

TESE DE
MESTRADO

Gravitação em Três Dimensões

GUILHERME DE BERREDO PEIXOTO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF
RIO DE JANEIRO, AGOSTO DE 1997

GRAVITACAO EM TRES DIMENSOES



1997/08

P379

020280

À memória de
Dóris,

e Laura, minha irmã.

BRAMA

*Se o cruel assassino pensa que mata
Ou o que morre pensa que morreu,
Ignoram eles os meios sutis
Com que eu persisto, passo e volto.
O distante ou esquecido para mim é perto;
Sombra e sol são a mesma coisa;
Os deuses mortos, aparecem-me;
E não distingo da infâmia a fama.
Doentes se sentem os que me deixam:
Quando de mim voam, eu sou as asas;
Eu sou o duvidador e sou a dúvida,
E sou o hino que o brâmane canta*

(Citado por Will Durant, "História da Civilização").

Resumo

Mostramos um estudo da teoria de Einstein da gravitação no espaço de Riemann em três dimensões, bem como em um espaço-tempo de Weyl integrável. Examinamos também (para três dimensões) uma teoria de campo da gravitação recentemente formulada por M. Novello, Luciane R. de Freitas e V. de Lorenci. Exibimos algumas características distintas entre esses modelos.

Abstract

The Einstein theory of gravitation is studied in a Riemannian three dimensional space-time as well as in the Weyl integrable space-time. Besides we present some comments concerning a field theory of gravity recently formulated by M. Novello, Luciane R. de Freitas and V. de Lorenci. Some theoretical aspects are shown comparatively between these models.

Índice

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Índice	vi
Notação e convenções	1
Introdução	3
1 Teoria de Einstein em Três Dimensões	4
1.1 Equações Dinâmicas	4
1.1.1 Ondas Gravitacionais	10
1.1.2 Limite Newtoniano	15
1.2 Soluções	17
1.2.1 Espaço Isotrópico	17
1.2.2 Espaço Circularmente Simétrico	18
2 Gravitação no Espaço-Tempo de Weyl Integrável	21
2.1 Introdução a Espaços de Weyl	21
2.2 Equações Dinâmicas	26
2.3 Soluções	30

2.3.1	Espaço Isotrópico	30
2.3.2	Espaço Circularmente Simétrico	32
3	Teoria NDL em Três Dimensões	35
3.1	Considerações Introdutórias	35
3.1.1	Teoria Linear de Fierz	36
3.2	Teoria NDL em Três Dimensões	37
3.3	Soluções	43
3.3.1	Simetria Circular	43
3.3.2	Espaço Isotrópico	45
	Conclusão	49
A	O Potencial Gravitacional Newtoniano em Três Dimensões	50
B	Parte sem Traço do Tensor de Curvatura no Espaço de Weyl Tridimensional	53
C	Teoria Não-Linear do Eletromagnetismo	57
D	Teoria NDL em Quatro Dimensões	61
E	Método de Hadamard	65

Notação e convenções

1. A métrica utilizada para o espaço plano é definida como $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1)$ em três dimensões e $\eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ para quatro dimensões;
2. Os índices gregos minúsculos são utilizados em componentes de tensores em base de coordenadas;
3. Os índices latinos minúsculos são utilizados em componentes espaciais de tensores em base de coordenadas;

4. Derivadas:

- (a) Derivações ordinárias (parciais) são usualmente denotadas pelo símbolo “|”:

$$\frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \equiv V_{\mu|\nu};$$

- (b) Derivações covariantes no espaço Riemanniano são denotadas pelo símbolo “||”:

$$\frac{DV^\mu}{Dx^\nu} \equiv V^\mu_{||\nu};$$

- (c) Derivações covariantes no espaço de Weyl são denotadas pelo símbolo “;”:

$$\frac{\hat{D}V^\mu}{\hat{D}x^\nu} \equiv V^\mu_{;\nu};$$

5. A conexão afim é definida como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} (g_{\kappa\nu|\mu} + g_{\kappa\mu|\nu} - g_{\mu\nu|\kappa});$$

6. Derivada covariante de um tensor contravariante V^μ :

$$V^\mu{}_{||\nu} = V^\mu{}_{|\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda;$$

7. Derivada covariante de um tensor covariante V_μ :

$$V_{\mu||\nu} = V_{\mu|\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda;$$

8. O tensor de curvatura é definido como:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\alpha|\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho|\alpha} + \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\sigma\alpha};$$

9. Os objetos com "chapéu" são construídos no espaço-tempo de Weyl, $\hat{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci formado pelas estruturas do espaço-tempo de Weyl.

10. Simetrização e anti-simetrização

(a) Parêntesis (“(”, “)”) indicam a simetrização nos índices por eles envolvidos.

(b) Colchetes (“[”, “]”) indicam a anti-simetrização nos índices por eles envolvidos.

(c) O fator $1/n!$ está sempre incluído, onde n é o número de índices,

$$T_{(ij)} = (T_{ij} + T_{ji}).$$

Introdução

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein é muito bem aceita como uma teoria clássica de gravitação, sendo amplamente usada e discutida no campo da Cosmologia, onde a interação gravitacional desempenha notável importância.

Seria um grande avanço teórico o aparecimento de uma teoria quântica de gravitação. Até os dias de hoje não existe uma teoria satisfatória, o que não acontece com o eletromagnetismo, pois a eletrodinâmica quântica é talvez a mais eficiente teoria quântica que dispomos.

Estudar gravitação clássica em três dimensões¹ representa um passo importante para a compreensão de teorias quânticas do campo gravitacional [2] [3]. Veja também [4], [5], [6], [7], [8], [9] e [10].

O presente trabalho aborda a teoria de Einstein em três dimensões. Mostramos que sob uma análise estritamente clássica, o modelo da gravitação Einsteiniana no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) difere do modelo no espaço-tempo Riemanniano pela existência de uma entidade geométrica que não perde o caráter dinâmico no vácuo. Finalmente apresentamos uma teoria de campo da gravitação recentemente proposta [13] para o espaço-tempo tridimensional. Veremos que essa teoria, como ocorre no WIST, apresenta graus dinâmicos de liberdade no vazio.

¹Para uma introdução histórica, veja [1].

Capítulo 1

Teoria de Einstein em Três Dimensões

1.1 Equações Dinâmicas

Veremos a teoria de Einstein em três dimensões. A equação dinâmica é escrita obedecendo às mesmas propriedades que levam à equação de Einstein em quatro dimensões [14]. A equação é tensorial, devendo ter a seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2$, a constante κ tem dimensão do inverso da massa, o membro da esquerda é um tensor formado pela métrica e suas derivadas de primeira e segunda ordem, e o da direita, é o tensor momento-energia, representando a fonte. A teoria é inspirada na equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (1.2)$$

onde G é a constante de Newton. Assim, o objeto $G_{\mu\nu}$ deve satisfazer às seguintes exigências:

1. Deve ser linear nas derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$ e quadrática nas suas derivadas primeiras.
2. Deve ser simétrico.
3. Deve ter divergência nula, devido à lei de conservação da energia.
4. Para o campo fraco estacionário, a componente temporal deve se reduzir a

$$G_{00} = \nabla^2 g_{00} \quad (1.3)$$

uma vez que escrevendo a equação da geodésica nessa aproximação, o que será feito a seguir, identificamos g_{00} com o potencial Newtoniano. A condição de baixas velocidades se traduz por

$$\left| \frac{dt}{d\tau} \right| \gg \left| \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right| \quad (1.4)$$

Escrevendo a equação da geodésica nesse cenário, obtemos

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (1.5)$$

Como, da definição usual da conexão,

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{00|\nu} + 0 \quad (1.6)$$

a equação (1.5) pode ser expressa nas seguintes componentes, considerando uma configuração estática de campo fraco ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$),

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \vec{\nabla} h_{00} \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (1.8)$$

Esta última igualdade nos permite concluir que $(\frac{dt}{d\tau})^2$ é uma constante. Escrevemos portanto

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}h_{00} \quad (1.9)$$

Comparando com a lei Newtoniana,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi \quad (1.10)$$

Assim, para que a teoria tenha um limite Newtoniano, associa-se a componente temporal do campo $h_{\mu\nu}$ com o potencial Newtoniano ϕ

$$h_{00} = cte - 2\phi \quad (1.11)$$

Note que o potencial ϕ é o potencial gravitacional da teoria de Newton no espaço-tempo tridimensional, veja o Apêndice A.

O tensor $G_{\mu\nu}$ é uma combinação de quadrados de derivadas primeiras da métrica e de suas derivadas segundas. Esta combinação está determinada pela exigência de que ela seja um objeto tensorial.

Sob uma mudança de coordenadas, a conexão se transforma do seguinte modo:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\tau} \frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{\Gamma}^\tau_{\rho\sigma} + \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 \bar{x}^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.12)$$

O tensor $G_{\mu\nu}$ é uma combinação de derivadas primeiras da conexão afim nas vizinhanças de um determinado ponto X onde as coordenadas são tais que todas as componentes de $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ se anulam em X . Essas derivadas, no ponto X , têm a seguinte lei de transformação [14]:

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}^\tau_{\rho\sigma}}{\partial \bar{x}^\eta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\eta} \frac{\partial \bar{x}^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\eta} \frac{\partial^3 \bar{x}^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.13)$$

Assim, a quantidade formada pelas derivadas primeiras da conexão deve ser $T^\tau_{\rho\sigma\nu} = \Gamma^\tau_{\rho\sigma|\nu} - \Gamma^\tau_{\rho\nu|\sigma}$ para ser um objeto tensorial, pois o termo inomogêneo da lei de transformação (1.13), simétrico nos índices ρ e η , se anularia sob tal antissimetrização. O tensor

de Riemann tem exatamente essa forma no ponto X , portanto podemos escrever a relação válida em X

$$T^{\tau}{}_{\rho\sigma\nu} = R^{\tau}{}_{\rho\sigma\nu} \quad (1.14)$$

Assim, o tensor $T^{\tau}{}_{\rho\sigma\nu}$ que estamos procurando é igual a $R^{\tau}{}_{\rho\sigma\nu}$ em coordenadas cuja conexão se anula. Esta relação, por ser tensorial, é verdadeira em qualquer sistema de coordenadas. O único tensor formado pelas derivadas segundas de $g_{\mu\nu}$ e por produtos entre duas derivadas primeiras é o tensor de Riemann.

Portanto, $G_{\mu\nu}$ pode ser genericamente escrito como uma combinação de contrações de $R_{\mu\nu\rho\alpha}$, e devido às suas simetrias (as mesmas em quatro dimensões), é válido escrever

$$G_{\mu\nu} = c_1 R_{\mu\nu} + c_2 g_{\mu\nu} R \quad (1.15)$$

O tensor de curvatura pode ser escrito como ([14])

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu|\kappa|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa|\lambda} - g_{\lambda\kappa|\mu|\nu} + g_{\mu\kappa|\nu|\lambda}) + \\ &+ g_{\sigma\rho} (\Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\kappa} - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\kappa} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

No ponto X , onde as conexões se anulam, pode-se escrever a derivada covariante do tensor de Riemann

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa|\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} (g_{\lambda\nu|\kappa|\mu} - g_{\mu\nu|\kappa|\lambda} - g_{\lambda\kappa|\mu|\nu} + g_{\mu\kappa|\nu|\lambda}) \quad (1.17)$$

Daí decorre a identidade de Bianchi, válida em três dimensões:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa|\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu|\kappa} + R_{\lambda\mu\nu\kappa\eta|\nu} = 0 \quad (1.18)$$

Contraindo duas vezes, obtemos

$$R^{\rho}{}_{\mu|\rho} = \frac{1}{2} R_{|\mu} \quad (1.19)$$

A condição 3 implica que $c_1 = -2c_2$. Temos agora apenas uma constante não fixada, que seria determinada pela imposição 4. No entanto, no limite não-relativístico, a componente

temporal de $G_{\mu\nu}$ não se reduz a $\nabla^2 g_{00}$ no regime de campo fraco em três dimensões, mesmo porque, como veremos, a teoria não possui um limite Newtoniano num fluido isotrópico sem pressão. Assim, a constante se torna irrelevante, podemos escolhê-la $c_1 = 1$, por exemplo, pois o critério 4 pode ser ignorado. Se $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, então

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (1.20)$$

Então, considerando $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$,

$$R = R_{00} - R_{11} - R_{22} \simeq R_{00} + \frac{1}{2} R + \frac{1}{2} R \quad (1.21)$$

Portanto

$$R_{00} \simeq 0 \quad (1.22)$$

Como veremos adiante, isso implica que $\nabla^2 h_{00}$ seja identicamente nulo, pois mostraremos que R_{00} está, nessa aproximação, relacionado à $\nabla^2 h_{00}$. Isso mostra que não faz sentido a imposição do limite Newtoniano como critério da forma do objeto $G_{\mu\nu}$, já que a teoria falha ao reproduzir a gravitação de Newton para campo fraco estático.

Escolheremos $G_{\mu\nu}$ com a mesma forma que o seu correspondente no caso quadridimensional. ou seja,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.23)$$

Se impomos que o espaço de Minkowski seja solução para o vácuo, então $\Lambda = 0$. Usaremos este fato no decorrer do capítulo. Para casos onde $\Lambda \neq 0$, veja [12].

Em quatro dimensões o tensor de Riemann tem 20 componentes algebricamente independentes, considerando-se suas propriedades de simetria e a identidade de Bianchi, e o tensor de Ricci tem 10 componentes. Em três dimensões esses objetos têm ambos 6 componentes independentes, note que eles continuam com as mesmas simetrias. Assim, na decomposição usual do tensor de Riemann em suas partes irredutíveis [14], ele é expresso

através do tensor de Ricci (bem como seu escalar R), e da parte sem traço, que deve ser nula, já que seus traços têm igualmente seis componentes algebricamente independentes.

A decomposição do tensor de Riemann se dá do seguinte modo

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}R_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}R_{\mu\beta} - \frac{1}{2}R(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \quad (1.24)$$

Então, soluções das equações de campo

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\kappa T - \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

no vácuo têm sempre curvatura nula, ou seja,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0 \quad (1.26)$$

Isto significa que a única solução para o vácuo é o espaço de Minkowski. Em outras palavras, a geometria perde o caráter dinâmico no vácuo, e num sentido Newtoniano, não existe força gravitacional, uma vez que o espaço é pseudo-Euclidiano em coordenadas cartesianas. Só a presença de energia curva o espaço.

