

TESE DE  
DOUTORADO

**A Equivalência de Espaços-tempos  
nas  
Teorias da Gravitação com Torção  
utilizando  
Computação Algébrica**

Joel Batista da Fonseca Neto

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, SETEMBRO DE 1997**

A EQUIVALÊNCIA DE ESPAÇOS-TEMPOS NAS  
TEORIAS DA GRAVITAÇÃO COM TORÇÃO



1997/16

F676

\*020819\*

# Dedicatória

*A Nilcéia, Luciana e Daniel, pela paciência e apoio durante as muitas horas que estive afastado do convívio com eles.*

# Agradecimentos

- Ao Marcelo Rebouças pela orientação, pelo apoio constante que nem sempre consegui perceber e, principalmente, pelo espírito aguerrido na luta pela superação dos momentos difíceis que tivemos que enfrentar na fase final da elaboração desta tese.
- Ao Malcolm MacCallum pela acolhida, pelo incentivo e pela orientação durante o período que passamos no Queen Mary College em Londres.
- Ao Antônio Teixeira pela colaboração e ajuda amigável nas fases iniciais deste trabalho.
- Ao Jan Aman pela colaboração, e pela ajuda na compilação dos programas de *TCLASSI*.
- Ao Janilo Santos e ao Filipe Paiva pela amizade e pelo companheirismo.
- Ao Valdir Barbosa Bezerra, aos amigos e colegas do Departamento de Física da UFPb.
- Aos amigos e colegas do CBPF, em particular à Myriam Simões Coutinho pelo incentivo.
- À Universidade Federal da Paraíba, ao CNPq e à CAPES pela ajuda financeira.

# Resumo

O problema da equivalência de campos gravitacionais, no contexto das teorias da gravitação com torção, isto é, a questão de decidir quando duas soluções exatas aparentemente diferentes representam o mesmo campo gravitacional em sistemas coordenadas diferentes, é abordado nos seus aspectos teóricos e práticos. A solução do problema é obtida utilizando uma descrição do campo gravitacional, que é invariante sob transformações de coordenadas. Expressões explícitas para as dimensões do grupo de simetria de uma variedade de Riemann-Cartan e do seu subgrupo de isotropia são obtidas. Um conjunto mínimo de quantidades invariantes que descrevem o campo gravitacional local é determinado. Um algoritmo para testar a equivalência na prática é desenvolvido e implementado em um conjunto de programas de computação algébrica que denominamos *TCLASSI*. Todos estes resultados generalizam trabalhos anteriores sobre variedades Riemannianas. Os módulos de *TCLASSI* utilizados para realização de cálculos usando tensores e espinores são apresentados. Módulos para realização da classificação algébrica das partes irredutíveis do tensor de curvatura em um espaço-tempo de Riemann-Cartan também são discutidos. Utilizando as técnicas do problema da equivalência implementadas em *TCLASSI*, as condições para a homogeneidade espaço-temporal de variedades de Riemann-Cartan com métrica tipo Gödel são derivadas, generalizando trabalhos anteriores sobre espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel. A equivalência destes espaços-tempos é estudada e mostra-se que eles admitem um grupo de transformações afim-isométricas com dimensão 5 e também que são caracterizados por três parâmetros essenciais.

# Summary

The problem of equivalence of gravitational fields in the framework of torsion theories of gravitation, that is, the question of deciding when two exact solutions apparently different represent the same gravitational field in different coordinate systems, is tackled in its theoretical and practical aspects. The solution of the problem is obtained by using a coordinate-invariant description of the gravitational field. Explicit expressions for the dimensions of the group of symmetry of a Riemann-Cartan manifold and its subgroup of isotropy are obtained. A minimal set of invariant quantities which describe the local gravitational field is determined. An algorithm for testing the equivalence in practice is developed and implemented in a set of computer algebra programs named *TCLASSI*. All these results generalize previous works on Riemannian manifolds. The modules of *TCLASSI* used for making calculation using tensors and spinors are presented. Modules for the algebraic classification of the irreducible parts of curvature tensors in Riemann-Cartan space-times are discussed. Using the equivalence problem techniques implemented in *TCLASSI*, the conditions for space-time homogeneity of Riemann-Cartan manifolds with Gödel-type metrics are derived, generalizing previous works on Riemannian Gödel-type space-times. The equivalence of Riemann-Cartan Gödel-type space-times is studied and it is shown that they admit a five-dimensional group of affine-isometries and are characterized by three essential parameters.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Resumo em inglês . . . . .	iv
Índice . . . . .	v
Lista de tabelas . . . . .	viii
Notação e convenções . . . . .	ix
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O problema da equivalência na Relatividade Geral</b>	<b>8</b>
1.1 Introdução . . . . .	8
1.2 A solução de Cartan . . . . .	9
1.3 Escalares de Cartan e o grupo de isometria . . . . .	12
1.4 O algoritmo de Karlhede . . . . .	14
1.5 Um conjunto mínimo de escalares de Cartan . . . . .	16
1.6 Classificando métricas na prática . . . . .	17
<b>2 O Problema da equivalência nas teorias da gravitação com torção</b>	<b>26</b>
2.1 Introdução . . . . .	26
2.2 O teorema da equivalência . . . . .	26
2.3 Simetrias de variedades de Riemann-Cartan . . . . .	31
2.4 Um algoritmo para testar a equivalência . . . . .	38
<b>3 Um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan</b>	<b>44</b>
3.1 Introdução . . . . .	44

3.2	O número de escalares de Cartan independentes . . . . .	45
3.3	As relações entre os escalares de Cartan . . . . .	49
3.4	Um conjunto mínimo de escalares de Cartan . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Utilizando <i>TCLASSI</i> para calcular em espaços-tempos com torção</b>	<b>87</b>
4.1	Introdução . . . . .	87
4.2	Cálculos de tensores . . . . .	89
4.3	Cálculos de espinores . . . . .	97
4.4	Classificações algébricas . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Testando a equivalência com <i>TCLASSI</i></b>	<b>120</b>
5.1	Introdução . . . . .	120
5.2	Etapas de uma classificação . . . . .	121
5.3	Maneiras de realizar uma classificação . . . . .	123
5.4	Sumários de uma classificação . . . . .	130
5.5	Recursos adicionais para uma classificação . . . . .	132
5.6	Os módulos de <i>TCLASSI</i> . . . . .	135
5.7	Testando <i>TCLASSI</i> . . . . .	138
<b>6</b>	<b>Equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo-Gödel</b>	<b>145</b>
6.1	Introdução . . . . .	145
6.2	Espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel . . . . .	145
6.3	Espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel . . . . .	147
	<b>Conclusão</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Variedades de Riemann-Cartan e fibrados</b>	<b>157</b>
A.1	Introdução . . . . .	157
A.2	Variedades de Riemann-Cartan . . . . .	158
A.3	O fibrado dos referenciais lineares . . . . .	168
A.4	O fibrado dos referenciais ortogonais generalizados . . . . .	173
<b>B</b>	<b>Espinores em espaços-tempos com torção</b>	<b>185</b>
B.1	Introdução . . . . .	185
B.2	Conceitos básicos . . . . .	186

B.3	Partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção . . . . .	188
B.4	Partes irredutíveis da derivada covariante do espinor da torção . . . . .	194
B.5	Identidades de Bianchi e de Ricci . . . . .	199
<b>C</b>	<b>Arquivos de espaços-tempos de Riemann-Cartan</b>	<b>208</b>
	<b>Referências</b>	<b>219</b>

# Lista de Tabelas

1.1	Grupos de isotropia de espaços-tempos na TRG . . . . .	24
1.2	Sumários de classificações de métricas . . . . .	25
3.1	Conjunto mínimo $C_0$ para a ordem $q = 0$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	56
3.2	Conjunto mínimo $C_1$ para a ordem $q = 1$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	66
3.3	Parte A do conjunto mínimo $C_2$ para a ordem $q = 2$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	73
3.4	Parte B do conjunto mínimo $C_2$ para a ordem $q = 2$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	74
3.5	Parte A do conjunto mínimo $C_3$ para a ordem $q = 3$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	78
3.6	Parte B do conjunto mínimo $C_3$ para a ordem $q = 3$ do algoritmo para testar a equivalência. . . . .	79
4.1	Tensores que podem ser calculados usando <i>TCLASSI</i> . . . . .	90
4.2	Espinores da curvatura e da torção implementados em <i>TCLASSI</i> . . . . .	98
4.3	Formas canônicas e grupos de isotropia dos tipos de Petrov . . . . .	106
4.4	Formas canônicas e grupos de isotropia dos tipos de Segre . . . . .	112
4.5	Formas canônicas e grupos de isotropia para os tipos de bi-espinores . . . . .	116
4.6	Formas canônicas e grupos de isotropia para os tipos de vetores . . . . .	119
5.1	Sumários de classificações de espaços-tempos com torção . . . . .	131

# Notação e convenções

1. As operações de simetrização e antissimetrização são utilizadas de acordo com as seguintes convenções:

- (a) parênteses indicam simetrização;
- (b) colchetes indicam antissimetrização;
- (c) índices entre duas barras verticais não são incluídos em uma simetrização ou antissimetrização;
- (d) o fator  $1/n!$  está sempre incluído, onde  $n$  é o número de índices. Assim, por exemplo,  $G_{(ij)} = (G_{ij} + G_{ji})/2!$ ;
- (e) índices espinoriais sem e com linha são simetrizados e antissimetridados separadamente.

2. Diversos tipos de índices são utilizados de acordo com as seguintes convenções:

- (a) índices latinos minúsculos ( $a, b, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) são utilizados em componentes de tensores em bases de tétradas;
- (b) índices latinos maiúsculos são utilizados
  - i. em componentes de espinores em bases de díadas ( $A, B, \dots = 0, 1$ ),
  - ii. na notação compacta para espinores totalmente simétricos, onde cada espinor é representado apenas com um par de índices covariantes cujos valores numéricos são as somas simetrizadas de todos os índices com plica e sem plica, respectivamente. Assim, por exemplo, temos

$$\Phi_{MN'} = \Phi_{(AB)(X'Y')}, \quad \nabla \Psi_{PF'} = \Psi_{(ABCD;E)F'},$$

onde  $M=A+B$ ,  $N'=X'+Y'$ ,  $P=A+B+C+D+E$  e  $A, \dots, F, X, Y = 0, 1$ .

(c) índices gregos minúsculos ( $\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$ ) são utilizados em componentes de tensores em bases de coordenadas.

3. As seguintes convenções tipográficas são utilizadas:

(a) tudo que pode ser utilizado como entrada de dados ou de comandos quer seja em *TCLASSI*, quer seja em *SHEEP/CLASSI*, está escrito utilizando letras maiúsculas do tipo “máquina de escrever”, por exemplo, **MAKE**;

(b) nomes de arquivo ou de diretórios estão escrito utilizando letras minúsculas do tipo “máquina de escrever”, por exemplo, **tclasrc**;

(c) os nomes dos módulos, tanto de *TCLASSI* quanto de *SHEEP/CLASSI*, estão escritas usando letras maiúsculas de tamanho pequeno como, por exemplo, **TDYTSYM**;

(d) os nomes de argumentos genéricos de comandos ou funções estão escritos usando letras itálicas minúsculas , por exemplo, *espinor*.

# Introdução

Nas últimas décadas, as teorias que utilizam o conceito geométrico de torção têm recebido um crescente interesse em diversos contextos na física. Dentre os quais destacamos as teorias de gauge, onde elas tem sido formuladas na busca da unificação da gravitação com as outras interações fundamentais da física. Os espaços-tempos com uma conexão não-simétrica também têm sido considerados como a arena apropriada para a formulação de uma teoria quântica da gravitação. A Teoria da Relatividade Geral (TRG daqui em diante) tem sido generalizada através de diversas Teorias da Gravitação com Torção (TGT daqui em diante), que têm sido investigadas desde os anos sessenta [1, 2, 3]. Finalmente, podemos mencionar a abordagem para os defeitos na rede cristalina em sólidos em termos de um contínuo utilizando o conceito geométrico de torção, que tem recebido atenção desde o princípio dos anos cinquenta [4]–[8].

Consequências físicas e motivações adicionais para o estudo das variedades e teorias com torção não-nula (relaxando ou não a condição de metricidade), bem como uma lista detalhada de referências, podem ser encontradas no recente trabalho de revisão de Hehl *et al.* [9].

O espaço-tempo nas TGT é uma variedade diferenciável, denominada *variedade de Riemann-Cartan* [1], onde estão definidas uma métrica  $g_{\mu\nu}$  e uma conexão  $\Gamma^{\alpha}_{\rho\sigma}$  não-simétrica que é compatível com a métrica. O espaço-tempo da TRG pode ser visto como um caso particular da variedade de Riemann-Cartan, pois quando impomos que a torção seja identicamente nula obtemos uma *variedade Riemanniana*.

Geralmente a conexão e a métrica são introduzidas como estruturas separadas em uma variedade diferenciável, permitindo definir as noções de transporte paralelo e de comprimento, respectivamente. Embora na TRG a conexão seja completamente determinada pela métrica, sendo dada pelos símbolos de Christoffel, nas TGT a conexão apresenta uma parte independente da métrica determinada pelo tensor de *torção*, definido pela

parte anti-simétrica da conexão  $T_{\rho\sigma}^{\alpha} = -2\Gamma_{[\rho\sigma]}^{\alpha}$  em um sistema de coordenadas qualquer.

A não existência de referenciais privilegiados, que se traduz pela arbitrariedade na escolha das coordenadas, é uma hipótese básica não só na TRG mas também nas TGT. Como conseqüência, em todas essas teorias surgem efeitos que são devidos unicamente ao sistema de coordenadas utilizado, os quais devem ser cuidadosamente distinguidos dos que são realmente físicos (independentes das coordenadas). Esta questão pode ser vista como parte do problema mais abrangente de decidir quando duas soluções exatas das equações de campo dessas teorias, aparentemente distintas, são *localmente* equivalentes e representam o mesmo campo gravitacional em coordenadas diferentes – o *problema da equivalência*. Uma solução deste problema, do ponto de vista da física, deve ser dada em termos de um conjunto de quantidades que determinem completamente o campo gravitacional local e sejam invariantes sob transformações de coordenadas. Do ponto de vista da matemática, é totalmente irrelevante se a variedade representa ou não um espaço-tempo, isto é, a métrica e a torção podem ser arbitrárias e não precisam ser uma solução das equações de campo de nenhuma teoria gravitacional.

A solução do problema da equivalência constitui um importante passo para o estudo sistemático das soluções exatas tanto na TRG quanto nas TGT, pois fornece uma descrição independente da escolha de coordenadas das soluções. A partir dessa descrição é possível formular uma classificação das soluções exatas e obter, em princípio, todas as propriedades físicas do campo gravitacional local.

No projeto desta tese, o problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan foi abordado como parte da colaboração entre o grupo da School of Mathematical Sciences, do Queen Mary and Westfield College da Universidade de Londres, liderado pelo Prof. Malcolm A. H. MacCallum e o grupo do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), no Rio de Janeiro, liderado pelo Prof. Marcelo J. Rebouças. O problema foi abordado não só do ponto de vista teórico, mas também nos seus aspectos práticos.

O desenvolvimento do trabalho de pesquisa sobre o problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan se caracterizou por quatro etapas distintas, onde procuramos:

- (i) obter a solução teórica (do ponto de vista da matemática), definindo equivalência e determinando as condições necessárias e suficientes para a sua existência;
- (ii) elaborar um procedimento que possibilite uma aplicação prática (do ponto de vista da física) da solução encontrada;

- (iii) implementar o procedimento prático usando computação algébrica, desenvolvendo os algoritmos e escrevendo os programas correspondentes para efetivamente testar a equivalência;
- (iv) utilizar os programas de computação algébrica no estudo das soluções exatas das TGT, procurando obter uma interpretação física para os invariantes que caracterizam o campo gravitacional.

A primeira etapa do projeto de tese foi concluída com a solução problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan utilizando o método de Cartan <sup>1</sup>. no fibrado dos referenciais ortogonais generalizados, isto é, referenciais não-holonômico onde a métrica tem componentes constantes [18]. Demonstramos que é necessário e suficiente para a equivalência (local) de variedades de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  que as equações algébricas formadas com os componentes da curvatura e da torção, bem como as derivadas covariantes destes tensores até a ordem  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , em princípio, sejam compatíveis. Como estas quantidades são calculadas em relação a um referencial não-holonômico, o seu conjunto constitui uma descrição local de uma variedade de Riemann-Cartan que é invariante sob transformações de coordenadas. Por esta razão, os elementos deste conjunto são denominados de *escalares de Cartan* [19, 20]. Estes resultados são válidos independentemente da teoria da gravitação em consideração, tendo em vista que nenhuma equação de campo foi utilizada na sua dedução.

As condições necessárias e suficientes para a equivalência de variedades de Riemann-Cartan que obtivemos [18] se reduzem às condições para variedades Riemannianas [11], quando restringe-se a conexão, impondo que seja simétrica. Elas também são válidas para variedades dotadas apenas de conexão. Neste último caso, porém, o problema deve ser reformulado utilizando o fibrado dos referenciais lineares [14], pois os referenciais ortogonais generalizados não podem ser definidos sem uma métrica.

Nesta primeira etapa também investigamos o conceito de simetria de variedades de Riemann-Cartan. Utilizando a descrição local dada pelos escalares de Cartan, obtivemos expressões explícitas para as dimensões do grupo de simetria destas variedades e do seu

---

<sup>1</sup>A história do problema da equivalência, do ponto de vista da matemática, remonta à segunda metade do século passado [10], vindo a concluir-se na primeira metade deste século com a solução do caso geral obtida por Cartan [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Para a história do ponto de vista da física veja [17] e as referências ali citadas.

subgrupo de isotropia [18]. Note, contudo, que enquanto nas variedades Riemannianas as simetrias são dadas por isometrias, nas variedade de Riemann-Cartan elas são transformações que preservam tanto a métrica quanto a conexão [21].

Na segunda etapa do projeto de tese, visando uma aplicação prática da solução do problema da equivalência nas TGT, desenvolvemos um algoritmo prático para efetivamente testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan [22, 23, 24, 25]. A aplicação desse algoritmo permitiu introduzir uma classificação invariante dos espaços-tempos das TGT, dada em termos de um conjunto de quantidades que caracterizam o campo gravitacional local [22, 23, 24, 25]. Estes resultados estendem para as TGT o algoritmo de Karlhede [26, 27] usado na TRG.

O problema da determinação de um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan para as TGT também foi abordado nesta segunda etapa, onde estendemos para as TGT o conjunto mínimo obtido por Åman e MacCallum [28] no contexto da TRG. Construímos explicitamente um conjunto com o número mínimo de derivadas da curvatura de ordem  $q$  e da torção de ordem  $(q + 1)$ , onde  $0 \leq q \leq m$ , a partir das quais todas as derivadas da curvatura de ordem  $m$  e da torção de ordem  $(m + 1)$  podem ser obtidas através de operações algébricas [22, 23, 29]. A importância prática desse conjunto para o problema da equivalência no contexto das TGT fica evidente quando constatamos que, para derivadas da curvatura e da torção até a 7ª e a 8ª ordens, respectivamente, o conjunto representa apenas 0,2% do total dos escalares de Cartan.

A terceira etapa foi concluída com o desenvolvimento de um conjunto de programas de computação algébrica denominado *TCLASSI*, que implementa o algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos nas TGT [22, 23, 24]. O pacote *TCLASSI* é formado por 24 módulos, escritos em LISP [30, 31] usando funções e programas do sistema *SHEEP/CLASSI* [17, 32, 33]. Cada módulo contém diversos programas com comentários e informações sobre os mesmos. O código fonte de *TCLASSI* contém 10.900 linhas, que ocupam 400 kbytes no diretório *tclasrc* do disquete em anexo.

A implementação do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos nas TGT foi realizada em duas etapas [22, 23, 24, 25]. Na primeira etapa foram desenvolvidos vários módulos de caráter geral. Estes módulos estendem *CLASSI* possibilitando não só lidar com tensores e espinores definidos em uma variedade dotada de torção, como também realizar classificações algébricas de alguns desses objetos geométricos. Na segunda etapa,

foram implementados diversos módulos de caráter específico, diretamente relacionados com a realização dos passos do algoritmo e a classificação de espaços tempos com torção.

Finalmente, a quarta etapa do projeto de tese foi realizada com a aplicação das técnicas do problema da equivalência implementadas em *TCLASSI* para investigar o problema da homogeneidade espaço-temporal dos espaços-tempos com uma métrica tipo Gödel e uma torção com as mesmas simetrias translacionais da métrica [34] (veja também [35]). Utilizando estas técnicas não só obtivemos as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade espaço-temporal, mas também mostramos que esses espaços-tempos têm um grupo de simetria com dimensão 5 e que são caracterizados por três parâmetros essenciais, generalizando resultados anteriores obtidos no contexto da TRG [36].

A seguir descrevemos o conteúdo desta tese que contém seis capítulos, conclusão, três apêndices e um disquete (parte indispensável) em anexo.

O capítulo 1 contém, primeiramente, uma revisão sobre o problema da equivalência de variedades Riemannianas, onde apresentamos a solução de Cartan e mostramos como determinar as dimensões do grupo de isometria e do seu subgrupo de isotropia a partir dos escalares de Cartan. Em seguida o algoritmo prático de Karlhede para testar a equivalência e o conjunto completo mínimo obtido por Aman e MacCallum são apresentados. Finalmente, discutimos alguns aspectos da implementação do algoritmo de Karlhede em *CLASSI* e mostramos sucintamente como entrar com os dados de uma métrica, realizar uma classificação da mesma e obter um sumário dos resultados.

No capítulo 2, o problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan é resolvido, utilizando o método de Cartan [18]. Em seguida, discutimos o conceito de simetria de uma variedade de Riemann-Cartan e utilizamos a descrição local dada através dos escalares de Cartan para determinar expressões explícitas para as dimensões do grupo de simetria destas variedades e do seu subgrupo de isotropia [18]. Finalmente, apresentamos um algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan na prática e formulamos uma classificação invariante desses espaços-tempos através de um conjunto de quantidades locais. Dessa forma estendemos o algoritmo de Karlhede [26] de modo a incluir a contribuição da torção [22, 24, 25].

No capítulo 3, utilizamos o formalismo espinorial para demonstrar um teorema onde um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan é explicitamente construído para variedades de Riemann-Cartan [22, 23, 24, 29], estendendo os resultados obtidos para

variedades Riemannianas [28].

No capítulo 4 mostramos como utilizar os módulos de *TCLASSI* para calcular tensores e espinores em uma variedade de Riemann-Cartan. Apresentamos também os módulos sobre as classificações de Petrov e de Segre, e também as classificações de vetores e bivectores [22, 23, 24]. Para exemplificar os recursos de cálculo disponíveis, obtemos algumas propriedades de algumas soluções exatas das equações de campo das TGT.

No capítulo 5, discutimos em primeiro lugar a implementação do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos com torção em *TCLASSI*. Em seguida, mostramos as maneiras como os comandos que implementam os passos do algoritmo podem ser utilizados na prática para obter a classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan e resolver o problema da equivalência nas TGT. Depois, mostramos como obter e interpretar um sumário dos resultados obtidos em uma classificação, que possibilita a construção de um banco de dados de soluções exatas das equações de campo das TGT [25]. Alguns recursos adicionais para a obtenção de uma classificação também são discutidos. Finalmente, o capítulo é concluído com a descrição dos módulos de *TCLASSI* e uma discussão das maneiras utilizadas para testá-los.

No capítulo 6, utilizamos as técnicas do problema da equivalência implementadas em *TCLASSI* para investigar o problema da homogeneidade espaço-temporal de variedades de Riemann-Cartan com uma métrica tipo Gödel e uma torção que tem as mesmas simetrias translacionais da métrica [34] (veja também [35]). As condições necessárias e suficientes para a homogeneidade espaço-temporal são derivadas, generalizando trabalhos anteriores sobre espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel [36]. A equivalência destes espaços-tempos homogêneos é estudada e mostra-se que eles admitem um grupo de transformações afim-isométricas com dimensão 5 e também que são caracterizados por três parâmetros essenciais  $\ell, m^2, \omega$ : tríades idênticas  $(\ell, m^2, \omega)$  correspondem a variedades equivalentes.

Na conclusão, discutimos os principais resultados obtidos em cada etapa do plano de tese, sugerindo algumas aplicações e aperfeiçoamentos futuros.

No apêndice A apresentamos um breve resumo sobre variedades de Riemann-Cartan e também alguns resultados sobre fibrados de referenciais (“frame bundles”) em variedades de Riemann-Cartan. Este apêndice também tem a finalidade de estabelecer convenções e notações utilizadas no corpo desta tese.

No apêndice B apresentamos alguns resultados sobre espinores com dois componentes em variedades de Riemann-Cartan [37, 38, 39] e obtemos novos resultados relevantes para o problema da equivalência no contexto das TGT.

No apêndice C listamos o conteúdo dos arquivos de algumas soluções exatas das TGT, que foram utilizadas tanto como exemplo como para fazer alguns testes preliminares em *TCLASSI*. Esses arquivos estão no diretório `tmetrics` do disquete em anexo.

Finalmente, a última parte desta tese é um *disquete* contendo quatro diretórios denominados `tclasrc`, `tmetrics`, `tclabin` e `tclatst`. Com exceção de `tclabin`, cada um desses diretórios tem um arquivo `leiam.txt` descrevendo o seu conteúdo. O diretório `tclasrc` contém o código fonte de *TCLASSI*, `tclabin` a imagem compilada, `tmetrics` arquivos correspondentes a algumas soluções exatas das equações de campo das TGT, e, no `tclatst` os programas utilizados para testar *TCLASSI*.

# Capítulo 1

## O problema da equivalência na Relatividade Geral

### 1.1 Introdução

Neste capítulo faremos um breve resumo dos principais resultados sobre o problema da equivalência de variedades Riemannianas no contexto da TRG. Maiores informações poderão ser obtidas, por exemplo, em [17] e nas referências ali citadas. Os detalhes referentes aos aspectos relacionados com o uso de fibrados e espinores podem ser encontrados nos apêndices A e B, respectivamente.

Na segunda seção, apresentamos a solução geral do problema da equivalência obtida por Cartan. Na terceira, discutimos um teorema que permite determinar as dimensões do grupo de isometria e do seu subgrupo de isotropia, utilizando os escalares de Cartan. Na quarta, apresentamos o algoritmo de Karlhede que estabelece um procedimento prático para testar a equivalência e possibilita construir uma classificação invariante das métricas das variedades Riemannianas. Na quinta, definimos um conjunto mínimo de escalares de Cartan, a partir do qual todos os demais podem ser obtidos através de operações algébricas. Finalmente, a sexta seção contém uma breve introdução ao sistema *SHEEP/CLASSI*, onde discutimos alguns aspectos da implementação do algoritmo de Karlhede em *CLASSI* e também mostramos como entrar com os dados de uma métrica, como realizar uma classificação da mesma e como obter e interpretar um sumário dos resultados.

## 1.2 A solução de Cartan

Embora a métrica e a conexão possam ser introduzidas como estruturas separadas em uma variedade diferenciável, isto não ocorre na TRG onde a conexão é determinada pela métrica, através dos símbolos de Christoffel. Neste caso, o campo gravitacional fica completamente determinado pelos componentes  $g_{\mu\nu}$  da métrica, que são obtidos resolvendo-se as equações de Einstein. Portanto, no contexto da TRG, *equivalência (local)* de espaços-tempos significa *isometria (local)* de variedades Riemannianas.

De uma maneira mais formal, dizemos que duas variedades Riemannianas  $M$  e  $\widetilde{M}$ , de dimensão  $n$ , são (localmente) *equivalentes* quando existe um difeomorfismo  $f : U \mapsto \widetilde{U}$  entre dois sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$  definidos em  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente, tal que

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (1.1)$$

onde  $g_{\alpha\beta}(x)$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$  são os componentes das métricas de  $M$  e  $\widetilde{M}$  nos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$ , respectivamente.

No contexto da TRG, resolver o problema da equivalência consiste em encontrar um conjunto de quantidades invariantes sob transformações de coordenadas que possibilitem, a partir da comparação de um número suficiente dessas quantidades de uma solução das equações de Einstein com as correspondentes de outra, decidir pela equivalência ou não das soluções. Como veremos a seguir, apesar dos escalares formados por polinômios na curvatura e suas derivadas covariantes não servirem para este propósito [27, 40], as quantidades apropriadas são dadas pelos componentes da curvatura e de suas derivadas covariantes, em um referencial não-holonômico.

Embora a definição de equivalência dada pela eq. (1.1) tenha um significado bastante intuitivo, a sua reformulação utilizando 1-formas diferenciais é bastante desejável, tendo em vista o método desenvolvido por Cartan para determinar a equivalência de 1-formas, que apresentamos a seguir.

Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades de dimensão  $n$ , onde estão *univocamente* definidas duas bases não-holonômicas  $\omega^a = \omega^a_\mu dx^\mu$  e  $\tilde{\omega}^a = \tilde{\omega}^a_\mu d\tilde{x}^\mu$  nos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$  de  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. Dizemos que estes conjuntos de 1-formas são *equivalentes* se existe uma transformação  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x})$  tal que  $\tilde{\omega}^a = \omega^a$ . Cartan [11] mostrou que estes conjuntos de 1-formas são equivalentes se, e somente se, o sistema de

equações *algébricas* formadas pelos objetos de não-holonomia  $C_{pq}^a$  e pelas suas derivadas covariantes de acordo com

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{pq}^a(\tilde{x}) &= C_{pq}^a(x), \\ \tilde{C}_{pq;m_1}^a(\tilde{x}) &= C_{pq;m_1}^a(x), \\ &\vdots \\ \tilde{C}_{pq;m_1\dots m_{(p+1)}}^a(\tilde{x}) &= C_{pq;m_1\dots m_{(p+1)}}^a(x),\end{aligned}\tag{1.2}$$

tiver uma solução  $x^\mu = x^\mu(\tilde{x})$ , isto é, for compatível. Os coeficientes em cada membro das eqs. (1.2) são obtidos através do cálculo das derivadas exteriores

$$d\omega^a = \frac{1}{2}C_{pq}^a \omega^p \wedge \omega^q,\tag{1.3}$$

$$dC_{pq}^a = C_{pq;m}^a \omega^m,\tag{1.4}$$

$$dC_{pq;m}^a = C_{pq;mn}^a \omega^n\tag{1.5}$$

e assim sucessivamente. Aqui e no que se segue a derivada covariante é denotada por ponto e vírgula.

A derivada covariante de ordem  $(p + 1)$  é a derivada de ordem mais baixa que é *funcionalmente* dependente dos elementos do conjunto  $\{C_{pq}^a, C_{pq;m_1}^a, \dots, C_{pq;m_1\dots m_p}^a\}$ , que contém apenas derivadas até a ordem  $p$ . Considerando que cada derivada contribui pelo menos com uma nova função independente, obtemos o limite  $(p + 1) \leq n$ , pois em uma variedade  $n$ -dimensional existem no máximo  $n$  funções funcionalmente independentes.

O contexto mais adequado para se resolver o problema da equivalência utilizando o método de Cartan acima é dado pelo fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  definido sobre a variedade Riemanniana  $M$ . O fibrado  $F(M)$  é uma variedade diferenciável cujos pontos são representados por um par formado por um ponto  $p$  de  $M$  e um referencial ortogonal generalizado definido em  $p$ , isto é, uma variedade definida por  $F(M) = \bigcup_{p \in M} F_p$ , onde  $F_p$  é o conjunto de todos os referenciais ortogonais generalizados em  $p \in M$ . Estes referenciais são definidos pelos campos vetoriais  $h_a$  ( $a = 1, \dots, n$ ), que podem ser dados por

$$h_a = h_a^\mu(x) \partial_\mu,\tag{1.6}$$

de tal maneira que os componentes da métrica  $\eta_{ab} = g(h_a, h_b) = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu$  são constantes e determinam uma matriz simétrica  $\eta = (\eta_{ab})$ , com a assinatura apropriada [27].

Os referenciais ortogonais generalizados não estão definidos de maneira única em uma dada vizinhança  $U$  de  $M$ , pois existem transformações lineares não singulares  $\Lambda$  que preservam o produto escalar definido pela métrica, isto é, que deixam os componentes  $\eta_{ab}$  da métrica invariantes

$$\eta_{ab} = \Lambda_a^c \eta_{cd} \Lambda_b^d. \quad (1.7)$$

Estas transformações são denominadas *rotações ortogonais generalizadas* e formam o grupo *ortogonal generalizado*  $O(n)$  que tem  $\frac{1}{2}n(n-1)$  parâmetros  $\xi^A$  em uma variedade  $n$ -dimensional [27, 41, 42]. No caso da TRG e das TGT, este grupo é o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ , com seis parâmetros.

O fibrado  $F(M)$  incorpora naturalmente a liberdade de rotação dos referenciais ortogonais generalizados, tendo em vista que as coordenadas de  $F(M)$  são definidas pelas coordenadas  $(x^\mu)$  de  $M$  e pelos parâmetros  $(\xi^A)$  do grupo ortogonal generalizado  $O(n)$ . Neste contexto, a definição de equivalência (local) dada pela eq. (1.1) pode ser reformulada utilizando as 1-formas canônicas  $\Theta^a$  de  $F(M)$  de acordo com [14, 16]:

**Definição 1.1** *Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades Riemannianas de dimensão  $n$  e sejam  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$  os fibrados dos referenciais ortogonais generalizados definidos sobre  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. Dizemos que  $M$  e  $\widetilde{M}$  são localmente equivalentes quando existe um difeomorfismo local  $J : F(M) \mapsto \widetilde{F}(\widetilde{M})$  tal que*

$$J^* \widetilde{\Theta}^a = \Theta^a, \quad (1.8)$$

onde  $\Theta^a$  e  $\widetilde{\Theta}^a$  são as 1-formas canônicas dos fibrados  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$ , respectivamente, e  $J^*$  é a adjunta da aplicação derivada (“pull-back map”) de  $J$ .

