im\overline{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\overline{\boldsymbol{\eta}}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\boldsymbol{\eta} - im\overline{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{\xi}}\gamma^{\mu}\overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\boldsymbol{\xi} + im\overline{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi}. \tag{23}$$

Desta forma, mostra-se que a densidade de Lagrangeano pode ser expressa em termos dos espinores em $D = (1+3)$.

Mostraremos, agora, que o resultado também é válido para espinores de Majorana-Weyl, ou seja, que a densidade de Lagrangeano para esses espinores em $D = (3+3)$ reduz-se a termos de espinores de Weyl em $D = (1+3)$. Antes de fazermos isso, devemos mostrar que um espinor de Majorana-Weyl não admite termo de massa na equação de movimento. Como sabemos, os espinores de Majorana-Weyl são auto-estados de $\mathbf{\Gamma}^7$ com auto valores $+1$ e -1; sendo assim, multiplicando a equação de Dirac por $\mathbf{\Gamma}^7$ e usando o fato de que $\mathbf{\Gamma}^7$ anticomuta com qualquer $\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$, temos:

$$i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi} - m\widehat{\psi} = 0 \tag{24-a}$$

$$-i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\left(\mathbf{\Gamma}^7\widehat{\psi}\right) - m\left(\mathbf{\Gamma}^7\widehat{\psi}\right) =$$

$$= i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi} + m\widehat{\psi} = 0. \tag{24-b}$$

A equação (24-b) é válida qualquer que seja o espinor de M-W, L-handed ou R-handed. Subtraindo (24-a) de (24-b) temos

$$2m\widehat{\psi} = \mathbf{0}. \tag{25}$$

Como $\widehat{\psi}$ é um espinor de Weyl arbitrário, temos que $m = 0$. A equação de Dirac para tais espinores será:

$$i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}\partial_{\widehat{\mu}}\widehat{\psi} = 0. \tag{26}$$

Uma possível densidade de Lagrangeano para tal equação será:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{4}\overline{\widehat{\psi}}\Gamma^{\widehat{\mu}}\overleftrightarrow{\partial_{\widehat{\mu}}}\widehat{\psi}. \tag{27}$$

Um espinor de M-W L-handed será dado por:

$$\widehat{\psi} = \begin{bmatrix} \eta_L \\ -\gamma^2\eta_L^* \end{bmatrix} \tag{28-a}$$

$$\overline{\widehat{\psi}} = \begin{bmatrix} i\eta_L^\dagger\gamma^0 & -i\eta_L^T\gamma^2\gamma^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\eta_L^\dagger\gamma^0 & -\left(-\gamma^2\eta_L^*\right)^\dagger\gamma^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\overline{\eta}_L & -i\overline{(-\gamma^2\eta_L^*)} \end{bmatrix}, \tag{28-b}$$

onde η_L é um auto estado de γ^5 com auto valor $+1$.

Substituindo ψ na densidade de Lagrangeano temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \eta_L^\dagger\gamma^0 & -\eta_L^T\gamma^2\gamma^0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_\mu\eta_L \\ -\gamma^2\partial_\mu\eta_L^* \end{bmatrix} \\
&+\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \partial_\mu\left(\eta_L^\dagger\gamma^0\right) & -\partial_\mu\left(\eta_L^T\gamma^2\gamma^0\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_L \\ -\gamma^2\eta_L^* \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde foi usado $\partial_4\widehat{\psi} = \partial_5\widehat{\psi} = 0$.