A equação (1.25) pode ser usada juntamente com (1.24) para escrever

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\alpha}\kappa T_{\nu\beta} + g_{\nu\beta}\kappa T_{\mu\alpha} - g_{\mu\beta}\kappa T_{\nu\alpha} - g_{\nu\alpha}\kappa T_{\mu\beta} - \frac{1}{2}\kappa T(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) \quad (1.27)$$

Multiplicando a equação por $v^\nu v^\beta$ e considerando $T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu$, sendo $v^\mu v_\mu = 1$, encontramos

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}v^\nu v^\beta = 0 \quad (1.28)$$

Mostraremos agora que isso implica na inexistência de desvio geodésico. Uma curva geodésica $\xi^\mu(s)$ é descrita pela equação

$$v_{||\nu}^\mu v^\nu = 0 \quad (1.29)$$

onde $v^\mu = \frac{d\xi^\mu}{ds}$ (Veja [14] para mais detalhes). Abrindo a derivada covariante em (1.29) em termos da conexão,

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{d\xi^\nu}{ds} \frac{d\xi^\rho}{ds} \quad (1.30)$$

e escrevendo também a equação de uma geodésica próxima à considerada, ou seja, substituindo $\xi^\mu + \epsilon^\mu$ em (1.29), onde ϵ^μ é muito pequeno em comparação a ξ^μ , obtemos uma segunda equação. Combinando essas equações, podemos escrever na primeira ordem em ϵ^μ a equação do desvio geodésico

$$\frac{D^2 \epsilon^\mu}{Ds^2} = R^\mu{}_{\nu\alpha\rho} v^\nu v^\rho \epsilon^\alpha \quad (1.31)$$

onde $\frac{DA^\mu}{Ds}$ indica derivação covariante de A^μ ao longo do parâmetro afim s .

Considerando (1.28), podemos concluir que, conforme mostrado em Giddings *et al.* [2] no seu trabalho sobre a teoria de Einstein em três dimensões, não existe desvio geodésico numa distribuição de poeira, o que põe em evidência o comportamento não-Newtoniano da teoria em três dimensões.

O caráter não-dinâmico no espaço vazio tridimensional é uma desvantagem da teoria de Einstein devido ao fato de que a gravitação no vácuo não pode ser analisada do ponto de vista dinâmico. Veja por exemplo o trabalho de Leutwyler [11], onde a gravitação é quantizada canonicamente.

1.1.1 Ondas Gravitacionais

Primeiramente iremos realizar o procedimento usual em três dimensões do que é comumente feito em quatro [15], a fim de exibir a equação de propagação das superfícies características do campo gravitacional na teoria de Einstein.

Mostraremos que a equação de propagação da onda (propagação das superfícies de descontinuidade) é dada por

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \quad (1.32)$$

onde k_μ é o vetor normal à superfície característica.

Demonstraremos a seguir que o tensor de Ricci pode ser escrito da seguinte maneira [15]:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu|\alpha|\beta} - \Gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\mu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} + \\
&+ \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\Gamma_{\mu\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\mu\beta}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\alpha}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu|\mu} + \Gamma_{\mu|\nu}) - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma_{\rho} \tag{1.34}$$

$$\Gamma^{\alpha} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} \tag{1.35}$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha|\beta} + g_{\mu\beta|\alpha} - g_{\alpha\beta|\mu}) \tag{1.36}$$

A identidade a seguir é demonstrada por cálculo direto

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda} - (ln\sqrt{g})_{|\rho} = 0 \tag{1.37}$$

Multiplicando por $g^{\rho\alpha}$ e adicionando aos dois membros Γ^{α} , obtemos

$$\Gamma^{\alpha} = -(ln\sqrt{g})_{|\rho}g^{\rho\alpha} + \Gamma^{\alpha} + g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda} \tag{1.38}$$

Mas sabemos que

$$g^{\alpha\lambda}{}_{|\lambda} = -\Gamma^{\alpha} - g^{\rho\alpha}\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\lambda} \tag{1.39}$$

Assim fica demonstrado que

$$\Gamma^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{\alpha\rho})_{|\rho} \tag{1.40}$$

Expandindo a relação (1.40), temos

$$\Gamma_{\nu} = g^{\alpha\beta}g_{\nu\alpha|\beta} - \frac{1}{2}(lng)_{|\nu} \tag{1.41}$$

Derivando em relação a x^{μ} ,

$$\Gamma_{\nu|\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{|\mu}g_{\nu\alpha|\beta} + g^{\alpha\beta}g_{\nu\alpha|\beta|\mu} - \frac{1}{2}(lng)_{|\nu|\mu} \tag{1.42}$$

Derivando em relação a x^ν a seguinte identidade

$$(\ln g)_{|\mu} = g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma|\mu} \quad (1.43)$$

encontramos

$$(\ln g)_{|\mu|\nu} = g^{\rho\sigma}{}_{|\nu} g_{\rho\sigma|\mu} + g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma|\mu|\nu} \quad (1.44)$$

Em (1.42) o fator $g_{\nu\alpha|\beta}$, que está contraído com um objeto simétrico em α e β , pode ser substituído pela expressão

$$\frac{1}{2}(g_{\nu\alpha|\beta} + g_{\nu\beta|\alpha}) = \Gamma_{\nu\alpha\beta} + g_{\alpha\beta|\nu} \quad (1.45)$$

Tem-se portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu|\mu} &= g^{\alpha\beta}{}_{|\mu} \Gamma_{\nu\alpha\beta} + g_{\alpha\beta|\nu} g^{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \\ &+ g^{\alpha\beta} g_{\nu\alpha|\beta|\mu} - \frac{1}{2}(\ln g)_{|\nu|\mu} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Trocando μ com ν e α com β ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu|\mu} &= g^{\alpha\beta}{}_{|\nu} \Gamma_{\mu\alpha\beta} + g_{\alpha\beta|\mu} g^{\alpha\beta}{}_{|\nu} + \\ &+ g^{\alpha\beta} g_{\nu\alpha|\beta|\mu} - \frac{1}{2}(\ln g)_{|\mu|\nu} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Da equação (1.44), o objeto $g^{\alpha\beta}{}_{|\nu} g_{\alpha\beta|\mu}$ é simétrico. Levando em conta isso, ao subtrairmos (1.46) e (1.47) de (1.44), encontramos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} (g_{\alpha\beta|\mu|\nu} - g_{\nu\alpha|\beta|\mu} - g_{\mu\beta|\alpha|\nu}) &= g^{\alpha\beta}{}_{|\mu} \Gamma_{\nu\alpha\beta} + \\ &+ g^{\alpha\beta}{}_{|\nu} \Gamma_{\mu\alpha\beta} - \Gamma_{\mu|\nu} - \Gamma_{\nu|\mu} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Usando (1.16), obtemos a seguinte expressão para $R_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\nu|\alpha|\beta} + g_{\alpha\beta|\mu|\nu} - g_{\nu\alpha|\beta|\mu} - g_{\mu\beta|\alpha|\nu}) + \\ &- g^{\alpha\beta} g_{\rho\sigma} \Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} \Gamma_{\rho} \end{aligned} \quad (1.49)$$

que pode ser reescrita considerando (1.48):

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu|\alpha|\beta} - \frac{1}{2}\Gamma_{\mu|\nu} - \frac{1}{2}\Gamma_{\nu|\mu} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\mu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\Gamma_{\mu\alpha\beta} + \\
 &- g^{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\Gamma_{\rho}
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Esta é a equação (1.33), que se queria demonstrar.

Num sistema de coordenadas harmônicas, onde¹

$$\square x^{\alpha} = (x^{\alpha})^{\mu}{}_{||\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{\alpha\mu})_{|\mu} = 0, \tag{1.51}$$

a quantidade $g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} := \Gamma^{\alpha}$ é nula (veja 1.40). Assim, a expressão do tensor de Ricci tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu|\alpha|\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\mu}\Gamma_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\Gamma_{\mu\alpha\beta} + \\
 &- g^{\alpha\beta}g_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha}
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Observe que a equação de Einstein no vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$) nessas coordenadas é tal que o primeiro termo é formado por derivadas segundas do campo e o segundo é composto somente por derivadas primeiras. Podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$-\frac{1}{2}g^{00}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2} + (\dots) = 0 \tag{1.53}$$

onde a quantidade indicada nos parênteses é composta por derivadas espaciais de $g^{\mu\nu}$ e $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial t}$, e por produtos entre duas derivadas.

Considere o sistema de coordenadas

$$t' = \omega(t, x_1, x_2) \quad x'_1 = x_1 \quad x'_2 = x_2 \tag{1.54}$$

Sob essa mudança de coordenadas, a métrica se transforma da maneira usual

$$\bar{g}^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta}(x) \tag{1.55}$$

¹As três equações $\square x^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{\alpha\mu})_{|\mu}$ são identidades

o que permite concluir que a equação (1.53) nas novas coordenadas será

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta}\right)g^{\alpha\beta}g^{00}\frac{\partial^2\bar{g}^{\mu\nu}}{\partial t'^2} + (\dots) = 0 \quad (1.56)$$

Considerando a superfície Σ cuja equação é $\omega = t' = cte$, e tendo em vista o problema de Cauchy, todas as quantidades nos parênteses são supostamente conhecidas em Σ (onde se incluem as derivadas segundas espaciais), ou seja, são os dados iniciais. Observe que como qualquer derivada primeira é conhecida em todos os pontos de Σ , que é uma hipersuperfície tipo-espaço, então as derivadas espaciais dessas quantidades também estarão determinadas. A derivada segunda temporal do campo é determinada pela equação dinâmica (1.56).

Se a equação dinâmica não puder determinar a derivada segunda temporal do campo, significa que o comportamento do campo através de Σ não é determinado pelas equações de movimento da teoria. Assim, podemos dizer que essa superfície é a superfície característica da equação de Einstein, isto é, a superfície das descontinuidades, através da qual derivadas segundas do campo são descontínuas. Essa hipótese é verificada se a relação abaixo for verdadeira,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.57)$$

Esta relação é a equação característica da teoria, ela descreve a propagação das ondas gravitacionais. Observe que o vetor $\omega_{|\mu}$ é normal à superfície Σ . Portanto ele é o vetor tangente da curva que é a trajetória das ondas, ou bicaracterísticas. Derivando-se covariantemente a equação 1.57, concluímos que o vetor $\omega_{|\alpha}$ satisfaz

$$\omega^{|\alpha}{}_{||\beta}\omega^{|\beta} = 0 \quad (1.58)$$

Portanto as bicaracterísticas são geodésicas nulas, ou seja, a gravitação se propaga da mesma forma que o eletromagnetismo de Maxwell quando acoplado minimamente à geometria, o que é compatível com o fato de que a gravitação Einsteiniana é universal, ou seja,

ela interage da mesma forma com todas as outras entidades, inclusive com ela própria. Como será enfatizado mais tarde, essa universalidade é quebrada na teoria de gravitação a ser tratada no capítulo 3.

1.1.2 Limite Newtoniano

Podemos tomar o limite de campo fraco estático da mesma forma que se faz em quatro dimensões. Consideraremos uma densidade isotrópica sem pressão (poeira), e veremos que a geometria se desacopla da matéria, o que, diferentemente da teoria quadridimensional, impossibilita encontrar a equivalência da constante κ com a constante de Newton.

Considere a aproximação de campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (1.59)$$

onde $h_{\mu\nu}$ é pequeno. Usando a expressão (1.16), o tensor de curvatura pode ser exibido em termos de $\eta_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$, desprezando-se termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{1}{2}(-h_{\mu\lambda|\nu|\rho} - h_{\nu\rho|\mu|\lambda} + h_{\mu\rho|\nu|\lambda} + h_{\nu\lambda|\mu|\rho}) \quad (1.60)$$

Logo

$$R_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(-h^\rho_{(\lambda|\nu)|\rho} + h_{|\nu|\lambda} + \square h_{\nu\lambda}) \quad (1.61)$$

onde $h = h^\rho_\rho$. Temos ainda

$$R = \square h - h^{\nu\rho}_{|\nu|\rho} \quad (1.62)$$

Assim, o tensor de Einstein nessa aproximação é

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{1}{2}(-h^\rho_{(\mu|\nu)|\rho} + h_{|\mu\nu} + \square h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} h^{\rho\alpha}_{|\rho\alpha} - \eta_{\mu\nu} \square h) \quad (1.63)$$

Entretanto, é possível escolher um sistema de coordenadas no qual a equação de movimento (1.25) assume uma forma mais simples. No sistema de coordenadas harmônicas

($\square x^\alpha = 0$), temos

$$\Gamma^\alpha = g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0 \quad (1.64)$$

Usando a expressão da conexão linearizada

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\nu|\mu} + h_{\rho\mu|\nu} - h_{\mu\nu|\rho}) + O(h^2) \quad (1.65)$$

a relação (1.64) se traduz por

$$h^\rho_{\mu|\rho} = \frac{1}{2}h_{|\mu} \quad (1.66)$$

Esta é a gauge conhecida principalmente como gauge de De Donder/Einstein, na qual, por cálculo direto, a equação de Einstein toma a seguinte forma:

$$\square h_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}\kappa T - 4\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.67)$$

Supondo uma densidade isotrópica de matéria, sem pressão (poeira), o tensor momento-energia tem a sua componente temporal muito grande em comparação com os demais quando se faz a aproximação de baixas velocidades (1.4).

Assim, a componente temporal da equação (1.67) se escreve

$$\nabla^2 h_{00} = 0 \quad (1.68)$$

Observe que isso está coerente com (1.22). Podemos associar h_{00} com o potencial gravitacional Newtoniano ϕ , como é feito usualmente em quatro dimensões, ao escrever a equação da geodésica a baixas velocidades na aproximação de campo fraco $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

$$h_{00} = 1 - 2\phi \quad (1.69)$$

Vimos então que não podemos achar a equivalência entre a constante κ e a constante de Newton, uma vez que a geometria no limite de campo fraco estático não se acopla com uma distribuição de poeira. Isto caracteriza a notável propriedade de que a teoria de Einstein em três dimensões não tem um limite Newtoniano.

1.2 Soluções

1.2.1 Espaço Isotrópico

Mostraremos agora que soluções a teoria de Einstein admite para um espaço-tempo espacialmente isotrópico, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A(t)^2}{(1 + \frac{\epsilon r^2}{4})^2} (dx^2 + dy^2) \quad (1.70)$$

sendo $r^2 = x^2 + y^2$. Considere o tensor momento-energia

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_\mu v_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (1.71)$$

com a equação de estado $p = \lambda\rho$, onde λ é uma constante determinada pelo sistema físico.