Uma vez obtida a definição de equivalência (local) em termos de 1-formas diferenciais dada pela eq. (1.8), o método de Cartan pode ser utilizado para resolver o problema da equivalência de variedades Riemannianas [11, 15, 16], sendo a solução de Cartan dada por:

**Teorema 1.1** *Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades Riemannianas de dimensão  $n$  e sejam  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$  os fibrados dos referenciais ortogonais generalizados definidos sobre  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. As variedades  $M$  e  $\widetilde{M}$  são localmente equivalentes se existe um difeomorfismo (local) entre os fibrados  $F(M)$  e  $\widetilde{F}(\widetilde{M})$  tal que as equações algébricas formadas*

com componentes das curvaturas e de suas derivadas covariantes

$$\begin{aligned}
 \Omega^a{}_{bcd} &= \tilde{\Omega}^a{}_{bcd}, \\
 \Omega^a{}_{bcd;m_1} &= \tilde{\Omega}^a{}_{bcd;m_1}, \\
 &\vdots \\
 \Omega^a{}_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}} &= \tilde{\Omega}^a{}_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}},
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

são consistentes em termos das coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$  e  $(\tilde{x}^\mu, \tilde{\xi}^A)$  dos fibrados  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\tilde{M})$ , respectivamente. Reciprocamente, a compatibilidade das eqs. (1.9) implica na equivalência das variedades  $M$  e  $\tilde{M}$ .

A derivada covariante de ordem  $(p+1)$  da curvatura é a derivada de ordem mais baixa que é funcionalmente dependente das derivadas covariantes de ordens  $0, 1, \dots, p$ , onde  $(p+1) \leq \frac{1}{2}n(n+1) = \dim F(M)$ .

Juntamente com as condições necessárias e suficientes para a equivalência dadas pelas eqs. (1.9), a solução de Cartan também estabelece uma descrição (local), independente de coordenadas, de uma variedade Riemanniana  $M$  através do conjunto

$$\mathcal{R}_{(p+1)} = \{ \Omega^a{}_{bcd}, \Omega^a{}_{bcd;e}, \dots, \Omega^a{}_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}} \}, \tag{1.10}$$

formado pelos componentes do tensor de curvatura do fibrado  $F(M)$  e de suas derivadas covariantes até, no máximo, a ordem  $\frac{1}{2}n(n+1)$  para uma variedade com dimensão  $n$ . Estes elementos estão definidos a menos de transformações ortogonais generalizadas e são escalares sob transformações de coordenadas, por isso são denominados *escalares de Cartan* [19, 20].

### 1.3 Escalares de Cartan e o grupo de isometria

Como vimos na seção anterior o conjunto dos escalares de Cartan  $\mathcal{R}_{(p+1)}$ , dado pela eq. (1.10), representa uma descrição (local) da métrica de uma variedade Riemanniana. Isto significa que todas as propriedades locais que podem ser obtidas a partir dos componentes da métrica  $g_{\mu\nu}$  também podem, em princípio, ser obtidas a partir dos escalares de Cartan. Nesta seção vamos discutir um teorema que permite obter as dimensões do grupo de isometria e do seu subgrupo de isotropia utilizando os escalares de Cartan.

Dizemos que um campo vetorial  $v$ , com componentes  $v^\alpha$  em um dado sistema de coordenadas, define uma *isometria* (local) em uma variedade Riemanniana  $M$  se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v_{\mu;\nu} + v_{\nu;\mu} = 0. \quad (1.11)$$

A eq. (1.11) acima é chamada equação de Killing e suas soluções são denominadas campos de Killing. Estes campos são os geradores do grupo de isometria (local) da variedade, cuja dimensão é dada pelo número de campos de Killing linearmente independentes. Este grupo admite um subgrupo de isotropia, se existirem campos de Killing que deixem os pontos de  $M$  fixos [41, 43].

Como vimos na seção anterior, para cada isometria (local) de uma variedade Riemanniana  $M$  existe, em correspondência biunívoca, um difeomorfismo  $J$  no fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  que deixa os escalares de Cartan invariantes (cf. teorema 1.1). Se existem  $k$  escalares de Cartan funcionalmente independentes, então o sistema de equações algébricas dado pelas eqs. (1.9) tem  $k$  equações independentes, e a sua solução é um difeomorfismo  $J$  que depende de  $\frac{1}{2}n(n+1) - k$  constantes arbitrárias. Considerando separadamente as funções das coordenadas  $(x^\mu)$  de  $M$  e dos parâmetros  $(\xi^A)$  do grupo  $O(n)$ , pode-se demonstrar o seguinte teorema sobre o grupo de isometria [11, 44]:

**Teorema 1.2** *Seja o fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados, com curvatura  $\Omega^a_{bcd}$  e coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$ , definido sobre uma variedade Riemanniana  $M$  de dimensão  $n$ . Considere que existem  $k_p$  escalares de Cartan funcionalmente independentes no conjunto  $\mathcal{R}_{(p+1)} = \{\Omega^a_{bcd}, \Omega^a_{bcd;e}, \dots, \Omega^a_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}}\}$ , onde  $m_p$  são funções das coordenadas  $(\xi^A)$  e  $t_p$  são funções das coordenadas  $(x^\mu)$ . Então existe em  $M$  um grupo de isometria de dimensão  $r = \frac{1}{2}n(n+1) - k_p$ , que tem um subgrupo de isotropia de dimensão  $s = \frac{1}{2}n(n-1) - m_p$  e que atua em uma órbita de dimensão  $d = r - s = n - t_p$ .*

Este teorema é um exemplo da aplicação dos escalares de Cartan na determinação das propriedades locais de uma variedade Riemanniana. Entre outras aplicações na TRG podemos citar a determinação da álgebra de Lie do grupo de isometria [45, 46], o estudo dos limites de famílias de espaços-tempos [19, 20], a classificação das soluções de fluido perfeito [47] e a determinação do número de campos de Killing tipo-espaço em subclasses dessas soluções [48]. Na próxima seção apresentamos um algoritmo para testar a equivalência que possibilitou estas aplicações. A partir desse algoritmo foi possível estabelecer

critérios para formular uma classificação das variedades Riemannianas em termos de um conjunto de quantidades locais, invariante sob transformação de coordenadas.

## 1.4 O algoritmo de Karlhede

Apesar da solução de Cartan resolver o problema da equivalência do ponto de vista formal, as possibilidades de sua aplicação na TRG podem parecer um tanto desanimadoras, pois além de ser dada em termos das 10 coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$  do fibrado  $F(M)$ , pode envolver o cálculo de até 8.690 quantidades independentes [49]. Entretanto, estas dificuldades foram reduzidas consideravelmente através de um algoritmo, formulado por Karlhede [26], que estabelece um procedimento prático para testar a equivalência. Este algoritmo não só possibilita a realização dos cálculos na variedade base  $M$ , como também reduz bastante o número de quantidades calculadas.

Como uma das etapas do nosso projeto de pesquisa foi a extensão do algoritmo de Karlhede para variedades de Riemann-Cartan, deixaremos a discussão das motivações e idéias utilizadas na formulação do mesmo para o capítulo 2, onde essa extensão será apresentada. Aqui nos limitaremos a enunciá-lo. O algoritmo começa com o cálculo do conjunto

$$R_q = \{R^a_{bcd}, R^a_{bcd;e}, \dots, R^a_{bcd;m_1\dots m_q}\}, \quad (1.12)$$

formado pelos componentes  $R^a_{bcd}$  da curvatura de  $M$  e das suas derivadas covariantes, em relação a um referencial ortogonal generalizado. Iniciando com a derivada de ordem  $q = 0$ , que corresponde a  $R^a_{bcd}$ , ele tem os seguintes passos:

1. Calcule os elementos do conjunto  $R_q$ , i.e., as derivadas da curvatura até a ordem  $q$ ;
2. Escolha um referencial canônico e fixe-o o máximo possível, colocando os elementos de  $R_q$  na forma canônica;
3. Determine a liberdade de rotações generalizadas do referencial canônico, encontrando o grupo de isotropia residual  $H_q$  cujos elementos são as rotações generalizadas que deixam invariantes as formas canônicas dos elementos de  $R_q$ ;

4. Encontre o número  $t_q$  das funções das coordenadas de  $M$  que são funcionalmente independentes entre os elementos de  $R_q$ ;
5. Se o grupo de isotropia  $H_q$  for o mesmo que o grupo  $H_{(q-1)}$  e se o número de funções independentes  $t_q$  for igual ao número  $t_{(q-1)}$ , então faça  $q = (p + 1)$  e o processo está terminado. Caso contrário, aumente  $q$  de uma unidade e volte para o passo 1.

Karlhede verificou que os a aplicação desse algoritmo envolve critérios que permitem separar as variedades Riemannianas em classes de equivalência, de uma forma invariantes sob transformações de coordenadas. Cada uma dessas classes é representada pelas seguintes quantidades locais: (i) o conjunto das formas canônicas dos elementos de  $R_{(p+1)}$ ; (ii) o conjunto dos grupos de isotropia residuais  $\{H_0, \dots, H_p\}$ ; e (iii) o conjunto dos números das funções das coordenadas  $(x^\mu)$  que são funcionalmente independentes  $\{t_0, \dots, t_p\}$ . Esses conjuntos de quantidades locais estabelecem o que ficou conhecido como a classificação de Karlhede da métrica de uma variedade Riemanniana.

Como a classificação de Karlhede estabelece diversas condições necessárias para a equivalência local, podemos verificar se duas variedades Riemannianas *não* são equivalentes comparando as suas classificações de Karlhede. Além disso, também podemos comparar diversas quantidades discretas relacionadas como, por exemplo, as dimensões dos grupos de isometria  $r = 4 - t_p + s$  (cf. teorema 1.2). Apenas nos casos em que essas quantidades coincidirem é que será necessário retornar ao fibrado para determinar se as eqs. (1.9) são compatíveis ou não.

Utilizando o algoritmo também foi possível mostrar que, no caso das variedades espaços-tempos, as derivadas do tensor de curvatura devem ser calculadas até a 8ª ordem, no máximo, reduzindo assim limite obtido por Cartan (i.e., derivadas até a 10ª ordem) [26, 49]. Neste caso, podem existir até 3.156 quantidades independentes que precisam ser calculadas. Entretanto, dentre cerca de 100 soluções exatas estudadas [17], em apenas um caso foi necessário realizar os cálculos até a derivada covariante de 4ª ordem [50]. A questão do menor valor para o limite máximo da ordem das derivadas a serem calculadas ainda se constitui objeto de estudo [51]–[54].

Um aspecto importante na aplicação do algoritmo de Karlhede é que, devido às relações algébricas existentes entre os elementos de  $R_{(p+1)}$  obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci, não é necessário calcular todos os componentes das derivadas da

curvatura no conjunto  $R_{(p+1)}$ . Na próxima seção, apresentaremos um importante resultado que possibilita a aplicação do algoritmo utilizando apenas derivadas da curvatura que são algebricamente independentes, com uma grande redução na quantidade de cálculos que precisam ser realizados.

## 1.5 Um conjunto mínimo de escalares de Cartan

Nesta seção apresentaremos um conjunto explicitamente construído com o número mínimo de derivadas da curvatura de ordem  $0 \leq q \leq m$  que são algebricamente independentes e a partir das quais todas as derivadas de ordem  $m$  podem ser obtidas através de operações algébricas, isto é, usando somas, produtos e contrações. Dizemos que este é um *conjunto completo mínimo* para as derivadas covariantes da curvatura de ordem  $m$ .

Podemos ter uma idéia da economia obtida do ponto de vista da computação com o uso de um conjunto completo mínimo considerando que, dentre as  $20 \times 4^q$  componentes das derivadas de ordem  $q$  da curvatura apenas  $(q+1)(q+4)(q+5)$  são algebricamente independentes. A partir destes resultados podemos verificar que, para as derivadas até a sétima ordem ( $q = 0, 1, \dots, 7$ ), existem 3.156 quantidades independentes em um total de 436.900, isto é, os elementos independentes representam apenas 0,7% do total [28].

Åman e MacCallum mostraram como construir, explicitamente, um conjunto completo mínimo para as derivadas da curvatura de uma variedade Riemanniana, utilizando o formalismo espinorial [28]. Considerando que obtivemos uma generalização deste resultado para variedades de Riemann-Cartan, deixaremos a discussão do método utilizado na obtenção do mesmo para o capítulo 3, onde apresentaremos essa generalização. Por enquanto, apenas enunciamos o seguinte teorema demonstrado em [28]:

**Teorema 1.3** *Seja uma variedade Riemanniana 4-dimensional cujas partes irredutíveis do espinor de curvatura são dadas pelo espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$ , o espinor de Ricci  $\Phi_{ABC'D'}$  e o escalar de curvatura  $\Lambda$ . Então todas as derivadas covariantes de ordem  $m$  do espinor de curvatura podem ser expressas algebricamente em termos dos elementos dos conjuntos  $C_q$  e seu complexo conjugado  $\bar{C}_q$ , para  $0 \leq q \leq m$ , onde  $C_q$  é um conjunto mínimo para estas derivadas definido por:*

(i) a derivada totalmente simetrizada de ordem  $q$  do espinor de Weyl

$$\nabla^{(X'}_{(A} \nabla^{Y'}_{B} \dots \nabla^{Z')}_{G} \Psi_{HKLM}); \quad (1.13)$$

(ii) a derivada totalmente simetrizada de ordem  $q$  do espinor de Ricci

$$\nabla^{(X'}_{(A} \nabla^{Y'}_B \dots \nabla^{Z'}_G \Phi^{U'V'}_{HK}); \quad (1.14)$$

(iii) a derivada totalmente simetrizada de ordem  $q$  do escalar de curvatura

$$\nabla^{(X'}_{(A} \nabla^{Y'}_B \dots \nabla^{Z'}_G) \Lambda; \quad (1.15)$$

(iv) a partir de  $q \geq 1$ , a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(q - 1)$  do espinor

$\Xi_{U'HKM} = \nabla^N_{U'} \Psi_{HKMN}$ , ou seja

$$\nabla^{(X'}_{(A} \nabla^{Y'}_B \dots \nabla^{Z'}_G \Xi^{U'}_{HKM}); \quad (1.16)$$

(iv) Para  $q \geq 2$ , o d'Alembertiano  $\square = \nabla^{AA'} \nabla_{AA'}$  de todos os elementos do conjunto  $C_{(q-2)}$ .

O conjunto mínimo  $C_q$  não é único, pois existem outros conjuntos mínimos que estão algebricamente relacionados com  $C_q$  através das derivadas covariantes das identidades de Bianchi e de Ricci. Entretanto, o conjunto  $C_q$  tem duas propriedades importantes para a aplicação do algoritmo de Karlhede: (i) é definido recursivamente, o que possibilita o cálculo das derivadas independentes de ordem  $m$  sem que seja preciso calcular todas as derivadas de ordem  $0 \leq q \leq m$ ; (ii) contém apenas espinores totalmente simetrizados, permitindo definir uma notação compacta [28, 19], onde cada espinor é representado utilizando dois índices apenas. O uso dessa notação, do ponto de vista computacional, simplifica os algoritmos e facilita o armazenamento computacional e recuperação destas quantidades.

## 1.6 Classificando métricas na prática

Nesta seção, faremos uma breve introdução ao sistema *SHEEP/CLASSI* de computação algébrica para a TRG. Uma abordagem mais detalhada pode ser encontrada em [17]. Inicialmente, discutimos alguns aspectos relacionados com a implementação do algoritmo de Karlhede. Depois mostramos como entrar com os dados de uma métrica, como realizar uma classificação da mesma e, finalmente, como obter e interpretar um sumário das quantidades discretas calculadas.

A implementação do algoritmo de Karlhede em *CLASSI* é realizada utilizando espinores com dois componentes, pois desta forma as simetrias dos objetos geométricos são expressas de uma forma compacta. Em particular, os elementos do conjunto completo mínimo de escalares de Cartan são expressos por espinores totalmente simetrizados, conforme apresentamos na seção anterior (cf. teorema 1.3). Além disso, do ponto de vista computacional, a substituição de quantidades reais por complexas possibilita uma redução no número de quantidades que precisam ser armazenadas pelo computador.

A seguir apresentamos os módulos de *CLASSI* que foram desenvolvidos para a implementação de cada passo do algoritmo de Karlhede (cf. pag. 14), dando uma breve descrição da função de cada um desses módulos.

No passo 1 do algoritmo de Karlhede são calculados apenas os espinores que fazem parte do conjunto completo mínimo dos escalares de Cartan (cf. teorema 1.3). Este passo está implementado através dos módulos: (i) *SPINOR*, para calcular o espinor da conexão; (ii) *PSIPHI* (ou *SPCURV*) para calcular as partes irredutíveis do espinor de curvatura; (iii) *SYMSPI*, com os operadores para calcular d'Alembertianos e derivadas covariantes de espinores totalmente simetrizados; e (v) *EQUSPI* que implementa o restante dos espinores do conjunto completo mínimo dos escalares de Cartan, até as derivadas de sétima ordem.

No passo 2, para  $q = 0$ , temos a classificação algébrica do espinor de curvatura e os procedimentos para fixar o referencial canônico. Assim, primeiro são obtidos os tipos de Petrov e de Segre dos espinores de Weyl e de Ricci utilizando os módulos *PTRVSP* e *SEGRE*, que implementam os algoritmos desenvolvidos por Åman *et al.* [55, 56] e por Joly e MacCallum [57, 58], respectivamente.

Depois transformações de díadas são realizadas para colocar o espinor de Weyl (*PSI*) em uma forma canônica correspondente ao seu tipo de Petrov, usando o módulo *DYTRSP*. Esta é a etapa mais trabalhosa de ser realizada na prática. Entretanto, em muitos casos, a mudança para o referencial canônico pode ser realizada automaticamente pelo sistema, utilizando o módulo *DYTAUT* [17]. Nos casos em que isto não é possível, as transformações têm que ser encontradas interativamente através do módulo *DYTSYM*.

Em seguida, o mesmo procedimento é utilizado com o espinor de Ricci, procurando fixar ainda mais o referencial. Entretanto, nem sempre é possível colocar os espinores de Weyl e de Ricci simultaneamente nas respectivas formas canônicas.

Nos passos 3 e 4 o número das funções independentes é determinado através do cálculo

do posto do Jacobiano das possíveis funções independentes, utilizando o módulo FUNTST. Os grupos de isotropia são obtidos a partir das formas canônica, utilizando algoritmos desenvolvidos por Aman e implementados no módulo ISOTST.

Por fim, os comandos para a classificação de uma métrica, onde todos os passos do algoritmo de Karlhede são sucessivamente realizados até as derivadas de sétima ordem, estão implementado no módulo CLASSI, que utiliza todos os módulos anteriormente mencionados. Estes comandos são agrupados em um único comando a partir do qual o sistema realiza automaticamente a classificação de Karlhede de uma dada métrica, como mostraremos mais adiante. Antes, porém, vamos apresentar alguns comandos utilizados para realizar a entrada dos dados de uma métrica.

A maneira de executar o sistema *SHEEP/CLASSI* depende da implementação utilizada. Em geral, no MS-DOS ou em UNIX o sistema é executado através do comando *classi*, que resulta no *prompt* *SHP>*, indicando que o sistema está pronto para a entrada de dados e de comandos. Os comandos de *SHEEP/CLASSI* utilizam a sintaxe de LISP [30, 31], onde cada comando tem um parêntesis no início e outro no final.

A entrada dos dados com as informações sobre uma dada métrica pode ser feita interativamente, passo a passo, ou então carregando um arquivo de métrica que contém essas informações. O arquivo de métrica, na maioria das vezes, é preparado interativamente.

A entrada de dados, tanto interativamente quanto através de um arquivo de métrica, geralmente é realizada utilizando os seguinte comandos:

1. (TITLE "...") - É utilizado no início do arquivo de métrica e tem como argumento uma seqüência de caracteres colocados entre aspas. Geralmente contém o nome do arquivo e informações sobre a métrica.
2. % - Introduz comentários. Tudo o que aparece na linha após "%" é ignorado.
3. (LOAD "nome.ext") - Carrega um arquivo de métrica ou de programas. O argumento *nome.ext* é o nome do arquivo, incluindo a sua localização, que deve estar entre aspas. Não é necessário digitar a extensão *ext* nem utilizar aspas para carregar os módulos de *SHEEP/CLASSI*.
4. (ZEROINIT *espinor*) - Atribui o valor zero a todos os componentes do argumento *espinor*, que pode ser tanto um espinor quanto um tensor.
5. (OFF ALL) - Desliga todas as chaves que controlam a execução do sistema

*SHEEP/CLASSI.*

6. (**VAR** *var0, var1, ...*) - Define as coordenadas. Os argumentos *var0, var1, etc* formam uma lista com as letras (ou os nomes) que especificam as coordenadas, com a coordenada temporal em primeiro lugar.
7. (**NAMLC** *nome*) - Faz com que o argumento *nome*, seja impresso com letras minúsculas. Geralmente é utilizado nos nomes das coordenadas e de funções.
8. (**REAL ...**), (**COMPLEX ...**) - Definem os seus argumentos como quantidades reais ou complexas, respectivamente. Utilizados com a chave **COMPLX** ligada.
9. (**RPL** *espinor*)*expralg*\$ - Define a expressão algébrica *expralg* como sendo a forma funcional do argumento *espinor*. Utilizado para definir uma dada função ou os componentes de um espinor (ou tensor), em termos das coordenadas da variedade. Por exemplo, o comando (**RPL** **A**)*x\*y*\$ define a função *A* como sendo  $A = xy$  e o comando (**RPL** **GDD** 1 1 **GDD** 1 2)**A***y*\$ define os componentes  $g_{11}$  e  $g_{12}$  da métrica (**GDD**) como sendo  $g_{11} = A$  e  $g_{12} = y$ . Apesar de especificar a forma funcional de *A*, o comando **RPL** não define *A* como uma função das coordenadas *x* e *y*, isto deve ser feito separadamente utilizando o comando **FUNS**, como veremos a seguir.
10. (**FUNS** (*espinor var1, var2, ...*)) - Este comando define o argumento *espinor* como uma função arbitrária das coordenadas *var1, var2, etc*, possibilitando o cálculo de suas derivadas. No caso de uma função constante, os nomes das coordenadas não são indicados. Este comando possibilita que expressões simplificadas para as derivadas de uma função sejam introduzidas no lugar das expressões que foram calculadas por *SHEEP/CLASSI*. Por exemplo, a derivada da função *F* com relação à coordenada *x* é substituída pela expressão algébrica *expralg* utilizando o comando (**FUNS** (**F SPEC** **X**))*expralg*\$. Os comandos **RPL** e **FUNS** não especificam os espinores ou tensores onde os valores das funções devem ser utilizados. Isto é feito separadamente, com as listas de substituição.
11. (**NEWSUL** *sublist*) *espinor**expralg*\$ - Define a substituição de *espinor* pela expressão algébrica *expralg*, que fica armazenada na lista de substituições denominada *sublist*. Com o comando (**NEWSUL** *n* *nsublist*) podem ser definidas *n* substituições que são armazenadas na lista *nsublist*. Para uma função  $A = xy$ ,

por exemplo, o comando (NEWSUL ASUL)A\$:A\$ define a lista ASUL contendo a substituição de A pelo seu valor :A, isto é, de A por  $xy$ .

12. (USESUL *sublist espinor1, espinor2,...*) - Aplica as substituições definidas na lista de substituições *sublist* nos espinores *espinor1, espinor2, etc.*
13. IZUD - Matriz  $4 \times 4$  cujas linhas são os componentes das 1-formas que definem a base de tétradas utilizada para a entrada de dados  $\omega^A = Z^A_\mu dx^\mu$  (IFORMSU). Os valores dos elementos de IZUD são atribuídos com o comando RPL. O nome IZUD refere-se a *Input Z Up Down*.
14. (LORENTZ IFRAME) - Define o tipo de tétrada utilizada para a entrada de dados (IFRAME) como sendo uma tétrada de Lorentz (LORENTZ). Para definir tétradas tipo nulo e semi-nulo utiliza-se NULLT e HNULLT, respectivamente.
15. ZUD - Matriz  $4 \times 4$  cujas linhas são os componentes das 1-formas que definem a base de tétradas utilizada para a realização de cálculos (FORMSU). É calculada automaticamente pelo sistema, a partir dos elementos de IZUD.
16. (NULLT FRAME) - Define o tipo de tétrada utilizada para a realização de cálculos (FRAME) como sendo uma tétrada nula. Para definir tétradas de Lorentz ou semi-nulas, basta utilizar LORENTZ ou HNULLT, respectivamente, em lugar de NULLT. Se o tipo de tétradas FRAME não for especificado pelo usuário, então o sistema o considera como sendo idêntico a IFRAME.
17. DYTR - Matriz de transformação de díadas. Introduce uma transformação de Lorentz da tétrada utilizada para a entrada de dados (IZUD) para a tétrada empregada para a realização dos cálculos (ZUD). Os valores dos seus elementos são atribuídos com o comando RPL.

Além destes comandos, *SHEEP/CLASSI* tem diversas chaves que controlam a sua execução e que também são úteis para a especificação dos dados que definem uma métrica. Uma chave denominada *switch*, por exemplo, pode ser ligada com o comando (*switch ON*) e desligada com (*switch OFF*). Algumas das chaves mais importantes são:

1. NOZERO - Faz com que apenas os componentes não nulos de um espinor sejam impressos;

2. **COMPLX** - Permite trabalhar com quantidades reais e complexas, definidas com os comandos **REAL** e **COMPLEX**, respectivamente;
3. **SPACELIKE** - Muda a assinatura da métrica da convenção (+ - - -), utilizada como *default*, para a convenção (- + + +).
4. **NEGRIESIGN** - Muda o sinal na definição do tensor de curvatura

$$R^{\mu}_{\nu\beta\rho} = \pm (\Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\rho} + \Gamma^{\mu}_{\kappa\beta}\Gamma^{\kappa}_{\nu\rho} - \Gamma^{\mu}_{\kappa\rho}\Gamma^{\kappa}_{\nu\beta}). \quad (1.17)$$

Com esta chave ligada o sinal + (mais), da convenção utilizada por *default*, é mudado para o sinal - (menos);

5. **NEGEINSIGN** - Muda o sinal na definição das equações de Einstein

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g_{\alpha\beta} = \pm 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.18)$$

onde  $R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$  e  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ . O sinal + (mais), da convenção utilizada por *default*, é mudado para o sinal - (menos), quando esta chave estiver ligada.

Uma vez realizada a entrada dos dados referentes a uma solução exata da TRG, os diversos recursos de cálculo disponíveis em *SHEEP/CLASSI* podem ser utilizados para investigar as propriedades dessa métrica. Consideraremos a seguir apenas aqueles relacionados com as maneiras de realizar a classificação de Karlhede.

Existem duas maneiras de realizar a classificação de Karlhede utilizando *CLASSI*. Na primeira delas, todos os cálculos do algoritmo de Karlhede são realizados automaticamente em uma ordem prefixada pelo sistema. Na segunda, os cálculos são realizados interativamente, passo a passo, em uma ordem determinada pelo usuário. Mostraremos aqui apenas a primeira maneira, considerando um arquivo de métrica previamente preparado. A maneira interativa será apresentada no capítulo 5, onde discutimos a classificação dos espaços-tempos com torção utilizando *TCLASSI*.

Para realizar a classificação de Karlhede pela a maneira prefixada pelo sistema, basta carregar o arquivo de métrica em *CLASSI* e depois utilizar o comando (**CLASSIFY**). Neste caso, o sistema realiza automaticamene todos os cálculos até completar a classificação, ou até atingir o limite das derivadas de sétima ordem. Entretanto, se a métrica não estiver no referencial canônico a classificação será interrompida ao final dos cálculos correspondentes à ordem  $q = 0$ . Os cálculos do algoritmo também podem ser realizados

separadamente para cada ordem  $q$  das derivadas utilizando os comandos (`CLASSIFY $q$` ), onde  $q = 0, 1, \dots, 7$ .

A quantidade de informação apresentada durante uma classificação pode ser reduzida através da chave `LESSPRI`. Uma redução ainda maior é obtida com `SHORTPRI`. Antes de cada nova classificação o comando (`INITCLASSI`) deve ser utilizado, para fazer com que os valores de diversos parâmetros utilizados na classificação anterior retornem ao valor inicial. O comando `CLEAN` remove todos os dados de uma métrica.

Para classificar uma métrica sem precisar carregar seu arquivo de métrica, basta utilizar o comando (`CLASSIFY "nome.ext"`), onde *nome.ext* é o nome do arquivo de métrica. Neste caso, o sistema carrega o arquivo e depois realiza automaticamente a classificação. Quando o comando `CLASSIFY` é utilizado nesta forma, os resultados de todos os cálculos são escritos em um arquivo cujo nome é formado pelos 8 primeiros caracteres do nome do arquivo de métrica e pela a extensão *res*. Um outro arquivo também é criado, contendo um sumário escrito em uma linha apenas, com as quantidades discretas obtidas na classificação. Este arquivo tem o mesmo nome do anterior, mas a sua extensão é *sum*.

O sumário com as quantidades discretas obtidas na classificação de Karlhede também pode ser obtido interativamente com o comando (`CLASSISUM`), cujos argumentos podem ser ou o nome (contendo até 6 caracteres) de um arquivo de métrica ou `NIL`. Estes sumários são bastantes úteis para identificar métricas que não são equivalentes e são utilizados na construção de um banco de dados <sup>1</sup>, que já conta com mais de 100 soluções exatas da TRG [17].

Para tornar possível a construção de um sumário escrito em uma linha apenas, foi necessário definir uma abreviação contendo apenas um caractere para cada tipo de Petrov, tipo de Segre e grupo de isotropia [17]. As abreviações dos tipos de Petrov e de Segre estão listadas nas tabs. (4.3)–(4.4) nas páginas 106 e 112, respectivamente; as dos grupos de isotropia estão dadas na tab. (1.1) na página 24.

Alguns exemplos com sumários de soluções exatas da TRG estão dados na tab. (1.2) na página 25. Os nomes utilizadas para as soluções são os nomes dos arquivos de métrica distribuídos com o código fonte de *SHEEP/CLASSI*, que estão no diretório `metrics`. Maiores detalhes podem ser encontrados em [17].

---

<sup>1</sup>Este banco de dados está disponível *on-line* na internet em <http://edradour.symbcomp.uerj.br>, <http://www.astro.queensu.ca> e <http://www.maths.soton.ac.uk>.

Grupo de Isotropia	Nome Abreviado	Nome em <i>CLASSI</i>	Representação Matricial
0	0	none	-
$SO(2)$	$s$	space (spin) rotations	$\begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}$
$SO(1,1)$	$b$	boosts	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$
$N_1 Im$	$k$	1-parameter null rotations	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ia & 1 \end{pmatrix}$
$N_1 Re$	$k$	1-parameter null rotations	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$
$SO(1,1) \times SO(2)$	$e$	boosts and rotations	$\begin{pmatrix} a e^{i\beta} & 0 \\ 0 & a^{-1} e^{-i\beta} \end{pmatrix}$
$N_2$	$n$	null rotations	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$
$SO(3)$	$p$	$SO(3)$ rotations	$\begin{pmatrix} e^{i\beta} \cos \alpha & e^{i\gamma} \sin \alpha \\ -e^{-i\gamma} \sin \alpha & e^{-i\beta} \cos \alpha \end{pmatrix}$
$SO(2,1)$	$t$	$SO(2,1)$ rotations	$\begin{pmatrix} e^{i\beta} \cosh \alpha & e^{i\gamma} \sinh \alpha \\ e^{-i\gamma} \sinh \alpha & e^{-i\beta} \cosh \alpha \end{pmatrix}$
$N_2 \times SO(2)$	$r$	null and spin rotations	$\begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ z e^{-i\beta} & e^{-i\beta} \end{pmatrix}$
$SO(3,1)$	6	full Lorentz group	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tabela 1.1: Grupos de isotropia de espaços-tempos na TRG, com as abreviações e os nomes usadas em *CLASSI* [17]. Os parâmetros  $a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são reais e  $z$ ,  $u$  e  $w$  são complexos. Na representação acima  $s$  é o grupo das rotações  $R_z$  e  $b$  o grupo das transformações de Lorentz especiais (“boosts”)  $B_z$  em relação ao eixo  $z$  (veja [39]). O grupo  $t$  fica representado pelo produto matricial  $R_z B_x B_y$ ,  $r$  por  $R_z N_2$  e o grupo  $e$  por  $R_z B_z$ .

nome	$\Phi\Lambda\Psi$	r	s	$H_i$	$t_i$
desitt	l10	X	6	66--	00--
bertot	e00	6	2	ee--	00--
petvac	b1D	4	1	bb--	11--
sphsta	s1D	4	1	ss--	11--
datray	r02	3	0	00--	11--
allnut	p13	1	0	00--	33--
einsta	f10	7	3	ff--	00--
kasner	001	3	0	00--	11--
kerr	00D	2	0	e00-	222-
minkow	000	X	6	66--	00--
schwar	00D	4	1	ess-	111-
frwcl	f10	6	3	ff--	11--
renord	e0D	4	1	ess-	111-
godel	p1D	4	0	0---	0---
wavez	00N	5	2	nnn-	011-
wavezk	00N	1	0	n000	0233

Tabela 1.2: Sumários de classificações de métricas, contendo quantidades discretas [17]. Cada linha corresponde a um sumário. As colunas contêm os seguintes dados: (1) *nome* é o nome (com 6 caracteres no máximo) de um arquivo de métrica; (2)  $\Phi$  é o tipo de Segre (cf. tab. (4.4, pag.112)); (3)  $\Lambda$  indica se o escalar de curvatura é igual a zero (0) ou não (1); (4)  $\Psi$  é o tipo de Petrov (cf. tab. (4.3), pag.106); (5)  $r$  é a dimensão do grupo de isometria (se  $r = 10$  a letra X é usada); (6)  $s$  é a dimensão do grupo de isotropia; (7)  $H_i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) são os grupos de isotropia (cf. tab. (1.1), pag.24) das sucessivas derivadas covariantes do espinor de curvatura; e (8)  $t_i$  é o número de funções funcionalmente independentes que as derivadas contêm. Nas oito últimas colunas, o sinal “-” representa um valor não calculado.

