

TESE DE
DOUTORADO

**TEORIA DA GRAVITACAO
NO ESPACO-TEMPO DE WEYL
INTEGRÁVEL**

Sandra Liliana Sautú

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 1997

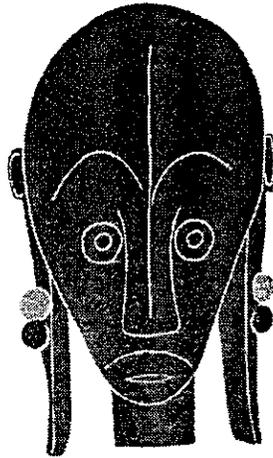
Dedicatória

A meu sobrinho Javier.

Agradecimentos

1998, 2000

- A José Martins Salim, a quem tive o privilégio de ter como o orientador da presente tese, agradeço por seu estímulo e seriedade no trabalho e, sobretudo, por sua amizade e os livros que me apresentou;
- A Mário Novello e aos colaboradores e companheiros, professores e alunos, que constituem este grupo de trabalho, ao qual sempre gostaria de pertencer;
- A Renato Klippert, por sua especial doçura e seu casaco cinza que me dão abrigo;
- Ao Centro Latinoamericano de Física e ao CNPq pelo financiamento deste trabalho.



É MAIS DIFÍCIL DESINTEGRAR UM
PRECONCEITO DO QUE UM ÁTOMO.
EINSTEIN

Resumo

Teoria da Gravitação no Espaço-tempo de Weyl Integrável

No presente trabalho consideramos o espaço-tempo tetra-dimensional representado por uma geometria de Weyl integrável (WIST), caracterizada através do tensor métrico e do campo escalar de origem geométrica, e estudamos algumas aplicações básicas dentro da teoria da gravitação. Para isso, expomos brevemente o cenário de idéias físicas que dão marco a nosso trabalho entre outras teorias alternativas à Teoria da Relatividade Geral (TRG). Depois, apresentamos os fundamentos e propriedades da geometria de Weyl integrável. Discutimos o formalismo Lagrangiano e escolhemos o tipo de acoplamento entre a gravitação e os campos não-geométricos. Utilizando o formalismo Lagrangiano determinado, obtemos as equações de movimento para a geometria e os campos externos ou distribuição de matéria, nos casos de vazio, campo eletromagnético, campo escalar externo, e fluido perfeito. Considerando simetria esférica, encontramos soluções estáticas para alguns desses casos, e estudamos suas singularidades no escalar de curvatura e os horizontes de eventos. Também, aplicamos a estrutura de WIST a um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico com fluido perfeito, e caracterizamos as diferentes famílias de soluções cosmológicas através da análise qualitativa de sistemas dinâmicos. Por último, fazemos um estudo do colapso gravitacional para alguns casos simplificados de corpos esféricos com geometria de Weyl integrável. Em cada aplicação examinamos as consequências da nova estrutura geométrica em relação à geometria convencional da TRG. A presença do campo escalar de origem puramente geométrico permite a existência de novas soluções tanto no caso estático como nos modelos dinâmicos. Finalmente, apresentamos as conclusões a respeito dos resultados obtidos, e damos uma perspectiva de suas futuras aplicações.

Summary

Theory of Gravitation in Weyl Integrable Space-time

In the present work we consider the space-time four-dimensional represented by a Weyl integrable geometry (WIST), characterized by the metric tensor and the scalar field of geometric nature, and we study some basic applications in the theory of gravitation. In order of that, we expose briefly the scenario of physics ideas that gives frame to our work between others alternative theories of the General Relativity Theory (GRT). After that, we present the fundamentals and properties of the Weyl integrable geometry. We discuss the Lagrangian formalism and we choose the type of coupling between the gravity and the non-geometric fields. Using the determined Lagrangian formalism, we obtain the equations of motion for the geometry and the external fields or matter distribution, in the cases of vacuum, electromagnetic field, scalar external field, and perfect fluid. Considering spherical symmetry, we find static solutions for some of those cases, and we study their singularities in the scalar of curvature and the horizons of events. Also, we apply the WIST structure to an homogeneous and isotropic cosmological model with perfect fluid, and we characterize the different families of cosmological solutions by the qualitative analysis of dynamic systems. At last, we do a study of gravitational collapse for some simplified cases of spherical bodies with Weyl integrable geometry. In each application we examine the consequences of the new geometric structure in relation to the conventional geometry of GRT. The presence of the scalar field of purely geometric origin permits the existence of new solutions, so in the static case as in the dynamic models. Finally, we present the conclusions in respect of the obtained results, and we give a perspective of their future applications.

Índice

Folha de rosto	i
Índice	v
Lista de figuras	vii
Lista de tabelas	viii
Introdução	1
1 Espaço-tempo de Weyl	11
1.1 Geometria do Espaço-tempo	11
1.2 Derivação Covariante	12
1.3 Definição de Geometria de Weyl	13
1.3.1 Compatibilidade	13
1.3.2 Variação nas Unidades de Medida.	14
1.3.3 Algumas Quantidades Geométricas Úteis em Weyl	14
1.4 Transformação de Calibre (ou Gauge) Interna	17
1.5 Efeito de Relógio Secundário	18
1.6 Geometria de Weyl Integrável	20
2 Formalismo Lagrangiano	22
2.1 Lagrangiana de Einstein-Hilbert no Vazio	23
2.2 Acomplamento com Campos Externos	23
2.3 Variação à Hilbert e Variação à Palatini	25
2.4 Formalismo Lagrangiano da Gravitação em WIST	27

3	Equações de Movimento	29
3.1	Espaço-tempo Vazio	29
3.2	Campos Externos e Distribuição de Matéria	31
3.2.1	Campo Eletromagnético	32
3.2.2	Campo Escalar Externo	33
3.2.3	Equações em Termos da Estrutura Riemanniana Associada	33
3.2.4	Partícula Livre	35
3.2.5	Fluido Perfeito	37
3.3	Mais sobre Fluido Perfeito em WIST	42
4	Modelo Cosmológico Homogêneo	
	e Isotrópico	46
4.1	Introdução	46
4.2	Fluido Perfeito e Potencial $V(\omega)$	48
4.2.1	Ação e Equações de Movimento	48
4.2.2	Equações Dinâmicas com a Métrica de FRW	49
4.2.3	Sistema Dinâmico e Análise Qualitativa	50
4.2.4	Equação de Estado	51
4.3	Potencial Nulo	52
4.3.1	Sistema Dinâmico Bidimensional	52
4.3.2	Condição de Energia Fraca	52
4.3.3	Ponto Crítico e Raios Invariantes	53
4.3.4	Análise Qualitativo para λ Positivo	53
4.4	Potencial Exponencial	60
4.4.1	Sistema Dinâmico Bidimensional	62
4.4.2	Condição de Energia Fraca	62
4.4.3	Pontos Críticos	63
4.4.4	Domínios Inflacionários dos Diagramas de Fase	66
4.4.5	Comportamento e Interpretação das Trajetórias.	67

4.5	Conclusão	69
5	Soluções Estáticas Esfericamente Simétricas	70
5.1	Singularidade e Geodésica em WIST	72
5.2	Soluções e Análise das Singularidades	77
5.2.1	Espaço-tempo Vazio	79
5.2.2	Campo Escalar Externo	82
5.2.3	Buraco Negro Carregado	83
5.3	Conclusão	89
6	Colapso Gravitacional	91
6.1	Introdução	91
6.2	Equações de movimento	93
6.3	Poeira Não-estática e Esfericamente Simétrica	97
6.4	Colapso Radiante	102
6.4.1	Espaço-tempos Interior e Exterior	102
6.4.2	Condições de Junção	105
6.4.3	Fluxo de Calor Nulo	109
6.5	Condição Inicial Estática	111
	Conclusões	115
A	Alguns cálculos intermediários	121
A.1	Equação para ω no Vácuo	121
A.2	Fluido Perfeito em WIST	122
A.2.1	Equação Dinâmica para a Densidade Específica de Energia	122
A.2.2	Aceleração do Fluido Perfeito	124
A.2.3	Verificação da Isentropia	124
B	Sistemas Dinâmicos	126
B.1	Sistema Dinâmico Autônomo	127

B.1.1	Definição Geral e Principais Teoremas	127
B.1.2	Sistemas Bidimensionais	128
B.1.3	Aplicação	136
B.2	Sistemas Bidimensional Homogêneos	139
B.2.1	Introdução Teórica	139
B.2.2	Aplicação	145
B.3	Análise do Sistema Dinâmico no Infinito	147
B.3.1	Introdução Teórica	147
B.3.2	Aplicação	153
C	Alguns cálculos no estudo das soluções estáticas esféricas.	158
C.1	Equação da Geodésica	158
C.2	Integração das Soluções	159
C.2.1	Espaço-tempo Vazio	159
C.2.2	Campo Escalar Externo	161
C.2.3	Buraco Negro Carregado	162
C.3	Escalar de Ricci	163

Lista de Figuras

4.1	Diagrama de fase com $V(\omega) = 0$ e $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_*$	54
4.2	Diagrama de fase com $V(\omega) = 0$, $\lambda > \lambda_{cr}$ e $\lambda > \lambda_*$	55
4.3	Diagrama de fase para $V(\omega) = 0$ e $\lambda < \lambda_{cr}$	58
4.4	Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda_{max} < \lambda$ e $\lambda_{min} < \lambda$	64
4.5	Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$	65
4.6	Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda < \lambda_{min} < \lambda_{max}$	67
B.1	Nó de duas tangentes instável, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$	131
B.2	Nó de duas tangentes estável, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$	132
B.3	Ponto de sela, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	132
B.4	Nó estelar instável, $\lambda_0 > 0$	133
B.5	Nó estelar estável, $\lambda_0 < 0$	133
B.6	Nó de uma tangente instável, $\lambda_0 > 0$	134
B.7	Nó de uma tangente estável, $\lambda_0 < 0$	134
B.8	Foco instável com $Z_I > 0$, $\theta > 0$	135
B.9	Foco instável com $Z_I < 0$, $\theta > 0$	135
B.10	Centro com $Z_I > 0$	136
B.11	Tipo I, $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) > 0$	142
B.12	Tipo II com $n \geq 0$ ou com $n = 1$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0$	142
B.13	Tipo II com $n = 1$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) < 0$	143
B.14	Tipo II com $n = 1$ e $Z(\theta_0) + N^{(1)}(\theta_0) = 0$	144
B.15	Tipo III, n par e $n \geq 2$	144

B.16 Trajetórias entre raios invariantes	145
B.17 Transformação de Poincaré	148
B.18 Análise no infinito	149
B.19 Mapeamento sobre o disco D_π	152
B.20 Mapeamento $\pi^* \rightarrow D_\pi$	153

Lista de Tabelas

4.1	Topologia dos pontos críticos	69
B.1	Classificação da natureza topológica dos pontos críticos	136

Introdução

BRUNO LAURICELLI

Contexto de Idéias

A essência de uma teoria física expressada em forma matemática é a identificação dos conceitos matemáticos com certas quantidades físicas mensuráveis. O meio com que a Gravitação e a Cosmologia Contemporâneas realizam esta identificação constitui o âmbito de idéias em que se desenvolve a presente tese.

Para ter uma noção do que envolve um determinado contexto de idéias, é importante considerar o panorama histórico do pensamento científico que leva até suas origens. Então, é de nosso interesse mostrar os principais pilares da concepção científica surgidos durante este século.

Até o início do século XX, o modelo físico vigente baseava-se na teoria Newtoniana, em acordo com a qual o mundo era visto como um elemento fisicamente descritível, analisável e predizível com total precisão. Numerosas eram as evidências experimentais que consolidavam o sucesso desse pensamento clássico. Não obstante, todas elas restringiam-se às escalas “humanas”, desde magnitudes de bolas de bilhar até dimensões correspondentes ao movimento de planetas em nosso sistema solar. Assim, certos fenômenos descobertos a nível da estrutura atômica da matéria (por exemplo, a catástrofe ultravioleta), e experimentos envolvendo grandes velocidades, perto da velocidade da luz (por exemplo, a experiência de Michelson e Morley), surgiram como a constatação de que uma profunda transformação dos princípios clássicos devia ser efetivada.

Como produto desta radical revisão, aparecem novas linhas de pensamento cientí-

fico. Assim, surge a Teoria Quântica que explica os acontecimentos microscópicos, a nível atômico, através de quantidades descontínuas e em acordo com um princípio de incerteza que limita a precisão de qualquer experiência, enquanto o mundo das grandes escalas de tempo e espaço, e de enormes velocidades passa a ser o âmbito da Teoria da Relatividade de Einstein (TR) [93], baseada na invariância das leis físicas sob a mudança do observador. Na TR, os conceitos massa e energia tornam-se equivalentes, e as interações instantâneas das forças mecânicas de Newton são substituídas pelo conceito de interação a velocidade finita, não superior à velocidade da luz. Juntamente, o espaço Euclideano e o tempo absoluto, considerados pela teoria clássica como as componentes independentes do cenário de fundo dos fenômenos físicos, são substituídos na TR pelo espaço-tempo de quatro dimensões, não-Euclideano, em interação direta com o seu conteúdo material ou de energia.

Na ausência de gravitação, segundo a TR, o espaço-tempo é representado por uma geometria plana de Minkowski, e os fenômenos físicos são descritos pelas leis da Teoria da Relatividade Especial (TRE).

O marco teórico dado pela TRE também estende-se como válido para o espaço-tempo com campos gravitacionais uniformes. Neste ponto aparecem dois pilares da teoria da gravitação de Einstein: o Princípio de Equivalência Fraco (PEFr) e o Princípio de Equivalência Forte (PEFo). O primeiro princípio (PEFr) considera que, para um observador arbitrário, o efeito de um campo gravitatório uniforme é equivalente a uma aceleração em relação a um sistema de referência inercial. Em outras palavras, sempre é possível definir um sistema de referência inercial em queda livre dentro de um campo gravitacional uniforme. Isto dá a possibilidade de descrever o espaço-tempo localmente (onde a gravitação é uniforme) através de um sistema inercial da TRE. O PEFo vai além do PEFr, pois faz uma extensão às leis de todas as outras forças da natureza, postulando que num sistema de referência inercial em queda livre, todas as leis físicas são idênticas às dadas na TRE.

Com estes argumentos teóricos são descritos com sucesso os fenômenos denominados

“locais”, no sentido de que as magnitudes espaço-temporais envolvidas são o suficientemente pequenas como para considerar a gravidade actuante como um campo uniforme. Por exemplo, a TRE descreve com precisão as experiências referentes à ação do campo gravitacional terrestre que são realizadas sobre a superfície da Terra. Não obstante, a validade dos Princípios de Equivalência pode ser discutida. Em princípio, a variação do campo gravitacional pode ser detetada numa região do espaço-tempo, ainda que esta seja muito pequena, bastando ter um instrumento de medida o suficientemente sensível. Em conseqüência, poderíamos dizer que a uniformidade do campo gravitacional na natureza pode ser garantida unicamente se reduzimos o domínio a um ponto do espaço-tempo.

Na presença de campos gravitacionais não-uniformes, a Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) vincula os conceitos geométricos que descrevem o espaço-tempo com os efeitos da gravitação no mundo físico. A presença da gravitação provoca, em acordo com a TRG, a curvatura do espaço-tempo. Gravitação equivale a geometria, e gravitação é gerada por qualquer tipo de massa ou distribuição de energia presente no espaço-tempo. Esta idéia elegante e genial tal vez foi inspirada a Einstein pela universalidade comprovada da força gravitatória [28]. A partir dela, conclui-se que os fenômenos a grandes escalas, ou o universo não podem ser descritos globalmente (sim localmente) por um sistema de referência Minskowskiano da TRE. O espaço-tempo curvo deve ser representado por uma geometria não-Euclideana, Riemanniana, que vai ser determinada a posteriori por um observador arbitrário. A TRG prediz com sucesso as correções à teoria Newtoniana no que respeita às experiências em nosso sistema solar (sucesso da solução estática esfericamente simétrica de Schwarzschild [18]) [65].

A TRG aplicada à descrição do cosmos, ou do Universo como um todo, é a disciplina científica denominada Cosmologia. Conceitos físicos e astronômicos combinam-se para definir as características do Universo e as regras que regem na sua evolução.

Rapidamente, os avanços na astronomia observacional ofereceram resultados que consolidaram a idéia de um Universo dinâmico, de enormes dimensões, e em estado de expansão [43]. Em conseqüência, os modelos cosmológicos em acordo com essas observações,

deduzem a história passada através de uma visão retrospectiva. A medida que nos deslocamos ao passado, o cosmos se contrairia até chegar, num instante determinado, a um único ponto. Esse ponto seria o início de toda a existência e denomina-se “singularidade inicial”.

Posteriormente, nos anos '30, dentro do modelo singular, foram desenvolvidos os modelos espacialmente homogêneos e isotrópicos que estão em acordo com as observações, e que levam o nome de seus principais autores, Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [17].

Seguindo, já nos '40, a Física Nuclear e a Física das Partículas Elementares descrevem a evolução termodinâmica do modelo singular e a síntese primordial dos elementos [33], predizendo certas características actuais do universo que habitamos (por exemplo, a radiação térmica de fundo de 3K). Mais tarde, nas décadas posteriores, essas predições foram confirmadas observacionalmente [77], levando a estabelecer firmemente o denominado Modelo Padrão (MP) da Cosmologia, ou Modelo de “Big-Bang”, ou da Grande Explosão Quente.

Não obstante o sucesso disfrutado pelo MP durante a década dos '70, ele apresenta sérios problemas conceituais e filosóficos. Os principais questionamentos são respeito da singularidade inicial e dos primeiros estágios da evolução. De acordo com o “problema da singularidade inicial”, resulta difícil, ou extremamente simplista, aceitar a presença de um instante no passado, anteriormente ao qual nada existia, e a partir do qual surge, exponencialmente, toda a energia, tempo e espaço que atualmente constituem nosso universo. Em realção às etapas próximas a singularidade inicial, as teorias de unificação da Física de Partículas Elementares impõem uma descrição com interações mais complicada que as consideradas pelo MP. Também, existe o “problema sobre a homogeneidade e a isotropia” que hoje observamos, pois não deveriam ser propriedades impostas aos instantes imediatos após a singularidade inicial, nada indica que assim aconteça e as pequenas dimensões e gigantescas energias em jogo naqueles momentos não as favorecem. Por outro lado, para explicar as características actuais do cosmos, são requeridos dados extremamente precisos sobre os estados iniciais do MP, isto se conhece como “problema das condições iniciais”.

Assim aparece, entre outros, o “problema sobre a formação das estruturas”, pois o MP não apresenta um mecanismo adequado para explicar a origem, evolução e características das estruturas em pequena escala, como por exemplo as galaxias.

Com base no conjunto de questionamentos básicos mencionados, e seguindo a natureza própria de todo modelo científico [71], a TRG e o MP começaram a ser pensados, especialmente a partir da década passada [27], como modelos superáveis, aperfeiçoáveis e substituíveis por outras teorias alternativas da gravitação e da Cosmologia. As linhas teóricas alternativas à TRG surgem formando um amplo espectro de idéias novas que evoluem constantemente, e muitas vezes se conetam entre si gerando, a sua vez, outros possíveis caminhos para o desenvolvimento da teoria da gravitação e de suas aplicações. Podemos dizer que isto é uma característica natural da história de todo pensamento científico, acionado pela constante necessidade de superar o modelo estabelecido. Então, podemos dizer que uma base comum a toda nova proposta teórica vai ser a violação de uma ou várias hipóteses ou postulados das teorias convencionais, pois objetivam evitar os problemas que aquelas padecem.

Assim, a seguir mencionaremos algumas das principais linhas teóricas alternativas, começando por aquelas que tem sua origem nas idéias de Unificação das Interações Fundamentais (interação fraca, forte, eletromagnética e gravitatória). Alguns destes modelos são inspirados nos trabalhos com mais de quatro dimensões iniciados por Kaluza [45] na primeira metade do século, e continuados por Klein [48], por Einstein e Bergmann [24], e mais tarde por De Witt [19], abrindo uma longa seqüência de trabalhos [78].

As teorias de Unificação foram muito estimuladas pelos sucessos dos modelos unificados em Física de Partículas Elementares [53, 87]. Na atualidade, são vários os campos de ação dentro das teorias multidimensionais [56], entre outras mencionamos supergravidade [26, 66, 101], e supercordas.

Outro cenário alternativo frutífero é o formado pelas Teorias com Defeitos Topológicos [47], entre as quais se destaca a teoria de cordas (“strings”) [11].

Por outro lado, podemos agrupar algumas das novas teorias dentro da Teoria Quântica

da Gravitação [102], considerada ainda uma área bastante ambígua e especulativa. Sua aplicação ao estudo do cosmos denomina-se Cosmologia Quântica [81].

Sem dúvida, uma das concepções teóricas mais fortes dos últimos anos é a representada pelos modelos inflacionários [54] que aparecem em várias das teorias alternativas. Esses modelos incluem uma etapa cosmológica particular (de inflação) que permite resolver alguns dos problemas do MP explicando consistentemente várias características atuais do universo.

Muitas das teorias mencionadas tem seu vínculo com uma ampla família conhecida como Teorias Escalar-Tensoriais. Esta área é de nosso particular interesse, e tem uma longa história que se inicia com o trabalho de Brans e Dicke em 1961 [12]. Nesta família de teorias, o usual tensor métrico da TRG coexiste junto a um ou vários campos escalares de longo alcance. Em busca de explicações a processos físicos nos regimes de fortes campos gravitacionais, as teorias escalar-tensoriais conseguem resolver bastante satisfatoriamente alguns dos questionamentos feitos ao MP, um exemplo disto são os modelos inflacionários [1]. Estas teorias são a mostra do grande potencial que oferece a introdução de campos escalares nas teorias básicas, não obstante, ainda muitas questões estão por ser resolvidas. Num nível fundamental, existe o problema da natureza física do campo escalar de longo alcance, o qual não pode ser nenhum campo de Higgs conhecido o campo de gauge das teorias de grande unificação [10]. Não obstante alguns modelos resolvem com sucesso este ponto, por exemplo, os modelos surgidos a partir das teorias multidimensionais [36] onde o fator de escala extradimensional gera o campo escalar. A teoria de cordas também explica a presença do campo escalar ou dilaton [34] através da aproximação a baixas energias. Outras teorias bem sucedidas neste sentido são certas teorias não-Riemannianas (teoria com geometria de Weyl integrável [15]) onde o campo escalar é de natureza puramente geométrica. Esta última alternativa é o âmbito teórico onde se desenvolve o presente trabalho.

As teorias não-Riemannianas se caracterizam por representar o espaço-tempo por uma geometria não-Euclideana, diferente da geometria de Riemann considerada pela TRG. Por

exemplo, o espaço-tempo é definido como uma variedade não-métrica, onde a geometria é dada não apenas pelo tensor métrico (que mede a distância entre dois pontos do espaço-tempo), senão que também é determinada por outro elemento geométrico, fundamental e independente, denominado “conexão afim” (que determina o deslocamento paralelo dos vetores no espaço-tempo). O princípio básico deste tipo de teorias é a independência entre uma determinada métrica e a conexão afim do espaço-tempo, qualquer restrição a ela é considerada equivalente a tomar hipóteses adicionais e postulados que restringem *a priori* os fenômenos físicos.

Por outro lado, as teorias não-Riemannianas fazem parte das modificações da TRG com bases nas teorias de gauge que procuram a unificação da gravitação com as outras forças fundamentais. Não obstante os numerosos esforços, ainda não existe uma prova satisfatória de que a TRG seja uma teoria de gauge. Em oposição, as teorias com conexões não-métricas parecem não apresentar essa restrição, pois o campo das conexões jogaria o papel do campo de gauge [41].

Outro grupo de teorias alternativas apresenta acoplamentos mais complexos que a TRG entre a gravitação e os outros campos físicos. Isto foi motivado em parte pelos modelos da Física de Partículas Elementares. O acoplamento “não-mínimo” com a gravitação produz modificações fundamentais nas propriedades da matéria e do campo gravitacional, como por exemplo, violação das condições de energia e conseqüente modelos cosmológicos não-singulares. Além disso, por combinação da interação não-mínima e do princípio variacional denominado de Palatini [16], obtem-se a substituição da estrutura Riemanniana do espaço-tempo pela estrutura geométrica de Weyl integrável (WIST) [15].

Como podemos observar, é grande o número de diferentes linhas de trabalho em busca de soluções dos problemas apresentados pela Teoria da Relatividade Geral, e em particular pelo Modelo Cosmológico Padrão. Até o momento nenhum teste observacional foi definitivo com respeito a escolher uma entre tantas alternativas que pretendem dar um marco teórico à gravitação. Cabe destacar que os testes atuais são limitados a um tipo de estruturas que não envolvem fortes campos gravitacionais, sendo estas as situações mais

conflitivas da TRG e que provavelmente caracterizam as etapas mais densas da evolução cósmica. É de se esperar que num futuro, os avanços nas medidas astrofísicas, venham a nos permitir uma evidência sustancial que indique a ajude a selecionar uma determinada teoria da gravitação entre as opções existentes.

Conteúdo do Presente Trabalho

Na presente tese estudaremos a modificação da TRG, na qual a gravitação continua sendo descrita através da geometria do espaço-tempo. A diferença com a TRG consiste em representar o espaço-tempo por uma geometria não-Riemanniana, chamada de Weyl integrável. As variedades Weylianais foram introduzidas por Weyl em 1918 com objetivo de unificar a gravitação e o eletromagnetismo [103]. Este trabalho foi abandonado anos mais tarde deixando sua influência nas pesquisas físicas futuras. A geometria de Weyl é provida de uma métrica e de uma conexão afim não-métrica, função de um vetor de Weyl ω_μ , diferente do símbolo de Christoffel usado na TRG. Um caso particular das geometrias de Weyl é a geometria de Weyl integrável que introduz um campo escalar ω tal que $\omega_\mu = \omega_{,\mu}$, onde a vírgula denota a derivada simples em relação as coordenadas. Assim, a teoria do espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) pode ser considerada uma teoria escalar-tensorial ou uma teoria não-métrica da gravitação.

Cabe destacar que a gravitação numa variedade de Weyl possui um formalismo axiomático desenvolvido por Ehlers, Pirani e Schild [23]. Nesse trabalho se estuda uma formulação axiomática do espaço tempo relativista, dita de caráter “constutivo” e “operacional”, e se conclui que a geometria de Weyl é a estrutura fundamental do espaço tempo em lugar da geometria Riemanniana da TRG, a qual passa a ser um caso particular da geometria Weyliana. Mais tarde, Perlick complementa os fundamentos de uma teoria no espaço-tempo de Weyl [79, 80] com uma análise cinemática de um campo genérico de observadores, demonstrando que é possível implementar testes observacionais. Estes trabalhos constituem uma motivação ao desenvolvimento da teoria da gravitação numa variedade Weyliana e são argumento para considerar a nova teoria como uma alternativa,

mais básica, que contem à TRG como um caso particular.

O objetivo deste trabalho constitui o estudo de alguns tópicos principais da teoria da gravitação abordados dentro da teoria do espaço-tempo de Weyl integrável. Com isto, buscamos caracterizar mais detalhadamente a teoria alternativa, dar uma visão ampla das possibilidades de pesquisa dentro dela, e obter material de estudo para as futuras investigações.

A seguir, delinearemos em forma sucinta o conteúdo dos Capítulos desta tese:

No Capítulo 1 damos uma introdução aos conhecimentos geométricos que são necessários para distinguir e trabalhar com um espaço-tempo de Weyl integrável. Isto resulta fundamental para deduzir as modificações que sofrem os fenômenos físicos devido a mudança da geometria em relação a TRG.

No Capítulo 2 damos os conceitos principais para estabelecer um formalismo Lagrangiano, e em particular apresentamos o formalismo Lagrangiano adotado na teoria da gravitação em WIST.

No Capítulo 3 aplicamos o princípio variacional apresentado no Capítulo 3 e deduzimos os conjuntos de equações que definem a dinâmica do espaço-tempo e de seu conteúdo material, marcando as principais diferenças com a TRG. Neste Capítulo obtemos os sistemas de equações genéricos que mais tarde serão utilizados para casos com simetrias espaço-temporais definidas, tanto para o caso estático como para estruturas dependentes do tempo.

No Capítulo 4 buscamos caracterizar os modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos com fluido perfeito dentro da teoria de WIST. Para isto, aplicamos a técnica de análise qualitativa de sistemas dinâmicos, introduzida no Apêndice B. Este Capítulo da uma noção clara das novidades com respeito ao MP devidas à presença do campo escalar. Modelos fechados não-singulares e com fases inflacionárias são os resultados mais interessantes.

No Capítulo 5 apresentamos as soluções estáticas esfericamente simétricas nos casos do vazio, campo eletromagnético e campo escalar externo, em WIST. Estudamos as sin-

gularidades de curvatura e a presença de horizonte nessas soluções, e comparamos com os resultados conhecidos na teoria de Dilaton.

No Capítulo 6 fazemos um estudo de alguns modelos simples do colapso gravitacional. Novamente a presença do campo escalar produz certos comportamentos próprios da estrutura geométrica de Weyl do corpo colapsante.

Por último, os Apêndices A e C contem cálculos intermediários na obtenção das equações dinâmicas e no estudo das soluções estáticas esféricas.

Capítulo 1

Espaço-tempo de Weyl

1.1 Geometria do Espaço-tempo

Qualquer variedade diferenciável pode ser provida independentemente com um tensor métrico simétrico que define o intervalo entre dois pontos da variedade, e uma conexão afim, que determina o deslocamento paralelo de um vetor. A geometria de tal espaço é completamente caracterizada por três objetos geométricos [82]:

- (i) o tensor de curvatura $R^\alpha{}_{\mu\nu\delta}$,
- (ii) o tensor de torção $Q^\delta{}_{\mu\nu} = 1/2 (\Gamma^\delta{}_{\mu\nu} - \Gamma^\delta{}_{\nu\mu}) \equiv \Gamma^\delta{}_{[\mu\nu]}$ e
- (iii) o tensor de curvatura homotético $\Omega_{\mu\nu} = \Gamma_{,\mu,\nu} - \Gamma_{,\nu,\mu}$.

Nesta notação a vírgula significa a derivada simples, e $\Gamma_{,\mu} = \Gamma^\delta{}_{\delta\mu}$, adotando a convenção de soma de Einstein.

Considerando um deslocamento paralelo de um vetor ao longo de uma trajetória fechada, observa-se que a rotação do vetor é devida à curvatura do espaço-tempo, enquanto que a intercepção do laço num espaço tangente é produzido pela torção, e o tensor de curvatura homotético causa a mudança no comprimento do vetor.

Estes três objetos classificam as diversas teorias do espaço-tempo:

- (1) $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0$, $Q^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$, $\Omega_{\alpha\beta} = 0$, espaço-tempo plano (Euclideano ou pseudo-Euclideano), por exemplo teoria da relatividade especial.

(2) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \neq 0$, $Q^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, $\Omega_{\alpha\beta} = 0$, geometria Riemanniana, por exemplo teoria da relatividade geral.

(3) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0$, $Q^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$, $\Omega_{\alpha\beta} = 0$, espaço de paralelismo absoluto.

(4) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \neq 0$, $Q^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, $\Omega_{\alpha\beta} \neq 0$, teorias de Weyl [103].

(5) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \neq 0$, $Q^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$, $\Omega_{\alpha\beta} = 0$, teorias de Einstein-Cartan [99].

(6) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \neq 0$, $Q^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$, $\Omega_{\alpha\beta} \neq 0$, teorias de campo unificadas, por exemplo teoria de Einstein-Schrödinger[25].

Segundo observa-se desta enumeração, o espaço-tempo de Weyl possui curvatura e tensor de curvatura homotético, mas não tem torção.

1.2 Derivação Covariante

Vamos a utilizar a notação onde o ponto e vírgula como subíndice representa a derivação covariante num sentido afim geral, ou seja, dado um vetor genérico $V^\mu \in M$,

$$V^\alpha_{;\nu} = V^\alpha_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} V^\mu. \quad (1.1)$$

A vírgula simples é a derivação parcial simples com respeito a qualquer das coordenadas $V^\mu_{,\nu} = \partial V^\mu / \partial x^\nu$, e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ é a conexão afim da geometria. Unicamente na relatividade geral $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ tem a forma métrica conhecida como símbolo de Christoffel.

Quando se considera o caso de um tensor de ordem genérica, a derivação covariante generalizada toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots;\gamma} &= T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\beta\dots,\gamma} + \\ &+ \Gamma^\mu_{\gamma\delta} T^{\delta\nu\dots}_{\alpha\beta\dots} + \Gamma^\nu_{\gamma\delta} T^{\mu\delta\dots}_{\alpha\beta\dots} + \dots \\ &- \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} T^{\mu\nu\dots}_{\delta\beta\dots} - \Gamma^\delta_{\gamma\beta} T^{\mu\nu\dots}_{\alpha\delta\dots} - \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.3 Definição de Geometria de Weyl

Pode-se descrever uma geometria diretamente em função da métrica e da conexão afim como os elementos geométricos fundamentais. Uma geometria de Weyl $(M, g, \Gamma^\alpha_{\mu\nu})$ é definida como *uma variedade afim tetra-dimensional M , conexa, real, infinitamente diferenciável, com uma métrica definida g em C^∞ , de assinatura $(+, -, -, -)$, e com uma conexão afim não-métrica sem torção $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, compatível com a métrica [108, 2, 22]. O espaço-tempo representado por uma tal geometria é denominado espaço-tempo de Weyl(WST).*

1.3.1 Compatibilidade

Na geometria de Weyl a métrica e a conexão afim são relacionadas pela propriedade de *compatibilidade* [23], a qual estabelece que, para toda métrica g , existe uma 1-forma ω tal que

$$\nabla g = \omega \otimes g, \quad (1.3)$$

onde ∇ denota a derivada covariante na variedade, e \otimes denota o produto interno.

Num sistema arbitrário de coordenadas a eq.(1.3) escreve-se

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \omega_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

onde ω_λ é um vetor de *origem geométrica*, denominado *vetor covariante de Weyl*. Esta equação constitui a principal diferença com respeito à geometria de Riemann usual da relatividade geral. O espaço Riemanniano, onde a métrica é sempre covariantemente constante, pode ser considerado como um caso particular da geometria de Weyl, com $\omega_\lambda = 0$. Podemos dizer que a propriedade (1.4) da geometria de Weyl generaliza a forma do tensor métrico, pois a derivada covariante da métrica não é necessariamente nula, como no caso Riemannino. Quando $\omega_\alpha = 0$ em (1.4), a derivada covariante nula da métrica implica uma conexão afim métrica com a forma usual do símbolo de Christoffel. Se $\omega_\alpha \neq 0$, (1.4) conduz a uma expressão da conexão afim diferente da conexão métrica.

1.3.2 Variação nas Unidades de Medida.

A regra de transporte paralelo numa variedade é determinada em função da conexão afim

$$dV^\alpha = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} dx^\mu V^\nu, \quad (1.5)$$

enquanto que a distância se formula a partir da métrica (considerada simétrica)

$$l^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu. \quad (1.6)$$

A partir destas duas operações geométricas fundamentais e independentes, considerando a generalização da afinidade dada pela eq.(1.4), é imediato calcular a variação da distância após um deslocamento paralelo infinitesimal dx^μ [2]

$$dl = \frac{l}{2} \omega_\mu dx^\mu. \quad (1.7)$$

A eq.(1.7), mostra que, na geometria de Weyl, *o comprimento de um vetor sob transporte paralelo não é um invariante*, independentemente do sistema de coordenadas. A variação da distância pode ser interpretada como uma mudança nas unidades de medida, determinada ponto a ponto na variedade M pelo campo de Weyl ω_μ . Como é de se esperar, a anulação do vetor ω_μ restabelece os resultados da geometria Riemanniana, onde a distância se mantém constante ao longo de um transporte paralelo.

1.3.3 Algumas Quantidades Geométricas Úteis em Weyl

Neste trabalho, em lugar da métrica e da conexão, adotaremos *o tensor métrico* $g_{\mu\nu}$ e *o vetor de Weyl* $\omega_\mu(x)$ como os objetos geométricos fundamentais da variedade, o qual é equivalente no que respeita à descrição do espaço-tempo. A conexão generalizada $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ será expressa como um elemento derivado, função não unicamente da métrica como no

caso Riemanniano, mas também do vetor geométrico de Weyl ω_α [2]

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \{\mu^\alpha_\nu\} - \frac{1}{2}[\omega_\mu\delta^\alpha_\nu + \omega_\nu\delta^\alpha_\mu - g_{\mu\nu}\omega^\alpha]. \quad (1.8)$$

O termo $\{\mu^\alpha_\nu\}$ é o símbolo de Christoffel definido pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$,

$$\{\mu^\alpha_\nu\} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}[g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}]. \quad (1.9)$$

O *tensor de curvatura generalizado* no espaço de Weyl é definido pela diferença obtida quando se permutam as derivadas covariantes de um vetor genérico,

$$V_{\alpha;\mu;\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\lambda\mu\nu}V^\lambda. \quad (1.10)$$

Em função da conexão afim generalizada o tensor de curvatura é dado por

$$R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\beta\lambda,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\lambda\rho}\Gamma^\rho_{\gamma\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\rho}\Gamma^\rho_{\lambda\beta}. \quad (1.11)$$

Usando a eq.(1.8), podemos escrever (1.11) em termos do tensor de curvatura Riemanniano denotado com o símbolo \hat{R}

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\lambda} &= \hat{R}^\alpha_{\beta\gamma\lambda} + \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\omega_{[\lambda|\gamma]} + \frac{1}{2}\omega_{\beta|[\gamma}\delta^\alpha_{\lambda]} + \frac{1}{2}\omega^\alpha_{|[\lambda}g_{\gamma]\beta} \\ &\quad + \frac{1}{4}\delta^\alpha_{[\lambda}\omega_{\gamma]}\omega_\beta + \frac{1}{4}g_{\beta[\gamma}\omega_{\lambda]}\omega^\alpha + \frac{1}{4}\delta^\alpha_{[\gamma}g_{\lambda]\beta}\omega_\rho\omega^\rho. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A quantidade

$$W_{\lambda\gamma} = \omega_{[\lambda|\gamma]} \quad (1.13)$$

é denominada *tensor de gauge de Weyl*, o subíndice de dupla barra representa a derivação covariante Riemanniana, construída em função do símbolo de Christoffel, e o colchete representa a operação de antisimetriação nos respectivos subíndices.

É fácil demonstrar que a identidade de Bianchi generalizada é satisfeita

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\lambda} + R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (1.14)$$

O tensor de Ricci generalizado é calculado pela contração de subíndices a partir do tensor de curvatura, e o escalar de curvatura como o traço do tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (1.15)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Em função das respectivas quantidades Riemannianas, denotadas sempre com o símbolo $\hat{}$, se escrevem

$$R_{\alpha\beta} = \hat{R}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\omega_{\alpha\|\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\|\alpha} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha}\omega_{\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\omega^\gamma{}_{\|\gamma} - \omega_\gamma\omega^\gamma), \quad (1.17)$$

e

$$R = \hat{R} - 3\omega^\gamma{}_{\|\gamma} + \frac{3}{2}\omega_\gamma\omega^\gamma. \quad (1.18)$$

Por último, o tensor de Einstein em Weyl é dado por

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g_{\alpha\beta} \quad (1.19)$$

ou

$$G_{\alpha\beta} = \hat{G}_{\alpha\beta} - \frac{3}{2}\omega_{\alpha\|\beta} + \frac{1}{2}\omega_{\beta\|\alpha} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha}\omega_{\beta} + g_{\alpha\beta}(\omega^\gamma{}_{\|\gamma} - \frac{1}{4}\omega_\gamma\omega^\gamma). \quad (1.20)$$

Note-se que algumas das simetrias dos tensores da gravitação Riemannianos não continuam, necessariamente, sendo válidas numa geometria generalizada. Mas, como veremos mais adiante, existe certa condição sobre o campo geométrico de Weyl (geometria de Weyl integrável) que permite recuperar todas as simetrias do tensor de curvatura Riemanniano e as de seus tensores derivados.

1.4 Transformação de Calibre (ou Gauge) Interna

A transformação de gauge interna da geometria de Weyl desempenha um papel muito importante no surgimento de teorias alternativas à relatividade geral, alguns exemplos são mencionados ao final desta subseção. A seguir faremos uma breve resenha.