A lei de conservação de energia, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, dá a seguinte relação

$$\dot{\rho} + 2\rho\frac{\dot{A}}{A}(1 + \lambda) = 0 \quad (1.72)$$

que quando integrada, fornece

$$\rho(t) = \alpha A^\gamma(t) \quad (1.73)$$

onde α é uma constante de integração, e $\gamma = -(2 + 2\lambda)$.

As equações de Einstein são

$$\dot{A}^2 + \epsilon - \rho A^2 \kappa = 0 \quad (1.74)$$

$$\ddot{A} - \rho A \kappa \lambda = 0 \quad (1.75)$$

Para um fluido incoerente (poeira), onde $\lambda = 0$, temos a seguinte solução

$$A(t) = \pm(\alpha\kappa - \epsilon)^{1/2}t + cte. \quad (1.76)$$

$$\rho(t) = \frac{\alpha}{A^2(t)} \quad (1.77)$$

Observe que no vácuo o fator de escala $A(t)$ continua linear no tempo. Note também que a solução estática é permitida, quando $\alpha\kappa - \epsilon = 0$, resultando em $A = cte$ e $\rho = cte$. Isto evidencia o caráter não-Newtoniano da teoria em três dimensões.

Para um fluido dominado por radiação, a solução é a mesma para um fluido incoerente num espaço-tempo quadridimensional isotrópico [2].

1.2.2 Espaço Circularmente Simétrico

Aqui, as equações de Einstein serão escritas com o tensor momento energia dado por (1.71) para o elemento de linha estático circularmente simétrico

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 \quad (1.78)$$

A lei de conservação de energia tem uma componente não-trivial

$$(1 + \lambda)\rho B' + 2\lambda\rho' = 0 \quad (1.79)$$

onde o símbolo "''"significa uma diferenciação em relação à coordenada r ($B' = \frac{dB}{dr}$).

Integrando essa relação, obtemos

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{1+\lambda}{2\lambda}B(r)} \quad (1.80)$$

As equações de campo são:

$$A' + 2\kappa\rho A^2 r(B + B\lambda - \lambda) = 0 \quad (1.81)$$

$$B' + 2\kappa\rho\lambda AB r = 0 \quad (1.82)$$

$$B'^2 A + B' A' B - 2B'' AB - 4\kappa\lambda\rho A^2 B^2 = 0 \quad (1.83)$$

No vácuo obtemos facilmente $A = a$ e $B = b$ (a e b constantes), de modo que

$$ds^2 = dt^2 - adr^2 - r^2d\theta^2 \quad (1.84)$$

Definindo uma nova coordenada \bar{r} , tal que $\bar{r} = \sqrt{a}r$, e $\bar{\theta}$, tal que $\bar{\theta} = \theta/\sqrt{a}$, podemos escrever o elemento de linha nas novas coordenadas,

$$ds^2 = dt^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 \quad (1.85)$$

sendo que a coordenada angular $\bar{\theta}$ tem o domínio $0 < \bar{\theta} < 2\pi/\sqrt{a}$. Assim, a teoria admite no vácuo somente soluções planas (Minkowskianas, podendo ser representadas por um cone, com uma singularidade na origem). Note que

$$\sqrt{a} > 1 \quad (1.86)$$

Mais uma vez, enfatizamos que não existe dinâmica gravitacional no vácuo. A quantidade \sqrt{a} é proporcional à massa presente na origem, como mostra Gott, R. e Alpert, M. [17].

Investiguemos o caso de um fluido perfeito sem pressão (poeira, $\lambda = 0$). Olhando para as equações de movimento, obtemos

$$B' = 0 \quad (1.87)$$

e da lei de conservação tiramos

$$B' \rho = 0 \quad (1.88)$$

Esta relação é uma identidade para qualquer ρ . Podemos relacioná-la com $A(r)$ usando 1.81,

$$A' = -2\kappa\rho A^2 r b \quad (1.89)$$

Supondo uma densidade de matéria constante, $\rho = \rho_0$, ao integrar a relação acima, encontramos uma solução tal que o elemento de linha se escreve

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{\kappa B_0 \rho_0 r^2 + c_0} dr^2 - r^2 d\theta^2 \quad (1.90)$$

onde B_0 e c_0 são constantes. Podemos calcular a componente do tensor de curvatura

$$R_{r\theta r\theta} = -\frac{\beta r^2}{c_0 + \beta r^2} \quad (1.91)$$

onde $\beta = \kappa B_0 \rho_0$. Calculando o escalar

$$R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda} = 2R^2 = 4\beta^2 \quad (1.92)$$

podemos dizer que a solução não apresenta singularidade.

Capítulo 2

Gravitação no Espaço-Tempo de Weyl Integrável

Mostraremos agora a teoria gravitacional de Einstein no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST), onde a geometria possui um grau dinâmico adicional comparativamente ao espaço-tempo Riemanniano, que é o campo escalar $\phi(x)$. Conforme será mostrado, a vantagem deste cenário para o anterior consiste essencialmente no caráter dinâmico existente da geometria no vácuo, o que não acontece no espaço-tempo Riemanniano.

2.1 Introdução a Espaços de Weyl

Na geometria Riemanniana, sabemos que um vetor A^μ muda de direção ao ser transportado paralelamente a um ponto próximo, de uma quantidade δA^μ , tal que

$$\delta A^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\nu dx^\rho. \quad (2.1)$$

Sabemos também que, por definição, o comprimento de um vetor não se altera num

transporte paralelo, ou seja, que

$$d(g_{\rho\nu}A^\rho A^\nu) = 0. \quad (2.2)$$

Desenvolvendo esta equação, conclui-se a notável propriedade da geometria Riemanniana

$$g_{\mu\nu|\alpha} = 0 \quad (2.3)$$

Ou

$$g_{\mu\nu|\alpha} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha}g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\alpha}g_{\rho\mu} = 0 \quad (2.4)$$

Permutando ciclicamente os três índices, mostra-se que a conexão afim $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$ é relacionada com a métrica $g_{\rho\nu}$ da seguinte maneira:

$$\Gamma^\mu_{\rho\nu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} \quad (2.5)$$

onde

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}(g_{\alpha\rho|\nu} + g_{\alpha\nu|\rho} - g_{\rho\nu|\alpha}) \quad (2.6)$$

Na geometria de Weyl, a métrica não é a única variável geométrica: a conexão afim não é expressa exclusivamente em termos dela. Uma nova variável é introduzida.

A generalização consiste em variar não só a direção de um vetor quando transportado paralelamente, mas também a sua norma. Portanto, ao invés de (2.2), temos

$$d(l^2) = l^2\phi_\lambda dx^\lambda. \quad (2.7)$$

onde l^μ é o vetor considerado, e ϕ_λ é a nova variável geométrica; ela é a medida de como a norma de um vetor muda no seu transporte paralelo ao longo do vetor infinitesimal dx^μ .

Podemos escrever

$$d(g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu) = g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \phi_\lambda dx^\lambda \quad (2.8)$$

Ou

$$g_{\mu\nu|\rho}l^\mu l^\nu + 2g_{\mu\nu}l^\mu_{|\rho}l^\nu + 2g_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\rho\alpha}l^\alpha l^\nu = g_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \phi_\rho \quad (2.9)$$

Lembre-se que o vetor l^μ está sendo transportado paralelamente, ou seja, sua variação é dada exclusivamente pela estrutura afim ($l^\mu{}_{|\rho} = 0$), essa é a razão pela qual se escreveu a derivada ordinária da métrica e a derivada covariante¹ de l^μ na equação acima.

Escrevendo $g_{\mu\nu|\rho}$ em termos das conexões e da derivada covariante, e abrindo o termo $l^\mu{}_{;\rho}$ em termos das conexões somente (pois o vetor só varia covariantemente), obtemos

$$g_{\mu\nu;\rho}l^\mu l^\nu + 2\Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}g_{\alpha\nu}l^\mu l^\nu - 2\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}g_{\mu\nu}l^\alpha l^\nu = g_{\mu\nu}\phi_\rho l^\mu l^\nu \quad (2.10)$$

$$g_{\mu\nu;\rho} = g_{\mu\nu}\phi_\rho \quad (2.11)$$

O ponto e vírgula denotam derivação covariante com a conexão não-Riemanniana $\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho} \neq \{\begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\rho \end{smallmatrix}\}$, que ainda está por ser determinada. Permutando ciclicamente os índices teremos mais duas equações. Escrevendo todas elas em termos de $\Gamma^\mu{}_{\alpha\rho}$, temos

$$g_{\mu\nu|\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}g_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}g_{\alpha\mu} = g_{\mu\nu}\phi_\rho \quad (2.12)$$

$$g_{\rho\mu|\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}g_{\alpha\rho} = g_{\rho\mu}\phi_\nu \quad (2.13)$$

$$g_{\nu\rho|\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}g_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\rho}g_{\alpha\nu} = g_{\nu\rho}\phi_\mu \quad (2.14)$$

Somando-se duas delas e depois subtraindo a outra, obtemos a expressão da conexão em função da métrica (ou da conexão Riemanniana, que é o símbolo de Christoffel):

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \{\begin{smallmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{smallmatrix}\} - \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho\phi_\nu + \delta_\nu^\rho\phi_\mu - g_{\mu\nu}\phi^\rho) \quad (2.15)$$

A partir daí, determina-se por aplicação direta a relação entre o tensor de curvatura de Weyl $\hat{R}_{\mu\nu\alpha\rho}$ e o análogo Riemanniano $R_{\mu\nu\alpha\rho}$. Na definição usual

$$\hat{R}^\mu{}_{\nu\alpha\rho} = \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha|\rho} - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho|\alpha} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\alpha}\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho}\Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} \quad (2.16)$$

¹A derivada covariante no espaço de Weyl é estruturada na sua conexão afim, que como será mostrado, não é a mesma conexão do espaço Riemanniano

substitui-se (2.15) para encontrar

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} &= R_{\mu\nu\rho\lambda} + \\ &- \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\phi_{[\rho|\lambda]} + \phi_{\mu||[\rho}g_{\lambda]\nu} - \phi_{\nu||[\rho}g_{\lambda]\mu}) + \\ &+ \frac{1}{4}(g_{\mu[\lambda}\phi_{\rho]}\phi_{\nu} - g_{\nu[\lambda}\phi_{\rho]}\phi_{\mu} + g_{\mu\nu\rho\lambda}\phi^{\alpha}\phi_{\alpha})\end{aligned}\quad (2.17)$$

onde

$$g_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}\quad (2.18)$$

e $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ é o tensor de curvatura Riemanniano, formado sobre conexões dadas por (2.6).

Contraindo μ com ρ exibimos o tensor de Ricci em n dimensões

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1-n}{2}\phi_{\mu||\nu} + \frac{1}{2}\phi_{\nu||\mu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{\lambda}{}_{||\lambda} - \frac{n-2}{4}(\phi_{\mu}\phi_{\nu} - g_{\mu\nu}\phi^{\lambda}\phi_{\lambda})\quad (2.19)$$

E o escalar de curvatura fazendo nova contração

$$\hat{R} = R + (1-n)\phi^{\lambda}{}_{||\lambda} + \frac{(n-1)(n-2)}{4}\phi^{\lambda}\phi_{\lambda}\quad (2.20)$$

Uma questão relevante é a integrabilidade do espaço. Na geometria Riemanniana, quando transportamos paralelamente um vetor ao longo de uma curva pequena fechada, sabemos que se ele não sofrer alteração ao voltar para o mesmo ponto de onde partiu, o espaço é integrável no sentido de que é possível transportar vetores ao longo de curvas globais. Mas se existir curvatura, o transporte paralelo de um vetor depende da trajetória.

Dizemos que o espaço de Weyl é integrável se a variação do comprimento de um vetor, sendo transportado paralelamente, independe do caminho por ele seguido, ou seja, se a integral sobre uma curva pequena fechada obedecer a

$$I = \oint_C \frac{dl}{l} = 0\quad (2.21)$$

A não-integrabilidade Riemanniana implica no conhecido efeito de dessincronização de relógios. Em Weyl, temos um segundo efeito de dessincronização se o espaço não for integrável.

Como

$$dl = \frac{1}{2} l \phi_\rho dx^\rho \quad (2.22)$$

então

$$I = \oint_C \frac{dl}{l} = \frac{1}{2} \oint_C \phi_\rho dx^\rho \quad (2.23)$$

Pelo teorema de Stokes, o vetor covariante ϕ_μ deve ser um gradiente para que a integral I se anule. Portanto, o espaço é de Weyl integrável (WIST – Weyl Integrable Space Time) se

$$\phi_\mu = \phi_{|\mu} \quad (2.24)$$

Aqui só será considerado o WIST, onde a entidade geométrica é o campo escalar ϕ .

Dados um campo tensorial $g_{\mu\nu}$ e um campo vetorial ϕ_μ , a geometria de Weyl está determinada. Suponha a seguinte transformação

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \psi g_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

tal que $\psi = \psi(x)$ é uma função de ponto. Suponha também a transformação do campo vetorial

$$\phi_\mu \rightarrow \bar{\phi}_\mu = \phi_\mu + \frac{\psi_{|\mu}}{\psi} \quad (2.26)$$

Escrevendo a relação (2.15) com essas quantidades, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} = \{\mu_{\rho\nu}\} &+ \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\alpha} (g_{\alpha\rho} \psi_{|\nu} + g_{\alpha\nu} \psi_{|\rho} - g_{\nu\rho} \psi_{|\alpha}) + \\ &- \frac{1}{2} (\delta_\rho^\mu \phi_\nu + \delta_\nu^\mu \phi_\rho - g_{\rho\nu} \phi^\mu) + \\ &- \frac{1}{2} (\delta_\rho^\mu \frac{\psi_{|\nu}}{\psi} + \delta_\nu^\mu \frac{\psi_{|\rho}}{\psi} - g_{\rho\nu} g^{\alpha\mu} \frac{\psi_{|\alpha}}{\psi}) \end{aligned}$$

Termos se cancelam e chegamos ao resultado

$$\bar{\Gamma}^\mu_{\rho\nu} = \Gamma^\mu_{\rho\nu} \quad (2.27)$$

A estrutura afim da geometria é invariante sob as transformações (2.25) e (2.26), que constituem uma simetria de gauge do espaço-tempo de Weyl.