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\eta_L^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\left(\partial_\mu\eta_L\right) - \frac{1}{4}\eta_L^T\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\left(\partial_\mu\eta_L^*\right) + \frac{1}{4}\partial_\mu\left(\eta_L^\dagger\gamma^0\right)\gamma^\mu\eta_L +$

$+\frac{1}{4}\left(\partial_\mu\eta_L^T\gamma^2\gamma^0\right)\left(\gamma^\mu\gamma^2\eta_L^*\right)$

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\overline{\eta}_L\gamma^\mu\left(\partial_\mu\eta_L\right) + \frac{1}{4}\left(\partial_\mu\overline{\eta}_L\right)\gamma^\mu\eta_L - \frac{1}{4}\eta_L^T\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\eta_L^* - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu\eta_L^T\right)\gamma^0\gamma^\mu\eta_L^*$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\overline{\eta}_L\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial_\mu}\eta_L + \frac{1}{4}\left[\left(-\gamma^2\eta_L^*\right)\gamma^0\right]\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\left(-\gamma^2\eta_L^*\right) \tag{29}$$

Mostramos, assim, que a densidade de Lagrangeano pode ser colocada em termos de espinores em $D = (1+3)$. Um resultado semelhante pode ser mostrado para um espinor de M-W R-handed.

Já havíamos visto anteriormente que um espinor de Weyl possui, a princípio, quatro graus de liberdade complexos, pois temos que

$$\widehat{\psi}_L = \begin{bmatrix} \eta_L \\ \xi_R \end{bmatrix}, \tag{17-a}$$

para um espinor de Weyl L-handed; para o caso R-handed,

$$\widehat{\psi}_R = \begin{bmatrix} \eta_R \\ \xi_L \end{bmatrix}. \tag{17-b}$$

Mostraremos, agora, que, na verdade, este possui apenas duas componentes complexas independentes. Para isso, vamos utilizar a representação para as matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$ dada por:

$$\mathbf{\Gamma}_7 = \mathbf{\Gamma}^0\mathbf{\Gamma}^1\mathbf{\Gamma}^2\mathbf{\Gamma}^3\mathbf{\Gamma}^4\mathbf{\Gamma}^5 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Tal representação, que denominaremos, daqui por diante, representação quiral, é dada por

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\mathbb{1} \\ i\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \tag{31-a}$$

$$\mathbf{\Gamma}^1 = \begin{bmatrix} 0 & i\gamma^5 \\ i\gamma^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{31-b}$$

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0 \end{bmatrix} \tag{31-c}$$

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^2 \\ \gamma^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{31-d}$$

$$\mathbf{\Gamma}^4 = \begin{bmatrix} 0 & i\gamma^1 \\ i\gamma^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{31-e}$$

$$\mathbf{\Gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & i\gamma^3 \\ i\gamma^3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{31-f}$$

Na representação acima, espinores de Weyl L-handed e R-handed assumem a forma

$$\widehat{\psi}_L = \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{32-a}$$

$$\widehat{\psi}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix}. \tag{32-b}$$

Considerando $\psi = \mathbf{C}e^{\pm i\,\kappa_{\widehat{\mu}} x^{\widehat{\mu}}}$, onde $\mathbf{C}$ é um espinor de Weyl constante, temos que

$$i\mathbf{\Gamma}^{\mu}\mathbf{C}e^{\pm i\,\kappa_{\widehat{\mu}} x^{\widehat{\mu}}}(\pm i\kappa_{\widehat{\mu}}) = 0,$$