Uma geometria geral de Weyl admite *uma transformação interna de gauge conforme*, determinada por duas equações de transformação, uma para a métrica e a outra para o vetor de Weyl [2, 41]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^* = f(x^\alpha)g_{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

$$\omega_\mu \rightarrow \omega_\mu^* = \omega_\mu + \frac{1}{2}[\log f(x^\alpha)]_{,\mu}, \quad (1.22)$$

onde $f(x^\alpha)$ é chamado *campo de gauge*.

A eq.(1.21) é uma *transformação conforme*, e indica que o valor da métrica é multiplicado por uma função escalar em cada ponto da variedade. Uma consequência da transformação conforme é a modificação do comprimento de um vetor, razão pela qual também recebe o nome de *transformação de escala*. A eq.(1.22) chama-se *transformação de gauge de Weyl* [103], e está intimamente ligada com a dependência espaço-temporal das unidades de medida.

Sob a aplicação combinada das duas transformações, a estrutura afim do espaço-tempo de Weyl mantém-se invariante. As equações (1.4) e (1.8) não mudam se as transformações (1.21) e (1.22) são aplicadas. Ou seja, as expressões da derivada covariante da métrica e a definição da conexão afim são as mesmas tanto para o espaço tempo determinado por (g, ω) quanto para o determinado por (g^*, ω^*) .

Esta família de transformações conformes de gauge internas pode relacionar uma geometria Riemanniana com uma geometria mais geral onde a distância varia após de um transporte paralelo. Assim, se partimos de um espaço-tempo definido por $\omega_\mu = 0$, $g_{\mu\nu}$ arbitrário, e com a conexão afim métrica associada $\{\mu^\alpha{}_\nu\}$, é imediato ver que, por intermédio da transformação conforme (1.21), pode-se generalizar o tensor métrico, e que a

eq.(1.22) define um vetor de Weyl ω_μ^* não-nulo. A geometria resultante é uma geometria com métrica g^* , não covariantemente constante, e com uma conexão afim Weyliana. $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ resulta idêntica à conexão métrica original $\{\mu^\alpha_\nu\}$, mas, em função de $g_{\mu\nu}^*$ e de ω_μ^* , ela está definida pela equação (1.8) [2].

Observe-se que estas transformações de gauge de escala implicam que as geodésicas nulas tem um papel especial no estudo das variedades espaço-temporais, pois sua definição é gauge-invariante. Por outro lado, estas transformações vinculam as diferentes geometrias mas não as fazem equivalentes. Qualquer observação que eventualmente descarte a invariância de escala dos fenômenos físicos [14] constituirá uma distinção definitiva entre duas geometrias vinculadas por uma transformação conforme, como no caso das geometrias de Weyl e de Riemann.

As transformações de gauge internas da geometria tem sido muito estudadas pelas teorias de gauge Abelianas. Um exemplo é o trabalho original de Weyl [103] sobre a unificação da gravitação com o eletromagnetismo, utilizando uma generalização geométrica do espaço-tempo. Nessa teoria, as equações do eletromagnetismo são gauge invariantes como consequência natural da interpretação geométrica do campo eletromagnético. Outros trabalhos importantes são as teorias de Dirac [20] e de Canuto [13], sobre invariância conforme na física. Estas teorias receberam fortes argumentos contrários, como por exemplo, o efeito de relógio secundário (“second clock effect”) e a não invariância de escala das leis físicas [14], e foram abandonadas. Outro exemplo mais recente é o trabalho de Smalley [95], onde modelos tipo Brans-Dicke são analisados como produto de uma geometria não-métrica do espaço-tempo.

1.5 Efeito de Relógio Secundário

Uma generalização da geometria na teoria da gravitação pode ser testada unicamente se fossem detetados aqueles fenômenos físicos novos que aparecem como consequência da nova estrutura do espaço-tempo. O fenômeno conhecido como *efeito de relógio secundário* (“second clock effect”) é um dos métodos que poderia distinguir, de maneira efetiva, um

espaço-tempo Weyliano de um Riemanniano da teoria padrão.

Para visualizar este efeito, próprio da estrutura geométrica, lembraremos primeiro o *efeito de relógio primário* (“first clock effect”), conhecido desde a relatividade especial como a *paradoxa dos gêmeos*. Nessa experiência, dois relógios (padrão) idênticos estão juntos e sincronizados no início, depois afastam-se espacialmente durante um intervalo de tempo arbitrário, e finalmente, voltam a juntar-se. O resultado que se obtém, em geral, é a perda da sincronização. Ao final do experimento, um dos relógios estará atrasado em relação do outro.

O efeito de relógio secundário considera a mesma experiência que o efeito primário, mas, além da desincronização, também aparecem variações nas unidades de medida entre os dois relógios. Ao final, um dos relógios funcionará mais rápido que o outro. Este fenômeno não existe na geometria Riemanniana, ele constitui uma medida típica da geometria Weyliana.

Os relógios standard são bem definidos na geometria de Weyl e construídos operacionalmente por intermédio de raios de luz e partículas em queda livre [79]. A medida do efeito de relógio secundário é a diferença entre as respectivas variações por unidade de medida que os relógios sofrem ao longo dos diferentes caminhos. Esta quantidade está determinada pela integral do vetor de Weyl ao longo da curva fechada C formada pelas trajetórias dos relógios

$$\oint_C \frac{dl}{l} = \oint_C \omega_\alpha dx^\alpha. \quad (1.23)$$

Pelo teorema de Stockes, (1.23) é equivalente à integral sobre a superfície S limitada entre as linhas de universo dos relógios,

$$\int_S \omega_{[\alpha,\beta]} dS. \quad (1.24)$$

A medida do efeito de relógio secundário é um método operacional que permite caracterizar uma geometria de Weyl. Inicialmente, foi utilizada por Einstein e Pauli [75] como argumento empírico em oposição aos modelos Weylianos da gravitação. No caso de referir-se a relógios atômicos, a natureza não mostra nenhum fenômeno semelhante ao efeito de

relógio secundário, pois as frequências dos relógios atômicos (linhas espectrais) são independentes da história da matéria radiante. Este argumento é muito persuasivo, e sustenta-se essencialmente na suposição de que os relógios que aparecem na natureza (atômicos) coincidem com os relógios padrões da teoria do espaço-tempo. Esta foi considerada uma hipótese controvertida por muito tempo e tem recebido diversos questionamentos como, por exemplo, os trabalhos de Dirac [21], e de Perlick [80]. Num outro trabalho, Canuto [14] caracteriza a violação do princípio de equivalência forte com a variação da razão entre o período de um relógio atômico e o período de um relógio gravitacional. Ele conclui que o princípio de equivalência forte é compatível com um amplo intervalo de dados astrofísicos e geofísicos, mas ainda deve ser experimentalmente confirmado. Assim, não obstante os diversos estudos realizados, nenhuma observação desqualifica definitivamente o efeito de relógio secundário como um questionamento ao espaço-tempo de Weyl, e não pode ser deixado de lado na formulação de uma nova teoria da gravitação na geometria Weyliana.

Na seguinte seção veremos que existe um certo tipo de geometria de Weyl, denominada *integrável*, para a qual o problema do efeito de relógio secundário é superado, pois a eq.(1.23) toma sempre um valor nulo na variedade, sem necessidade de ser anulado o vetor de Weyl.

1.6 Geometria de Weyl Integrável

Uma geometria de Weyl é chamada *geometria de Weyl Integrável*, se o vetor de Weyl ω_μ é um vetor gradiente de um campo escalar

$$\omega_\mu = \omega_{,\mu}. \tag{1.25}$$

$\omega \equiv \omega(x^\alpha)$ é uma função escalar das coordenadas, denominada *campo escalar geométrico* ou *campo escalar de Weyl*.

Neste caso, partindo de uma geometria de Weyl sempre pode ser obtida uma geometria Riemanniana através de uma transformação conforme de gauge interna, por isso usa-se,

também, o nome de *geometria de Weyl Conformalmente Riemanniana*. As transformações indicadas nas equações (1.21) e (1.22), levam uma geometria de Weyl, $(g_{\mu\nu}, \omega_\mu)$, a uma geometria de Riemann determinada por $(g_{\mu\nu}^*, \omega_\mu^* = 0)$, cuja conexão afim é o usual símbolo de Christoffel em função de $g_{\mu\nu}^*$.

Um espaço-tempo representado por uma geometria de Weyl integrável [68] se destaca por apresentar certas propriedades geométricas importantes para o desenvolvimento de um formalismo elegante e prático da teoria da gravitação. O entendimento de uma nova teoria da gravitação num espaço-tempo de Weyl integrável (WIST), e sua comparação com as teorias já conhecidas, são favorecidos pela possibilidade de escrever os elementos da gravitação em WIST em termos da estrutura Riemanniana associada mais termos construídos em função do campo geométrico de Weyl. Uma característica do WIST é a conservação das simetrias usuais dos tensores da gravitação, como por exemplo a simetria do tensor de Ricci. Por outro lado, em WIST evita-se o argumento crítico de Einstein contra a teoria original de Weyl. Em acordo com o que foi apresentado na seção anterior, se o campo de Weyl é um gradiente de um escalar, a medida do efeito de relógio secundário toma um valor nulo, pois a integral (1.23) anula-se quando a eq.(1.25) é satisfeita. Em WIST, $\omega_{[\alpha,\beta]} = 0$ é sempre válida, então usando o teorema de Stokes, podemos dizer que

$$\int_S \omega_{[\alpha,\beta]} dS = \oint \frac{dl}{l} = \oint \omega_\mu dx^\mu = 0, \quad (1.26)$$

de onde concluímos que num espaço-tempo de Weyl integrável o comprimento de um vetor é conservado ao longo de uma trajetória fechada sob transporte paralelo, ou em outras palavras, o efeito de relógio secundário em WIST é nulo.

Capítulo 2

Formalismo Lagrangiano

Na teoria da Relatividade Geral, a dinâmica da geometria do espaço-tempo está completamente contida nas equações de Einstein. Não obstante, resulta muito conveniente, para vários propósitos, ter uma formulação Lagrangiana da teoria relativista num contexto clássico. Por exemplo, a possibilidade de uma formulação quântica da gravitação (através de integrais de caminho) associada com a teoria clássica, requer que esta seja expressa em forma Lagrangiana [100]. Um outro exemplo é o fato de que a variação de Hilbert (ver mais adiante) constitui o modo mais conveniente de calcular as componentes do tensor de energia-momentum dos campos externos à gravitação e, também, pode ser considerada a guia mais útil para determinar o apropriado conjunto de valores iniciais na resolução das equações geometrodinâmicas da gravitação [57].

Em 1915, Einstein apresentou suas equações na forma definitiva

$$\hat{G}_{\mu\nu} = -k T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

O lado esquerdo destas equações é o tensor de Einstein construído unicamente a partir da geometria do espaço-tempo Riemanniano, $\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{R}_{\mu\nu} - 1/2 \hat{R} g_{\mu\nu}$. O lado direito apresenta o tensor de energia-momentum $T_{\mu\nu}$ das fontes externas que estão presentes no domínio espaço-temporal considerado. A constante k deve ser substituída por $c^3/(16\pi G)$ no caso de usar as unidades geométricas convencionais, onde G é a constante de acoplamento de

Eisntein. Nas unidades utilizadas no presente trabalho $k = 1$.

Também no ano 1915, pouco tempo depois, Hilbert [42] demonstrou que as leis da geometrodinâmica de Einstein surgem de um simples princípio de ação onde

$$S = \int \sqrt{-g} L d^4x \quad (2.2)$$

toma um valor extremo [51]. Nesta expressão, L é a função Lagrangiana e g denota o determinante da métrica, $g = \det(g_{\mu\nu})$.

2.1 Lagrangiana de Einstein-Hilbert no Vazio

No caso de um campo gravitacional livre, ou espaço-tempo vazio, Hilbert propôs sua função Lagrangiana como uma função escalar L , construída de tal maneira que a densidade Lagrangiana, $\sqrt{-g} L$, seja unicamente constituída por elementos geométricos.

L é naturalmente escolhida para reproduzir as equações de movimento adequadas através do princípio variacional, e para satisfazer o requerimento de invariância frente a transformações gerais de coordenadas [51, 57]. A forma de L é dada na seguinte expressão

$$L \equiv L_{geom} = k \hat{R}, \quad (2.3)$$

onde \hat{R} denota o escalar de curvatura tetra-dimensional e k é a constante de acoplamento apresentada nas equações de Einstein (2.1).

2.2 Acomplamento com Campos Externos

Na presença de campos externos ou distribuição de matéria, o formalismo Lagrangiano dos procesos gravitacionais é extendido considerando a relação entre as propriedades geométricas do espaço-tempo e os campos gravitacionais produzidos pelas fontes externas.

Existem dois procedimentos básicos para gerar a correspondente Lagrangiana generalizando o caso do vazio. Um deles é o procedimento tradicional, prescrito por Einstein e conhecido como *Princípio de Acoplamento Mínimo*; o outro método surgiu posteriormente e foi denominado como *Acomplamento Não Mínimo* [71].

O acoplamento mínimo é de uma grande simplicidade conceitual e aplica-se à maioria dos modelos que generalizam, no espaço-tempo curvo, as teorias já desenvolvidas na relatividade especial (RE). Este acoplamento estabelece que a Lagrangiana total do sistema, que contem o espaço-tempo e os campos externos, deve ser a soma de duas partes independentes: uma parte puramente gravitacional ou geométrica, representada pela Lagrangiana de Einstein-Hilbert dada na eq.(2.3), e outra parte puramente material que contemple os campos externos e a distribuição de matéria no espaço-tempo,

$$L_T = L_{geom} + L_{mat}. \quad (2.4)$$

Uma consequência direta do princípio de acoplamento mínimo é o fato de que as equações de movimento de qualquer campo externo na TRG são idênticas às equações na RE se, simplesmente, são substituídas as componentes da métrica Minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ pelas componentes da métrica do espaço-tempo curvo $g_{\mu\nu}$, e as derivadas simples do espaço-tempo plano pelas derivadas covariantes. Esta vinculação entre as equações da RE e da TRG pode constituir uma forma alternativa de enunciar o princípio de acoplamento mínimo.

O acoplamento mínimo é associado ao denominado *Princípio de Equivalência “Forte”* o *“de Einstein”*. Este princípio presupõe que, em todo ponto do espaço-tempo, é possível escolher um sistema de referência local no qual anulam-se as conexões afins e as leis físicas são descritas no espaço-tempo plano de Minkowski. A associação do princípio de acoplamento mínimo com o princípio de equivalência forte é muito comum, mas pode apresentar problemas não-triviais a nível das equações, como por exemplo a não-comutatividade das derivadas covariantes seria incompatível com a comutatividade das derivadas simples [58]. Por outro lado, ainda que na literatura considera-se que o princípio de equivalência forte

tem recebido confirmação observacional, existem diversos questionamentos ao considerar campos gravitacionais muito fortes, aspectos não-locais ou fenômenos a grandes escalas [59]. Conseqüentemente tem surgido tendências alternativas à relatividade geral, entre as quais estabelece-se um *Princípio de Equivalência “Fraco”* em lugar do “Forte” [60, 61]. Este princípio fraco é baseado na uniformidade da queda livre dos corpos, foi vastamente confirmado pela observação [62, 63], e é caracterizado por permitir uma variedade de acoplamentos entre matéria e gravitação mais ampla que a requerida pelo princípio de acoplamento mínimo.

A diferença do princípio de acoplamento mínimo, o *princípio de acoplamento não-mínimo* não impõe nenhuma restrição ao tipo de interação, podendo ser incluídos tanto elementos geométricos como campos externos num mesmo termo da Lagrangiana. As evidências definitivas ou os princípios estabelecidos que selecionam a regra de acoplamento mínimo na TRG podem ser consideradas, atualmente, sob forte questionamento. Em conseqüência, tem lugar o surgimento de numerosas teorias alternativas [71], nas quais o acoplamento toma formas menos restritas que a mínima.

2.3 Variação à Hilbert e Variação à Palatini

Originalmente, Hilbert fez uma forte consideração *a priori* ao estabelecer seu princípio variacional, pois ele tomou como hipótese que o espaço-tempo é representado por uma geometria Riemanniana. Nessa estrutura métrica, Hilbert determinou que as funções (das coordenadas) independentes, com respeito às quais realiza-se a variação da ação, são as dez componentes do tensor métrico na representação contravariante, $g^{\mu\nu}$.

Mais tarde, em 1919, A. Palatini [73] descobriu um conjunto de variáveis independentes mais simples e instrutivo. Ele não fixou a geometria do espaço-tempo e estabeleceu as dez funções $g^{\mu\nu}$ mais as quarenta componentes $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ da conexão afim como as variáveis independentes dentro da Lagrangiana.

Quando se aplica o princípio variacional de Hilbert a uma ação construída com a Lagrangiana de Hilbert da eq.(2.3), obtem-se, de forma imediata, as equações de Einstein

para o vácuo

$$\hat{G}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Partindo da mesma ação, mas aplicando o princípio variacional à Palatini deduzem-se, não apenas as equações dinâmicas (2.5) (calculada através da variação com respeito à métrica), senão também a equação que define a derivada covariante nula do tensor métrico, obtida quando se varia a ação com respeito a $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu||\alpha} = 0. \quad (2.6)$$

Esta última expressão determina, *a posteriori*, a estrutura representativa do espaço-tempo como uma geometria Riemanniana. A validade de (2.6) pode-se estender ao caso em que algum tipo de matéria esteja acoplada à gravitação, mas com a condição de que o acoplamento seja mínimo. Concluimos, então, que a obtenção de uma configuração Riemanniana através de um princípio variacional é um resultado dependente do modelo de acoplamento adotado. Assim, diferentes tipos de Lagrangianas podem conduzir a diferentes configurações geométricas. A continuação veremos brevemente um exemplo onde a Lagrangiana apresenta um acoplamento não-mínimo entre um campo escalar $\phi(x)$ e a gravitação, e através do princípio variacional à Palatini obtem-se a uma estrutura não-Riemanniana.

Consideremos, então, a seguinte Lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} f(\phi) R + L_\phi. \quad (2.7)$$

Dentro do formalismo de Palatini, variamos com respeito as conexões afins e obtemos como resultado a derivada covariante da métrica dada por

$$g_{\mu\nu;\alpha} = -g_{\mu\nu} \partial_\alpha \ln f(\phi), \quad (2.8)$$

onde $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. A diferença da eq (2.6), esta equação possui um lado direito não-nulo.

Identificando o escalar geométrico de Weyl (ver Capítulo 1) com a derivada logarítmica de $f(\phi)$

$$\omega_\alpha = -\partial_\alpha \ln f(\phi), \quad (2.9)$$

vemos que, neste caso de acoplamento não-mínimo, a estrutura do espaço-tempo deduzida pelo princípio variacional à Palatini não é uma geometria Riemanniana, e sim uma geometria conformalmente Riemanniana ou de Weyl integrável [30].

2.4 Formalismo Lagrangiano da Gravitação em WIST

O formalismo Lagrangiano de um modelo do espaço-tempo com geometria não-Riemanniana pode apresentar um conjunto de variáveis independentes na ação, diferente do usual na TRG, dependendo de quais são os elementos geométricos escolhidos como fundamentais. Além da liberdade na escolha do tipo de geometria e de seus elementos básicos, existem várias maneiras de definir, dentro de um mesmo modelo, o tipo de acoplamento entre os campos externos e a gravitação.

A seguir, apresentaremos o formalismo Lagrangiano adotado no presente trabalho, onde a teoria da gravitação é descrita com uma geometria de Weyl integrável.

Numa geometria de Weyl integrável é natural considerar o campo escalar geométrico $\omega(x^\alpha)$ e o tensor métrico como os objetos geométricos fundamentais que reproduzem a gravitação. Podemos, então, determinar a dinâmica dos mesmos por intermédio de um simples princípio variacional. Variando a ação com respeito a ω e $g^{\mu\nu}$ calculamos as equações de movimento da geometria do espaço-tempo.

Na presença de matéria, qualquer acoplamento com a gravitação estará expresso através da interação do campo externo (não-geométrico) com o campo escalar de Weyl e/ou com a métrica. No presente trabalho, adotaremos um princípio de acoplamento que pode ser enunciado com um simples requerimento, sendo válido para todo tipo de distribuição de matéria ou de campo externo, em interação com a gravitação, num espaço-tempo de Weyl integrável:

As equações de movimento de qualquer campo não-geométrico, na relatividade especial, são convertidas a expressões no espaço-tempo curvo, unicamente, pela troca das derivadas simples em derivadas covariantes em WIST, e a métrica de Minkowski pelo tensor métrico do espaço-tempo curvo [89]. Pela semelhança com o respectivo enunciado do princípio de acoplamento mínimo, denominamos a esta regra como “princípio de acoplamento mínimo generalizado”. Este tipo de acoplamento está de acordo com o princípio de equivalência forte que envolve as leis físicas dos campos não geométricos. Em consequência, a TRG é obtida como um caso particular da teoria de WIST quando o campo escalar geométrico ω é constante.

Capítulo 3

Equações de Movimento

A formulação Lagrangiana adotada neste trabalho, para a teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST), foi descrita no capítulo anterior. De acordo com ela o princípio de acoplamento mínimo generalizado determina a forma da ação. No presente capítulo apresentaremos as integrais de ação e as equações correspondentes aos casos de vazio, campo eletromagnético, campo escalar externo, e distribuição de matéria (poeira e fluido perfeito com pressão não nula).

3.1 Espaço-tempo Vazio

Na ausência de distribuição de matéria ou de campos externos, a ação que representa o espaço-tempo vazio contém apenas elementos da geometria. A ação mais simples que podemos construir nesse caso é

$$S = \int (R + \xi \omega^\mu{}_{;\mu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.1)$$

onde R é o escalar de curvatura Weyliano, e ξ é uma constante de acoplamento arbitrária [69]. O ponto e vírgula denota a derivação covariante na geometria de Weyl integrável, e o vetor de Weyl é o gradiente do campo escalar geométrico, $\omega_\mu = \partial_\mu \omega(x)$.

Observemos que a divergência do vetor de Weyl que aparece na Lagrangiana da

equação (3.1) pode ser reescrita em função da divergência Riemanniana da seguinte forma

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} = \omega^\alpha{}_{||\alpha} - 2\omega^\alpha\omega_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\omega^\alpha)_{,\alpha} - 2\omega^\alpha\omega_\alpha. \quad (3.2)$$

O primeiro termo de (3.2) é uma derivada total que resulta em uma quantidade nula ao calcular a integral da ação. No entanto, o segundo termo provee uma contribuição não-nula na dinâmica do espaço-tempo. A decomposição dada pela equação (3.2) mostra também que a adição na Lagrangiana de um termo proporcional a $\omega^\alpha\omega_\alpha$ resultará simplesmente numa renormalização do parâmetro ξ .

A variação da ação do espaço-tempo vazio com respeito a $g^{\mu\nu}$ conduz às seguintes equações de movimento em WIST

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = 0, \quad (3.3)$$

onde o tensor $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein generalizado em WIST dado por (1.20). As equações (3.3) generalizam as equações de Einstein do vazio, e são idênticas a elas unicamente no caso em que ω é constante.

Para completar o conjunto de equações de movimento da geometria, variamos a ação com respeito à outra variável geométrica fundamental, o campo escalar geométrico. Assim, obtemos a seguinte equação dinâmica para $\omega(x)$

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} = -2\omega_\alpha\omega^\alpha. \quad (3.4)$$

Num espaço-tempo de Weyl integrável, o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é simétrico, isto permite expressar $R_{\mu\nu}$ e $G_{\mu\nu}$ como a soma dos tensores Riemannianos $\hat{R}_{\mu\nu}$ e $\hat{G}_{\mu\nu}$, respectivamente, mais funções do escalar geométrico $\omega(x)$. Ver equações (1.17) e (1.20). Em consequência, as equações de movimento (3.3) podem ser interpretadas em termos da

configuração Riemanniana associada da seguinte forma

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda (\omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega^\alpha \omega_\alpha) = 0, \quad (3.5)$$

onde a constante de acoplamento λ é definida como

$$\lambda = \frac{1}{2}(4\xi - 3). \quad (3.6)$$

Esta definição de λ será utilizada ao longo de todo o trabalho.

Nas equações (3.5), os termos que incluem as derivadas do campo escalar geométrico não devem ser interpretadas como fontes físicas do campo gravitacional. Unicamente no caso especial com λ negativo, as equações podem ser consideradas equivalentes as equações de Einstein com uma fonte escalar $\omega(x)$.

Denotando com $\hat{\square}$ o operador D'alambertiano Riemanniano, a equação (3.4) também pode ser expressa em termos da configuração Riemanniana associada,

$$\hat{\square}\omega = 0. \quad (3.7)$$

Esta equação de movimento para o campo escalar geométrico no espaço-tempo vazio é automaticamente satisfeita se as equações de Einstein generalizadas (3.3) são válidas. Isto pode ser verificado imediatamente a partir da condição de divergência nula para o tensor de Einstein Riemanniano: $\hat{G}^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$, ver Apêndice A.

3.2 Campos Externos e Distribuição de Matéria

Com a introdução de termos de interação entre a gravitação e os campos externos, a ação do espaço-tempo vazio (3.1) pode ser estendida para o caso do espaço-tempo com fontes externas não-geométricas. O procedimento utilizado para determinar o tipo de interação no modelo de WIST foi apresentado com o nome de *princípio de acoplamento mínimo generalizado*. Como já foi dito no Capítulo 2, este princípio pode ser enunciado

através de um simples requerimento: as equações de movimento dos campos externos na relatividade especial são idênticas às equações no espaço-tempo curvo se as derivadas simples são substituídas pelas derivadas covariantes no espaço-tempo de Weyl integrável, e a métrica plana pela métrica do espaço-tempo curvo.

3.2.1 Campo Eletromagnético

Num primeiro exemplo descreveremos a interação da gravitação com um campo eletromagnético externo $F_{\mu\nu}$. Consideraremos a ação dada por

$$S = \int (R + \xi \omega^\alpha_{;\alpha} - \frac{1}{2} e^{-2\omega} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.8)$$

O fator de acoplamento entre o campo $F_{\mu\nu}$ e a geometria surge da aplicação do princípio de acoplamento mínimo generalizado. Como vemos da eq. (3.8), neste caso o acoplamento é um fator proporcional a uma função exponencial do campo escalar geométrico.

As variações da ação com respeito as variáveis geométricas independentes, $g^{\mu\nu}$ e $\omega(x)$, conduzem às seguintes equações de movimento para a geometria,

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1) \omega_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha = -e^{-2\omega} (F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \quad (3.9)$$

e

$$\square\omega + 2\omega_\alpha \omega^\alpha = \frac{e^{-2\omega}}{2\lambda} (F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}). \quad (3.10)$$

A variação com respeito ao potencial eletromagnético A_μ determina a equação de campo

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (3.11)$$

Nesta equação do campo externo, a simples anulação da conexão afim leva à conhecida

equação de Maxwell na relatividade especial, consistentemente com o princípio de acoplamento adotado no presente trabalho.

3.2.2 Campo Escalar Externo

Num segundo exemplo consideraremos a presença de um campo escalar externo $\phi(x)$. A ação é dada por

$$S = \int (R + \xi \omega^\alpha{}_{;\alpha} + e^{-2\omega} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.12)$$

Por simplicidade, nesse caso adotamos um potencial do campo escalar nulo.

As equações de movimento respectivas à variação da geometria são

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1) \omega_\mu \omega_\nu + \frac{1}{2} \xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha = -e^{-2\omega} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right), \quad (3.13)$$

$$\square \omega + 2\omega_\alpha \omega^\alpha = \frac{e^{-2\omega}}{\lambda} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}. \quad (3.14)$$

Enquanto que, pela variação da ação com respeito ao campo escalar externo $\phi(x)$, obtemos

$$\phi^{;\mu}{}_{;\mu} = 0. \quad (3.15)$$

3.2.3 Equações em Termos da Estrutura Riemanniana Associada

Como foi explicado anteriormente no caso de vazio, podemos reescrever todas as equações em termos da estrutura Riemanniana associada. Por simplicidade juntaremos os dois exemplos com campo eletromagnético e com campo escalar externo. As expressões resul-

tantes são

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\nu\omega_\mu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha) = \\ -e^{-2\omega}(F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\hat{\square}\omega = \frac{e^{-2\omega}}{2\lambda}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}), \quad (3.17)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 2\omega_\nu F^{\mu\nu}, \quad (3.18)$$

e

$$\hat{\square}\phi = 2\omega_\mu\phi^{,\mu}. \quad (3.19)$$

As soluções destas equações serão diferentes para cada valor da constante de acoplamento adimensional λ . Devido à natureza geométrica do campo escalar $\omega(x)$, a constante λ pode, em princípio, tomar qualquer valor real. No caso $\lambda = 0$, o termo cinético do campo escalar geométrico é eliminado e o campo ω vem a tomar o papel de um multiplicador de Lagrange que impõe um vínculo entre o campo eletromagnético e o campo escalar externo. Esta situação será descartada por carecer de sentido físico. No caso especial em que $\lambda < 0$, todas as equações da teoria de dÍlaton da gravitação [107] são reobtidas. Podemos observar que qualquer solução com campo eletromagnético ou campo escalar externo não nulos corresponde a um campo escalar geométrico $\omega(x)$ não-constante. Isto desempenha um papel crucial na modificação das soluções com respeito à teoria da relatividade geral de Einstein. Por exemplo, será possível eliminar a singularidade no horizonte de Cauchy na solução de buraco negro carregado [37], e no caso de soluções cosmológicas, dependendo do valor da constante de acoplamento ξ , pode ser determinado um período inflacionário e ser eliminados os pontos singulares do espaço-tempo [69, 70].

3.2.4 Partícula Livre

A dinâmica de uma partícula livre ou de um fluido com pressão nula em WIST pode ser obtida por intermédio de uma simples e direta generalização da ação correspondente na teoria da relatividade geral de Einstein. A ação total é dada pela soma de um termo puramente geométrico mais um termo que contém a interação com a matéria

$$S = S_{geom} + S_{mat}. \quad (3.20)$$

S_{geom} denota a ação do espaço-tempo vazio dada pela equação (3.1), enquanto que S_{mat} toma a seguinte expressão,

$$S_{mat} = - \int \sum_{i=1}^n 2m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{e^{-\omega} g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu_i}{d\sigma_i} \frac{dz^\nu_i}{d\sigma_i}} d\sigma_i \delta^4(x - z_i) d^4x. \quad (3.21)$$

Nesta integral, $\delta^4(x - z_i)$ é a função tetra-dimensional de Dirac e o subíndice i faz referência à i -ésima partícula do fluido. n é o número total de partículas que compõem o fluido. A posição de cada partícula é caracterizada pela variável z , enquanto que o parâmetro da trajetória é denominado pela letra σ .

Com n arbitrário, variando a ação com respeito ao tensor métrico calculamos as equações de Einstein generalizadas para o caso de poeira

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha\omega^\alpha = -T_{\mu\nu}^{mat}(x). \quad (3.22)$$

Do lado esquerdo destas equações está escrito o resultado da variação de S_{geom} , enquanto que do lado direito escreve-se o tensor de energia-momentum $T_{mat}^{\mu\nu}$, resultante da variação de S_{mat} ,

$$T_{mat}^{\mu\nu}(x) = \sum_{i=1}^n m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \delta^4(x - z_i) e^{-\omega} \frac{dz^\mu_i}{d\sigma_i} \frac{dz^\nu_i}{d\sigma_i} d\sigma_i. \quad (3.23)$$

Usualmente define-se a densidade de energia média como a seguinte integral [3]:

$$\rho(x) = \frac{1}{\Delta V_0} \int_{\Delta V_0} \sum_i m_i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \delta^4(x - z_i) d\sigma_i dV, \quad (3.24)$$

Introduzindo esta definição na expressão (3.23) do tensor de energia-momentum obtemos

$$T_{mat}^{\mu\nu}(x) = e^{-\omega/2} \rho(x) V^\mu V^\nu, \quad (3.25)$$

onde V^μ é o campo de velocidades do fluido parametrizado com respeito ao tempo próprio. Finalmente, substituindo a equação (3.25) em (3.22), a equação de Einstein generalizada toma a forma

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\xi g_{\mu\nu} \omega_\alpha\omega^\alpha = -e^{-\omega/2} \rho V^\mu V^\nu. \quad (3.26)$$

Por outro lado, variando a ação total com respeito ao campo de Weyl ω , calculamos a equação dinâmica para o campo escalar geométrico

$$\square\omega + 2\omega_\alpha\omega^\alpha = -\frac{1}{2\lambda}\rho e^{-\omega/2}. \quad (3.27)$$

Em termos da estrutura Riemanniana associada podemos escrever as equações da geometrodinâmica como

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \omega^\alpha\omega_\alpha) = -\rho e^{-\omega/2} V_\mu V_\nu. \quad (3.28)$$

$$\hat{\square}\omega = -\frac{1}{2\lambda}e^{-\omega/2}\rho \quad (3.29)$$

De forma análoga à dos casos anteriores, o acoplamento linear entre a densidade de energia da matéria e o campo escalar geométrico está presente nas equações de movimento. Isto implica que a presença de uma distribuição de fluido perfeito sem pressão corresponde a um campo escalar geométrico não-constante na geometria de Weyl integrável.

No caso de uma única partícula livre, $n = 1$. Variando-se a ação com respeito ao caminho da partícula e considerando o parâmetro σ como a distância conforme, $d\sigma^2 = e^{-\omega} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, obtemos a equação da geodésica em WIST

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\sigma}\right)_{;\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = 0. \quad (3.30)$$

De acordo com o princípio de acoplamento adotado, esta equação é a generalização, para o espaço-tempo curvo, da respectiva equação de movimento para uma partícula livre na relatividade especial.

3.2.5 Fluido Perfeito

O fluido perfeito é considerado em vários modelos como uma primeira aproximação para representar uma distribuição de matéria em interação com a gravitação. No contexto da relatividade geral, foi demonstrado que o tensor de energia-momentum de um fluido perfeito, rotacional e isentrópico pode ser derivado a partir de um princípio variacional à Hilbert [83]. Neste trabalho generalizaremos esse procedimento para obter as equações de campo num espaço-tempo de Weyl integrável.

Consideraremos, a seguir, uma Lagrangiana que contempla uma distribuição de matéria num espaço-tempo de Weyl integrável. O acoplamento com a gravitação é determinado pelo princípio de acoplamento mínimo generalizado (ver Capítulo anterior). Assim, a ação total vem dada pela seguinte expressão

$$S = \int \sqrt{-g} (R + \xi \omega^\mu{}_{;\mu} + L_m) d^4x, \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned}
L_m = & -2\tilde{n}(1 + \epsilon) - 2\lambda_1(g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu - 1) - 2\lambda_2\nabla_\mu(\tilde{n}V^\mu) \\
& - 2\lambda_3V^\mu\nabla_\mu X - 2\lambda_4V^\mu\nabla_\mu s.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nesta equação e no resto do trabalho, utilizaremos o símbolo de tilde ($\tilde{}$) para denotar quando uma quantidade arbitrária, por exemplo B , é multiplicada pelo fator exponencial $e^{-\omega/2}$,

$$\tilde{B} \equiv e^{-\omega/2} B. \tag{3.33}$$

As constantes λ_i que aparecem em L_m , com $i = 1, \dots, 4$, são os multiplicadores de Lagrange associados as equações de vínculo e as leis de conservação usuais:

λ_1 é associado ao vínculo cinemático da tetra-velocidade V^μ , com a velocidade da luz $c = 1$.

λ_2 é associado à lei de conservação do número de partículas do fluido no espaço-tempo Weyliano.

λ_3 é associada à conservação da função de Lin X ¹ ao longo da linha de fluxo [83].

λ_4 é associada à conservação da entropia.

O campo vetorial V^μ é o campo de velocidades, X é a função de Lin [83] e s é a entropia específica. ϵ denota a energia interna do fluido. Na estrutura de Weyl integrável ϵ é função do campo escalar geométrico $\omega(x)$, da densidade de entropia específica e do número específico de partículas.

Ao calcular a variação da ação devem considerarse como variáveis independentes a $g^{\mu\nu}$, ω , ϵ , n , V^μ , X , s e aos multiplicadores de Lagrange λ_i .

A variação da ação (3.31) com respeito à métrica $g^{\mu\nu}$ dá:

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = \\
\tilde{n}(\dot{\lambda}_2 + 2\lambda_2\omega_\alpha V^\alpha)g_{\mu\nu} - \tilde{n}(1 + \epsilon)g_{\mu\nu} - 2\lambda_1 V_\mu V_\nu.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

¹A função de Lin permite estender o formalismo Lagrangiano para os fluidos rotacionais, ver ref.[83]

O ponto sobre as variáveis representa a derivada covariante ao longo das linhas de fluxo do fluido, $\dot{a} = a_{;\mu} V^\mu$.

A variação da ação em relação ao campo escalar geométrico leva a

$$2\lambda(\square\omega + 2\omega_\alpha\omega^\alpha) = -(1 + \epsilon)\tilde{n} + 5\dot{\tilde{n}}(\lambda_2 + 2\lambda_2\omega_\alpha V^\alpha) + 2\tilde{n}\frac{\partial\epsilon}{\partial\omega}. \quad (3.35)$$

A variação da ação com respeito às outras variáveis conduz às seguintes expressões, para o campo de velocidades V^μ :

$$-4\lambda_1 V_\mu + 2\lambda_{2,\mu}\tilde{n} + 4\lambda_2\dot{\tilde{n}}\omega_\mu - 2\lambda_3 X_{,\mu} - 2\lambda_4 s_{,\mu} = 0, \quad (3.36)$$

e para o número específico de partículas:

$$\dot{\lambda}_2 + 2\lambda_2\omega_\alpha V^\alpha = (1 + \epsilon) + n\frac{\partial\epsilon}{\partial n}. \quad (3.37)$$

A variação com respeito aos multiplicadores de Lagrange tem como resultado às seguintes equações de vínculo:

$$\dot{X} = 0, \quad (3.38)$$

$$\dot{s} = 0, \quad (3.39)$$

$$(\tilde{n}V^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (3.40)$$

A continuação faremos alguns cálculos intermediários para reescrever em forma mais conveniente as equações geometrodinâmicas.

Primeiro, contraímos a equação (3.36) com V^μ , e usamos as equações (3.38) e (3.39) para escrever

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\dot{\lambda}_2 + 2\lambda_2\omega_\alpha V^\alpha)\tilde{n}. \quad (3.41)$$

Sustituindo neste resultado a equação (3.37) temos

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\tilde{n}\left(1 + \epsilon + n\frac{\partial\epsilon}{\partial n}\right). \quad (3.42)$$

Depois, consideramos a relação termodinâmica que expressa a conservação da energia. Para isso, é preciso fazer uma modificação que tenha em conta a interação do fluido com o campo escalar geométrico $\omega(x)$. Termos novos virão da equação de conservação do número de partículas, pois agora deve ser incluída a variação do volume específico v induzida pelo campo $\omega(x)$. Assim, partindo da equação usual de Gibbs para um fluido perfeito na relatividade especial

$$T ds = d(\rho/n) + p d(1/n), \quad (3.43)$$

onde ρ é a energia por partícula, e usando a definição de elemento de volume específico dada por

$$v = \frac{1}{n}, \quad (3.44)$$

escrevemos

$$T ds = v d\rho + (\rho + p) dv. \quad (3.45)$$

Tomando V^μ como o campo de velocidades do observador comovente com o fluido, a equação de conservação do número de partículas no espaço-tempo de Weyl é dada por

$$(\tilde{n} V^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (3.46)$$

Se abrimos a expressão com o tilde obtemos

$$(\tilde{n} V^\mu)_{;\mu} = \frac{dn}{dt} e^{-\omega/2} + \frac{1}{v^2} \frac{dv}{dt} e^{-\omega/2} - \frac{5}{2} \frac{1}{v} \frac{d\omega}{dt} e^{-\omega/2} = 0, \quad (3.47)$$

de onde surge

$$dv = -\frac{dn}{n^2} + \frac{5}{2} \frac{d\omega}{n}. \quad (3.48)$$

Substituindo este resultado na equação (3.45), obtemos a seguinte equação de conservação

da energia para um fluido perfeito em WIST

$$T n ds = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn + \frac{5}{2}(\rho + p) dw. \quad (3.49)$$

A seguir, expressamos a densidade de energia em termos da energia interna,

$$\rho = n(1 + \epsilon), \quad (3.50)$$

e substituimos ela na equação (3.49),

$$T n ds = n d\epsilon - \frac{p}{n} dn + \frac{5}{2}(\rho + p) dw. \quad (3.51)$$

A partir desta equação calculamos as expressões para a variação da energia interna

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} = -\frac{5}{2} \frac{\rho + p}{n}, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial n} = \frac{p}{n^2}. \quad (3.53)$$

Finalmente, usamos as equações (3.52), (3.53), (3.37) e (3.42) em (3.34) e (3.35), e obtemos as seguintes expressões das equações geometrodinâmicas:

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = -\tilde{\rho}V_\mu V_\nu + \tilde{p}h_{\mu\nu}, \quad (3.54)$$

$$\square\omega + 2\omega_\alpha\omega^\alpha = -\frac{1}{2\lambda}\tilde{\rho}, \quad (3.55)$$

onde $\tilde{\rho} = (1 + \epsilon)\tilde{n}$ é a densidade de energia específica multiplicada pelo fator $e^{-\omega/2}$.