2.2 Equações Dinâmicas

Tomaremos como ponto de partida o princípio variacional para a descrição matemática da gravitação. Consideraremos a seguinte ação no vácuo

$$S = \int \sqrt{g}(\hat{R} + \xi \phi^{|\rho}_{;\rho}) d^3 x \quad (2.28)$$

onde ξ é uma constante adimensional e o ponto e vírgula denota derivação covariante usando a conexão de Weyl $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ que se relaciona com o símbolo de Christoffel pela equação (2.15). \hat{R} é o escalar de curvatura no WIST, que pode ser relacionado com o escalar de curvatura Riemanniano usando $n = 3$ e o fato $\phi_\lambda = \phi_{|\lambda}$ em (2.20),

$$\hat{R} = R - 2\phi^{|\lambda}_{||\lambda} - \frac{3}{2}\phi^{|\lambda}\phi_{|\lambda} \quad (2.29)$$

definindo-se

$$\phi^{|\lambda} = g^{\lambda\rho}\phi_{|\rho} \quad (2.30)$$

Usando a expressão (2.29), podemos escrever imediatamente uma ação equivalente, sabendo que

$$\phi^{|\lambda}_{;\lambda} = \phi^{|\lambda}_{||\lambda} + \frac{3}{2}\phi^{|\lambda}\phi_{|\lambda} \quad (2.31)$$

e como o termo da divergência Riemanniana vira um termo de superfície na integral da ação, podemos escrever a ação da seguinte maneira

$$S = \int \sqrt{g}(R + \frac{1-3\xi}{2}\phi^{|\rho}\phi_{|\rho}) d^3 x \quad (2.32)$$

Esta ação gravitacional (no vácuo), definida numa estrutura de Weyl integrável, apresenta um campo escalar como uma variável geométrica, tendo inclusive um termo cinético desse campo. O presente Lagrangeano em quatro dimensões foi objeto de estudo no trabalho de Novello *et al.* [18], onde se tratava de um modelo de universo eterno.

Consideremos também um Lagrangeano de matéria para a teoria. Assim teremos

$$S = \int \sqrt{g} \left(R + \frac{1-3\xi}{2} \phi^{|\rho} \phi_{|\rho} + L_M \right) d^3x \quad (2.33)$$

As equações dinâmicas serão obtidas extremizando-se esta ação com relação às variáveis $g_{\mu\nu}$ e ϕ . Temos

$$\delta S = \delta S_1 + \int \sqrt{g} \kappa T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.34)$$

onde

$$\delta S_1 = \delta \int \sqrt{g} (R + \gamma^2 \phi^{|\lambda} \phi_{|\lambda}) \quad (2.35)$$

sendo γ^2 uma constante definida por

$$\gamma^2 = \frac{1-3\xi}{4} \quad (2.36)$$

Calculando δS_1 , escrevemos

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{g} (R + \gamma^2 \phi^{|\lambda} \phi_{|\lambda}) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ \int \sqrt{g} (\delta R + \gamma^2 \delta(\phi^{|\lambda} \phi_{|\lambda})) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sabemos que

$$\delta R = g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (2.38)$$

$$\delta(\phi^{|\lambda} \phi_{|\lambda}) = \phi_{|\lambda} \phi_{|\nu} \delta g^{\lambda\nu} + 2\phi^{|\lambda} \delta\phi_{|\lambda} \quad (2.39)$$

De acordo com a identidade de Palatini [14],

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \{ \alpha_{\mu} \})_{|\nu} - (\delta \{ \alpha_{\nu} \})_{|\mu}, \quad (2.40)$$

o termo $\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ vira uma divergência total e pode ser desprezado como termo de superfície. Então, reescrevendo (2.37), obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_1 &= \int \sqrt{g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \frac{\gamma^2}{2} g_{\mu\nu} \phi^{|\lambda} \phi_{|\lambda} + \gamma^2 \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \\ &+ 2 \int \sqrt{g} \phi^{|\lambda} \delta\phi_{|\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

O último termo pode ser escrito como

$$2 \int \sqrt{g} \phi^{|\lambda} \delta \phi_{|\lambda} = -2 \int (\sqrt{g} \phi^{|\lambda})_{|\lambda} \delta \phi = -2 \int \sqrt{g} \phi^{|\lambda}{}_{||\lambda} \delta \phi \quad (2.42)$$

Assim, as equações de movimento são

$$G_{\mu\nu} - \frac{\gamma^2}{2} g_{\mu\nu} \phi^{|\rho} \phi_{|\rho} + \gamma^2 \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

$$\square \phi = \phi^{|\lambda}{}_{||\lambda} = 0 \quad (2.44)$$

Tomando o traço da primeira, obtemos

$$R = -\gamma^2 \phi^{|\rho} \phi_{|\rho} + 2\kappa T \quad (2.45)$$

onde $\gamma^2 = \frac{1-3\xi}{2}$. Podemos então reescrever a equação de movimento da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} + \gamma^2 \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} + \kappa T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \kappa T = 0 \quad (2.46)$$

Usando a relação entre o tensor de curvatura no espaço de Weyl e o tensor Riemanniano (2.17), podemos decompor este tensor do mesmo modo que foi feito no capítulo anterior.

A decomposição do tensor de curvatura Weyliano numa parte sem traço mais os seus traços, se dará da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} &= g_{\mu\rho} R_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda} R_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda} R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} R_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} R (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) \\ &- \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \phi_{|\rho||\lambda} + \phi_{\mu||[\rho} g_{\lambda]\nu} - \phi_{\nu||[\rho} g_{\lambda]\mu}) + \\ &+ \frac{1}{4} (g_{\mu[\lambda} \phi_{\rho]} \phi_{\nu} - g_{\nu[\lambda} \phi_{\rho]} \phi_{\mu} + g_{\mu\nu\rho\lambda} \phi^\alpha \phi_\alpha) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Conforme acontece em espaços tridimensionais Riemannianos, o tensor de Riemann $\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$ não possui parte sem traço no espaço de Weyl em três dimensões. Isso é mostrado no Apêndice B. Esse resultado nos permite afirmar que a relação acima é uma decomposição numa parte sem traço, que é nula, e nos seus traços. É o análogo realizado no capítulo

anterior, com a diferença que agora o tensor não tem as mesmas simetrias do seu análogo Riemanniano.

Usando a equação de movimento no vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$),

$$R_{\mu\nu} + \gamma^2 \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} = 0 \quad (2.48)$$

podemos mostrar que o tensor de curvatura no espaço de Weyl tridimensional sem matéria, não é nulo como ocorre na teoria de Einstein no espaço Riemanniano:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = & -(\gamma^2 + \frac{1}{4})(g_{\mu[\rho}\phi_{\lambda]}\phi_{\nu} + g_{\nu[\lambda}\phi_{\rho]}\phi_{\mu} - g_{\mu\nu\rho\lambda}\phi^{\alpha}\phi_{\alpha}) + \\ & -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\phi_{[\rho|\lambda]} + \phi_{\mu|[\rho}g_{\lambda]\nu} - \phi_{\nu|[\rho}g_{\lambda]\mu}) \end{aligned}$$

No caso do WIST, onde $\phi_{\alpha} = \phi_{|\alpha}$, a equação é simplificada, tomando a seguinte forma:

$$\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -(\gamma^2 + \frac{1}{4})(g_{\mu[\rho}\phi_{|\lambda]}\phi_{|\nu} + g_{\nu[\lambda}\phi_{|\rho]}\phi_{|\mu} - g_{\mu\nu\rho\lambda}\phi^{|\alpha}\phi_{|\alpha}) \quad (2.49)$$

Isso significa que existe dinâmica gravitacional no vácuo, sendo a variável dinâmica o campo escalar $\phi(x)$.

O limite Newtoniano é tomado da mesma forma que na teoria de Einstein, sendo a única diferença a presença do termo $\gamma^2\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}$ na equação aproximada. Temos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} - h^{\rho}{}_{\mu|\nu|\rho} - h^{\rho}{}_{\nu|\mu|\rho} + h_{|\mu|\nu}) \quad (2.50)$$

Na gauge apropriada, podemos escrever a equação de movimento para campo fraco

$$\square h_{\mu\nu} = 2(-\kappa T_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\kappa T - \gamma^2\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}) \quad (2.51)$$

Novamente vemos que a geometria não se acopla com um fluido isotrópico sem pressão, como no capítulo anterior, mas agora ela se acopla com o grau dinâmico responsável pela estrutura de Weyl integrável, o campo $\phi(x)$. Note que isso só acontece se o campo

$\phi(x)$ depender explicitamente do tempo. Numa configuração estática, onde $\phi = \phi(r)$ numa distribuição circularmente simétrica, a geometria na aproximação Newtoniana não se acopla nem com o campo escalar.

2.3 Soluções

2.3.1 Espaço Isotrópico

Vamos escrever as equações dinâmicas de campo considerando um espaço métrico cujo elemento de linha é isotrópico (1.70). A configuração é homogênea, assim consideraremos o campo escalar de Weyl como dependendo somente do tempo e o tensor momento-energia de um fluido perfeito.

$$\phi = \phi(t) \quad (2.52)$$

Podemos então escrever as equações 2.46 da seguinte forma

$$2\ddot{A} - \gamma^2 \dot{\phi}^2 A - 2\kappa\lambda\rho A = 0 \quad (2.53)$$

$$A\ddot{A} + \dot{A}^2 + \epsilon + A^2\kappa\rho(1 - \lambda) = 0 \quad (2.54)$$

A identidade de Bianchi garante $G^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$, assim, aplicando a divergência na equação 2.43, podemos escrever a lei de conservação da quantidade $\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}$. A lei de conservação do objeto

$$\bar{T}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi^{|\rho}\phi_{|\rho} - \gamma^2\phi_{|\mu}\phi_{|\nu} + T_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

tem a seguinte componente não-nula

$$-\kappa\dot{\rho}A + \gamma^2\dot{\phi}\ddot{\phi}A + 2\gamma^2\dot{A}\dot{\phi}^2 - 2\kappa\rho\dot{A}(1 + \lambda) = 0 \quad (2.56)$$

A equação de movimento da variável $\phi(x)$ é escrita como

$$\ddot{\phi}A + 2\dot{A}\dot{\phi} = 0 \quad (2.57)$$

Se usarmos essa relação em 2.56 obteremos a equação

$$-\kappa\dot{\rho}A - 2\kappa\rho\dot{A}(1 + \lambda) = 0 \quad (2.58)$$

que é exatamente a mesma lei de conservação da teoria sem campo escalar

$$T^{\mu\nu}{}_{||\nu} = 0. \quad (2.59)$$

A integral primeira de (2.57) é

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha}{A^2}. \quad (2.60)$$

Podemos achar a solução geral sem matéria ($\rho = 0$), onde as equações de movimento tomam a seguinte forma:

$$2\ddot{A} - \frac{\gamma^2\alpha^2}{A^3} = 0 \quad (2.61)$$

$$A\ddot{A} + \dot{A}^2 + \epsilon = 0 \quad (2.62)$$

Substituindo a integral de (2.61),

$$\dot{A}^2 = -\frac{\alpha^2\gamma^2}{2A^2} + cte, \quad (2.63)$$

bem como a própria em (2.62), encontramos $cte = -\epsilon$. Assim, integrando mais uma vez, obtemos a solução

$$A(t) = \sqrt{-\epsilon t^2 + c_1 t + c_2} \quad (2.64)$$

O campo escalar $\phi(t)$ é dado pela integral da equação (2.60),

$$\phi(t) = C_0 \operatorname{arctanh}\left(\frac{-2\epsilon t + c_1}{\sqrt{4c_2\epsilon + c_1^2}}\right) \quad (2.65)$$

onde C_0 é uma constante de integração. O invariante \hat{R} é exibido a seguir:

$$\hat{R} = \frac{A_1 t + A_2}{A(t)^4} \quad (2.66)$$

onde A_1 e A_2 são constantes. Logo, há singularidade quando o fator $A(t)$ se anula. Para determinados valores das constantes ϵ , c_1 e c_2 , a função $A(t)$ nunca se anula.

Consideremos agora um fluido perfeito sem pressão ($\lambda = 0$). Resolveremos do mesmo modo que foi feito para o vazio. A equação (2.57) permanece inalterada, garantindo a validade de (2.61), No lugar de (2.62), temos

$$A\ddot{A} + \dot{A}^2 + \epsilon + A^2\kappa\rho = 0 \quad (2.67)$$

A lei de conservação de energia, (2.58), fornece a relação entre A e ρ :

$$\rho = \frac{cte}{A^2} \quad (2.68)$$

Substituindo isso em (2.67), concluímos que as funções $A(t)$ e $\phi(t)$ têm ainda a mesma forma funcional do caso anterior, veja (2.64) e (2.65), a menos de constantes.

2.3.2 Espaço Circularmente Simétrico

Vamos analisar a teoria para uma distribuição estática cujo elemento de linha é dado por (1.78), e o campo escalar $\phi(x)$ só depende de r , ou seja, $\phi = \phi(r)$. As equações de movimento são:

$$rB'^2A + rA'B'B - 2rB''AB - 2B'AB - 8\kappa\lambda\rho A^2B^2r = 0 \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} rB'^2A + rA'B'B - 2rB''AB + 2A'B^2 + 4\gamma^2\phi'^2B^2Ar + \\ + 4\kappa\rho A^2B^3r(1 + \lambda) - 8\kappa\lambda\rho A^2B^2r = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$A'B - B'A + 2\kappa\rho A^2B^2r(1 + \lambda) - 4\kappa\lambda\rho A^2Br = 0 \quad (2.71)$$

O campo ϕ obedece à (2.44), que aqui toma a forma

$$\phi'AB'r + 2\phi''ABr - \phi'A'Br + 2\phi'AB = 0 \quad (2.72)$$

Dividindo por $\phi' AB r$, podemos integrá-la facilmente, achando

$$\phi'^2 = \alpha^2 \frac{A}{Br^2} \quad (2.73)$$

onde α^2 é uma constante de integração. A conservação de energia segue a mesma lei para a teoria de Einstein. Vamos considerar soluções no vazio ($\rho = 0$). A equação (2.71) se reduz a

$$A'B = AB' \quad (2.74)$$

Assim, podemos escrever a relação entre A e B

$$A = cteB \quad (2.75)$$

Combinando (2.69) com (2.70) e usando (2.73), obtemos

$$A'B + AB' + 2\gamma^2 \alpha^2 \frac{A^2 B}{r} = 0 \quad (2.76)$$

que pode ser reescrita, sabendo-se que $A = cteB$, resultando na seguinte equação

$$A' + \gamma^2 \alpha^2 \frac{A}{r} = 0 \quad (2.77)$$

A solução é dada por

$$A(r) = a_0 r^{-\gamma^2 \alpha^2} \quad (2.78)$$

Aqui a_0 é uma constante de integração. O campo ϕ é submetido à seguinte equação

$$\phi' = \frac{c}{r} \quad (2.79)$$

onde c é uma constante de integração. Temos então

$$\phi(r) = \ln(r^c) \quad (2.80)$$

O elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = r^{-\gamma^2 \alpha^2} dt^2 - a_0 r^{-\gamma^2 \alpha^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 \quad (2.81)$$

Temos, por cálculo direto,

$$\hat{R} = \frac{\gamma^2 \alpha^2}{a r^{-\gamma^2 \alpha^2 + 2}} \quad (2.82)$$

Portanto pode existir singularidade em $r = 0$ se $-\gamma^2 \alpha^2 + 2 > 0$.