# Capítulo 2

## O Problema da equivalência nas teorias da gravitação com torção

### 2.1 Introdução

A partir deste capítulo iniciamos a discussão das quatro etapas que compõem o plano de pesquisa desta tese, com a apresentação dos resultados originais obtidos. Os detalhes dos cálculos realizados utilizando fibrados podem ser encontrados no apêndice A.

Na próxima seção demonstramos um teorema onde o problema da equivalência (local) de variedades de Riemann-Cartan é resolvido [18]. Na terceira seção, discutimos as simetrias (locais) das variedades de Riemann-Cartan e demonstramos um teorema que possibilita a determinação das dimensões do grupo de simetria e do seu subgrupo de isotropia a partir dos escalares de Cartan [18]. Na quarta seção, desenvolvemos um algoritmo para testar a equivalência e formulamos uma classificação invariante dos espaços-tempos de Riemann-Cartan [22, 24].

Os resultados principais deste capítulo foram objeto das publicações [18, 24].

### 2.2 O teorema da equivalência

Como vimos no capítulo 1, a equivalência (local) de campos gravitacionais na TRG significa o mesmo que isometria local de variedades Riemannianas, pois a conexão é completamente determinada pela métrica nessas variedades. Entretanto, isto não mais ocorre nas TGT, onde a conexão das variedades de Riemann-Cartan tem uma parte independente da

métrica dada pelo tensor de *torção*. Neste caso, mesmo existindo isometria (local) entre duas variedades, os transportes paralelos podem ser diferentes. Portanto, o conceito de equivalência precisa ser generalizado de modo a incluir a torção.

Definimos a equivalência (local) de variedades de Riemann-Cartan considerando separadamente as condições tanto para isometria quanto para a preservação da conexão (torção). Dessa forma, generalizamos a definição dada pela eq. (1.1) e introduzimos os graus de liberdade adicionais da torção. Em termos formais dizemos que duas variedades de Riemann-Cartan  $M$  e  $\widetilde{M}$ , de dimensão  $n$ , são localmente *equivalentes* quando existe um difeomorfismo  $f : U \mapsto \widetilde{U}$  entre dois sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$  definidos em  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x), \quad (2.1)$$

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(x) + \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}, \quad (2.2)$$

onde  $g_{\alpha\beta}(x)$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$  são os componentes da métrica e  $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(x)$  e  $\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}(\tilde{x})$  são os componentes da conexão de  $M$  e  $\widetilde{M}$ , em relação aos sistemas de coordenadas  $(U, x)$  e  $(\widetilde{U}, \tilde{x})$ , respectivamente.

Entretanto, para podermos utilizar o método de Cartan sobre equivalência de 1-formas apresentado na seção 1.2, foi preciso reformular a definição de equivalência dada pelas eqs. (2.1)–(2.2) utilizando o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados, de acordo com:

**Definição 2.1** *Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  e sejam  $\Theta^a$  e  $\tilde{\Theta}^a$  as 1-formas canônicas,  $\Sigma^a_b$  e  $\tilde{\Sigma}^a_b$  as 1-formas conexão dos fibrados dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\widetilde{M})$  definidos sobre  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. Dizemos que  $M$  e  $\widetilde{M}$  são localmente equivalentes quando existe um difeomorfismo local  $J : F(M) \mapsto \tilde{F}(\widetilde{M})$  tal que*

$$J^* \tilde{\Theta}^a = \Theta^a, \quad (2.3)$$

$$J^* \tilde{\Sigma}^a_b = \Sigma^a_b, \quad (2.4)$$

onde  $J^*$  é a adjunta da aplicação derivada (“pull-back map”) de  $J$ .

Note que no caso das variedades Riemannianas não foi preciso impor a condição para a preservação da conexão, dada pela eq. (2.4), porque ela é obtida a partir da condição para isometria dada pela eq. (2.3) [16].

Considerando que as 1-formas  $\{\Theta^a, \Sigma_b^a\}$ , utilizadas na definição 2.1, definem *univocamente* uma base não-holonômica no fibrado  $F(M)$ , o método de Cartan pode ser utilizado para obter as condições necessárias e suficientes para a equivalência de variedades de Riemann-Cartan.

Para resolver este problema de equivalência de 1-formas pelo método de Cartan precisamos, em primeiro lugar, calcular os componentes dos objetos de não-holonomia. De acordo com a eq. (1.3), o objeto de não-holonomia é definido pelos componentes das 2-formas  $d\Theta^a$  e  $d\Sigma_b^a$ , decompostas em somas de produtos exteriores das 1-formas da base  $\{\Theta^a, \Sigma_b^a\}$ . Estas derivadas exteriores podem ser obtidas diretamente das equações de estrutura de Cartan para o fibrado  $F(M)$  dadas por

$$d\Theta^a = -\Sigma_b^a \wedge \Theta^b + \frac{1}{2}\tau_{bc}^a \Theta^b \wedge \Theta^c, \quad (2.5)$$

$$d\Sigma_b^a = -\Sigma_n^a \wedge \Sigma_b^n + \frac{1}{2}\Omega_{bcd}^a \Theta^c \wedge \Theta^d, \quad (2.6)$$

onde os coeficientes  $\tau_{bc}^a = \tau_{bc}^a(x, \xi)$  e  $\Omega_{bcd}^a = \Omega_{bcd}^a(x, \xi)$  são os componentes torção e da curvatura de  $F(M)$ , respectivamente. Portanto, os componentes do objeto de não-holonomia (diferentes de 0 e 1) são dados por  $\tau_{bc}^a$  e por  $\Omega_{bcd}^a$ .

Os passos restantes do método de Cartan, de acordo com as eqs. (1.3)–(1.5), consistem no cálculo da derivada exterior de  $\tau_{bc}^a$  e  $\Omega_{bcd}^a$ , da derivada exterior dos componentes de  $d\tau_{bc}^a$  e  $d\Omega_{bcd}^a$ , e assim sucessivamente.

A derivada exterior dos componentes do objeto de não-holonomia (cf. Apêndice A) pode ser escrita como

$$d\tau_{bc}^a = \tau_{bc;n}^a \Theta^n - \tau_{bc}^n \Sigma_n^a + \tau_{nc}^a \Sigma_b^n + \tau_{bn}^a \Sigma_c^n, \quad (2.7)$$

$$d\Omega_{bcd}^a = \Omega_{bcd;n}^a \Theta^n - \Omega_{bcd}^n \Sigma_n^a + \Omega_{ncd}^a \Sigma_b^n + \Omega_{bnd}^a \Sigma_c^n + \Omega_{bcn}^a \Sigma_d^n, \quad (2.8)$$

onde os coeficientes são os componentes  $\tau_{bc}^a$  e  $\Omega_{bcd}^a$  da torção e da curvatura e os componentes  $\tau_{bc;n}^a$  e  $\Omega_{bcd;n}^a$  das suas derivadas covariantes, respectivamente.

No próximo passo, considerando  $d\tau_{bc}^a$  e  $d\Omega_{bcd}^a$  já foram obtidas, calculamos apenas a derivada exterior dos novos coeficientes  $\tau_{bc;n}^a$  e  $\Omega_{bcd;n}^a$ , que podemos expressar como

$$d\tau_{bc;n}^a = \tau_{bc;nk}^a \Theta^k - \tau_{bc;n}^k \Sigma_k^a + \tau_{kc;n}^a \Sigma_b^k + \tau_{bk;n}^a \Sigma_c^k + \tau_{bc;k}^a \Sigma_n^k, \quad (2.9)$$

$$d\Omega_{bcd;n}^a = \Omega_{bcd;nk}^a \Theta^k - \Omega_{bcd;n}^k \Sigma_k^a + \Omega_{kcd;n}^a \Sigma_b^k + \Omega_{bkd;n}^a \Sigma_c^k + \Omega_{bck;n}^a \Sigma_d^k + \Omega_{bcd;k}^a \Sigma_n^k, \quad (2.10)$$

onde os novos coeficientes são os componentes  $\tau^a_{bc;nk}$  e  $\Omega^a_{bcd;nk}$  das derivadas covariantes de segunda ordem da torção e da curvatura, respectivamente. Portanto, no passo a seguir temos que calcular apenas a derivada exterior dos novos coeficientes  $\tau^a_{bc;nk}$  e  $\Omega^a_{bcd;nk}$ .

Antes de prosseguirmos com os passos do método de Cartan, devemos considerar as relações entre as derivadas covariantes da torção e da curvatura que são determinadas pelas derivadas covariantes das identidades de Bianchi e de Ricci, conforme veremos em detalhes no capítulo 3. Aqui estamos interessados apenas nas relações *lineares* que as derivadas da torção têm com as derivadas da curvatura, permitindo que umas sejam expressas como combinações lineares das outras. Estas relações são determinadas pelas derivadas covariantes da identidade de Bianchi

$$\Omega^a_{[bcd]} - \tau^a_{[bc;d]} = -\tau^n_{[bc} \tau^a_{d]n}. \quad (2.11)$$

As identidades dadas pela eq. (2.11) são equações algébricas lineares nos componentes  $\Omega^a_{bcd}$  da curvatura e nos componentes  $\tau^a_{bc;d}$  da derivada covariante da torção. Neste caso, quando os componentes  $\tau^a_{bc}$  da torção forem conhecidos, podemos utilizar estas identidades para expressar 16 dos elementos do conjunto  $\mathcal{J}_0 = \{\Omega^a_{bcd}, \tau^a_{bc;d}\}$  como combinações lineares dos restantes.

De maneira análoga, como as derivadas covariante de ordem  $q$  das identidades de Bianchi dadas pela eq. (2.11) são lineares nas derivadas da curvatura de ordem  $q$  e nas derivadas da torção de ordem  $(q + 1)$ , obtemos que os elementos do conjunto

$$\mathcal{J}_q = \{\Omega^a_{bcd;m_1 \dots m_q}, \tau^a_{bc;m_1 \dots m_{(q+1)}}\} \quad (2.12)$$

estarão relacionados entre si por equações algébricas lineares, quando forem conhecidas as derivadas da torção de ordens  $0, 1, \dots, q$ . Portanto, em cada passo do método de Cartan as derivadas da curvatura de ordem  $q$  e da torção de ordem  $(q + 1)$  devem ser consideradas conjuntamente, para todo  $q \geq 0$ .

Uma vez determinadas as relações entre as derivadas da curvatura e da torção, prosseguindo com os passos do método de Cartan obtem-se derivadas covariantes da torção e da curvatura de ordens cada vez maiores. Os passos estarão concluídos quando forem calculadas derivadas da curvatura de ordem  $(p + 1)$  e da torção de ordem  $(p + 2)$  que sejam funcionalmente dependentes das derivadas da curvatura de ordens  $0, 1, \dots, p$  e da torção de ordens  $0, 1, \dots, (p + 1)$ , ou então que completem o número máximo de funções funcionalmente independentes em  $F(M)$ , isto é,  $\frac{1}{2}n(n + 1) = \dim F(M)$  funções independentes.

Em qualquer desses casos, nenhuma informação adicional é obtida a partir de derivadas de ordens superiores.

Finalmente, igualando os componentes da curvatura e da torção, bem como os componentes das derivadas covariantes da curvatura até a ordem  $(p + 1)$  e da torção até a ordem  $(p + 2)$  do fibrado  $F(M)$  com os componentes correspondentes do fibrado  $\tilde{F}(\tilde{M})$ , obtemos um sistema de equações algébricas. De acordo com o teorema 1.2, este sistema será compatível se e somente se os conjuntos de 1-formas  $\{\Theta^a, \Sigma^a_b\}$  e  $\{\tilde{\Theta}^a, \tilde{\Sigma}^a_b\}$  forem equivalentes, isto é, se e somente se as variedades de Riemann-Cartan  $M$  e  $\tilde{M}$  forem localmente equivalentes. Portanto, temos o seguinte teorema [18]:

**Teorema 2.1** *Sejam  $M$  e  $\tilde{M}$  variedades de Riemann-Cartan de dimensão  $n$ . Sejam  $\tau^a_{bc}$  e  $\tilde{\tau}^a_{bc}$  os componentes da torção e  $\Omega^a_{bcd}$  e  $\tilde{\Omega}^a_{bcd}$  os componentes da curvatura dos fibrados  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\tilde{M})$  dos referenciais ortogonais generalizados definidos sobre  $M$  e  $\tilde{M}$ , respectivamente. As variedades  $M$  e  $\tilde{M}$  são localmente equivalentes se existe um difeomorfismo (local) entre os fibrados  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\tilde{M})$  tal que as equações algébricas*

$$\begin{aligned}
 \tau^a_{bc} &= \tilde{\tau}^a_{bc}, \\
 \Omega^a_{bcd} &= \tilde{\Omega}^a_{bcd}, \\
 \tau^a_{bc;m_1} &= \tilde{\tau}^a_{bc;m_1}, \\
 &\vdots \\
 \Omega^a_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}} &= \tilde{\Omega}^a_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}}, \\
 \tau^a_{bc;m_1\dots m_{(p+2)}} &= \tilde{\tau}^a_{bc;m_1\dots m_{(p+2)}},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

*sejam compatíveis em termos das coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$  e  $(\tilde{x}^\mu, \tilde{\xi}^A)$  dos fibrados  $F(M)$  e  $\tilde{F}(\tilde{M})$ , respectivamente. Reciprocamente, as eqs. (2.13) implicam na equivalência das variedades de Riemann-Cartan  $M$  e  $\tilde{M}$ .*

As derivadas de ordem  $(p+1)$  da curvatura e de ordem  $(p+2)$  da torção são as derivadas de mais baixa ordem que são *funcionalmente* dependentes das derivadas de ordem  $0, 1, \dots, p$  da curvatura e de ordem  $0, 1, \dots, (p+1)$  da torção, onde  $(p+1) \leq \frac{1}{2}n(n+1) = \dim F(M)$ .

A solução do problema da equivalência dada pelas eqs. (2.13), também estabelece uma descrição (local), independente de coordenadas, de uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  através do conjunto

$$\mathcal{I}_{(p+1)} = \{ \tau^a_{bc}, \Omega^a_{bcd}, \tau^a_{bc;m_1}, \dots, \Omega^a_{bcd;m_1\dots m_{(p+1)}}, \tau^a_{bc;m_1\dots m_{(p+2)}} \}, \tag{2.14}$$

definido (localmente) no fibrado  $F(M)$ . Os elementos do conjunto  $\mathcal{I}_{(p+1)}$  estão definidos a menos de transformações ortogonais generalizadas e são escalares sob transformações de coordenadas, por isso também os denominamos *escalares de Cartan*, em consonância com a literatura [19, 20].

É importante observar que, quando restringimos a conexão impondo que ela seja simétrica (torção nula), as condições necessárias e suficientes para a equivalência de variedades de Riemann-Cartan dadas pelas eqs. (2.13) se reduzem às condições correspondentes para variedades Riemannianas dadas pelas eqs. (1.9). Além disso, o teorema 2.1 também é válido para uma variedade  $M$  sem métrica e dotada apenas de uma conexão afim não-simétrica, quando reformulado em termos do fibrado  $L(M)$  dos referenciais lineares [13, 14].

Do ponto de vista da física, o teorema 2.1 pode ser utilizado para resolver o problema da equivalência em qualquer TGT, pois foi demonstrado sem utilizar quaisquer equações de campo das TGT. Na verdade, é totalmente irrelevante se a variedade de Riemann-Cartan representa ou não um espaço-tempo, podendo a métrica e a torção serem completamente arbitrárias.

As propriedades (locais) das soluções exatas das equações de campo das TGT podem ser investigadas utilizando o conjunto dos escalares de Cartan  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , definido pela eq. (2.14), que estabelece uma descrição (local) invariante de uma variedade de Riemann-Cartan  $M$ . Assim, todas as propriedades locais do campo gravitacional que podem ser obtidas a partir dos componentes  $g_{\mu\nu}$  da métrica e  $T^{\alpha}_{\mu\nu}$  da torção também podem, em princípio, ser obtidas a partir dos escalares de Cartan. Em particular, estes escalares podem ser utilizados para investigar o grupo de simetria de uma variedade de Riemann-Cartan, como veremos a seguir.

## 2.3 Simetrias de variedades de Riemann-Cartan

Variedades onde estão definidas estruturas geométricas como, por exemplo, uma métrica ou uma conexão, podem admitir grupos de transformações que preservam estas estruturas e definem as *simetrias* dessas variedades. No caso das variedades de Riemann-Cartan, as suas simetrias são transformações que preservam tanto a métrica quanto a conexão [21], isto é, são tanto isometrias quanto colineações afim [13, 14, 59, 60], que denominamos de

colineações afim-isométricas ou de *isometrias-afim*.

Nesta seção demonstramos um teorema que permite determinar dimensões do grupo das isometrias-afim e do seu subgrupo de isotropia utilizando o conjunto dos escalares de Cartan  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , definido pela eq. (2.14), que estabelece uma descrição (local) completa e invariante de uma variedade de Riemann-Cartan.

As simetrias de uma variedade de Riemann-Cartan são definidas pelos campos de Killing que simultaneamente são colineações afim, isto é, as isometrias-afim são definidas de acordo com: dizemos que um campo vetorial com componentes  $v^\alpha$  em um dado sistema de coordenadas, define uma *isometria-afim* (local) em uma variedade Riemann-Cartan  $M$  se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu v^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu v^\rho = 0, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L}_v \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 v^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} v^\rho - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \frac{\partial v^\rho}{\partial x^\beta} = 0, \quad (2.16)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  e  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$  são os componentes da métrica e da conexão de  $M$ , respectivamente, e  $\mathcal{L}_v$  é a derivada de Lie com relação a  $v$ .

Denominamos as eqs. (2.15)–(2.16) acima de equações de Killing-Cartan e as soluções das mesmas de *campos de Killing-Cartan*, pois estabelecem as condições para que haja tanto isometria quanto preservação da conexão (torção). Estes campos definem o grupo de simetria da variedade de Riemann-Cartan  $M$ , que denominamos de *grupo de isometria-afim*, cuja dimensão é dada pelo número de campos de Killing-Cartan linearmente independentes. Quando existirem campos de Killing-Cartan que deixem os pontos de  $M$  fixos, dizemos que o grupo de isometria-afim admite um subgrupo de isotropia.

Podemos reformular a definição dada pelas eqs. (2.15)–(2.16), introduzindo novas variáveis definidas pelo tensor

$$v^\mu{}_\nu = v^\mu{}_{;\nu} - T^\mu{}_{\nu\lambda} v^\lambda, \quad (2.17)$$

onde  $T^\mu{}_{\nu\lambda}$  são os componentes da torção da variedade  $M$ . Utilizando  $v^\alpha$  e  $v^\mu{}_\nu$  como variáveis podemos reduzir o sistema de equações diferenciais de segunda ordem em  $v^\alpha$  dado pelas eqs. (2.15)–(2.16) para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em  $v^\alpha$  e  $v^\mu{}_\nu$  dado por

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v_{\mu\nu} + v_{\nu\mu} = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{L}_v \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = v^\mu{}_{\beta;\alpha} + R^\mu{}_{\beta\lambda\alpha} v^\lambda = 0, \quad (2.19)$$

onde  $R^\mu_{\beta\lambda\alpha}$  são os componentes do tensor de curvatura de  $M$ .

A partir das condições dadas pelas eq. (2.18)–(2.19), podemos mostrar que um campo de Killing-Cartan é univocamente determinado pelos  $n$  valores dos seus componentes  $v^\alpha$  e pelos  $\frac{1}{2}n(n-1)$  valores independentes das variáveis  $v^\alpha_\mu$  que satisfazem a eq.(2.18). Portanto, em uma variedade de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  existem no máximo  $\frac{1}{2}n(n+1)$  campos de Killing-Cartan linearmente independentes. Note que os campos de Killing-Cartan que formam o subgrupo de isotropia do grupo de isometria-afim da variedade  $M$ , isto é, que deixam os pontos de  $M$  fixos, são determinados pelas condições  $v^\alpha = 0$  e  $v^\alpha_\mu \neq 0$ .

Para que as propriedades do grupo de isometria-afim pudessem ser investigadas por meio do conjunto dos escalares de Cartan  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , definido pela eq. (2.14), foi necessário reformular a definição das colineações afim-isométricas, utilizando o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados, da seguinte forma:

**Definição 2.2** *Seja  $M$  uma variedade de Riemann-Cartan e seja  $F(M)$  o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados definido sobre  $M$ , onde estão definidas as 1-formas canônicas  $\Theta^a$  e as 1-formas  $\Sigma^a_b$  da conexão. Dizemos que um campo vetorial  $z$  em  $F(M)$  define uma isometria-afim (local)  $v = \pi_*(z)$  em  $M$  se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$\mathcal{L}_z \Sigma^a_b = 0, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{L}_z \Theta^a = 0, \quad (2.21)$$

onde  $\pi_*$  é a aplicação derivada da projeção  $\pi$  de  $F(M)$  sobre  $M$ .

Utilizando as condições dadas pela eq. (2.21) e considerando que  $v = \pi_*(z)$ , podemos mostrar que os componentes  $z^a = \langle \Theta^a, z \rangle$  e  $z^a_b = \langle \Sigma^a_b, z \rangle$  do campo  $z$  em relação à base dual de  $\{\Theta^a, \Sigma^a_b\}$ , podem ser escritos como

$$z^a = v^a, \quad (2.22)$$

$$z^a_b = v^a_{;b} - T^a_{bn} v^n, \quad (2.23)$$

onde  $v^a$  e  $T^a_{bn}$  são os componentes do campo de Killing-Cartan  $v$  e da torção de  $M$ , respectivamente, em relação a um referencial ortonormal generalizado.

O subgrupo de isotropia do grupo de isometria-afim é definido por campos  $z$  de  $F(M)$  que satisfazem as condições  $z^a = 0$  e  $z^a_b \neq 0$ , em cada ponto da fibra  $\pi^{-1}(p)$  sobre um

ponto  $p$  de  $M$ . Portanto, são vetores verticais tangentes à fibra  $\pi^{-1}(p)$  e envolvem apenas variações dos parâmetros  $\xi^A$ ,  $A=1, \dots, \frac{1}{2}n(n-1)$  do grupo ortogonal generalizado  $O(n)$ . Os campos de Killing-Cartan correspondentes  $v = \pi_*(z)$  definidos em  $M$  deixam o ponto  $p$  fixo tendo em vista que, de acordo com as eqs. (2.22)–(2.23), satisfazem as condições  $v^a = 0$  e  $v^a_b \neq 0$ .

A existência e o número dos campos de Killing-Cartan independentes são determinados pelas condições de integrabilidade das eqs. (2.20)–(2.21), que impõem restrições adicionais aos valores de  $v^\alpha$  e de  $v^\alpha_\mu$ . Iniciando pela derivada exterior das eqs. (2.20)–(2.21), as condições de integrabilidade restantes são obtidas calculando a derivada exterior das condições anteriores e assim sucessivamente.

Considerando que a derivada de Lie comuta com a derivada exterior, podemos obter as condições de integrabilidade das eqs. (2.20)–(2.21) calculando a derivada de Lie das equações de estrutura de Cartan eqs. (2.5)–(2.6) e depois utilizando as eqs. (2.20)–(2.21) para obter o seguinte resultado:

$$d(\mathcal{L}_z \Theta^a) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z \tau^a_{bc}) \Theta^b \wedge \Theta^c = 0, \quad (2.24)$$

$$d(\mathcal{L}_z \Sigma^a_b) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd}) \Theta^c \wedge \Theta^d = 0. \quad (2.25)$$

Como as 1-formas canônicas são linearmente independentes, as condições de integrabilidade das eqs. (2.20)–(2.21) ficam dadas por  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$  e  $\mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd} = 0$ , isto é, as derivadas de Lie dos componentes da torção e da da curvatura devem ser nulas. Estas derivadas de Lie podem ser escritas como

$$\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = \tau^a_{bc;n} z^n - \tau^n_{bc} z^a_n + \tau^a_{nc} z^n_b + \tau^a_{bn} z^n_c = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd} = \Omega^a_{bcd;n} z^n - \Omega^n_{bcd} z^a_n + \Omega^a_{ncd} z^n_b + \Omega^a_{bnd} z^n_c + \Omega^a_{bcn} z^n_d = 0, \quad (2.27)$$

onde os componentes  $z^a$  e  $z^a_b$  do campo  $z$  são definidos pela eq. (2.22) e pela eq. (2.23), respectivamente (cf. apêndice A).

Determinando a seguir as condições de integrabilidade das eqs. (2.26)–(2.27), obtemos que  $\mathcal{L}_z(d\tau^a_{bc}) = 0$  e  $\mathcal{L}_z(d\Omega^a_{bcd}) = 0$ , pois a derivada exterior comuta com a derivada de Lie. Utilizando as expressões para as derivadas exteriores  $d\tau^a_{bc}$  e  $d\Omega^a_{bcd}$  dadas pelas eqs. (2.7)–(2.8) e as condições de integrabilidade anteriores dadas pelas eqs. (2.24)–(2.25), concluímos que as derivadas de Lie dos componentes das derivadas covariantes da torção e da curvatura devem ser nulas, isto é,  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc;n} = 0$  e  $\mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd;n} = 0$ . Calculando estas

derivadas de Lie, podemos escrever estas condições de integrabilidade como

$$\mathcal{L}_z \tau^a_{bc;n} = \tau^a_{bc;nq} z^q - \tau^q_{bc;n} z^a_q + \tau^a_{qc;n} z^q_b + \tau^a_{bq;n} z^q_c + \tau^a_{bc;q} z^q_n = 0, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd;n} &= \Omega^a_{bcd;nq} z^q - \Omega^q_{bcd;n} z^a_q + \Omega^a_{qcd;n} z^q_b + \Omega^a_{bqd;n} z^q_c + \Omega^a_{bcq;n} z^q_d \\ &+ \Omega^a_{bcd;q} z^q_n = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Prosseguindo com a determinação das condições de integrabilidade, obtemos equações análogas envolvendo derivadas de Lie dos componentes das derivadas covariantes da torção e da curvatura de ordens cada vez maiores.

Como as derivadas covariantes da torção e da curvatura estão relacionadas entre si através de equações lineares, de acordo com o conjunto dado pela eq. (2.12), concluímos que todas as condições de integrabilidade estarão obtidas quando as derivadas de Lie das derivadas covariantes da curvatura de ordem  $(p+1)$  e da torção de ordem  $(p+2)$  formem equações que sejam *linearmente* dependentes das equações obtidas anteriormente, isto é, obtidas igualando a zero as derivadas de Lie das derivadas covariantes da curvatura de ordens  $0, 1, \dots, p$  e da torção de ordens  $0, 1, \dots, (p+1)$ .

Considerando que cada derivada de Lie contribui pelo menos com uma nova equação independente obtemos o limite  $(p+1) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ , pois em uma variedade de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  existem no máximo  $\frac{1}{2}n(n+1)$  campos de Killing-Cartan linearmente independentes.

As condições de integrabilidade das eqs. (2.20)–(2.21) que definem as isometrias-afim formam um sistema de equações algébricas lineares nas variáveis  $z^a$  e  $z^a_b$ . Utilizando as condições para que este sistema tenha uma solução não-nula, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 2.2** *Seja  $M$  uma variedade de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  e sejam  $\tau^a_{bc}$  e  $\Omega^a_{bcd}$  os componentes da torção e da curvatura, respectivamente, do fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados definido sobre  $M$ . Então um campo vetorial  $z$  em  $F(M)$  define uma isometria-afim (local)  $v = \pi_*(z)$  em  $M$ , se e somente se o sistema de equações algébricas*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z \tau^a_{bc} &= \tau^a_{bc;n} z^n - \tau^n_{bc} z^a_n + \tau^a_{nc} z^n_b + \tau^a_{bn} z^n_c = 0, \\ \mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd} &= \Omega^a_{bcd;n} z^n - \Omega^n_{bcd} z^a_n + \Omega^a_{ncd} z^n_b + \dots + \Omega^a_{bcn} z^n_d = 0, \\ \mathcal{L}_z \tau^a_{bc;m_1} &= \tau^a_{bc;m_1q} z^q - \tau^q_{bc;m_1} z^a_q + \tau^a_{qc;m_1} z^q_b + \dots + \tau^a_{bc;q} z^q_{m_1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 \mathcal{L}_z \Omega^a_{bcd; m_1 \dots m_{(p+1)}} &= \Omega^a_{bcd; m_1 \dots m_{(p+1)q}} z^q - \dots + \Omega^a_{bcd; m_1 \dots m_p q} z^q_{m_{(p+1)}} = 0, \\
 \mathcal{L}_z \tau^a_{bc; m_1 \dots m_{(p+2)}} &= \tau^a_{bc; m_1 \dots m_{(p+2)q}} z^q - \dots + \tau^a_{bc; m_1 \dots m_{(p+1)q}} z^q_{m_{(p+2)}} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

for compatível nas variáveis  $z^a$  e  $z^a_b$ , dadas pelos componentes de  $z$  na base definida pelas 1-formas canônicas  $\Theta^a$  e as 1-formas  $\Sigma^a_b$  da conexão de  $F(M)$ . Se neste sistema existem  $k$  equações linearmente independentes (posto  $k$ ), então o grupo de colineações afim-isométricas tem dimensão  $r = \frac{1}{2}n(n+1) - k$ . Se este sistema tem, fazendo  $z^a = 0$ ,  $m$  equações linearmente independentes (posto  $m$ ) nas variáveis  $z^a_b$ , então existe um subgrupo de isotropia com dimensão  $s = \frac{1}{2}n(n-1) - m$ .

As derivadas covariantes da curvatura de ordem  $(p+1)$  e da torção de ordem  $(p+2)$  são as derivadas de mais baixa ordem cujas derivadas de Lie formam equações que são linearmente dependentes das equações formadas com as derivadas de Lie das derivadas covariantes da curvatura de ordens  $0, 1, \dots, p$  e da torção de ordens  $0, 1, \dots, (p+1)$ , onde  $(p+1) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$ .

Com estes resultados, finalmente estamos em condições de determinar a dimensão do grupo afim-isométrico e do seu subgrupo de isotropia a partir do número de funções funcionalmente independentes existente no conjunto dos escalares de Cartan  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , definido pela eq. (2.14).

Consideremos inicialmente os escalares de Cartan dados pelos componentes  $\tau^a_{bc}$  da torção. O número de funções das coordenadas  $y^\mu$  e  $\xi^A$  de  $F(M)$  que são funcionalmente independentes entre os componentes  $\tau^a_{bc} = \tau^a_{bc}(y, \xi)$  é igual ao número de 1-formas linearmente independentes entre as 1-formas  $d\tau^a_{bc}$  definidas em  $F(M)$ , pois duas funções  $f$  e  $g$  são funcionalmente independentes se as 1-formas  $df$  e  $dg$  forem linearmente independentes.

Comparando as 1-formas  $d\tau^a_{bc}$  dadas pela eq. (2.7) com as equações  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$  dadas pela eq. (2.26), verificamos que os componentes em relação a  $\Theta^a$  e  $\Sigma^a_b$  são iguais aos coeficientes de  $z^a$  e  $z^a_b$ , respectivamente. Isto significa que o número de 1-formas linearmente independentes entre as 1-formas  $d\tau^a_{bc}$  é igual ao número de equações linearmente independentes entre as equações  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$ . Portanto, o número de funções das coordenadas  $y^\mu$  e  $\xi^A$  de  $F(M)$  que são funcionalmente independentes entre os componentes  $\tau^a_{bc}$  é igual ao número de equações linearmente independentes entre as condições de integrabilidade das isometrias-afim  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$ .

O número de funções das coordenadas  $\xi^A$ , que são funcionalmente independentes entre os componentes  $\tau^a_{bc} = \tau^a_{bc}(y, \xi)$  também pode ser obtido a partir das condições de integrabilidade  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$  dadas pela eq. (2.26). Quando apenas as variações das coordenadas  $\xi^A$  são consideradas (isto é, quando  $dy^\mu = 0$ ), as 1-formas  $d\tau^a_{bc}$  são projetadas no subespaço vertical de  $F(M)$  e podem ser escritas como  $d\tau^a_{bc} = -\tau^a_{bc} \Sigma^n_a + \tau^a_{nc} \Sigma^n_b + \tau^a_{bn} \Sigma^n_c$ , onde os componentes em relação a  $\Sigma^a_b$  são iguais aos coeficientes de  $z^a_b$  nas equações  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$ . Portanto, para os campos (verticais) onde  $z^a = 0$  e  $z^a_b \neq 0$ , isto é, para as isometrias-afim do subgrupo de isotropia, o número de funções das coordenadas  $\xi^A$  de  $F(M)$  que são funcionalmente independentes entre os componentes  $\tau^a_{bc}$  da torção é igual ao número de equações linearmente independentes entre as condições de integrabilidade dadas por  $\mathcal{L}_z \tau^a_{bc} = 0$ .