Em termos da configuração Riemanniana associada, as equações podem ser escritas como

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha) = -(\tilde{\rho}V_\mu V_\nu - \tilde{p}h_{\mu\nu}) \quad (3.56)$$

$$\hat{\Omega}\omega = -\frac{1}{2\lambda}\tilde{\rho}. \quad (3.57)$$

Estas equações substituem, no contexto de uma teoria de WIST, as correspondentes equações de Einstein da relatividade geral [83] com um campo escalar convenientemente acoplado. Para uma densidade $\tilde{\rho}$ não nula, o campo escalar geométrico de Weyl é não-constante de acordo com a equação (3.57). Neste caso, a equação (3.57) não é deduzida a partir das equações generalizadas de Einstein como no caso de vazio. A equação dinâmica do campo escalar geométrico é uma expressão independente que deve ser satisfeita simultaneamente com as outras equações de movimento. Em consequência, mudanças fundamentais no comportamento de um fluido perfeito são devidas à estrutura de Weyl integrável para o espaço-tempo. Por exemplo, como veremos na seção seguinte, a estrutura de WIST modifica a equação de Raychaudhuri e a dinâmica das partículas do fluido. Veremos também que, numa aplicação à cosmologia, certas soluções não-singulares e inflacionárias são permitidas para uma geometria de Weyl integrável homogênea e isotrópica. Estas modificações são importantes desde o ponto de vista observacional. Elas podem implicar novas predições no âmbito astrofísico e, assim, dar lugar ao desenvolvimento de testes observacionais para a teoria.

3.3 Mais sobre Fluido Perfeito em WIST

Nesta seção apresentaremos mais algumas expressões características da dinâmica de um fluido perfeito no espaço-tempo de Weyl integrável. Alguns cálculos detalhados desta seção podem ser encontrados no Apêndice A.

Dada uma geometria de Weyl integrável, o tensor de curvatura é definido por

$$V_{\alpha;\beta;\gamma} - V_{\alpha;\gamma;\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma}V^\epsilon. \quad (3.58)$$

Reescrevendo cada termo desta equação em função dos elementos da estrutura Riemma-

niana associada, obtemos a seguinte equação

$$V_{\alpha\|\beta\|\gamma} - V_{\alpha\|\gamma\|\beta} = \hat{R}_{\alpha\epsilon\beta\gamma} V^\epsilon. \quad (3.59)$$

Ou seja que (3.59) é uma equação válida no espaço-tempo de Weyl integrável, equivalente à definição do tensor de curvatura Weyliano.

Com o objetivo de comparar o comportamento do fluido perfeito em WIST com o comportamento conhecido numa estrutura Riemanniana, calcularemos a equação de Raychaudhuri da estrutura Riemanniana associada. Esta equação é obtida diretamente ao contrair a equação (3.59) com o tensor métrico contravariante $g^{\alpha\beta}$:

$$\dot{\hat{\theta}} + \frac{\hat{\theta}^2}{3} - \hat{a}^\alpha{}_{\|\alpha} + \hat{\Omega}^2 + \hat{\sigma}^2 = \hat{R}_{\epsilon\gamma} V^\epsilon V^\gamma. \quad (3.60)$$

Aqui, $\hat{R}_{\epsilon\gamma}$ é o tensor de Ricci da estrutura Riemanniana associada. A aceleração Riemanniana e dada por $\hat{a}^\alpha = V^\alpha{}_{\|\beta} V^\beta$ e os parâmetro cinemáticos Riemannianos são definidos da maneira usual na geometria Riemanniana associada [3, 104]: $\hat{\sigma}$ é o parâmetro de deformação, $\hat{\Omega}$ denota o parâmetro de rotação, e $\hat{\theta}$ é o parâmetro de expansão.

O tensor $\hat{R}_{\epsilon\gamma}$ vincula-se com o tensor de energia-momentum (arbitrário) através das equações de movimento da geometria. Então, uma expressão para o membro da direita da equação (3.60) pode ser obtido a partir das equações de Einstein generalizadas que foram deduzidas anteriormente.

Para um fluido perfeito isentrópico e rotacional num espaço-tempo de Weyl integrável, a partir das equações de movimento (3.56), podemos escrever

$$\hat{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \hat{R} + \lambda(\omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha) - (\tilde{\rho} V_\mu V_\nu - \tilde{p} h_{\mu\nu}) \quad (3.61)$$

Então, a partir de (3.61) calculamos

$$\hat{R}_{\epsilon\gamma} V^\epsilon V^\gamma = \lambda \dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}), \quad (3.62)$$

onde $\dot{\omega} = \omega_{;\alpha} V^\alpha$.

Finalmente, substituindo (3.62) na equação (3.60) temos a seguinte equação

$$\dot{\hat{\theta}} + \frac{\hat{\theta}^2}{3} - \hat{a}^\alpha{}_{||\alpha} + \hat{\Omega}^2 + \hat{\sigma}^2 = \lambda \dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}(\tilde{\rho} + 3\tilde{p}). \quad (3.63)$$

Esta equação com ω constante representa a evolução das trajetórias que seguem as partículas do fluido no espaço-tempo Riemanniano. Em consequência, resulta evidente que a dinâmica do fluido perfeito é afetada profundamente pela geometria Weyliana. Todos os termos da direita da equação (3.63) apresentam uma dependência com o campo escalar geométrico de Weyl, e inclusive, o primeiro dos termos é função exclusivamente da variação de $\omega(x)$. Assim, quando ω não é constante, ele contribui de forma definitiva na evolução das linhas de fluxo e sua influência é independente dos valores da pressão ou da densidade de energia que caracterizam o fluido. O comportamento das linhas de fluxo de um mesmo fluido perfeito num espaço-tempo de Weyl integrável será diferente ao apresentado no caso de uma geometria Riemanniana.

Por outro lado, no caso de um fluido perfeito isentrópico e sem deformação, a equação dinâmica para a densidade de energia específica ρ é dada por

$$\dot{\rho} = -\hat{\theta}(\rho + p), \quad (3.64)$$

onde $\hat{\theta} = V^\nu{}_{||\nu}$. Esta equação é evidência de um desacoplamento entre a energia e o campo geométrico ω , a nível da equação de conservação.

A partir da equação (3.64), junto com a equação de conservação da matéria, e com a equação de conservação da densidade de energia específica, podemos verificar a propriedade de isentropia de nosso modelo de fluido perfeito,

$$\dot{s} = 0. \quad (3.65)$$

Por último mencionaremos que, para o tipo de fluido aqui considerado, a equação da aceleração mostra a modificação na dinâmica das partículas quando estamos numa geometria Weyliana, pois elas adquirem uma aceleração que depende da derivada do campo escalar geométrico,

$$\hat{a}^\mu = h^{\mu\nu} \left(\frac{p_{,\nu}}{\rho + p} - \frac{1}{2} \omega_\nu \right). \quad (3.66)$$

Nesta notação, $\hat{a}^\alpha = V^\alpha_{\parallel\beta} V^\beta$.

Tanto a equação (3.64) como a (3.66) surgem diretamente das equações de movimento da geometria.

Capítulo 4

cosmologia

Modelo Cosmológico Homogêneo e Isotrópico

4.1 Introdução

O estudo das soluções cosmológicas é um dos pontos vitais de qualquer teoria do espaço-tempo. A pergunta de qual teoria e de qual solução de suas equações é a mais adequada para descrever nosso universo motiva enorme parte das pesquisas realizadas em gravitação.

Dentro da teoria da relatividade geral, os modelos cosmológicos mais aceitos são desenvolvidos seguindo o *Princípio de Copérnico*, pelo qual se considera que, em uma escala adequada, o universo é espacialmente homogêneo [40]. Em palavras simples, homogeneidade espacial significa que um ponto sobre uma tri-superfície tipo espaço é equivalente a qualquer outro ponto da mesma superfície. Obviamente o espaço-tempo não é exatamente homogêneo espacialmente, pois existem as irregularidades locais tais como estrelas, galaxias, ou cúmulos de galaxias. Não obstante, parece razoável supor que o universo é espacialmente homogêneo a uma escala suficientemente grande.

Resulta difícil obter um teste observacional da homogeneidade espacial, devido a que não é simples medir a separação entre objetos muito distantes. No entanto, as pesquisas observacionais sobre *isotropia* do espaço tem levado à conclusão de que a configuração

do universo é, aproximadamente, esfericamente simétrica a nosso redor. Por exemplo, as observações tem mostrado que as fontes radiativas extragalácticas são distribuídas, mais ou menos, de forma isotrópica.

Isotropia e homogeneidade estão intimamente vinculadas, de acordo com o que foi demonstrado por A.G. Walker em 1944 : isotropia ao redor de todo ponto implica homogeneidade do espaço. Assim, otorgando esta propriedade matemática à geometria espacial do modelo do universo, foi deduzida a métrica denominada de *Robertson-Walker* ou de *Friedmann* (FRW). Esta é uma das soluções cosmológicas mais importantes dentro do contexto da relatividade geral. Ela representa um espaço dinâmico, com simetria esférica exata ao redor de cada ponto, e considera o fluido perfeito como uma descrição aproximada do conteúdo material do espaço-tempo Riemanniano.

De acordo com os resultados observacionais, considera-se que a solução de FRW é uma boa aproximação em grande escala da geometria para a região observável do espaço-tempo. A evidência observacional mais forte que dispomos é a radiação térmica de fundo na temperatura de aproximadamente 3 K. Este fenômeno apresenta um alto grau de isotropia, e resulta muito difícil de ser explicado fora de um modelo cosmológico que adote a hipótese de homogeneidade e isotropia espacial, a grandes escalas, numa boa aproximação .

O modelo de FRW recebeu da comunidade científica um merecido reconhecimento, sendo adotado desde então como modelo padrão. Apesar disso, ele apresenta sérios questionamentos. Um dos problemas mais graves é a existência de uma *singularidade* nas soluções do espaço-tempo, onde as leis físicas da teoria deixam de ser válidas. Este ponto singular, identificado com a origem do universo, não surge meramente de um problema de coordenadas. Nele, as propriedades físicas do fluido perfeito junto com os invariantes da geometria divergem: a densidade de energia e vários escalares definidos a partir do tensor de curvatura vão a infinito, enquanto que o fator de escala vai a zero. Este resultado tem sido deduzido sob a hipótese de homogeneidade e isotropia espaciais exatas, e para um espaço-tempo representado por uma geometria Riemanniana. Estas

suposições podem ser razoáveis nas escalas das presentes observações, mas realmente não são necessariamente válidas em toda a história do Universo. Assim, por exemplo nas primeiras épocas, o universo poderia ter apresentado características bem diferentes, cabendo inclusive a possibilidade de que o comportamento singular não aconteça.

A presença da singularidade no modelo cosmológico da relatividade geral tem motivado a busca de modelos alternativos que descrevam satisfatoriamente aquelas condições extremas com campos gravitacionais intensos e escalares de curvatura muito grandes. Qual é a configuração mais realista do espaço-tempo no início do nosso universo, e qual é a descrição aproximada dos processos físicos na presença de campos gravitacionais muito fortes, estão entre as questões mais importantes da cosmologia ([5, 92, 31], entre outras).

4.2 Fluido Perfeito e Potencial $V(\omega)$

4.2.1 Ação e Equações de Movimento

O objetivo do presente capítulo é o estudo de um modelo cosmológico simples dentro da teoria que considera o espaço-tempo representado por uma geometria de Weyl integrável. Assumiremos que o espaço é homogêneo e isotrópico e que a distribuição de matéria é representada, em boa aproximação, por um fluido perfeito. Com este trabalho estamos generalizando o estudo iniciado por Novello et al. na referência [69].

No capítulo anterior foram deduzidas as equações dinâmicas para um fluido perfeito na geometria de Weyl integrável com potencial nulo. Tendo agora em conta a presença de um potencial não nulo do campo escalar geométrico, $V(\omega) \neq 0$, a Lagrangiana é dada por

$$S = \int \sqrt{-g} (R + \xi \omega^\mu{}_{;\mu} + V(\omega) + L_m) d^4x, \quad (4.1)$$

onde L_m é a densidade Lagrangiana generalizada da matéria dada na equação(3.32).

Como no capítulo anterior, por intermédio do princípio variacional chegamos às equa-

ções de movimento

$$G_{\mu\nu} + \omega_{\mu;\nu} - (2\xi - 1)\omega_\mu\omega_\nu + \xi g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha = -\tilde{\rho}V^\mu V^\nu + \tilde{p}h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\omega), \quad (4.2)$$

$$\square\omega + 2\omega_\alpha\omega^\alpha = -\frac{1}{4\xi - 3}(\tilde{\rho} + V'), \quad (4.3)$$

onde $V' = \partial V/\partial\omega$.

Em função das quantidades Riemannianas associadas, as equações podem ser reescritas de uma forma mais familiar

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha) = -(\tilde{\rho}V_\mu V_\nu - \tilde{p}h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\omega) \quad (4.4)$$

$$\hat{\square}\omega = -\frac{1}{2\lambda}(\tilde{\rho} + V'), \quad (4.5)$$

com $\lambda = (4\xi - 3)/2$.

4.2.2 Equações Dinâmicas com a Métrica de FRW

Tomaremos por hipótese que a métrica do espaço-tempo, homogêneo e isotrópico, é da forma usual da solução de Friedmann-Robertson-Walker. Nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) esta métrica é dada pelo seguinte elemento de linha

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (4.6)$$

onde denotamos com κ o parâmetro da curvatura espacial.

Substituindo (4.6) nas equações de movimento obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} -3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3 \frac{\kappa}{a^2} = \frac{\lambda}{2} \dot{\omega}^2 - \tilde{\rho} - \frac{1}{2} V(\omega) \\ -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\kappa}{a^2} = -\frac{\lambda}{2} \dot{\omega}^2 + \tilde{p} - \frac{1}{2} V(\omega) \\ \frac{(a^3 \dot{\omega})}{a^3} = -\frac{1}{2\lambda} (\tilde{\rho} - V') \end{array} \right. \quad (4.7)$$

No sistema (4.7), o ponto sobre uma variável indica a derivada com respeito ao tempo, enquanto que a linha denota a derivada com respeito ao campo escalar ω .

Estas equações são formalmente equivalentes às equações da teoria de Einstein com um campo escalar mais um fluido perfeito, convenientemente acoplados e sempre que λ seja negativo. Não obstante, à natureza puramente geométrica do campo escalar ω permite que o parâmetro λ não esteja restringido a nenhum intervalo particular dos números reais. Em consequência, os valores positivos de λ acarretarão novidades no comportamento das soluções cosmológicas em WIST comparadas com as encontradas tomando por base a TRG. Por esta razão, nas seguintes seções, a análise será dirigida especialmente aos casos com λ positivo.

4.2.3 Sistema Dinâmico e Análise Qualitativa

A integração do sistema de equações diferenciais (4.7) é uma tarefa que provavelmente não possa ser realizada de forma analítica e as expressões exatas das soluções de nosso modelo não são em geral conhecidas a menos de alguns casos particulares. Não obstante, podemos obter muita informação sobre o comportamento das soluções através de uma *análise qualitativa do sistema dinâmico*. Uma rápida resenha do método é apresentada no Apêndice B. Se o leitor precisar de maior informação sobre o tema, pode dirigir-se às referências dadas nesse Apêndice.

Nas seguintes seções estudaremos o sistema de equações diferenciais (4.7) aplicando a técnica de análise qualitativa de sistemas dinâmicos, e considerando os casos de potencial

nulo e de potencial exponencial. Por simplicidade, trabalharemos com modelos de seção espacial plana fazendo $\kappa = 0$.

O sistema de equações pode ser colocado em uma forma mais conveniente introduzindo as seguintes variáveis

$$x = \frac{\dot{a}}{a}, \quad y = \dot{\omega}. \quad (4.8)$$

Reescrevendo em função de (x, y) , as equações adquirem a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x^2 = \frac{\lambda}{2}y^2 - \tilde{\rho} - \frac{1}{2}V(\omega) \\ -2\dot{x} - 3x^2 = -\frac{\lambda}{2}y^2 + \tilde{p} - \frac{1}{2}V(\omega) \\ 3xy + \dot{y} = -\frac{1}{2\lambda}(\tilde{\rho} - V') \end{array} \right. \quad (4.9)$$

4.2.4 Equação de Estado

Junto com o sistema dinâmico (4.9) adotamos a seguinte equação de estado para o fluido perfeito

$$p = (\gamma - 1)\rho, \quad (4.10)$$

onde $1 \leq \gamma \leq 2$.

A equação dinâmica para a densidade de energia em repouso não é modificada pela presença do potencial $V(\omega)$, então, a partir de (3.64) e com (4.10) integramos a seguinte expressão para ρ

$$\tilde{\rho} = \rho_0 e^{-\frac{\omega}{2}} a^{-3\gamma}. \quad (4.11)$$

A constante de integração ρ_0 é uma constante arbitrária sempre positiva.

4.3 Potencial Nulo

4.3.1 Sistema Dinâmico Bidimensional

Substituindo $V(\omega) = 0$ na primeira equação de (4.9) obtemos a densidade de energia em termos das variáveis x e y

$$\tilde{\rho} = 3x^2 + \frac{\lambda}{2}y^2. \quad (4.12)$$

Utilizando a equação de estado (4.10), a expressão para a densidade de energia (4.12), e fazendo $V(\omega) = 0$, o sistema dinâmico é reduzido ao seguinte *sistema bidimensional, autônomo, homogêneo* de ordem $m = 2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}\gamma x^2 + \frac{\lambda}{4}(2 - \gamma)y^2 \\ \dot{y} = -\frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2\lambda}x^2 - 3xy \end{cases} \quad (4.13)$$

Os diagramas de fase deste sistema são representados no plano de fase bidimensional (x, y) . Da definição da variável x , é imediato deduzir que a região do plano de fase com $x > 0$ corresponderá a um domínio das soluções puramente em expansão, enquanto que $x < 0$ conterà as soluções colapsantes. (Uma resenha da análise de sistemas homogêneos é apresentada na segunda seção do Apêndice B.)

4.3.2 Condição de Energia Fraca

A condição de energia fraca, pela qual a densidade de energia deve ser sempre positiva, toma a seguinte forma nas variáveis x e y

$$\rho > 0 \equiv 3x^2 + \frac{\lambda}{2}y^2 > 0. \quad (4.14)$$

Quando $\lambda > 0$, a inequação (4.14) é satisfeita em todo o plano de fase. Quando $\lambda < 0$, temos que $\rho > 0$ implica $|y| < k_{\pm}|x|$, e em consequência existem certas regiões do espaço de fase que não tem sentido físico, pois a densidade de energia é negativa.

4.3.3 Ponto Crítico e Raios Invariantes

Definimos como *pontos críticos* aqueles pontos de equilíbrio onde $\dot{x} = \dot{y} = 0$. O sistema homogêneo (4.13) possui apenas um *único ponto crítico* na região finita, localizado na origem O , de tipo degenerado e cuja topologia depende diretamente do valor do parâmetro λ .

Os *raios invariantes* podem ser definidos como aquelas soluções particulares do tipo $y = kx$, com k constante. Após cálculos simples, obtemos três soluções para os raios invariantes do sistema homogêneo (4.13)

-Duas soluções são válidas só quando $\lambda < 0$. Elas são da forma $y = k_{\pm}x$ com

$$k_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{6}{\lambda}}. \quad (4.15)$$

-Uma terceira solução é da forma $y = k_{*}x$, válida para qualquer valor de $\lambda \neq 0$ e com

$$k_{*} = -\frac{1}{\lambda(2-\gamma)}. \quad (4.16)$$

4.3.4 Análise Qualitativa para λ Positivo

Como foi mencionado anteriormente, as novidades no comportamento das soluções cosmológicas virão com os valores positivos da constante de acoplamento do campo escalar geométrico. Os resultados com $\lambda < 0$ não fornecerão novos resultados em comparação com os que podem ser encontrados nas teorias Riemannianas com um fluido perfeito e um campo escalar como fontes externas. Por esta razão, a partir de agora estudaremos o sistema dinâmico (4.13) unicamente para os *valores positivos de λ* .

Generalidades dos Diagramas de Fase.

Os diagramas de fase do modelo com $\lambda > 0$ são mostrados nas Figs. 4.1 e 4.2 e na Fig. 4.3. Estes diagramas são completos e incluem as *regiões finitas* tanto como a região C_{∞} que representa o *infinito* do plano (x, y) . As curvas desenhadas são representativas

das diferentes famílias de soluções, e o raio invariante é representado pelo diâmetro da circunferência com extremos nos pontos A e B . O único *raio invariante* do sistema (4.13) com $\lambda > 0$, pelo que vimos acima, é a solução particular da forma $y = k_* x$, com k_* dada por (4.16).

Figura 4.1: Diagrama de fase com $V(\omega) = 0$ e $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_*$

No diagrama de fase da Fig. 4.1: as regiões sombreadas denotam evolução inflacionária (deflacionária) se $x > 0$ ($x < 0$). O ponto O representa um universo de Minskowski, entanto que A e B são singularidades inicial e final, respectivamente. As curvas fechadas que partem de O representam uma classe de universos não-singulares.

Como já concluímos a partir da eq. (4.14), quando $\lambda > 0$ não existem restrições no plano devido à condição de energia fraca.

Por outro lado, existem *domínios inflacionários* no plano (x, y) dados por

$$y^2 > \frac{2(2 - 3\gamma)}{\lambda(\gamma - 2)} x^2. \quad (4.17)$$

Esta inequação surge diretamente da condição $\frac{\ddot{a}}{a} > 0$ do *comportamento inflacionário*. Nas figuras, as regiões inflacionárias são representadas pelas partes sombreadas.

Figura 4.2: Diagrama de fase com $V(\omega) = 0$, $\lambda > \lambda_{cr}$ e $\lambda > \lambda_*$

No Diagrama de fase da Fig. 4.2: as curvas fechadas passam por uma época inflacionária finita, menor que a mostrada na Fig. 4.1

Comportamento e Interpretação das Curvas

Seguindo a técnica descrita na segunda seção do Apêndice B, deduziremos o comportamento das curvas integrais do sistema (4.13) através da análise do sistema em coordenadas polares. Substituindo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ em (4.13) e reordenando obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{r} = r^2 Z(\theta) \\ \dot{\theta} = r N(\theta) \end{cases} \quad (4.18)$$

onde $Z(\theta)$ e $N(\theta)$ são dados pelas equações (B.44) e (B.45), respectivamente. Nestas coordenadas o raio invariante pode ser determinado pelo valor de θ para o qual $N(\theta) = 0$

nulo. Assim, em função da expressão (4.16), encontramos que a raiz θ_0 de $N(\theta)$ é

$$\theta_0 = \arctan(k_*). \quad (4.19)$$

Uma vez conhecido o raio invariante, podemos analisar a configuração das curvas em sua vizinhança e perto do ponto crítico O . Nessa análise utilizaremos as series de Taylor de $Z(\theta)$ e $N(\theta)$ ao redor de θ_0 . Estas expansões são dadas pelas equações (B.46) e (B.47).

Para classificar os tipos de curvas necessitamos da ordem da raiz θ_0 de $N(\theta)$, que segundo (B.47) é $n = 1$, e do signal do produto $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0)$, que é nulo unicamente quando

$$\lambda = \lambda_{cr} = \frac{1}{6\gamma(2-\gamma)}. \quad (4.20)$$

Em acordo com a convenção apresentada no Apêndice B, concluímos que existem basicamente dois tipos de soluções

(1) tipo I: $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0$ quando $\lambda > \lambda_{cr}$.

(2) tipo II: $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) \leq 0$ quando $\lambda \leq \lambda_{cr}$.

Nas Figs. 4.1 e 4.2 e na Fig. 4.3 mostram-se as trajetórias tipo I e II, respectivamente.

Devido a que $n = 1$ e como os parâmetros γ e λ estão nos intervalos $1 \leq \gamma \leq 2$ e $\lambda > 0$, temos que $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) < 0$ é sempre válido para as soluções do tipo II. Conseqüentemente, as curvas do digrama de fase do tipo II sempre afastam-se do raio invariante perto da origem, e convergem ao raio invariante no infinito.

A condição $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) = 0$ implica um vínculo estrito entre os valores dos parâmetros da teoria, pois λ e γ deveriam satisfazer a equação (4.20). Também vemos que $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0$ é impossível para o intervalo $0 < \lambda < \lambda_{cr}$. Em conseqüência, estes dois subcasos do tipo II com $n = 1$ não são considerados em nosso modelo quando λ é positivo.

Os raios invariantes desenhados pelas linhas OA e BO são duas soluções particulares, determinadas pela raiz $\theta_0 = \arctan(k_*)$ de $N(\theta)$. Elas podem ser integradas analítica-

mente e o resultado da integração conduz às seguintes expressões do fator de escala e do campo escalar geométrico

$$a(t) = ((1 - q) C_0 t + C_1)^{\frac{1}{1-q}} \quad (4.21)$$

e

$$\omega(t) = \frac{1}{\lambda(2 - \lambda)(q - 1)} \ln((1 - q) C_0 t) + \omega_0, \quad (4.22)$$

onde C_0 , C_1 e ω_0 são constantes de integração. O parâmetro q é uma simples combinação dos parâmetros da teoria

$$q = \frac{\lambda_* - \lambda}{4 \lambda_* \lambda (2 - \gamma)} \quad (4.23)$$

com

$$\lambda_* = \frac{1}{2(2 - \gamma)(3\gamma - 2)}. \quad (4.24)$$

O sentido das curvas OA e OB , pode ser deduzido a partir da expressão da variável $x(t)$ sobre o raio invariante,

$$x(t) = \frac{C_0}{C_0 t(1 - q) + C_1}. \quad (4.25)$$

O sentido destas trajectórias dependerá do sinal de $1 - q$, pois

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x = sg(1 - q) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t}. \quad (4.26)$$

A partir da definição de q obtemos a seguinte equivalência

$$1 - q > 0 \equiv \lambda > \lambda_{cr}, \quad (4.27)$$

Esse resultado determina que

(1) quando $\lambda > \lambda_{cr}$, a trajetória sobre o raio invariante com $x > 0$ está orientada em direção à origem, enquanto que o raio invariante colapsante ($x < 0$) parte da origem a $t \rightarrow -\infty$ e finaliza no infinito do diagrama de fase.

(2) quando $\lambda < \lambda_{cr}$, as trajectórias sobre os raios invariantes tomam as direções em sen-

tido contrário ao visto no caso (1).

Figura 4.3: Diagrama de fase para $V(\omega) = 0$ e $\lambda < \lambda_{cr}$

No diagrama de fase da Fig. 4.3: o universo de Minskowski é denotado pelos pontos A e B , e a origem é uma singularidade. A principal classe de soluções representa universos não-singulares que partem de A e finalizam em B . Todos eles passam por uma etapa inflacionária indicada pela região sombreada.

A esta altura da análise temos o raio invariante, o ponto crítico O , e a forma das curvas na região finita. Para dar uma interpretação cosmológica dos pontos críticos e das curvas, devemos completar a análise com o estudo das regiões que representam o infinito do plano de fase. Uma breve descrição da análise no infinito e alguns cálculos intermediários encontram-se na última seção do Apêndice B. A seguir enunciaremos diretamente os resultados.

A interpretação das trajetórias das curvas mostradas nas Figs. 4.1 e 4.2, com $\lambda > \lambda_{cr}$, é a seguinte:

- O ponto crítico na origem O , é identificado como sendo um universo de Minkowski. Quando nos aproximamos a O , a densidade de matéria tende a anularse, a expansão é máxima ($a \rightarrow \infty$) e o campo ω tende a um valor constante.
- Os pontos críticos A e B representam singularidades físicas, neles a densidade de massa toma valor infinito e o fator de escala tende a zero.
- A linha OA representa um modelo colapsante ($x < 0$) que começa num estado de máxima expansão na origem O a $t \rightarrow -\infty$ e finaliza num estado singular no ponto A quando $t = 0$ (sempre é possível escolher $C_1 = 0$ em (4.21)).
- A linha BO representa um cosmos em expansão com singularidade inicial no ponto B , e com estado final Minkowskiano em $t \rightarrow \infty$ na origem O .
- A e B são resultantes de um "big-crunch" e de um "big-bang", respectivamente.
- Quando $\lambda < \lambda_*$, ou equivalentemente $q > 0$, os raios invariantes representam universos inflacionários ou deflacionários para a coordenada x positiva ou negativa respectivamente.
- A classe mais interessante de soluções fora dos raios invariantes é representada pelas curvas fechadas com extremos no ponto O . O fator de escala nesses casos parte de um valor máximo na origem, diminui até um valor mínimo não nulo quando $x = 0$, e finalmente volta a aumentar continuamente para retornar a ser um espaço-tempo de Minkowski ao regressar à origem. O interessante nessas soluções é o fato de não existir nenhum ponto singular. O parâmetro de Hubble, dado pela coordenada x , não diverge para nenhum valor do tempo coordenado t .
- Além da regularidade, todas as soluções fechadas possuem períodos inflacionários e deflacionários nos semiplanos com x positivo e negativo, respectivamente.
- Na Fig. 4.1 o período inicial de deflação é seguido por um regime não-inflacionário, depois do qual o universo expande novamente em inflação até chegar ao ponto O .
- Na Fig. 4.2 os regimens inflacionários ou deflacionários constituem épocas intermediárias entre os períodos inicial e final sem inflação. Em conseqüência, eles são períodos mais cortos que os vistos na Fig. 4.1.

Para o caso $\lambda < \lambda_{cr}$, representado na Fig. 4.3, as trajectórias são interpretadas da seguinte maneira:

- Os raios invariantes mudam de sentido com respeito as Figs. 4.1 e 4.2.
- A origem O não reproduz um universo Minkowskiano, mas sim uma singularidade.
- Os pontos críticos A e B são espaço-tempos planos. -A linha AO é uma solução colapsante para a qual o estado inicial é o espaço-tempo de Minkowski, e o ponto final é singular.
- A linha OB começa numa singularidade e chega ao estado final de máxima expansão no ponto B .
- As soluções exatas dos raios invariantes estão dadas pelas equações (4.21) e (4.22).
- Como $\lambda_{cr} < \lambda_*$ sempre, então para $\lambda < \lambda_{cr} < \lambda_*$ os raios invariantes apresentam inflação ao longo de toda a trajetória.
- As curvas fora dos raios invariantes representam soluções com um comportamento semelhantes ao descrito nas Figs. 4.1 e 4.2. As curvas que partem do ponto A e acabam no ponto B representam modelos comológicos não-singulares. Estas trajetórias iniciam e finalizam em universos planos, atingindo um radio mínimo no momento em que a curva atravessa o eixo y .

Frente a istos resultados, podemos concluir que a presença do campo escalar geométrico provoca a ausência de singularidades nas soluções cosmológicas (fora dos raios invariantes) para o presente modelo sem potencial escalar. Isto é representado nos diagramas de fase, tanto nas curvas fechadas das Figs. 4.1 e 4.2, como nas trajetórias da Fig. 4.3.

4.4 Potencial Exponencial

Nas teorias escalar-tensoriais, a ação que descreve o espaço-tempo junto com as fontes externas pode incluir um termo de potencial escalar $V(\phi)$, função do campo escalar. A forma deste potencial é uma questão em aberto, e o modelo físico que melhor representa os períodos com fortes campos gravitacionais é ainda desconhecido. *A priori*, nenhum tipo de potencial, tem preferência em relação aos outros.

Em vários modelos, $V(\phi)$ é deduzido a partir da física de partículas. Este é o caso do potencial de Coleman-Weinberg que surge de teorias grão-unificadas [52]. Outros modelos cosmológicos consideram formas de $V(\omega)$ simples, tais como os potenciais quadráticos ou quárticos, que não são diretamente relacionadas com nenhuma teoria física particular [6].

Em outros casos se introduze um potencial exponencial. Estes modelos surgiram dentro das teorias efetivas 4-dimensionais, induzidas pela teoria de Kaluza-Klein, e também foram desenvolvidos dentro da teoria de supercordas. Vários exemplos são citados e estudados em [55], [39] e [106].

Pode-se ver que a escolha de um potencial exponencial não é apenas de interesse acadêmico. Yokoyama e Maeda [106] demonstraram que um potencial dessa forma conduz naturalmente a soluções cosmológicas, com comportamento inflacionário do tipo potência, que conseguem eliminar o problema de horizonte e de platitude no modelo cosmológico. Entre outros exemplos podemos citar o trabalho de Haliwell [39] e mais recentemente a referência [74].

Como em outras teorias escalar-tensoriais, a ação que descreve o fluido perfeito no espaço-tempo de Weyl integrável também pode incluir um termo de potencial escalar $V(\omega)$, função do campo escalar geométrico. Para escolher a forma do potencial, consideraremos os precedentes mencionados nos parágrafos anteriores e teremos em mente o objetivo de facilitar a integração das equações de movimento. Em particular, procuraremos um potencial que possibilite o estudo das soluções através da técnica de análise qualitativa de sistemas dinâmicos. Em consequência, escolhemos um potencial com a forma exponencial dada por

$$V(\omega) = V_0 e^{\beta\omega}, \quad (4.28)$$

onde V_0 e β são constantes arbitrárias. Este tipo de potencial permitirá escrever o sistema de equações dinâmicas como um sistema autônomo.

4.4.1 Sistema Dinâmico Bidimensional

Para obter um sistema dinâmico bidimensional a partir do sistema (4.7) introduzimos uma variável temporal η e duas variáveis dinâmicas novas

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{V} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.29)$$

$$\alpha = \frac{a'}{a}, \quad \Delta = \omega'. \quad (4.30)$$

A partir daqui a linha denotará a diferenciação com respeito a η .

Com estas transformações, o sistema de equações de movimento (4.7) fica equivalente a

$$\begin{cases} \alpha' = -\frac{1}{2}\beta\Delta\alpha - \frac{\lambda}{4}\Delta^2(\gamma - 2) - \frac{3}{2}\gamma\alpha^2 + \frac{\gamma}{4} \\ \Delta' = -\frac{1}{2}\beta\Delta^2 - 3\alpha\Delta - \frac{3}{2\lambda}\alpha^2 - \frac{1}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2\lambda}\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \quad (4.31)$$

Os diagramas de fase são mostrados nas Fis. 4.4,4.5 e 4.6. Nesses diagramas, $\alpha < 0$ é o semiplano que contém os modelos em contração, enquanto que $\alpha > 0$ contém os modelos durante a época de expansão.

4.4.2 Condição de Energia Fraca

Em termos das novas variáveis, a condição de energia fraca é dada por

$$\tilde{\rho} \geq 0 \implies 6\alpha^2 + \lambda\Delta^2 \geq 1. \quad (4.32)$$

Assim, para $\lambda > 0$ existe uma região fechada do espaço de fase (α, Δ) , limitada por uma curva elíptica $6\alpha^2 + \lambda\Delta^2 = 1$, onde a condição de energia fraca não é satisfeita. A curva elíptica é solução do sistema de equações com densidade de energia nula. Se $\lambda < 0$ a região de densidade de energia positiva é limitada por uma curva hiperbólica.

4.4.3 Pontos Críticos

O sistema (4.31) tem dois pares de pontos críticos

$$P_1 \equiv (\alpha_1, \Delta_1) = +\sqrt{\frac{\lambda}{\beta^2 + 6\lambda}} \left(1, \frac{\beta}{\lambda} \right), \quad (4.33)$$

$$P_2 \equiv (-\alpha_1, -\Delta_1) \quad (4.34)$$

e

$$P_3 \equiv (\alpha_3, \Delta_3) = +[3\gamma\lambda(\gamma - 2) + \beta + 1/2]^{-1/2} \left(-\frac{\beta + 1/2}{\sqrt{3}}, +\sqrt{3}\gamma \right), \quad (4.35)$$

$$P_4 \equiv (-\alpha_3, -\Delta_3). \quad (4.36)$$

De acordo com o que mostramos nas Figs. 4.4, 4.5 e 4.6, ambos pares de pontos críticos são simétricos com respeito à origem. A condição para que $P_{3,4}$ tenha coordenadas reais é

$$\lambda < \lambda_{max} = \frac{\beta + 1/2}{3\gamma(2 - \gamma)} = -\frac{\lambda_{min}}{\beta(2 - \gamma)}, \quad \beta > -1/2. \quad (4.37)$$

Os pontos P_1 e P_2 estão cituados sobre a curva $\tilde{\rho} = 0$, enquanto que P_3 and P_4 estão do lado exterior da curva ($\rho > 0$), se $\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$ com $\beta > -1/2$. $P_{3,4}$ estão localizados no segundo e quarto quadrantes, e se $\beta < 0$ o mesmo é válido para $P_{1,2}$. No caso de $\beta > 0$, $P_{1,2}$ pertencem ao primeiro e terceiro quadrante.

Com a análise no infinito (ver Apêndice B) encontramos um único ponto crítico que denotamos como P_∞ . No diagrama de fase ele é representado por dois pontos sobre C_∞ , diametralmente opostos.

Como é de se esperar, a natureza dos pontos críticos depende altamente dos valores dos parâmetros. Para $\lambda > 0$ observamos que todos os pontos críticos são, em geral, nós ou pontos sela. Os resultados são apresentados na Tabela 4.1.

Para estudar o significado físico dos pontos críticos aplicaremos a técnica descrita no Apêndice B. A seguir enunciaremos os resultados. O leitor interessado encontrará os cálculos intermediários no Apêndice citado.

Figura 4.4: Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda_{max} < \lambda$ e $\lambda_{min} < \lambda$

No diagrama de fase da Fig. 4.4: p_∞ é uma singularidade. Os pontos $P_{1,2}$ são soluções dadas pelas eqs. (4.38) e (4.39) se $\beta \neq 0$, ou dadas pelas eqs. (4.41) e (4.42) se $\beta = 0$. As soluções que partem de P_2 e finalizam em P_1 são não-singulares. De acordo com a eq. (4.40), P_1 é um atrator que representa um universo inflacionário. As soluções possuem períodos inflacionários quando passam pela região definida na eq. (4.43).

Os pontos críticos P_i na região finita, com $i = 1..4$, são soluções do sistema dinâmico expressas por

$$e^{\omega(t)} = \left[-\frac{1}{2}\beta V_0^{1/2} \Delta_i (t + t_0) \right]^{-2/\beta} \quad (4.38)$$

e

$$\frac{a(t)}{a_0} = (t + t_0)^{-\frac{2\alpha_i}{\Delta_i\beta}}. \quad (4.39)$$

As quantidades a_0 e t_0 são constantes de integração, e (α_i, Δ_i) são as coordenadas dos respectivos pontos críticos com $i = 1..4$. Vemos, então, que os P_i representam universos com fatores de escala evoluindo num regime de tipo potência.

Figura 4.5: Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$

No diagrama de fase da Fig. 4.5: P_∞ é uma configuração de Minskowski, entanto que P_i , $i = 1, 2, 3, 4$, representam soluções dadas pelas eqs. (4.38) e (4.39). A eq. (4.40) é satisfeita pelo ponto P_1 , atrator na maioria das condições iniciais.