Capítulo 3

Teoria NDL em Três Dimensões

Neste capítulo aplicaremos uma teoria de campo da gravitação proposta por *Novello, De Lorenci e L. Rangel* [13], cujo formalismo é basicamente o de uma teoria clássica de um campo tensorial simétrico, $\phi_{\mu\nu}$, de modo que as equações dinâmicas do campo são deduzidas sem considerações geométricas, se realizando no espaço-tempo de Minkowski em coordenadas arbitrárias. A teoria é não-linear, como ocorre na teoria de Einstein, porém uma característica notável é o fato da interação gravitação-gravitação não se realizar do mesmo modo nas duas teorias.

3.1 Considerações Introdutórias

Ao longo desta seção, consideramos o espaço-tempo quadridimensional, assim, será usada a convenção

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{3.1}$$

somente no decorrer da presente seção. Seja uma Lagrangeana funcional do tensor simétrico $\phi_{\mu\nu}$ expressa em termos de um objeto fundamental tensorial de três índices.

Analogamente à teoria clássica do eletromagnetismo, onde o campo A_μ segue a dinâmica da Lagrangeana formada pelo invariante $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, sendo

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} = A_{[\mu|\nu]}, \quad (3.2)$$

o objeto fundamental a ser considerado, formado por derivadas primeiras do campo tensorial $\phi_{\mu\nu}$, é definido como

$$F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\phi_{\rho[\mu|\nu]} + \phi_{||[\mu}\gamma_{\nu]\rho} - \gamma_{\rho[\nu}\phi^{\lambda}_{\mu]||\lambda}) \quad (3.3)$$

onde $\phi = \phi^\lambda_{\lambda}$, e as derivadas covariantes são realizadas em coordenadas gerais num espaço de Minkowski, onde a métrica é $\gamma_{\mu\nu}$. Observe que o campo $F_{\mu\nu}$ nada tem em comum com $F_{\mu\nu\rho}$.

Podemos escrever mais compactamente:

$$F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}(\phi_{\mu[\alpha|\beta]} + F_{[\alpha}\gamma_{\beta]\mu}) \quad (3.4)$$

onde $F_\alpha = F_{\alpha\mu}{}^\mu$. Este tensor, que analogamente ao eletromagnetismo pode ser chamado de campo gravitacional, tem as seguintes simetrias:

$$F_{\alpha\beta\mu} + F_{\beta\alpha\mu} = 0 \quad (3.5)$$

$$F_{\alpha\beta\mu} + F_{\mu\alpha\beta} + F_{\beta\mu\alpha} = 0 \quad (3.6)$$

3.1.1 Teoria Linear de Fierz

A teoria linear de Fierz pode ser formulada com base nos invariantes A e B , definidos a seguir

$$A = F_{\alpha\beta\mu}F^{\alpha\beta\mu} \quad (3.7)$$

$$B = F_\alpha F^\alpha \quad (3.8)$$

A ação

$$S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma} (A - B) \quad (3.9)$$

fornece a teoria linear do campo $\phi_{\mu\nu}$, descrita pela equação de Fierz. Note que γ é o determinante da métrica, que em coordenadas cartesianas vale -1. Pelo princípio variacional, temos

$$\delta S^L = \int d^4x \sqrt{-\gamma} (\delta A - \delta B) = 0 \quad (3.10)$$

Depois de algumas manipulações, concluímos que

$$\int d^4x \sqrt{-\gamma} F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{||\alpha} \delta\phi^{\mu\nu} \quad (3.11)$$

onde o objeto $F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{||\alpha}$ é o tensor de Einstein linearizado

$$G_{\mu\nu}^{(L)} = \frac{1}{2} (\phi_{(\mu|\nu)|\rho}^\rho + \square\phi_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu}\square\phi + \gamma_{\mu\nu}\phi^{\rho\alpha}{}_{|\rho\alpha} + \phi_{|\mu|\nu}) \quad (3.12)$$

A teoria NDL é formulada com base nos mesmos invariantes A e B , mas sua Lagrangeana é um funcional diferente, de modo a produzir uma equação de movimento não-linear, diferentemente da equação de Fierz, que traduz uma teoria linear. A título de analogia, veja no Apêndice *C* uma análise resumida sobre uma teoria não-linear do eletromagnetismo. No Apêndice *D* segue-se um resumo da teoria NDL em quatro dimensões.

3.2 Teoria NDL em Três Dimensões

Em três dimensões vamos considerar a mesma definição do campo gravitacional $F_{\mu\nu\alpha}$, dada por (3.3), que pode ser escrita como

$$F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} (\phi_{\mu[\alpha||\beta]} + 2F_{[\alpha\gamma\beta]\mu}) \quad (3.13)$$

As mesmas simetrias continuam válidas. No eletromagnetismo, a derivada do campo, $F_{\mu\nu||\alpha}$, apresenta uma simetria cíclica, devido ao modo como é definido em termos do vetor

potencial A_μ . Analogamente, mostraremos que existe uma simetria cíclica na quantidade $F_{\alpha\beta\mu|\nu}$. Levando em conta (3.3), escrevemos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}{}^\rho{}_{||\lambda} + F_{\lambda\mu}{}^\rho{}_{||\nu} + F_{\nu\lambda}{}^\rho{}_{||\mu} &= \frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\mu|\nu]||\lambda} + \frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\lambda|\mu]||\nu} + \frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\nu|\lambda]||\mu} + \\ &+ \delta^\rho{}_{[\nu}F_{\mu]||\lambda} + \delta^\rho{}_{[\mu}F_{\lambda]||\nu} + \delta^\rho{}_{[\lambda}F_{\nu]||\mu} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como

$$\frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\mu|\nu]||\lambda} + \frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\lambda|\mu]||\nu} + \frac{1}{2}\phi^\rho{}_{[\nu|\lambda]||\mu} = 0 \quad (3.15)$$

Obtemos então a seguinte relação de simetria:

$$F_{\mu\nu}{}^\rho{}_{||\lambda} + F_{\lambda\mu}{}^\rho{}_{||\nu} + F_{\nu\lambda}{}^\rho{}_{||\mu} = \delta^\rho{}_{[\nu}F_{\mu]||\lambda} + \delta^\rho{}_{[\mu}F_{\lambda]||\nu} + \delta^\rho{}_{[\lambda}F_{\nu]||\mu} \quad (3.16)$$

Vejamos os invariantes sobre o qual podemos construir a Lagrangeana. As quantidades A e B já são conhecidas. Podemos definir as seguintes operações duais sobre o objeto $F_{\alpha\beta\mu}$

$$F^*{}_{\alpha\beta\nu\rho} = \eta_{\mu\alpha\beta}F^\mu{}_{\nu\rho} \quad (3.17)$$

$$F^*{}_{\nu\rho} = \eta_{\mu\nu\rho}F^\mu \quad (3.18)$$

$$\hat{F}_{\nu\rho} = \eta_{\nu\tau\sigma}F^{\tau\sigma}{}_\rho \quad (3.19)$$

onde $\eta_{\mu\nu\rho} = \sqrt{\gamma}\epsilon_{\mu\nu\rho}$ (tensor de Levi-Civita). As duas últimas relações são contrações da primeira. Ao construir invariantes a partir das quantidades duais, conclui-se que são necessárias contrações entre dois objetos duais, pois escalares formados por contrações envolvendo apenas um campo dual seriam produtos entre três campos $\phi_{\mu\nu}$. Como

$$\eta_{\mu\nu\alpha}\eta^{\mu\tau\sigma} = \delta_\nu^\tau\delta_\alpha^\sigma - \delta_\alpha^\tau\delta_\nu^\sigma \quad (3.20)$$

Podemos então calcular diretamente os invariantes formados por duais, mostrando que eles se reduzem aos invariantes conhecidos A e B :

$$I_1 = F^*{}_{\alpha\beta\nu\rho}F^{*\alpha\beta\nu\rho} = 2A \quad (3.21)$$

$$I_2 = F^*{}_{\nu\rho} F^{*\nu\rho} = 2B \quad (3.22)$$

$$I_3 = \hat{F}_{\nu\rho} \hat{F}^{\nu\rho} = 2A \quad (3.23)$$

$$I_4 = F^*{}_{\nu\rho} \hat{F}^{\nu\rho} = 2B \quad (3.24)$$

A Lagrangeana será um funcional de A e B . Fazendo sua variação, obtemos cálculos que são análogos aos feitos em quatro dimensões, porém não idênticos. Temos

$$\delta L = 2L_A F^{\mu\nu\rho} \delta F_{\mu\nu\rho} + 2L_B F^\mu \delta F_\mu \quad (3.25)$$

Usando a definição de $F_{\mu\nu\alpha}$, escrevemos

$$\delta F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\delta\phi_{\rho[\mu|\nu]} + 2\delta F_{[\mu}\gamma_{\nu]\rho}) \quad (3.26)$$

E como consequência,

$$\delta L = 2L_A F^{\mu\nu\rho} \delta\phi_{\rho\mu,\nu} + (4L_A + 2L_B) F^\mu \delta F_\mu \quad (3.27)$$

Observe que se a Lagrangeana for tal que

$$2L_A + L_B = 0 \quad (3.28)$$

A equação de movimento será

$$(L_A F^{\mu(\nu\rho)})_{||\mu} = 0 \quad (3.29)$$

Tomaremos a seguinte Lagrangeana (veja o Apêndice D), que obedece à condição (3.28),

$$L(A, B) = \frac{1}{\kappa} b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{A - 2B}{b^2}} - 1 \right\} \quad (3.30)$$

onde κ tem dimensões de inverso da massa e a constante b , de inverso de comprimento.

Da mesma forma que nos capítulos anteriores, a teoria NDL não possui o limite Newtoniano para campo fraco estático num fluido sem pressão. Podemos escrever a equação (3.29)

$$L_{A|\mu} F^{\mu(\nu\rho)} + L_A F^{\mu(\nu\rho)}_{||\mu} = 0 \quad (3.31)$$

Como

$$F^\alpha_{(\mu\nu)|\alpha} = G_{\mu\nu}^{(L)} \quad (3.32)$$

A equação dinâmica na aproximação de campo fraco se reduzirá à equação da teoria de Einstein nesse limite.

Ondas Gravitacionais

Mostraremos agora como se dará a propagação das ondas gravitacionais nessa teoria. Veremos que aqui ela se diferencia da propagação na teoria de Einstein (o que também acontece em quatro dimensões). Sua trajetória é caracterizada por uma curva cujo vetor tangente, em qualquer ponto da curva, é normal à frente de onda, ou superfície característica Σ , que é idealizada como uma superfície das descontinuidades.

As quantidades que são descontínuas sobre Σ são as derivadas segundas do campo $\phi_{\mu\nu}$. No contexto da primeira parte do capítulo 1, sobre ondas gravitacionais na teoria de Einstein, a equação dinâmica não é suficiente para determinar as quantidades descontínuas sobre Σ . Trata-se de uma perturbação que foge ao controle da teoria, que se propaga sobre uma curva cuja forma está, no entanto, relacionada com as equações de movimento da teoria. Essa curva, chamada de curva bicaracterística, é uma geodésica nula considerando descontinuidades do campo gravitacional na teoria de Einstein, conforme mostrado anteriormente, porém a trajetória não é a mesma na teoria NDL, o que caracteriza uma notável diferença entre as duas teorias.

Aqui usaremos o método de Hadamard (para detalhes, veja o Apêndice *E*). Assim, a descontinuidade em Σ é descrita por

$$[F_{\mu\nu\alpha;\lambda}]_\Sigma = f_{\mu\nu\alpha} k_\lambda \quad (3.33)$$

e o objeto $F_{\mu\nu\alpha}$ não sofre descontinuidades. Aplicando esta relação nas equações de

movimento, teremos

$$[L_{A|\alpha}]_{\Sigma} F^{\alpha}_{(\mu\nu)} + L_A f^{\alpha}_{(\mu\nu)} k_{\alpha} = 0 \quad (3.34)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} L_{A|\alpha} &= 2(L_{AA} F^{\sigma\lambda\rho} F_{\sigma\lambda\rho|\alpha} + L_{AB} F^{\rho} F_{\rho|\alpha}) \\ &= 2L_{AA} (F^{\sigma\lambda\rho} F_{\sigma\lambda\rho|\alpha} - 2F^{\rho} F_{\rho|\alpha}) \end{aligned}$$

onde $L_{AA} = d^2 L/dA^2$ e $L_{AB} = L_{BA} = d^2 L/dA dB$. Assim

$$[L_{A|\alpha}]_{\Sigma} = 2L_{AA}(\eta - 2\psi)k_{\alpha} \quad (3.35)$$

sendo η e ψ dados pelas relações (D.12) e (D.13). Obtemos então que

$$f_{\alpha(\mu\nu)} k^{\alpha} = -2 \frac{L_{AA}}{L_A} (\eta - 2\psi) F_{\alpha(\mu\nu)} k^{\alpha} \quad (3.36)$$

Aplicamos agora (3.33) na relação de simetria (3.16), encontrando

$$f_{\mu\nu}{}^{\rho} k_{\lambda} + f_{\lambda\mu}{}^{\rho} k_{\nu} + f_{\nu\lambda}{}^{\rho} k_{\mu} = \delta_{[\nu}^{\rho} f_{\mu]} k_{\lambda} + \delta_{[\lambda}^{\rho} f_{\nu]} k_{\mu} + \delta_{[\mu}^{\rho} f_{\lambda]} k_{\nu} \quad (3.37)$$