Generalizando estes resultados para todos os elementos do conjunto  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , obtemos que o número de equações linearmente independentes entre as condições de integrabilidade das colineações afim-isométricas, dadas pelas eqs. (2.30), é igual ao número de funções funcionalmente independentes existentes no conjunto  $\mathcal{I}_{(p+1)}$  dos escalares de Cartan, definido pela eq. (2.14). Finalmente, utilizando o teorema 2.2, podemos reunir esses resultados no seguinte teorema [18]:

**Teorema 2.3** *Seja o fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados, com torção  $\tau^a_{bc}$ , curvatura  $\Omega^a_{bcd}$  e coordenadas  $(x^\mu, \xi^A)$ , sobre uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  de dimensão  $n$ . Considere que existem  $k_p$  escalares de Cartan funcionalmente independentes no conjunto  $\mathcal{I}_{(p+1)} = \{\tau^a_{bc}, \Omega^a_{bcd}, \tau^a_{bc;m_1}, \dots, \Omega^a_{bcd;m_1 \dots m_{(p+1)}}, \tau^a_{bc;m_1 \dots m_{(p+2)}}\}$ , onde  $m_p$  são funções das coordenadas  $\xi^A$  e  $t_p$  são funções das coordenadas  $x^\mu$ . Então existe em  $M$  um grupo de isometria-afim de dimensão*

$$r = \frac{1}{2}n(n+1) - k_p, \quad (2.31)$$

*que tem um subgrupo de isotropia de dimensão*

$$s = \frac{1}{2}n(n-1) - m_p, \quad (2.32)$$

*e que atua em uma órbita de dimensão*

$$d = r - s = n - t_p. \quad (2.33)$$

## 2.4 Um algoritmo para testar a equivalência

Nesta seção, apresentamos um algoritmo que torna possível testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan através de um procedimento prático. Uma vez resolvido o problema formal ou teórico, o aspecto prático do problema da equivalência adquire grande relevância do ponto de vista da física. A necessidade de um procedimento prático (algoritmo) para testar a equivalência e realizar os cálculos de uma maneira econômica e eficiente é facilmente constatada a partir do grande número de escalares de Cartan que precisam ser calculados em qualquer aplicação. No caso de uma variedade espaço-tempo (onde  $n = 4$ ), por exemplo, é necessário calcular 1.064 quantidades independentes quando  $p + 1 = 10$ .

Quando a equivalência de variedades de Riemann-Cartan estiver sendo testada, um aspecto importante deve ser considerado. Em cada ordem de diferenciação  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  existem diversas informações sobre as variedades que podem ser obtidas e comparadas, resultando em condições necessárias para a equivalência que podem ser incluídas em um procedimento prático. O teste da equivalência estará terminado quando, para uma dada ordem  $q$ , as condições necessárias não forem satisfeitas. Assim, não será necessário prosseguir calculando as derivadas de ordens superiores nem resolver o sistema de equações algébricas dado pelas eqs. (2.13), com as condições necessárias e suficientes para a equivalência.

A relevância desta abordagem fica evidente quando consideramos que os procedimentos para determinar a solução de um sistema de equações algébricas não podem ser colocados na forma de um algoritmo [49]. Apenas nos casos em que as condições necessárias forem satisfeitas em todas as ordens de diferenciação  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  utilizadas no procedimento prático, é que será preciso determinar se o sistema dado pelas eqs. (2.13) tem solução ou não. No que se segue vamos descrever os passos necessários para o desenvolvimento de um procedimento prático para testar a equivalência.

O primeiro passo consiste em adotar um procedimento onde as coordenadas  $x^\mu$  da variedade  $M$  são tratadas separadamente dos parâmetros  $\xi^A$  do grupo das rotações generalizadas. Nesta abordagem, os escalares de Cartan são calculados em uma seção do fibrado  $F(M)$ , isto é, em relação a um referencial ortogonal generalizado, sendo projetados na variedade base  $M$  e deixando de depender explicitamente dos parâmetros  $\xi^A$ .

Dessa forma, o conjunto  $\mathcal{I}_{(p+1)}$  definido pela eq. (2.14) é substituído pelo conjunto

$$I_{(p+1)} = \{T_{bc}^a, R_{bcd}^a, T_{bc;m_1}^a, \dots, R_{bcd;m_1 \dots m_{(p+1)}}^a, T_{bc;m_1 \dots m_{(p+2)}}^a\}, \quad (2.34)$$

formado pelos componentes  $R_{bcd}^a$  da curvatura e  $T_{bc}^a$  da torção de  $M$ , bem como das derivadas covariantes dos mesmos, em relação ao referencial ortogonal generalizado determinado pela seção local do fibrado.

Da mesma forma que os elementos de  $\mathcal{I}_{(p+1)}$ , os elementos de  $I_{(p+1)}$  também estão algebricamente relacionados pelas derivadas covariantes das identidades de Bianchi e de Ricci. Assim, como as derivadas covariante de ordem  $q$  das identidades de Bianchi

$$R^a_{[bcd]} - T^a_{[bc;d]} = -T^n_{[bc} T^a_{d]n} \quad (2.35)$$

são *lineares* nas derivadas da curvatura de ordem  $q$  e nas derivadas da torção de ordem  $(q+1)$ , obtemos que os elementos do conjunto  $J_q = \{R^a_{bcd;m_1 \dots m_q}, T^a_{bc;m_1 \dots m_{(q+1)}}\}$  estarão relacionados entre si por equações algébricas lineares, quando forem conhecidas as derivadas da torção de ordens  $0, 1, \dots, q$ . Portanto, em cada passo do algoritmo para testar a equivalência as derivadas da curvatura de ordem  $q$  e da torção de ordem  $(q+1)$  devem ser consideradas conjuntamente, para todo  $q \geq 0$ .

Dado o conjunto  $J_q$ , o conjunto  $I_q$  pode ser obtido a partir de  $I_{(q-1)}$  de acordo com  $I_q = I_{(q-1)} \cup J_q$ , para  $q \geq 1$ . Para  $q = 0$ , de acordo com as relações algébricas determinadas pelas identidades de Bianchi, além dos componentes da curvatura e da torção, o conjunto  $I_0$  também inclui os componentes das derivadas covariantes de primeira ordem da torção, isto é, temos  $I_0 = \{T^a_{bc}\} \cup J_0 = \{T^a_{bc}, R^a_{bcd}, T^a_{bc;m_1}\}$ . Denominamos os elementos de  $I_0$  de escalares de Cartan de ordem 0 e os elementos de  $J_q$ , para  $q \geq 0$ , de *escalares de Cartan de ordem  $q$* .

Entretanto, a dependência dos escalares de Cartan com relação aos parâmetros  $\xi^A$  ainda pode ser investigada através do comportamento dos elementos do conjunto  $I_{(p+1)}$  sob transformações ortogonais generalizadas, isto é, sob variações das coordenadas  $\xi^A$  da fibra de  $F(M)$  definida sobre o ponto de  $M$  onde o referencial ortogonal generalizado está definido.

Com este procedimento é possível reduzir, em cada ordem de diferenciação  $q = 0, 1, \dots, (p+1)$ , a dimensão do fibrado efetivamente utilizado para determinar a equivalência, o que constitui o próximo passo. Para tanto, o referencial é alinhado com direções invariantes determinadas pelos escalares de Cartan, reduzindo a liberdade de

rotação e fixando o referencial o máximo possível. Este alinhamento é obtido realizando as classificações algébricas dos escalares de Cartan e colocando cada um deles em formas canônicas escolhidas a partir dos resultados dessas classificações. Os referenciais assim fixados são denominados *referenciais canônicos* [26].

Esta abordagem tem dois aspectos importantes, do ponto de vista prático. Em primeiro lugar, à medida que a dimensão do fibrado é reduzida, a ordem máxima  $(p + 1)$  das derivadas que precisam ser calculadas também diminui. Em segundo lugar, um conjunto de condições necessárias para a equivalência é obtido a partir das classificações algébricas dos escalares de Cartan.

A redução da dimensão do fibrado em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$ , pode ser determinada a partir do *grupo de isotropia*  $H_q$  do conjunto  $I_q$ . Este grupo é formado pelas rotações generalizadas que deixam invariantes as formas canônicas dos elementos de  $I_q$ . Quando duas variedades tiverem grupos de isotropia  $H_q$  iguais, os números de funções dos parâmetros  $\xi^A$  que são funcionalmente independentes também serão iguais [27]. Portanto, a liberdade de rotação do referencial canônico é reduzida toda vez que o grupo de isotropia  $H_q$  tiver dimensão menor que  $H_{(q-1)}$ . Neste caso, como  $H_q$  é um subgrupo de  $H_{(q-1)}$ , os parâmetros das rotações generalizadas de  $H_{(q-1)}$  que não pertencem a  $H_q$  podem ser usados para fixar ainda mais o referencial, determinando um novo referencial canônico.

Os escalares de Cartan também devem ter a mesma dependência com relação às coordenadas  $x^\mu$  da variedade base  $M$ , para que haja equivalência. Em cada ordem  $q = 0, 1, \dots, (p + 1)$  utilizada no procedimento prático, também é necessário os números  $t_q$  de funções das coordenadas  $x^\mu$  que são funcionalmente independentes nos conjuntos  $I_q$  de duas variedades equivalentes também sejam iguais. Isto nos conduz ao passo seguinte, que consiste na realização desses cálculos.

Conforme a solução do problema da equivalência apresentada na seção 2.2, os escalares de Cartan são calculados até um valor  $q = (p + 1)$  onde os elementos do conjunto  $I_{(p+1)}$  são funcionalmente dependentes dos elementos do conjunto  $I_p$ . Assim, os passos do procedimento prático estarão concluídos quando coincidirem tanto os grupos  $H_p$  e  $H_{(p+1)}$ , quanto os números de funções independentes  $t_p$  e  $t_{(p+1)}$ . O último passo consiste justamente na realização dessas comparações.

Podemos reunir todos os passos do procedimento prático discutidos até aqui em um algoritmo, que começa com as derivadas de ordem  $q = 0$  e tem os seguintes passos:

1. Calcule os elementos do conjunto  $I_q$ , i.e., as derivadas da curvatura até a ordem  $q$  e as derivadas da torção até a ordem  $(q + 1)$ ;
2. Fixe o referencial, o máximo possível, colocando os elementos de  $I_q$  nas respectivas formas canônicas;
3. Determine o grupo de isotropia  $H_q$  do conjunto  $I_q$ , isto é, as rotações generalizadas que deixam invariantes as formas canônicas dos elementos de  $I_q$ ;
4. Encontre o número  $t_q$  de funções no conjunto  $I_q$  que são funcionalmente independentes;
5. Se o grupo de isotropia  $H_q$  for idêntico ao grupo  $H_{(q-1)}$  e se o número de funções independentes  $t_q$  for igual ao número  $t_{(q-1)}$ , então faça  $q = (p + 1)$  e o processo está terminado. Caso contrário, aumente  $q$  de uma unidade e volte para o passo 1.

Dessa forma, obtivemos uma generalização do algoritmo de Karlhede apresentado na seção 2.4, de modo a incluir a contribuição da torção [22, 24].

A partir dos resultados obtidos com a aplicação deste algoritmo, podemos formular uma classificação invariante das variedades de Riemann-Cartan em termos das seguintes quantidades locais: (i) as formas canônicas dos elementos de  $I_{(p+1)}$ ; (ii) os grupos de isotropia residuais  $\{H_0, \dots, H_p\}$ ; e (iii) os números das funções independentes  $\{t_0, \dots, t_p\}$ , obtidas em cada passo do algoritmo. Como esses conjuntos de quantidades locais generalizam a classificação de Karlhede para o contexto das variedades de Riemann-Cartan, nós os denominamos de classificação de Karlhede-Cartan.

A classificação de Karlhede-Cartan, estabelece um conjunto de *condições necessárias* para a equivalência de variedades de Riemann-Cartan. Assim, para verificar a equivalência podemos comparar tanto as classificações de Karlhede-Cartan de duas variedade de Riemann-Cartan quanto diversas quantidades discretas relacionadas com as mesmas como, por exemplo, as dimensões dos grupos de isotropia  $s = \dim(H_p)$  e dos grupos de isometria  $r = 4 - t_p + s$  (cf. teorema 2.3). Apenas nos casos em que essas quantidades discretas coincidirem é que será necessário retornar ao fibrado para determinar se as eqs. (2.13) são compatíveis ou não.

Um resultado importante da aplicação do algoritmo acima consiste na redução do limite máximo  $(p + 1) \leq 10$ , obtido pelo método de Cartan na seção 2.2, para as ordens

$(p + 1)$  das derivadas da curvatura e  $(p + 2)$  das derivadas da torção, como veremos a seguir.

Considere que uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  de dimensão  $n$  tem um grupo de isotropia  $H_p$  e que existem  $t_p$  funções das coordenadas  $x^\mu$  funcionalmente independentes. Além disso, também existem  $m_p = \frac{1}{2}n(n - 1) - \dim(H_p)$  funções das coordenadas  $\xi^A$  que são funcionalmente independentes, de acordo com o teorema 2.3. Assim, existem no total  $k_p = t_p + m_p$  escalares de Cartan funcionalmente independentes em  $F(M)$ , dos quais  $k_p - k_0 = (t_p + m_p) - (t_0 + m_0)$  são obtidos nos passos  $0 < q \leq p$  do algoritmo. Supondo que pelo menos uma nova função independente é obtida em cada um dos passos  $0 < q \leq p$ , obtemos que as ordens máximas das derivadas covariantes da torção e da curvatura são limitadas de acordo com

$$(p + 1) \leq (k_p - k_0) + 1 = (t_p + m_p) + 1 - (t_0 + m_0), \quad (2.36)$$

lembrando que nenhuma função independente é obtida no passo  $q = (p + 1)$ . Substituindo  $k_p$  da eq. (2.31) na eq. (2.36), obtemos  $(p + 1) \leq \frac{1}{2}n(n + 1) + 1 - m_0 - t_0 - r$ , onde  $r$  é a dimensão do grupo de simetria. Em seguida, substituindo  $m_0 = \frac{1}{2}n(n - 1) - \dim(H_0)$  obtemos

$$(p + 1) \leq n + 1 + \dim(H_0) - t_0 - r \quad (2.37)$$

onde  $H_0$  determina a liberdade de rotação do referencial canônico e  $t_0$  é o número de funções independentes, no passo  $q = 0$ . Assim, verificamos que o limite máximo fica dado por  $(p + 1) \leq n + 1 + \dim(H_0)$ . Este limite é inferior ao obtido pelo método de Cartan quando  $\dim(H_0) \leq \frac{1}{2}n(n - 1) - 2$ .

No caso dos espaços-tempos de Riemann-Cartan ( $n = 4$ ), o referencial canônico pode ser fixado a partir da classificação de Petrov do espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$ , como veremos no capítulo 5. Considerando que os grupos de isotropia dos tipos de Petrov (com exceção do tipo 0) têm dimensão  $s \leq 2$  (cf. tab. (4.3), pag. 106), temos a condição  $\dim(H_0) \leq 2$ . Assim, utilizando a eq. (2.37) obtemos que  $(p + 1) \leq 7 - t_0 - r$  e o limite  $(p + 1) \leq 7$ .

Quando o referencial não puder ser fixado através da classificação de Petrov (tipo 0), a classificação de Segre é utilizada, com veremos mais adiante. Tendo em vista que os grupos de isotropia dos tipos de Segre (com exceção do tipo 0) têm dimensão  $s \leq 3$  (cf. tab. (4.4), pag. 112), temos a condição  $\dim(H_0) \leq 3$ . Assim, utilizando a eq. (2.37) obtemos que  $(p + 1) \leq 8 - t_0 - r$  e o limite  $(p + 1) \leq 8$ .

Uma outra expressão para o limite máximo também pode ser obtida no caso especial em que  $m_p = m_0$ , isto é, para as variedades onde não ocorre redução dos grupos de isotropia residuais. Nestes casos, temos  $s = \dim(H_0)$  e a dimensão da órbita do grupo de simetria fica dada por  $d = r - \dim(H_0)$ , de acordo com a eq. (2.33). Substituindo esta expressão na eq. (2.37), obtemos

$$(p + 1) \leq (n + 1) - d - t_0, \quad (2.38)$$

onde o limite máximo é  $(p + 1) \leq (n + 1)$ . Este limite é inferior ao obtido pelo método de Cartan para  $n \geq 3$ . Aplicando este resultado para os espaços-tempos de Riemann-Cartan ( $n = 4$ ), obtemos o limite  $(p + 1) \leq 5$ . Quando existe homogeneidade espaço-temporal, isto é, quando  $d = n = 4$ , o limite é reduzido para  $(p + 1) \leq 1$ . Este é o caso dos espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel discutidos no capítulo 6.

O algoritmo do procedimento prático discutido neste capítulo pode ser aplicado sem que seja necessário calcular todos os elementos do conjunto  $I_{(p+1)}$ , pois os mesmos estão relacionados pelas derivadas covariantes das identidades de Bianchi e de Ricci. No próximo capítulo, apresentaremos um importante resultado que possibilita a aplicação do algoritmo utilizando apenas derivadas covariantes da torção e da curvatura que são algebricamente independentes, reduzindo consideravelmente a quantidade de cálculos.

# Capítulo 3

## Um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan

### 3.1 Introdução

Neste capítulo concluímos a apresentação dos resultados obtidos nas duas primeiras etapas do projeto de tese, construindo explicitamente um conjunto com o número mínimo de derivadas da curvatura de ordem  $q$  e da torção de ordem  $(q + 1)$ , onde  $0 \leq q \leq m$ , a partir das quais todas as derivadas da curvatura de ordem  $m$  e da torção de ordem  $(m + 1)$  podem ser obtidas através de operações algébricas [22, 23, 29]. Dizemos que este é um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan de ordem  $m$ , em um espaço-tempo de Riemann-Cartan. Dessa forma, obtivemos a generalização do resultado correspondente para os espaços-tempos da TRG [28]. Com este resultado, a quantidade de escalares de Cartan utilizados pelo algoritmo para testar a equivalência nas TGT é reduzida o máximo possível.

Na segunda seção determinamos o número das derivadas covariantes da curvatura de ordem  $q$  e da torção de ordem  $(q + 1)$ , isto é, dos escalares de Cartan de ordem  $q$ , que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos escalares de Cartan de ordens  $0, 1, \dots, (q - 1)$ . Na terceira seção definimos equivalência de escalares de Cartan e obtemos as relações algébricas entre os espinores dos escalares de Cartan de ordem  $q$  que são equivalentes. Mostramos também que os escalares de Cartan de ordem  $q$  que são independentes entre si e dos de ordens inferiores  $0, 1, \dots, (q - 1)$ , podem ser expressos como derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos de ordem  $(q - 1)$  ou como d'Alembertianos dos

de ordem  $(q - 2)$ , para  $q \geq 3$ . Na quarta seção utilizamos os resultados anteriores para construir explicitamente um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan de ordem  $q \geq 0$ . Os detalhes dos cálculos dos espinores podem ser encontrados no apêndice B.

Uma parte dos principais resultados deste capítulo foi publicada [22, 23, 24] e um artigo com a versão completa está sendo escrito em colaboração [29].

### 3.2 O número de escalares de Cartan independentes

Como vimos no capítulo anterior, o algoritmo para testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan estabelece um conjunto de condições necessárias para a equivalência, permitindo definir uma classificação invariante dessas variedades. Este algoritmo utiliza o conjunto  $I_{(p+1)}$ , dado pela eq. (2.34), que é definido pelas derivadas covariantes da curvatura até a ordem  $(p + 1)$  e da torção até a ordem  $(p + 2)$ , em um referencial ortogonal generalizado, onde  $(p + 1) \leq 10$ . Em cada ordem de diferenciação  $q = 1, \dots, (p + 1)$  utilizada no algoritmo, o conjunto  $I_q$  pode ser obtido a partir do conjunto  $I_{(q-1)}$  e do conjunto  $J_q$  de acordo com  $I_q = I_{(q-1)} \cup J_q$ , onde

$$J_q = \{R^a_{bcd;m_1\dots m_q}, T^a_{bc;m_1\dots m_{(q+1)}}\} \quad (3.1)$$

é o conjunto dos escalares de Cartan de ordem  $q$ . Na ordem  $q = 0$ , o conjunto  $I_0$  é dado por  $I_0 = \{T^a_{bc}\} \cup J_0$ .

Nesta seção, determinamos o número de elementos do conjunto  $J_q$  que são algebricamente independentes entre si e dos elementos do conjunto  $I_{(q-1)}$ , para  $q \geq 0$ . Este número pode ser calculado de uma maneira bastante simples a partir das derivadas parciais da métrica de ordem  $(q + 2)$  e da torção de ordem  $(q + 1)$ . Em um dado sistema de coordenadas, os componentes  $g_{\nu\nu}$  da métrica são independentes dos componentes  $T^{\alpha}_{\rho\sigma}$  da torção. As derivadas parciais de  $g_{\mu\nu}$  e de  $T^{\alpha}_{\rho\sigma}$  também são independentes. Utilizamos um sistema de coordenadas localmente plano, onde  $\partial_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$ , para simplificar as expressões dos elementos de  $J_q$  e de  $I_{(q-1)}$  em termos das derivadas de  $g_{\nu\nu}$  e de  $T^{\alpha}_{\rho\sigma}$ .

Introduzindo uma notação simplificada, denotamos a conexão por  $\Gamma$  e a contorção por  $K$ . Como os símbolos de Christoffel são nulos nesse referencial, podemos escrever  $\Gamma = K$ . Também denotamos as derivadas covariantes e parciais de ordem  $n \geq 0$  da torção, respectivamente, por  $\nabla^n T$  e  $\partial^n T$ . Definimos  $\nabla^0 T \equiv \partial^0 T \equiv T$ . Nesta notação simplificada, a derivada covariante da torção é expressa por  $\nabla T = \partial T + \Sigma T$ , onde  $\partial T$

denota a derivada parcial da torção e  $\Sigma KT$  representa a soma das parcelas envolvendo contrações da contorção com a torção. De acordo com estas convenções, podemos escrever  $\nabla^2 T$  como uma expressão algébrica *linear* em  $\partial^2 T$ ,  $\partial T$  e  $T$ , cujos coeficientes são funções de  $\partial K$  e  $K$ , dada por  $\nabla^2 T = \nabla(\nabla T) = \nabla(\partial T + \Sigma KT) = \partial^2 T + 2\Sigma K\partial T + \Sigma(\partial K + K\Sigma K)T$ . Generalizando este resultado para as derivadas covariantes de ordem  $(q + 1)$  da torção  $\nabla^{(q+1)}T$ , obtemos a seguinte decomposição:

$$\nabla^{(q+1)}T = \hat{c}^{(q+1)}T + \mathcal{X}_q \partial^q T + \dots + \mathcal{X}_1 \partial T + \mathcal{X}_0 T, \quad (3.2)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{X}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) são funções  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i(K, \partial K, \dots, \partial^q K)$  das derivadas parciais da contorção até a ordem  $q$ .

Considerando que a contorção é definida por  $K_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\nu\alpha\mu} + T_{\mu\alpha\nu} - T_{\alpha\mu\nu})$ , podemos utilizar a notação simplificada para escrever  $K = \Sigma T$  e  $\partial^q K = \Sigma \partial^q T$ , para  $q \geq 0$ . Assim, podemos substituir as derivadas parciais da contorção pelas da torção nos coeficientes  $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i(K, \partial K, \dots, \partial^q K)$ , obtemos novas formas funcionais  $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i(T, \partial T, \dots, \partial^q T)$  para os coeficientes da eq. (3.2) em função das derivadas parciais da torção até a ordem  $q$ .

Decompondo  $\nabla^q T$  de acordo com a eq. (3.2) e utilizando os novos coeficientes  $\mathcal{Y}_i$ , podemos expressar  $\partial^q T$  em função de  $\nabla^q T$  e das derivadas parciais  $\partial^{(q-1)}T, \dots, \partial T, T$  de acordo com

$$\partial^q T = \nabla^q T - [\mathcal{Y}_{(q-1)} \partial^{(q-1)}T + \dots + \mathcal{Y}_1 \partial T + \mathcal{Y}_0 T]. \quad (3.3)$$

Repetindo este procedimento para  $\nabla^{(q-1)}T$ , expressamos  $\partial^{(q-1)}T$  em função de  $\nabla^{(q-1)}T$  e das derivadas parciais  $\partial^{(q-2)}T, \dots, \partial T, T$ . Continuando com este processo e substituindo os resultados na eq. (3.2) podemos fazer com que todas as derivadas parciais  $\partial^q T, \dots, \partial T$  da torção sejam progressivamente substituídas pelas correspondentes derivadas covariantes  $\nabla^q T, \dots, \nabla T$ , obtendo ao final do processo que

$$\nabla^{(q+1)}T = \partial^{(q+1)}T + \mathcal{Z}_q \nabla^q T + \dots + \mathcal{Z}_1 \nabla T + \mathcal{Z}_0 T, \quad (3.4)$$

onde os novos coeficientes  $\mathcal{Z}_i$  ( $i = 0, \dots, q$ ) são funções  $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}_i(T, \nabla T, \dots, \nabla^q T)$  das derivadas covariantes da torção até a ordem  $q$ . Com este resultado obtivemos que os elementos de  $J_q$  dados por  $\nabla^{(q+1)}T$  são determinados pelos elementos de  $I_{(q-1)}$  a menos das derivadas parciais de ordem  $(q + 1)$  da torção.

Consideremos agora a decomposição das derivadas covariantes da curvatura de ordem  $q$ , denotadas por  $\nabla^q R$  na notação simplificada. Como no referencial localmente plano

temos  $\partial_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  e  $\partial_\beta \partial_\alpha g_{\mu\nu} \neq 0$ , podemos utilizar a notação simplificada para escrever a derivada parcial da conexão como  $\partial\Gamma = \partial^2 g + \partial K$ , onde  $\partial^2 g$  denota a derivada parcial de segunda ordem da métrica. Considerando que os componentes da curvatura são dados por  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu}$ , podemos escrever  $R = \partial^2 g + \partial K + \Sigma K^2$ . Neste caso, a derivada covariante  $\nabla R$  é dada por uma expressão algébrica *linear* em  $\partial^3 g$  e  $\partial^2 g$ , cujos coeficientes são funções de  $K$  e  $\partial K$ , de acordo com  $\nabla R = \partial^3 g + \Sigma K \partial^2 g + \Sigma K \partial K + \Sigma \Sigma K^3$ . Generalizando este resultado para a derivada covariante de ordem  $q$  obtemos

$$\nabla^q R = \partial^{(q+2)} g + \mathcal{G}_q \partial^{(q+1)} g + \dots + \mathcal{G}_1 \partial^2 g + \mathcal{G}_0, \quad (3.5)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{G}_i$  ( $i = 0, \dots, q$ ), são funções  $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(K, \partial K, \dots, \partial^q K)$  das derivadas parciais da contorção até a ordem  $q$ .

Em seguida, como  $K = \Sigma T$ , podemos substituir as derivadas parciais da contorção pelas da torção nos coeficientes  $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_i(K, \partial K, \dots, \partial^q K)$  obtemos novas formas funcionais  $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(T, \partial T, \dots, \partial^q T)$ . Depois utilizamos a eq. (3.4) para substituir, progressivamente, todas as derivadas parciais  $\partial^q T, \dots, \partial T$  nos coeficientes  $\mathcal{F}_i$  pelas correspondentes derivadas covariantes  $\nabla^q T, \dots, \nabla T$ , obtendo no final novos coeficientes  $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i(T, \nabla T, \dots, \nabla^q T)$ . Assim, obtivemos que a eq. (3.5) pode ser escrita como

$$\nabla^q R = \partial^{(q+2)} g + \mathcal{H}_q \partial^{(q+1)} g + \dots + \mathcal{H}_1 \partial^2 g + \mathcal{H}_0, \quad (3.6)$$

onde os novos coeficientes  $\mathcal{H}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) são funções das derivadas covariantes da torção até a ordem  $q$ .

Decompondo  $\nabla^{(q-1)} R$  de acordo com (3.6), podemos expressar  $\partial^{(q+1)} g$  em função de  $\nabla^{(q-1)} R$  e das derivadas parciais  $\partial^q g, \dots, \partial^2 g$  de acordo com

$$\partial^{(q+1)} g = \nabla^{(q-1)} R - [ \mathcal{H}_{(q-1)} \partial^q g + \dots + \mathcal{H}_1 \partial^2 g + \mathcal{H}_0 ]. \quad (3.7)$$

Repetindo este procedimento para  $\nabla^{(q-2)} R$ , expressamos  $\partial^q g$  em função de  $\nabla^{(q-2)} R$  e das derivadas parciais  $\partial^{(q-1)} g, \dots, \partial^2 g$ . Continuando com este processo e substituindo os resultados na eq. (3.6) podemos fazer com que todas as derivadas parciais da métrica  $\partial^{(q+1)} g, \dots, \partial^3 g, \partial^2 g$  sejam progressivamente substituídas pelas correspondentes derivadas covariantes da curvatura  $\nabla^{(q-1)} R, \dots, \nabla R, R$ , obtendo ao final do processo que

$$\nabla^q R = \partial^{(q+2)} g + \mathcal{W}_q \nabla^{(q-1)} R + \mathcal{W}_{(q-1)} \nabla^{(q-2)} R + \dots + \mathcal{W}_1 R + \mathcal{W}_0, \quad (3.8)$$

onde os novos coeficientes  $\mathcal{W}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) são funções  $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_i(T, \nabla T, \dots, \nabla^q T)$  das derivadas covariantes da torção até a ordem  $q$ . Com este resultado obtivemos que elementos de  $J_q$  dados por  $\nabla^q R$  são determinados pelos elementos de  $I_{(q-1)}$  a menos das derivadas parciais de ordem  $(q+2)$  da métrica.

Comparando as decomposições dos elementos  $\nabla^{(q+1)}T$  e  $\nabla^q R$  de  $J_q$  dadas pelas eq. (3.4) e eq. (3.8), respectivamente, tanto entre si quanto com os elementos do conjunto  $I_{(q-1)}$ , dado pela eq. (2.34), verificamos que apenas as derivadas parciais  $\partial^{(q+1)}T$  e  $\partial^{(q+2)}g$  são algebricamente independentes, tanto entre si quanto dos elementos de  $I_{(q-1)}$ . Entretanto, como as derivadas parciais não são tensores, podemos utilizar as transformações de coordenadas  $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x)$  para eliminar diversos dos seus componentes. Por exemplo, as derivadas de primeira ordem  $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\sigma$  da métrica têm 40 componentes independentes e se transformam de acordo com

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial \tilde{x}^\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} + \left( \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \right) g_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

de modo que podemos escolher as 40 funções independentes das derivadas parciais de segunda ordem das coordenadas  $\partial^2 x^\nu/\partial \tilde{x}^\rho \partial \tilde{x}^\beta$  para fazer com que  $\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}/\partial \tilde{x}^\rho = 0$ . Portanto, obtemos que o número de elementos independentes em  $J_q$  é igual à soma dos números de derivadas parciais independentes de ordem  $(q+2)$  da métrica e de ordem  $(q+1)$  da torção, a menos das contribuições das derivadas parciais independentes de ordem  $(q+3)$  das coordenadas.

Determinamos inicialmente o número de derivadas parciais independentes de ordem  $(q+2)$  da métrica, dadas pelas derivadas totalmente simetrizadas  $g_{\mu\nu,(\rho_1\rho_2\dots\rho_{q+2})}$ . Este número pode ser calculado a partir da partição dos índices simetrizados em termos dos quatro diferentes valores possíveis para cada um. Como a métrica tem 10 componentes independentes, obtemos

$$\frac{10(q+5)!}{3!(q+2)!} = \frac{5}{3}(q+5)(q+4)(q+3). \quad (3.10)$$

Em seguida, procedendo de modo semelhante, obtemos que o número de derivadas parciais independentes de ordem  $(q+1)$  dos 24 componentes independentes da torção é dado por

$$\frac{24(q+4)!}{3!(q+1)!} = 4(q+4)(q+3)(q+2). \quad (3.11)$$

Depois, obtemos que as transformações das 4 coordenadas contribuem com

$$\frac{4(q+6)!}{3!(q+3)!} = \frac{2}{3}(q+6)(q+5)(q+4) \quad (3.12)$$

derivadas parciais de ordem  $(q + 3)$  independentes, para as derivadas de ordem  $(q + 2)$  da métrica e de ordem  $(q + 1)$  da torção. Finalmente, o total de quantidades algebricamente independentes no conjunto  $J_q$  é obtido quando subtraímos a eq. (3.12) da soma da eq. (3.10) com a eq. (3.11). Depois de simplificarmos, o resultado fica dado por

$$N_q = 5q^3 + 46q^2 + 133q + 116. \quad (3.13)$$

Podemos comparar este resultado com o número total de componentes das derivadas covariantes de ordem  $q$  da curvatura e de ordem  $(q + 1)$  da torção, que é dado por  $36 \times 4^q + 24 \times 4^{(q+1)} = 132 \times 4^q$ , tendo em vista que a curvatura e a torção têm 36 e 24 componentes independentes, respectivamente. Para o conjunto  $I_7$  ( $0 \leq q \leq 7$ ), por exemplo, obtemos 5.016 elementos algebricamente independentes em um total de 2.162.688, isto é, os elementos independentes são apenas 0,2% do total. Portanto, a quantidade de cálculos ficará consideravelmente reduzida se o algoritmo for aplicado utilizando apenas as derivadas covariantes da torção e da curvatura que são algebricamente independentes. Na próxima seção vamos mostrar como essas quantidades independentes podem ser identificadas a partir das relações algébricas entre os escalares de Cartan.