Essos modelos são inflacionários unicamente se os valores dos parâmetros satisfazem qualquer das duas condições seguintes

$$\frac{2\alpha_i}{\Delta_i\beta} > 0, \quad \frac{2\alpha_i}{\Delta_i\beta} < -1. \quad (4.40)$$

Pode-se mostrar que para $P_{1,2}$ a primeira condição de (4.40) é sempre válida. Para $P_{3,4}$ existem duas situações

- (i) com $-1/2 < \beta < 0$ é satisfeita a primeira equação de (4.40) ,
(ii) com $0 < \beta < (3\gamma - 2)^{-1}$ é satisfeita a segunda equação de (4.40).

Como um caso particular temos o correspondente a $\beta = 0$. Este é um modelo que reproduz um universo isotrópico e homogêneo em WIST com constante cosmológica V_0 . Neste caso, a constante λ_{min} toma valor nulo, os pontos críticos $P_{1,2}$ ficam sobre o eixo horizontal, e $P_{3,4}$ são localizados no exterior da elipse $\rho = 0$ quando $0 < \lambda < 1/6\gamma(2 - \gamma)$. A forma explícita das soluções representadas pelos pontos críticos no caso $\beta = 0$ são

$$\frac{a(t)}{a_0} = \exp(V_0^{1/2} \alpha_i t), \quad (4.41)$$

e

$$\omega(t) = \omega_0 + V_0^{1/2} \Delta_i t, \quad (4.42)$$

com $i = 1, 2, 3, 4$. A forma do fator de escala indica que estas soluções apresentam comportamento inflacionário do tipo exponencial.

Por outro lado, podemos dizer que os pontos críticos no infinito representam uma singularidade no caso de $\lambda > \lambda_{max}$, e são universos Minkowskianos se $\lambda < \lambda_{max}$.

4.4.4 Domínios Inflacionários dos Diagramas de Fase

Com β genérico, o comportamento inflacionário das soluções encontra-se na região do espaço de fase (α, Δ) representada pelo interior de uma curva hiperbólica

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\Delta^2}{b^2} < 1 \quad (4.43)$$

onde

$$a^2 = \frac{\gamma}{6(\gamma - \frac{2}{3})}, \quad b^2 = \frac{\gamma}{\lambda(2 - \gamma)}. \quad (4.44)$$

Todas as soluções evoluem em períodos inflacionários no hemiplano com α positivo, ou deflacionários no hemiplano com α negativo, quando as trajetórias passam através da região dada pela equação (4.43).

Figura 4.6: Diagrama de fase, potencial exponencial e $\lambda < \lambda_{min} < \lambda_{max}$

No diagrama de fase da Fig. 4.6: P_∞ é uma configuração de Minskowski. P_i , $i = 1, 2$, representam universos inflacionários. Todas as soluções são não-singulares, e passam por um período inflacionário sempre que atravessam a região definida pela eq. (4.43).

4.4.5 Comportamento e Interpretação das Trajetórias.

De acordo com o apresentado no Apêndice B, estudamos qualitativamente as curvas e pontos críticos dos diagramas de fase. A seguir mostraremos os resultados dessa análise, enunciando as principais propriedades das famílias de soluções.

Na Fig. 4.4, o ponto P_1 é um atrator e o ponto P_2 é sempre um repulsor, independentemente das condições iniciais. Esses pontos representam modelos de Friedman tipo potência com domínio de um campo escalar. Todas as soluções que evoluem entre P_1 e

P_2 são não-singulares e apresentam um período de contração seguido de expansão. Elas são similares as soluções com potencial nulo, mas possuem dois tipos diferentes de estados inicial e final. Por outro lado, existe uma solução particular que representa um modelo em expansão com big-bang, começando numa singularidade em P_∞ e finalizando em P_1 . As soluções com $\beta = 0$ são do tipo mostrado na Fig. 4.4, mas nesse caso $P_{1,2}$ devem ser identificados com modelos inflacionários de tipo exponencial.

Na Fig. 4.5 são reproduzidas as soluções mais interessantes. Um ponto crítico no infinito e o ponto P_1 são atratores, enquanto que o outro ponto crítico no infinito e P_2 são repulsores. P_∞ representa um universo de Minkowski, e $P_{1,2}$ são identificados com os modelos inflacionários tipo potência dado pelas equações (4.38) e (4.39). Os pontos críticos $P_{3,4}$ não estão presentes, pois suas coordenadas são complexas para os valores dos parâmetros que correspondem a este diagrama. Todas as curvas representam soluções não-singulares. Existem duas soluções particulares em continua expansão, uma entre P_4 e P_1 , e a outra entre P_4 e P_∞ . O resto das soluções contraem desde um estado inicial, atingem um radio mínimo e depois expandem até o estado final, sem apresentar pontos singulares. Um tipo destas soluções tem os estados inicial e final identificados com os universos com expansão máxima em P_∞ , de modo análogo ao caso de potencial nulo visto anteriormente. Outro tipo das soluções em regime de contração-expansão evoluem entre os pontos críticos finitos tendo os estados inicial e final identificados com os modelos inflacionários tipo potência. Uma destas trajetórias começam em P_2 e terminam em P_1 , outras duas soluções particulares vão entre P_3 - P_1 e entre P_2 - P_4 . Todas as soluções regulares que evoluem entre dois estados diferentes não existem no caso de potencial nulo.

Na Fig. 4.6, P_∞ é uma solução tipo Minkowski e $P_{1,2}$ são universos inflacionários tipo potência. Esta figura mostra soluções regulares entre os pontos críticos no infinito. Estas soluções descrevem modelos que contraem desde um universo plano inicial em P_∞ , chegam a um radio mínimo e depois expandem até o estado final no outro P_∞ . Uma solução particular entre os pontos P_1 e P_∞ é não-singular e de expansão continua.

$\lambda > 0$	β	P_∞	$P_{1,2}$	$P_{3,4}$	Fig.
$\lambda_{min} < \lambda_{max} < \lambda$	$\notin ((\gamma - 2)^{-1}, -1/2)$	sela	nó	complexo	4.4
$\lambda_{max} < \lambda_{min} < \lambda$	$\in ((\gamma - 2)^{-1}, -1/2)$	"	"	"	"
$\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max}$	$\in (-1/2, 0)$	nó	nó	sela	4.5
$\lambda < \lambda_{min} < \lambda_{max}$	"	nó	sela	$\rho < 0$	4.6

Tabela 4.1: Topologia dos pontos críticos

4.5 Conclusão

No caso de potencial nulo, as curvas fechadas representam universos não-singulares com períodos inflacionários em diferentes épocas, dependendo dos valores do parâmetro λ . Apenas as soluções representadas pelos raios invariantes são singulares, iniciando-se a partir de estado de big-bang ou finalizando num estado de big-crunch.

No caso de potencial exponencial, alguns comportamentos qualitativos existem para qualquer conjunto de parâmetros: atratores essencialmente existem na região de expansão ($\alpha > 0$), e repulsores na região de contração ($\alpha < 0$). Então, soluções regulares apresentam evoluções tipo contração-expansão. Todas elas possuem um período inflacionário dado pela equação (4.43). Este comportamento está também presente em vários casos com potencial nulo, mas aqui o número de tipos diferentes de estados final e inicial é bem maior.

Como resultado principal da presente análise, mencionaremos a generalidade das soluções não-singulares. O tipo de soluções regulares com regime contração-expansão, entre tipos idênticos ou diferentes de espaço-tempos inicial e final, aparecem em todos os diagramas. Na verdade, apenas algumas soluções possuem singularidades. A razão para tal comportamento é a contribuição do campo escalar geométrico na dinâmica dos modelos. Outra característica importante é o fato de que a inflação é realizada independentemente do tipo de condições iniciais. O período inflacionário presente nas soluções regulares está também presente nas soluções encontradas para universos abertos sem fonte material [69]. Pode-se dizer que a presença de matéria na configuração plana teria o papel da tricurvatura no espaço vazio com geometria de Weyl integrável.

Capítulo 5

Soluções Estáticas Esfericamente Simétricas

No estudo de campos gravitacionais fortes devem ser consideradas, como primeira aproximação, as soluções esfericamente simétricas. Elas são razoavelmente simples e fisicamente muito importantes, pois vários objetos astrofísicos parecem ser aproximadamente esféricos.

A situação física mais simples de descrever é um sistema estático esférico, como por exemplo uma estrela brilhante ou um buraco negro. Definimos o espaço-tempo estático como aquele para o qual é possível encontrar um sistema de coordenadas com coordenada temporal t , tal que todas as componentes da métrica são independentes de t (propriedade *estacionária*) e invariantes frente à inversão temporal $t \rightarrow -t$. Ou seja, o espaço-tempo possui um vetor de Killing do tipo tempo.

As soluções estáticas esfericamente simétricas são muito relevantes por serem possíveis estados finais de um processo de colapso gravitacional. Assim, o estudo deste tipo de configurações é fundamental dentro de qualquer teoria da gravitação. Os pontos principais da análise são o comportamento das geodésicas, a presença de singularidades e a estabilidade da solução.

Na TRG foram encontradas soluções estáticas para o campo gravitacional no exterior

de diversas fontes com simetria esférica. Já em 1916 *Schwarzschild* descobriu a primeira solução correspondente ao exterior de uma massa M estática, esfericamente simétrica e de tamanho limitado [94]. Mais tarde, sem impôr a condição de estaticidade [40], o teorema de Birkhoff [7] prova que a métrica de Schwarzschild é a única solução esférica e assintoticamente plana das equações de Einstein no vázio. Em outras palavras, todo espaço-tempo esfericamente simétrico com $R_{\mu\nu} = 0$ é estático. Assim, uma estrela pulsante radialmente ou uma estrela colapsante de massa constante M também apresentam no exterior a solução de Schwarzschild.

Dentro da TRG também é bem conhecida a solução para um campo gravitacional devido a uma carga pontual estática. Esta solução recebe o nome de *métrica de Reissner-Norstrom* [84].

Bem mais tarde foi obtida a solução para a métrica estática esfericamente simétrica no caso de acoplamento gravitacional com um campo escalar de massa nula [44]. Esta solução foi estudada posteriormente por diversos autores [85, 105].

A análise das configurações estáticas esfericamente simétricas também foi desenvolvida em algumas teorias alternativas à TRG. Por exemplo, dentro da teoria de dilaton, podemos citar o trabalho de Tao e Xue [97]. Eles estudam soluções de objetos estelares formados por bosons e incluem um campo escalar de Higgs junto ao campo usual de dilaton. A possibilidade da formação de um estado de equilíbrio gravitacional nesta teoria também foi estudada [46, 88]. Junto com os objetos estelares bosônicos, os buracos negros são considerados entre os fenômenos mais importantes a serem pesquisados na teoria da gravitação. Na teoria de dilatons, os resultados mostram que o campo escalar cumpre um papel principal nos modelos de buracos negros carregados [35, 37, 49].

A seguir apresentaremos um estudo de configurações estáticas esfericamente simétricas em um espaço-tempo de Weyl integrável para três casos diferentes, vázio, campo eletromagnético e campo escalar externo. Veremos que os resultados obtidos nas teorias de dilaton sobre estrelas de bosons e buracos negros são mantidos na teoria da gravitação em WIST. Exibiremos as soluções e pesquisaremos as possíveis singularidades do escalar

de curvatura e a presença de horizontes. Para nossos cálculos utilizaremos as equações de movimento que foram apresentadas no Capítulo 3.

5.1 Singularidade e Geodésica em WIST

Definimos o *espaço-tempo singular* como uma variedade na qual existe uma *geodésica inextendível* em, pelo menos, uma direção, e com um *intervalo finito do parâmetro afim*. A singularidade é classificada como *singularidade de curvatura* se existe pelo menos um escalar construído com o tensor de curvatura, ou com suas derivadas, que diverge [100].

No presente Capítulo consideraremos as singularidades unicamente no escalar de Ricci calculado como o traço do tensor de curvatura de Ricci, $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$. A análise não é conclusiva a respeito da inexistência de uma singularidade, mas ela resulta suficiente para detetar todas as soluções singulares conhecidas na literatura, e para estender o estudo desses casos às soluções novas. Em outras palavras, se o escalar de Ricci é regular não podemos dizer nada acerca da regularidade da solução, pois nada sabemos dos outros invariantes da teoria. Não obstante, se R é singular concluimos que o espaço-tempo apresenta uma singularidade da curvatura. Podemos também estar em presença de uma singularidade nua, a qual pode ser definida como o valor do parâmetro afim onde uma curva causal dirigida para o futuro tem seu extremo inicial na singularidade, e o outro extremo está no infinito futuro nulo.

Pela definição dada acima, vemos que a análise das singularidades envolve de forma direta o estudo das trajetórias das curvas geodésicas. Em WIST a equação de uma geodésica pode ser obtida pela definição de geodésica afim (o vetor tangente mantém a mesma direção propagado ao longo da curva), ou através do princípio variacional aplicado ao caminho de uma partícula livre.

Usando o tempo próprio como parâmetro afim τ , o vetor tangente à trajetória de uma partícula livre é dado por

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}. \quad (5.1)$$

Se a trajetória é do tipo tempo

$$g_{\mu\nu} V^\nu V^\mu = 1. \quad (5.2)$$

Neste caso a equação da geodésica é (ver Apêndice C)

$$V^\alpha{}_{;\mu} V^\mu = -\frac{1}{2} \omega_\mu V^\mu V^\alpha. \quad (5.3)$$

Se a geodésica (5.3) representa a trajetória de um raio de luz devemos usar um parâmetro afim σ em lugar do tempo próprio τ , pois a curva é tipo nula. Neste caso o campo de velocidades é dado por

$$V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}, \quad (5.4)$$

tal que

$$g_{\mu\nu} V^\nu V^\mu = 0. \quad (5.5)$$

Para resolver a equação (5.3) é conveniente considerar as simetrias do espaço-tempo, ou seja, as transformações que deixam invariante as componentes dos elementos geométricos fundamentais. Toda simetria do tensor métrico tem associado um vetor de Killing $\vec{\xi}$ (gerador da isometria), tal que a derivada de Lie da métrica com respeito a $\vec{\xi}$ é identicamente nula. Dada uma simetria do espaço-tempo é natural impor que a derivada de Lie com respeito a $\vec{\xi}$ também deve ser nula para o campo escalar geométrico, além de ser nula para o tensor métrico.

A derivada de Lie da métrica $g_{\mu\nu}$ em relação a um vetor $\vec{\xi}$ é definida numa geometria arbitrária pela seguinte equação

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \nabla_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \xi^\alpha, \quad (5.6)$$

onde a derivada covariante é indicada por ∇ . Se $\vec{\xi}$ é um vetor de Killing, então

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.7)$$

Numa geometria de Weyl integrável (ver Capítulo 2) a derivada covariante da métrica satisfaz

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \omega_{\alpha} g_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Usando (5.6) e (5.8) em (5.7) vemos que o vetor de Killing em WIST é definido por

$$\nabla_{\mu} \xi_{\nu} + \nabla_{\nu} \xi_{\mu} = \omega_{\mu} \xi_{\nu} + \omega_{\nu} \xi_{\mu} - g_{\mu\nu} \xi^{\delta} \omega_{\delta}. \quad (5.9)$$

Em conseqüência, a variação do produto interno $\xi_{\nu} V^{\nu}$ ao longo de uma geodésica em WIST é dada por

$$V^{\mu} \nabla_{\mu} (\xi_{\nu} V^{\nu}) = -\frac{1}{2} V_{\nu} V^{\nu} \xi^{\mu} \omega_{\mu} + \frac{1}{2} V^{\mu} \omega_{\mu} V^{\nu} \xi_{\nu}. \quad (5.10)$$

No primeiro termo, $\xi^{\mu} \omega_{\mu}$ é uma quantidade nula, pois uma simetria do espaço-tempo é também uma simetria do campo escalar geométrico. Escrevendo a variação ao longo da geodésica como $V^{\mu} \nabla_{\mu} \equiv d/ds$ (onde s é o nome genérico do parâmetro da curva), temos que

$$\frac{d}{ds} (\xi_{\nu} V^{\nu}) = V^{\nu} \xi_{\nu} \frac{d}{ds} \omega(x^{\mu}). \quad (5.11)$$

A solução desta equação é

$$\xi_{\nu} V^{\nu} = \text{const} e^{\omega(x^{\mu})}, \quad (5.12)$$

onde *const* denota uma constante de integração arbitrária.

Se consideramos um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico, o campo escalar geométrico e o tensor métrico dependem apenas da coordenada r e existe um vetor de Killing tipo tempo dado por

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\partial}}{\partial t}, \quad (5.13)$$

Substituindo $\omega(x^{\mu}) = \omega(r)$ e (5.13) em (5.12) temos que

$$\dot{t} = g^{tt} e^{\omega(r)}, \quad (5.14)$$

onde o ponto indica derivação com respeito ao parâmetro afim da curva. Em (5.14) a constante de integração *const* foi absorvida como um fator multiplicativo do campo escalar; isto pode ser feito sem perda de generalidade, pois o valor assintótico do campo escalar é uma quantidade arbitrária a ser definida como condição de contorno do sistema.

Finalmente, usando as equações (5.14) e (5.2), e considerando a partícula em movimento radial, obtemos a expressão do intervalo de coordenada temporal para uma geodésica radial tipo tempo

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r_f} \frac{g^{tt} dr}{[g^{rr}(e^{-2\omega(r)} - g^{tt})]^{-1/2}}. \quad (5.15)$$

Com esta integral podemos calcular o tempo que demora uma partícula teste em cair livremente uma distância $\Delta r = r_f - r_0$ num espaço-tempo estático e esférico, com velocidade radial menor que a velocidade da luz.

Para uma geodésica nula fazemos um cálculo análogo ao anterior, com (5.5) em lugar de (5.2), e obtemos a seguinte expressão do intervalo temporal

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r_f} \sqrt{-\frac{g^{tt}}{g^{rr}}} dr \quad (5.16)$$

Este último resultado é idêntico ao obtido numa geometria Riemanniana, como era de se esperar, pois as trajetórias nulas são invariantes conformes. Com a expressão (5.16) podemos calcular o intervalo de tempo que demora um raio de luz radial em percorrer uma certa distância Δr , no espaço-tempo vazio estático e esférico, em uma geometria de Weyl integrável.

Seja um raio de luz radial que viaja desde um ponto exterior com $r = r_0$ até a superfície $r = r_H$. Se o intervalo (5.16) é finito e se existe uma singularidade na superfície r_H , então diremos que estamos em presença de uma singularidade nua. Se o intervalo (5.16) é infinito, diremos que a superfície r_H representa um horizonte da solução e que um observador exterior vê que o raio leva um tempo infinito em chegar à superfície r_H .

Por outro lado, uma das chaves para provar os teoremas com respeito as singulari-

dades é a equação de Raychaudhuri [100]. Esta equação determina o comportamento dos parâmetros cinemáticos de uma família de curvas no espaço-tempo. Na geometria Riemanniana, a equação de Raychaudhuri conduz à condição

$$-\hat{R}_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (5.17)$$

como uma hipótese necessária para demonstrar a existência de uma singularidade. Esta desigualdade é interpretada como uma manifestação do caráter atrativo da gravitação.

Pode-se provar que a definição do tensor de curvatura na geometria de Weyl integrável é equivalente à definição no espaço-tempo Riemanniano. Ou seja,

$$V_{\alpha;\mu;\nu} - V_{\alpha;\nu;\mu} = R_{\alpha\lambda\mu\nu}V^\lambda \quad (5.18)$$

é equivalente a

$$V_{\alpha||\mu||\nu} - V_{\alpha||\nu||\mu} = \hat{R}_{\alpha\lambda\mu\nu}V^\lambda. \quad (5.19)$$

Então, podemos dizer que a condição (5.17) continua sendo válida num espaço-tempo de Weyl integrável.

Por intermédio das equações de Einstein extendidas em WIST temos que

$$\hat{R}_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -\frac{1}{2}T V_\mu V^\mu + \lambda\dot{\omega}^2 - T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu, \quad (5.20)$$

com $\dot{\omega} = \omega_\mu V^\mu$. Então, a condição (5.17) é satisfeita no espaço-tempo de Weyl integrável, se as equações de Einstein extendidas são válidas e se a matéria cumpre com a seguinte *condição de energia forte extendida*

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu + \frac{1}{2}T V_\mu V^\mu \geq \lambda\dot{\omega}^2 \quad (5.21)$$

Quando $\lambda \leq 0$ a condição de energia forte Riemanniana implica a condição de energia forte na geometria de Weyl integrável; no caso $\lambda > 0$, a equação (5.21) é um novo requerimento

para a distribuição de matéria no espaço-tempo.

A condição de energia fraca $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \geq 0$ continua sendo válida e sem modificações na teoria de WIST.

5.2 Soluções e Análise das Singularidades

Nesta seção estudaremos as soluções estáticas esféricas em WIST no caso do vazio, no caso com campo escalar externo e com campo eletromagnético.

O elemento de linha mais geral que determina uma métrica estática esfericamente simétrica é

$$ds^2 = A(r)^2 dt^2 - \frac{1}{A(r)^2} dr^2 - C(r)^2 d\Omega^2. \quad (5.22)$$

Para ser consistente com a simetria do tensor métrico, o campo escalar geométrico e o campo escalar externo são escolhidos como dependentes unicamente da coordenada r

$$\omega = \omega(r), \quad (5.23)$$

$$\phi = \phi(r). \quad (5.24)$$

O campo eletromagnético será escolhido convenientemente como um campo puramente magnético, ou monopolo de Dirac, da forma

$$F = Q \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi. \quad (5.25)$$

O caso com carga eléctrica pode ser obtido tomando o dual $F_{\mu\nu}^*$ do campo $F_{\mu\nu}$ magnético e trocando o sinal de ω enquanto se mantem a métrica invariante.

Com estas definições para os elementos geométricos e para as fontes externas, com as equações de movimento dadas em (3.16)-(3.19), e denotando com uma linha a derivação

em relação a r , obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\frac{\hat{G}^t_t - \hat{G}^r_r}{2A(r)^2} = \frac{C''}{C} = \frac{\lambda}{2}(\omega')^2 - \frac{\phi_0^2}{2} \frac{e^{2\omega}}{A^4 C^4} \quad (5.26)$$

$$C(r)^2(2\hat{G}^\theta_\theta + \hat{G}^r_r - \hat{G}^t_t) = (A^2 C^2)' = Q^2 \frac{e^{-2\omega}}{C^2} \quad (5.27)$$

$$2 + 2C(r)^2(\hat{G}^\theta_\theta + \hat{G}^r_r) = (A^2 C^2)'' = 2 \quad (5.28)$$

$$(A^2 C^2 \omega')' = \frac{\phi_0^2}{\lambda} \frac{e^{2\omega}}{A^2 C^2} + \frac{Q^2}{\lambda} \frac{e^{-2\omega}}{C^2} \quad (5.29)$$

$$\phi' = \phi_0 \frac{e^{2\omega}}{A^2 C^2}. \quad (5.30)$$

Esclarecemos que a equação (3.18) para o campo eletromagnético é automaticamente satisfeita pela expressão (5.25).

A equação (5.28) pode ser facilmente integrada e dá como resultado um polinômio $p(r)$ real, de segundo grau, com discriminante $\eta^2 = (r_+ - r_-)^2$.

$$p(r) = A(r)^2 C(r)^2 = (r - r_+)(r - r_-). \quad (5.31)$$

Este polinômio constitui uma relação fundamental entre as componentes da métrica, independentemente do tipo de campo externo ou distribuição de matéria. Tanto no caso do vazio como nos casos com fontes externas, este polinômio participa nos cálculos de integração. Em conseqüência, existem três possíveis soluções para cada configuração, dependendo do valor do discriminante de $p(r)$. Definimos esses três tipos de soluções da seguinte maneira:

Caso (a) quando o discriminante é positivo ($\eta^2 > 0$) e as raízes de $p(r)$ são ambas reais. Para expressar as soluções na sua forma mais habitual, em alguns casos aplicaremos a transformação de coordenada $r \rightarrow \hat{r} = r - r_-$.

Caso (b) quando o discriminante é negativo ($\eta^2 < 0$) e as raízes de $p(r)$ são quantidades complexas conjugadas entre si, $r_+ = r_-^\dagger$ e $\eta = 2i \text{Im}(r_+)$. Por simplicidade, aplicaremos a transformação de coordenadas $r \rightarrow \hat{r} = r - \text{Re}(r_-)$, tal que $p(\hat{r}) = (\hat{r}^2 - \eta^2/4)$. Nesta notação, $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ denotam a parte real e a parte imaginária do complexo z , respectivamente.

Caso (c) quando o discriminante é nulo ($\eta^2 = 0$) e as raízes de $p(r)$ são iguais, $r_+ = r_-$. Neste caso é conveniente fazer a mudança de variável $r \rightarrow \hat{r} = r - r_+$ tal que $p(\hat{r}) = \hat{r}^2$

5.2.1 Espaço-tempo Vazio

O caso do vazio é caracterizado por um campo gravitacional puro, então escrevemos $\phi_0 = Q = 0$ nas equações de movimento. Os cálculos efetuados na integração das soluções são mostrados na seção 2 do Apêndice C. A seguir, simplesmente enunciamos os resultados.

Soluções

Caso (a)

$$\frac{A(\hat{r})^2}{A_0^2} = \left(1 - \frac{\eta}{\hat{r}}\right)^{\frac{2M}{\eta}}, \quad (5.32)$$

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = \hat{r}^2 \left(1 - \frac{\eta}{\hat{r}}\right)^{1 - \frac{2M}{\eta}} \quad (5.33)$$

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} \left(1 - \frac{\eta}{\hat{r}}\right)^{-\frac{\sigma}{\eta}} \quad (5.34)$$

Caso (b)

$$\frac{A(\hat{r})^2}{A_0^2} = \exp\left(\frac{2M}{|\eta|} \arctang\left(\frac{2\hat{r}}{|\eta|}\right)\right) \quad (5.35)$$

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = (\hat{r}^2 + 4|\eta|^2) \exp\left(-\frac{2M}{|\eta|} \arctang\left(\frac{2\hat{r}}{|\eta|}\right)\right) \quad (5.36)$$

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} \exp\left(-\frac{2\sigma}{|\eta|} \arctang\left(\frac{2\hat{r}}{|\eta|}\right)\right) \quad (5.37)$$

Caso (c)

$$\frac{A(\hat{r})^2}{A_0^2} = \exp\left(\frac{-2M}{\hat{r}}\right) \quad (5.38)$$

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = (\hat{r})^2 \exp\left(\frac{2M}{\hat{r}}\right) \quad (5.39)$$

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} \exp\left(\frac{\sigma}{\hat{r}}\right) \quad (5.40)$$

Em todos os casos $A_0^2 B_0^2 = 1$, e as soluções são caracterizadas por dois parâmetros físicos, a massa M do objeto esférico e a carga σ do campo escalar geométrico. A relação de M e σ com as constantes η e λ vêm dada por

$$\sigma^2 = \frac{4M^2 - \eta^2}{2\lambda} \quad (5.41)$$

Impondo que M seja real e positivo, e que a carga de ω seja real, encontramos as seguintes situações

λ negativo implica $4M^2 < \eta^2$, e somente o caso (a) é válido.

λ positivo implica $4M^2 > \eta^2$, e os três casos são possíveis.

Por outro lado, no caso (a), como η é real então $\lambda < 2M^2/\sigma^2$.

Quando a variável r tende a infinito, as três métricas são assintoticamente planas e os correspondentes campos escalares geométricos são assintoticamente constantes.

O caso (a) conduz à solução de Janis, Newman and Winicour [44] quando fazemos $\lambda = -2$, ou redefinindo o campo escalar $\omega \rightarrow \omega^* = \sqrt{-\lambda/2}\omega$. Os casos (b) e (c) não foram considerados anteriormente na TRG de Einstein.

Análise das Singularidades

Caso (a)

O escalar de Ricci correspondente a esta solução do vazio em WIST é dado por

$$R = R^\mu{}_\mu = \hat{r}^{-(2+2\frac{M}{\eta})} (\hat{r} - \eta)^{-3+2\frac{M}{\eta}} q(\hat{r}), \quad (5.42)$$

onde $q(\hat{r})$ denota um polinômio real de ordem positiva, livre de qualquer singularidade para todos os valores de \hat{r} .

Devido a que o expoente de \hat{r} é negativo na expressão para R , deduzimos que existe uma singularidade do escalar de curvatura em $\hat{r} = 0$ e que ela é independente dos valores dos parâmetros. A singularidade em $\hat{r} = \eta$ aparecerá se $-3 + 2\frac{M}{\eta} < 0$.

Para determinar a presença de horizontes numa dada superfície $\hat{r} = r_H$, calculamos o intervalo de coordenada temporal que um raio de luz radial, partindo de $\hat{r} = \hat{r}_0 > r_H$, demora em chegar a $\hat{r} = \hat{r}_H$.

No caso (a), quando $0 < \lambda < 2M^2/\sigma^2$ um raio de luz demora um tempo infinito em arribar a $\hat{r} = \eta$, ou seja que para esse intervalo do parâmetro λ , $\hat{r} = \eta$ representa um horizonte da solução.

No caso em que $\lambda < 0$, $\hat{r} = \eta$ é uma singularidade. Pelo fato de que um observador externo consegue enviar e receber sinais desta superfície, ela denomina-se singularidade nua, em acordo com os resultados conhecidos na teoria Riemanniana [85].

Caso (b)

Esta família de soluções é interessante devido a que a métrica, o campo escalar e o escalar de curvatura R não apresentam nenhum tipo de singularidade. Não obstante, a inexistência de singularidades pode ser confirmada, unicamente, a través do cálculo de todos os escalares da teoria.

Caso (c)

Neste caso a singularidade da métrica em $\hat{r} = 0$ é na realidade um horizonte. Os escalares construídos com as derivadas do campo escalar geométrico e o escalar de curvatura R não

apresentam nenhuma singularidade, como pode ver-se da expressão

$$R = \frac{1}{2} \exp\left(-2\frac{M}{\hat{r}}\right) (\hat{r})^{-4} (3\sigma^2 - 4M^2). \quad (5.43)$$

5.2.2 Campo Escalar Externo

Para estudar um campo escalar externo ϕ em WIST consideramos $Q = 0$ e $\phi_0 \neq 0$ nas equações de movimento. Da integração direta surgem as componentes da métrica idênticas ao caso do vazio. A novidade da solução está na presença do campo escalar externo e na nova forma que toma o campo escalar geométrico.

Soluções

Caso (a)

A solução para o campo escalar é

$$e^{\omega(r)} = e^{\omega_0} \times \frac{\hat{r}^{b/2} (\hat{r} - \eta)^{b/2}}{d_0 \hat{r}^b + (\hat{r} - \eta)^b}, \quad (5.44)$$

com as constantes b e d_0 dadas por

$$b = +\sqrt{\frac{2(4M^2 - \eta^2)}{\lambda\eta}} \quad (5.45)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{4M^2 - \eta^2}{2\lambda} \left(\frac{d_0 - 1}{d_0 + 1}\right)^2. \quad (5.46)$$

A expressão para o campo escalar externo surge diretamente da integração da equação (5.30), a forma da solução dependerá do valor do parâmetro b . A carga do campo escalar externo é dada por

$$\phi_0^2 = -2d_0(4M^2 - \eta^2)e^{-2\omega_0}. \quad (5.47)$$

Caso (b)

Neste caso a solução para o campo $\omega(r)$ é necessariamente complexa, por esta razão não

será considerada como uma solução física no espaço-tempo de Weyl integrável.

Caso (c)

A solução para $\omega(r)$ é dada por

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} \left(-4d_0 \sin(f/\hat{r}) \cos(f/\hat{r}) + 1 - 2 \cos(f/\hat{r})^2 \right)^{-1} \quad (5.48)$$

com

$$f = 2M\sqrt{2}/4\sqrt{-\lambda}. \quad (5.49)$$

Entanto, o campo escalar externo tem sempre carga imaginária como podemos ver da expressão

$$\phi_0^2 = -2M^2(4d_0^2 + 1)e^{2\omega_0} \quad (5.50)$$

Análise das Singularidades

Em relação ao comportamento das singularidades e dos horizontes, a configuração com campo escalar externo em WIST apresenta os mesmos resultados que as soluções no caso do vazio.

5.2.3 Buraco Negro Carregado

Ao considerar um campo eletromagnético sem a presença de outras fontes externas, fazemos $\phi_0 = 0$ nas equações de movimento com $Q \neq 0$.

Soluções

Caso (a)

$$\frac{C(r)^2}{C_0^2} = (C_2(r - r_-)^\alpha + (r - r_+)^\alpha)^{\frac{2\lambda}{\lambda-2}} (r - r_+)^{\gamma+\mu} (r - r_-)^{\gamma-\mu}, \quad (5.51)$$

$$\frac{A(r)^2}{A_0^2} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{C(r)^2} \quad (5.52)$$

e

$$e^{\omega(r)} = A(r)^{2/\lambda} (r - r_+)^{-\frac{C_1}{\lambda\eta}} (r - r_-)^{\frac{C_1}{\lambda\eta}}. \quad (5.53)$$

A constante η é sempre positiva, dada por

$$\eta = r_+ - r_-. \quad (5.54)$$

As constantes γ e μ são dadas por

$$\gamma = 1 - \frac{\alpha\lambda}{\lambda - 2}, \quad (5.55)$$

$$\mu = \frac{2C_1}{\eta(\lambda - 2)}. \quad (5.56)$$

onde

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda\eta}} \sqrt{(\lambda - 2)\eta^2 + 2C_1^2}. \quad (5.57)$$

As expressões (5.51)-(5.53) são as soluções mais gerais para o exterior de uma distribuição esférica de carga quando o polinômio $p(r)$ tem duas raízes reais. Os parâmetros físicos da solução são a massa M e a carga Q da fonte e a carga σ do campo escalar geométrico. Todas as outras constantes são funções desses três parâmetros fundamentais,

$$Q^2 = \frac{-2C_2}{(C_2 + 1)^2} \left(\eta^2 + \frac{2C_1^2}{\lambda - 2} \right), \quad (5.58)$$

$$M = -\frac{C_1}{\lambda - 2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2(\lambda - 2)(C_2 + 1)} \sqrt{(\lambda - 2)\eta^2 + 2C_1^2}, \quad (5.59)$$

$$\sigma = \frac{C_1}{\lambda - 2} - \frac{1}{2(\lambda - 2)(C_2 + 1)} \frac{\sqrt{(\lambda - 2)\eta^2 + 2C_1^2}}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5.60)$$

Da equação (5.58) vemos que se $\lambda > 2$, então $C_2 < 0$ para obter a carga Q como uma quantidade real.

As soluções conhecidas na teoria de dilaton para buracos negros carregados [35, 37]

são obtidas a partir das equações (5.51)-(5.53) por intermédio de uma transformação de coordenadas, considerando λ negativo, e ajustando os parâmetros para identificar as quantidades físicas entre ambas teorias.

As soluções na teoria de dilaton também satisfazem a equação (5.52), então a transformação de coordenadas deve ter a forma $r \rightarrow \hat{r} = r + \text{const}$, com const sendo um valor constante. Se escolhermos

$$\text{const} = \frac{r_+ + C_2 r_-}{1 + C_2}, \quad (5.61)$$

obtemos que

$$p(\hat{r}) = (\hat{r} - \hat{r}_+)(\hat{r} - \hat{r}_-) \quad (5.62)$$

e

$$C_2 = -\hat{r}_+/\hat{r}_-. \quad (5.63)$$

Com esta transformação de coordenadas, as expressões para os elementos geométricos tomam as seguintes formas

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = \left(-\frac{\hat{r}_+}{\hat{r}_-} (\hat{r} - \hat{r}_-)^{\alpha} + (\hat{r} - \hat{r}_+)^{\alpha} \right)^{\frac{2\lambda}{\lambda-2}} (\hat{r} - \hat{r}_+)^{\gamma+\mu} (\hat{r} - \hat{r}_-)^{\gamma-\mu}, \quad (5.64)$$

$$\frac{A(\hat{r})^2}{A_0^2} = \frac{(\hat{r} - \hat{r}_+)(\hat{r} - \hat{r}_-)}{C(\hat{r})^2} \quad (5.65)$$

e

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} A(\hat{r})^{2/\lambda} (\hat{r} - \hat{r}_+)^{-\frac{C_1}{\lambda\eta}} (\hat{r} - \hat{r}_-)^{\frac{C_1}{\lambda\eta}}. \quad (5.66)$$

As soluções da teoria de dilaton nas expressões conhecidas aparecem se fazemos $C_1 = \eta$ nas equações (5.64)-(5.66). Para identificar as expressões das massas devemos escolher $C_0 = A_0^{-1} = (C_2 + 1)^{-\lambda/(\lambda-2)}$. Cada valor de $\lambda < 0$ corresponde a um valor real da constante de acoplamento na teoria de Einstein-Maxwell-dilatónica que denominaremos por a_D . A relação entre as duas constantes de acoplamento é $\lambda = -2/a_D^2$. A identificação entre os campos escalares está dada por $\omega(r) = a_D \omega_D(r)$, ou seja $e^{2\omega_0} = (C_2 + 1)^{4/(\lambda-2)}$.

Quando os parâmetros C_1 e η coincidem, algum parâmetro do modelo é eliminado de acordo com o teorema de “no-hair” de buracos negros na teoria Riemanniana [64]. Ou seja, as quantidades físicas satisfazem a seguinte relação

$$\sigma = \frac{2M\lambda + \sqrt{\lambda(4M^2\lambda - Q^2(\lambda + 2))}}{\lambda(\lambda + 2)}. \quad (5.67)$$

Na teoria da relatividade geral se considera que o campo gravitacional externo, e o campo eletromagnético de um buraco negro estacionário são determinados unicamente pela massa M do buraco, pela carga Q e pelo momentum angular S , e não existe nenhuma outra característica independente. O estudo rigoroso de uma extensão deste teorema no contexto da geometria de Weyl integrável e do papel de σ como um parâmetro fundamental da teoria de buraco negro deverá ser considerado no futuro.

As soluções com $\lambda > 0$ não existem na teoria com campo dilatônico, elas são novas e não foram consideradas nas teorias com geometria Riemanniana.

Caso (b)

As soluções gerais para este caso são dadas por

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = (\hat{r}^2 + |r_+|^2) (\cos(b) - d_0 \sin(b))^{\frac{2\lambda}{\lambda-2}} \exp\left(\frac{2C_1}{|r_+(\lambda-2)} \operatorname{arctg}\left(\frac{\hat{r}}{|r_+|}\right)\right) \quad (5.68)$$

$$\frac{A(r)^2}{A_0^2} = \frac{\hat{r}^2 + |r_+|^2}{C(r)^2}, \quad (5.69)$$

$$e^{\omega(r)} = e^{\omega_0} A(r)^{2/\lambda} \exp\left(\frac{C_1}{\lambda|r_+|} \operatorname{arctg}\left(\frac{\hat{r}}{|r_+|}\right)\right). \quad (5.70)$$

Nestas expressões b é definida como

$$b = \frac{1}{2|r_+|} \sqrt{\frac{2a}{\lambda}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\hat{r}}{|r_+|}\right), \quad (5.71)$$

onde

$$a = 2|r_+|^2(\lambda - 2) - C_1^2. \quad (5.72)$$

Todas as constantes são determinadas pelos valores dos três parâmetros físicos

$$M = \frac{a}{2(2-\lambda)|r_+|} \left(\sqrt{2a\lambda} D_0 + 2C_1 \right), \quad (5.73)$$

$$Q^2 = e^{2\omega_0} \frac{a(1+d_0^2)}{\lambda-2}, \quad (5.74)$$

$$\sigma = -\frac{1}{\lambda} \left(2M + \frac{C_1}{|r_+|^2} \right), \quad (5.75)$$

com

$$D_0 = -\frac{\sin(b_0) + d_0 \cos(b_0)}{\cos(b_0) - d_0 \sin(b_0)} \quad (5.76)$$

e

$$b_0 = b(r \rightarrow \infty) = \sqrt{2a/\lambda} \pi / (4|r_+|). \quad (5.77)$$

Caso (c)

Para esta situação as soluções são

$$\frac{C(\hat{r})^2}{C_0^2} = (\hat{r})^2 \left(d_0 + e^{\frac{c_1 \sqrt{2/\lambda}}{\hat{r}}} \right)^{\frac{2\lambda}{\lambda-2}} \exp \left(-\frac{C_1(2 + \sqrt{2\lambda})}{(\lambda-2)(\hat{r})} \right), \quad (5.78)$$

$$\frac{A(\hat{r})^2}{A_0^2} = \frac{(\hat{r})^2}{C(\hat{r})^2}, \quad (5.79)$$

e

$$e^{\omega(\hat{r})} = e^{\omega_0} A(\hat{r})^{2/\lambda} e^{\frac{2C_1}{\lambda \hat{r}}}, \quad (5.80)$$

onde utilizamos as seguintes definições

$$M = \frac{C_1}{2-\lambda} \left(2 + \sqrt{2\lambda} \frac{d_0-1}{d_0+1} \right), \quad (5.81)$$

$$Q^2 = e^{2\omega_0} \frac{4C_1^2}{\lambda-2}, \quad (5.82)$$

$$\sigma = \frac{C_1}{\lambda(\lambda - 2)} \left(\lambda + \sqrt{2\lambda} \frac{d_0 - 1}{d_0 + 1} \right). \quad (5.83)$$

Nos três casos analisados com campo eletromagnético, a métrica é assintoticamente plana e o campo ω é assintoticamente constante para todos os valores de λ .