Multiplicando isso por $F^{\mu\nu}{}_{\rho} k^{\lambda}$ obtemos

$$\begin{aligned} \eta k^{\lambda} k_{\lambda} + 2F^{\mu\nu\rho} f_{\lambda\mu\rho} k^{\lambda} k_{\nu} &= 2\psi k^{\lambda} k_{\lambda} + F^{\mu\nu\rho} f_{\nu} k_{\rho} k_{\mu} + \\ &\quad - 2F^{\mu} f_{\lambda} k^{\lambda} k_{\mu} - F^{\mu\nu\rho} f_{\mu} k_{\rho} k_{\nu} \\ (\eta - 2\psi) k^2 - 2F^{\nu\mu\rho} f_{\lambda\mu\rho} k^{\lambda} k_{\nu} &- 2F^{\mu\nu\rho} f_{\nu} k_{\rho} k_{\mu} + \\ &\quad + 2F^{\mu} f^{\lambda} k_{\lambda} k_{\mu} = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Levando em conta as simetrias do objeto $f_{\mu\nu\rho}$, que são as mesmas de $F_{\mu\nu\rho}$, podemos escrever

$$2f_{\lambda\mu\rho} = f_{\lambda(\mu\rho)} + f_{\rho\mu\lambda} \quad (3.39)$$

Assim,

$$F^{\nu\mu\rho} f_{\lambda\mu\rho} = \frac{1}{2} F^{\nu\mu\rho} f_{\lambda(\mu\rho)} - \frac{1}{2} F^{\nu\mu\rho} f_{\mu\rho\lambda} \quad (3.40)$$

O último termo do segundo membro da equação anterior se anula. Somente a parte completamente antissimétrica do tensor $F^{\nu\mu\rho}$ sobrevive na contração com $f_{\mu\rho\lambda}$, uma vez que este tensor é antissimétrico nos dois primeiros índices. Sua parte totalmente antisimétrica, $F^{\nu[\mu\rho]}$, é escrita do seguinte modo, em termos de $F^{\nu\mu\rho}$:

$$F^{\nu[\mu\rho]} = F^{\nu\mu\rho} + F^{\rho\nu\mu} + F^{\mu\rho\nu} \quad (3.41)$$

Da simetria cíclica, vemos que $F^{\nu\mu\rho} f_{\mu\rho\lambda}$ se anula identicamente. Então, podemos reescrever (3.38)

$$\begin{aligned} (\eta - 2\psi)k^2 - F^{\nu\mu\rho} f_{\lambda(\mu\rho)} k^\lambda k_\nu - 2F^{\mu\nu\rho} f_\nu k_\rho k_\mu + \\ + 2F^\mu f^\lambda k_\lambda k_\mu = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

O termo $2F^{\mu\nu\rho} f_\nu k_\rho k_\mu$ é nulo devido às as simetrias de $F^{\mu\nu\rho}$. Pode-se eliminar as quantidades desconhecidas $f_{\lambda(\mu\rho)}$ e f^λ usando a equação (3.36) bem como sua contração. Encontramos

$$\{\gamma_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\} k^\mu k^\nu = 0 \quad (3.43)$$

onde

$$\Lambda_{\mu\nu} = 2 \frac{L_{AA}}{L_A} \{F_\mu^{\alpha\rho} F_{\nu(\alpha\rho)} - 2F_\mu F_\nu\} \quad (3.44)$$

A luz se propaga sobre geodésicas nulas da geometria dada por $h^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu}$. Assim,

$$h^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = 0 \quad (3.45)$$

onde l_μ é o vetor de onda da luz, tangente à sua trajetória.

Aqui, as ondas gravitacionais seguem a mesma trajetória das ondas submetidas à teoria de Einstein numa métrica $\gamma_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}$, ou seja, seguem geodésicas nulas nessa métrica *efetiva*.

Note que não se trata da mesma métrica *vista* pela matéria, $\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$. Isso significa que a interação matéria-gravitação é distinta da interação gravitação-gravitação, caracterizando uma diferença fundamental entre as teorias.

3.3 Soluções

A teoria tem o objetivo de descrever a gravitação. Considera-se uma geometria efetiva dada pela métrica

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu} \quad (3.46)$$

3.3.1 Simetria Circular

Vamos achar uma solução no vácuo para uma distribuição estática circularmente simétrica, onde o campo $\phi_{\mu\nu}$ tem as seguintes componentes não nulas,

$$\phi_{00} = \mu(r) \quad (3.47)$$

$$\phi_{11} = -\nu(r) \quad (3.48)$$

e o espaço sobre o qual a teoria é formulada, de Minkowski, é tal que

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 \quad (3.49)$$

As únicas componentes do tensor $F_{\alpha\beta\mu}$ são

$$F_{100} = -\frac{1}{2} \frac{\nu(r)}{r} \quad (3.50)$$

$$F_{122} = -\frac{1}{2} r^2 \mu'(r) \quad (3.51)$$

onde $\mu' = \frac{d\mu(r)}{dr}$. Logo

$$F_1 = \frac{1 - \nu(r) + \mu'(r)r}{2r} \quad (3.52)$$

Um cálculo direto exhibe os escalares A e B :

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{1}{2} \mu'^2 \quad (3.53)$$

$$B = -\frac{(\nu - \mu' r)^2}{4r^2} \quad (3.54)$$

Temos também

$$L_A = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu'\nu}{rb^2}}} \quad (3.55)$$

$$F^{\alpha}_{00|\alpha} = \frac{\nu'}{2r} \quad (3.56)$$

$$F^{\alpha}_{11|\alpha} = \frac{\mu'}{2r} \quad (3.57)$$

$$F^{\alpha}_{22|\alpha} = \frac{r\mu''}{2} \quad (3.58)$$

A equação dinâmica tem componente radial (11)

$$\mu' = 0 \quad (3.59)$$

que substituída na componente temporal (00), nos fornece

$$\nu' = 0 \quad (3.60)$$

Portanto a geometria efetiva tem o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - a dr^2 - r^2 d\theta^2 \quad (3.61)$$

Esta solução é idêntica à solução da teoria de Einstein, em 3 dimensões. O espaço é plano no vácuo e apresenta uma singularidade na origem, pois a quantidade

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta L \sqrt{\gamma}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} \quad (3.62)$$

explode em $r = 0$.

Embora esse seja um exemplo onde não há curvatura no vácuo, veremos outro exemplo onde existe curvatura no vazio.

Ondas Gravitacionais

Para comparar a velocidade de propagação das ondas gravitacionais com as ondas eletromagnéticas, basta examinar o sinal da grandeza

$$\alpha = g^{\mu\nu} l_\mu l_\nu \quad (3.63)$$

que é a norma da velocidade da luz calculada na geometria sobre a qual a gravitação se propaga sobre geodésicas nulas. Se α for maior que zero, l_μ é um vetor tipo-tempo nessa geometria, e se for menor que zero, o vetor é tipo-espaço.

Calculando essa quantidade para a solução circularmente simétrica, obtemos

$$\alpha = \left(1 - \frac{a^2}{4b^2} \frac{1}{r^2}\right) l_0^2 - l_1^2 - \frac{1}{r^2} l_2^2 \quad (3.64)$$

Levando em conta (3.43) e (3.45), concluímos que

$$\alpha = \left(\frac{1}{a} - 1\right) l_1^2 - \frac{a^2}{4b^2} \frac{1}{r^2} l_0^2 \quad (3.65)$$

Esta quantidade é sempre menor do que zero, pois a constante a , positiva, é maior do que 1, pois consideramos a representação do espaço-tempo dada por um cone (veja o Capítulo 1). Assim, o cone da onda gravitacional está no interior do cone de luz.

3.3.2 Espaço Isotrópico

Agora vamos definir o seguinte campo $\phi_{\mu\nu}$:

$$\phi_{11} = \phi_{22} = 1 - a(x, y, t) \quad (3.66)$$

Assim, o elemento de linha da geometria efetiva será dado por

$$ds^2 = dt^2 - a(x, y, t)(dx^2 + dy^2) \quad (3.67)$$

É claro que usaremos $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

A geometria tipo RW, onde a seção espacial é isotrópica, é apenas um caso particular de (3.67), onde teríamos especificamente

$$a(x, y, t) = \frac{A^2(t)}{(1 + \frac{er^2}{4})^2} \quad (3.68)$$

As únicas componentes do tensor $F_{\alpha\beta\mu}$ são

$$F_{100} = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x} \quad (3.69)$$

$$F_{011} = F_{022} = -\frac{1}{2} \dot{a} \quad (3.70)$$

$$F_{200} = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial y} \quad (3.71)$$

Assim,

$$F_0 = \dot{a} \quad (3.72)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial x} \quad (3.73)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial y} \quad (3.74)$$

Onde $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$. Um cálculo direto exhibe os escalares A e B :

$$A = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 + \dot{a}^2 \quad (3.75)$$

$$B = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 + \dot{a}^2 \quad (3.76)$$

Temos também

$$L_A = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{a}^2}{b^2}}} \quad (3.77)$$

$$F^{\alpha}_{00||\alpha} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\right) \quad (3.78)$$

$$F^{\alpha}_{11||\alpha} = F^{\alpha}_{22||\alpha} = -\frac{1}{2}\ddot{a} \quad (3.79)$$

$$F^{\alpha}_{(10)||\alpha} = -\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} \quad (3.80)$$

$$F^{\alpha}_{(20)||\alpha} = -\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial t} \quad (3.81)$$

As equações de campo, no **vácuo**, são

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = 0 \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial t} = 0 \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \quad (3.84)$$

Obtemos facilmente a solução homogênea

$$a(t) = \alpha t + \beta \quad (3.85)$$

Levando em conta (3.68), isto equivale a:

$$A(t) = \sqrt{\alpha t + \beta} \quad (3.86)$$

e

$$\epsilon = 0 \quad (3.87)$$

Suponhamos então que partículas de prova percorram trajetórias nesta solução, que são geodésicas numa geometria efetiva, cujo elemento de linha é

$$ds^2 = dt^2 - (at + b)(dx^2 + dy^2) \quad (3.88)$$

podemos calcular o tensor de curvatura, que tem as componentes não nulas

$$R_{0101} = R_{0202} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{at + b} \quad (3.89)$$

$$R_{1212} = \frac{1}{4}a^2 \quad (3.90)$$

Observe a diferença notável entre esta teoria e a Einsteiniana, onde o tensor de curvatura é identicamente zero no vazio. Contrariamente, o espaço-tempo considerado admite um tensor de curvatura não-nulo, o que caracteriza o grau dinâmico da teoria no vácuo, o que representa uma vantagem sobre a teoria de Einstein tridimensional.

Ondas Gravitacionais

A fim de comparar a velocidade de propagação das ondas gravitacionais com as ondas eletromagnéticas, examinemos para este caso o sinal da grandeza

$$\xi = g^{\mu\nu} l_\mu l_\nu \quad (3.91)$$

Calculando essa quantidade para a solução espacialmente isotrópica, obtemos

$$\xi = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + b^2} (l_0^2 + \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}) \quad (3.92)$$

Levando em conta (3.43) e (3.45), concluímos que

$$\xi = -\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + b^2} l_0^2 (1 + \frac{1}{\alpha t + \beta}) \quad (3.93)$$

Esta quantidade é sempre menor do que zero, ou seja, o cone da onda gravitacional está no interior do cone de luz, de modo que a propagação gravitacional se dá com uma velocidade crescente no tempo, ou seja, seu cone vai alargando até um limite que ainda está no interior do cone de luz.

Conclusão

Vimos que a teoria de Einstein em três dimensões tem como característica marcante a ausência de graus dinâmicos de liberdade no vácuo, que é um fato já conhecido. Tendo em vista as motivações de tal estudo, enfatizamos mais uma vez que esta notável propriedade constitui uma desvantagem na perspectiva de uma teoria quântica de gravitação em três dimensões, na qual o vácuo não poderia ser analisado dinamicamente.

Em contrapartida, apresentamos dois cenários onde a dinâmica gravitacional existe na ausência de energia (vácuo). Ressaltamos o caráter totalmente clássico de nosso estudo. No WIST, a geometria apresenta uma dinâmica no espaço vazio. Mostramos também que a teoria NDL admite como solução no vácuo um espaço-tempo cuja métrica efetiva,

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu} \quad (3.94)$$

é uma quantidade dinâmica. Isto é o efeito da notável propriedade que diferencia a teoria de Einstein da teoria NDL, que é o diferente acoplamento da gravitação com ela mesma. Embora não diretamente relacionada ao presente trabalho, vimos também um efeito importante na propagação da onda gravitacional, substancialmente distinta da propagação na teoria de Einstein, sendo um fato presente não só em quatro dimensões, mas também no espaço-tempo tridimensional.

Apêndice A

O Potencial Gravitacional

Newtoniano em Três Dimensões

Consideremos uma teoria gravitacional Newtoniana em três dimensões. Vamos supor que ela seja descrita pela equação de Poisson em duas dimensões

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{A.1}$$

Vamos mostrar que, usando o teorema de Stokes, podemos integrar a equação acima numa superfície S e achar a forma funcional do potencial ϕ para uma distribuição circularmente simétrica.

O teorema de Stokes [16] é

$$\int_G d\omega = \int_{\partial G} \omega \tag{A.2}$$

onde G é o espaço de integração, ∂G é sua fronteira e $d\omega$ é a derivada exterior da n -forma ω .

Considere a $(n-1)$ -forma

$$\omega = A^j \pi_j \tag{A.3}$$

onde

$$\pi_j = (-1)^{j+1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{A.4})$$

A derivada exterior de ω é dada por

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_j A^j_{|k} (-1)^{j+1} dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= A^j_{|j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando o teorema de Stokes, temos

$$\int_G A^j_{|j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\partial G} \sum_j A^j (-1)^{j+1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{A.6})$$

que para $n = 3$ é o teorema de Gauss. Trataremos do teorema em $n = 2$, que toma a seguinte forma:

$$\int_G \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dx^1 \wedge dx^2 = \int_{\partial G} A^1 dx^2 - A^2 dx^1 \quad (\text{A.7})$$

que pode ser escrito numa notação mais fácil

$$\int_G \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dS = \int_{\partial G} \vec{A} \cdot \hat{n} dl \quad (\text{A.8})$$

onde \hat{n} é o vetor normal à curva ∂G , fronteira da superfície G , e está dirigido para fora da curva. A integração é feita no sentido anti-horário.