$$\mathbf{\Gamma}^{\mu}\kappa_{\mu}\mathbf{C} = 0. \tag{33}$$

Em (5), tomando as matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\mu}$ na representação quiral, e considerando $\mathbf{C}$ um espinor L-handed, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & i(\kappa_2-\kappa_0) & 0 & i(\kappa_1+\kappa_5) & i(\kappa_4-\kappa_3) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i(\kappa_2-\kappa_0) & i(\kappa_4+\kappa_3) & i(\kappa_1-\kappa_5) \\
0 & 0 & 0 & 0 & i(\kappa_1-\kappa_5) & i(\kappa_3-\kappa_4) & -i(\kappa_0+\kappa_2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i(\kappa_3+\kappa_4) & i(\kappa_1+\kappa_5) & 0 & -i(\kappa_0+\kappa_2) \\
i(\kappa_0+\kappa_2) & 0 & i(\kappa_1+\kappa_5) & i(\kappa_4-\kappa_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i(\kappa_0+\kappa_2) & i(\kappa_4+\kappa_3) & i(\kappa_1-\kappa_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i(\kappa_1-\kappa_5) & i(\kappa_3-\kappa_4) & i(\kappa_0-\kappa_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i(\kappa_3+\kappa_4) & i(\kappa_1+\kappa_5) & 0 & i(\kappa_0-\kappa_2) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}
(\kappa_0+\kappa_2)\,c_1 + (\kappa_1+\kappa_5)\,c_3 + (\kappa_4-\kappa_3)\,c_4 = 0 & \text{(I)} \\
(\kappa_0+\kappa_2)\,c_2 + (\kappa_4+\kappa_3)\,c_3 + (\kappa_1-\kappa_5)\,c_4 = 0 & \text{(II)} \\
(\kappa_1-\kappa_5)\,c_1 - (\kappa_4-\kappa_3)\,c_2 + (\kappa_0-\kappa_2)\,c_3 = 0 & \text{(III)} \\
-\ (\kappa_3+\kappa_4)\,c_1 + (\kappa_1+\kappa_5)\,c_2 + (\kappa_0-\kappa_2)\,c_4 = 0 & \text{(IV)}
\end{cases}$$

De (IV), tem-se

$$c_4 = \frac{(\kappa_3 + \kappa_4)}{(\kappa_0 - \kappa_2)} c_1 + \frac{(\kappa_1 + \kappa_5)}{(\kappa_2 - \kappa_0)} c_2. \tag{V}$$

De (III), tem-se

$$c_3 = \frac{(\kappa_1 - \kappa_5)}{(\kappa_3 - \kappa_0)} c_1 + \frac{(\kappa_3 - \kappa_4)}{(\kappa_3 - \kappa_0)} c_2. \tag{IV}$$

As equações (V) e (VI) mostram que o espinor de Weyl L-handed possui duas componentes complexas independentes. O mesmo resultado é obtido se o espinor for R-handed, ou seja, um espinor de Weyl R-handed possui duas componentes complexas independentes. Duas componentes complexas equivalem a quatro graus de liberdade reais.

Os espinores de Dirac satisfazem à

$$i\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}} \partial_{\widehat{\mu}} \widehat{\psi} - m\widehat{\psi} = 0. \tag{37}$$

Considerando a representação das matrizes-$\mathbf{\Gamma}^{\widehat{\mu}}$ dada por

$$\mathbf{\Gamma}^0 = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{bmatrix} \tag{38-a}$$

$$\mathbf{\Gamma}^i = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{38-b}$$

$$\mathbf{\Gamma}^4 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{38-c}$$

$$\mathbf{\Gamma}^5 = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \gamma^0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{38-d}$$

e

$$\psi = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} e^{-i\kappa_{\widehat{\mu}} x^{\widehat{\mu}}}, \tag{39}$$

temos

$$
(\mathbf{\Gamma}^{\mu}\kappa_{\mu}-m)\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}
$$

$$
\left\{\kappa_0\begin{bmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{bmatrix}+\kappa_i\begin{bmatrix}0 & \gamma^i\\ \gamma^i & 0\end{bmatrix}+\kappa_4\begin{bmatrix}0 & \gamma_5\\ \gamma_5 & 0\end{bmatrix}+\right.
$$

$$
\left.+\kappa_5\begin{bmatrix}0 & \gamma^0\\ \gamma^0 & 0\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & \mathbb{1}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=0
$$

$$
\begin{bmatrix}(\kappa_0-m)\,\mathbb{1} & \kappa_i\gamma^i+\kappa_4\gamma^5+\kappa_5\gamma^0\\ \kappa_i\gamma^i+\kappa_4\gamma^5+\kappa_5\gamma^0 & -(\kappa_0+m)\,\mathbb{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{40}
$$