Além dos resultados novos nos três casos para $\lambda > 0$, as soluções do caso (a) com $C_1 \neq \eta$ e com $\lambda < 0$ e as soluções do caso (b) com $\lambda < 0$ são soluções novas na literatura que temos acesso.

Análise das Singularidades

Como era de esperar-se, o comportamento das soluções continua sendo altamente dependente dos valores dos parâmetros da teoria.

Caso (a)

O escalar de curvatura pode ser escrito como

$$R = (\hat{r} - \hat{r}_-)^{-\gamma+\mu-1} (\hat{r} - \hat{r}_+)^{-(\gamma+\mu)-2} h(\hat{r}), \quad (5.84)$$

onde $h(\hat{r})$ é um polinômio real, regular para todo valor de \hat{r} . Quando um dos expoentes é negativo, então aparece uma singularidade em R . Dependendo dos valores de γ e μ as soluções poderão ter singularidade em \hat{r}_+ ou \hat{r}_- .

Como $\gamma + \mu$ é sempre negativo, \hat{r}_+ é um horizonte. Quando $\gamma + \mu + 2 > 0$, $\hat{r} = r_+$ é um horizonte singular.

Buscando fazer uma comparação com os resultados da teoria de dilaton, estudaremos o caso $C_1 = \eta$. A expressão geral do invariante R está dada no Apêndice C, quando $C_1 = \eta$ ela toma a forma

$$R = \hat{r}^{-4\frac{\lambda-1}{\lambda-2}} (\hat{r} - \hat{r}_-)^{\frac{6-\lambda}{\lambda-2}} (\hat{r} - \hat{r}_+) s(\hat{r}), \quad (5.85)$$

onde $s(\hat{r})$ é uma função real regular. Observe que esta expressão não surge simplesmente de (5.84) se fazemos $C_1 = \eta$ nos expoentes, pois também devemos considerar a forma que toma $h(\hat{r})$ com essa substituição.

A equação (5.85) indica que $\hat{r} = \hat{r}_+$ é um horizonte regular. O valor $\hat{r} = \hat{r}_-$ é um horizonte onde R é regular apenas quando $2 < \lambda \leq 6$. Assim, a singularidade nula no caso de buraco negro carregado extremo [36] é evitada se $2 < \lambda \leq 6$.

Caso (b)

O intervalo $0 < \lambda < 2$ deve ser descartado pois nele a carga A assume valores imaginários. Para $\lambda > 2$ o escalar de curvatura R é regular em todo o espaço.

Caso (c)

Devido a natureza real do valor da carga (5.82), restringimos o parâmetro λ ao intervalo $\lambda > 2$. Neste caso o escalar de curvatura é

$$R = \frac{C_1^2}{\hat{r}^4(\lambda - 2)^2} S_1(\hat{r}) \times S_2(\hat{r})^{-\frac{2\lambda}{\lambda-2}} \times \left(8S_2(\hat{r})^{-2} - 4(2 + \sqrt{2\lambda})S_2(\hat{r})^{-1} + e^{\frac{C_1}{\hat{r}}\sqrt{2/\lambda}}(\sqrt{\lambda} + \sqrt{2})^2 \right) \quad (5.86)$$

com

$$S_1(\hat{r}) = \exp\left(\frac{C_1}{\hat{r}\sqrt{\lambda}(\lambda - 2)}(2\sqrt{2}(\lambda - 1) + 2\sqrt{\lambda})\right) \quad (5.87)$$

e

$$S_2(\hat{r}) = d_0 + \exp\left(\frac{C_1}{\hat{r}}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\right). \quad (5.88)$$

Se $C_1 > 0$, então o escalar de curvatura é singular na origem e este ponto é uma singularidade nua. Se $C_1 < 0$, então R é regular em todo lugar e a singularidade da métrica em $\hat{r} = 0$ é apenas um horizonte.

5.3 Conclusão

Na teoria de WIST da gravitação encontra-se incluída a teoria de dilaton de maneira completa e natural quando um espaço-tempo estático esfericamente simétrico é conside-

rado. A natureza puramente geométrica do campo escalar ω otorga liberdade aos valores do parâmetro λ . Os valores positivos de λ permitem encontrar novas soluções com propriedades remarcáveis: as singularidades nuas são evitadas na configuração carregada e no vazio. O bom comportamento das novas soluções com valores positivos de λ indica que a geometria de Weyl pode ser considerada uma boa opção para representar o espaço-tempo estático com simetria esférica. Além disso, novas soluções são obtidas para o caso esférico estático carregado no caso (a) com $\lambda < 0$ e com horizonte regular.

A possibilidade de que estas soluções sejam deduzidas como consequência de um colapso gravitacional e a estabilidade das mesmas devem ser investigadas futuramente.

Capítulo 6

Gravitação

Colapso Gravitacional

6.1 Introdução

As últimas etapas na evolução de uma estrela são descritas por intermédio dos modelos teóricos de um colapso gravitacional. Dentro da teoria da relatividade geral de Einstein, um dos trabalhos pioneiros nesta área é a descrição de uma estrela através de um modelo de nuvem não-estática, constituída por um fluido perfeito com pressão nula, e com simetria esférica. Nesse trabalho, a dinâmica da estrela foi determinada por intermédio das equações de movimento de Einstein, e o exterior da esfera foi considerado um espaço-tempo vazio, descrito pela métrica de Schwarzschild. Este modelo clássico demonstra que um colapso gravitacional é inevitável quando a massa m é maior que uma certa massa crítica, e depois de que sua fonte de energia termonuclear esteja exausta. O colapso da estrela termina na formação de um buraco negro, pois nenhuma informação com respeito a ela pode ser enviada à região exterior após a contração ultrapassar um raio menor que $r_H = 2m$. A hipersuperfície r_H é um horizonte de eventos. No entanto, existe uma verdadeira singularidade na origem de coordenadas [76].

Posteriormente foram estudados modelos menos simplificados incluindo, por exemplo, pressão não nula, radiação, rotação, assimetrias ou efeitos quânticos para densidades maiores que a densidade nuclear.

O aspecto óptico de uma estrela foi também estudado. Em vários trabalhos conclui-se que, para um observador no infinito, o desvio ao vermelho e a luminosidade total são os fenômenos que caracterizam o colapso da estrela nas proximidades do horizonte de eventos. Diferentes modelos concordam em concluir que o desvio ao vermelho da emissão estelar é infinitamente crescente e que a luminosidade apresenta decrescimento exponencial quando a estrela aproximase à hipersuperfície $r = r_H$. Em outros trabalhos demonstra-se que os campos gravitacionais muito fortes na vizinhança de r_H afetam profundamente o movimento dos ftons emitidos. Isto produziria uma imagem da estrela em forma de aneis concêntricos e determinaria um intervalo finito para a freqüência da radiação.

A presença de radiação no espaço-tempo exterior à estrela foi estudado a partir da solução de Vaydia. Esta solução descreve, dentro da teoria da relatividade geral, uma região exterior a um corpo radiante esfericamente simétrico. O colapso radiativo não apresenta um horizonte de buraco negro, senão que tem um horizonte aparente no futuro onde a luminosidade se anula e o desvio ao vermelho diverge. Outros trabalhos sobre colapso radiativo utilizam outras métricas e demonstram que famílias de soluções podem ser obtidas a partir de soluções estáticas. Esses métodos para fluidos radiativos não-estáticos foram depois utilizados no estudo de distribuições gasosas anisotrópicas.

Os modelos que optam por dar melhores descrições hidrodinâmicas do fluido, consideram, por exemplo, o transporte de energia dentro da estrela. Foi demonstrado que existem soluções não-estáticas com fluxo de calor geradas a partir de soluções estáticas, tendo em conta um fluido livre de deformação. A característica principal deste tipo de matéria é produzir o colapso da forma mais lenta possível. Um dos resultados mais importantes é a condição para a pressão isotrópica sobre a superfície de descontinuidade. Foi demonstrado que, dada uma distribuição gasosa colapsante, esfericamente simétrica e livre de deformação, com espaço-tempo de Vaydia no exterior, a pressão não pode ser nula sobre a superfície da esfera. A pressão é zero na superfície do fluido unicamente se o colapso é adiabático e o exterior corresponde a um espaço-tempo de Schwarzschild.

Outros trabalhos surgiram considerando o aumento da temperatura durante o colapso

e a conseqüente produção de neutrinos. O fluxo de neutrinos emitido pela estrela pode ser representado por um fluxo nulo no exterior [96].

Um dos mais importantes problemas que envolvem a teoria do colapso gravitacional é a denominada *hipótese de censura cósmica*. Segundo a relatividade geral clássica, todo sistema que evolui a partir de um conjunto inicial de dados não-singulares, não pode produzir uma singularidade detetável no espaço-tempo. Esta hipótese considera que um colapso de matéria que obedece as condições de energia da relatividade geral, não pode implicar a existência de uma singularidade nua. O estado final de um colapso gravitacional deve ser uma singularidade no interior de um buraco negro. Apesar de ter uma forte aceitação pela comunidade científica, este teorema ainda não tem uma demonstração rigorosa, e vários contraexemplos tem surgido na literatura.

Por último, podemos mencionar que o conceito de direção temporal cosmológica tem sido estudado dentro da teoria do colapso gravitacional. Usando uma solução não adiabática, pode ser assumido que a emissão por uma estrela para o exterior indica o sentido do tempo para o futuro.

Várias revisões sobre a teoria de colapso gravitacional são encontradas na literatura. No presente Capítulo seguiremos de perto as referências [8] e [38].

6.2 Equações de movimento

O colapso gravitacional dentro da teoria do espaço-tempo de Weyl integrável pode ser descrito por um modelo constituído de uma métrica não-estática, de um campo escalar geométrico e de um conteúdo material. Em princípio, o campo escalar e a distribuição de matéria também dependem das coordenadas espaciais e do tempo. O sistema de equações de movimento que representa uma tal configuração resulta muito complicado e de difícil integração, ainda no caso de um campo geométrico constante. Por essa razão, no modelo de um sistema colapsante são introduzidas certas hipóteses simplificadoras que tornam as

equações de movimento mais manipuláveis. A seguir, mostraremos as equações principais e as hipóteses simplificadoras que serão aplicadas nas próximas seções.

Vamos supôr, em primer lugar, que o colapso possui simetria esférica. Ao fazer esta escolha devemos ter em mente que existem soluções exatas, estáticas, esféricamente simétricas que podem formar parte da história do colapso. Além disso, a suposição de simetria esférica parece bastante razoável devido a que vários objetos observados, como estrelas ou nebulosas, são aproximadamente esféricos. Vamos escolher, então, a métrica não-estática $g_{\mu\nu}$ na forma dada pelo seguinte intervalo

$$ds^2 = A^2(r, t) dt^2 - B^2(r, t) dr^2 - C^2(r, t) r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (6.1)$$

onde A , B , e C são assumidas positivas.

Em segundo lugar, escolhemos a matéria do corpo colapsante representada por um fluido perfeito. As equações de movimento de uma geometria de Weyl integrável nesse caso tem a forma (ver Capítulo 3)

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega_\alpha\omega^\alpha) = -(\tilde{\rho}V_\mu V_\nu - \tilde{p}h_{\mu\nu}) \quad (6.2)$$

e

$$\hat{\square}\omega = -\frac{1}{2\lambda}\tilde{\rho}. \quad (6.3)$$

Num passo seguinte, simplificamos as equações de movimento escolhendo as componentes da métrica e o campo escalar geométrico com a seguinte forma

$$A = A(r), \quad (6.4)$$

$$B = B(r)F(t), \quad (6.5)$$

$$C(r, t) = B(r, t), \quad (6.6)$$

$$\omega = R(r) + T(t), \quad (6.7)$$

onde a função $F(t)$ é positiva definida. A igualdade (6.6) é sempre possível se consideramos um fluido sem deformação.

Introduzindo as expressões (6.4)-(6.7) em (6.2) e (6.3) obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais

$$({}^0_0) \equiv -\frac{\tilde{\rho}_r^0{}^0}{F^2} - \frac{3}{A^2} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\dot{T}}{A} \right)^2 = -\tilde{\rho}, \quad (6.8)$$

$$({}^1_1) \equiv \frac{\tilde{p}_r^1{}_1}{F^2} - \frac{1}{A^2} \left[2 \frac{\ddot{F}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\dot{T}}{A} \right)^2 = \tilde{p}, \quad (6.9)$$

$$({}^2_2) \equiv \frac{\tilde{p}_r^2{}_2}{F^2} - \frac{1}{A^2} \left[2 \frac{\ddot{F}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\dot{T}}{A} \right)^2 = \tilde{p}, \quad (6.10)$$

$$({}_{01}) \equiv -2 \frac{A'}{A} \frac{\dot{F}}{F} - \lambda \dot{T} R' = 0, \quad (6.11)$$

$$-\frac{\tilde{\rho}_r^{\omega}}{2\lambda F^2} + \frac{1}{A^2} \left(3 \frac{\dot{F}}{F} \dot{T} + \ddot{T} \right) = -\frac{\tilde{\rho}}{2\lambda}. \quad (6.12)$$

Cada parêntese $({}^\mu{}_\nu)$ denota a equação (6.2) com índice contravariante μ e índice covariante ν . As partes das equações dependentes unicamente da coordenada r são definidas por

$$\tilde{\rho}_r^0{}^0 = -\frac{1}{B^2} \left[\frac{4}{r} \frac{B'}{B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 2 \frac{B''}{B} \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)^2 \quad (6.13)$$

$$\tilde{p}_r^1{}_1 = \frac{1}{B^2} \left[2 \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)^2 \quad (6.14)$$

$$\tilde{p}_r^2{}_2 = \frac{1}{B^2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} - \left(\frac{B'}{B} \right)^2 \right] - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)^2 \quad (6.15)$$

e

$$\tilde{\rho}_r^{\omega} = -\frac{2\lambda}{B^2} \left[R'' + R' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) \right] \quad (6.16)$$

Esta forma das equações permite aplicar a técnica de separação de variáveis no cálculo

de integração. Assim, eliminando $\tilde{\rho}$ entre (6.8) e (6.12) e separando variáveis conseguimos uma equação diferencial na variável t e outra na variável r . A equação diferencial em t vincula as funções T e F

$$\frac{\lambda}{2}\dot{T}^2 F^2 + 2\lambda F^2 \left(3\frac{\dot{F}}{F}\dot{T} + \ddot{T} \right) + 3\dot{F}^2 = K_1, \quad (6.17)$$

enquanto que a outra equação contém as funções espaciais A , B e R

$$A^2(\tilde{\rho}_r^\omega - \tilde{\rho}_r^0) = K_1, \quad (6.18)$$

sendo K_1 uma constante arbitrária.

Também por separação de variáveis, a equação (6.11) conduz a uma solução do campo escalar geométrico em função das componentes da métrica. O resultado está dado por

$$T(t) = -\frac{T_0}{\lambda} \ln \frac{F}{F_0}, \quad (6.19)$$

$$R(r) = \frac{2}{T_0} \ln \frac{A}{A_0}, \quad (6.20)$$

onde T_0 , F_0 e A_0 são constantes de integração.

Finalmente, introduzindo (6.19) em (6.17), e depois de alguns cálculos, chegamos a uma equação diferencial para F dada por

$$\ddot{F}F + D_0 \dot{F}^2 = K_0, \quad (6.21)$$

onde

$$K_0 = -\frac{K_1}{2T_0} \quad (6.22)$$

e

$$D_0 = -\frac{3}{2T_0} - \frac{T_0}{4\lambda} + 2. \quad (6.23)$$

Assim, no caso em que (6.4)-(6.7) são válidas, a dependência temporal na solução

de uma esfera colapsante de fluido perfeito é completamente determinada pelas equações (6.19) e (6.21). Qualquer condição de junção com o exterior e qualquer condição inicial a serem impostas, devem ser compatíveis com esta solução.

6.3 Poeira Não-estática e Esfericamente Simétrica

Nesta seção mostraremos uma solução para um caso simples de colapso gravitacional no espaço-tempo de Weyl integrável. Seguindo o modelo da seção anterior, consideraremos uma configuração esfericamente simétrica com um conteúdo material representado por um fluido perfeito. Também vamos supôr que estamos tratando com uma nebulosa sem limites definidos.

Por conveniência em relação ao cálculo, escolheremos a métrica do espaço-tempo dada por

$$ds^2 = A^2(r) dt^2 - \frac{F^2(t)}{A^2(r)} dr^2 - F^2(t) C^2(r) d\Omega^2 \quad (6.24)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Esta métrica é equivalente à dada em (6.4)-(6.6), pois existe uma transformação de coordenadas que identifica uma com a outra.

O campo escalar geométrico é também convenientemente escolhido na forma

$$\omega(r, t) = R(r) + T(t). \quad (6.25)$$

Em acordo com o visto na seção anterior, as equações de movimento para esta configuração são dadas por (6.2) e (6.3). Com as expressões (6.24) e (6.25) para os elementos geométricos, as equações tomam uma forma simples que permite aplicar a técnica de separação de variáveis.

Introduzindo a métrica (6.24) nas equações dinâmicas, e fazendo alguns cálculos algébricos, chegamos ao seguinte conjunto de equações diferenciais

$$\frac{\hat{G}^t_t - \hat{G}^r_r}{2 A(r)^2} = \frac{C''}{C F^2} + \frac{1}{A^4} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)' = -\frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{2 A^2} + \frac{\lambda}{2 A^2} \left(\frac{\dot{\omega}^2}{A^2} + \frac{A^2}{F^2} \omega'^2 \right) \quad (6.26)$$

$$C(r)^2(2\hat{G}^\theta_\theta + \hat{G}^r_r - \hat{G}^t_t) = \frac{(A^2C^2)'}{F^2} - 6\frac{C^2\ddot{F}}{A^2F} = C^2\left(\tilde{\rho} + 3\tilde{p} - 2\lambda\frac{\dot{\omega}^2}{A^2}\right) \quad (6.27)$$

$$2C(r)^2(\hat{G}^\theta_\theta + \hat{G}^r_r) = \frac{(A^2C^2)''}{F^2} - \frac{2}{F^2} - 4\frac{C^2}{A^2}\left[2\frac{\ddot{F}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F}\right)^2\right] = 2C^2\left(\tilde{p} - 2\lambda\frac{\dot{\omega}^2}{A^2}\right) \quad (6.28)$$

$$\hat{G}_{tr} = -\frac{\dot{F}}{F}\frac{A'}{A} = -\lambda\dot{\omega}\omega' \quad (6.29)$$

$$\frac{3}{A^2}\frac{\dot{F}}{F}\dot{\omega} + \frac{1}{A^2}\ddot{\omega} - \frac{1}{F^2C^2}(A^2C^2\omega')' = -\frac{\tilde{p}}{2\lambda} \quad (6.30)$$

A equação (6.29) com (6.25) é idêntica a (6.11). Então, novamente obtemos a solução do campo escalar geométrico em função das componentes da métrica dada por (6.19)-(6.20).

Como é de se esperar, depois de alguns cálculos, chegamos à equação diferencial (6.21). Com esta equação e com (6.19) temos definida totalmente a dependência temporal do fluido perfeito colapsante.

Até aqui todos os cálculos tem sido independentes das características próprias do fluido perfeito. Mas, para simplificar um pouco mais as equações na coordenada r , vamos a escolher $p = 0$. Com esta escolha o meio colapsante passa a ser denominado de poeira.

A partir das equações de movimento, vemos que fazer $p = 0$ implica que a constante de integração T_0 toma os seguintes valores

$$T_0 = 1, \text{ ou } T_0 = \pm\sqrt{-6\lambda}. \quad (6.31)$$

Com $p = 0$, as equações para as funções A e C tomam as formas

$$\frac{A^2}{C^2}[(A^2C^2)'' - 2] = 8K_0 \quad (6.32)$$

$$-2A^4 \frac{C''}{C} + \frac{4\lambda}{T_0^2} A^2 A'^2 = \frac{2K_0(T_0^2 + T_0 + 4\lambda)}{T_0 - 2\lambda} \quad (6.33)$$

$$\frac{A^2}{C^2} (A'^2 C^2)' = \frac{2K_0 T_0 (T_0 + 3)}{T_0 - 2\lambda}. \quad (6.34)$$

Este sistema de equações diferenciais tem uma solução fácil de integrar quando escrevemos $K_0 = 0$. Neste caso, a partir de (6.32) e (6.34) obtemos

$$A^2 C^2 = p(r) = (r - r_+)(r - r_-) \quad (6.35)$$

$$(A'^2 C^2)' = 0, \quad (6.36)$$

Combinando estas duas equações e integrando obtemos

$$\frac{C^2}{C_0^2} = p(r) e^{-\alpha_1 \int \frac{dr}{p(r)}}, \quad (6.37)$$

$$\frac{A^2}{A_0^2} = e^{\alpha_1 \int \frac{dr}{p(r)}}, \quad (6.38)$$

onde α_1 é uma constante de integração. Este resultado depende do discriminante de $p(r)$, dado por $\eta^2 = (r_+ - r_-)^2$, pois

$$\int \frac{dr}{p(r)} = \begin{cases} \frac{1}{\eta} \ln \left(\frac{r-r_+}{r-r_-} \right) & \text{se } \eta^2 > 0 \\ \frac{2}{|\eta|} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r - (r_+ + r_-)}{|\eta|} \right) & \text{se } \eta^2 < 0 \\ -\frac{1}{r-r_+} & \text{se } \eta^2 = 0 \end{cases} \quad (6.39)$$

Estas soluções são as mesmas que definem a métrica estática de um espaço-tempo de Weyl integrável sem fontes externas e com simetria esférica (ver Capítulo anterior). Nas expressões dadas na seção 5.2.1 devemos substituir $2M$ por λ_1 , pois a identificação com a massa estática M não continua sendo válida.

Definindo um parâmetro σ de igual maneira que a carga do campo escalar geométrico

no caso estático, temos a seguinte relação entre as constantes

$$\sigma = \frac{\alpha_1}{T_0}. \quad (6.40)$$

Substituindo as soluções para C e A em (6.33) com $K_0 = 0$ obtemos

$$\alpha_1 = \pm \eta T_0 (T_0^2 - 2\lambda)^{-1/2}. \quad (6.41)$$

Por outro lado, escrevendo $K_0 = 0$ em (6.21) e integrando, obtemos a solução para a função temporal da métrica

$$F(t) = F_1(t - t_0)^{\frac{1}{1+D_0}}. \quad (6.42)$$

O sinal da derivada de $F(t)$ indicará colapso ou expansão segundo este seja negativo ou positivo, respectivamente. Como F_1 é positivo definido, o sinal de \dot{F} dependerá do valor da constante D_0 . Na realidade, em acordo com a equação (6.23), D_0 é determinado pelo valor de λ , pois T_0 é um valor numérico constante dado por (6.31). Então, o parâmetro λ , próprio da estrutura geométrica, é o valor que define o tipo de comportamento da nebulosa.

Finalmente, escrevemos a equação para a densidade ρ com $p = 0$ e $K = 0$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{A^2 F^2} \left(2 \frac{T_0^2}{\lambda} \dot{F}^2 - 6 F \ddot{F} \right). \quad (6.43)$$

Introduzindo a expressão para F obtemos

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{A^2} \left(2 \frac{T_0^2}{\lambda} + 6 D_0 \right) \frac{1}{(1 + D_0)^2} (t - t_0)^{-2}. \quad (6.44)$$

Desta equação vemos que $T_0 = \pm \sqrt{-6\lambda}$ corresponde a uma densidade de energia nula. Em conseqüência, esses valores são descartados na descrição de uma distribuição de poeira.

Com $T_0 = 1$, a partir da equação (6.23) temos que

$$D_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\lambda}, \quad (6.45)$$

então, a densidade de energia é positiva unicamente se λ satisfaz

$$0 < \lambda \text{ ou } \lambda < -1/6. \quad (6.46)$$

Voltando à eq. (6.42), vemos que o sentido do movimento radial da nebulosa é determinado por

$$\begin{cases} \dot{F} > 0 \rightarrow \text{expansão} \equiv 3 - \frac{1}{2\lambda} > 0 \\ \dot{F} < 0 \rightarrow \text{contração} \equiv 3 - \frac{1}{2\lambda} < 0 \end{cases} \quad (6.47)$$

Escrevendo em função do sinal de λ temos que

$$\lambda > 0 \leftarrow \begin{cases} \lambda > 1/6 \rightarrow \text{expansão} \\ \lambda < 1/6 \rightarrow \text{contração} \end{cases} \quad (6.48)$$

$$\lambda < 0 \leftarrow \begin{cases} \lambda < -1/6 \rightarrow \text{expansão} \\ \nexists \lambda \quad \text{contração} \end{cases} \quad (6.49)$$

Concluimos que as soluções aqui encontradas descrevem o movimento de uma nebulosa de poeira num espaço-tempo de Weyl integrável. Dependendo da constante de acoplamento λ o sistema pode estar em expansão ou em colapso. As soluções com λ positivo são novas e não estão presentes na teoria Riemanniana. Por outro lado, a presença do campo escalar geométrico permite soluções em expansão que não existem se ω for constante. Isto é fácil de ver pois a equação (6.29) mostra que quando o campo escalar geométrico é constante, uma métrica não-estática da forma (6.24) existe unicamente se $A' = 0$. Isto implica supôr que as trajetórias do fluido são geodésicas. Nesse caso, as partículas de poeira caem livremente em direção ao centro da esfera e uma solução em expansão seria

impossível.

6.4 Colapso Radiante

Nesta seção consideraremos a emissão de radiação durante o colapso. O objetivo é obter as condições de junção que devem ser satisfeitas sobre a superfície da esfera colapsante de fluido perfeito, quando o exterior é um espaço-tempo com um fluido de ftons. No interior da esfera vamos supôr um espaço-tempo descrito por uma geometria de Weyl integrável com fluxo de calor radial. Na realização desta seção tomaremos como referência o trabalho realizado por Bonnor et all. [8].

6.4.1 Espaço-tempos Interior e Exterior

Seja um corpo esfericamente simétrico com centro na origem de coordenadas e com uma superfície de contorno Σ . O espaço-tempo ocupado pela esfera, descrito por uma geometria de Weyl integrável, é denotado com E^- . O conteúdo material é representado por um fluido perfeito em movimento radial, com uma possível condução de calor para à superfície. Então, o tensor de momento energia no interior do corpo colapsante é dado por

$$T_{\mu\nu}^- = \bar{\rho}V_\mu V_\nu - \tilde{p}h_{\mu\nu} + \tilde{q}_\mu V_\nu + \tilde{q}_\nu V_\mu. \quad (6.50)$$

Com ρ denotamos a densidade de energia, com p a pressão isotrópica do fluido e com q^μ o fluxo de calor [8]. As quantidades com tilde são dadas por $\tilde{\rho} = e^{-\omega/2}\rho$ e $\tilde{p} = e^{-\omega/2}p$ (ver Capítulo 3).

Através das coordenadas esféricas descrevemos a configuração no interior de Σ

$$x_-^\mu \equiv (t, r_-, \theta, \phi), \quad (6.51)$$

onde $\mu = 0, 1, 2, 3$. A forma genérica da métrica interior é denotada como $g_{\mu\nu}^-$, e sua inversa $g^{\mu\nu}_-$.

O vetor q^μ representa o fluxo de energia com a hipótese de equilíbrio termodinâmico local, e satisfaz

$$g_{\mu\nu}^- q^\mu V^\nu = 0 \quad (6.52)$$

$$g_{\mu\nu}^- q^\mu q^\nu \leq 0 \quad (6.53)$$

No caso de um fluxo radial, temos que

$$q^\mu = q(r, t) \delta_1^\mu. \quad (6.54)$$

Por conveniência, usaremos o sistema de referência comoviente com o fluido. Então, a tetra-velocidade normalizada V^μ das partículas do fluido é dada por

$$V^\mu = (g_{00}^-)^{-1/2} \delta_0^\mu, \quad (6.55)$$

tal que

$$g_{\mu\nu}^- V^\mu V^\nu = 1. \quad (6.56)$$

Vamos escolher a métrica $g_{\mu\nu}^-$ no interior da esfera dada pelo seguinte intervalo

$$ds_-^2 = A^2(r_-, t) dt^2 - B^2(r_-, t) dr_-^2 - C^2(r_-, t) r_-^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (6.57)$$

onde A , B , e C são assumidas positivas. Com esta expressão para a métrica o campo de velocidades toma a forma

$$V^\mu = A^{-1} \delta_0^\mu. \quad (6.58)$$

Por simplicidade, nos limitaremos a trabalhar com o vetor velocidade (6.58), livre de deformação. Nesse caso é possível reescrever a métrica em uma forma mais simples, onde $B = C$

$$ds_-^2 = A^2(r_-, t) dt^2 - B^2(r_-, t) [dr_-^2 - r_-^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)]. \quad (6.59)$$

Vamos supôr que o exterior da esfera colapsante é um espaço-tempo esfericamente

simétrico denominado E^+ e representado por uma geometria Riemanniana. O conteúdo de E^+ é uma radiação na direção radial. Escolhemos as coordenadas exteriores como

$$(x^0, x^1, x^2, x^3)^+ = (v, r_+, \theta, \phi), \quad (6.60)$$

e tomamos as componentes da métrica exterior $g_{\mu\nu}^+$ dadas pela métrica de Vaidya

$$ds_+^2 = \left[1 - \frac{2m(v)}{r_+} \right] dv^2 + 2 dv dr_+ - r_+^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (6.61)$$

O tensor de mometum-energia da radiação exterior é dado por

$$T_{\mu\nu}^+ = -\frac{2}{r_+^2} \frac{dm}{dv} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \quad (6.62)$$

As equações de movimento da métrica em cada região do espaço-tempo tomam a forma genérica

$$\hat{G}_{\mu\nu}^\pm + \lambda(\omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega^\alpha \omega_\alpha)^\pm = -T_{\mu\nu}^\pm. \quad (6.63)$$

Os índices $+$ e $-$ indicam as quantidades correspondentes ao espaço-tempo E^+ e E^- , respectivamente. Nesta notação $\hat{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein do espaço-tempo de Riemann associado. Além da eq. (6.63), temos que considerar também a equação de movimento do campo escalar geométrico na região do espaço-tempo onde ele não é constante.

Substituindo, em cada região, o tensor mometum-energia e o campo escalar ω correspondentes obtemos

$$\hat{G}_{\mu\nu}^- + \lambda(\omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega^\alpha \omega_\alpha)^- = -\tilde{\rho} V_\mu V_\nu + \tilde{p} h_{\mu\nu} - \tilde{q}_\mu V_\nu - \tilde{q}_\nu V_\mu \quad (6.64)$$

$$\hat{\square} \omega = -\frac{1}{2\lambda} \tilde{\rho} \quad (6.65)$$

em E^- , e

$$\hat{G}_{\mu\nu}^+ = \frac{2}{r_+^2} \frac{dm}{dv} \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \quad (6.66)$$

em E^+ .

Na equação de movimento de ω tem como fonte a densidade Lagrangiana como podemos determinar a partir do princípio variacional (Cap. 2), por esta razão o fluxo de calor não aparece como fonte no lado direito da eq. (6.65), analogamente ao que ocorre com o campo eletromagnético quando escrito como um fluido.

6.4.2 Condições de Junção

Consideremos agora o espaço-tempo com as duas regiões, E^+ e E^- , separadas pela hipersuperfície Σ . Em cada região a superfície é descrita por uma equação da forma

$$f^\pm(x_\pm^\mu) = 0. \quad (6.67)$$

Denotando com ξ^a as coordenadas sobre Σ , os vetores normais n^α e os vetores e_a^μ tangentes a superfície são calculados mediante

$$n_\alpha^\pm = \left(\frac{\partial f^\pm}{\partial x_\pm^\alpha} \right)_\Sigma \left[g_\pm^{\sigma\beta} \frac{\partial f^\pm}{\partial x_\pm^\sigma} \frac{\partial f^\pm}{\partial x_\pm^\beta} \right]_\Sigma^{-1/2}, \quad (6.68)$$

e

$$e_a^{\pm\mu} = \left(\frac{\partial x_\pm^\mu}{\partial \xi^a} \right)_\Sigma. \quad (6.69)$$

As regiões interior e exterior são bem acopladas na superfície limite se certas condições de junção são satisfeitas. Segundo Darmois [38], duas regiões do espaço-tempo, separadas por uma hipersuperfície Σ , satisfazem as condições de junção se as *primeiras e segundas formas fundamentais* são idênticas sobre Σ .

A primeira condição de junção de Darmois é escrita como

$$ds_{-\Sigma}^2 = ds_{+\Sigma}^2 \quad (6.70)$$

ou equivalentemente

$$\left[g_{\mu\nu}^- dx_-^\mu dx_-^\nu \right]_\Sigma = \left[g_{\mu\nu}^+ dx_+^\mu dx_+^\nu \right]_\Sigma. \quad (6.71)$$

A segunda condição de junção de Darmois é expressa por

$$K_{\mu\nu}^- = K_{\mu\nu}^+, \quad (6.72)$$

onde $K_{\mu\nu}$ denota a segunda forma fundamental sobre Σ para cada região.

A quantidade $K_{\mu\nu}$ é formada essencialmente com a métrica e suas derivadas simples e não com a conexão afim, por esta razão o valor de $K_{\mu\nu}$ não depende do tipo de geometria afim que está representando o espaço-tempo. Em conseqüência, ao reescrever $K_{\mu\nu}$ em função da conexão afim veremos que sua expressão é diferente quando escrita numa geometria Riemanniana ou numa geometria de Weyl. A segunda forma fundamental para um espaço-tempo de Weyl integrável é dada por

$$K_{ij} = -g_{\alpha\beta} n_{;i}^\beta x^{\alpha}_{;j} - \frac{1}{2}(\omega_\mu n_\alpha + \omega_\sigma n^\sigma g_{\alpha\mu} - n_\mu \omega_\alpha) x^{\alpha}_{;i} x^{\mu}_{;j}, \quad (6.73)$$

onde o ponto e virgula (;) denota a derivada covariante Weyliana, e $x^{\alpha}_{;i}$ é a derivada simples da coordenada x^α com respeito a ξ^i sobre a superfície. Notemos que, unicamente no caso em que ω é constante, a expressão (6.73) coincide com a expressão Riemanniana.

Apos um pouco de álgebra, (6.73) também pode ser escrita da seguinte forma

$$K_{ij} = -n_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - n_\alpha \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} (n_\nu \omega_\mu + n_\mu \omega_\nu - g_{\mu\nu} n^\alpha \omega_\alpha), \quad (6.74)$$

As duas condições de Darmois juntas são equivalentes as duas condições generalizadas de O'brien e Synge, deduzidas por Israel [38]. Estas condições podem ser escritas em função do tensor de Einstein da geometria Riemanniana associada, tomando a forma seguinte

$$[\hat{G}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu]_{\Sigma}^- = [\hat{G}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu]_{\Sigma}^+ \quad (6.75)$$

$$[\hat{G}_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu n^\nu]_{\Sigma}^- = [\hat{G}_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu n^\nu]_{\Sigma}^+ \quad (6.76)$$

A notação $[\]_{\Sigma}^{\pm}$ significa o limite da função entre parênteses quando estamos aproximán-

do-nos a um mesmo ponto sobre a superfície Σ , pelo lado exterior (+) e interior (-), respectivamente.

Em nossa configuração, Σ é uma esfera definida em E^- pela equação

$$r_- - r_{-\Sigma} = 0, \quad (6.77)$$

e em E^+ por

$$r_+ - r_{+\Sigma}(v) = 0. \quad (6.78)$$

A quantidade $r_{-\Sigma}$ é uma constante, pois Σ é uma superfície comoviente com o observador (comoviente com o fluido).

Escolheremos as coordenadas ξ^μ e a métrica sobre Σ dadas por

$$\xi^\mu \equiv (\tau, \theta, \phi), \quad (6.79)$$

e

$$ds_\Sigma^2 = d\tau^2 - R^2(\tau)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (6.80)$$

Então, a partir de (6.68) com (6.77) e (6.78), e tendo em conta (6.59) e (6.61), obtemos

$$n_\alpha^- = (0, B(r_{-\Sigma}, t), 0, 0) \quad (6.81)$$

$$n_\alpha^+ = \left(-\frac{dr_{+\Sigma}}{dv}, 1, 0, 0\right) \left[1 - \frac{2m}{r_{+\Sigma}} + 2\frac{dr_{+\Sigma}}{dv}\right]^{-1/2}. \quad (6.82)$$

A quantidade $m = m(v)$ é a função que define a métrica exterior de Vaydia.

Por outro lado, a condição (6.70) com (6.59), (6.61) e (6.80) conduz a

$$A_\Sigma^2 dt^2 = d\tau^2 = \left[1 - \frac{2m}{r_{+\Sigma}} + 2\frac{dr_{+\Sigma}}{dv}\right] dv^2, \quad (6.83)$$

$$r_{-\Sigma}^2 B^2(r_{-\Sigma}, t) = r_{+\Sigma}^2(v) = R^2(\tau). \quad (6.84)$$

Com estas equações calculamos o vetor que define a tangente sobre Σ na direção de τ ,

$$e_a^{\pm\mu} = \delta_a^0 \frac{\partial x^{\pm\mu}}{\partial \xi^a}. \quad (6.85)$$

Ou seja,

$$e_0^{-\mu} = \frac{\delta_0^\mu}{A(r_{-\Sigma}, t)}, \quad (6.86)$$

$$e_0^{+\mu} = \left(1, \frac{dr_{+\Sigma}}{dv}, 0, 0\right) \left[1 - \frac{2m}{r_{+\Sigma}} + 2\frac{dr_{+\Sigma}}{dv}\right]^{-1/2}. \quad (6.87)$$

Introduzindo as equações de movimento e as expressões dos vetores n_α^\pm e $e_a^{\pm\mu}$ nas condições (6.75) e (6.76) obtemos

$$\tilde{p}_\Sigma - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\omega'}{B^2} + \frac{\dot{\omega}}{A^2} \right)_\Sigma = -\frac{2}{r_{+\Sigma}^2} \frac{dm}{dv} \left[1 - \frac{2m}{r_{+\Sigma}} + 2\frac{dr_{+\Sigma}}{dv} \right]^{-1} \quad (6.88)$$

e

$$\left(\lambda \frac{\omega' \dot{\omega}}{AB} + \tilde{q} B \right)_\Sigma = -\frac{2}{r_{+\Sigma}^2} \frac{dm}{dv} \left[1 - \frac{2m}{r_{+\Sigma}} + 2\frac{dr_{+\Sigma}}{dv} \right]^{-1}, \quad (6.89)$$

respectivamente. Nesta notação, ω é sempre o campo escalar geométrico em E^- .

A equação (6.89) indica que a presença do campo escalar permite satisfazer as condições de junção com a métrica de Vaydia, inclusive no caso em que o fluxo de calor no interior seja nulo. Este é um resultado interessante devido a sua diferença com o correspondente na teoria Riemanniana. Na teoria da relatividade geral, um fluxo de calor nulo sobre a superfície implica necessariamente um espaço-tempo de Schwarzschild no exterior da esfera colapsante, e nunca um espaço-tempo com radiação.