Vamos agora aplicar esse teorema para exibir a forma funcional do potencial gravitacional Newtoniano numa configuração circularmente simétrica. Partiremos do postulado de que a teoria de Newton no espaço-tempo tridimensional é descrita pela equação de Poisson (em duas dimensões)

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.9})$$

Integrando os dois membros numa superfície S , obtemos

$$\int_S \vec{\nabla} \cdot \vec{f} dS = - \int_S 4G\pi \rho dS \quad (\text{A.10})$$

onde $\vec{f} = -\vec{\nabla}.\phi$ é a força gravitacional. Aplicando (A.8), podemos escrever

$$\int_{\partial S} \vec{f} \cdot \hat{n} dl = -4G\pi m_i \quad (\text{A.11})$$

sendo m_i a massa total contida no interior da superfície. Para uma distribuição circularmente simétrica, escolheremos como curva ∂G um círculo cujo centro é a origem das coordenadas, para assim podermos retirar a força $\vec{f} = f(r)\hat{r}$ do integrando, pois nesse caso sua dependência é puramente radial. Obtemos

$$4G\pi m_i = -\pi f(r)r \quad (\text{A.12})$$

$$f(r) = -\frac{4Gm_i}{r} \quad (\text{A.13})$$

Integrando esta equação, acharemos o potencial gravitacional:

$$\phi(r) = \int_{r_0}^r 4m_i G \frac{dr}{r} = \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{A.14})$$

Podemos escolher um valor para r_0 , por exemplo, $r_0 = 1$. Assim,

$$\phi(r) = 4m_i G \ln(r) \quad (\text{A.15})$$

Apêndice B

Parte sem Traço do Tensor de Curvatura no Espaço de Weyl Tridimensional

O tensor de curvatura de um espaço de Weyl em n dimensões é dado pela equação (2.17), a saber

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} &= R_{\mu\nu\rho\lambda} + \\ &- \frac{1}{2}(g_{\mu\nu}\phi_{[\rho][\lambda]} + \phi_{\mu}[[\rho g\lambda]\nu] - \phi_{\nu}[[\rho g\lambda]\mu]) + \\ &+ \frac{1}{4}(g_{\mu[\lambda}\phi_{\rho]}\phi_{\nu} - g_{\nu[\lambda}\phi_{\rho]}\phi_{\mu} + g_{\mu\nu\rho\lambda}\phi^{\alpha}\phi_{\alpha})\end{aligned}\tag{B.1}$$

Sendo assim, ele perde as simetrias do tensor de curvatura Riemanniano. A identidade de Bianchi não é satisfeita para o tensor, que possui apenas uma simetria:

$$\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} = -\hat{R}_{\mu\nu\lambda\rho}\tag{B.2}$$

Ao decompor este tensor numa parte sem traço e nos seus traços, devemos notar os seus traços independentes, em maior quantidade que no caso Riemanniano, devido à menor

quantidade de simetrias. Eis os traços independentes:

$$T_a = \hat{R}^\alpha_{\alpha\rho\lambda} \quad (\text{B.3})$$

$$T_b = \hat{R}^\alpha_{\nu\alpha\lambda} = \hat{R}_{\nu\lambda} = -\hat{R}^\alpha_{\nu\lambda\alpha} \quad (\text{B.4})$$

$$T_c = \hat{R}_{\mu}{}^\alpha{}_{\rho\alpha} = -\hat{R}_{\mu}{}^\alpha{}_{\alpha\rho} \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{R} = \hat{R}^\alpha_{\alpha} = \hat{R}^{\beta\alpha}{}_{\beta\alpha} \quad (\text{B.6})$$

Note que pela relação (2.19), o tensor $\hat{R}_{\nu\lambda}$ não é simétrico. A parte sem traço de $\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$ será calculada subtraindo-se todas as combinações de traços considerando-se a antissimetria nos índices ρ e λ .

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\mu\nu\rho\lambda} = & \hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} - a_1 g_{\mu\nu} \hat{R}^\alpha_{\alpha\rho\lambda} + a_2 (-g_{\mu\rho} \hat{R}^\alpha_{\alpha\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} \hat{R}^\alpha_{\alpha\nu\rho}) + \\ & - a_4 g_{\rho\lambda} \hat{R}^\alpha_{\alpha\mu\nu} + a_5 (-g_{\nu\lambda} \hat{R}^\alpha_{\alpha\mu\rho} + g_{\nu\rho} \hat{R}^\alpha_{\alpha\mu\lambda}) - b_1 g_{\mu\nu} (\hat{R}_{\rho\lambda} - \hat{R}_{\lambda\rho}) + \\ & + b_2 (-g_{\mu\rho} \hat{R}_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} \hat{R}_{\nu\rho}) + b_3 (g_{\nu\rho} \hat{R}_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda} \hat{R}_{\mu\rho}) + \\ & + b'_2 (g_{\mu\lambda} \hat{R}_{\rho\nu} - g_{\mu\rho} \hat{R}_{\lambda\nu}) + b'_3 (g_{\nu\rho} \hat{R}_{\lambda\mu} + \\ & + c_1 (g_{\nu\rho} \hat{R}_{\mu}{}^\alpha{}_{\lambda\alpha} - g_{\nu\lambda} \hat{R}_{\mu}{}^\alpha{}_{\rho\alpha}) - c_2 (g_{\mu\lambda} \hat{R}_{\nu}{}^\alpha{}_{\rho\alpha} - g_{\mu\rho} \hat{R}_{\nu}{}^\alpha{}_{\lambda\alpha}) + \\ & + c_3 g_{\mu\nu} (\hat{R}_{\rho}{}^\alpha{}_{\lambda\alpha} - \hat{R}_{\lambda}{}^\alpha{}_{\rho\alpha}) + c'_1 (g_{\nu\rho} \hat{R}_{\lambda}{}^\alpha{}_{\mu\alpha} - g_{\nu\lambda} \hat{R}_{\rho}{}^\alpha{}_{\mu\alpha}) + \\ & + c'_2 (g_{\mu\lambda} \hat{R}_{\rho}{}^\alpha{}_{\nu\alpha} - g_{\mu\rho} \hat{R}_{\lambda}{}^\alpha{}_{\nu\alpha}) - df_{\mu\nu\rho\lambda} \hat{R} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde $f_{\mu\nu\rho\lambda}$ é formado somente pela métrica, e tem a mesma simetria de $\hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda}$, impondo

$$f_{\mu\nu\rho\lambda} = g_{\mu\nu\rho\lambda} \quad (\text{B.8})$$

Para se determinar os coeficientes da equação acima, basta calcular todos os traços de $\hat{W}_{\mu\nu\rho\lambda}$ e igualá-los a zero, resultando num sistema de 15 equações a 13 incógnitas. Calculando o traço $\hat{W}^\alpha_{\alpha\rho\lambda}$ escrevemos

$$\begin{aligned} \hat{W}^\alpha_{\alpha\rho\lambda} = & (1 - na_1 - 2a_2 + 2a_5) \hat{R}^\alpha_{\alpha\rho\lambda} + (-nb_1 - b_2 + b_3 + b'_2 + \\ & - b'_3) (\hat{R}_{\rho\lambda} - \hat{R}_{\lambda\rho}) + (-nc_3 - c_1 + c_2 + c'_1 - c'_2) (\hat{R}_{\lambda}{}^\alpha{}_{\rho\alpha} + \\ & - \hat{R}_{\rho}{}^\alpha{}_{\lambda\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Os traços restantes são

$$\begin{aligned}
\hat{W}^{\alpha}_{\nu\alpha\lambda} &= (-a_1 - na_2 + a_2 + a_5)\hat{R}^{\alpha}_{\nu\alpha\lambda} + (1 - b_1 - nb_2 + b_2 + b_3)\hat{R}_{\nu\lambda} + \\
&+ (b_1 - nb'_2 + b'_2 + b'_3)\hat{R}_{\lambda\nu} + (c_1 - nc_2 + c_2 + c_3)\hat{R}_{\nu}^{\alpha}\lambda_{\alpha} + \\
&+ (c'_1 - nc'_2 + c'_2 - c_3)\hat{R}_{\lambda}^{\alpha}\nu_{\alpha} - (d(n-1) + b_3 + b'_3 + c_1 + \\
&+ c'_1)g_{\nu\lambda}\hat{R}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{W}_{\mu}^{\alpha\rho\alpha} &= (-a_1 - a_2 + na_5 - a_5)\hat{R}^{\alpha}_{\alpha\rho\mu} + (b_1 + b_2 - nb_3 + b_3)\hat{R}_{\mu\rho} + \\
&+ (-b_1 + b'_2 - nb'_3 + b'_3)\hat{R}_{\rho\mu} + (1 - nc_1 + c_1 + c_2 - c_3)\hat{R}_{\mu}^{\alpha}\rho_{\alpha} + \\
&+ (-nc'_1 + c'_1 + c'_2 + c_3)\hat{R}_{\rho}^{\alpha}\mu_{\alpha} - ((n-1)d + b_2 + b'_2 + c_2 + \\
&+ c'_2)g_{\mu\rho}\hat{R}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Impondo que esses traços sejam nulos, todos os coeficientes acima devem ser zero. Esta condição nos dá uma sistema de 15 equações a 13 variáveis. Basta escolher 13 dessas equações para determinar a solução. As duas restantes serão automaticamente satisfeitas.

A solução é

$$a_1 = a_5 = -a_2 = -b_1 = -c_3 = \frac{n}{n^2 - 4} \tag{B.12}$$

$$b_2 = c_1 = \frac{n^2 + n - 1}{n(n^2 - 4)} \tag{B.13}$$

$$c_2 = b_3 = \frac{n + 1}{n(n^2 - 4)} \tag{B.14}$$

$$c'_1 = -c'_2 = b'_2 = -b'_3 = \frac{1}{n(n^2 - 4)} \tag{B.15}$$

Substituindo esses valores na decomposição (B.7), obtemos a expressão da parte sem traço do tensor de curvatura num espaço de Weyl de n dimensões. Calculemos essa quantidade $\hat{W}_{\mu\nu\rho\lambda}$, em três dimensões, ainda num espaço de Weyl não-integrável. Levando em conta (B.12), (B.13), (B.14), (B.15), (B.1), (2.19) e (2.20), e escrevendo (B.7) para $n = 3$,

obtemos, omitindo alguns cálculos,

$$\begin{aligned}\hat{W}_{\mu\nu\rho\lambda} &= \hat{R}_{\mu\nu\rho\lambda} - g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} + g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda} + \\ &+ \frac{1}{2}g_{\mu\nu\rho\lambda}R + A_{\mu\nu\rho\lambda}\end{aligned}\tag{B.16}$$

onde o tensor $A_{\mu\nu\rho\lambda}$, formado por $g_{\mu\nu}$, ϕ_μ e suas derivadas, se anula identicamente, só sobrando o termo que é o tensor de Weyl no espaço de Riemann tridimensional, que sabemos ser zero também.

Assim obtemos o resultado de que a parte sem traço da curvatura do espaço de Weyl tridimensional é identicamente nula, como ocorre no espaço Riemanniano.

Apêndice C

Teoria Não-Linear do Eletromagnetismo

Consideraremos uma ação, funcional do invariante $F = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ¹, numa dependência não-linear. Observe que aqui o tensor $F_{\mu\nu}$ é o campo eletromagnético, nada tendo a ver com $F_{\mu\nu\alpha}$. Escrevemos

$$S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} L(F) \quad (\text{C.1})$$

e então

$$0 = \delta S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} L_F 2\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{C.2})$$

onde L_F é a derivada funcional de L com relação ao escalar F . Levando em conta que $F_{\mu\nu} = A_{[\mu|\nu]}$, temos

$$0 = - \int d^4x \sqrt{-\gamma} 4\delta A_\mu (L_F F^{\mu\nu})_{||\nu} \quad (\text{C.3})$$

A equação de campo é obtida imediatamente:

$$(L_F F^{\mu\nu})_{||\nu} = \frac{1}{4} J^\mu \quad (\text{C.4})$$

¹Neste apêndice $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Repare que esta equação, que descreve uma teoria não-linear do eletromagnetismo, se reduz à teoria usual eletromagnética quando a dependência funcional da Lagrangeana com o escalar F é linear, ou seja, $L_F = cte$. Vejamos apenas uma teoria contida nessa classe onde $L(F)$ depende de F de um modo não-linear. A teoria eletromagnética proposta por Born e Infeld [20], tem a seguinte Lagrangeana²:

$$L(F) = -\frac{1}{4}(\sqrt{b^4 + 2b^2F} - b^2) \quad (C.5)$$

sendo b uma constante. Define-se o tensor momento energia do campo $F_{\mu\nu}$ através da expressão

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta(L\sqrt{-\gamma})}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \quad (C.6)$$

Calculando essa quantidade para a Lagrangeana dada por (C.5), obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -L\gamma_{\mu\nu} - 4F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\gamma^{\rho\alpha}\frac{\delta\gamma^{\sigma\beta}}{\delta\gamma^{\mu\nu}} \\ &= -L\gamma_{\mu\nu} - 4L_F F_{\mu\alpha}F^\alpha{}_\nu \end{aligned} \quad (C.7)$$

Contraindo a equação de movimento com $F_{\alpha\mu}$, encontramos

$$(L_F F_{\mu\alpha}F^{\alpha\nu})_{||\nu} - L_F F_{\mu\alpha||\nu}F^{\alpha\nu} = \frac{1}{4}F_{\alpha\mu}J^\mu \quad (C.8)$$

Usando a expressão para $T_{\mu\nu}$, obtemos

$$T_{\alpha}{}^\mu{}_{||\mu} + L_F F_{|\alpha} + 4L_F F^{\mu\nu}F_{\alpha\mu||\nu} = -F_{\alpha\mu}J^\mu \quad (C.9)$$

$$T_{\alpha}{}^\mu{}_{||\mu} + 2L_F F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho||\alpha} + 4L_F F^{\mu\nu}F_{\alpha\mu||\nu} = -F_{\alpha\mu}J^\mu \quad (C.10)$$

Levando em conta as simetrias do tensor $F_{\mu\nu}$, é válida a seguinte equação

$$F_{\mu\nu||\alpha} + F_{\alpha\mu||\nu} + F_{\nu\alpha||\mu} = 0 \quad (C.11)$$

²Omitindo termos duais

Podemos usar esta relação e a propriedade de antissimetria do campo para escrever

$$\begin{aligned} 2F^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho|\alpha} &= -2F^{\sigma\rho}(F_{\alpha\sigma|\rho} - F_{\alpha\rho|\sigma}) \\ &= -4F^{\sigma\rho}F_{\alpha\sigma|\rho} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Assim, a equação (C.10) pode ser simplificada:

$$T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{||\mu} = -F_{\alpha\mu}J^{\mu} \quad (\text{C.13})$$

Segue-se daí o notável fato já conhecido que a lei de conservação da energia eletromagnética é independente da dependência funcional da Lagrangeana com o invariante F .