### 3.3 As relações entre os escalares de Cartan

Nesta seção, definimos uma relação de equivalência no conjunto dos escalares de Cartan e a utilizamos para determinar as relações algébricas entre os escalares de Cartan de  $I_0$  e também entre os de  $J_q$  que são independentes dos de  $I_{(q-1)}$ , para cada passo  $q \geq 1$  do algoritmo para testar a equivalência. Estas relações serão utilizadas para reduzir o número de elementos independentes de  $J_q$  o máximo possível e para mostrar que estes elementos podem ser expressos como derivadas totalmente simetrizadas de elementos de  $J_{(q-1)}$  ou como d'Alembertianos de elementos de  $J_{(q-2)}$ , para  $q \geq 3$ .

No caso geral, para cada valor  $q = 0, \dots, (p+1)$  do algoritmo para testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan, as únicas relações algébricas existentes entre os escalares de Cartan do conjunto  $I_q$  são dadas pelas identidades de Bianchi e de Ricci e pelas derivadas covariantes das mesmas até a ordem  $q$ . Estas derivadas constituem um conjunto completo de identidades para os escalares de Cartan, isto é, todas as outras identidades que são satisfeitas pelos escalares de Cartan podem ser deduzidas a partir desse conjunto.

Os casos especiais com restrições adicionais entre os escalares de Catan que, por exemplo, podem ser impostas pelas equações de campo das TGT, não serão considerados aqui.

As relações algébricas entre os escalares de Cartan serão obtidas utilizando as partes irreduzíveis em que cada um deles pode ser decomposto, pois são estas partes que constituem os *escalares de Cartan fundamentais*. Essas partes irreduzíveis podem ser obtidas com uma considerável simplificação através do formalismo espinorial, onde são dadas por espinores totalmente simétricos [39]. Assim, daqui em diante, quando mencionarmos os conjuntos  $I_{(p+1)}$  ou  $J_q$  sem especificar os seus elementos, estaremos nos referindo aos espinores correspondentes desses elementos.

Os espinores correspondentes dos escalares de Cartan podem ser decompostos em uma soma contendo uma parte totalmente simetrizada e outras partes irreduzíveis, definidas através de contrações, dadas por produtos do espinor métrico  $\varepsilon_{AB}$  (ou do seu complexo conjugado) com derivadas com um número menor de índices livres totalmente simetrizados [39]. Por exemplo, a derivada do pseudo-traço  $\mathcal{P}_{X'}{}^A$  (traço do dual) do espinor da torção é decomposta (cf. apêndice B) em três partes irreduzíveis de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^B \mathcal{P}_{X'}{}^A &= \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')}{}^A) - \frac{1}{2} \varepsilon^{BA} \nabla_{(B'}^N \mathcal{P}_{X')N} - \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{P}{}^A)N' \\ &\quad + \frac{1}{4} \varepsilon^{BA} \varepsilon_{B'X'} \nabla_{NN'} \mathcal{P}^{NN'}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde temos a parte totalmente simetrizada  $\mathcal{P}^{BA}{}_{B'X'} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')}{}^A)$  e as partes definidas através de contrações  $\mathcal{B}^{BA} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{P}{}^A)N'$  e  $\mathcal{P} = \nabla_{NN'} \mathcal{P}^{NN'}$  contendo derivadas com um número menor de índices livres totalmente simetrizados. O espinor métrico  $\varepsilon_{BC}$  é totalmente anti-simétrico com  $\varepsilon_{01} = 1$  e  $\varepsilon_{BC} = \varepsilon_{B'C}$ .

O conjunto completo de relações algébricas entre os elementos de  $I_0$  é dado pelas identidades de Bianchi. No formalismo espinorial os elementos de  $I_0$  são dados pelos espinores de torção, de curvatura e da derivada covariante do espinor de torção. Uma vez obtidas as partes irreduzíveis destes espinores, as identidades de Bianchi poderão ser expressas em termos das mesmas, definindo o conjunto completo de relações para os elementos de  $I_0$ , como veremos a seguir.

Consideremos, inicialmente, o espinor de torção  $T_{AA'BB'CC'}$ . Este espinor é decomposto em termos do espinor de torção contraído  $T_{AA'BC} = T_{AA'(BC)} = \frac{1}{2} T_{AA'BN'C}{}^{N'}$  e do seu complexo conjugado de acordo com  $T_{AA'BB'CC'} = \varepsilon_{B'C} T_{A'ABC} + \varepsilon_{BC} \bar{T}_{AA'B'C}$ , sendo

$T_{A'ABC}$  decomposto (cf. apêndice B) em 3 partes irredutíveis de acordo com

$$T_{A'ABC} = \mathcal{L}_{A'ABC} + \frac{1}{6} (\varepsilon_{AB} \mathcal{T}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \mathcal{T}_{A'B}) + \frac{i}{6} (\varepsilon_{AB} \mathcal{P}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \mathcal{P}_{A'B}), \quad (3.15)$$

onde  $\mathcal{T}_{A'B}$  e  $\mathcal{P}_{A'B}$  correspondem, respectivamente, ao traço e ao pseudo-traço (traço do dual) do espinor de torção. O espinor  $\mathcal{L}_{A'ABC} = \mathcal{L}_{A'(ABC)}$  corresponde à parte sem traço e sem pseudo-traço da torção. Denominamos  $\mathcal{L}_{A'ABC}$  de *espinor de Lanczos da torção*, pois tem as mesmas simetrias que o espinor de Lanczos da TRG [61, 62].

Com relação ao espinor de curvatura  $R_{AA'BB'CC'DD'}$ , inicialmente temos a decomposição  $R_{AA'BB'CC'DD'} = \varepsilon_{A'B'} R_{ABCC'DD'} + \varepsilon_{AB} \bar{R}_{A'B'CC'DD'}$ , onde  $\bar{R}_{A'B'CC'DD'}$  é o complexo conjugado do espinor de curvatura contraído  $R_{ABCC'DD'}$ , sendo  $R_{ABCC'DD'}$  decomposto (cf. apêndice B) em 6 partes irredutíveis de acordo com

$$\begin{aligned} R_{ABCC'DD'} = & \varepsilon_{C'D'} [\Psi_{ABCD} + (\varepsilon_{BC} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD} \varepsilon_{AC}) (\Lambda + i\Omega) \\ & + \varepsilon_{AC} \Sigma_{BD} + \varepsilon_{AD} \Sigma_{BC} + \varepsilon_{BC} \Sigma_{AD} + \varepsilon_{BD} \Sigma_{AC}] \\ & + \varepsilon_{CD} (\Phi_{ABC'D'} + i\Theta_{ABC'D'}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

As partes irredutíveis do espinor da curvatura estão relacionadas com os tensores correspondentes (cf. apêndice A) da seguinte forma: o espinor  $\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$  é denominado de *espinor de Weyl* e corresponde ao tensor de Weyl-Cartan  $C_{abcd}$  que tem as mesmas simetrias do tensor de Weyl da TRG; o espinor de Ricci  $\Phi_{ABC'D'} = \Phi_{(AB)(C'D')}$  e o pseudo-espinor de Ricci  $\Theta_{ABC'D'} = \Theta_{(AB)(C'D')}$  correspondem, respectivamente, ao tensor de Ricci simétrico sem traço  $S_{ab}$  e ao pseudo-tensor de Ricci simétrico sem traço  $Q_{ab}$ ; o espinor  $\Sigma_{AB} = \Sigma_{(AB)}$  corresponde à parte anti-simétrica do tensor de Ricci (bivetor de Ricci)  $A_{ab}$ ; finalmente,  $\Lambda$  e  $\Omega$  correspondem ao escalar de curvatura  $R$  e ao pseudo-escalar de curvatura  $P$ , respectivamente.

Para completarmos a decomposição dos elementos de  $I_0$  resta-nos apenas decompor a derivada covariante de primeira ordem  $\nabla_{DD'} T_{A'ABC}$  do espinor de torção, que tem 11 partes irredutíveis. Utilizando a decomposição de  $T_{A'ABC}$  dada pela eq. (3.15), podemos expressar esta derivada em função das derivadas das partes irredutíveis da torção de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_{DD'} T_{A'ABC} = & \nabla_{DD'} \mathcal{L}_{A'ABC} + \frac{1}{6} (\varepsilon_{AB} \nabla_{DD'} \mathcal{T}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \nabla_{DD'} \mathcal{T}_{A'B}) \\ & + \frac{i}{6} (\varepsilon_{AB} \nabla_{DD'} \mathcal{P}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \nabla_{DD'} \mathcal{P}_{A'B}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, em vez de decompor  $\nabla_{DD'}T_{A'ABC}$  para obter as suas partes irredutíveis, vamos realizar um cálculo mais simples obtendo estas partes irredutíveis a partir das decomposições das derivadas covariantes do traço  $\mathcal{T}_{A'B}$ , do pseudo-traço  $\mathcal{P}_{A'B}$  e do espinor de Lanczos  $\mathcal{L}_{A'ABC}$  da torção.

Realizando a decomposição da derivada covariante do traço  $\mathcal{T}_{X'}{}^A$  do espinor da torção obtemos (cf. apêndice B) o seguinte resultado

$$\nabla_{B'}^B \mathcal{T}_{X'}{}^A = \mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'} + \frac{1}{2} (\varepsilon^{BA} \bar{\mathcal{M}}_{B'X'} + \varepsilon_{B'X'} \mathcal{M}^{BA}) + \frac{1}{4} \varepsilon^{BA} \varepsilon_{B'X'} \mathcal{T}, \quad (3.18)$$

onde suas três partes irredutíveis são dadas por

$$\mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{T}_{X')}{}^A), \quad (3.19)$$

$$\mathcal{M}^{BA} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{T}{}^A)N', \quad (3.20)$$

$$\mathcal{T} = \nabla_{NN'} \mathcal{T}^{NN'}, \quad (3.21)$$

sendo  $\mathcal{T}$  um escalar real. Procedendo de modo semelhante, obtemos que a derivada covariante do pseudo-traço  $\mathcal{P}_{X'}{}^A$  da torção é decomposta, de acordo com a eq. (3.14), em três partes irredutíveis dadas por

$$\mathcal{P}^{BA}{}_{B'X'} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')}{}^A), \quad (3.22)$$

$$\mathcal{B}^{BA} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{P}{}^A)N', \quad (3.23)$$

$$\mathcal{P} = \nabla_{NN'} \mathcal{P}^{NN'}, \quad (3.24)$$

onde  $\mathcal{P}$  é um escalar real. Finalmente, temos a derivada covariante do espinor de Lanczos da torção, que é decomposta (cf. apêndice B) de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}{}^{CDE} &= \mathcal{L}_{B'X'}{}^{BCDE} + \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \psi^{BCDE} \\ &\quad + \frac{3}{4} [\varepsilon^{B(C} \phi^{DE)}{}_{B'X'} + i \varepsilon^{B(C} \theta^{DE)}{}_{B'X'}] \\ &\quad + \frac{3}{8} \varepsilon_{B'X'} \varepsilon^{B(C} \mathcal{L}^{DE)}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde as cinco partes irredutíveis dadas acima são definidas por

$$\mathcal{L}_{B'X'}{}^{BCDE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}{}^{CDE)}, \quad (3.26)$$

$$\psi^{BCDE} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{CDE)N'}, \quad (3.27)$$

$$\phi_{ABX'Z'} = -\frac{1}{2} [\nabla_{(X'}^N \mathcal{L}_{Z')ABN} + \nabla_{(A}^{N'} \bar{\mathcal{L}}_{B)X'Z'N'}], \quad (3.28)$$

$$\theta_{ABX'Z'} = \frac{i}{2} [\nabla_{(X'}^N \mathcal{L}_{Z')ABN} - \nabla_{(A}^{N'} \bar{\mathcal{L}}_{B)X'Z'N'}], \quad (3.29)$$

$$\mathcal{L}^{DE} = \nabla_{N'N} \mathcal{L}^{N'NDE}. \quad (3.30)$$

Denominamos  $\psi^{ABCD}$  de espinor de Weyl-Lanczos e  $\phi_{ABX'Z'}$  de espinor de Ricci-Lanczos, pois têm as mesmas simetrias que os espinores de Weyl e de Ricci da TRG, sendo determinados pelo espinor de Lanczos da torção. Em particular, a eq. (3.27) que determina  $\psi^{ABCD}$  em função do espinor de Lanczos da torção é a mesma que relaciona o espinor de Weyl da TRG com o espinor de Lanczos [62].

Com este último resultado podemos afirmar que os elementos de  $I_0$  são decompostos em 20 partes irredutíveis, sendo 3 delas as partes irredutíveis da torção, dadas na eq. (3.15), e as 17 restantes as partes irredutíveis de  $J_0$ , a saber: as 6 partes da curvatura, dadas na eq. (3.16), e as 11 partes da derivada covariante da torção dadas pelas eqs. (3.19)–(3.21), eqs. (3.22)–(3.24) e eqs. (3.26)–(3.30). Entretanto, como veremos a seguir, apenas 17 delas são algebricamente independentes.

As únicas relações existentes entre os escalares de Cartan fundamentais dados pelas partes irredutíveis dos elementos de  $I_0$  são as identidades de Bianchi (cf. apêndice B)

$$\Omega = -\frac{1}{24}\mathcal{P} - \frac{i}{24}T_{NN'BK'KB'}T^{KK'BB'NN'}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{AC} &= -\frac{1}{12}\mathcal{M}_{AC} + \frac{i}{24}\mathcal{B}_{AC} - \frac{1}{8}\mathcal{L}_{AC} \\ &\quad - \frac{1}{8}T_{NN'BK'B'(A}T_{C)}^{K'BB'NN'}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{C'A'AC} &= \theta_{C'A'AC} + \frac{1}{6}\mathcal{P}_{C'A'AC} \\ &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon_{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}^{E'}{}_{B'(A}T_{C)}^{F'BB'NN'}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

As identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.31)–(3.33) definem o conjunto completo de relações algébricas para os espinores correspondentes dos escalares de Cartan do conjunto  $I_0 = \{T_{bc}^a\} \cup J_0$ , utilizado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 0$ .

Prosseguindo para o valor  $q = 1$  no algoritmo, temos que decompor em partes irredutíveis os espinores correspondentes dos elementos do conjunto  $J_1 = \{R_{bcd;m_1}^a, T_{bc;m_1m_2}^a\}$ , determinar as partes que são algebricamente independentes dos elementos de  $I_0$  e encontrar as relações algébricas que estas partes têm entre si.

Em lugar de decompor diretamente os elementos de  $J_1$  vamos decompor as derivadas das partes irredutíveis dos elementos de  $J_0$ , pois  $J_1$  é definido pelas derivadas covariantes dos elementos de  $J_0$ . Dessa forma obtemos as partes irredutíveis dos elementos de  $J_1$  do mesmo modo como fizemos para obter as partes irredutíveis da derivada covariante da torção. Entretanto, não é necessário utilizar todas as partes irredutíveis dos elementos

de  $J_0$ , pois podemos utilizar as identidades de Bianchi para reduzir de 17 para 14 as quantidades de  $J_0$  cujas derivadas precisam ser decompostas, considerando apenas as partes irredutíveis independentes.

Examinando as identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.31)–(3.33), verificamos que a eq. (3.31) é linear em  $\Omega$  e  $\mathcal{P}$ , a eq. (3.32) é linear em  $\Sigma_{AC}$ ,  $\mathcal{M}_{AC}$ ,  $\mathcal{B}_{AC}$  e  $\mathcal{L}_{AC}$  e a eq. (3.33) é linear em  $\Theta_{C'A'AC}$ ,  $\theta_{C'A'AC}$  e  $\mathcal{P}_{C'A'AC}$ . Assim, quando a torção for dada, estas identidades poderão ser utilizadas para expressar 3 dessas partes irredutíveis como combinações lineares das demais, que podem ser escolhidas de 24 maneiras diferentes.

Considerandos as observações acima, sobre as relações algébricas entre os escalares de Cartan dadas pelas identidades de Bianchi, podemos definir uma *relação de equivalência* entre escalares de Cartan (denotada por  $\sim$ ) de acordo com:

**Definição 3.1** *Dois escalares de Cartan quaisquer,  $EC_i$  e  $EC_j$ , (expressos em termos dos escalares de Cartan fundamentais usando somas, produtos e contrações) são equivalentes quando estiverem relacionados por uma equação algébrica cuja parte não-linear envolve apenas escalares de Cartan obtidos através de derivadas covariantes da curvatura e da torção de ordens inferiores às existentes em  $EC_i$  e  $EC_j$ .*

Um aspecto importante desta definição é que as derivadas covariantes de escalares de Cartan equivalentes também são equivalentes. Isto ocorre porque as derivadas covariantes de ordem  $q$  das identidades de Bianchi também são equações algébricas *lineares* nas derivadas da curvatura de ordem  $q$  e nas derivadas da torção de ordem  $(q + 1)$ , a menos de termos quadrático envolvendo as derivadas da curvatura de ordem menor ou igual a  $(q - 1)$  e as derivadas da torção de ordem menor ou igual a  $q$ . Esta definição é uma generalização da equivalência de escalares de Cartan nos espaços-tempos Riemannianos da TRG [28, 39, 63].

A partir da definição de equivalência de escalares de Cartan dada acima, podemos utilizar as identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.31)–(3.33) para expressar  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}_{AC}$  e  $\theta_{C'A'AC}$  como combinações lineares das outras partes irredutíveis equivalentes de acordo com:

$$\mathcal{P} \sim -24\Omega, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{L}_{AC} \sim -\frac{2}{3}\mathcal{M}_{AC} + \frac{i}{3}\mathcal{B}_{AC} - 8\Sigma_{AC}, \quad (3.35)$$

$$\theta_{C'A'AC} \sim \Theta_{C'A'AC} - \frac{1}{6}\mathcal{P}_{C'A'AC}. \quad (3.36)$$

Com esta escolha estamos considerando algebricamente dependentes tanto os espinores  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}_{AB}$  e  $\theta_{ABX'Y'}$  quanto as suas derivadas covariantes, que são determinados pelos escalares de Cartan equivalentes através das derivadas covariantes das identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.31)–(3.33).

Considerando que as identidades de Bianchi formam um conjunto completo de relações algébricas entre os elementos de  $I_0$ , juntamente com a escolha dos elementos independentes de  $I_0$  também definimos um conjunto completo mínimo  $C_0$  para os escalares de Cartan de  $I_0$ , dado na tab. (3.1) na página 56. Podemos resumir estes resultados enunciando a seguinte proposição:

**Proposição 3.1** *Os espinores correspondentes dos elementos do conjunto*

$$I_0 = \{T^a_{bc}, R^a_{bcd}, T^a_{bc;m_1}\}$$

*podem ser expressos algebricamente em termos dos elementos dos conjuntos  $C_0$  e seu complexo conjugado  $\bar{C}_0$ , onde  $C_0$  é um conjunto mínimo para  $I_0$  definido por:*

1. *As partes irredutíveis da torção:*

(a)  $\mathcal{T}_{X'A}$ , (b)  $\mathcal{P}_{X'A}$ , (c)  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ ;

2. *As partes irredutíveis da curvatura e da derivada covariante da torção dadas por:*

(a) *i.*  $\Psi_{ABCD}$ ; *ii.*  $\psi_{ABCD} \equiv \nabla_{N'(A} \mathcal{L}^{N'}_{BCD)}$ ;

(b) *i.*  $\Phi_{ABX'Y'}$ , *ii.*  $\Theta_{ABX'Y'}$ , *iii.*  $\phi_{ABX'Y'} \equiv \frac{1}{2}[\nabla_{N(X'} \mathcal{L}^{N}_{Y')AB} + \nabla_{N'(A} \bar{\mathcal{L}}^{N'}_{B)X'Y'}]$ ;

(c) *i.*  $\Sigma_{AB}$ , *ii.*  $\mathcal{M}_{AB} \equiv \nabla^{N'}_{(A} \mathcal{T}_{B)N'}$ , *iii.*  $\mathcal{B}_{AB} \equiv \nabla^{N'}_{(A} \mathcal{P}_{B)N'}$ ;

(d) *i.*  $\Lambda$ , *ii.*  $\Omega$ , *iii.*  $\mathcal{T} \equiv \nabla_{NN'} \mathcal{T}^{NN'}$ ;

3. *As derivadas totalmente simetrizadas de:*

(a)  $\mathcal{T}_{X'A}$ , (b)  $\mathcal{P}_{X'A}$ , (c)  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ .

Uma vez definido o conjunto completo mínimo  $C_0$ , podemos prosseguir com os cálculos para obter as partes irredutíveis dos elementos de  $J_1$ , a partir da decomposição das derivadas covariantes dos 14 elementos de  $J_0$  que pertencem a  $C_0$ . Em seguida, utilizaremos as identidades de Bianchi e de Ricci juntamente com a definição de equivalência de escalares de Cartan para determinar, não só as partes irredutíveis dos elementos de  $J_1$  que são

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. ind.
TPSI	$\Psi_{ABCD}$	10
PSILTOR	$\psi_{ABCD}$	10
TPHI	$\Phi_{ABX'Y'}$	9
THETA	$\Theta_{ABX'Y'}$	9
PHILTOR	$\phi_{ABX'Y'}$	9
DSPTTOR	$\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{T}_{X')^A}$	9
DSPPTOR	$\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')^A}$	9
SIGMA	$\Sigma_{AB}$	6
BVTTOR	$\mathcal{M}_{AB}$	6
BVPTOR	$\mathcal{B}_{AB}$	6
SPTTOR	$\mathcal{T}_{AX'}$	4
SPPTOR	$\mathcal{P}_{AX'}$	4
TLAMBD	$\Lambda$	1
OMEGA	$\Omega$	1
SCTTOR	$\mathcal{T}$	1
SPLTTOR	$\mathcal{L}_{ABCX'}$	16
DSPLTOR	$\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')^{CDE)}$	30

Tabela 3.1: Os 17 espinores do conjunto completo mínimo  $C_0$  para os espinores que correspondem aos elementos do conjunto  $I_0 = \{T_{bc}^a\} \cup J_0 = \{T_{bc}^a, R_{bcd}^a, T_{bc;m_1}^a\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 0$ . São dados os nomes utilizados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. ind.), que são  $24 + 116 = 140$  no caso geral. A letra "D" no início de um nome indica a derivada totalmente simetrizada.

independentes dos elementos de  $I_0$ , mas também as relações algébricas entre essas partes, como veremos mais adiante.

Consideremos inicialmente a decomposição das derivadas covariantes dos elementos de  $C_0$  dados pelas seis partes irredutíveis da curvatura. Cada uma dessas derivadas é decomposta em uma parte totalmente simetrizada e em outras partes definidas utilizando contrações. Como as derivadas de  $\Omega$  e  $\Lambda$  não apresentam contrações precisamos apenas obter as partes envolvendo contrações das derivadas de  $\Psi_{ABCD}$ ,  $\Sigma_{AB}$ ,  $\Phi_{AX'BY'}$  e  $\Theta_{AX'BY'}$ .

A partir das decomposições das derivadas de  $\Psi_{ABCD}$  e de  $\Sigma_{BC}$  obtemos, além das partes totalmente simetrizadas, as seguintes partes irredutíveis:

$$\Xi_{Y'ABC} = \nabla_{Y'}^N \Psi_{ABCN}, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{U}_{X'A} = \frac{1}{2}(\nabla_{X'}^N \Sigma_{AN} + \nabla_A^{N'} \bar{\Sigma}_{X'N'}), \quad (3.38)$$

$$\mathcal{V}_{X'A} = -\frac{i}{2}(\nabla_{X'}^N \Sigma_{AN} - \nabla_A^{N'} \bar{\Sigma}_{X'N'}), \quad (3.39)$$

onde o espinor  $\Xi_{Y'ABC}$  tem as mesmas simetrias que o espinor de Lanczos da torção e os espinores hermitianos  $\mathcal{U}_{X'A}$  e  $\mathcal{V}_{X'A}$  resultam da decomposição de  $\nabla_{X'}^N \Sigma_{AN}$  em uma parte hermitiana e uma parte anti-hermitiana de acordo com  $\nabla_{X'}^N \Sigma_{AN} = \mathcal{U}_{X'A} + i \mathcal{V}_{X'A}$ .

A derivada covariante do espinor  $\Phi_{BCX'Y'}$  é decomposta na parte totalmente simetrizada e nas duas partes irredutíveis do espinor  $\nabla_A^{N'} \Phi_{BCX'N'}$  que é decomposto de acordo com

$$\nabla_A^{N'} \Phi_{BCX'N'} = \nabla_{(A}^{N'} \Phi_{BC)X'N'} - \frac{1}{3} \nabla^{NN'} (\varepsilon_{AB} \Phi_{NCX'N'} + \varepsilon_{AC} \Phi_{BNX'N'}). \quad (3.40)$$

Analogamente, a derivada covariante do espinor  $\Theta_{BCY'Z'}$  é decomposta em uma parte totalmente simetrizada e nas partes irredutíveis do espinor  $\nabla_A^{N'} \Theta_{BCY'N'}$  que são dadas por  $\nabla^{NN'} \Theta_{BNY'N'}$  e pelo espinor

$$\mathcal{X}_{Y'ABC} = \nabla_{(A}^{N'} \Theta_{BC)Y'N'}, \quad (3.41)$$

que tem as mesmas simetrias que o espinor de Lanczos da torção. Com este resultado completamos as 13 partes irredutíveis da derivada covariante do espinor curvatura e podemos obter as relações algébricas entre as mesmas utilizando as identidades de Bianchi.

As derivadas covariantes das identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.31)–(3.31) relacionam entre si as derivadas covariantes de primeira ordem da curvatura e de segunda

ordem da torção. Entretanto, estas identidades *não* estabelecem relações entre os elementos do conjunto  $C_0$ , pois foram utilizadas para expressar  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}_{AB}$  e  $\theta_{ABX'Y'}$  em função dos escalares de Cartan equivalentes, de acordo com as eqs. (3.34)–(3.36). Dessa forma, as únicas relações obtidas com as derivadas covariantes dessas identidades são as equações que expressam as partes irredutíveis das derivadas de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}_{AB}$  e  $\theta_{ABX'Y'}$  em função das derivadas dos escalares de Cartan equivalentes que fazem parte de  $C_0$ .

As únicas relações algébricas entre as partes irredutíveis da derivada covariante do espinor de curvatura são obtidas a partir de um segundo conjunto de identidades de Bianchi, que podem ser expressas em termos dessas partes irredutíveis (cf. apêndice B) de acordo com

$$\begin{aligned} \Xi_{Y'ABC} &- \nabla^{N'}_{(A}\Phi_{BC)Y'N'} - i\mathcal{X}_{Y'ABC} - 2\nabla_{Y'(A}\Sigma_{BC)} \\ &- R_{(AB}{}^{NN'MM'}T_{|NN'\{C)M'MY'}} = 0, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} 4\mathcal{U}_{Y'B} &+ 3\nabla_{Y'B}\Lambda + \nabla^{N'}\Phi_{NBY'N'} + \frac{1}{2}(R_B{}^{KNN'MM'}T_{NN'KM'MY'} \\ &+ \bar{R}_{Y'}{}^{K'N'NM'M}T_{N'NK'MM'B}) = 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} 4\mathcal{V}_{Y'B} &+ 3\nabla_{Y'B}\Omega + \nabla^{N'}\Theta_{NBY'N'} - \frac{i}{2}(R_B{}^{KNN'MM'}T_{NN'KM'MY'} \\ &- \bar{R}_{Y'}{}^{K'N'NM'M}T_{N'NK'MM'B}) = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Como mais adiante iremos determinar as partes irredutíveis dos elementos de  $J_2$  decompondo as derivadas dos elementos independentes de  $J_1$ , devemos procurar reduzir o máximo possível o número de quantidades independentes de  $J_1$  utilizando a definição de equivalência de escalares de Cartan e as relações algébricas que os elementos de  $J_1$  têm entre si e com os elementos de  $I_0$ .

Quando a torção e a curvatura forem dadas, as identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.42)–(3.44) poderão ser usadas para expressar 3 das partes irredutíveis da derivada covariante da curvatura em função das demais, pois as eqs. (3.42)–(3.44) são *lineares* nas 7 partes irredutíveis que contêm contrações e nas 3 partes totalmente simétricas  $\nabla_{Y'B}\Lambda$ ,  $\nabla_{Y'B}\Omega$  e  $\nabla_{Y'(A}\Sigma_{BC)}$ . Portanto, existem 10 partes irredutíveis da derivada da curvatura algebricamente independentes, que podem ser escolhidas de 24 maneiras diferentes.

Utilizando a definição de equivalência de escalares de Cartan e as identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.42)–(3.44), podemos expressar  $\nabla^{N'}\Theta_{NBY'N'}$ ,  $\nabla^{N'}\Phi_{NBY'N'}$  e  $\nabla^{N'}_{(A}\Phi_{BC)Y'N'}$  como combinações lineares dos escalares de Cartan equivalentes através

das seguintes relações:

$$\nabla^{N'N} \Theta_{NBY'N'} \sim 4 \mathcal{V}_{Y'B} + 3 \nabla_{Y'B} \Omega, \quad (3.45)$$

$$\nabla^{N'N} \Phi_{NBY'N'} \sim 4 \mathcal{U}_{Y'B} + 3 \nabla_{Y'B} \Lambda, \quad (3.46)$$

$$\nabla^{N'}_{(A} \Phi_{BC)Y'N'} \sim \Xi_{Y'ABC} - i \mathcal{X}_{Y'ABC} - 2 \nabla_{Y'(A} \Sigma_{BC)}. \quad (3.47)$$

Dessa forma, consideramos algebricamente dependentes  $\nabla^{N'N} \Theta_{NBY'N'}$  e as partes irreduzíveis do espinor de Ricci definidas através de contrações, isto é,  $\nabla^{N'}_{(A} \Phi_{BC)Y'N'}$  e  $\nabla^{N'N} \Phi_{NBY'N'}$ . Assim, tanto estes espinores quanto suas derivadas covariantes são determinados pelos escalares de Cartan equivalentes através das identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (3.42)–(3.44) e das suas derivadas covariantes. Neste caso, as 10 partes irreduzíveis da derivada covariante da curvatura que são algebricamente independentes são: as seis partes totalmente simetrizadas e os quatro espinores  $\Xi_{Y'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A}$  e  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  definidos, respectivamente, pelas eqs. (3.37)–(3.39) e eq. (3.41).

Para completarmos as partes irreduzíveis dos elementos de  $J_1$  ainda falta decompor as derivadas covariantes das partes irreduzíveis da derivada covariante torção que fazem parte da definição de  $C_0$  na página 55. Estas derivadas de segunda ordem têm 22 partes irreduzíveis. Mas elas não são todas independentes, pois existem 11 relações algébricas entre elas que podemos obter utilizando as identidades de Ricci.

Na verdade, as identidades de Ricci relacionam entre si as derivadas covariantes de segunda ordem de um espinor qualquer. Por esta razão, antes de prosseguirmos com a decomposição da derivada de segunda ordem da torção, vamos determinar as relações algébricas que podem ser obtidas entre escalares de Cartan arbitrários, utilizando estas identidades.

No caso de um espinor  $\phi_C$  arbitrário, as identidades de Ricci são dadas por:

$$(\nabla_{AW'} \nabla_{BX'} - \nabla_{BX'} \nabla_{AW'}) \phi_C = \varepsilon_{AB} \nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C - \varepsilon_{W'X'} \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C, \quad (3.48)$$

onde as derivadas simetrizadas são decompostas (cf. apêndice B) de acordo com

$$\nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C = (\Phi_{NCW'X'} + i \Theta_{NCW'X'}) \phi^N + 2 \bar{T}_{NN'W'X'} \nabla^{NN'} \phi_C, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C &= -\Psi_{ABCN} \phi^N - 2(\Lambda + i\Omega) \varepsilon_{C(A} \phi_{B)} + 2 \varepsilon_{C(A} \Sigma_{B)N} \phi^N \\ &\quad - 2 \Sigma_{C(A} \phi_{B)} + 2 T_{NN'AB} \nabla^{NN'} \phi_C. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Utilizando as propriedades dos operadores  $\nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'}$  e  $\nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N$  podemos generalizar as eqs. (3.48)–(3.50) para um espinor com um número qualquer de índices, tanto

com linha quanto sem linha. Neste caso, a partir das identidades de Ricci para um escalar de Cartan arbitrário  $Q$  (os índices não estão indicados) obtemos, de acordo com a definição de equivalência, que as seguintes derivadas de segunda ordem de  $Q$  são equivalentes:

$$\nabla_{(A}{}^{N'}\nabla_{B)N'}Q \sim 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{N(W'}\nabla_{X')}{}^N Q \sim 0. \quad (3.51)$$

A partir das relações entre os operadores diferenciais covariantes dadas pela eq. (3.48) e das derivadas equivalentes dadas pela eqs. (3.51) acima, podemos concluir que

$$\nabla_{AW'}\nabla_{BX'}Q \sim \nabla_{BX'}\nabla_{AW'}Q. \quad (3.52)$$

Portanto, todas as derivadas de segunda ordem com os mesmos índices nos operadores diferenciais covariantes são equivalentes, independentemente da ordem dos operadores. Podemos interpretar a eq. (3.52) dizendo que o operador  $\nabla_{AW'}$  foi movido para a direita, ou então que o operador  $\nabla_{BX'}$  foi movido para a esquerda. Mais adiante, nesta seção, esta propriedade será utilizada para mover operadores diferenciais covariantes para a esquerda ou para a direita, nas derivadas de ordem  $n \geq 2$ . Como consequência dos resultados acima obtemos também que

$$\nabla_{NW'}\nabla_{X'}{}^N Q \sim \frac{1}{2}\varepsilon_{W'X'}\square Q \quad \text{e} \quad \nabla_{N'A}\nabla_B{}^{N'}Q \sim \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\square Q, \quad (3.53)$$

onde  $\square Q = \nabla^{NN'}\nabla_{NN'}Q$  é o d'Alembertiano do escalar de Cartan  $Q$ .