Finalmente, substraindo (6.88) de (6.89) e reordenando, obtemos a expressão para a pressão sobre a superfície Σ de uma esfera de fluido perfeito com fluxo de calor descrita por uma geometria de Weyl integrável, e considerando o exterior como a solução de Vaydia,

$$\tilde{p}_\Sigma = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\omega'}{B} + \frac{\dot{\omega}}{A} \right)_\Sigma^2 + q(r_{-\Sigma}, t) B(r_{-\Sigma}, t) \quad (6.90)$$

Esta equação mostra que um exterior com radiação não impõe uma pressão não nula sobre

a superfície. Além da transferência de calor, a descontinuidade na derivada do campo escalar geométrico determina a pressão sobre a superfície, podendo inclusive impor um valor nulo a p se λ for negativo.

Por outro lado, quando o parâmetro λ é positivo, a pressão em Σ é sempre diferente de zero, ainda no caso em que o fluxo de calor sobre a superfície seja nulo. Esta é uma diferença fundamental com respeito aos trabalhos realizados dentro da teoria Riemanniana. Podemos supôr, então, que o campo escalar geométrico não-constante pode ser o encarregado de transportar a energia suficiente para que as condições de junção com a métrica de Vaydia sejam satisfeitas durante o colapso.

6.4.3 Fluxo de Calor Nulo

A partir da equação (6.90) vemos que o campo escalar geométrico poderia ter um papel importante como portador de energia, pois a junção com Vaydia é possível mesmo quando o fluxo interno de calor é nulo. Estudaremos, então, uma configuração esférica colapsante de fluido perfeito sem fluxo de calor, e com métrica exterior de Vaydia.

A partir das equações de movimento, temos que a dinâmica do espaço-tempo interno está determinada pela equação (6.21) junto com a (6.19), sempre que (6.4)-(6.7) sejam válidas.

Por outro lado temos a condição de junção (6.90) com $q = 0$

$$\tilde{p}_\Sigma = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\omega'}{B} + \frac{\dot{\omega}}{A} \right)_\Sigma^2. \quad (6.91)$$

Introduzindo (6.7) no lado direito, e (6.9) no lado esquerdo temos que

$$\frac{(\tilde{p}_r^1)_\Sigma}{F^2} - \frac{1}{A_\Sigma^2} \left[2 \frac{\ddot{F}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\dot{T}}{A_\Sigma} \right)^2 = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} + \frac{\dot{T}}{A} \right)_\Sigma^2. \quad (6.92)$$

Multiplicando por $F^2 A^2$ e reordenando chegamos a

$$A_\Sigma^2 \left[\tilde{p}_r^{-1} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)^2 \right]_\Sigma - \lambda \left(\frac{A R'}{B} \right)_\Sigma \dot{T} F - 2\ddot{F} F - \dot{F}^2 = 0. \quad (6.93)$$

Finalmente, se separamos a parte espacial da temporal e usarmos (6.19), obtemos a seguinte equação para $F(t)$

$$\ddot{F} F + \frac{1}{2} \dot{F}^2 - \left(\frac{A'}{B} \right)_\Sigma \dot{F} = K_2, \quad (6.94)$$

onde

$$K_2 = \frac{A_\Sigma^2}{2} \left[\frac{2\lambda}{T_0^2} \left(\frac{A'}{BA} \right)^2 - \tilde{p}_r^{-1} \right]_\Sigma \quad (6.95)$$

é um valor constante.

Qualquer solução de (6.94) deve ser também solução de (6.21). Se substrairmos (6.94) de (6.21), obtemos uma equação quadrática para \dot{F}

$$\left(D_0 - \frac{1}{2} \right) \dot{F}^2 + \left(\frac{A'}{B} \right)_\Sigma \dot{F} - K_3 = 0, \quad (6.96)$$

com $K_3 = K_0 - K_2$. A solução desta equação é um valor constante de \dot{F}

$$\dot{F} = - \frac{A'_\Sigma \pm \sqrt{A'_\Sigma{}^2 + 2K_3 B_\Sigma^2 (2D_0 - 1)}}{(2D_0 - 1) B_\Sigma}. \quad (6.97)$$

Reescrevendo este resultado em (6.21) obtemos uma expressão para K_0 em função dos parâmetros livres T_0 e λ . O valor de \dot{F} é determinado pelos valores da métrica sobre a superfície de descontinuidade, pela constante de acoplamento λ e pelo parâmetro T_0 . T_0 está vinculado com a descontinuidade da derivada de ω sobre Σ . O sinal de \dot{F} pode ser tanto negativo como positivo, indicando um colapso ou uma expansão constantes, respectivamente. Concluindo, a equação (6.97) representa a dependência temporal de uma esfera de fluido perfeito com geometria de Weyl integrável, sem fluxo de calor, que colapsa ou expande com velocidade constante emitindo radiação para o exterior.

6.5 Condição Inicial Estática

De acordo com o que podemos ver no trabalho de Bonnor [8], um dos resultados mais interessantes obtidos para o colapso de uma esfera radiante é a solução com condição inicial estática usando a técnica de separação de variáveis. Nesta seção seguiremos de perto o que foi realizado na referência [8] e obteremos a solução correspondente ao caso de uma esfera radiante, em colapso, descrita em seu interior por uma geometria de Weyl integrável.

A seguir utilizaremos as equações de movimento (6.8)-(6.10) e (6.12). Devido a presença do fluxo de calor q , a equação (6.11) ganha um lado direito não nulo, e toma a forma

$${}_{(01)} \equiv -2 \frac{A'}{A} \frac{\dot{F}}{F} - \lambda \dot{T} R' = A B^2 F^2 q(r, t). \quad (6.98)$$

Tomando uma configuração inicial estática, denominamos por t_0 o momento inicial do colapso e supomos que, para todo tempo anterior $t \leq t_0$, a métrica e o campo escalar geométrico não dependiam da coordenada temporal. Como a métrica e o campo escalar geométrico são dadas pelas equações (6.5)-(6.7), temos que

$$\dot{F}(t \leq t_0) = 0, \quad (6.99)$$

$$\dot{T}(t \leq t_0) = 0. \quad (6.100)$$

A partir das equações de movimento vemos que A , B e R descrevem um fluido perfeito estático com energia ρ_0 e pressão isotrópica p_0 tal que

$$\tilde{\rho}_r^0 = \tilde{p}_0, \quad (6.101)$$

$$\tilde{p}_r^1 = \tilde{p}_0, \quad (6.102)$$

$$\tilde{p}_r^2 = \tilde{p}_0, \quad (6.103)$$

e

$$\tilde{\rho}_r^{\omega} = \tilde{\rho}_0 \quad (6.104)$$

Mais explicitamente, as funções espaciais A , B e R devem ser solução do seguinte conjunto de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{B^2} \left[\frac{4}{r} \frac{B'}{B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 2 \frac{B''}{B} \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)^2 = \tilde{\rho}_0, \\ 2 \frac{A'}{A} \frac{B'}{B} + \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + 2 \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \lambda R'^2 - \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} = 0 \\ \frac{4}{r} \frac{B'}{B} + \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + 2 \frac{B''}{B} - \frac{\lambda}{2} R'^2 - 2\lambda \left[R'' + R' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} + \frac{2}{r} \right) \right] = 0. \end{array} \right. \quad (6.105)$$

Entanto, as funções temporais são solução da equação (6.17) com $K_1 = 0$

$$\dot{T} + \frac{\dot{T}^2}{4} + 3 \frac{\dot{F}}{F} \dot{T} + \frac{1}{\lambda} \frac{\ddot{F}}{F} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 = 0 \quad (6.106)$$

A condição estática e a equação (6.98) permitem deduzir que o fluxo de calor dentro da esfera era nulo até o início do colapso,

$$q(r, t < t_0) = 0. \quad (6.107)$$

Por outro lado, se consideramos a esfera inicial com um rádio r_Σ de valor finito, a solução estática para o fluido perfeito deve ser combinada com um espaço-tempo exterior também estático. Em nosso caso, identificaremos a métrica exterior com a métrica de Schwarzschild. Assim, a condição de junção sobre a superfície Σ para $t \leq t_0$ impõe que

$$\tilde{p}_{0\Sigma} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{R'}{B} \right)_\Sigma^2 \quad (6.108)$$

A seguir calcularemos a equação que resulta de combinar a condição de junção (6.90) com as equações de movimento e uma configuração inicial estática. Então, reescrevemos

(6.9) com (6.102), avaliamos sobre a superfície e introduzimos (6.108), obtendo

$$\tilde{p}_\Sigma = \frac{\lambda}{2F^2} \left(\frac{R'}{B} \right)_\Sigma^2 - \frac{1}{A_\Sigma^2} \left[2 \frac{\ddot{F}}{F} + \left(\frac{\dot{F}}{F} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\dot{T}}{A_\Sigma} \right)^2. \quad (6.109)$$

A partir de (6.98), calculamos o valor do fluxo de calor sobre a superfície obtendo

$$q(r_\Sigma, t) = - \frac{1}{A B^2 F^2} \left(2 \frac{A'}{A} \frac{\dot{F}}{F} + \lambda \dot{T} R' \right)_\Sigma. \quad (6.110)$$

Finalmente, substituímos (6.109) e (6.110) em (6.90) para obter uma equação diferencial que define a dependência temporal da métrica no interior da esfera, independentemente da forma do campo escalar geométrico,

$$2\ddot{F} F + \dot{F}^2 - 2 \frac{A'_\Sigma}{B_\Sigma} \dot{F} = 0. \quad (6.111)$$

Esta equação é idêntica à encontrada na teoria da relatividade geral [8], e todos os resultados obtidos na teoria Riemanniana podem também ser reencontrados no caso de uma esfera com geometria de Weyl integrável.

Assim, se os elementos geométricos (6.4)-(6.7) descrevem o interior de uma esfera colapsante radiante, com métrica exterior de Vaidya, e com condição inicial estática, a geometria dentro da esfera não poderá ser identificada por meio das observações que dependam da parte temporal da métrica ou dos valores das quantidades físicas sobre a superfície Σ . Por exemplo, o tempo de formação do horizonte, assim como a massa e o raio, não dependem da estrutura da configuração inicial estática do fluido perfeito, mas sim dos valores iniciais do raio e da massa da esfera, unicamente.

Se comparamos com a seção anterior, vemos que a presença de fluxo de calor permitiu impor uma condição inicial estática. Podemos pensar que, no caso de (6.4)-(6.7) serem válidas, a presença de um fluxo de calor $q(r, t)$ no interior da esfera de fluido perfeito permite relaxar o vínculo entre as partes temporais da métrica e do campo escalar geométrico.

Em outras palavras, uma equação para $F(T)$ surgida da condição de junção e da condição inicial estática, não está restringida pela equação (6.21) quando $q(r, t) \neq 0$.

Conclusões

A gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) é uma teoria escalar-tensorial onde o espaço-tempo está representado por uma geometria de Weyl integrável (descrita no Capítulo 1), mais geral que a geometria Riemanniana considerada pela Relatividade Geral (TRG). Não obstante, ela mantém a ideia básica da TRG de representar a interação gravitacional através de uma descrição geométrica do espaço e do tempo onde acontecem os fenômenos físicos. Cabe mencionar que as tentativas de axiomatização da teoria do espaço-tempo através de elementos fundamentais (raios de luz e partículas em queda livre) apontam a uma estrutura Weyliana, e não à convencional variedade Riemanniana da TRG [23].

Ao longo de nosso trabalho, vários tópicos importantes da teoria da gravitação foram abordados tomando como estrutura básica o espaço-tempo de Weyl integrável, que mostrou ser um modo natural e eficiente de geometrizar o campo escalar $\omega(x)$ de longo alcance dentro da teoria da gravitação [89].

No Capítulo 2 mostramos que a adoção de um formalismo Lagrangiano permite desenvolver a teoria da gravitação em WIST de uma forma simples e elegante, apresentando um mecanismo geral para o estudo de configurações onde outros campos da natureza interagem com a gravitação.

No Capítulo 3 deduzimos as equações de movimento dos cenários básicos (vazio, campo electromagnético, campo escalar externo, poeira, fluido perfeito). Ao estudar estas equações vimos que outra alternativa à TRG, a teoria de Dilaton, está incluída na teoria de WIST como um caso particular. Um dos principais resultados que caracteri-

zam a teoria da gravitação em WIST aparece quando a distribuição de matéria é dada por um fluido perfeito, pois encontramos que a dinâmica das linhas de fluxo do fluido é modificada devido à presença do campo escalar geométrico $\omega(x)$ não-constante. Este resultado pode ser estendido para outros meios materiais, constituindo um ponto crucial no estudo de sistemas dinâmicos e abrindo as portas a possíveis testes observacionais, pois implica uma diferença fundamental com a teoria padrão da Relatividade Geral. Isto é manifestado nos capítulos posteriores quando analisamos modelos dependentes do tempo (modelos cosmológicos e colapso estelar).

O Capítulo 4 foi dedicado ao estudo de um modelo cosmológico em WIST considerando que o universo é homogêneo e isotrópico e que o conteúdo material pode ser representado por um fluido perfeito. Para isso utilizamos a técnica de análise qualitativa de sistemas dinâmicos. Nesse capítulo vimos dois casos, um com potencial do campo escalar nulo e outro com potencial exponencial. Foram encontradas diversas famílias de soluções dependendo do valor do parâmetro λ (que basicamente é a constante de acoplamento que acompanha o campo escalar na Lagrangiana do vazio), do parâmetro γ da equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, e do parâmetro β do potencial $V(\omega) = e^{\beta\omega}$. Algumas soluções particulares do tipo potência surgem como soluções atratoras ou repulsoras (pontos críticos). Os raios invariantes dos diagramas de fase são curvas que representam as únicas soluções singulares do modelo cosmológico. Estas podem iniciar-se num estado singular de “big-bang”, ou finalizar contraindo a um estado singular ou de “big-crunch”. O resultado principal é a generalidade das soluções não-singulares, com regime de contração-expansão entre tipos idênticos ou diferentes de estados inicial e final. Uma característica importante destas soluções é o período inflacionário realizado independentemente do tipo de condições iniciais. A etapa inflacionária pode ter duração finita ou infinita, dependendo do valor de λ . Como era de se esperar pelo dito no parágrafo anterior, o comportamento cosmológico não-singular é devido à contribuição do campo escalar geométrico na dinâmica das partículas materiais.

No Capítulo 5 estudamos configurações estáticas esfericamente simétricas para três

casos diferentes (vazio, campo electromagnético e campo escalar externo). Foram encontradas soluções analíticas novas e gerais. Mostramos que a teoria da gravitação em WIST contém a teoria de Dilaton de maneira completa e natural. Um resultado importante é que a natureza puramente geométrica do campo escalar permite soluções com propriedades remarcáveis, como por exemplo, as configurações de vazio e com campo electromagnético que não apresentam singularidades nuas.

Como uma continuação natural da análise das soluções estáticas esféricas surgiu o estudo da teoria de colapso gravitacional no espaço-tempo de Weyl integrável, descrito no Capítulo 6. O colapso gravitacional em WIST foi analisado considerando configurações simples (simetria esférica, fluido perfeito, técnica de separação de variáveis). Para o caso de uma nebulosa de poeira encontramos uma família de soluções analíticas, tipo potência, com uma dependência espacial idêntica à apresentada pelas soluções estáticas esfericamente simétricas no vazio. Mais uma vez a presença do campo escalar modifica a dinâmica da matéria permitindo a expansão a partir de uma singularidade inicial, e não apenas o colapso com singularidade final como no caso Riemanniano. Consideramos também um colapso radiativo. Nesse caso, concluímos novamente que o campo escalar geométrico cumpre um papel significativo como portador de energia, desde o interior da esfera colapsante, até a superfície limite com o exterior. As condições de junção na superfície da estrela colapsante devem agora considerar as possíveis descontinuidades do campo escalar geométrico. Não obstante, no caso com fluxo de calor não-nulo, condição inicial estática e métrica exterior de Vaidya, demonstramos que, para um observador distante, é impossível distinguir a estrutura geométrica do espaço-tempo interior. Este resultado está em concordância com os trabalhos realizados na teoria Riemanniana [8].

No que se refere a testes observacionais, até o momento, nenhuma experiência ou observação desqualifica a validade da teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável. Os testes dentro do sistema solar, na atualidade, apontam como o bom candidato, ainda que não definitivo, o modelo padrão da TRG, que é um caso particular da teoria de Weyl quando a energia do campo escalar foi emitida dando lugar a uma solução

estacionária ou estática com campo escalar ω constante. Os regimes de intensos campos gravitacionais, possivelmente existentes em outras épocas ou domínios do espaço-tempo, ainda não possuem evidências observacionais que determinem o modelo físico adequado. Cabe destacar que é neste território onde a TRG apresenta vários problemas (como foi descrito na Introdução deste trabalho) e onde se faz necessário a busca de novas opções para a teoria da gravitação.

A existência de soluções cosmológicas não-singulares e inflacionárias, o desenvolvimento de modelos de estrelas colapsantes, e a obtenção de novas soluções estáticas esfericamente simétricas são os principais resultados surgidos ao longo de nosso trabalho. A partir deles concluímos que, desde o ponto de vista cosmológico, o espaço-tempo de Weyl integrável, devido a presença do campo escalar geométrico, possui a característica de modificar a dinâmica das soluções de modo a evitar o colapso do espaço-tempo a um ponto singular, impondo períodos inflacionários, independentemente das condições iniciais. O espaço-tempo de Weyl integrável oferece uma resposta ao problema de singularidade inicial presentes no modelo padrão da TRG.

A partir do estudo de modelos de colapso gravitacional, concluímos que não existe nenhum impedimento para o estudo do colapso cosmológico ou estelar dentro de um contexto de geometria Weyliana integrável. Os resultados existentes na TRG podem ser reobtidos em configurações que apresentam regiões do espaço-tempo com geometria de Weyl integrável. Não obstante, a presença do campo escalar pode conduzir a novos comportamentos ao compensar a força de atração gravitacional e permitir configurações com gravitação repulsiva, com a conseqüente expansão do meio material.

As soluções estáticas esféricas tem um papel importante como possíveis participantes da história de um sistema dinâmico. O fato de encontrarmos soluções novas e que algumas delas superam a desagradável presença de singularidades nuas, indica que a geometria de Weyl integrável pode ser uma boa opção para representar uma fase estática ou estacionária na evolução de configurações com simetria esférica.

O presente trabalho dá uma visão ampla das possibilidades de pesquisa na teoria escalar-tensorial e fornece abundante material para estudos subseqüentes. A seguir mencionaremos algumas linhas de investigação a serem desenvolvidas no futuro, e que foram motivadas pelo que apresentamos nesta tese.

Como continuação de nossa pesquisa sobre modelos cosmológicos, foram encontradas soluções analíticas não-singulares para o caso com potencial nulo [29], e no futuro próximo será realizada sua análise detalhada. Outras soluções analíticas com simetria arbitrária estão sendo estudadas considerando a presença de um campo eletromagnético cosmológico [90].

Por outro lado, devido a existência de uma formulação Lagrangiana da teoria da gravitação em WIST, é possível deduzir uma representação Hamiltoniana dos sistemas dinâmicos. A partir desta, podemos então realizar uma análise do comportamento caótico¹ [72] nas soluções cosmológica.

Em relação ao colapso gravitacional, através da incorporação de viscosidade, assimetrias, rotação, ou efeitos quânticos, poderão ser estudadas configurações mais realistas, com métricas mais gerais que as vistas até agora. Em alguns casos poderá surgir a participação das soluções estáticas encontradas como parte da evolução do sistema colapsante. Também pode ser investigado o colapso denominado auto-similar² [9]. Para esses estudos futuros poderão ser implementadas técnicas numéricas ou semi-analíticas.

Consideramos que a concepção de testes observacionais capazes de distinguir entre os contextos Weylianos, Riemannianos ou outros, é um dos pilares fundamentais no desenvolvimento desta teoria da gravitação. Assim, pensamos que no futuro devem ser procuradas quantidades que sejam comparáveis com a observação, por exemplo o cálculo do desvio cosmológico para o vermelho a partir de soluções analíticas, o cálculo dos

¹Caso o sistema possua dimensão maior que dois, há a possibilidade do surgimento de comportamento caótico que se reflete na grande sensibilidade à pequenas mudanças nas condições iniciais.

²O espaço-tempo é dito auto-similar caso possua um vetor de Killing homotético. Em consequência disso, pode ser mostrado que o sistema de equações diferenciais parciais são transformados num sistema de equações diferenciais ordinárias.

parâmetros observacionais (constante de Hubble, parâmetro de desaceleração, parâmetro de densidade) e a relação com a produção primordial dos elementos. É possível, também, comparar os dados obtidos para a luminosidade de estrelas com os valores teóricos decorrentes dos modelos com teoria de WIST.

Pelo exposto acima, concluímos que a teoria de WIST merece atenção e estudos mais detalhados, estando aberta a testes e modificações, pois é ainda um terreno pouco explorado. Não obstante, até o momento, nenhum argumento ponderável implica o abandono da estrutura geométrica de Weyl integrável como uma alternativa válida para o desenvolvimento da teoria da gravitação. As soluções obtidas indicam que é possível superar as dificuldades apresentadas pela TRG para descrever fenômenos físicos submetidos a campos gravitacionais muito intensos. Cabe ainda mencionar que esta teoria, por ser escalar-tensorial, implica o uso de uma linguagem comum a uma ampla comunidade de físicos que trabalham em outras teorias alternativas da TRG (teorias multidimensionais, cordas, Brans-Dicke, Kaluza-Klein, etc).

Apêndice A

Alguns cálculos intermediários

A.1 Equação para ω no Vácuo

Partindo da equação de Einstein generalizada para o vácuo em WIST

$$\hat{G}_{\mu\nu} - \lambda(\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\omega^\alpha\omega_\alpha) = 0, \quad (\text{A.1})$$

calculamos a divergência do tensor de Einstein Riemanniano

$$\hat{G}^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 \quad (\text{A.2})$$

ou seja,

$$\lambda \left(\omega^\mu{}_{||\nu} \omega^\nu + \omega^\mu \omega^\nu{}_{||\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}{}_{||\nu} \omega^\alpha \omega_\alpha - g^{\mu\nu} \omega^\alpha{}_{||\nu} \omega_\alpha \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Na configuração Riemanniana, a divergência do tensor métrico é sempre nulo, ou seja,

$$g^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Em WIST, o vetor de Weyl é o gradiente de um campo escalar então vale a seguinte igualdade

$$\omega_{\alpha||\nu} = \omega_{\nu||\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Desta equação e de (A.4) se deduz

$$g^{\mu\nu} \omega^\alpha{}_{||\nu} \omega_\alpha = \omega^\mu{}_{||\nu} \omega^\nu. \quad (\text{A.6})$$

Então, com (A.4) e (A.6), a equação (A.3) se reduz a

$$\lambda \left(\omega^\mu \omega^\nu{}_{||\nu} \right) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Esta equação é idêntica à equação de movimento do campo escalar geométrico que foi deduzida pelo princípio variacional no espaço-tempo vazio com a geometria de Weyl integrável.

A.2 Fluido Perfeito em WIST

A.2.1 Equação Dinâmica para a Densidade Específica de Energia

Consideremos, a seguir, um espaço-tempo de Weyl integrável com fluido perfeito. Segundo o visto no Capítulo 3, as equações de Einstein generalizadas podem ser escritas da seguinte forma

$$\hat{G}_{\mu\nu} = -(\tilde{\rho} V_\mu V_\nu - \tilde{p} h_{\mu\nu}) + \lambda(\omega_\mu \omega_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha) \quad (\text{A.8})$$

Com ajuda desta equação calculemos agora a divergência nula do tensor de Einstein no espaço-tempo Riemanniano associado

$$\begin{aligned} \hat{G}^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0 = & \\ & -\tilde{\rho}(V^\mu{}_{||\nu} V^\nu + V^\mu V^\nu{}_{||\nu}) - \tilde{p}{}_{||\nu} V^\mu V^\nu + \\ & \tilde{p} h^{\mu\nu}{}_{||\nu} + \tilde{p}{}_{||\nu} h^{\mu\nu} + \lambda(\omega^\mu{}_{||\nu} \omega^\nu + \omega^\mu \omega^\nu{}_{||\nu}) \\ & - \frac{\lambda}{2} \left(g^{\mu\nu}{}_{||\nu} \omega_\alpha \omega^\alpha + g^{\mu\nu} (2\omega^\alpha{}_{||\nu} \omega_\alpha) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Utilizaremos as definições de $\hat{\theta}$ e $h^{\mu\nu}$, e o fato de que a derivada covariante do tensor métrico é sempre nula na geometria Riemanniana associada

$$\hat{\theta} = V^\nu{}_{||\nu}, \quad (\text{A.10})$$

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - V^\mu V^\nu. \quad (\text{A.11})$$

$$g^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0, \quad (\text{A.12})$$

Necessitaremos também a equação (A.6) que reescrevemos a seguir,

$$g^{\mu\nu}\omega^\alpha{}_{||\nu}\omega_\alpha = \omega^\mu{}_{||\nu}\omega^\nu \quad (\text{A.13})$$

Com (A.10), (A.11) e (A.12), a equação (A.9) toma a forma seguinte

$$-(\tilde{\rho} + \tilde{p})(\dot{V}^\mu + V^\mu\hat{\theta}) - (\dot{\tilde{\rho}} + \dot{\tilde{p}})V^\mu + g^{\mu\nu}\tilde{p}_{||\nu} + \lambda\omega^\mu\hat{\omega} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Nesta equação, o ponto denota a derivada covariante Riemanniana na direção do campo de velocidades. Para uma função arbitrária f temos que $\dot{f} = f_{||\nu}V^\nu$.

Multiplicando (A.14) por V_μ obtemos

$$0 = -\lambda\dot{\omega}\hat{\omega} + \dot{\tilde{\rho}} + \hat{\theta}(\tilde{\rho} + \tilde{p}), \quad (\text{A.15})$$

onde V^μ é o campo de velocidades parametrizado pelo tempo próprio das partículas talque $V^\mu V_\mu = 1$.

Considerando a equação de movimento para o campo escalar (ver eq.(3.57))

$$\hat{\omega} = -\frac{1}{2\lambda}\tilde{\rho}, \quad (\text{A.16})$$

e a derivada de $\tilde{\rho}$

$$\dot{\tilde{\rho}} = \dot{\rho}e^{-\omega/2} - \frac{1}{2}\rho\dot{\omega}e^{-\omega/2}. \quad (\text{A.17})$$

e substituindo em (A.15) temos que

$$\dot{\rho} = -\hat{\theta}(\rho + p). \quad (\text{A.18})$$

Esta é a equação dinâmica para a densidade específica da energia do fluido perfeito. A conservação da energia do conteúdo material do espaço-tempo de Weyl integrável não depende da interação com o campo escalar geométrico.

A.2.2 Aceleração do Fluido Perfeito

Calculando $\hat{G}^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0$ a partir da equação de Einstein generalizada (A.8) obtemos a equação (A.14). Multiplicando (A.14) por $h_{\mu\alpha}$ obtemos

$$0 = \lambda \hat{\omega}(\omega_\alpha - \dot{\omega}V_\alpha) - (\tilde{\rho} + \tilde{p})\dot{V}_\alpha + h^\mu{}_\alpha \tilde{p}_{||\mu}. \quad (\text{A.19})$$

Com (A.16), esta equação toma a forma

$$0 = -\frac{1}{2}\tilde{\rho}(\omega^\mu - \dot{\omega}V^\mu) - (\tilde{\rho} + \tilde{p})\dot{V}_\mu + h^{\mu\alpha} \tilde{p}_{||\alpha}. \quad (\text{A.20})$$

Multiplicando novamente por $h_{\mu\nu}$ e reordenando, escrevemos finalmente a equação (3.66) para a aceleração Riemanniana $\hat{a}^\mu = \dot{V}^\mu$

$$\hat{a}^\mu = h^{\mu\nu} \left(\frac{p_{,\nu}}{\rho + p} - \frac{1}{2}\omega_\nu \right). \quad (\text{A.21})$$

A.2.3 Verificação da Isentropia

A conservação da entropia do fluido perfeito em nosso modelo pode-se verificar rapidamente se consideramos a equação de conservação da energia

$$T n ds = d\rho - \frac{\rho + p}{n} dn + \frac{5}{2}(\rho + p) dw. \quad (\text{A.22})$$

De (A.22) calcula-se a variação da entropia específica sobre uma linha de fluxo do fluido

$$\dot{s} = \frac{1}{Tn} \left(\dot{\rho} - \frac{\rho + p}{n} \dot{n} + \frac{5}{2}(\rho + p)\dot{w} \right). \quad (\text{A.23})$$

O ponto sobre uma variável denota a variação ao longo do campo de velocidades do fluido. Para uma função arbitrária f , $\dot{f} = f_{;\mu} V^\mu$.

Por outro lado, temos a equação de conservação da matéria no espaço-tempo de Weyl

$$(\tilde{n} V^\mu)_{;\mu} = 0, \quad (\text{A.24})$$

que em função da derivada covariante Riemanniana é

$$(\tilde{n} V^\mu)_{||\mu} - 2\tilde{n} V^\mu \omega_\mu = 0 \quad (\text{A.25})$$

O primeiro termo de (A.25) pode-se reescrever usando $\tilde{n} = e^{-\omega/2}n$ tal que

$$(\tilde{n} V^\mu)_{||\mu} = \dot{n}e^{-\omega/2} + \theta n e^{-\omega/2} - \frac{1}{2}\dot{\omega}n e^{-\omega/2}. \quad (\text{A.26})$$

Então, (A.25) toma a forma

$$\dot{n} + n\theta - \frac{5}{2}n\dot{\omega} = 0. \quad (\text{A.27})$$

Calculando \dot{n} de (A.27) e substituindo na equação (A.23) temos

$$\dot{s} = \frac{1}{Tn} \left(\dot{\rho} - \frac{\rho + p}{\theta} \right). \quad (\text{A.28})$$

Finalmente, usando a equação de conservação para ρ dada por (3.64) obtemos o resultado que confirma a isentropia do fluido perfeito no espaço-tempo de Weyl integrável, dada anteriormente na eq.(3.65),

$$\dot{s} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Apêndice B

Sistemas Dinâmicos

No presente apêndice daremos uma introdução à teoria de sistemas dinâmicos. Nossa intenção é mostrar ao leitor algumas das ferramentas de cálculo que foram utilizadas durante a elaboração desta tese. Mais precisamente, daremos uma resenha da técnica de análise qualitativa de sistemas dinâmicos. Esta técnica foi implementada no estudo das famílias de soluções cosmológicas desenvolvido no Capítulo 5. Será suficiente para nosso propósito apresentar à teoria bidimensional de sistemas dinâmicos autônomos, pois é desse tipo os sistemas que surgem em nossos modelos de universo. Uma abordagem mais ampla ou rigorosa sobre sistemas dinâmicos pode ser encontrada em numerosas publicações, entre as quais citamos as referências [4, 86, 91].

B.1 Sistema Dinâmico Autônomo

B.1.1 Definição Geral e Principais Teoremas

Definimos como *sistema dinâmico* de ordem n a um conjunto de n equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

As variáveis $x_i = x_i(t)$ são funções do parâmetro real t . As funções F_i , com $i = 1 \dots n$, são definidas contínuas e diferenciáveis num aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Quando as funções F_i não dependem explicitamente do parâmetro t o sistema é denominado de *autônomo*.

Dentro da teoria dos sistemas dinâmicos autônomos podemos mencionar dois teoremas básicos:

Teorema I: Sobre a unicidade da solução sendo dada uma condição inicial.

Dado um ponto $P_0 \equiv (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ existe um, e somente um, conjunto $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ de soluções do sistema dinâmico (B.1), tal que satisfaz o seguinte conjunto de condições iniciais $\{x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0\}$.

Teorema II: Sobre a continuidade das soluções com relação às condições iniciais.

Sejam $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ e $\{\bar{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n(t)\}$ duas soluções do sistema (B.1), com condições iniciais $\{x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0\}$ e $\{\bar{x}_1(t_0) = \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n(t_0) = \bar{x}_n^0\}$, respectivamente, para $t_0 \in (t_1, t_2)$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|\bar{x}_i^0 - x_i^0| < \delta$, $|\bar{x}_i(t) - x_i(t)| < \epsilon$, com $t \in (t_1, t_2)$

B.1.2 Sistemas Bidimensionais

Definição

Consideremos a seguir $n = 2$, ou seja, um sistema dinâmico *bidimensional* que pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

com $x = x(t)$ e $y = y(t)$. O plano Euclidiano determinado pelas coordenadas cartesianas (x, y) recebe o nome de *plano de fase*. Qualquer conjunto de soluções $\{x(t), y(t)\}$ do sistema (B.2) descreve uma *trajetória* ou *curva integral* no plano de fase. A família de curvas que representam as soluções do sistema recebe o nome de *diagrama de fase*.

Um exemplo simples onde utiliza-se um sistema deste tipo é a representação de um fluido estacionário, com as funções F e G sendo identificadas como os campos de velocidades das partículas do fluido.

Pontos Críticos.

Definição e Comportamento das Curvas na Vizinhança

Por analogia com a hidrodinâmica, os pontos onde F e G são nulas se denominam pontos de estagnação ou de equilíbrio, ou *pontos críticos*. Todo ponto crítico é uma solução trivial do sistema para o qual a curva do diagrama de fase se reduz a um simples ponto.

Para a construção dos diagramas de fase é indispensável o conhecimento dos pontos críticos e de suas naturezas topológicas. Para isso, estudase a configuração das curvas em sua vizinhança.

Dado um ponto crítico (x_0, y_0) , por conveniência, podemos realizar uma translação e recolocar-lo na origem do plano de fase. Ao redor do ponto sempre é possível fazer uma expansão em serie de Taylor das funções analíticas F e G , tal que o sistema tome a

seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x} = a x + b y + O_F(x, y) \\ \dot{y} = c x + d y + O_G(x, y), \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0, & b &= \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0 \\ c &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)_0, & d &= \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)_0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e $O_F(x, y)$ $O_G(x, y)$ são termos de ordem superior em x e y .

Para a análise do comportamento na vizinhança do ponto crítico (deslocado para a origem) é suficiente considerar a parte linear de (B.3), ou seja

$$\begin{cases} \dot{x} = a x + b y \\ \dot{y} = c x + d y, \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Este sistema linear contém toda a informação relativa às curvas integrais na vizinhança do ponto crítico, e tem solução não trivial quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo,

$$\Omega = a d - b c \neq 0. \quad (\text{B.6})$$

Os casos com determinante nulo, correspondente aos chamados *pontos múltiplos de equilíbrio*, não serão considerados neste apêndice. O traço da matriz dos coeficientes é definido como

$$I = a + d. \quad (\text{B.7})$$

Devido ao fato da natureza topológica do ponto crítico ser determinada pelos autovalores do sistema (B.5), resulta conveniente trabalhar com o sistema expresso numa forma mais simples, denominada forma canônica de Jordan. Isto é sempre possível mediante uma transformação linear no plano de fase. Essa transformação satisfaz ao seguinte teorema

Teorema III: Dado o sistema (B.5) com (B.6) e dado (B.7), então existe uma trans-

formação linear real não-degenerada ($AD - BC \neq 0$),

$$\dot{X} = Ax + By, \quad \dot{Y} = Cx + Dy, \quad (\text{B.8})$$

tal que o sistema toma a forma

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X \\ \dot{Y} = \lambda_2 Y \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

com $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, se $\Omega < 0$.

$$(ii) \quad \begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X \\ \dot{Y} = \lambda_2 Y \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

com $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se $0 < 4\Omega < I^2$.

$$(iii) \quad \begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X + \mu Y \\ \dot{Y} = \lambda_2 Y \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

com $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, se $0 < 4\Omega = I^2$ e $b^2 + c^2 > 0$.

$$(iv) \quad \begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X \\ \dot{Y} = \lambda_2 Y \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

com $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, se $0 < 4\Omega = I^2$ e $b^2 + c^2 = 0$.

$$(v) \quad \begin{cases} \dot{X} = \lambda_1 X - \mu Y \\ \dot{Y} = \mu X + \lambda_2 Y \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

com $\lambda_1 \mu \neq 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, se $0 < I^2 < 4\Omega$.

$$(vi) \quad \begin{cases} \dot{X} = -\mu Y \\ \dot{Y} = \mu X \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

com $\mu \neq 0$, se $0 = I^2 < 4\Omega$.

Assim, em função dos autovalores obtemos diferentes tipos de soluções.

1) Se os autovalores λ_1, λ_2 são reais e distintos e $\mu = 0$, as soluções vem a ser

$$\begin{aligned} X &= X_0 e^{\lambda_1 t} \\ Y &= Y_0 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \tag{B.15}$$

onde X_0 e Y_0 são constantes de integração. Estas soluções correspondem a um ponto sela ou a um nó de duas tangentes quando satisfazem o sistema (i) ou o sistema (ii), respectivamente. Ver Figs. (B.1), (B.2) e (B.3).

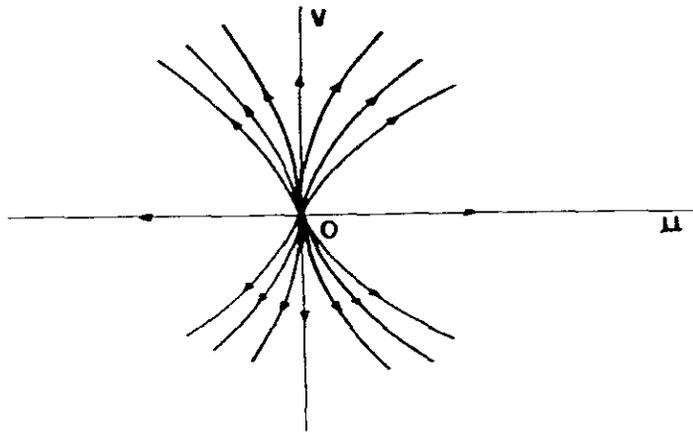


Figura B.1: Nó de duas tangentes instável, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

2) Se os autovalores λ_1, λ_2 são reais e iguais, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$, $0 < 4\Omega = I^2$,

2-i) com $\mu = 0$, as soluções do sistema (iv) identifica-se com um nó estelar (ver Figs. (B.4) e (B.5)) da forma

$$\begin{aligned} X &= X_0 e^{\lambda_0 t} \\ Y &= Y_0 e^{\lambda_0 t}, \end{aligned} \tag{B.16}$$

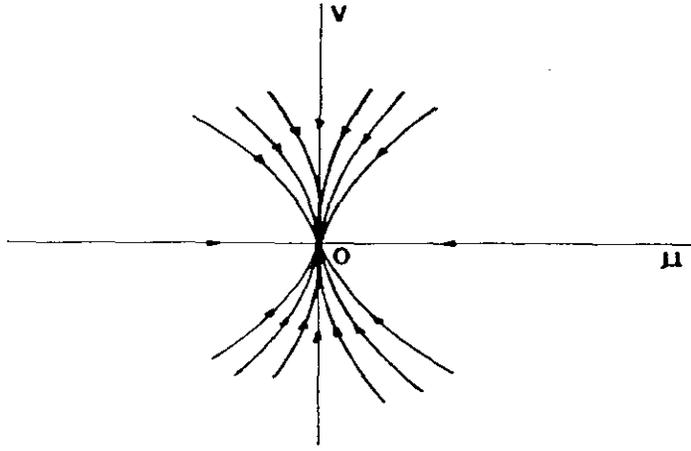


Figura B.2: Nó de duas tangentes estável, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

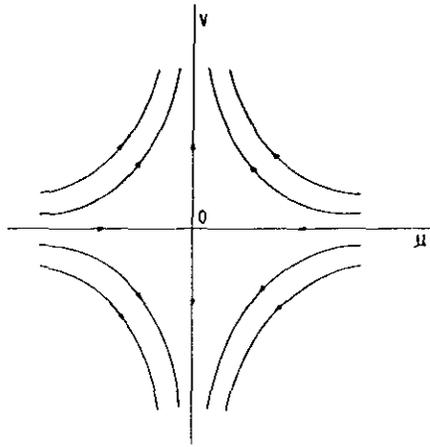


Figura B.3: Ponto de sela, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

2-ii) com $\mu \neq 0$, $b^2 + c^2 > 0$, as soluções do sistema (iii) tem a forma

$$\begin{aligned} X &= (X_0 + Y_0 t)e^{\lambda_0 t} \\ Y &= Y_0 e^{\lambda_0 t}, \end{aligned} \tag{B.17}$$

e representam um nó de uma tangente. Ver Figs. (B.6) e (B.7).