Definindo

$$
\mathbf{A}\equiv\kappa_i\gamma^i+\kappa_4\gamma^5+\kappa_5\gamma^0, \tag{41-a}
$$

$$
\mathbf{B}\equiv(\kappa_0-m)\,\mathbb{1}, \tag{41-b}
$$

$$
\mathbf{C}\equiv-(\kappa_0+m)\,\mathbb{1}, \tag{41-c}
$$

temos

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\\ \mathbf{A} & \mathbf{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ \boldsymbol{\xi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}. \tag{42-a}
$$

Sendo assim,

$$
\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}+\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}=0 \tag{42-b}
$$

$$
\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}+\mathbf{C}\xi=0 \tag{42-c}
$$

$$
\boldsymbol{\xi}=-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \tag{42-d}
$$

$$\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}. \tag{42-e}$$

Substituindo (42-e) em (42-c), chegamos às expressões:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} + \mathbf{C}\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}\right) = 0$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A})\,\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}. \tag{42-f}$$

Os resultados (42-d,e) dizem-nos que $\boldsymbol{\xi}$ pode ser colocado em termos de $\boldsymbol{\eta}$, e o resultado (42-f) diz-nos que $\boldsymbol{\eta}$ pode ter um valor arbitrário. Sendo assim, os espinores de Dirac possuem quatro componentes complexas independentes, ou seja, oito graus de liberdade reais, independentes.

REFERÊNCIAS

[1] F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253;
J. Scherk, em *Recent Developments in Gravitation* ed. M. Lévy e S. Deser, Plenum Press, New York (1979).

[2] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and extended Supergravity Theories*, Recent Development in Gravitation, Cargèse 1978, Ed. M. Lévy e S. Deser, Plenum Press;
L. Brink, J. H. Schwarz e J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B121** (1977) 77;
F. Gliozzi e J. Scherk e D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253;
J. Scherk e J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B153** (1976) 61.

[3] S. Weinberg, *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, ed A. Zichichi, Plenum Press (New York, 1978);
A. Linde, *Rep Progr. Phys.* **42** (1979) 389;
D. Gross, R. D. Pisarski e L. Yaffe *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43.

[4] M. F. Atiyah, *Unpublished*;
R. S. Ward, *Phil. Trans. R. London* **A315** (1985) 451;
N. J. Hitchin, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987) 59;
I. Bars e C. Kounnas, *Theories with 2 times*, **hep-th/9703060**;
J.J. Giambiagi, *Wave Equations with Multiple Times: Classical and Quantum Solutions*, **CBPF - NF - 055/95**.

[5] M. A. De Andrade e O. M. Del Cima, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 95;
M. A. De Andrade e O. M. Del Cima, *Super-* τ_3 *QED and the dimensional reduction of* $N = 1$ *super-*QED_{2+2} **hep-th 9501002**, aceito para publicação em *Int. J. Mod. Phys.* **A.**

[6] C. H. de Souza Cruz e J. A. Helayël-Neto, *"$SO_O(3,3)$ and Self-Dual Electromagnetism"*, **CPBF-NF** - 062/97.

[7] T. Kugo e P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357;
C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B211** (1983) 177.

[8] H. Nishino, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 3255;
M. A. De Andrade e O. M. Del Cima e L.P. Colatto, *Phys. Lett.* **370B** (1996) 59.

[9] E. Cremmer e J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B72** (1974) 117;
M. Kalb e P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 2273;
P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B88** (1979) 97.

[10] W. A. de Moura Castro, *Tese de M. Sc.* , **CBPF** - Maio 1997.

[11] H. Christiansen, M. da Silva Cunha, L. U. Manssur, A. L. Nogueira e J. A. Helayël-Neto, *trabalho em desenvolvimento*.

[12] M. A. de Andrade, C. H. de Souza Cruz e C. N. Ferreira, *trabalho em desenvolvimento*.

“Eletromagnetismo Auto-Dual em (3+3) Dimensões e Massa Topológica no Espaço de Minkowiski”

Carlos Henrique de Souza Cruz

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

José Abdalla Helayel Neto – Presidente/CBPF

Luiz Paulo Colatto – UERJ

Francisco Caruso Neto – CBPF

Suplente: Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira – CBPF