Prosseguindo com a obtenção das partes irredutíveis dos elementos de  $J_1$ , vamos utilizar as eqs. (3.51)–(3.53) para obter as 11 relações entre as partes irredutíveis das derivadas covariantes dos 8 elementos de  $C_0$  obtidos a partir da torção, a saber: os espinores  $\psi_{ABCD}$ ,  $\phi_{BCX'Y'}$ ,  $\mathcal{M}_{AB}$ ,  $\mathcal{B}_{AB}$ ,  $\mathcal{T}$  e as derivadas totalmente simetrizadas de  $\mathcal{T}_{X'A}$ ,  $\mathcal{P}_{X'A}$  e  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ , dados na definição de  $C_0$  na página 55. Como o espinor  $\mathcal{T}$  é um escalar, a sua derivada não precisa ser decomposta.

A derivada totalmente simetrizada  $\mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'} = \nabla^{(B}{}_{(B'}\mathcal{T}_{X')}{}^{A)}$  do traço da torção tem as mesmas simetrias que o espinor de Ricci. Assim, podemos decompor a derivada covariante de  $\mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'}$  da mesma maneira que a derivada do espinor de Ricci obtendo, além da parte totalmente simetrizada, os espinores  $\nabla_{N'}{}^{(C}\mathcal{T}_{X'}{}^{AB)N'}$  e  $\nabla^{NN'}\mathcal{T}_{ANX'N'}$ , cujas relações com os outros escalares de Cartan precisam ser determinadas. Utilizamos a eq. (3.19) podemos expressar o espinor  $\nabla_{N'}{}^{(C}\mathcal{T}_{X'}{}^{AB)N'}$  de acordo com

$$\nabla_{N'}{}^{(C}\mathcal{T}_{X'}{}^{AB)N'} = \frac{1}{2} [\nabla_{N'}{}^{(C}\nabla_{X'}^A\mathcal{T}^{B)N'} - \nabla^{N'}{}^{(C}\nabla_{N'}^A\mathcal{T}_{X'}{}^{B)}], \quad (3.54)$$

onde temos somas totalmente simetrizadas cujas parcelas que são componentes dos espinores  $\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'}$  e  $\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{X'}^B$ , cada uma contendo uma contração. Podemos classificar as contrações existentes em cada uma dessas parcelas em dois tipos: (i) aquelas onde *cada índice* contraído pertence a um operador diferencial covariante, como ocorre no espinor  $\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{X'}^B$ , e (ii) aquelas onde *apenas um* dos índices contraídos pertence a um operador diferencial covariante, como ocorre no espinor  $\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'}$  entre o operador  $\nabla_{N'}^C$  e o traço da torção  $\mathcal{T}^{BN'}$ . Na verdade, estes dois tipos de contrações estão presentes em todo escalar de Cartan definido a partir de uma derivada covariante de ordem  $n \geq 2$ . Utilizando as identidades de Ricci podemos lidar com cada um destes tipos de contrações através de um procedimento geral que apresentamos a seguir, utilizando os espinores  $\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'}$  e  $\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{X'}^B$  como exemplos.

No caso das contrações tipo (i), que envolve dois operadores diferenciais covariantes, sempre podemos utilizar a eq. (3.52) para mover os operadores para a esquerda até que estejam lado a lado e nenhum outro operador esteja à esquerda dos mesmos. Depois usamos as eqs. (3.53), ou as eqs. (3.51), para substituir a ação dos mesmos por um escalar de Cartan equivalente. A primeira parte deste procedimento não precisa ser aplicada no espinor  $\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{X'}^B$ , sendo necessário apenas utilizar as eqs. (3.53) para obter

$$\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{X'}^B \sim -\frac{1}{2} \varepsilon^{CA} \square \mathcal{T}_{X'}^B, \quad (3.55)$$

mostrando que ele é equivalente ao d'Alembertiano do traço da torção.

No caso das contrações tipo (ii), envolvendo apenas um operador diferencial covariante, utilizamos a eq. (3.52) para mover o operador para a direita até que esteja ao lado do escalar de Cartan com o qual está contraído. Depois expressamos esta contração em termos das partes irredutíveis independentes da derivada de *primeira* ordem desse escalar de Cartan. Com relação ao espinor  $\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'}$ , utilizamos a eq. (3.52) para mover o operador  $\nabla_{N'}^C$  para a direita, obtendo

$$\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'} \sim \nabla_{X'}^A \nabla_{N'}^C \mathcal{T}^{BN'}. \quad (3.56)$$

Em seguida, utilizamos a eq. (3.18) para determinar a contração  $\nabla_{N'}^C \mathcal{T}^{BN'}$  de acordo com  $\nabla_{N'}^C \mathcal{T}^{BN'} = \mathcal{M}^{CB} + \frac{1}{2} \varepsilon^{CB} \mathcal{T}$ . Substituindo esta expressão na eq. (3.56), obtemos

$$\nabla_{N'}^C \nabla_{X'}^A \mathcal{T}^{BN'} \sim \nabla_{X'}^A \mathcal{M}^{CB} + \frac{1}{2} \varepsilon^{CB} \nabla_{X'}^A \mathcal{T}. \quad (3.57)$$

Finalmente, substituindo as eq. (3.55) e eq. (3.57) na eq. (3.54) e considerando que  $\varepsilon^{AB}$  é anti-simétrico, chegamos ao seguinte resultado

$$\nabla_{N'}^{(C} \mathcal{T}_{X'}^{AB)N'} \sim \frac{1}{2} \nabla_{X'}^{(A} \mathcal{M}^{CB)}. \quad (3.58)$$

No caso do espinor  $\nabla^{NN'} \mathcal{T}_{ANX'N'}$ , através de um procedimento semelhante, obtemos a relação

$$\nabla^{NN'} \mathcal{T}_{ANX'N'} \sim \frac{1}{4} \nabla_{X'A} \mathcal{T}. \quad (3.59)$$

Utilizando um procedimento análogo com relação às derivadas covariantes dos espinores  $\mathcal{P}^{BA}_{B'X'} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')}^{A)}$  e  $\mathcal{L}_{B'X'}^{BCDE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{CDE)}$ , obtemos que suas partes irreduzíveis definidas através de contrações satisfazem às seguintes relações:

$$\nabla_{N'}^{(C} \mathcal{P}_{X'}^{AB)N'} \sim \frac{1}{2} \nabla_{X'}^{(A} \mathcal{B}^{CB)}, \quad (3.60)$$

$$\nabla^{NN'} \mathcal{P}_{ANX'N'} \sim \frac{1}{4} \nabla_{AX'} \mathcal{P}, \quad (3.61)$$

$$\nabla_{N'}^{(A} \mathcal{L}_{N'X'}^{BCDE)} \sim -\frac{1}{2} \nabla_{X'}^{(A} \psi^{BCDE)}, \quad (3.62)$$

$$\nabla_{NN'} \mathcal{L}_{X'}^{CDENN'} \sim \frac{3}{8} \nabla_{X'}^{(C} \mathcal{L}^{DE)} - \frac{1}{4} \square \mathcal{L}_{X'}^{CDE}, \quad (3.63)$$

$$\nabla_{N(A'} \mathcal{L}_{B'X')}^{CDEN} \sim \frac{3}{4} [\nabla_{(A'}^{(C} \phi^{DE)}_{B'X')} + i \nabla_{(A'}^{(C} \theta^{DE)}_{B'X')}], \quad (3.64)$$

onde  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}^{DE}$  e  $\theta^{DE}_{B'X'}$  são determinados em termos dos escalares de Cartan equivalentes pertencentes a  $C_0$  através das eqs. (3.34)–(3.36), respectivamente.

A derivada covariante do espinor  $\mathcal{M}_{AB}$ , além da parte totalmente simetrizada, tem apenas uma parte irreduzível dada pelo espinor hermitiano  $\nabla^N_{X'} \mathcal{M}_{AN}$ , isto é, que satisfaz a  $\nabla^N_{X'} \mathcal{M}_{AN} = \nabla^N_A \bar{\mathcal{M}}_{X'N'}$ . Podemos utilizar a equação  $\nabla^{N'}_A \mathcal{T}_{BN'} = -\mathcal{M}_{AB} - \frac{1}{2} \varepsilon_{AB} \mathcal{T}$ , obtida a partir da eq. (3.18), para relacionar este espinor com outros escalares de Cartan. Calculando a derivada covariante dessa equação e contraindo com o índice A, obtemos  $\nabla^A_{X'} \nabla^{N'}_A \mathcal{T}_{BN'} = -\nabla^A_{X'} \mathcal{M}_{AB} - \frac{1}{2} \nabla_{BX'} \mathcal{T}$ . Considerando que  $\nabla^A_{X'} \nabla^{N'}_A \mathcal{T}_{BN'} \sim -\frac{1}{2} \square \mathcal{T}_{BX'}$ , de acordo com as eqs. (3.53), obtemos a seguinte relação

$$\nabla^N_{X'} \mathcal{M}_{NB} \sim -\frac{1}{2} (\nabla_{X'B} \mathcal{T} - \square \mathcal{T}_{X'B}). \quad (3.65)$$

Procedendo de maneira análoga com as derivadas covariantes dos espinores  $\mathcal{B}_{AB}$ ,  $\psi_{ABCD}$  e  $\phi_{BCX'Y'}$ , podemos utilizar as eq. (3.14), eq. (3.25), e as eqs. (3.51)–(3.53) para

mostrar que as partes irredutíveis  $\nabla^N_{X'}\mathcal{B}_{AN}$  (hermitiano),  $\nabla^N_{X'}\psi_{ABCN}$  e também o espinor  $\nabla^{N'}_A\phi_{BCX'N'}$  satisfazem às seguintes relações

$$\nabla^N_{X'}\mathcal{B}_{AN} \sim -\frac{1}{2}(\nabla_{X'}\mathcal{P} - \square\mathcal{P}_{X'A}), \quad (3.66)$$

$$\nabla_{NX'}\psi^{ABCN} \sim \frac{3}{4}\nabla^{(A}_{X'}\mathcal{L}^{BC)} - \square\mathcal{L}_{X'}^{ABC}, \quad (3.67)$$

$$\nabla^{N'A}\phi^{BC}_{X'N'} \sim -i\nabla^{N'A}\theta^{BC}_{X'N'} - \frac{1}{2}\nabla_{X'}{}^A\mathcal{L}^{BC} + \square\mathcal{L}_{X'}^{ABC}, \quad (3.68)$$

onde os espinores  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{L}^{BC}$  e  $\theta^{BC}_{X'N'}$  são expressos em termos dos escalares de Cartan equivalentes que pertecem a  $C_0$  de acordo com as eq. (3.34)–(3.36), respectivamente.

Com este último resultado, completamos 22 partes irredutíveis da derivada de segunda ordem da torção. Entretanto, apenas onze destas partes são independentes, pois elas estão relacionadas entre si e com os elementos de  $I_0$  através de 11 identidades algébricas dadas pelas eqs. (3.58)–(3.68), obtidas a partir das identidades de Ricci e de Bianchi. Portanto, dado o conjunto mínimo  $C_0$ , podemos utilizar estas relações para escolher as 11 partes algebricamente independentes como sendo: as derivadas totalmente simetrizadas dos 8 elementos de  $C_0$  obtido a partir da torção e os d'Alembertianos das 3 partes irredutíveis da torção.

Por fim, reunindo as partes irredutíveis das derivadas de primeira ordem da curvatura e de segunda ordem da torção, obtemos o conjunto das partes irredutíveis de  $J_1$  com 35 elementos que satisfazem a 14 relações algébricas, dadas pelas eqs. (3.34)–(3.36) e pelas eqs. (3.58)–(3.68), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci, respectivamente. Neste conjunto existem 10 partes irredutíveis da derivada de primeira ordem da curvatura e 11 da derivada de segunda ordem da torção que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_0$ .

Antes de prosseguirmos para o próximo valor de  $q$  no algoritmo, temos que considerar um aspecto importante dos resultados obtidos. O número de partes independentes de  $J_1$  foi reduzido o máximo possível, pois todas as relações algébricas independentes entre os elementos de  $J_1$  foram obtidas, como veremos a seguir.

A partir do conjunto completo mínimo  $C_0$ , podemos mostrar que as relações algébricas dadas pelas eqs. (3.34)–(3.36) e eqs. (3.58)–(3.68), consttuem um conjunto completo de identidades para os escalares de Cartan do conjunto  $J_1$ , utilizado no algoritmo para testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan quando  $q = 1$ . Esta afirmação pode ser demonstrada reunindo a  $C_0$  o conjunto  $C_1$  das quantidades independentes de  $J_1$ , dadas

na tab. (3.2) na página 66, de modo a obter um conjunto completo mínimo para  $J_1$  de acordo com a seguinte proposição:

**Proposição 3.2** *Os espinores correspondentes dos elementos do conjunto*

$$J_1 = \{R^a{}_{bcd;m_1}, T^a{}_{bc;m_1m_2}\},$$

*podem ser expressos algebricamente em termos dos conjuntos mínimos  $C_0 \cup C_1$  e seu complexo conjugado  $\bar{C}_0 \cup \bar{C}_1$ , onde  $C_0$  é definido na página 55 e  $C_1$  é um conjunto mínimo definido por:*

1. *As derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_0$ , exceto das partes irredutíveis da torção;*
2. *Os d'Alembertianos ( $\square \equiv \nabla^{N'} \nabla_{N'}$ ) das partes irredutíveis da torção:*  
(a)  $\square T_{X'A}$ , (b)  $\square P_{X'A}$ , (c)  $\square L_{X'ABC}$ ;
3. *As partes irredutíveis da derivada covariante da curvatura dadas por:*

$$(a) U_{AX'} \equiv \frac{1}{2}(\nabla^N_{X'} \Sigma_{AN} + \nabla^{N'}_A \bar{\Sigma}_{X'N'}), \quad (b) V_{AX'} \equiv \frac{i}{2}(\nabla_{NX'} \Sigma^N_A - \nabla_{N'A} \bar{\Sigma}^{N'}_{X'}),$$

$$(c) \Xi_{ABCX'} \equiv \nabla^N_{X'} \Psi_{ABCN}, \quad (d) \mathcal{X}_{ABCX'} \equiv \nabla^{N'}_{(A} \Theta_{BC)N'X'}.$$

**Demonstração:**

*Precisamos mostrar que os elementos de  $J_1$  podem ser expressos algebricamente em termos dos elementos de  $C_1$  e de  $C_0$ , e que o número de elementos de  $C_1$  não pode mais ser reduzido.*

*Considerando que  $C_0$  é um conjunto completo mínimo para  $I_0$  e que  $J_1$  é definido pelas derivadas covariantes dos elementos do subconjunto  $J_0$  de  $I_0$ , concluímos que os elementos de  $J_1$  podem ser expressos algebricamente em termos das derivadas covariantes dos elementos de  $C_0$ . Entretanto,  $C_1$  é formado por partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_0$  que foram escolhidas de modo tal que as demais partes não incluídas em  $C_1$  podem ser expressas em termos dos elementos de  $C_1$  e de  $C_0$ , através das relações dadas pelas eqs. (3.34)–(3.36) e eqs. (3.58)–(3.68), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci. Portanto, os elementos de  $J_1$  podem ser expressos algebricamente em termos dos elementos de  $C_1$  e de  $C_0$ .*

*Para demonstrar que o número de quantidades algebricamente independentes existentes em  $C_1$  não pode mais ser reduzido, temos que mostrar que seus elementos têm 300*

componentes reais no total, pois este é o número de quantidades reais em  $J_1$  que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_0$ , de acordo com a eq. (3.13). A demonstração fica completa com a tab. (3.2) na página 66, onde podemos verificar que os elementos de  $C_1$  têm 300 componentes reais.

A partir destes resultados podemos considerar o próximo valor de  $q$  no algoritmo, onde devemos decompor em partes irredutíveis os espinores correspondentes dos elementos do conjunto  $J_2 = \{R^a_{bcd;m_1m_2}, T^a_{bc;m_1m_2m_3}\}$ , determinar as partes irredutíveis que são algebricamente independentes dos elementos de  $I_1$  e obter as relações algébricas que estas partes têm entre si.

Seguindo o mesmo procedimento utilizado com relação ao conjunto  $J_1$ , em lugar de decompor diretamente os elementos de  $J_2$  vamos obter as suas partes irredutíveis decompondo as derivadas covariantes dos elementos do conjunto mínimo  $C_1$ , definido na página 64, a saber: as derivadas totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_0$  (exceto das partes irredutíveis da torção), os d'Alembertianos das partes irredutíveis da torção e os os quatro espinores  $\Xi_{Y'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A}$  e  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  definidos, respectivamente, pelas eqs. (3.37)–(3.39) e eq. (3.41).

Considerando que a derivada covariante de cada elemento de  $C_1$  tem ordem  $q \geq 2$ , as suas partes irredutíveis contêm os mesmos tipos de contrações que existem nas partes irredutíveis da derivada covariante de  $\mathcal{T}^{BA}_{B'X'} = \nabla^{(B}_{(B'} \mathcal{T}_{X')^A}$ . Assim, podemos obter as relações entre partes irredutíveis das derivadas dos elementos de  $C_1$  e os outros escalares de Cartan através do mesmo procedimento aplicado nos espinores  $\nabla_{N'}^C \nabla_{Y'}^A \mathcal{T}^{BN'}$  e  $\nabla^{N'C} \nabla_{N'}^A \mathcal{T}_{Y'}^B$  nas páginas 60 e 61. Como cada uma dessas derivadas é decomposta em uma parte totalmente simetrizada e em outras partes definidas utilizando contrações, precisamos obter apenas as partes envolvendo contrações e determinar as relações entre elas e os outros escalares de Cartan utilizando as identidades de Bianchi e de Ricci.

Decompondo a derivada covariante de  $\nabla_{X'A} \Lambda$ , isto é, a derivada covariante de segunda ordem do escalar de curvatura, obtemos que as partes com contração são o d'Alembertiano  $\square \Lambda$  e o espinor  $\nabla_{N'(A} \nabla_B)^{N'} \Lambda$ . Entretanto, apenas o d'Alembertiano pode ser considerado independente, pois utilizando as identidades de Ricci obtemos que  $\nabla_{N'(A} \nabla_B)^{N'} \Lambda \sim 0$ , de acordo com as eqs. (3.51). Assim, mostramos que este espinor pode ser expresso algebricamente em função dos elementos de  $I_1$ . Analogamente, na derivada covariante de segunda ordem do pseudo-escalar de curvatura  $\Omega$  e do espinor  $\mathcal{T}$ , dado pela eq. (3.21), apenas os

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. Ind.
DTPSI	$\nabla_{X'(A} \Psi_{BCDE)}$	24
DPSILTOR	$\nabla_{X'(A} \psi_{BCDE)}$	24
DTPHI	$\nabla_{(X'}^{(A} \Phi_{Y'Z')}^{BC)}$	16
DTHETA	$\nabla_{(X'}^{(A} \Theta_{Y'Z')}^{BC)}$	16
DPHILTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \phi_{Y'Z')}^{BC)}$	16
D2SPTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B T_{Z')}^C)$	16
D2SPPTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B P_{Z')}^C)$	16
DSIGMA	$\nabla_{X'(A} \Sigma_{BC)}$	16
DBVTTOR	$\nabla_{X'(A} \mathcal{M}_{BC)}$	16
DBVPTOR	$\nabla_{X'(A} \mathcal{B}_{BC)}$	16
TXI	$\Xi_{X'ABC}$	16
XITH	$\chi_{Y'ABC}$	16
ASPLTOR	$\square \mathcal{L}_{X'ABC}$	16
DTLAMBDA	$\nabla_{X'A} \Lambda$	4
DOMEGA	$\nabla_{X'A} \Omega$	4
DSCTTOR	$\nabla_{X'A} \mathcal{T}$	4
TSIGM	$\mathcal{U}_{X'A}$	4
PSIGM	$\mathcal{V}_{X'A}$	4
ASPTTOR	$\square \mathcal{T}_{X'A}$	4
ASPPTOR	$\square \mathcal{P}_{X'A}$	4
D2SPLTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \mathcal{L}_{Z')}^{CDE)}$	48

Tabela 3.2: Os 21 espinores do conjunto mínimo  $C_1$  para os espinores que correspondem aos elementos de  $J_1 = \{R^a_{bcd;m_1}, T^a_{bc;m_1m_2}\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 1$ , com os nomes usados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. Ind.), que são 300 no caso geral. A derivada de segunda ordem totalmente simetrizada é indicada por “D2” e o d’Alembertiano por “A”, no início de um nome.

d'Alembertianos  $\square\Omega$  e  $\square\mathcal{T}$  são algebricamente independentes dos elementos de  $I_1$ .

Como o número de partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_1$  que são algebricamente dependentes de  $I_1$  é muito grande, daqui em diante apresentaremos apenas os casos em que a equivalência com os elementos de  $I_1$  for obtida utilizando outras equações além das identidades de Ricci, dadas pelas eqs. (3.51)–(3.53).

As derivadas covariantes de  $\nabla_{X'(E)\Psi_{ABCD}}$  e de  $\nabla_{X'(A)\Sigma_{BC}}$  têm, cada uma, cinco partes irredutíveis definidas utilizando contrações. Usando a eq. (3.52) e as eqs. (3.53), podemos mostrar que as partes algebricamente independentes de  $I_1$  estão relacionadas por

$$\nabla^{NN'}\nabla_{N'(E)\Psi_{ABC}N} \sim \frac{1}{2}\square\Psi_{EABC}, \quad (3.69)$$

$$\nabla_N^{(X'\nabla^{Y'})}{}_{(E)\Psi^N_{ABC}} \sim -\nabla^{(X'}{}_{(E)\Xi^{Y')}_{ABC}}, \quad (3.70)$$

$$\nabla^{NN'}\nabla_{N'(A)\Sigma_B N} \sim \frac{1}{2}\square\Sigma_{AB}, \quad (3.71)$$

$$\nabla_N^{(X'\nabla^{Y'})}{}_{A\Sigma^N_B} \sim -\nabla^{(X'}{}_{(A)\mathcal{U}^{Y')}_{B)} - i\nabla^{(X'}{}_{(A)\mathcal{V}^{Y')}_{B)}, \quad (3.72)$$

onde  $\Xi_{Y'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A}$  são definidos, respectivamente, pelas eqs. (3.37)–(3.39).

Com relação à  $\nabla_{Y'(E)\psi_{ABCD}}$ ,  $\nabla_{Y'(C)\mathcal{M}_{AB}}$  e  $\nabla_{Y'(C)\mathcal{B}_{AB}}$ , obtemos que as partes irredutíveis das suas derivadas covariantes que são algebricamente independentes de  $I_1$  estão relacionadas de acordo com

$$\nabla_N^{(X'\nabla^{Y'})}{}_{(E)\psi^N_{ABC}} \sim \frac{3}{4}\nabla^{(X'}{}_{(E)\nabla^{Y')}A}\mathcal{L}_{BC} + \frac{1}{2}\square\nabla^{(X'}{}_{(E)\mathcal{L}^{Y')}_{ABC}}, \quad (3.73)$$

$$\nabla_N^{N'}\nabla_{N'(D)\psi^N_{ABC}} \sim -\frac{1}{2}\square\psi_{ABCD}, \quad (3.74)$$

$$\nabla_N^{(X'\nabla^{Y'})}{}_{(A)\mathcal{M}^N_B} \sim \frac{1}{2}[\nabla^{(X'}{}_{(A)\nabla^{Y')}B'}\mathcal{T} - \square\nabla^{(X'}{}_{(A)\mathcal{T}_B}{}^{Y')}], \quad (3.75)$$

$$\nabla_N^{N'}\nabla_{N'(A)\mathcal{M}_B N} \sim -\frac{1}{2}\square\mathcal{M}_{AB}, \quad (3.76)$$

$$\nabla_N^{(X'\nabla^{Y'})}{}_{(A)\mathcal{B}^N_B} \sim \frac{1}{2}[\nabla^{(X'}{}_{(A)\nabla^{Y')}B'}\mathcal{P} - \square\nabla^{(X'}{}_{(A)\mathcal{P}_B}{}^{Y')}], \quad (3.77)$$

$$\nabla_N^{N'}\nabla_{N'(A)\mathcal{B}_B N} \sim -\frac{1}{2}\square\mathcal{B}_{AB}, \quad (3.78)$$

utilizando as eqs. (3.51)–(3.53), eq. (3.67), eq. (3.65) e eq. (3.66).

No caso das derivadas dos espinores  $\nabla_{(X')\Phi^{AB}}{}_{Y'Z'}$  e  $\nabla_{(X')\Theta^{AB}}{}_{Y'Z'}$ , precisamos considerar apenas as partes irredutíveis relacionadas com as derivadas do espinor  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  definido pela eq. (3.41). As outras partes apenas expressam as partes irredutíveis das derivadas covariantes de  $\nabla^{N'N}\Theta_{NBY'N'}$ ,  $\nabla^{N'N}\Phi_{NBY'N'}$  e  $\nabla^{N'}{}_{(A)\Phi_{BC}Y'N'}$  em função das derivadas covariantes dos escalares de Cartan equivalentes que pertencem a  $C_1$ , de acordo

com as eqs. (3.45)–(3.47). Neste caso, utilizando a eq. (3.52) e as eqs. (3.53), obtemos apenas duas relações entre as partes independentes dadas por

$$\nabla_N{}^{N'}\nabla_{(Y'}^N\Phi_{Z')N'}^{AB} \sim -\frac{1}{2}\square\Phi_{Y'Z'}^{AB}, \quad (3.79)$$

$$\nabla^{N'(D}\nabla_{(X'}^C\Theta_{Y')N'}^{AB)} \sim \nabla_{(X'}^{(D}\mathcal{X}_{Y')}^{CAB)}. \quad (3.80)$$

Decompondo a derivada covariante de  $\nabla_{(X'}^C\phi_{Y'Z')}^{AB)}$  em partes irreduzíveis e utilizando a eq. (3.68) e as eqs. (3.45)–(3.47) podemos mostrar que as partes irreduzíveis independentes estão relacionadas de acordo com

$$\nabla_N{}^{N'}\nabla_{(X'}^N\phi_{Y')N'}^{AB} \sim \frac{1}{2}\square\phi_{X'Y'}^{AB}, \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \nabla^{N'(D}\nabla_{(X'}^C\phi_{Y')N'}^{AB)} &\sim -\nabla^{N'(D}\nabla_{(X'}^C\theta_{Y')N'}^{AB)} - \frac{1}{2}\nabla_{(X'}^{(C}\nabla_{Y')}^D\mathcal{L}^{AB)} \\ &\quad + \frac{1}{2}\square\nabla_{(X'}^{(C}\mathcal{L}_{Y')}^{DAB)}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Consideremos agora as derivadas covariantes de primeira ordem dos espinores  $\mathcal{U}_{X'A}$  e  $\mathcal{V}_{X'A}$  definidos pelas eqs. (3.38)–(3.39), respectivamente, que são decompostas de acordo com a eq. (3.18). Existem duas partes irreduzíveis independentes  $\nabla^{N'}_{(A}\mathcal{V}_{B)N'}$  e

$$\mathcal{F}_{AB} = \nabla^{N'}_{(A}\mathcal{U}_{B)N'}. \quad (3.83)$$

Utilizando as eqs. (3.38)–(3.39) e as eqs. (3.51)–(3.53), obtemos as seguintes relações

$$\mathcal{F}_{AB} \sim \frac{1}{2}(\square\Sigma_{AB} + \nabla^{K'}_{(A}\nabla_{B)N'}\bar{\Sigma}_{K'}{}^{N'}), \quad (3.84)$$

$$\nabla^{N'}_{(A}\mathcal{V}_{B)N'} \sim \frac{i}{2}(\square\Sigma_{AB} - \nabla^{K'}_{(A}\nabla_{B)N'}\bar{\Sigma}_{K'}{}^{N'}). \quad (3.85)$$

Assim, podemos considerar como independente apenas  $\mathcal{F}_{AB}$ , pois estas relações nos permitem mostrar que

$$\nabla^{N'}_{(A}\mathcal{V}_{B)N'} \sim i(\mathcal{F}_{AB} - \square\Sigma_{AB}). \quad (3.86)$$

As partes irreduzíveis das derivadas covariantes de primeira ordem dos espinores  $\bar{\Xi}_{Y'ABC}$  e  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  definidos pelas eq. (3.41) e eq. (3.37), respectivamente, são obtidas através de uma decomposição análoga à da derivada do espinor de Lanczos da torção  $\mathcal{L}_{Y'ABC}$ , dada em (3.25).

As partes irreduzíveis da derivada covariante de  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$ , além da parte totalmente simetrizada, são dadas pelo espinor

$$\Upsilon_{ABCD} = \nabla_{N'(A}\mathcal{X}^{N'}_{BCD)}, \quad (3.87)$$

e pelas três partes irredutíveis do espinor  $\nabla_{X'}^N \mathcal{X}_{Y'ABN}$ . Entretanto, podemos mostrar que este último espinor é algebricamente dependente dos outros escalares de Cartan. Decompondo  $\Theta_{BCY'Z'}$  de acordo com a eq. (3.40) e utilizando a definição de  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  dada pela eq. (3.41), obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{X'}^N \mathcal{X}_{Y'ABN} = & -\frac{1}{3} (\varepsilon_{AB} \nabla_{X'}^N \nabla^{KN'} \Theta_{NKY'N'} + \nabla_{AX'} \nabla^{KN'} \Theta_{KBY'N'}) \\ & + \nabla_{X'}^N \nabla_A^{N'} \Theta_{BNY'N'}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

As duas primeiras parcelas da eq. (3.88) são dadas por derivadas covariantes do espinor  $\nabla^{KN'} \Theta_{KBY'N'}$ , que é algebricamente dependente de  $\mathcal{V}_{Y'B}$  e de  $\nabla_{Y'B} \Omega$  através da eq. (3.45). Com relação à última parcela, substituindo as eq. (3.45) e eq. (3.53) na identidade

$$\nabla_{X'}^N \nabla_A^{N'} \Theta_{BNY'N'} - \nabla_{AX'} \nabla^{N'N} \Theta_{BNY'N'} = \varepsilon_A^N \nabla_{X'M} \nabla^{MN'} \Theta_{BNY'N'}, \quad (3.89)$$

obtemos a seguinte relação

$$\nabla_{X'}^N \nabla_A^{K'} \Theta_{BNY'K'} \sim -4 \nabla_{AX'} \mathcal{V}_{BY'} - 3 \nabla_{AX'} \nabla_{BY'} \Omega + \frac{1}{2} \square \Theta_{ABY'X'}. \quad (3.90)$$

Portanto, podemos considerar o espinor  $\Upsilon_{ABCD}$  como a única parte irredutível (envolvendo contrações) da derivada covariante de  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  que é algebricamente independente, pois substituindo as eq. (3.90) e eq. (3.45) na eq. (3.88), obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{X'}^N \mathcal{X}_{Y'ABN} \sim & -\frac{4}{3} (4 \nabla_{AX'} \mathcal{V}_{BY'} - \varepsilon_{AB} \nabla_{X'}^N \mathcal{V}_{NY'}) + \frac{1}{2} \square \Theta_{ABY'X'} \\ & - 3 (4 \nabla_{AX'} \nabla_{BY'} \Omega - \varepsilon_{AB} \nabla_{X'}^N \nabla_{NY'} \Omega). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Analogamente, as partes irredutíveis da derivada covariante do espinor  $\Xi_{Y'ABC}$  são a derivada totalmente simetrizada, o espinor  $\nabla_{(D}^{N'} \Xi_{ABC)N'}$  e as três partes irredutíveis do espinor  $\nabla_{X'}^N \Xi_{Y'ABN}$ . Entretanto, apenas a derivada totalmente simetrizada é algebricamente independente, como veremos a seguir. Em primeiro lugar, utilizando a definição de  $\Xi_{Y'ABC}$  dada pela eq. (3.37) e as eqs. (3.53), obtemos que

$$\nabla_{(D}^{N'} \Xi_{ABC)N'} = -\nabla_{N'(D} \nabla^{NN'} \Psi_{ABC)N} \sim -\frac{1}{2} \square \Psi_{ABCD}. \quad (3.92)$$

Em segundo lugar, a partir da derivada covariante da identidade de Bianchi dada pela eq. (3.47) obtemos a relação

$$\nabla_{X'}^N \Xi_{Y'ABN} \sim i \nabla_{X'}^N \mathcal{X}_{Y'ABN} + 2 \nabla_{X'}^N \nabla_{Y'(A} \Sigma_{BN)} - \nabla_{X'}^N \nabla_{(N}^{N'} \Phi_{AB)Y'N'}. \quad (3.93)$$

As duas primeiras parcelas da eq. (3.93) podem ser consideradas algebricamente dependentes, pois são derivadas envolvendo contrações dos espinores  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$  e  $\nabla_{Y'(A}\Sigma_{BC)}$ . Quanto à última parcela, verificamos que ela é uma soma simetrizada de espinores do tipo  $\nabla^N_{X'}\nabla^{N'}_N\Phi_{ABY'N'}$  e  $\nabla^N_{X'}\nabla^{N'}_A\Phi_{BNY'N'}$ , que satisfazem às seguintes relações

$$\nabla^N_{X'}\nabla^{N'}_N\Phi_{ABY'N'} \sim \frac{1}{2}\square\Phi_{ABY'X'}, \quad (3.94)$$

$$\nabla^N_{X'}\nabla^{N'}_A\Phi_{BNY'N'} \sim 4\nabla_{X'A}\mathcal{U}_{BY'} + 3\nabla_{X'A}\nabla_{BY'}\Lambda - \frac{1}{2}\square\Phi_{BAY'X'}, \quad (3.95)$$

de acordo com as eq. (3.53) e eq. (3.90), respectivamente.