3) Se os autovalores λ_1, λ_2 são iguais e complexos temos duas possibilidades,

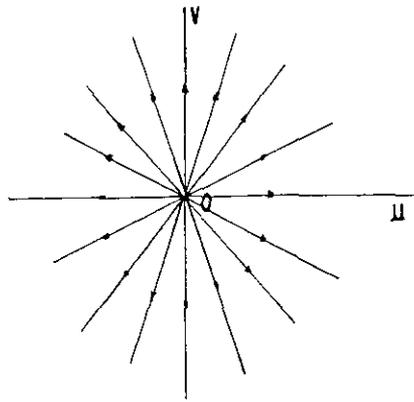


Figura B.4: Nó estelar instável, $\lambda_0 > 0$

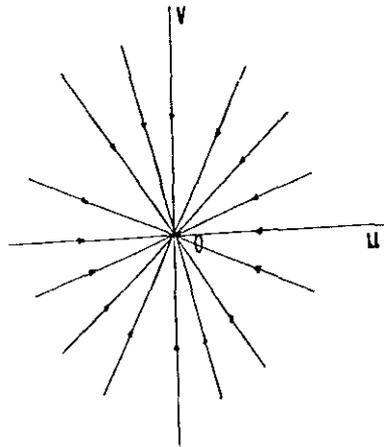


Figura B.5: Nó estelar estável, $\lambda_0 < 0$

3-i) $0 < I^2 < 4\Omega$, sempre é possível escrever o sistema dinâmico (v) como

$$\dot{Z} = (Z_R + iZ_I) Z, \quad (\text{B.18})$$

onde Z_R e Z_I são quantidades reais tais que $\lambda_0 = Z_R + iZ_I$ e $Z = X + iY$. Então, em coordenadas polares (r, θ) temos a solução

$$Z = R e^{i\theta} \quad (\text{B.19})$$

com $R = R_0 e^{Z_R(t-t_0)}$ e $\theta = Z_I(t-t_0)$, sendo R_0 e t_0 constantes de integração reais. Esta

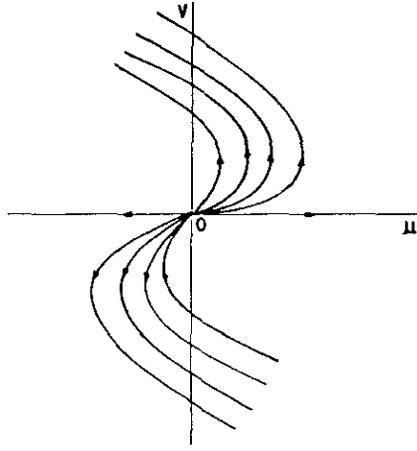


Figura B.6: Nó de uma tangente instável, $\lambda_0 > 0$

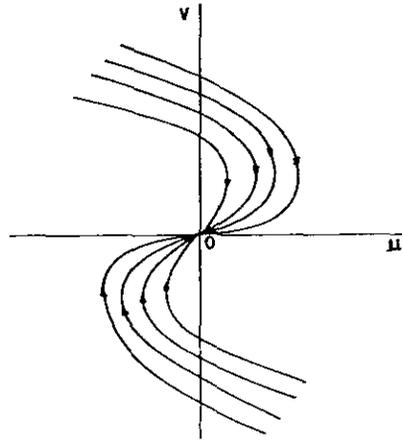


Figura B.7: Nó de uma tangente estável, $\lambda_0 < 0$

solução representa um foco, estável se $\theta < 0$ e instável se $\theta > 0$. O sinal de Z_I determina unicamente o sentido de giro, $Z_I > 0$ indica o sentido anti-horário, $Z_I < 0$ indica o sentido horário. Ver Figs. (B.8) e (B.9).

3-ii) $0 = I^2 < 4\Omega$, os autovalores são imaginários puros e o sistema de equações (vi) toma a forma

$$\begin{cases} \dot{X} = -Z_I Y \\ \dot{Y} = Z_I X. \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

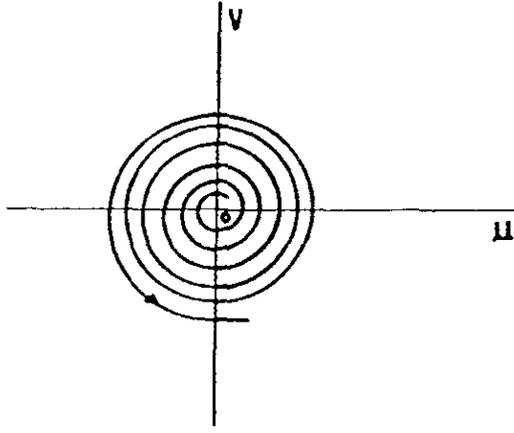


Figura B.8: Foco instável com $Z_I > 0$, $\theta > 0$

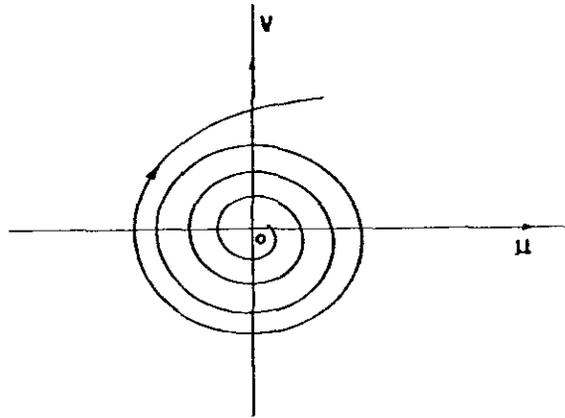


Figura B.9: Foco instável com $Z_I < 0$, $\theta > 0$

A integração conduz a uma família de circunferências centradas no ponto crítico

$$X^2 + Y^2 = R_0^2, \quad (\text{B.21})$$

onde R_0 é uma constante real. Este tipo de solução determina um ponto do tipo centro. O sinal de Z_I continua indicando o sentido de rotação das curvas. Ver fig. (B.10).

Para conveniência do leitor daremos a classificação dos pontos críticos em forma de tabela. Dado o sistema (B.5) com (B.6) e o traço definido por (B.7) temos especificadas as seguintes clases de pontos críticos isolados

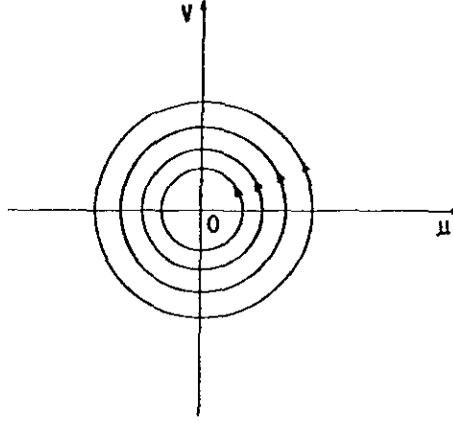


Figura B.10: Centro com $Z_I > 0$

centro	$0 = I^2 < 4\Omega$	$\dot{X} = -\mu Y, \dot{Y} = \mu X, \mu \neq 0$
foco	$0 < I^2 < 4\Omega$	$\dot{X} = \lambda_0 X - \mu Y, \dot{Y} = \mu X + \lambda_0 Y, \lambda_0 \mu \neq 0$
nó estelar	$0 < I^2 = 4\Omega, b^2 + c^2 = 0$	$\dot{X} = \lambda_0 X, \dot{Y} = \lambda_0 Y, \lambda_0 \neq 0$
nó de uma tang.	$0 < I^2 = 4\Omega, b^2 + c^2 > 0$	$\dot{X} = \lambda_0 X + \lambda_0 Y, \dot{Y} = \lambda_0 Y, \lambda_0 \neq 0$
nó de duas tang.	$0 < 4\Omega < I^2$	$\dot{X} = \lambda_1 X, \dot{Y} = \lambda_2 Y, \lambda_1 \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$
ponto sela	$4\Omega < 0 (\leq I^2)$	$\dot{X} = \lambda_1 X, \dot{Y} = \lambda_2 Y, \lambda_1 \lambda_2 < 0$

Tabela B.1: Classificação da natureza topológica dos pontos críticos

B.1.3 Aplicação

Potencial Exponencial

No caso de considerar um potencial exponencial (ver Seção 4 do Capítulo 5)

$$V(\omega) = V_0 e^{\beta\omega}, \quad (\text{B.22})$$

com V_0 e β constantes arbitrárias, as equações de movimento (4.7) de nosso modelo cosmológico em WIST podem ser levadas à forma de um sistema dinâmico homogêneo bidimensional. Introduzindo as variáveis η , α e Δ dadas por

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{V} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\text{B.23})$$

$$\alpha = \frac{\alpha'}{a}, \quad \Delta = \omega', \quad (\text{B.24})$$

o sistema dinâmico escreve-se como em (4.31). Lembremos que a linha denota a derivação com respeito a η .

A seguir, descreveremos de forma breve a análise qualitativa na região finita do plano de fase do sistema. Teremos em conta unicamente os valores positivos de λ , pois é com eles que aparecerão as novidades interessantes da teoria. Os resultados obtidos nesta seção são os utilizados no Capítulo 5.

Num primeiro passo calculamos os pontos críticos do sistema. Escrendo $\alpha' = \Delta' = 0$ em (4.31) e resolvendo para (α, Δ) obtemos que os pontos de equilíbrio são os quatro pontos dados nas equações (4.33)-(4.36).

Para estudar a existência de raios invariantes reescrevemos (4.31) com $\Delta = k\alpha$ e tentamos resolver para k . O resultado implica um vínculo entre os parâmetros da teoria, nesse caso não é considerada como uma solução física. Em consequência, os diagramas de fase do modelo com potencial exponencial não apresentam raios invariantes.

Para estudar o comportamento das curvas na vizinhança dos pontos críticos trabalharemos com o sistema linearizado. Cada equação de (4.31) é expandida ao redor do ponto crítico e leva-se em conta apenas os termos de primeira ordem. Assim, nos pontos P_1 e P_2 temos

$$\begin{cases} \alpha' = \mp \frac{1}{2} \frac{(\beta^2 + 6\gamma\lambda)}{\sqrt{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}} \alpha \mp \frac{1}{2} \frac{\beta\lambda(\gamma-1)}{\sqrt{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}} \Delta \\ \Delta' = \mp 3 \frac{(\beta+1)}{\sqrt{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}} \alpha \mp \frac{1}{2} \frac{(2\beta^2 + 6\lambda + \beta)}{\sqrt{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}} \Delta, \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

e para P_3 e P_4

$$\begin{cases} \alpha' = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\gamma(\beta+1)}{\sqrt{1+2\beta-6\gamma\lambda(2-\gamma)}} \alpha \pm \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{(\beta(2\beta+1)+6\gamma\lambda(2-\gamma))}{\sqrt{1+2\beta-6\gamma\lambda(2-\gamma)}} \Delta \\ \Delta' = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{(1+2\beta-6\gamma\lambda)}{\sqrt{1+2\beta-6\gamma\lambda(2-\gamma)}} \alpha \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{(2\beta+1)(\gamma-1)}{\sqrt{1+2\beta-6\gamma\lambda(2-\gamma)}} \Delta. \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

O sinal superior em cada equação corresponde ao primeiro dos pontos críticos do par mencionado.

Esses sistemas de equações são do tipo apresentado em (B.5). O determinante da

matriz dos coeficientes é distinto de zero

$$\Omega_{1,2} = -\Omega_{3,4} = \frac{2\beta^2 + \beta + 6\gamma\lambda}{4\lambda}. \quad (\text{B.27})$$

e os traços são dados por

$$I_{1,2} = \mp \frac{3\beta^2\beta + 6\lambda(\gamma + 1)}{2\sqrt{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}}, \quad (\text{B.28})$$

$$I_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{(1 + \beta(2 - \gamma))}{\sqrt{1 + 2\beta - 6\gamma\lambda(2 - \gamma)}}. \quad (\text{B.29})$$

Os pares de índices fazem referência ao par de pontos críticos ao redor do qual foi linearizado o sistema. Nas equações para os traços, o sinal superior do lado direito corresponde ao primer sub-índice do lado esquerdo, o sinal inferior ao segundo sub-índice.

Para classificar os pontos críticos calculamos inicialmente I^2 e 4Ω . Vemos que I^2 é sempre positivo não nulo, em conseqüência é descartada a possibilidade de um ponto tipo centro. Os determinantes $\Omega_{1,2}$, $\Omega_{3,4}$ são de igual valor absoluto e de sinal contrário, o que indica que quando um par de pontos for um par de nós ou de focos, o outro par será de pontos selas. Denominamos como λ_{min} o valor de λ para o qual o determinante muda de sinal,

$$\lambda_{min} = -\frac{1}{3} \frac{\beta(\beta + 1/2)}{\gamma} \quad (\text{B.30})$$

e vemos que λ_{min} é positivo unicamente no intervalo $-1/2 < \beta < 0$.

Escrevendo o determinante em função de λ_{min}

$$\Omega_{1,2} = \frac{3\gamma}{2\lambda} (\lambda - \lambda_{min}) \quad (\text{B.31})$$

vemos que se $\lambda > \lambda_{min}$ os pontos P_1 e P_2 são nós ou focos, enquanto que P_3 e P_4 são pontos selas, o qual é sempre válido se $\beta < -1/2$ ou $\beta > 0$, pois estamos trabalhando com $\lambda > 0$. O caso contrário, $P_{1,2}$ pontos sela e $P_{3,4}$ nós, se da unicamente quando $\beta \in (-1/2, 0)$ e $\lambda < \lambda_{min}$.

Os casos de nós estelares e nós de uma tangente determinam um vínculo estricito entre

os parâmetros da teoria, por esta razão não serão considerados como casos físicos.

Para distinguir entre foco e nó de duas tangentes calculamos

$$4\Omega - I^2 = -\frac{1}{4} \frac{[6\lambda(\gamma - 1) + \beta(\beta + 1)]^2}{\lambda(\beta^2 + 6\lambda)}. \quad (\text{B.32})$$

Vemos facilmente que $4\Omega - I^2 \leq 0$, sendo $4\Omega - I^2 = 0$ unicamente quando $\lambda = \lambda_*$ com

$$\lambda_* = -\frac{\beta(\beta + 1)}{6(\gamma - 1)}. \quad (\text{B.33})$$

Em conclusão, para valores positivos de λ , no caso de não ser pontos selas, os pontos são nós de duas tangentes e nunca são focos.

B.2 Sistemas Bidimensional Homogêneos

B.2.1 Introdução Teórica

Definição

O sistema dinâmico autônomo (B.2) é *homogêneo de ordem m* se as funções F e G são funções homogêneas de ordem m nas variáveis x e y , tal que

$$\begin{aligned} F(\alpha x, \alpha y) &= \alpha^m F(x, y) \\ G(\alpha x, \alpha y) &= \alpha^m G(x, y), \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

onde α é uma constante arbitrária.

Coordenadas Polares

Para estudar este sistema homogêneo é muito conveniente trabalhar nas coordenadas polares (r, θ)

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

nas quais o sistema toma a forma

$$\begin{cases} \dot{r} = r^m Z(\theta) \\ \dot{\theta} = r^{m-1} N(\theta), \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

onde as funções Z e N são dadas por

$$Z(\theta) = G(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta + F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \cos \theta, \quad (\text{B.37})$$

$$N(\theta) = G(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \cos \theta - F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta. \quad (\text{B.38})$$

Como já vimos, um ponto crítico isolado é aquele ponto de equilíbrio para o qual as funções F e G são nulas simultaneamente. A partir desta definição se pode demonstrar que $Z^2(\theta) + N^2(\theta) > 0$, para todo ponto da vizinhança do ponto crítico.

Raio Invariante

Um sistema homogêneo tem a característica fundamental de apresentar um tipo de solução denominada *raio invariante*. O raio invariante é uma linha reta, solução do sistema dinâmico, que passa pelo ponto crítico O . A partir de (B.36) é fácil de deduzir que a função $N(\theta)$ é identicamente nula sobre o raio invariante. Se o ponto crítico isolado O é um centro ou um foco, $N(\theta)$ não apresentará raízes reais.

Comportamento das Curvas

Uma vez conhecidos os raios invariantes, pode ser estudado o comportamento das curvas integrais em suas vizinhanças, e perto do ponto crítico. Para isso, denominamos com θ_0 o ângulo que forma o raio invariante com a abscissa, ou seja, θ_0 é um zero de ordem n de $N(\theta)$. Assim, expandimos as funções $Z(\theta)$ e $N(\theta)$ na variável θ ao redor do valor θ_0 , tal que

$$Z(\theta) = Z(\theta_0)[1 + s_Z(\theta - \theta_0)] \quad (\text{B.39})$$

$$N(\theta) = \frac{1}{n!}N^{(n)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^n [1 + s_N(\theta - \theta_0)]. \quad (\text{B.40})$$

Devido a que perto do ponto crítico $Z^2(\theta) + N^2(\theta) > 0$, podemos assegurar que $Z(\theta_0) \neq 0$.

As constantes s_Z e s_N são dadas por

$$s_Z = \frac{1}{Z(\theta_0)} \left(\frac{dA}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} \quad (\text{B.41})$$

e

$$s_N = \frac{1}{n+1} \frac{N^{(n+1)}(\theta_0)}{N^{(n)}(\theta_0)}, \quad (\text{B.42})$$

onde $N^{(n)}(\theta_0)$ denota a derivada n -ésima com respeito a θ da função $N(\theta)$, avaliada no valor $\theta = \theta_0$.

Com as expansões (B.39) e (B.40) é possível estudar o valor do ângulo entre a tangente a uma curva integral e o raio invariante num ponto perto de O . Isto permite determinar a configuração do campo de velocidades que define o sistema dinâmico. A partir de campo de velocidades pode ser estudado e classificado o comportamento das curvas [4, 86, 91]. A seguir, simplesmente mostraremos a classificação do comportamento das trajetórias numa vizinhança do raio invariante, perto do ponto crítico.

1) Tipo I: n é ímpar e $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) > 0$. Ver Fig. (B.11).

2) Tipo II: n é ímpar e $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) \leq 0$

2-i) $n \geq 3$. Ver Fig. (B.12).

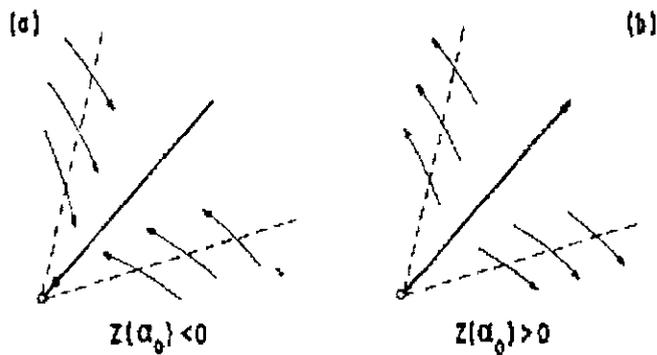


Figura B.11: Tipo I, $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) > 0$

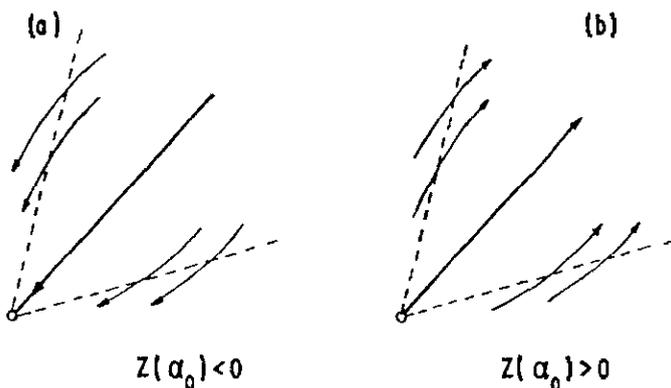


Figura B.12: Tipo II com $n \geq 0$ ou com $n = 1$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0$

2-ii) $n = 1$

2-ii-a) $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) < 0$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0$. Ver Fig. (B.12).

2-ii-b) $Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) < 0$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) < 0$ Ver Fig. (B.13).

2-ii-c) $Z(\theta_0) + N^{(1)}(\theta_0) = 0$

Definindo o parâmetro a_l como o primeiro coeficiente não nulo da expressão

$$\begin{aligned}
 N^2(\theta) + Z^2(\theta) + Z(\theta)N^{(1)}(\theta) - Z^{(1)}(\theta)N(\theta) &= a_0 + a_1(\theta - \theta_0) \\
 + a_2(\theta - \theta_0)^2 + \dots + a_l(\theta - \theta_0)^l + [(\theta - \theta_0)^{l+1}], & \quad (B.43)
 \end{aligned}$$

onde $N(\theta)$ e $Z(\theta)$ são expandidas em série de Taylor ao redor θ_0 , temos a seguinte sub-classificação

- 2-ii-c1) l par, $a_l > 0$ Ver Fig. (B.14b).
- 2-ii-c2) l par, $a_l < 0$ Ver Fig. (B.14a).
- 2-ii-c3) l ímpar, $a_l > 0$ Ver Fig. (B.14d).
- 2-ii-c4) l ímpar, $a_l < 0$ Ver Fig. (B.14c).

3) Tipo III: n é par e ≥ 2 . Ver Fig. (B.15).

Por último mencionaremos a classificação das configurações das trajetórias dentro de setores do plano delimitados por dois raios invariantes isolados:

- 1) Setor elítico. Fig. (B.16a).
- 2) Setor hiperbólico. Fig. (B.16b).
- 3) Setor parabólico. Fig. (B.16c).

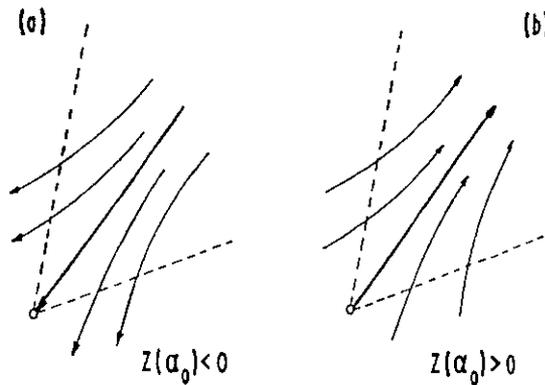


Figura B.13: Tipo II com $n = 1$ e $Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) < 0$

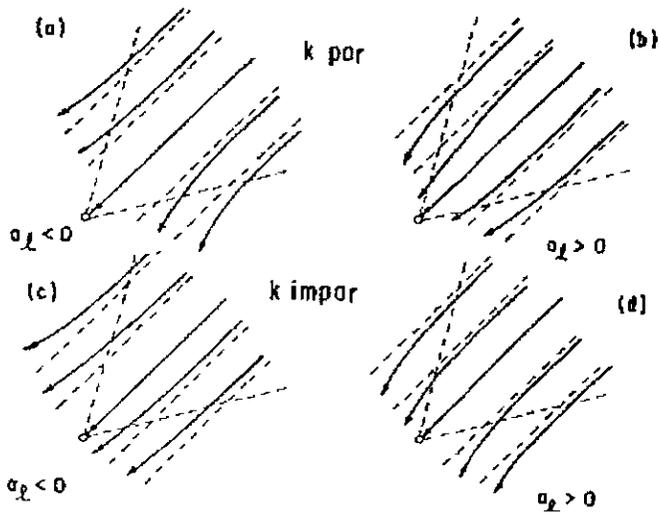


Figura B.14: Tipo II com $n = 1$ e $Z(\theta_0) + N^{(1)}(\theta_0) = 0$

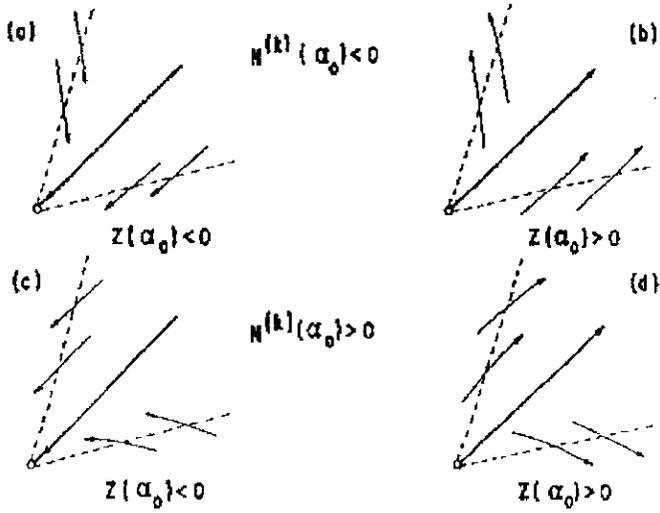


Figura B.15: Tipo III, n par e $n \geq 2$

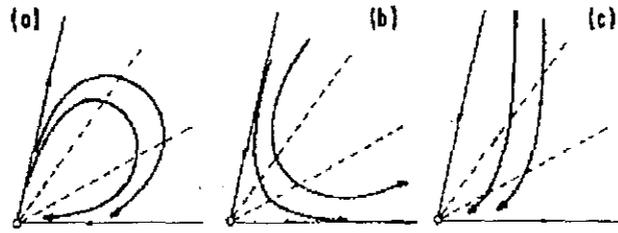


Figura B.16: Trajetórias entre raios invariantes

Para nosso objetivo consideramos suficiente apresentar a classificação dos comportamentos das curvas integrais, sem dar a correspondente demonstração. O leitor pode remitirse á literatura adequada, como por exemplo [4, 86, 91], se deseja interiorisarse nos cálculos intermediários que levam a istos resultados.

B.2.2 Aplicação

A seguir, utilizaremos a técnica de análise introduzida até aqui para estudar o sistema dinâmico homogêneo que surge do modelo cosmológico apresentado no Capítulo 5. Lembremos que o modelo representa um universo homogêneo e isotrópico, com fluido perfeito e equação de estado (4.10). Veremos que o comportamento das soluções integrais será fortemente dependente dos valores dos parâmetros da teoria. Neste exemplo consideraremos unicamente os valores positivos de λ por ser aqueles que aportarão resultados novos.

Potencial $V(\omega)$ nulo

Para o caso com *potencial nulo*, $V(\omega) = 0$, o sistema dinâmico bidimensional resultante é expresso por (4.13), que em coordenadas polares se escreve da forma (4.18) com

$$Z(\theta) = -\frac{1}{4}(2-\gamma)(\lambda-6)\cos^3\theta - \frac{1}{4}\text{sen}\theta - \frac{1}{4}(12-\lambda(2-\gamma))\cos\theta + \frac{1}{4}\frac{(\lambda-6)}{\lambda}\text{sen}\theta\cos^2\theta, \quad (\text{B.44})$$

$$N(\theta) = \frac{1}{4}\frac{(\lambda-6)}{\lambda}\cos^3\theta - \frac{\lambda}{4}(2-\gamma)\text{sen}\theta - \frac{1}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}(2-\gamma)(\lambda-6)\text{sen}\theta\cos^2\theta. \quad (\text{B.45})$$

Uma vez calculados os raios invariantes, ou seja tendo conhecidas as raices θ_0 de $N(\theta)$, calculamos as expansões das funções $Z(\theta)$ e $N(\theta)$ ao redor de $\theta = \theta_0$. Neste caso existe um único raio invariante dado por $\theta_0 = -\arctan(\lambda^{-1}/(2-\gamma))$, e as series de Taylor escrevem-se como

$$Z(\theta) = \frac{1}{4}\frac{6\gamma(\gamma-2)+1}{\sqrt{1+4(1-\gamma)+\gamma^2}} + \frac{1}{2}\frac{\lambda(\gamma-2)+6(1-\gamma)}{\sqrt{1+4(1-\gamma)+\gamma^2}}(\theta-\theta_0) + O[(\theta-\theta_0)^2], \quad (\text{B.46})$$

$$N(\theta) = -\frac{1}{4}\frac{24\lambda(1-\gamma)+6\gamma^2\lambda+1}{\sqrt{1+4(1-\gamma)+\gamma^2}}(\theta-\theta_0) + O[(\theta-\theta_0)^2]. \quad (\text{B.47})$$

É imediato observar que θ_0 é um zero de $N(\theta)$ de primeira ordem, ou seja, $n = 1$ em (B.39) e (B.40). Em conseqüência, o comportamento classificado como tipo III já fica descartado.

Com os coeficientes das expansões calculamos

$$Z(\theta_0)N^{(n)}(\theta_0) = -\frac{1}{16}\frac{(6\gamma\lambda(\gamma-2)+1)(24\lambda(1-\gamma)+6\gamma^2\lambda+1)}{1+\lambda^2(4(1-\gamma)+\gamma^2)}, \quad (\text{B.48})$$

o qual é nulo quando $\lambda = \frac{1}{6}\frac{1}{\gamma(2-\gamma)}$ ou $\lambda = -\frac{1}{6(2-\gamma)^2}$. De entre estas duas raices, o último valor não será tido em conta pois é um valor negativo de λ , enquanto que a primeira raiz, sempre positiva, é denominada como

$$\lambda_{cr} = \frac{1}{6}\frac{1}{\gamma(2-\gamma)} \quad (\text{B.49})$$

Um simples cálculo mostra que a derivada de (B.48) com respecto a λ avaliada em λ_{cr} é sempre positiva, $\left(\frac{\partial Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda_{cr}} = 27\gamma^2 \frac{2-\gamma}{36\gamma^2+1}$, então temos que

i) $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) > 0 \equiv \lambda > \lambda_{cr}$

ii) $Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) \leq 0 \equiv \lambda < \lambda_{cr}$.

Com este resultado já é possível distinguir entre o comportamento das soluções tipo I e tipo II tal que

i) tipo I quando $\lambda > \lambda_{cr}$

ii) tipo II quando $\lambda < \lambda_{cr}$.

Para a subclassificação dentro do tipo II calculamos

$$Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) = \frac{3\lambda(\gamma-2)(6\gamma\lambda(\gamma-2)+1)}{4(4\lambda^2(1-\gamma) + \lambda^2\gamma^2 + 1)}, \quad (\text{B.50})$$

Esta quantidade anula-se quando $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{6\gamma(2-\gamma)}\lambda_{cr}$, e é positiva unicamente se $\lambda > \lambda_{cr}$. Assim, com $\lambda > 0$, temos que dentro do tipo II existe uma única possibilidade pois

$$\lambda < \lambda_{cr} \equiv Z^2(\theta_0) + Z(\theta_0)N^{(1)}(\theta_0) < 0,$$

e o comportamento das curvas está representado na Fig A.16 a e b.

Os casos com $Z(\theta_0) + N^{(1)}(\theta_0) = 0$ também são descartados, pois

$$Z(\theta_0) + N^{(1)}(\theta_0) = \frac{3\lambda(\gamma-2)}{\sqrt{4\lambda^2(1-\gamma) + \lambda^2\gamma^2 + 1}} \quad (\text{B.51})$$

toma valor nulo unicamente quando $\lambda = 0$ ou $\gamma = 2$.

B.3 Análise do Sistema Dinâmico no Infinito

B.3.1 Introdução Teórica

Alem do estudo dos pontos críticos e raios invariantes na região finita, uma análise completa do diagrama de fase de um sistema dinâmico autônomo e homogêneo deve incluir o

estudo do comportamento das curvas integrais no infinito. O método aplicado para essa análise no caso bidimensional se denomina *compactificação*. O primeiro passo é o *mapeamento de Poincaré*. Este mapeamento consiste na projeção do plano de fase $\pi \equiv (x, y)$ sobre um dos hemisférios da esfera $S_2 \subset (u, v, z)$ dada por

$$u^2 + v^2 + z^2 = 1. \tag{B.52}$$

S_2 é tangente ao plano de fase π , ver Fig. (B.17). Cada ponto P do plano se corresponde com um ponto P' da esfera. P' é o ponto de interseção da esfera com a reta que une P com o centro de S_2 ; os pontos no infinito do plano se correspondem com os pontos no equador da esfera.

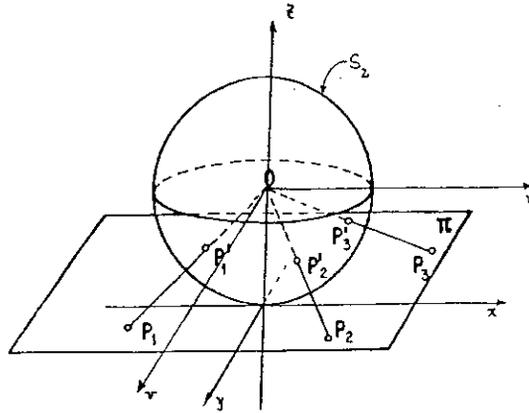


Figura B.17: Transformação de Poincaré

Demonstre-se que esta transformação, denominada *de Poincaré*, pode ser representada pelas seguintes equações [91]

$$x = \frac{u}{z}, \quad y = \frac{v}{z}; \quad u^2 + v^2 + z^2 = 1, \tag{B.53}$$

e que o sistema dinâmico pode ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = F\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) = \frac{1}{z} \dot{u} - \frac{u^2}{z} \dot{z} \\ \dot{y} = G\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) = \frac{1}{z} \dot{v} - \frac{v^2}{z} \dot{z} \end{cases} \quad (\text{B.54})$$

Se o sistema é homogêneo de grau m então,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) &= \frac{1^m}{z} F^*(u, v) \\ G\left(\frac{u}{z}, \frac{v}{z}\right) &= \frac{1^m}{z} G^*(u, v) \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Como estamos interessados na análise das regiões perto do infinito do plano (x, y) , nos referiremos a os pontos da esfera na vizinhança da linha do equador e estudaremos suas projeções nos planos tangentes à S_2 , com ponto de tangência no equador. A análise envolverá uma serie de transformações das variáveis, mas demonstra-se que elas não afetam a natureza dos pontos críticos nem o comportamento qualitativo das soluções.

Denominaremos como P a um ponto tendendo ao infinito do plano de fase, e P' a seu correspondente sobre a hemiesfera de Poincaré, localizado na vizinhança de um ponto do equador que denominado P_m . Ver Fig. (B.18)

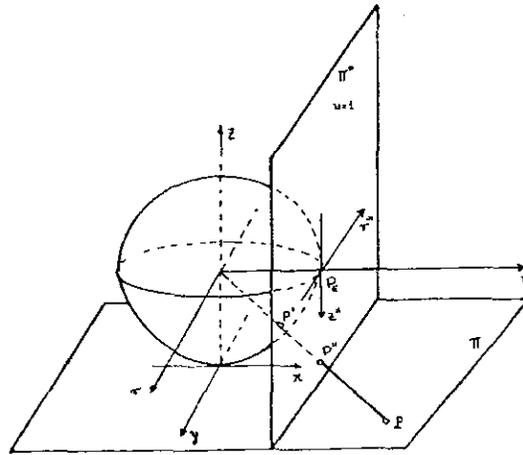


Figura B.18: Análise no infinito

Por uma traslação sobre o eixo z , identificamos o plano paralelo ao plano de fase que

passa pelo centro de S_2 com o plano (u, v) . Então, sempre é possível levar P_E sobre um dos eixos u ou v através de uma rotação no plano (u, v) . Considerando apenas os ângulos de rotação inferiores a $\pi/2$, a rotação pode ser realizada no sentido do eixo mais próximo. Podemos supôr, sem perda de generalidade, que a análise inclui dois casos diferentes: um dos casos considera os pontos P' localizados ao redor de um ponto do equador sobre o eixo u , denominado P_{E1} de coordenadas $(u = 1, v = 0, z = 0)$, e o outro caso considera o ponto P_{E2} do equador com coordenadas $(u = 0, v = 1, z = 0)$.

No seguinte vamos mostrar os cálculos para um ponto P' de coordenadas (u, v, z) , vizinho de P_{E1} . O plano tangente π^* é determinado pela equação $u = 1$, e escolhemos sua origem no ponto P_{E1} . A interseção da reta que une P e P' com o plano tangente determina o ponto P'' . O sinal da coordenada z de P'' será positivo ou negativo dependendo com qual hemiesfera estamos trabalhando. Com a hemiesfera superior, z é positivo, com a hemiesfera inferior, z é negativo.

Assim, aplicando sucesivamente o mapeamento de Poincaré e a projeção sobre o plano π^* tangente no equador, temos a seguinte transformação para os pontos no infinito do plano de fase

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{z} \\ y &= \frac{v}{z}, \end{aligned} \tag{B.56}$$

então, o sistema dinâmico apresenta a seguinte transformação

$$\begin{cases} \dot{x} = F\left(\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) = -\dot{z}/z^2 \\ \dot{y} = G\left(\frac{1}{z}, \frac{v}{z}\right) = \dot{v}/z - v\dot{z}/z^2. \end{cases} \tag{B.57}$$

Em função das novas variáveis reescrevemos

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^2 F(1/z, v/z) \\ \dot{v} = z G(1/z, v/z) - z v F(1/z, v/z). \end{cases} \tag{B.58}$$

Tendo em conta a propriedade de homogeneidade de F e G , expressa na equação (B.55), obtemos finalmente

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^{(2-m)} F^*(1, v) = P(v, z)/z^m \\ \dot{v} = z^{(1-m)} [G^*(1, v) - v F^*(1, v)] = Q(v, z)/z^m. \end{cases} \quad (\text{B.59})$$

Aqui, m é o menor inteiro não-negativo tal que as equações possam ser dadas na forma (B.59). No caso de $z < 0$ deve-se ter em conta o valor de m , pois se m é ímpar a transformação (B.56) inverte o sentido das trajetórias.

Neste ponto faremos uma conveniente transformação de variável

$$d\tau = \frac{dt}{z^m}, \quad (\text{B.60})$$

tal que o sistema dinâmico fica equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = z' = P(v, z) \\ \frac{dv}{d\tau} = v' = Q(v, z). \end{cases} \quad (\text{B.61})$$

Para a projeção ao redor de P_{E_2} devemos fazer cálculos análogos aos feitos para P_{E_1} , tendo como resultado as transformações

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{z} \\ y &= \frac{1}{z}, \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

e o sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^2 G(u/z, 1/z) = S(u, z)/z^m \\ \dot{v} = z F(u/z, 1/z) - z u G(u/z, 1/z) = T(u, z)/z^m, \end{cases} \quad (\text{B.63})$$

que com a variável τ fica

$$\begin{cases} z' = S(u, z) \\ v' = T(u, z). \end{cases} \quad (\text{B.64})$$

Agora, com o sistema expresso por (B.61) e (B.64) podemos aplicar a técnica de análise qualitativa dos sistemas dinâmicos apresentada na primeira seção deste Apêndice. Assim, determinamos seus pontos de equilíbrio com sua natureza topológica e o comportamento das curvas integrais em sua vizinhança. Fazendo $z = 0$ nas expressões dos pontos críticos estamos considerando as representações dos pontos críticos no infinito do plano de fase. As naturezas topológicas tanto como o comportamento das curvas nas vizinhanças dos pontos críticos são invariantes sob as transformações aplicadas durante a análise. Então, as características dos pontos críticos e das curvas na sua vizinhança, quando fazemos $z = 0$, corresponderão também aos pontos críticos no infinito do plano de fase e a suas vizinhanças.

Finalmente, o último passo da análise no infinito é a projeção da hemiesfera de Poincaré no disco fechado do plano $(u, v, 0)$ dado por

$$u^2 + v^2 \leq 1 \quad (\text{B.65})$$

O disco D_π é construído projetando a hemiesfera perpendicularmente ao próprio plano. Ver Fig.(B.19). Assim, todo o plano de fase (x, y) estará representado biunivocamente por um disco fechado e as trajetórias das soluções serão representadas por curvas dentro do disco. As linhas retas corresponderão com linhas retas e os pontos no infinito se localizarão sobre a circunferência C_∞ que limita o disco. Cada ponto crítico $(u_{cr}, 0)$ ou $(v_{cr}, 0)$ que surge da análise no infinito nas coordenadas (u, z) ou (v, z) , corresponderá a dois pontos antípodas sobre a fronteira do disco, os quais são justamente as interseções de C_∞ com o raio $y = v_{cr} x$ ou $y = x/u_{cr}$.