Propagação das Descontinuidades

Usando o método de Hadamard [19] (Apêndice *E*), percebemos a notável propriedade de uma teoria não linear do eletromagnetismo sobre a trajetória da onda eletromagnética, que não é, como na teoria de Maxwell, uma geodésica nula. O procedimento a seguir é igualmente válido para três dimensões. Consideramos

$$[F_{\mu\nu}]_{\Sigma} = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$[F_{\mu\nu|\rho}]_{\Sigma} = f_{\mu\nu}k_{\rho} \quad (\text{C.15})$$

onde os colchetes denotam descontinuidade através da superfície Σ . Aplicando (C.15) na equação de movimento (C.4), obtemos

$$2L_{FF}F_{\sigma\rho}[F^{\sigma\rho}{}_{|\nu}]_{\Sigma}F^{\mu\nu} + L_F[F^{\mu\nu}{}_{|\nu}]_{\Sigma} = 0 \quad (\text{C.16})$$

e finalmente

$$f^{\mu\nu}k_{\nu} = -2\frac{L_{FF}}{L_F}\eta F^{\mu\nu}k_{\nu} \quad (\text{C.17})$$

onde

$$\eta = f^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (\text{C.18})$$

Usando (C.15) na relação de simetria cíclica do campo eletromagnético

$$F_{\mu\nu|\rho} + F_{\rho\mu|\nu} + F_{\nu\rho|\mu} = 0 \quad (\text{C.19})$$

tem-se

$$f_{\mu\nu|\rho} + f_{\rho\mu|\nu} + f_{\nu\rho|\mu} = 0 \quad (\text{C.20})$$

Multiplicando por $F^{\mu\nu}k^\rho$, encontramos

$$\eta k^\rho k_\rho + f_{\rho\mu} F^{\mu\nu} k^\rho k_\nu + f_{\nu\rho} F^{\mu\nu} k^\rho k_\mu = 0 \quad (\text{C.21})$$

Substituindo (C.17), chega-se à equação da propagação das descontinuidades do campo eletromagnético cuja Lagrangeana, não-linear, é $L(F)$:

$$\left\{ \gamma_{\mu\nu} - 4 \frac{L_{FF}}{L_F} F^\rho{}_\mu F_{\rho\nu} \right\} k^\mu k^\nu = 0 \quad (\text{C.22})$$

Vemos claramente que se a Lagrangeana é linear, a equação se reduz à

$$\gamma_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 \quad (\text{C.23})$$

Apêndice D

Teoria NDL em Quatro Dimensões

O campo fundamental (campo gravitacional), será definido conforme o formalismo da teoria linear de Fierz:

$$F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}(\phi_{\mu[\alpha|\beta]} + F_{[\alpha\gamma\beta]\mu}) \quad (\text{D.1})$$

A Lagrangeana será um funcional dos invariantes formados a partir do campo $F_{\alpha\beta\mu}$. Serão considerados A e B , já mencionados em (3.7) e (3.8). Sua expressão, diferentemente da teoria Linear de Fierz, não será linear nos invariantes, escrevemos genericamente

$$S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} L(A, B) \quad (\text{D.2})$$

Teremos então

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-\gamma} L_A \delta A + L_B \delta B \\ &= \int d^4x \sqrt{-\gamma} (2L_A F^{\mu\nu\rho} \delta F_{\mu\nu\rho} + 2L_B F^\mu \delta F_\mu) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde L_A e L_B são respectivamente as derivadas de L com relação aos invariantes A e B .

Prosseguindo os cálculos, e levando em conta que

$$\delta F_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2}(\delta\phi_{\rho[\mu|\nu]} + \delta F_{[\mu\gamma\nu]\rho}) \quad (\text{D.4})$$

podemos escrever

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} (L_A F^{\mu\nu\rho} \delta\phi_{\rho[\mu|\nu]} + 2(L_A + L_B) F^\mu \delta F_\mu) \quad (\text{D.5})$$

Observe que se a Lagrangeana for tal que

$$L_A = -L_B \quad (\text{D.6})$$

ganhamos mais simplicidade ao escrever a equação de movimento. Observe que

$$F^{\mu\nu\rho} \delta\phi_{\rho[\mu|\nu]} = -F^{\nu\mu\rho} \delta\phi_{\rho[\mu|\nu]} = -2F^{\nu\mu\rho} \delta\phi_{\rho\mu|\nu} \quad (\text{D.7})$$

Este termo pode ser expresso, a menos de uma divergência, por $-2F^{\nu\mu\rho}{}_{||\nu} \delta\phi_{\rho\mu}$. Somente a parte simétrica nos índices μ e ρ sobreviverá na soma. A equação de movimento no vácuo é

$$(L_A F^{\mu(\nu\rho)})_{||\mu} = 0 \quad (\text{D.8})$$

Note que se L for linear em A , a teoria se torna idêntica à teoria de Fierz. A forma funcional considerada na teoria NDL para a Lagrangeana é inspirada na Lagrangeana da teoria não-linear do eletromagnetismo proposta por Born e Infeld. A ação para a teoria é tal que

$$L(A, B) = \frac{1}{\kappa} b^2 \left\{ \sqrt{1 - \frac{A - B}{b^2}} - 1 \right\} \quad (\text{D.9})$$

onde b é uma constante, em unidades onde $c = 1$, tem dimensões de inverso de comprimento (κ tem dimensões de *(comprimento)/(massa)*).

Ondas Gravitacionais

Através do procedimento análogo ao realizado para as ondas eletromagnéticas numa teoria não-linear, mostraremos aqui a equação análoga à (C.22), mas que não é igual à que será mostrada em três dimensões. Como o cálculo é muito semelhante ao realizado detalhadamente em três dimensões, omitiremos algumas passagens.

Suponha que o campo $F_{\mu\nu\rho}$ seja contínuo através da superfície da frente de onda Σ , e que sua derivada primeira seja descontínua, satisfazendo

$$[F_{\mu\nu\rho|\alpha}]_{\Sigma} = f_{\mu\nu\rho}k_{\alpha} \quad (D.10)$$

Aplicando essa relação na equação de movimento, obtemos

$$f_{\alpha(\mu\nu)}k^{\alpha} = -2\frac{L_{AA}}{L_A}(\eta - \psi)F_{\alpha(\mu\nu)}k^{\alpha} \quad (D.11)$$

onde

$$\eta = F^{\sigma\lambda\rho}f_{\sigma\lambda\rho} \quad (D.12)$$

$$\psi = F^{\rho}f_{\rho} \quad (D.13)$$

Usando a relação de descontinuidade na seguinte identidade

$$F_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{||\lambda} + F_{\lambda\mu}{}^{\rho}{}_{||\nu} + F_{\nu\lambda}{}^{\rho}{}_{||\mu} = \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\nu}F_{\mu]||\lambda} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\mu}F_{\lambda]||\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\lambda}F_{\nu]||\mu} \quad (D.14)$$

obtemos

$$f_{\mu\nu}{}^{\rho}k_{\lambda} + f_{\lambda\mu}{}^{\rho}k_{\nu} + f_{\nu\lambda}{}^{\rho}k_{\mu} = \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\nu}f_{\mu]}k_{\lambda} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\lambda}f_{\nu]}k_{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\rho}{}_{[\mu}f_{\lambda]}k_{\nu} \quad (D.15)$$

Multiplicando por $F^{\mu\nu}{}_{\rho}k^{\lambda}$ obtemos, depois de algumas manipulações,

$$\{\gamma_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\}k^{\mu}k^{\nu} = 0 \quad (D.16)$$

onde

$$\Lambda_{\mu\nu} = 2\frac{L_{AA}}{L_A}\{F_{\mu}{}^{\alpha\rho}F_{\nu(\alpha\rho)} - F_{\mu}F_{\nu}\} \quad (D.17)$$

É característica marcante da teoria NDL o fato que ondas gravitacionais não seguem geodésicas nulas, o que seria descrito pela equação

$$\{\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}\}k^{\mu}k^{\nu} = 0 \quad (D.18)$$

Assim, ela interage com a gravitação de um modo diferente das outras interações, como por exemplo a interação da onda eletromagnética com a geometria, que na teoria de Maxwell minimamente acoplada, é tal que a luz seguirá geodésicas nulas:

$$h^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = 0 \tag{D.19}$$

sendo l_μ o vetor normal à frente de onda.

Apêndice E

Método de Hadamard

Para maiores detalhes sobre este método, veja [19].

Seja a superfície das descontinuidades Σ dada pela equação

$$\psi(x) = 0 \quad (\text{E.1})$$

A equação

$$[F_{\mu\nu\alpha|\lambda}]_{\Sigma} = f_{\mu\nu\alpha}k_{\lambda}^1 \quad (\text{E.2})$$

se baseia na seguinte suposição: O diferencial total do campo $F_{\mu\nu\rho}$ sobre Σ é contínuo em Σ :

$$[dF_{\mu\nu\rho}]_{\Sigma} = 0 \quad (\text{E.3})$$

sendo

$$dF_{\mu\nu\rho} = F_{\mu\nu\rho|\alpha}dx^{\alpha} \quad (\text{E.4})$$

onde o vetor dx^{α} pertence à superfície Σ , ou seja, está definido sobre um plano tangente

¹A notação dos colchetes indica a diferença entre a quantidade $F_{\mu\nu\alpha|\lambda}$ num ponto infinitesimalmente próximo à Σ e a mesma quantidade num ponto também próximo à superfície mas do outro lado dela, sendo esses pontos ligados por uma reta normal a Σ . k_{λ} é o vetor normal à superfície Σ .

à ela. Neste apêndice a notação é tal que

$$x^\mu = x^\mu(u, v) \quad (\text{E.5})$$

ou seja, x^μ é um ponto da variedade tridimensional que tem dois graus de liberdade, dependendo de dois parâmetros u e v , que o restringe à superfície Σ :

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u} du + \frac{\partial x^\alpha}{\partial v} dv \quad (\text{E.6})$$

Da definição de Σ , podemos escrever

$$\psi_{|\alpha} dx^\alpha = 0 \quad (\text{E.7})$$

onde o vetor dx^α pertence a Σ , é ortogonal ao seu vetor normal $\psi_{|\alpha}$, como mostra (E.7).

De (E.3) e (E.4), temos

$$[F_{\mu\nu\rho|\alpha}]_\Sigma dx^\alpha = 0 \quad (\text{E.8})$$

Observe que

$$[dx^\alpha]_\Sigma = 0 \quad (\text{E.9})$$

pois as quantidades $\frac{\partial x^\alpha}{\partial u} du$ e $\frac{\partial x^\alpha}{\partial v} dv$ são contínuas sobre Σ .

Comparando (E.7) com (E.8), e notando mais uma vez que o vetor dx^α , o mesmo nas duas equações, está sobre um plano tangente à superfície característica, concluímos que para qualquer trinca de índices μ, ν e ρ , a quantidade $[F_{\mu\nu\rho|\alpha}]_\Sigma$ é proporcional à $\psi_{|\alpha} = k_\alpha$, ou seja,

$$[F_{\mu\nu\rho|\alpha}]_\Sigma = f_{\mu\nu\rho} k_\alpha \quad (\text{E.10})$$

Note que o campo tensorial $f_{\mu\nu\rho}$ tem as mesmas simetrias de $F_{\mu\nu\rho}$

$$f_{\alpha\beta\mu} = -f_{\beta\alpha\mu} \quad (\text{E.11})$$

$$f_{\alpha\beta\mu} + f_{\mu\alpha\beta} + f_{\beta\mu\alpha} = 0 \quad (\text{E.12})$$

Bibliografia

- [1] Whitrow, G.J.(1955). *Br. J. Philos. Sci.*, 6, 13-31; ou M. Jammer (1969) *Concepts of Space*, 2nd ed. (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts).
- [2] Giddings, S., Abbott, J., Kuchar, K. (1984). *General Relativity and Gravitation*, vol. 16, 8, 751.
- [3] Unruh, W.G., 1994 *Int. J. Mod. Phys. D* 3 131
Witten E., 1988 *Nucl. Phys. B* 311 46
- [4] t'Hooft, G., e Veltman, M. (1972). *Nucl. Phys.*, B44, 189
- [5] Schwinger, J. (1962). *Phys. Rev.*, 128, 2425.
- [6] Glimm, J., e Jaffe, A. (1981). *Quantum Physics, A Functional Integral Point of View* (Springer, Berlin).
- [7] Deser, S., Jackiw, R. e 't Hooft, G., *Ann. Phys.* 152 (1984) 220;
Deser, S. e Jackiw, R., *Ann. Phys.* 153 (1984) 405.
- [8] Deser, S., e van Nieuwehuizen, P. (1974) *Phys. Review D*, 10, 401.
- [9] Deser, S., Jackiw, R. e Templeton, S. (1984) *Ann. Phys.* 140, 372-411.
- [10] Kuchar, K. (1981). In *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*. C.J.Isham, R.Penrose, e D.W.Sciama, eds. (Clarendon Press, Oxford).

- [11] Leutwyler, H. (1966). *Nuovo Cim.*, 42, 159.
- [12] Bañados, M., Teitelboim, C. e Zanelli, J., 1992, *Phys. Rev. Lett.* **69** 1849
- [13] Novello, M., De Lorenci, V.A. e Freitas, L.R. *Annals of Physics*, vol 254, N° 1, p. 83 (1997)
- [14] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, 1972 (John Wiley & Sons, Inc.).
- [15] Fock, V., *The Theory of Space, Time and Gravitation*, second edition (Pergamon Press).
- [16] Lovelock, D. e Rund, H., *Tensors, Differential Forms and Variational Principles*, second edition (Dover Publications, Inc.).
- [17] Richard Gott, III and Alpert, M. (1984). *General Relativity and Gravitation*, vol. 16, 3, 243.
- [18] Novello, M., Salim, J., Oliveira, L.A.R. (1993), *Int J. Mod. Phys. D*, 1, N3-4, 641-677.
- [19] Hadamard, J., *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique*, 1949 (Chelsea Publishing Company).
- [20] Born, M., *Nature*, **132**, 282 (1933); *Proc. Roy. Soc. A* **143**, 410 (1934); Born, M. e Infeld, L., *Nature*, **133**, 63 (1934)

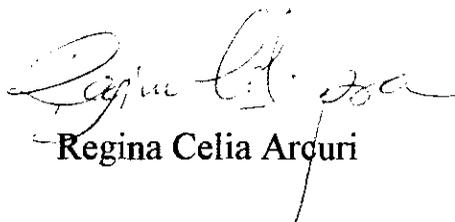
“GRAVITAÇÃO EM TRÊS DIMENSÕES”

Guilherme de Berredo Peixoto

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Mário Novello - Presidente



Regina Celia Arçuri



Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira



Nelson Pinto Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 22 de agosto de 1997