Para completarmos as decomposições das derivadas covariantes dos elementos de  $C_1$  definidos através de contrações falta apenas considerar as derivadas dos d'Alembertianos das partes irredutíveis da torção, cujas decomposições são análogas às da derivada covariante da torção dadas em (3.18), (3.14) e (3.25), respectivamente.

Utilizando as identidades de Ricci podemos mostrar que as partes irredutíveis da derivada do d'Alembertiano  $\square\mathcal{T}_{X'A}$  do traço da torção são equivalentes ao d'Alembertiano das partes irredutíveis da derivada covariante de  $\mathcal{T}_{X'A}$ , isto é, satisfazem às relações  $\nabla^{(B}_{(B'}\square\mathcal{T}_{X')^A)} \sim \square\nabla^{(B}_{(B'}\mathcal{T}_{X')^A)}$ ,  $\nabla_{N'(B}\square\mathcal{T}^{N'}_A) \sim \square\mathcal{M}_{BA}$  e  $\nabla_{NN'}\square\mathcal{T}^{NN'} \sim \square\mathcal{T}$ . Um resultado semelhante é obtido com relação às derivadas de  $\square\mathcal{P}_{X'A}$  e  $\square\mathcal{L}_{X'ABC}$ . Portanto, as partes irredutíveis independentes são os d'Alembertianos dos elementos de  $C_0$  obtidos a partir da torção, dados na página 55. Este tipo de equivalência se repete no algoritmo para todos os valores de  $q$  seguintes.

Finalmente, temos os elementos de  $C_1$  dados pelas derivadas covariantes totalmente simetrizadas de primeira ordem das partes irredutíveis da curvatura e de segunda ordem das partes irredutíveis da torção. Podemos mostrar que as únicas partes irredutíveis independentes são as derivadas covariantes totalmente simetrizadas de segunda ordem das partes irredutíveis da curvatura e de terceira ordem das partes irredutíveis da torção, utilizando as relações dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86) e eqs. (3.91)–(3.93).

Resumindo os resultados obtidos, vimos que os elementos do conjunto  $J_2$  têm 56 partes irredutíveis que são algebricamente independentes dos elementos de  $I_1$  e que satisfazem a 22 relações algébricas dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86) e eqs. (3.91)–(3.93), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci. Assim, o conjunto  $J_2$  tem 34 escalares de Cartan que são independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_1$ , que podemos escolher como sendo: os d'Alembertianos dos elementos de  $C_0$  (exceto das partes irre-

dutíveis da torção), as derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_1$  (exceto dos d'Alembertianos) e os espinores  $\mathcal{F}_{AB}$  e  $\Upsilon_{ABCD}$  definidos pelas eq. (3.83) e eq. (3.87), respectivamente.

O número de elementos independentes de  $J_2$  não pode mais ser reduzido, pois as 22 relações algébricas dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86) e eqs. (3.91)–(3.93) constituem um conjunto completo de identidades para os escalares de Cartan de  $J_2$  que são independentes dos elementos de  $I_1$ . Portanto, podemos utilizar os 34 escalares de Cartan independentes para definir um conjunto  $C_2$ , dado nas tabs. (3.3)–(3.4) nas páginas 73 e 74, respectivamente, que reunimos a  $C_0$  e  $C_1$  para definir um conjunto completo mínimo para os elementos de  $J_2$  de acordo com a seguinte proposição:

**Proposição 3.3** *Os espinores correspondentes dos elementos do conjunto*

$$J_2 = \{R^a_{bcd;m_1m_2}, T^a_{bc;m_1m_2m_3}\},$$

*podem ser expressos algebricamente (usando somas, produtos e contrações) em termos dos elementos do conjunto mínimo  $C_0 \cup C_1 \cup C_2$  e dos complexos conjugados desses elementos, onde  $C_0$  e  $C_1$  são definidos nas páginas 55 e 64, respectivamente, sendo  $C_2$  um conjunto mínimo definido por:*

1. *As derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_1$ , exceto dos d'Alembertianos;*
2. *As partes irredutíveis da derivada covariante de segunda ordem da curvatura dadas por:*  
 (a)  $\Upsilon_{ABCD} \equiv \nabla_{N'(A} \mathcal{X}^{N'}_{BCD)}$ , (b)  $\mathcal{F}_{AB} \equiv \nabla_{N'(A} \mathcal{U}^{N'}_{B)}$ ;
3. *Os d'Alembertianos  $\square Q \equiv \nabla^{NN'} \nabla_{NN'} Q$  de todos os elementos  $Q$  do conjunto  $C_0$ , exceto das partes irredutíveis da torção;*

*de acordo com as tabs. (3.3)–(3.4) nas páginas 73 e 74.*

**Demonstração:**

*Este resultado é demonstrado através do mesmo procedimento utilizado na proposição (3.2), onde mostramos que  $C_1$  e  $C_0$  definem um conjunto completo mínimo para os elementos de  $J_1$ .*

*Analogamente, como  $J_2$  é definido pelas derivadas dos elementos de  $J_1$ , temos que mostrar que as derivadas dos elementos de  $C_1$  podem ser expressas algebricamente em*

termos dos elementos de  $C_0 \cup C_1 \cup C_2$  e que o número de quantidade independentes em  $C_2$  não pode mais ser reduzido.

A demonstração de que as derivadas dos elementos de  $C_1$  podem ser expressas em termos dos elementos de  $C_2$  resulta diretamente do fato dos elementos de  $C_2$  serem partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_1$ , que foram escolhidas de modo que todas as demais partes irredutíveis podem ser expressas em termos dos elementos de  $C_0 \cup C_1 \cup C_2$ , através das relações dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86) e eqs. (3.91)–(3.93), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci.

Para demonstrar que o número de quantidades algebricamente independentes existentes em  $C_2$  não pode mais ser reduzido, temos que mostrar que seus elementos têm 606 componentes reais no total, pois este é o número de quantidades reais em  $J_2$  que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_1$ , de acordo com a eq. (3.13). A demonstração fica completa com as tabs. (3.3)–(3.4) nas páginas 73 e 74, onde podemos verificar que os elementos de  $C_2$  têm 606 componentes reais.

A seguir temos o valor  $q = 3$  no algoritmo, onde devemos decompor em partes irredutíveis os espinores correspondentes do conjunto  $J_3 = \{R^a_{bcd;m_1m_2m_3}, T^a_{bc;m_1m_2m_3m_4}\}$ , determinar as partes irredutíveis que são algebricamente independentes dos elementos de  $I_2$  e obter as relações algébricas que estas partes têm entre si e com os elementos de  $I_2$ .

De acordo com o procedimento utilizado anteriormente com o conjunto  $J_2$ , os elementos independentes de  $J_3$  podem ser obtidos em duas etapas: primeiro, decompomos em partes irredutíveis as derivadas covariantes dos elementos de  $C_2$ ; depois utilizamos as identidades de Bianchi e de Ricci para determinar as relações algébricas que estas partes têm entre si e com os elementos de  $I_2$ .

Do mesmo modo que as derivadas dos elementos de  $C_1$ , a derivada covariante de cada elemento de  $C_2$  tem ordem  $q \geq 2$ . Assim, as suas partes irredutíveis contêm os mesmos tipos de contrações que existem nas partes irredutíveis da derivada covariante de  $T^{BA}_{B'X'} = \nabla^{(B}_{(B'} T_{X')^A}$ , permitindo que as relações entre partes irredutíveis das derivadas dos elementos de  $C_2$  e os outros escalares de Cartan sejam obtidas através do mesmo procedimento apresentado nas páginas 60 e 61.

Devido a grande quantidade de elementos existentes em  $C_2$ , as relações entre as partes irredutíveis das derivadas desses elementos serão obtidas considerando  $C_2$  dividido em dois subconjuntos  $C_2 = C_{2A} \cup C_{2B}$ , onde  $C_{2A}$  é formado pelos d'Alembertianos de

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. ind.
ATPSI	$\square\Psi_{ABCD}$	10
APSILTOR	$\square\psi_{ABCD}$	10
ATPHI	$\square\Phi_{ABX'Y'}$	9
ATHETA	$\square\Theta_{ABX'Y'}$	9
APHILTOR	$\square\phi_{ABX'Y'}$	9
ADSPTTOR	$\square\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{T}_{X')^A}$	9
ADSPPTOR	$\square\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')^A}$	9
ASIGMA	$\square\Sigma_{AB}$	6
ABVTTOR	$\square\mathcal{M}_{AB}$	6
ABVPTOR	$\square\mathcal{B}_{AB}$	6
ATLAMBDA	$\square\Lambda$	1
AOMEGA	$\square\Omega$	1
ASCTTOR	$\square\mathcal{T}$	1
ADSPLTOR	$\square\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')^{CDE)}$	30

Tabela 3.3: Parte A (14 espinores) do conjunto mínimo  $C_2$  para os espinores que correspondem aos elementos de  $J_2 = \{R^a_{bcd;m_1m_2}, T^a_{bc;m_1m_2m_3}\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 2$ , com os nomes usados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. ind.), que são 116 no caso geral. O d'Alembertiano da derivada covariante totalmente simetrizada é indicado por "AD" no início de um nome.

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. Ind.
D2TPSI	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Psi^{CDEF})$	42
D2PSILTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \psi^{CDEF})$	42
D2TPHI	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Phi_{Z'W'}^{CD})$	25
D2THETA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Theta_{Z'W'}^{CD})$	25
D2PHILTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \phi_{Z'W'}^{CD})$	25
D3SPTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z'}^C \mathcal{T}_{W'}^D)$	25
D3SPPTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z'}^C \mathcal{P}_{W'}^D)$	25
D2SIGMA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Sigma^{CD})$	30
D2BVTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \mathcal{M}^{CD})$	30
D2BVPTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \mathcal{B}^{CD})$	30
DTXI	$\nabla_{(X'}^{(A} \Xi_{Y')}^{BCD})$	30
DXITH	$\nabla_{(X'}^{(A} \mathcal{X}_{Y')}^{BCD})$	30
D2TLAMBDA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Lambda)$	9
D2OMEGA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \Omega)$	9
D2SCTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y')}^B \mathcal{T}$	9
DTSIGM	$\nabla_{(X'}^{(A} \mathcal{U}_{Y')}^B)$	9
DPSIGM	$\nabla_{(X'}^{(A} \mathcal{V}_{Y')}^B)$	9
PSIXITH	$\Upsilon_{ABCD}$	10
BVTSIGM	$\mathcal{F}_{AB}$	6
D3SPLTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z'}^C \mathcal{L}_{W'}^{DEF})$	70

Tabela 3.4: Parte B (20 espinores) do conjunto mínimo  $C_2$  para os espinores que correspondem aos elementos de  $J_2 = \{R_{bcd;m_1m_2}^a, T_{bc;m_1m_2m_3}^a\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 2$ , com os nomes usados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. ind.), que são 490 no caso geral. A derivada covariante totalmente simetrizada de terceira ordem é indicada por “D3” no início de um nome.

elementos de  $C_0$  dados na tab. (3.3), na página 73, e  $C_{2B}$  pelas derivadas totalmente simetrizadas de elementos de  $C_1$  e pelos espinores  $\mathcal{F}_{AB}$  e  $\Upsilon_{ABCD}$  dados na tab. (3.4), na página 74.

Utilizando as relações  $\nabla_{AX'}\square \sim \square\nabla_{AX'}$ , entre o d'Alembertiano e o operador diferencial covariante, obtidas através das eqs. (3.52), nas derivadas covariantes dos elementos do subconjunto  $C_{2A}$ , obtemos que estas derivadas são equivalentes aos d'Alembertianos das derivadas dos elementos de  $C_0$  (cf. tab. (3.1) na página 56), exceto dos elementos dados pelas partes irredutíveis da torção. Em seguida utilizando as relações dadas pelas eqs. (3.34)–(3.36) e eqs. (3.58)–(3.68), podemos mostrar que as partes irredutíveis das derivadas dos elementos de  $C_{2A}$  são equivalentes aos d'Alembertianos dos 21 elementos de  $C_1$ , dados na tab. (3.5) na página 78.

As derivadas covariantes dos elementos do subconjunto  $C_{2B}$  são decompostas nas partes totalmente simetrizadas dadas na na tab. (3.6) na página 79, e em outras partes que são somas simetrizadas cujas parcelas contêm dois tipos de contrações. No primeiro tipo, cada índice contraído pertence a um operador diferencial covariante. Utilizando as eqs. (3.51) ou as eqs. (3.53), podemos mostrar que as parcelas correspondentes ou são algebricamente dependentes de  $I_2$  ou são equivalentes ao d'Alembertiano de um elemento de  $C_1$ . No segundo tipo os índices pertencem a um operador diferencial covariante e a uma das partes irredutíveis da torção ou a um espinor dos itens (2) e (4.b) das definições de  $C_0$  e  $C_1$  nas páginas 55 e 64, respectivamente, como podemos constatar examinando a tab. (3.4) na página 74.

Com relação ao segundo tipo de contração, onde apenas um dos índices pertence a um operador diferencial covariante, podemos utilizar a eq. (3.52) para mover o operador para a direita até que esteja ao lado do espinor cujo índice está contraído. Assim, obtemos as partes envolvendo contrações das derivadas de *primeira* ordem tanto das partes irredutíveis da torção quanto dos espinores dos itens (2) e (4.b) das definições de  $C_0$  e  $C_1$ , respectivamente. Utilizando as relações algébricas entre as partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_0$  e de  $C_1$  dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86) e eqs. (3.91)–(3.93), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci, podemos mostrar que essas derivadas dos elementos do subconjunto  $C_{2B}$  contribuem apenas com as derivadas covariantes totalmente simetrizadas de terceira ordem de  $\psi_{ABCD}$ ,  $\phi_{BCX'Y'}$ ,  $\mathcal{M}_{AB}$ ,  $\mathcal{B}_{AB}$  e  $\mathcal{T}$ , de segunda ordem de  $\Xi_{Y'ABC}$ ,  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$  e  $\mathcal{V}_{X'A}$ , e de primeira ordem de

$\mathcal{F}_{AB}$  e  $\Upsilon_{ABCD}$ , que já fazem parte da tab. (3.6) na página 79.

Finalmente, decompondo as derivadas covariantes de  $\mathcal{F}_{AB}$  e  $\Upsilon_{ABCD}$ , obtemos as partes irreduzíveis envolvendo contrações  $\nabla_{X'}^N \mathcal{F}_{AN}$  e  $\nabla_{Y'}^N \Upsilon_{ABCN}$ , que podem ser expressas em termos de outros escalares de Cartan. A partir das definições de  $\mathcal{F}_{AB}$  e  $\mathcal{U}_{X'A}$  dadas pelas eqs. (3.83)–(3.38), respectivamente, podemos mostrar que

$$\nabla_{X'}^N \mathcal{F}_{AN} = -\nabla_{X'}^N \nabla_{(A} \mathcal{U}_{N)N'} \sim \frac{1}{2} \square \mathcal{U}_{X'A}, \quad (3.96)$$

utilizando as eqs. (3.51)–(3.53). A partir da definição de  $\Upsilon_{ABCD}$  dada pela eq. (3.87), podemos expressar o espinor  $\nabla_{Y'}^N \Upsilon_{ABCN} = \nabla_{Y'}^N \nabla_{(N} \mathcal{X}_{ABC)N'}$  como uma soma de termos da forma  $\nabla_{Y'}^N \nabla_{N'}^N \mathcal{X}_{ABCN'}$  e da forma  $\nabla_{Y'}^N \nabla_{A'}^N \mathcal{X}_{BCNN'}$ . Com o auxílio das identidades de Ricci dadas pelas eqs. (3.51)–(3.53), podemos escrever estes termos como

$$\nabla_{Y'}^N \nabla_{N'}^N \mathcal{X}_{ABCN'} \sim \frac{1}{2} \square \mathcal{X}_{Y'ABC}, \quad (3.97)$$

$$\nabla_{Y'}^N \nabla_{A'}^N \mathcal{X}_{BCNN'} \sim \nabla_{A'}^N \nabla_{Y'}^N \mathcal{X}_{BCNN'}, \quad (3.98)$$

onde o espinor  $\nabla_{Y'}^N \mathcal{X}_{BCNN'}$  pode ser expresso em termos de outros escalares de Cartan através da eq. (3.91). Assim, podemos considerar algebricamente independentes apenas os d'Alembertianos de  $\mathcal{U}_{X'A}$  e de  $\mathcal{X}_{Y'ABC}$ , dados na tab. (3.5) na página 78.

Concluindo, verificamos que as partes irreduzíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_2$ , que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_2$ , podem ser reunidas no conjunto  $C_3 = C_{3A} \cup C_{3B}$  formado pelos subconjuntos  $C_{3A} \equiv \square C_1$  dos d'Alembertianos dos 21 elementos de  $C_1$ , dados tab. (3.5) na página 78, e  $C_{3B} \equiv D C_{2B}$  das derivadas totalmente simetrizadas dos 20 elementos do subconjunto  $C_{2B}$  (cf. tab. (3.4) na página 74), dadas na tab. (3.6) na página 79.

Como ocorreu nos casos anteriores, reunindo os 41 espinores do conjunto  $C_3$  com os espinores dos conjuntos  $C_0$ – $C_3$  podemos definir um conjunto completo mínimo para  $J_3$  de acordo com a seguinte proposição:

**Proposição 3.4** *Os espinores correspondentes dos elementos do conjunto*

$$J_3 = \{R_{bcd;m_1 m_2 m_3}^a, T_{bc;m_1 m_2 m_3 m_4}^a\},$$

*podem ser expressos algebricamente (usando somas, produtos e contrações) em termos dos elementos do conjunto mínimo  $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3$  e dos complexos conjugados desses elementos, onde  $C_0$ ,  $C_1$  e  $C_2$  estão definidos nas páginas 55, 64 e 71, respectivamente, sendo  $C_3$  um conjunto mínimo definido por:*

1. As derivadas covariantes totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_2$ , exceto dos d'Alembertianos:
2. Os d'Alembertianos dos elementos de  $C_1$ ;

de acordo com as tabs. (3.5)–(3.6) nas páginas 78 e 79, respectivamente.

**Demonstração:** Este resultado é obtido através do mesmo procedimento utilizado na proposição (3.3), onde mostramos que  $C_0$ – $C_2$  define um conjunto completo mínimo para  $J_2$ . Assim, precisamos demonstrar que o conjunto  $C_0$ – $C_3$  é completo e mínimo.

A demonstração de que  $C_0$ – $C_3$  é um conjunto completo resulta diretamente das seguintes considerações: (i) os elementos de  $J_3$  são as derivadas covariantes dos elementos de  $J_2$  e, portanto, podem ser expressos algebricamente em função das derivadas dos elementos de  $C_2$ ; (ii) os elementos de  $C_3$  são partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_2$ ; (iii) as partes irredutíveis das derivadas covariantes dos elementos de  $C_2$  não incluídas em  $C_3$  podem ser expressas algebricamente em termos dos elementos dos conjuntos  $C_0$ – $C_3$  através das relações dadas pelas eqs. (3.69)–(3.82), eq. (3.86), eqs. (3.91)–(3.93) e eqs. (3.96)–(3.98), obtidas a partir das identidades de Bianchi e de Ricci.

Para demonstrar que  $C_3$  é um conjunto mínimo precisamos mostrar que seus elementos têm 1064 componentes reais no total, pois este é o número de quantidades reais em  $J_3$  que são algebricamente independentes tanto entre si quanto dos elementos de  $I_2$ , de acordo com a eq. (3.13). A demonstração fica completa com as tabs. (3.5)–(3.6) nas páginas 78 e 79, respectivamente, onde podemos verificar que o número de componentes reais dos elementos de  $C_3$  é igual a 1064.

Prosseguindo com os passos do algoritmo para verificar a equivalência, agora temos que decompor em partes irredutíveis os espinores correspondentes dos elementos do conjunto  $J_4$  das derivadas covariantes de quarta ordem da curvatura e de quinta ordem da torção, obter as partes irredutíveis que são algebricamente independentes dos elementos de  $I_3$  e determinar as relações algébricas que estas partes têm entre si e com os elementos de  $I_3$ .

De acordo com o procedimento que estamos utilizando, precisamos decompor em partes irredutíveis as derivadas covariantes dos elementos de  $C_3$ , pois os elementos de  $J_3$  podem ser expressos em função dessas derivadas. Devido à grande quantidade de elementos em  $C_3$  vamos utilizar uma notação simplificada onde representamos o operador

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. ind.
ADTPSI	$\square \nabla_{X'(A} \Psi_{BCDE})$	24
ADPSILT <small>OR</small>	$\square \nabla_{X'(A} \psi_{BCDE})$	24
ADTPHI	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \Phi^{BC)}_{Y'Z')}$	16
ADT <small>ETA</small>	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \Theta^{BC)}_{Y'Z')}$	16
ADPHILT <small>OR</small>	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \phi^{BC)}_{Y'Z')}$	16
AD2SPT <small>TOR</small>	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \nabla^B_{Y'} \mathcal{T}^C_{Z')}$	16
AD2SPPT <small>TOR</small>	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \nabla^B_{Y'} \mathcal{P}^C_{Z')}$	16
ADSIGMA	$\square \nabla_{X'(A} \Sigma_{BC})$	16
ADBVT <small>TOR</small>	$\square \nabla_{X'(A} \mathcal{M}_{BC})$	16
ADBVP <small>TOR</small>	$\square \nabla_{X'(A} \mathcal{B}_{BC})$	16
ATXI	$\square \Xi_{X'ABC}$	16
AXITH	$\square \mathcal{X}_{Y'ABC}$	16
A2SPL <small>TOR</small>	$\square \square \mathcal{L}_{X'ABC}$	16
ADTLAMBDA	$\square \nabla_{X'A} \Lambda$	4
ADOMEGA	$\square \nabla_{X'A} \Omega$	4
ADSC <small>TOR</small>	$\square \nabla_{X'A} \mathcal{T}$	4
ATSIGM	$\square \mathcal{U}_{X'A}$	4
APSIGM	$\square \mathcal{V}_{X'A}$	4
A2SPT <small>TOR</small>	$\square \square \mathcal{T}_{X'A}$	4
A2SPPT <small>TOR</small>	$\square \square \mathcal{P}_{X'A}$	4
AD2SPL <small>TOR</small>	$\square \nabla_{(X'}^{(A} \nabla^B_{Y'} \mathcal{L}^{CDE)}_{Z')}$	48

Tabela 3.5: Parte A (21 espinores) do conjunto mínimo  $C_3$  para os espinores que correspondem aos elementos de  $J_3 = \{R^a_{bcd;m_1m_2m_3}, T^a_{bc;m_1m_2m_3m_4}\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 3$ , com os nomes usados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. Ind.), que são 300 no caso geral. Os d'Alembertianos do d'Alembertiano e da derivada totalmente simetrizada de segunda ordem são indicados, respectivamente, por "A2" e "AD2" no início de um nome.

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Comp. Ind.
D3TPSI	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Psi^{DEFG})$	64
D3PSILTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \psi^{DEFG})$	64
D3TPHI	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Phi^{DE}_{S'W'})$	36
D3THETA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Theta^{DE}_{S'W'})$	36
D3PHILTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \phi^{DE}_{S'W'})$	36
D4SPTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \nabla_{S'}^D \mathcal{T}^E_{W'})$	36
D4SPPTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \nabla_{S'}^D \mathcal{P}^E_{W'})$	36
D3SIGMA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Sigma^{DE})$	48
D3BVTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \mathcal{M}^{DE})$	48
D3BVPTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \mathcal{B}^{DE})$	48
D2TXI	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \Xi_{Z')}^{CDE})$	48
D2XITH	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \mathcal{X}_{Z')}^{CDE})$	48
D3TLAMBDA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Lambda)$	16
D3OMEGA	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \Omega)$	16
D3SCTTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \mathcal{T}$	16
D2TSIGM	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \mathcal{U}_{Z')}^C)$	16
D2PSIGM	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \mathcal{U}_{Z')}^C)$	16
DPSIXITH	$\nabla_{X'}^{(A} \Upsilon_{BCDE})$	24
BVTSIGM	$\nabla_{X'}^{(A} \mathcal{F}_{BC})$	16
D4SPLTOR	$\nabla_{(X'}^{(A} \nabla_{Y'}^B \nabla_{Z')}^C \nabla_{S'}^D \mathcal{L}_{W'}^{EFG})$	96

Tabela 3.6: Parte B (20 espinores) do conjunto mínimo  $C_3$  para os espinores que correspondem aos elementos de  $J_3 = \{R^a_{bcd;m_1m_2m_3}, T^a_{bc;m_1m_2m_3m_4}\}$ , usado no algoritmo para testar a equivalência quando  $q = 3$ , com os nomes usados em *TCLASSI* e o número de componentes reais (Comp. ind.), que são 764 no caso geral. A derivada covariante totalmente simetrizada de quarta ordem é indicada por “D4” no início de um nome.

diferencial covariante por  $\nabla$  e os conjuntos das derivadas dos elementos de  $C_{3A}$  e  $C_{3B}$ , por exemplo, como  $\nabla C_{3A} \equiv \nabla(\square C_1)$  e  $\nabla C_{3B} \equiv \nabla(D C_{2B})$ , respectivamente.

Utilizando a relação  $\nabla \square \sim \square \nabla$  nos elementos do conjunto  $\nabla C_{3A}$  obtemos que  $\nabla C_{3A} \equiv \nabla(\square C_1) \sim \square(\nabla C_1)$ , onde  $\square(\nabla C_1)$  é o conjunto dos d'Alembertianos das derivadas covariantes dos elementos de  $C_1$ . Considerando que os elementos do conjunto  $\nabla C_1$  podem ser expressos em termos dos elementos de  $C_2$ , de acordo com a proposição 3.3, obtemos que  $\nabla C_{3A} \sim \square C_2$ .

Através de um procedimento análogo ao utilizado com as derivadas de  $C_{2B}$  obtemos, a menos de d'Alembertianos de elementos de  $C_2$ , a relação  $\nabla C_{3B} \sim (D C_{3B})$ , onde  $D C_{3B}$  é o conjunto das derivadas totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_{3B}$ . Assim, obtemos que as partes irredutíveis de  $\nabla C_3$  que são algebricamente independentes entre si e dos elementos de  $I_3$  definem um conjunto  $C_4 \equiv C_{4A} \cup C_{4B}$  que é formado pelos subconjuntos  $C_{4A} \equiv \square C_2$  dos d'Alembertianos de  $C_2$  e  $C_{4B} \equiv D C_{3B}$  das derivadas totalmente simetrizadas dos elementos de  $C_{3B}$ .

Continuando com o mesmo procedimento para os outros valores  $q \geq 3$  usados no algoritmo, podemos mostrar que são obtidos conjuntos  $C_q$  de partes irredutíveis independentes definidos pelos d'Alembertianos dos elementos de  $C_{(q-2)}$  e pelas derivadas totalmente simetrizadas dos elementos do subconjunto  $C_{(q-1)B}$  de  $C_{(q-1)}$ , isto é,

$$C_q \equiv \square C_{(q-2)} \cup D C_{(q-1)B}. \quad (3.99)$$

Na próxima seção estes resultados serão utilizados para definir um conjunto completo mínimo para os escalares de Cartan de ordem  $m \geq 0$ .

### 3.4 Um conjunto mínimo de escalares de Cartan

Nesta última seção, utilizamos os resultados obtidos nas seções anteriores para construir explicitamente um conjunto com o número mínimo de escalares de Cartan de ordem  $q$ , onde  $0 \leq q \leq m$ , a partir dos quais todos os escalares de Cartan de ordem  $m$  podem ser obtidos através de operações algébricas, isto é, um conjunto completo mínimo para os escalares de Cartan de ordem  $m$  [22, 23, 29].

O conjunto mínimo  $C_q$  será definido utilizando a hipótese da indução de duas maneiras. Em primeiro lugar, analisando as definições dos conjuntos  $C_0-C_3$  dadas na seção anterior e as relações entre os conjuntos  $C_q$  para  $q \geq 3$  dadas pelas eqs. (3.99), verificamos que se

$C_{(q-2)}$  é um conjunto mínimo então podemos definir parte dos elementos do conjunto  $C_q$  a partir dos d'Alembertianos dos elementos do conjunto  $C_{(q-2)}$ , para  $q \geq 2$ . Em segundo lugar, se os escalares de Cartan de ordem  $k$  podem ser expressos algebricamente em função dos elementos dos conjuntos mínimos  $C_k$ , para todo  $0 \leq k \leq q$ , então podemos determinar as relações entre os elementos de  $J_q$  e de  $I_{(q-1)}$  utilizando a definição de equivalência, pois a equivalência entre escalares de Cartan de ordem  $q$  está definida a menos de escalares de Cartan de ordem  $k$ , onde  $0 \leq k \leq q$ . Feitas estas considerações, definimos um conjunto completo mínimo  $C_q$ , onde  $0 \leq q \leq m$ , para os escalares de Cartan de ordem  $m$  de acordo com o seguinte teorema:

**Teorema 3.1** *Os espinores correspondentes das derivadas covariantes de ordem  $m$  da curvatura e de ordem  $(m + 1)$  da torção, isto é, dos elementos do conjunto*

$$J_m = \{R^a{}_{bcd;k_1\dots k_m}, T^a{}_{bc;k_1\dots k_{(m+1)}}\},$$

*podem ser expressos algébricamente em termos dos elementos dos conjuntos  $C_q$  e seu complexo conjugado  $\bar{C}_q$ , para  $0 \leq q \leq m$ , onde  $C_q$  é um conjunto mínimo para estas derivadas definido por:*

1. *As partes irredutíveis da torção (para  $q = 0$ ):*

(a)  $\mathcal{T}_{X'A}$ , (b)  $\mathcal{P}_{X'A}$ , (c)  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ ;

2. *As derivadas totalmente simetrizadas de ordem  $q$  de:*

(a) i.  $\Psi_{ABCD}$ ; ii.  $\psi_{ABCD} \equiv \nabla_{N'(A}\mathcal{L}^{N'}{}_{BCD)}$ ;

(b) i.  $\Phi_{ABX'Y'}$ , ii.  $\Theta_{ABX'Y'}$ , iii.  $\phi_{ABX'Y'} \equiv \frac{1}{2}[\nabla_{N(X'}\mathcal{L}^{N'}{}_{Y')AB} + \nabla_{N'(A}\bar{\mathcal{L}}^{N'}{}_{B)X'Y'}]$ ;

(c) i.  $\Sigma_{AB}$ , ii.  $\mathcal{M}_{AB} \equiv \nabla_{N'(A}\mathcal{T}^{N'}{}_{B)}$ , iii.  $\mathcal{B}_{AB} \equiv \nabla_{N'(A}\mathcal{P}^{N'}{}_{B)}$ ;

(d) i.  $\Lambda$ , ii.  $\Omega$ , iii.  $\mathcal{T} \equiv \nabla_{NN'}\mathcal{T}^{NN'}$ ;

3. *As derivadas totalmente simetrizadas de ordem  $(q + 1)$  de:*

(a)  $\mathcal{T}_{X'A}$ , (b)  $\mathcal{P}_{X'A}$ , (c)  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ ;

4. *Para  $q \geq 1$ :*

(a) *os d'Alembertianos das partes irredutíveis da torção (para  $q = 1$ ):*

i.  $\square\mathcal{T}_{X'A}$ , ii.  $\square\mathcal{P}_{X'A}$ , iii.  $\square\mathcal{L}_{X'ABC}$ ;

(b) a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(q - 1)$  de:

$$\begin{aligned} & i. \mathcal{U}_{AX'} \equiv \frac{1}{2}(\nabla^N_{X'}\Sigma_{AN} + \nabla^{N'}_A\bar{\Sigma}_{X'N'}), \quad ii. \mathcal{V}_{AX'} \equiv \frac{i}{2}(\nabla_{NX'}\Sigma^N_A - \nabla_{N'A}\bar{\Sigma}^{N'}_{X'}), \\ & iii. \Xi_{ABCX'} \equiv \nabla^N_{X'}\Psi_{ABCN}, \quad iv. \mathcal{X}_{ABCX'} \equiv \nabla^{N'}_{(A}\Theta_{BC)N'X'}; \end{aligned}$$

5. Para  $q \geq 2$ :

(a) a derivada totalmente simetrizada de ordem  $(q - 2)$  de:

$$i. \Upsilon_{ABCD} \equiv \nabla_{N'(A}\mathcal{X}^{N'}_{BCD)}, \quad ii. \mathcal{F}_{AB} \equiv \nabla_{N'(A}\mathcal{U}^{N'}_{B)};$$

(b) os d'Alembertianos  $\square Q \equiv \nabla^{NN'}\nabla_{NN'}Q$  de todos os elementos  $Q$  do conjunto  $C_{(q-2)}$ , exceto os d'Alembertianos das partes irredutíveis da torção para  $q = 2$ .

**Demonstração:** O resultado é obtido por indução, seguindo o mesmo procedimento utilizado no caso particular das variedades Riemannianas [28]. Consideremos  $m = 0$ . Como os elementos de  $I_0$  são expressos algebricamente em termos dos elementos de  $C_0$ , de acordo com a proposição 3.1, concluímos que os elementos de  $J_0$  também são expressos algebricamente em termos dos elementos de  $C_0$ , pois  $J_0$  é um subconjunto de  $I_0$ . Portanto, o teorema está demonstrado para  $m = 0$ .