Um exemplo do mapeamento das vizinhanças U^\pm do ponto crítico $P_\infty \equiv (u_{cr}, 0)$ no disco do plano (x, y) , está representada na Fig. (B.20). Podese observar que o sinal de z e o sinal da abscissa de P_∞ determinam a antipoda que representa o ponto crítico no

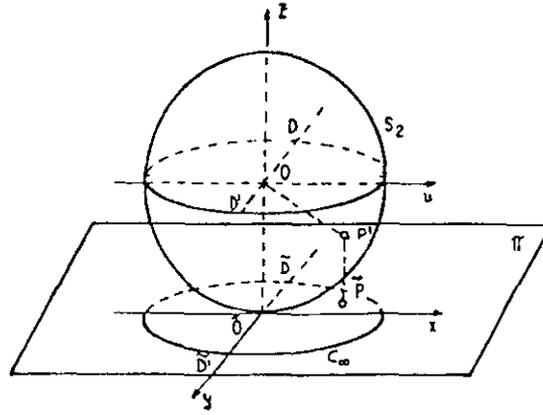


Figura B.19: Mapeamento sobre o disco D_π

infinito. Por último, enfatizaremos que quando m é ímpar devemos ter cuidado de inverter o sentido das trajetórias no caso $z < 0$.

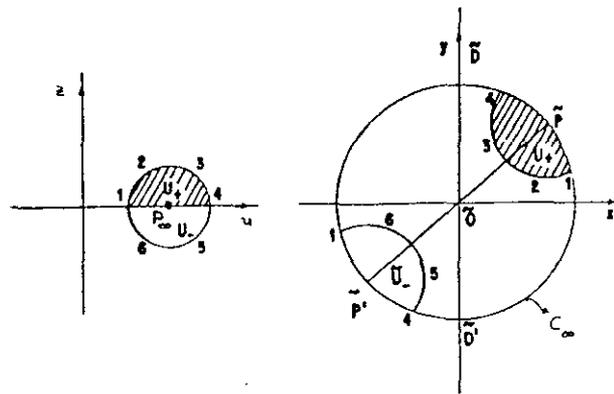


Figura B.20: Mapeamento $\pi^* \rightarrow D_\pi$

B.3.2 Aplicação

A aplicação da análise no infinito será feita novamente para o sistema dinâmico que aparece no Capítulo 5. Este sistema representa a dinâmica do fator de escala e do campo escalar geométrico de um modelo cosmológico. O modelo de universo é homogêneo e isotrópico com presença de matéria em forma de fluido perfeito, e equação de estado dada

por (4.10). Nesta aplicação tomaremos em consideração apenas o caso com λ positivo.

Potencial Nulo

Para o caso $V(\omega) = 0$ o sistema dinâmico é dado por (4.13), o qual após as transformações (B.56) escrevese

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{4}\lambda v^2(2 - \gamma) \\ \dot{v} = \frac{1}{z} \left(-\frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{2}(2 - \gamma)v - \frac{v^2}{4} - \frac{\lambda}{4}(2 - \gamma)v^3 \right) \end{cases} \quad (\text{B.66})$$

Se introduzimos a variável τ dada por (B.60) com $m = 1$ resulta:

$$\begin{cases} z' = z \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{4}\lambda(2 - \gamma)v^2 \right) \\ v' = -\frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{2}(2 - \gamma)v - \frac{v^2}{4} - \frac{\lambda}{4}(2 - \gamma)v^3 \end{cases} \quad (\text{B.67})$$

O sistema (B.67) é um sistema bidimensional autônomo e pode ser analisado de acordo com a técnica apresentada na primeira seção deste Apêndice.

O primeiro passo é localizar os pontos críticos de (B.67). Para isso, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 0 = z \left(\frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{4}\lambda(2 - \gamma)v^2 \right) \\ 0 = -\frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{2}(2 - \gamma)v - \frac{v^2}{4} - \frac{\lambda}{4}(2 - \gamma)v^3 \end{cases} \quad (\text{B.68})$$

com o qual temos os seguintes pontos críticos

$$P_{1,2} = \left(0, \pm \sqrt{-\frac{6}{\lambda}} \right), \quad P_{\infty} = \left(0, -\frac{1}{\lambda(2 - \gamma)} \right). \quad (\text{B.69})$$

Os pontos $P_{1,2}$ existem so quando λ é negativo, enquanto que P_{∞} existe para qualquer valor de λ .

O seguinte passo é expandir o sistema (B.67) ao redor do ponto crítico P_{∞} e trabalhar

unicamente com a parte linear (ver equação B.3)

$$\begin{cases} z' = \frac{\lambda - \lambda_{cr}}{4\lambda\lambda_{cr}(2-\gamma)} z = \lambda_1 z \\ v' = (\lambda_1 - 3) v = \lambda_2 v, \end{cases} \quad (\text{B.70})$$

onde $\lambda_{cr} = 1/(6\gamma(2-\gamma))$. Integrando cada equação obtemos

$$\begin{cases} z(\tau) = z_0 e^{\lambda_1 \tau} \\ v(\tau) = v_0 e^{\lambda_2 \tau}, \end{cases} \quad (\text{B.71})$$

Para classificar o comportamento das curvas integrais ao redor do ponto crítico devemos calcular o produto $\lambda_1 \lambda_2$, Ω e I . Em função dos autovalores temos que

$$I = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \Omega = \lambda_1 \lambda_2 \quad (\text{B.72})$$

O valor de λ_2 é sempre positivo para todo $\lambda > 0$, e a quantidade $I^2 - 4\Omega = 9$ é também sempre positiva.

Finalmente, chegamos aos seguintes resultados:

- 1) O ponto crítico é um *ponto sela* quando λ_1 é negativo, ou seja quando $\lambda < \lambda_{cr}$.
- 2) O ponto crítico é um *nó instável* quando $\lambda_1 > 0$, ou seja quando $\lambda > \lambda_{cr}$.

O caso de nó estável não existe neste exemplo.

Veamos agora que tipo de soluções representam os pontos críticos no infinito. Para isso, calculamos o fator de escala em função da variável original t para um ponto P_{∞} próximo ao ponto crítico no infinito. A variável z num entorno de P_{∞} escrevese como

$$z(\tau) \approx z_0 e^{\lambda_1 \tau}. \quad (\text{B.73})$$

Tendo em conta as transformações (B.56) e (B.69) vemos que a coordenada $v_{cr} < 0$, então

$$\begin{aligned} z > 0 &\rightarrow y < 0, x > 0 \\ z < 0 &\rightarrow y > 0, x < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Integrando $d\tau = dt/z$ com $z(\tau)$ dado por (B.73) temos que numa vizinhança do ponto crítico no infinito

$$\frac{z_0}{\lambda_1} e^{\lambda_1 \tau} = t - t_0. \quad (\text{B.75})$$

Substituindo isto novamente na expressão para $z(\tau)$ resulta

$$z(t) = \lambda_1(t - t_0), \quad (\text{B.76})$$

Assim, a coordenada x fica

$$x = \frac{1}{\lambda_1(t - t_0)}, \quad (\text{B.77})$$

tal que, quando $t \rightarrow t_0$ o ponto da vizinhança tende a P_∞ . Finalmente, se consideramos a definição $x = \dot{a}/a$ e integramos, o fator de escala em função do tempo t vem a ser

$$a(t) = a_0(t - t_0)^{1/\lambda_1} \quad (\text{B.78})$$

A partir desta expressão concluímos que existem dois casos

- (1)- Se $\lambda > \lambda_{cr}$ então $\lambda_1 > 0$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = 0$, o que indica que P_∞ representa uma singularidade.
- (2)- Se $\lambda < \lambda_{cr}$ então $\lambda_1 < 0$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} a(t) = \infty$, o que indica que P_∞ representa um universo plano.

No estudo do modelo cosmológico apresentado no Capítulo 5, os pontos A e B das Figs. (4.1), (4.2) e da Fig. (4.3) são as representações dos pontos críticos no infinito aqui analisados. As Figs. (4.1), (4.2) correspondem ao caso (1), enquanto que a Fig. (4.3) corresponde ao segundo caso.

Potencial Exponencial

Utilizando as definições (4.29) e (4.30) escrevemos o sistema (4.31) para descrever a dinâmica do modelo cosmológico apresentado no Capítulo 5. Lembremos que a linha como super-índice de uma variável denota a derivação com respeito a η .

Para estudar a região que representa o infinito do espaço de fase fazemos as seguintes transformações

$$\alpha = \frac{1}{z}, \quad \Delta = \frac{u}{z} \quad (\text{B.79})$$

e introduzindo a variável τ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (\text{B.80})$$

podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\beta}{2}uz - \frac{\lambda}{4}(2-\gamma)u^2z - \frac{\gamma}{4}z^3 + \frac{3}{2}\gamma z \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{3}{2}(2-\gamma)u - \frac{1}{4}u^2 - \frac{\lambda}{4}(2-\gamma)u^3 - \frac{\gamma}{4}uz^2 + \frac{1}{2\lambda}(\beta + 1/2)z^2 - \frac{3}{2\lambda}. \end{cases} \quad (\text{B.81})$$

Este sistema dinâmico apresenta os seguintes pontos /criticos com $z = 0$

$$P_{\lambda < 0} \equiv (u = \pm \sqrt{\frac{-6}{\lambda}}, z = 0) \quad (\text{B.82})$$

e

$$P_{\infty} \equiv (u = -\frac{1}{\lambda(2-\gamma)}, z = 0) \quad (\text{B.83})$$

Os pontos $P_{\lambda < 0}$ não serão considerados pois estamos trabalhando unicamente com valores positivos de λ . Existem outros pontos de equilíbrio do sistema (B.81), mas eles não representam pontos no infinito do plano de fase pois a variável z toma um valor não nulo.

Para saber sobre a natureza de P_{∞} estudamos o sistema linearizado ao redor do ponto crítico

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{3\gamma}{2} \left(1 - \frac{\lambda_{max}}{\lambda}\right) z = \lambda_1 z \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1+6(2-\gamma)^2}{4\lambda(2-\gamma)} u = \lambda_2 u. \end{cases} \quad (\text{B.84})$$

Este sistema é da forma dos sistemas dados em (B.9) e (B.10), com

$$\Omega = \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{3\gamma}{8\lambda(2-\gamma)} [1 + 6(2-\gamma)^2] \left[1 - \frac{\lambda_{max}}{\lambda}\right] \quad (\text{B.85})$$

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{3\gamma}{2} \left(1 - \frac{\lambda_{max}}{\lambda} \right) - \frac{1 + 6(2 - \gamma)^2}{4\lambda(2 - \gamma)}. \quad (\text{B.86})$$

Vemos que o autovalor λ_2 é sempre negativo, então se $\lambda_1 < 0$ estamos em presença de um nó de duas tangentes, e se $\lambda_1 > 0$ P_∞ é um ponto sela.

Apêndice C

Alguns cálculos no estudo das soluções estáticas esféricas.

C.1 Equação da Geodésica

Como foi exibido no Capítulo 3, a equação da geodésica com a distância conforme como parâmetro afim é

$$v^\alpha{}_{;\mu} v^\mu = 0 \quad (\text{C.1})$$

onde

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (\text{C.2})$$

Se agora consideramos o tempo próprio τ dado por

$$d\tau = e^{\omega/2} ds, \quad (\text{C.3})$$

então, o correspondente campo de velocidades V^μ se expressa como

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{ds} e^{-\omega/2} = v^\mu e^{-\omega/2}, \quad (\text{C.4})$$

Substituindo (C.4) em (C.1) obtemos a equação da geodésica em função do parâmetro afim τ

$$V^\alpha{}_{;\mu} V^\mu = -\frac{1}{2}\omega_\mu V^\mu V^\alpha. \quad (\text{C.5})$$

C.2 Integração das Soluções [11][12]

Nesta seção consideraremos um espaço-tempo de Weyl integrável descrito pela métrica (5.22) e pelo campo escalar geométrico (5.23).

C.2.1 Espaço-tempo Vazio

No caso de um espaço-tempo vazio, as equações de movimento são

$$\frac{C''}{C} = \frac{\lambda}{2} (\omega')^2 \quad (\text{C.6})$$

$$(A^{2'}C^2)' = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$(A^2C^2)'' = 2, \quad (\text{C.8})$$

$$(A^2C^2\omega')' = 0. \quad (\text{C.9})$$

Da equação (C.8) é imediato integrar o polinômio

$$p(r) = A^2(r)C^2(r) = (r - r_+)(r - r_-). \quad (\text{C.10})$$

cujo discriminante é $\eta^2 = (r_+ - r_-)^2$.

Da equação (C.7)

$$A^{2'}C^2 = \alpha_1 \quad (\text{C.11})$$

onde α_1 é uma constante de integração arbitrária. Com esta equação e com (C.10) obtemos

$$\frac{C'}{C} = \frac{p' - \alpha_1}{2p} \quad (\text{C.12})$$

Integrando mais uma vez, temos a solução para $C(r)^2$

$$\frac{C^2}{C_0^2} = p(r) e^{-\alpha_1 \int \frac{dr}{p}} \quad (\text{C.13})$$

Com (C.10) e (C.13) calculamos

$$\frac{A^2}{A_0^2} = e^{\alpha_1 \int \frac{dr}{p}} \quad (\text{C.14})$$

De (C.9) se deduz que

$$\omega' = \frac{\alpha_2}{p} \quad (\text{C.15})$$

e

$$\omega = \omega_0 + \alpha_2 \int \frac{dr}{p}. \quad (\text{C.16})$$

A constante ω_0 é o valor assintótico do campo escalar geométrico no infinito espacial e α_2 é uma constante de integração real e arbitrária.

Por simplicidade utilizaremos a seguinte igualdade

$$\frac{C''}{C} = \left(\frac{C'}{C}\right)' + \left(\frac{C'}{C}\right)^2 \quad (\text{C.17})$$

Substituindo (C.12) e (C.10) em (C.17) vemos que

$$\frac{C''}{C} = \frac{\alpha_1^2 - \eta^2}{4p^2} \quad (\text{C.18})$$

Finalmente, introduzindo (C.18) e (C.15) em (C.6) obtemos a relação entre as constantes de integração

$$\alpha_1^2 - \eta^2 = 2\lambda\alpha_2^2 \quad (\text{C.19})$$

A interpretação física das constantes de integração surgem dos comportamentos assintóticos da métrica e do campo escalar $\omega(r)$. Quando $r \rightarrow \infty$ a componente g_{00} do

tensor métrico toma a forma

$$A(r)^2 = A_0^2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (\text{C.20})$$

Tomando apenas os termos em primeira ordem de $1/r$, e por comparação com o limite Newtoniano

$$A(r)^2 = 1 - \frac{2M}{r} \quad (\text{C.21})$$

concluimos com a identificação

$$\alpha_1 = 2M \text{ e } A_0 = 1. \quad (\text{C.22})$$

Por outro lado, definimos a carga do campo escalar como o coeficiente do termo $1/r^2$ na expansão da derivada do campo escalar em $r \rightarrow \infty$. Assim, diremos que σ é a carga do campo escalar ω se

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega' \approx \frac{\sigma}{r^2}. \quad (\text{C.23})$$

Em consequência, identificamos a constante de integração α_2 com a carga do campo escalar geométrico, $\alpha_2 = \sigma$.

Reescrevendo (C.19) obtemos a relação entre os parâmetros do modelo

$$4M^2 - \eta^2 = 2\lambda\sigma^2 \quad (\text{C.24})$$

As formas explícitas das soluções integrais (C.13),(C.14) e (C.16) em função dos parâmetros físicos σ e M são os mostrados no Capítulo 5.

C.2.2 Campo Escalar Externo

No exterior de uma fonte de massa M estática e esférica, na geometria de Weyl integrável, e com a presença de um campo escalar externo $\phi(r)$, temos as seguintes equações de

movimento

$$\frac{C''}{C} = \frac{\lambda}{2}(\omega')^2 - \frac{\phi_0^2}{2} \frac{e^{2\omega}}{A^4 C^4} \quad (\text{C.25})$$

$$(A^{2l} C^2)' = 0, \quad (\text{C.26})$$

$$(A^2 C^2)'' = 2, \quad (\text{C.27})$$

$$(A^2 C^2 \omega')' = \frac{\phi_0^2}{\lambda} \frac{e^{2\omega}}{A^2 C^2} \quad (\text{C.28})$$

$$\phi' = \phi_0 \frac{e^{2\omega}}{A^2 C^2}. \quad (\text{C.29})$$

Devido a (C.26) e (C.27) continuam sendo válidas as soluções (C.13) e (C.14) para as componentes da métrica, sempre que $\alpha_1 = 2M$ e $A_0 = C_0 = 1$. Mas, para o campo escalar encontramos novas soluções, pois substituindo (C.18) e (C.28) em (C.25) obtemos a seguinte equação diferencial para ω

$$\omega'' - \omega'^2 + \frac{p'}{p} \omega' + \frac{4M^2 - \eta^2}{2\lambda p^2} = 0 \quad (\text{C.30})$$

Se introduzimos a variável $y = \omega'$ então, em lugar de (C.30), temos a resolver a seguinte equação de primeira ordem

$$y' - y^2 + \frac{p'}{p} y + \frac{4M^2 - \eta^2}{2\lambda p^2} = 0. \quad (\text{C.31})$$

Esta equação apresenta três soluções dependendo do discriminante de $p(r)$. As expressões finais do campo escalar são dadas no Capítulo 5.

C.2.3 Buraco Negro Carregado

No espaço-tempo de Weyl integrável, as equações de movimento para o exterior de uma fonte estática e esfericamente simétrica, de massa M e carga Q , são

$$\frac{C''}{C} = \frac{\lambda}{2} (\omega')^2 \quad (\text{C.32})$$

$$(A^{2'}C^2)' = Q^2 \frac{e^{-2\omega}}{C^2}, \quad (\text{C.33})$$

$$(A^2C^2)'' = 2, \quad (\text{C.34})$$

$$(A^2C^2\omega')' = \frac{Q^2 e^{-2\omega}}{\lambda C^2}. \quad (\text{C.35})$$

Como nos outros casos, continua valendo a equação (5.31) para $p(r)$.

Combinando as equações (C.33) e (C.35) e integrando obtemos

$$-\lambda A^2C^2\omega' + (A^2)'C^2 - C_1 = 0. \quad (\text{C.36})$$

A seguir, eliminamos ω' entre as equações (C.36) e (C.32), e substituímos $A^2C^2 = p(r)$, então, obtemos a seguinte equação diferencial

$$y' = y^2\left(\frac{2}{\lambda} - 1\right) - y \frac{2(p' - C_1)}{\lambda p} + \frac{1}{2\lambda} \frac{(p' - C_1)^2}{p^2}, \quad (\text{C.37})$$

onde $y(r)$ denota a derivada logarítmica

$$y = \frac{C'}{C}. \quad (\text{C.38})$$

Integrando as equações (C.37) e (C.38) obtemos a solução para $C(r)$. Com $C(r)$ e $p(r)$ deduzimos a expressão para $A(r)$. Posteriormente integramos a equação (C.36) e obtemos $\omega(r)$. Estas soluções analíticas exatas são apresentadas no Capítulo 5.

C.3 Escalar de Ricci

A forma geral para o escalar de curvatura em WIST é:

$$R = \hat{R} - 3\omega^\mu{}_{||\mu} + \frac{3}{2}\omega_\mu\omega^\mu, \quad (\text{C.39})$$

onde \hat{R} é o escalar de Ricci na geometria de Riemann associada.

Para o caso estático esfericamente simétrico em WIST, com a métrica dada em (5.22), a expressão de R passa a ser:

$$R = \hat{R} + \frac{3}{C(r)^2} \left(\omega(r)' p(r)' + p(r) \omega(r)'' - \frac{1}{2} p(r) (\omega(r)')^2 \right), \quad (\text{C.40})$$

com

$$\hat{R} = \frac{2}{C(r)^2} \left(\frac{1}{2} p(r)'' + \frac{p(r) C(r)''}{C(r)} - 1 \right). \quad (\text{C.41})$$

Com motivo de obter a forma explícita de R para o caso (a) com campo magnético, substituímos (5.51)-(5.53) em (C.40):

$$\begin{aligned} R = & 2(r-r_+)^{-(\gamma+\mu)+1} (r-r_-)^{-\gamma+\mu-1} F_\alpha(r)^{-\frac{2\lambda}{\lambda-2}-2} \times \\ & \left\{ \frac{\lambda\alpha}{\lambda-2} (r-r_-)^2 \left[\frac{2\alpha}{\lambda-2} F_{\alpha-1}(r)^2 + (\alpha-1) F_\alpha(r) F_{\alpha-2}(r) \right] + \right. \\ & \frac{\gamma+\mu}{2} (r-r_-)(r-r_+)^{-2} F_\alpha(r) \left[\frac{2\alpha\lambda}{\lambda-2} (r-r_+)(2r-r_+-r_-) F_{\alpha-1}(r) \right. \\ & \left. + \frac{F_\alpha(r)}{2} ((\gamma+\mu-2)(r-r_-) + 2(\gamma-\mu)(r-r_+)) \right] + \\ & \frac{F_\alpha(r)^2}{4} (\gamma-\mu)(\gamma-\mu-2) + \frac{3(1-\gamma)(r-r_-)}{\lambda(r-\eta)} F_\alpha(r)^2 - \\ & \frac{3F_\alpha(r)(r-r_-)^2}{2\lambda(\lambda-2)} \left(\frac{\lambda\alpha(2r-r_+-r_-)}{r-r_+} F_{\alpha-1}(r) + \right. \\ & \left. 2F_\alpha(r)((\alpha^2-\alpha)F_\alpha(r)F_{\alpha-2}(r) - \alpha^2 F_{\alpha-1}(r)^2) \right) - \\ & \frac{3}{4\lambda^2} \left((\gamma+\mu + C_1/\eta - 1) \frac{r-r_-}{r-r_+} F_\alpha(r) - (-\gamma+\mu+1 + C_1/\eta) F_\alpha(r) \right. \\ & \left. + \frac{2\lambda\alpha(r-r_-)}{\lambda-2} F_{\alpha-1}(r) \right)^2 \left. \right\} \quad (\text{C.42}) \end{aligned}$$

com

$$F_\alpha(r) = -\frac{r_+}{r_-} (r-r_-)^\alpha + (r-r_+)^\alpha. \quad (\text{C.43})$$

Se $C_1 = \eta$, a expressão (5.85) é obtida.

Referências

- [1] L.F.Abbott, S.Pi, “ Inflationary Cosmology”, World Scientific Publishing Co Pte Ltd. (1986).
- [2] R.Adler, M.Bazin, M.Schiffer, “Introduction to General Relativity”, 2a. edição, McGraw-Hill Book Company, (1975).
- [3] J.L.Anderson, “Principles of Relativity Physics”, Academic Press Inc., New York-London (1967).
- [4] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon e A. G. Mayer, “Qualitative Theory of Second Order Dynamic Systems”, John Wiley - Sons (1973).
- [5] J.D.Barrow e J.P.Mimoso, “ Perfect fluid scalar-tensor cosmologies”, *Phys.Rev D* **50**, N.6 (1994) 3746-3754.
- [6] V.A.Belinsky, L.P.Grischuk, I.M. Khalatnikov e Ya.B. Zeldovich, “Inflation Stages in Cosmological Models with a Scalar Field”, *Phys.Lett.B* **155**, N.4 (1985) 232.
- [7] G.D.Birkhoff, *Relativity and Modern Physics*, Cambridge, MA:Harvard University Press, (1923).
- [8] W.B.Bonnor, A.K.G. de Oliveira e N.O.Santos, “Radiating spherical collapse”, *Phys.Reports* **181**, 5 (1989) 269-326.
- [9] P. Brady, *Class. Quant. Grav.*, **11**, (1994) 1255; Y. Oshiro, K. Nakamura and A. Tomimatsu, *Progr. Theor. Phys.*, **91**, 6, (1994) 1265; A. Ori e T. Piran, *Phys. Rev. D***42**, (1990) 1068, e as referências lá citadas.

- [10] R.H.Brandenberger, “Inflationary Universe Models and Cosmic Strings”, *Physics of The Early Universe*, J.A.Peacock, A.F.Heavens, A.T.Davies (1989).
- [11] R.H.Brandenberger, “Formation of structure in the universe”, em *Proc. of VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II*, ed. M.Novello, Editions Frontieres, (1996) Capítulo 6.
- [12] C.Brans e R.H.Dicke, *Phys.Rev.* **124**, (1961) 925.
- [13] V.Canuto, P.J.Adams, S.H.Hsieh e E.Tsiang, “Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications”, *Phys.Rev. D* **16**, (1977) 1643.
- [14] V.Canuto e J.Goldman, “Astrophysical consequences of a violation of the strong equivalence principle”, *Nature* **304**, (1983) 243.
- [15] ver Capítulo 2 e referências.
- [16] ver Capítulo 3 e referências.
- [17] ver Capítulo 5 e referências.
- [18] ver Capítulo 6 e referências
- [19] B.S.De Witt, “Relativity, Groups and Topology”, ed. C.e B.S. De Witt, Gordon e Breach, New York (1964).
- [20] P.A.M.Dirac, “A new basis for cosmology”, *Proy.Roy.Soc.London A* **165**, (1938) 199.
- [21] P.Dirac, “Long range forces and broken symmetries”, *Proc.R.Soc. A* **333**, (1973) 403.
- [22] A.S.Eddington, “The mathematical Theory of Relativity”, Cambridge, UK, Cap. 7 (1923).
- [23] J.Ehlers, F.Pirani e A.Schild, “General Relativity - Essays in honour of J.L. Synge”, Claredon Press, UK, (1972) Cap.4.

- [24] A.Einstein e P.Bergmann, *Ann. Math.* **39**, (1938) 685.
- [25] A. Einstein, “A generalized Theory of Gravitation”, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 35 (1948); E.Schrödinger, “Space-Time Structure”, Cambridge U.P., Cambridge (1950); M.A. Tonnelat, “Les Théories unitaires de l’electromagnetisme et de la gravitation”, Gouthier, Paris (1959).
- [26] John Ellis, “Particle Physics and Cosmology”, em *Proc. of VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II*, ed. M.Novello, Editions Frontieres, (1996) pag. 185.
- [27] ver por ex. G.F.R. Ellis, “Alternatives to the Big-Bang”, *Ann. Astron. Astrophys.*, **22**, (1984).
- [28] Teste experimental de Eötvös, ver R.H.Dicke em Dewitt, B. e Dewitt C, “ Relativity, Groups and Topology”, Gordon and Breach, NY. Lectures at the 1963 Les Houches summer school.
- [29] J.Fabris, J.M.Salim e S.Sautú, “Non-singular cosmological model in Weyl integrable geometry”. Trabalho em elaboração.
- [30] M.Ferraris, M.Francaviglia e C.Reina, “Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925 “Palatini’s Method” Discovered by Einstein in 1925”, *Gen. Relat. and Grav.* **14**, N.3 (1982) 243.
- [31] O.A.Fonarev, “Exact Einstein scalar field solutions for formation of black holes in a cosmological setting”, *Class.Quant.Grav* **12** (1995) 1739-1752.
- [32] V.P.Frolov, M.A.Markov e V.F.Mukhanov, “Black holes as possible sources of closed and semiclosed worlds”, *Phys. Rev D* **41**, N.2 (1990) 383.
- [33] G.Gamow, “The Evolution of The Universe”, *Nature* **168** (1948) 680.
- [34] D.Garfinkle, “General relativistic strings”, *Phys. Rev. D* **32**, N.6 (1985) 1323.

- [35] D.Garfinkle, Horowitz e A.Strominger, “Charged black holes in string theory”, *Phys.Rev. D* **43**, N.10 (1991) 3140.
- [36] G.Gibbons e K.Maeda, “Black Holes and Membranes in Higher-Dimensional Theories with Dilaton Fields”, *Nucl.Phys B* **298** (1988) 741-775.
- [37] R.Gregory, J.A.Harvey, “Black holes with a massive dilaton”, *Phys.Rev. D* **47**, N.6 (1993) 2411.
- [38] A.K.Grijó de Oliveira, “Colapso Gravitacional Não-Adiabático”, *Tese de Doutorado*, Observatório Nacional/CNPq, Rio de Janeiro, Brasil, (1987) Capítulos 3 e 5.
- [39] J.J.Haliwell, “Scalar Fields in Cosmology with an Exponential Potential”, *Phys.Lett.*, **B**, V.185, N.3,4 (1987) 341-344.
- [40] S.W.Hawking e G.F.Ellis, “The large scale structure of space-time”, Cambridge Univ. Press (1980).
- [41] F.W.Hehl, J.D.McCrea, E.W.Mielke, Y.Ne’eman, “Metric-affine gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance”, *Phys. Rep.* V.258 (1995).
- [42] D.Hilbert, “Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung)”, *Konigl. Gesell. d. Wiss. Göttingen, Nachr., Math.-Phys. Kl.*, (1915) 395-407.
- [43] E.P.Hubble, “A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extragalactic Nebulae”, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, **15**, 169.
- [44] A.I.Janis, E.T.Newman e J.Wincour, “Reality of the Schwarzschild Singularity”, *Phys.Rev.Lett.* **20**, N.16 (1968) 878.
- [45] T.Kaluza, *Sitzungsber.Preuss.Akad. Wiss.Phys.Math.* **K1** (1921) 966.
- [46] D.J.Kaup, “Klein-Gordon Geon”, *Phys.Rev.* **172** (1968) 1331.

- [47] T.W.G.Kibble, *Phys.Rep.* **67** (1980) 183; A.Vilenkin, *Phys.Rep.* **121** (1985) 263; N.Turok, “Phase Transitions as the Origin of Large-Scale Structure”, em “Particles, Strings and Supernovae” (TSAI-88), ed. A.Jevicki e C.I.Tan, Woekd Scientific, Singapore, (1989); A.Vilenkin e E.P.S.Shellard, “Strings and Other Topological Defects”. Estas referências foram dadas na R.Brandenberg na ref. [11].
- [48] O.Klein, *Z.F.Physik* **37**, (1926) 895.
- [49] J.Koga e K.Maeda, “Evaporation and fate of dilatonic black holes”, *Phys.Rev. D* **52**, N.12 (1995) 7066-7079.
- [50] W.Kundt e B.Hoffmann, *Recent developments in general relativity*, Warszawa (1964) 303.
- [51] L.Landau, E.Lifshitz, “The Classical theory of Fields”, Addison-Wesley Press, Inc. Cambridge 42, Mass. (1951).
- [52] A.D.Linde, *Phys.Lett. B* **108** (1982) 389; S.Coleman e E.Weinberg, “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking”, *Phys.Rev D* **7** (1973) 1888.
- [53] A.D.Linde, “Phase Transitions in Gauge Theories and Cosmology”, *Rep. Prog. Phys.* **42** (1979).
- [54] A.Linde, “Particle Physics and Inflationary Cosmology”, Harwood, Chur, (1990); S.Blau e A.Guth, “Inflationary Cosmology”, em “300 Years of Gravitation”, ed. S.Hawking e W.Israel, Cambridge Univ.Press, Cambridge (1987); K.Olive, *Phys.Rep.* **190** (1990) 307.
- [55] F.Lucchin e S.Matarrese, “Power-law inflaiton”, *Phys.Ref D* **32**, N.6 (1985) 1316.
- [56] V.N.Melnikov, “Classical Solutions in Multidimensional Cosmology” em *Proc. of VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II*, ed. M.Novello, Editions Frontieres, (1996) pag. 465, e as referências aqui citadas.

- [57] C.W.Misner, K.S.Thorne, e J.A.Wheeler, “Gravitation”, 2a. edição, W.H.Freeman and Company, San Fransisco (1973). Capítulo 21.
- [58] C.W.Misner et al. ref. anterior, Capítulo 16.
- [59] C.W.Misner et al. ref. anterior, Box 6.1.
- [60] C.W.Misner et al. ref. anterior, Capítulo 10.
- [61] C.W.Misner et al. ref. anterior, Box 12.3.
- [62] C.W.Misner et al. ref. anterior, Capítulo 38.
- [63] C.W.Misner et al. ref. anterior, Box 1.2.
- [64] C.W.Misner et al. ref. anterior, Box 33.1.
- [65] ver por ex., C.W.Misner et al. ref. anterior, Capítulo 40 e referências.
- [66] P.van Nieuwenhyzen, “Simple supergravity and the Kaluza-Klein program”, Les Houches XL, (1983).
- [67] M.Novello e L.A.R.Oliveira, “A Marionette Universe”, *Int.J.Mod.Phys. A* **1**, (1986) 943.
- [68] M.Novello e H.Heintzmann, “Weyl Integravel ST.: A model of cosmos?”, *Phys. Rev. A* **98**, (1983) 10; M.Novello e L.A.R.Oliveira, “Non-Minimal Interaction of Gravity with Other Physical Fields”, *Rev. Bras. de Fís.* **17**, N.3 (1987) 432.
- [69] M.Novello, L.A.Oliveira, J.M.Salim e E.Elbaz, “Geometrized instantons and the creation of the universe”, *Int.J.of Mod.Physics D* **1**, N.3,4 (1993) 641.
- [70] H. Oliveira, J.M.Salim e S.L.Sautú, “Non-singular cosmologies in Weyl Integrable Space-Time”, sometido a publicação na *Class. Quantum Grav.*

- [71] L.A.Oliveira, “Acoplamento não mínimo com a gravitação e espaços de Weyl Integráveis”, *Tese de Doutorado*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, BR, (1988).
- [72] V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Adv. Phys.*, **19**, (1970) 525; **31**, (1982) 639; J. D. Barrow, *Phys. Rep.*, **85**, (1982) 1; I. M. Khalatnikov, E. M. Lifshitz, K. M. Khanin, L. N. Shchur and Ya. G. Sinai, *J. Stat. Phys.*, **38**, (1985); G. Francisco and G. Matsas, *Gen. Rel. Grav.*, **20**, (1985) 1047; A. Zardecki, *Phys. Rev. D* **28**, 1235; A. Burd and Reza Tavakol, *Phys. Rev. D*, **47**, (1993) 5336; Alfredo M. Ozório de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos - Caos e Quantização*, Editora da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP (1990).
- [73] A. Palatini, “Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **43**, (1919) 203-212.
- [74] P. Parsons e J.D. Barrow, “New inflation from old”, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1715-1721.
- [75] Pauli W., *Relativitätstheorie Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* vol 5 Physik, part 2 (Leipzig: Teubner), (1921). Vizgin V.P. Einstein, Hilbert e Weyl, (1989): the genesis of the geometric unified field theory program *Einstein Series*, Vol 1: Einstein and the History of General Relativity, ed. D. Howard and J. Stachel (Basel: Birkhäuser), 300.
- [76] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities”, *Phys. Rev. Lett.* **14**, N.3 (1965) 57.
- [77] A. Penzias e R. Wilson, “A measurement of excess antenna at 480° Mc.s”, *Astrophys. J.*, **142** (1965), 419.
- [78] ver por ex., S.E. Perez Bergliaffa, “Diversos aspectos de la teoría de Kaluza-Klein”, *Tese de Doutorado*, Univ. Nac. de La Plata, Bs.As., Argentina (1997), e referências.

- [79] V.Perlick, "Characterization of Standard Clocks by Means of Light Rays and Freely Falling Particles", *Gen.Rel.Grav.* **19**, N.11 (1987) 1059.
- [80] V.Perlick, "Observer fields in Weylian spacetime models", *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 1369-1385.
- [81] N.Pinto Neto, "Quantum Cosmology", em *Proc. of VIII Brazilian School of Cosmology and Gravitation II*, ed. M.Novello, Editions Frontieres, (1996) pag. 229.
- [82] V.N.Ponomariov e J.U. Obuchov, "The Generalized Einstein-Maxwell Theory of Gravitation", *Gen.Rel.Grav.* **14**, N.4 (1982), 309-330.
- [83] J.R.Ray, "Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity", *J.Math. Phys.* **13** N.10, (1972) 1451; L.Smalley, "A variational principle for a spacetime-dependent cosmological function", *Class.Quantum Grav.* **10** (1993) 1179-1184.
- [84] H.Reissner *Ann. Phys. Leipzig* **50**, (1916) 106.
- [85] M.D.Roberts, "Scalar Field Counterexamples to the Cosmic Censorship Hypothesis", *Gen.Rel. and Grav.* **21**, N.9 (1989) 907-939.
- [86] C.A.Romero Filho, "Análise Qualitativa de Modelos Cosmológicos na Teoria de Brans-Dicke, Soluções com Acoplamento Não-mínimo e Universos Viscosos, *Tese de Doutorado*, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro (1988).
- [87] ver por ex., G.Ross, "Grand Unified Theories", Benjamin, Reading, (1985).
- [88] R.Ruffini e S.Bonazzola, *Phys.Rev.* **187**, (1969) 1767.
- [89] J.M.Salim e S.L.Sautú, "Gravitational theory in Weyl Integrable Space-Time", *Class. Quantum Grav.* **13**, (1996) 353-360.
- [90] J.M.Salim, S.Sautú, "Dilaton-Maxwell cosmological solutions in Bianchi I". Trabalho em elaboração.

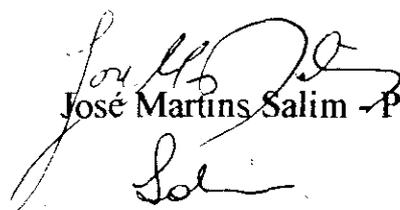
- [91] G.Sansoni e R.Conti, "Non-linear Differential Equations", A Pergamon Press Book, The MacMillan Company, New York (1964).
- [92] F.E.Schunck e E.W.Mielke, "A new method of generating exact inflationary solutions", *Phys.Rev. D* **50**, N.8 (1994) 4794-4806.
- [93] B.F. Schutz, "A first course in general relativity", Cambridge University Press, Primeira edição, (1985).
- [94] K. Schwarzschild, *S.B.Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, (1916) 424.
- [95] L.L.Smalley, "Brans-Dicke -type models with nonmetricity", *Phys. Rev. D* **33**, N.12 (1986) 3590-3593.
- [96] I.D.Souares, "Relativistic model of a spherical star emitting neutrinos", *Phys. Rev. D* **17**, N.8 (1978) 1924-1934.
- [97] Z.Tao e X.Xue, "Boson star in a gravitation theory with dilaton", *Phys.Rev. D* **45**, N.6 (1992) 1878-1883.
B.Gradwohl e G.Kälbermann, *Phys.Rev. B* **324**, (1989) 215-232.
- [98] A.Trautman, "The general theory of relativity", *Usp.fiz.Nauk* **89**, (1966) 3-37. (Tradução ao inglês: *Soviet Phys. Usp.* **9**, (1966) 319-39.
- [99] A.Trautman, *Sym.Math* **12**, (1973) 139.
- [100] ver por ex., R.M.Wald, "General Relativity", The Univ. of Chicago Press, Chicago and London, primeira ed. (1984).
- [101] ver por ex., R.M.Wald, ref. anterior, pag. 388.
- [102] ver por ex. R.M.Wald, ref anterior, Seção 14.1.
- [103] H.Weyl, *Space, Time and Matter*. Dover, NY, 1952; H.Weyl, *Sitzungsberg. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, (1918) 465.

- [104] S.Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley, New York, (1972).
- [105] M.Wyman, "Static spherically symmetric scalar fields in general relativity", *Phys.Rev. D* **24**, N.4 (1981) 839.
- [106] J.Yokoyama e K.Maeda, "On the Dynamics of the Power Law Inflation Due to an Exponential Potential", *Phys.Lett.B* **207**, N.1 (1988) 31-35.
- [107] B.Gradwohl e G.Kälbermann, "Dilaton stars", *Nuclear Physics B* **324** (1989) 215-232; T.Dereli e R.W.Tucker, "Non-metricity induced by dilaton gravity in two dimensions", *Class. Quantum Grav.* **11** (1994) 2575-2583, e as referências aqui citadas; F.Dowker, J.P.Gauntlett, D.A.Kastor, e J.Traschen, "Pair creation of dilaton black holes", *Phys.Rev. D* **49**, N.6 (1994) 2909.
- [108] B.F. Schutz, " Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1980.

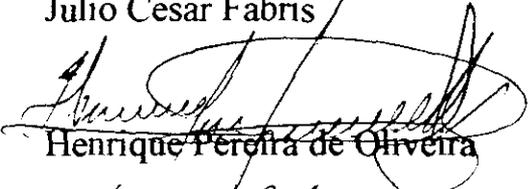
“TEORIA DA GRAVITAÇÃO NO ESPAÇO-TEMPO DE WEYL INTEGRÁVEL”

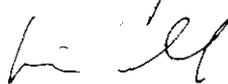
Sandra Liliana Sautú

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


José Martins Salim - Presidente


Julio Cesar Fabris


Henrique Pereira de Oliveira


Mário Novello


Roman Raykov Paounov


Luiz Alberto Rezende de Oliveira - Suplente

Rio de Janeiro, 18 de julho de 1997