Consideremos agora  $m \geq 1$ . Como conseqüência do resultado para  $m = 0$ , podemos considerar todos os elementos de  $J_m$  podem ser algebricamente expressos em termos das derivadas covariantes de ordem  $m$  dos elementos de  $C_0$ , uma vez que os elementos de  $J_m$  são as derivadas de ordem  $m$  dos elementos de  $J_0$ . Portanto, dados os conjuntos  $C_q$ , onde  $0 \leq q < m$ , precisamos demonstrar que os elementos de  $C_m$  são suficientes para expressar algébricamente as derivadas independentes de ordem  $m$  dos elementos de  $C_0$ .

Decompondo em partes irredutíveis as derivadas de ordem  $m$  dos elementos de  $C_0$  obtemos uma soma contendo uma parte totalmente simetrizada e outras partes, definidas através de contrações, dadas por produtos do espinor métrico  $\varepsilon_{AB}$  (ou do seu complexo conjugado) com derivadas de ordem  $m$  com um número menor de índices livres totalmente simetrizados. Entretanto, como as partes totalmente simetrizadas das derivadas de ordem  $m$  dos elementos de  $C_0$  dados por partes irreduzíveis da curvatura e da derivada covariante da torção já estão incluídas nos itens (2), (3), (4) e (5.a) da definição de  $C_m$  acima, temos que considerar apenas as partes envolvendo contrações. Como estas partes são somas simetrizadas de parcelas contendo contrações, são estas parcelas que devemos examinar.

Consideremos, inicialmente, as parcelas onde os índices contraídos pertencem a um par

de operadores diferenciais covariantes. Se os outros índices do par de operadores não estiverem contraídos entre si, então estes termos podem ser ignorados como consequência das eqs. (3.51). Caso os índices não estejam contraídos, então o par de operadores diferenciais covariantes pode ser convertido em um d'Alembertiano, utilizando as eqs. (3.53). Depois, utilizando as eqs. (3.52), podemos passar o d'Alembertiano para a esquerda de todos os outros operadores diferenciais covariantes de acordo com

$$\begin{aligned} \underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \nabla_{N'}^B \nabla^{C N'} \cdots \nabla_{Y'}^D)}_m Q &\sim \underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \varepsilon^{BC} \square \cdots \nabla_{Y'}^D)}_{(m-2)} Q, \\ \underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \varepsilon^{BC} \square \cdots \nabla_{Y'}^D)}_{(m-2)} Q &\sim \varepsilon^{BC} \square \underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \nabla_{Y'}^D)}_{(m-2)} Q, \end{aligned} \quad (3.100)$$

de modo que o termo pode ser incluído no item (5.b) da definição de  $C_m$ .

Para completar a demonstração falta mostrar que também estão incluídos em  $C_m$  as parcelas onde a única contração existente é entre índices de um operador diferencial covariante e índices de um elemento de  $C_0$ , que não pertencem a um operador diferencial covariante. Usando a relação dada pela eq. (3.52), o operador diferencial pode ser trazido para a direita até estar ao lado do elemento de  $C_0$ . Representando esse elemento de  $C_0$  por  $Q^N$ , onde apenas o índice que está contraído com o operador diferencial está indicado, podemos representar esta operação como

$$\underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \nabla_{Y' N} \cdots \nabla_{Z'}^D)}_m Q^N \sim \underbrace{(\nabla_{X'}^A \cdots \nabla_{Z'}^D)}_{(m-1)} \nabla_{Y' N} Q^N. \quad (3.101)$$

Dessa forma, obtivemos a derivada covariante de ordem  $(m-1)$  de  $\nabla_{Y' N} Q^N$ , isto é, da derivada covariante de primeira ordem dos elementos de  $C_0$ .

A partir da definição dos elementos de  $C_0$  dada na tab. (3.1), obtemos que os espinores  $\nabla_{Y' N} Q^N$  na eq. (3.101) acima representam as partes envolvendo contrações das derivadas covariantes dos seguintes elementos:  $\Psi_{ABCD}$ ,  $\psi_{ABCD}$ ,  $\Phi_{ABX'Z'}$ ,  $\Theta_{ABX'Z'}$ ,  $\phi_{ABX'Z'}$ ,  $\Sigma_{AB}$ ,  $\mathcal{M}_{AB}$ ,  $\mathcal{B}_{AB}$ ,  $\mathcal{T}_{X'A}$ ,  $\mathcal{P}_{X'A}$  e  $\mathcal{L}_{X'ABC}$ , tendo em vista que os escalares não contêm índices para serem contraídos. As partes envolvendo contrações das derivadas destes espinores foram obtidas e as relações entre as mesmas determinadas na seção anterior, onde mostramos que eram independentes (veja a proposição 3.2, na página 64) apenas as derivadas dadas pelos seguintes espinores:  $\Xi_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{X}_{X'ABC}$ ,  $\square \mathcal{L}_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A} \square \mathcal{T}_{X'A}$  e  $\square \mathcal{P}_{X'A}$ . Portanto, precisamos demonstrar agora que os elementos de  $C_m$  são suficientes para expressar algébricamente as derivadas de ordem  $(m-1)$  deste segundo conjunto de espinores.

Utilizando as eqs. (3.100) podemos incluir as derivadas covariantes de ordem  $(m - 1)$  dos d'Alembertianos das partes irredutíveis da torção no item (5.b) da definição de  $C_m$ . Como as partes totalmente simetrizadas das derivadas covariantes de ordem  $(m - 2)$  dos espinores  $\Xi_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{X}_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A}$  já estão incluídas no item (4) da definição de  $C_m$ , precisamos examinar apenas as partes envolvendo contrações. Neste caso, seguindo o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, verificamos que temos que considerar somente os termos contendo apenas contrações entre índices de um operador de diferenciação e índices de cada um dos sete espinores listados acima.

As partes envolvendo contrações das derivadas covariantes dos espinores  $\Xi_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{X}_{X'ABC}$ ,  $\mathcal{U}_{X'A}$ ,  $\mathcal{V}_{X'A}$  foram obtidas e as relações entre as mesmas determinadas na seção anterior, onde mostramos que eram independentes (veja a proposição 3.3, na página 71) apenas as derivadas dadas pelos espinores  $\Upsilon_{ABCD}$  e  $\mathcal{F}_{AB}$ . Portanto, precisamos demonstrar que os elementos de  $C_m$  são suficientes para expressar algebricamente as derivadas de ordem  $(m - 2)$  destes novos espinores. Como as partes totalmente simetrizadas desta derivada já estão incluídas no item (5.a) da definição de  $C_m$ , precisamos examinar apenas as partes envolvendo contrações. Assim, seguindo o mesmo raciocínio, concluímos que temos que considerar somente os termos contendo apenas contrações entre índices de um operador de diferenciação e índices de cada um destes espinores. Entretanto, de acordo com a proposição 3.4 (na página 76), demonstrada na seção anterior, verificamos que não existem mais novos espinores independentes.

Concluída a demonstração de que todas as derivadas de ordem  $m$  da curvatura e de ordem  $(m + 1)$  da torção podem ser expressas algebricamente em termos dos elementos do conjunto  $C_q$ ,  $0 \leq q \leq m$ , resta provar que  $C_m$  é um conjunto mínimo. Este resultado será obtido por indução, utilizando apenas um argumento envolvendo as contagens das quantidades reais algebricamente independentes que existem em  $J_m$  e em  $C_m$ , que devem dar o mesmo resultado para que  $C_m$  seja um conjunto mínimo.

O número de quantidades algebricamente independentes existente em  $J_m$  foi determinado na segunda seção deste capítulo, sendo expresso em termos de  $m$  por  $5m^3 + 46m^2 + 133m + 116$ , de acordo com a eq. (3.13).

Supondo que  $C_{(m-2)}$  seja um conjunto mínimo, isto é, tenha  $5m^3 + 16m^2 + 9m - 6$  quantidades algebricamente independentes, vamos demonstrar que  $C_m$  também é um conjunto mínimo.

Como os elementos de  $C_m$  são algebricamente independentes, precisamos apenas calcular o número de componentes reais de cada um deles. Calculando o número de componentes reais dos elementos dados nos itens (1)-(4) e (5.a) da definição de  $C_m$ , podemos organizar os resultados obtidos em uma lista, onde as derivadas totalmente simetrizadas de ordem  $m$  são representadas por  $\nabla^m$  e os os números de componentes independentes são dados em função de  $m$ , de acordo com:

$$\begin{array}{lll}
 \nabla^m \Psi_{ABCD}, & 2(m+1)(m+5) & = 2m^2 + 12m + 10, \\
 \nabla^m \psi_{ABCD}, & 2(m+1)(m+5) & = 2m^2 + 12m + 10, \\
 \nabla^m \Phi_{ABX'Z'}, & (m+3)^2 & = m^2 + 6m + 9, \\
 \nabla^m \Theta_{ABX'Z'}, & (m+3)^2 & = m^2 + 6m + 9, \\
 \nabla^m \phi_{ABX'Z'}, & (m+3)^2 & = m^2 + 6m + 9, \\
 \nabla^m \Lambda, & (m+1)^2 & = m^2 + 2m + 1, \\
 \nabla^m \Omega, & (m+1)^2 & = m^2 + 2m + 1, \\
 \nabla^m \tau, & (m+1)^2 & = m^2 + 2m + 1, \\
 \nabla^m \Sigma_{AB}, & 2(m+1)(m+3) & = 2m^2 + 8m + 6, \\
 \nabla^m \mathcal{B}_{AB}, & 2(m+1)(m+3) & = 2m^2 + 8m + 6, \\
 \nabla^m \mathcal{M}_{AB}, & 2(m+1)(m+3) & = 2m^2 + 8m + 6, \\
 \nabla^{(m+1)} \mathcal{T}_{AX'}, & (m+3)^2 & = m^2 + 6m + 9, \\
 \nabla^{(m+1)} \mathcal{P}_{AX'}, & (m+3)^2 & = m^2 + 6m + 9, \\
 \nabla^{(m+1)} \mathcal{L}_{ABCX'}, & 2(m+3)(m+5) & = 2m^2 + 16m + 30, \\
 \nabla^{(m-1)} \Xi_{ABCX'}, & 2(m+1)(m+3) & = 2m^2 + 8m + 6, \\
 \nabla^{(m-1)} \mathcal{X}_{ABCX'}, & 2(m+1)(m+3) & = 2m^2 + 8m + 6, \\
 \nabla^{(m-1)} \mathcal{U}_{AX'}, & (m+1)^2 & = m^2 + 2m + 1, \\
 \nabla^{(m-1)} \mathcal{V}_{AX'}, & (m+1)^2 & = m^2 + 2m + 1, \\
 \nabla^{(m-2)} \mathcal{F}_{AB}, & 2(m-1)(m+1) & = 2m^2 - 2, \\
 \nabla^{(m-2)} \Upsilon_{ABCD}, & 2(m-1)(m+3) & = 2m^2 + 4m - 6.
 \end{array}$$

Somando os números dados na lista acima, obtemos um total de  $30m^2 + 124m + 122$  componentes reais. Acrescentando agora o número de componentes reais dos elementos dados no item (5.b) da definição de  $C_m$ , isto é, o total de quantidades independentes existentes no conjunto mínimo  $C_{(m-2)}$ , obtemos como resultado final que  $C_m$  tem  $5m^3 + 46m^2 + 133m + 116$  quantidades reais algebricamente independentes. Portanto, mostramos

que o conjunto  $C_m$  é mínimo, completando a demonstração do teorema.

Quando a torção for identicamente nula, o conjunto  $C_q$ , para  $0 \leq q \leq m$ , se reduz ao conjunto completo mínimo obtido por e Aman e MacCallum [28] para variedades Riemanninas, apresentado no capítulo 1.

## Capítulo 4

# Utilizando *TCLASSI* para calcular em espaços-tempos com torção

### 4.1 Introdução

Neste capítulo iniciamos a discussão dos resultados obtidos na terceira etapa do projeto de tese, que tem como objetivo a implementação algébrico-computacional dos resultados teóricos apresentados nos capítulos 2 e 3. Esta implementação foi realizada através de um conjunto de programas que denominamos *TCLASSI* [22]–[24], escrito utilizando o sistema de computação algébrica *SHEEP/CLASSI* [17].

O pacote *TCLASSI* constitui uma extensão de *CLASSI* que possibilita não só calcular tensores e espinores em variedades de Riemann-Cartan, mas também testar a equivalência de espaços-tempos com torção. *TCLASSI* pode ser usado simultaneamente com *CLASSI*, pois não altera nenhuma das quantidades calculadas usando *CLASSI*.

Neste capítulo apresentamos os módulos de *TCLASSI* utilizados para o cálculo de tensores e espinores em variedades de Riemann-Cartan, bem como para a realização de classificações algébricas. Os módulos restantes serão apresentados no próximo capítulo, quando discutiremos a implementação do algoritmo para testar a equivalência de variedades de Riemann-Cartan e os programas utilizados para testar *TCLASSI*.

Na apresentação de *TCLASSI* que faremos a seguir estamos pressupondo o conhecimento básico do sistema *SHEEP/CLASSI*, incluindo a entrada dos dados de uma métrica e a preparação de um *arquivo de métrica*, o uso das listas de substituições e dos comandos *TENVAL* que atuam em tensores e espinores. Uma apresentação didática de

*SHEEP/CLASSI* pode ser encontrada em [17].

Na segunda seção mostramos como utilizar os módulos de *TCLASSI* que possibilitam calcular tensores definidos em uma variedade de Riemann-Cartan, usando bases de coordenadas ou de tetradas. Na terceira seção, apresentamos os módulos utilizados para calcular os espinores correspondentes dos tensores referidos na seção anterior, bem como os coeficientes de spin e os espinores dos conjuntos mínimos de escalares de Cartan de ordem  $q \leq 3$ , definidos no capítulo 3. Finalmente, na quarta seção, abordamos os módulos que implementam as classificações algébricas de tensores com as mesmas simetrias dos tensores de Weyl e de Ricci da TRG, bem com de vetores e de bivectores.

Algumas soluções exatas das equações de campo das TGT são utilizadas para exemplificar os recursos de cálculo de *TCLASSI*. Os arquivos de métrica-torção com os dados de entrada para essas soluções estão no diretório `tmetrics` do disquete em anexo e os seus conteúdos estão listados no apêndice C. O código fonte e a imagem compilada dos módulos de *TCLASSI* estão nos diretórios `tclasrc` e `tclabin`, respectivamente.

A fim de que os programas de *TCLASSI* possam ser acessados a partir de qualquer diretório, é necessário incluir no arquivo `classi.ini`, que é carregado automaticamente toda vez que *CLASSI* é executado, a indicação da localização ("path") dos diretórios `tclasrc`, `tclabin` e `tmetrics` (com os arquivos de métrica-torção). Quando eles forem subdiretórios do diretório que contém a imagem compilada de *CLASSI* (geralmente `C:\SHEEP\SHP` no MS-DOS), esta indicação pode ser feita com o comando (`ADDSUBDIRS MYTOPDIR!* '("TCLABIN" "TCLASRC" "TMETRICS")`). Veja [17] para maiores detalhes.

A maneira de executar o sistema *SHEEP/CLASSI* depende da implementação utilizada. Em geral, no MS-DOS ou em UNIX o sistema é executado através do comando `classi`. Consideremos que o sistema *SHEEP/CLASSI* esteja carregado e pronto para receber comandos, o que é indicado pelo sinal de prontidão ("*prompt*") `SHP>`. Os comandos de *SHEEP/CLASSI* iniciam e terminam com um parêntesis e são digitados nas linhas com o sinal `SHP>`, usando letras maiúsculas ou minúsculas. A resposta do sistema é dada nas linhas seguintes.

Os resultados principais deste capítulo foram publicados [22]–[24] e um trabalho está sendo escrito em colaboração [25] sobre a equivalência de soluções das TGT na prática.

## 4.2 Cálculos de tensores

Nesta seção mostramos como calcular os tensores de uma variedade de Riemann-Cartan que são geralmente utilizados nas TGT. Usando *TCLASSI* podemos calcular a conexão, a contorção, o tensor de curvatura e as partes irredutíveis da curvatura e da torção em uma base de coordenadas ou de *tétradas*, isto é, referenciais não-holonômicos onde a métrica tem componentes constantes.

Os nomes dos tensores para o usuário (externamente) são os mesmos, não importando se a base é de coordenadas ou de *tétradas*. Embora internamente os nomes sejam diferentes, o sistema seleciona automaticamente o nome interno apropriado para cada tipo de base. O tensor de torção, por exemplo, é denominado TOR para o usuário, mas internamente é TORC ou TORF se estiver sendo calculado em uma base de coordenada ou de *tétradas*, respectivamente. Daqui em diante, quando nos referirmos a um tensor ou espinor daremos entre parêntesis o nome correspondente utilizado em *TCLASSI*.

Os tensores que podem ser calculados usando *TCLASSI* estão dados na tab. (4.2) na página 90. Os mesmos tensores podem ser calculados em uma base de coordenadas ou de *tétradas*. Devido à grande variedade de convenções e notações na literatura, na tab. (4.2) constam os nomes usados em *TCLASSI* juntamente com as definições dos tensores e as *convenções* utilizadas. Maiores detalhes podem ser encontrados no apêndice A. Todos os tensores podem ser calculados em uma variedade de Riemann-Cartan de dimensão  $n$  qualquer, com exceção dos duais da torção TORST e da curvatura TRIEST e dos tensores dependentes dos mesmos PTOR, LTOR, PTRIC, SPTRIC, PTRSCL e CWEYL, que estão implementados apenas para  $n = 4$ .

Os cálculos em uma base de *tétradas* são realizados utilizando os módulos TWEYLTF, TORSION e ITORSION. Usando TORSION podemos calcular todos os tensores dados na tab. (4.2), exceto os tensores de Weyl (TWEYL) e de Weyl-Cartan (CWEYL) que são calculados usando TWEYLTF. O módulo TWEYLTF carrega TORSION, que carrega o módulo ITORSION que implementa a entrada de dados para a torção. Da mesma forma, os cálculos em uma base de coordenadas são feitos usando os módulos TWEYLTC e TCORD. A entrada dos dados da torção está definida em TCORD, que carrega o módulo CORD de *SHEEP* para a entrada dos dados da métrica.

Como o pacote *TCLASSI* não redefine nenhum dos tensores que são calculados em *CLASSI*, podemos usar *CLASSI* para calcular um tensor considerando apenas a métrica

Nome em <i>TCLASSI</i>	Tensor	Nome
FORMSU ( <i>CLASSI</i> )	$W^a = Z^a_{\mu} dx^{\mu}$	base de tétradas
DS2 ( <i>CLASSI</i> )	$ds^2 = H_{ab} W^a W^b$	elemento de linha
TOR	$T^a_{bc}$	torço
TORST	$T^{*a}_{bc} = \frac{1}{2} \eta_{bc}^{kl} T^a_{kl}$	dual da torço
TTOR	$T_c = T^a_{ac}$	traço da torço
TTORSQ	$T^2 = H^{ab} T_a T_b$	norma de $T_a$ ao quadrado
PTOR	$P_c = T^{*a}_{ac}$	pseudo-traço da torço
PTORSQ	$P^2 = H^{ab} P_a P_b$	norma de $P_a$ ao quadrado
LTOR	$L^a_{cd} = T^a_{cd} - \frac{2}{3} \delta^a_{[c} T_{d]} + \frac{1}{3} \eta^{an}_{cd} P_n$	tensor de Lanczos da torço
CONTOR	$K_{acd} = \frac{1}{2} (T_{cad} + T_{dac} - T_{acd})$	contor�o
LIE ( <i>CLASSI</i> )	$C^a_{bc} = 2 \partial_{[\nu} Z^a_{\mu]} Z_b^{\mu} Z_c^{\nu}$	objeto de não-holonomia
GAM ( <i>CLASSI</i> )	$\gamma_{abc} = \frac{1}{2} (C_{cab} + C_{bac} - C_{abc})$	conexão riemanniana
TGAM	$\Gamma_{abc} = \gamma_{abc} + K_{abc}$	conexão de Riemann-Cartan
TGAMU	$\Gamma^a_{bc} = H^{ak} \Gamma_{kbc}$	conexão de Riemann-Cartan
TRIE	$R_{abcd} = Z_c^{\mu} \partial_{\mu} \Gamma_{abd} - Z_d^{\mu} \partial_{\mu} \Gamma_{abc} + \Gamma_{akc} \Gamma^k_{bd} - \Gamma_{akd} \Gamma^k_{bc} - \Gamma_{abk} C^k_{cd}$	curvatura de Riemann-Cartan (RC)
TRIC	$R_{ab} = H^{cd} R_{acbd}$	Ricci de RC
TRSCL	$R = H^{ab} R_{ab}$	escalar de curvatura de RC
STRIC	$S_{ab} = R_{(ab)} - \frac{1}{4} H_{ab} R$	$R_{ab}$ simétrico sem tra�o
ATRIC	$A_{ab} = R_{[ab]}$	$R_{ab}$ anti-simétrico
TRiest	$R^*_{abcd} = \frac{1}{2} \eta_{cd}^{kl} R_{abkl}$	dual da curvatura
PTRIC	$P_{ob} = H^{cd} R^*_{acbd}$	pseudo-tensor de Ricci
PTRSCL	$P = H^{ab} P_{ab}$	pseudo-escalar de curvatura
SPTRIC	$Q_{ab} = P_{(ab)} - \frac{1}{4} H_{ab} P$	$P_{ab}$ simétrico sem traço
TWEYL	$W_{abcd} = R_{abcd} - R_{b[c} H_{d]a} + R_{a[c} H_{d]b} + \frac{1}{3} R H_{d[a} H_{b]c}$	Weyl de RC
CWEYL	$C_{abcd} = W_{abcd} - \eta^n_{ca[db} Q_{a]n} + \frac{1}{6} \eta_{abcd} P$	Weyl-Cartan

Tabela 4.1: Tensores de que podem ser calculados em bases de tétradas (coordenadas) usando os módulos TORSION e TWEYLTF (TCORD e TWEYLTC) de *TCLASSI*, onde  $\eta^{0123} = \eta^{[0123]} = 1/\sqrt{-\det(H_{ab})}$ . FORMSU, DS2, LIE e GAM estão implementados em *CLASSI* [17].

e depois usar *TCLASSI* para calcular o mesmo tensor incluindo também a torção. Geralmente, para os tensores que são definidos tanto nas TGT quanto na TRG, os nomes em *TCLASSI* diferem dos nomes correspondentes em *CLASSI* apenas pela letra “T” inicial. O tensor de curvatura, por exemplo, é denominado RIE em *CLASSI* e TRIE em *TCLASSI*.

Para realizar cálculos em uma variedade de Riemann-Cartan precisamos entrar com os dados da métrica e da torção. Da mesma forma que na TRG, podemos entrar com esses dados interativamente, passo a passo, ou então carregando um arquivo contendo os mesmos. Esta última opção evita a necessidade de digitar os dados da métrica e da torção toda vez que for preciso realizar algum cálculo relativo ao espaço-tempo em apreço.

Considerando que a entrada de dados em *TCLASSI* difere da utilizada em *CLASSI* apenas pelos dados referentes à torção, podemos preparar *arquivos de métrica-torção* de uma forma bastante simples a partir de arquivos de métrica do diretório *metrics* (distribuído junto com *CLASSI*), apenas acrescentando os comandos para carregar os módulos de *TCLASSI* utilizados e os comandos que introduzem os dados da torção. Quando uma transformação de díada for utilizada (cf. seção 4.3, p. 97) o módulo TDYTRSP de *TCLASSI* também deve ser carregado, para transformar o tensor de Lanczos da torção (LTOR).

A seguir utilizamos duas soluções exatas das TGT para exemplificar tanto a entrada de dados quanto o cálculo de tensores em uma base de coordenadas e de tétradas, respectivamente. A entrada desses dados é realizada utilizando os comandos de *SHEEP/CLASSI* dados na seção 1.6 (veja também [17]).

Consideremos inicialmente o cálculo de tensores em uma *base de coordenadas*, utilizando uma solução exata das equações de campo de algumas TGT obtida por Adamowicz [64], que representa ondas planas. A métrica e a torção dessa solução são dadas em um sistema de coordenadas  $(x^\mu) = (v, u, x, y)$ , respectivamente, por

$$ds^2 = 2H du^2 + 2dudv - dx^2 - dy^2, \quad (4.1)$$

$$T^1_{02} = D, \quad T^1_{03} = F, \quad (4.2)$$

onde  $D = D(u)$ ,  $F = F(u)$  são funções arbitrárias e  $H = H(u, x, y)$  é definida em termos das funções arbitrárias  $A = A(u)$  e  $B = B(u)$  de acordo com

$$H = \frac{1}{2} A(x^2 - y^2) + Bxy. \quad (4.3)$$

Os dados de entrada desta solução para cálculos em uma base de coordenadas estão no arquivo *twave.crd* (veja listagem na p. 208).

Os *dados de entrada* para o cálculo de tensores em uma base de coordenadas são os componentes  $T^\alpha_{\mu\nu}$  (TOR) da torção e  $g_{\mu\nu}$  (GDD) da métrica. A entrada dos dados da métrica é realizada da mesma maneira que em *SHEEP*, pois é definida pelo módulo CORD de *SHEEP*. Lembramos que, neste caso, *SHEEP* não define a assinatura da métrica. A entrada dos dados da torção está definida no módulo TCORD e pode ser realizada conforme as maneiras apresentadas a seguir.

Apesar da torção ter 24 componentes independentes no caso geral, o número desses componentes não-nulos fica bastante reduzido quando a torção admite um grupo de simetria. Por exemplo, existem apenas 2 componentes não-nulos na solução de ondas planas dada pelas eqs. (4.1)–(4.2), que tem um grupo de simetria com cinco parâmetros  $G_5$  [64]. Para entrar com os dados dessa torção, primeiro atribuímos o valor zero para *todos* os componentes da torção com o comando (ZEROINIT TOR). Em seguida introduzimos os valores dos componentes não-nulos com o comando (RPL TOR 1 0 2 TOR 1 0 3)D\$F\$.

Uma vez realizada a entrada dos dados da métrica e da torção, podemos utilizar os diversos recursos de cálculo disponíveis em *TCLASSI* para investigar as propriedades de um espaço-tempo de Riemann-Cartan.

Podemos verificar que a torção da solução de ondas planas dada pelas eqs. (4.1)–(4.2) tem o traço  $T_\mu$  (TTOR) e o pseudo-traço  $P_\mu$  (PTOR) nulos. Apenas o tensor de Lanczos  $L^\alpha_{\mu\nu}$  (LTOR) da torção é diferente de zero. Para realizar estes cálculos precisamos carregar o arquivo de métrica-torção *twave.crd* em *CLASSI*. Quando *tmetrics* for o diretório corrente ou a sua localização (“path”) estiver implementada no arquivo *classi.ini*, podemos utilizar o comando (LOAD “TWAVE.CRD”) sem incluir a localização de *twave.crd* (veja detalhes em [17]). Este arquivo carrega o módulo TWEYLTC, que carrega TCORD, que carrega CORD. Considerando que este arquivo já esteja carregado, podemos usar o comando WMAKE para calcular as partes irredutíveis da torção de acordo com

```
SHP> (WMAKE TTOR PTOR LTOR)
Torsion's trace is zero
Torsion's pseudo-trace is zero
```

```
1
LTOR   = D
02
```

```
1
LTOR   = F
03
```

No resultado acima e nos demais a seguir, onde apenas os componentes não-nulos são impressos, estamos suprimindo as mensagens do sistema com os nomes dos tensores obtidos nos cálculos intermediários. Os nomes utilizados e as mensagens estão em inglês porque *TCLASSI* foi desenvolvido como parte de uma colaboração internacional.

Os componentes (não-nulos) do tensor de curvatura de Riemann-Cartan (TRIE) da classe de ondas planas das TGT obtida por Adamovickz podem ser calculados usando o comando

```
SHP> (WMAKE TRIE)
```

```
TR      =  -A
0202
```

```
TR      =  -B
0203
```

```
TR      =  -B
0302
```

```
TR      =  A
0303
```

Em geral o tensor de curvatura de uma variedade de Riemann-Cartan (TRIE) não tem a simetria de troca de pares  $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$  do tensor de Riemann (RIE) da TRG (veja o apêndice A). Entretanto, no caso particular do exemplo acima, podemos verificar que os tensores TRIE e RIE coincidem. Assim, a curvatura de Riemann-Cartan desta solução de ondas planas será nula quando a métrica for plana ( $A = B = 0$ ), embora a torção seja diferente de zero.

Na solução de Adamowicz os tensores de Weyl (TWEYL) e de Weyl-Cartan (CWEYL) coincidem e são as únicas partes da curvatura não-nulas, pois o tensor de Ricci (TRIC) e o pseudo-tensor de Ricci (PTRIC) são nulos (cf. tab. (4.2). Podemos verificar este resultado utilizando WMAKE para calcular TRIC e PTRIC de acordo com

```
SHP> (WMAKE TRIC PTRIC)
Ricci tensor is zero
Ricci pseudo-tensor is zero
```

As convenções para o cálculo do tensores de curvatura (TRIE), de Ricci (TRIC) e de Weyl (TWEYL) utilizadas em *TCLASSI* são as mesmas que estão implementadas em *SHEEP/CLASSI*. O pseudo-tensor de Ricci (PTRIC) é definido seguindo as mesmas convenções do tensor de Ricci. Estas convenções também podem ser modificadas do mesmo modo que as de RIE e RIC em *CLASSI*, utilizando as mesmas chaves NEGRIESIGN e

NEGEINSIGN (cf. seção 1.6) [17].

Consideremos agora o cálculo de tensores em uma *base de tétradas*, utilizando como exemplo uma solução da teoria de Einstein-Cartan-Dirac obtida por Seitz [65], onde a fonte do campo gravitacional é um campo de Dirac para um neutrino. Este espaço-tempo de Riemann-Cartan tem uma métrica dada por

$$ds^2 = e^{2kt} (dt^2 - dx^2) - e^{2k(t+x)} (dy^2 + dz^2), \quad (4.4)$$

que pode ser expressa em uma tétrada de Lorentz de acordo com

$$\omega^0 = e^{kt} dt, \quad \omega^1 = e^{kt} dx, \quad \omega^2 = e^{k(t+x)} dy, \quad \omega^3 = e^{k(t+x)} dz. \quad (4.5)$$

Nesta solução a única parte irredutível não-nula da torção é o pseudo-traço, que é um vetor tipo-nulo (tipo-luz). Assim, em lugar de apresentar os componentes da torção, Seitz fornece os componentes das suas partes irredutíveis na base de tétradas dada pelas eqs. (4.5), onde o pseudo-traço é dado por

$$P_0 = -P_1 = 6 a^2 e^{-k(3t+2x)}. \quad (4.6)$$

Os parâmetros  $k$  e  $a$  nas eqs. (4.5)-(4.6) são constantes.

Para realizar cálculos em uma base de tétradas precisamos definir em primeiro lugar os componentes da métrica  $H_{ab}$  e das 1-formas  $\omega^a = Z^a_\mu dx^\mu$  da base de tétradas (especificando  $ds^2 = H_{ab} \omega^a \omega^b$ ). Depois, definimos os componentes  $T^a_{bc}$  da torção, como veremos a seguir.

Os dados da métrica e da torção da solução de Seitz estão no arquivo de métrica-torção `seitzb.lor` (veja a listagem na p. 210). Os componentes  $Z^a_\mu$  (IZUD) das 1-formas  $\omega^a$  dadas pelas eqs. (4.5) são introduzidos usando o comando RPL. Os componentes da métrica  $H_{ab}$  são escolhidos como sendo os da métrica de Lorentz  $(H_{ab}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  com o comando (LORENTZ IFRAME).

Várias tétradas podem ser utilizadas em CLASSI [17] como referenciais para a entrada dos dados e para a realização de cálculos, entre as quais destacamos as tétradas de Lorentz (LORENTZ), nulas (NULLT) e semi-nulas (HNULL) onde o elemento de linha é dado, respectivamente, por

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2, \quad (4.7)$$

$$ds^2 = 2\omega^0\omega^1 - 2\omega^2\omega^3, \quad (4.8)$$

$$ds^2 = 2\omega^0\omega^1 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2. \quad (4.9)$$

Os dados de entrada da torção para o cálculo de tensores usando tétradas são os componentes  $T_{bc}^a$  (ITOR) ou  $T_{\mu\nu}^\alpha$  (ITORC) da torção na base de tétradas ou de coordenadas, respectivamente. Neste último caso, porém, a letra "C" deve ser utilizado no final do nome "ITOR". A entrada da torção também podem ser feita através dos componentes das suas partes irredutíveis, isto é, do traço  $T_a$  (ITTOR), do pseudo-traço  $P_a$  (IPTOR) e do tensor de Lanczos  $L_{bc}^a$  (ILTOR) da torção, na base de tétradas.

Como na solução de Seitz a única parte irredutível não-nula da torção é o pseudo-traço, usamos o comando (ZEROINIT ITTOR ILTOR) para fazer iguais a zero todos os componentes do traço (ITTOR) e do tensor de Lanczos (ILTOR) da torção. Em seguida, usamos o comando RPL para entrar com os componentes do pseudo-traço IPTOR da torção dados nas eqs. (4.6).

É importante observar que os tensores definidos em TORSION e TWEYLTF não são calculados na tétrada determinada por IZUD e IFRAME, mas em uma outra tétrada especificada por ZUD e FRAME. Esta é uma característica de CLASSI, onde uma tétrada é utilizada para a entrada de dados e outra para a realização dos cálculos [17]. Estes referenciais coincidem, a menos que o usuário fixe-os como tipos diferentes. Geralmente os nomes das quantidades calculadas na base utilizada para a entrada ("Input") de dados têm a letra inicial "I" como, por exemplo, em IZUD. As transformações dos dados de entrada da torção para a tétrada utilizada para realizar cálculos estão definidas no módulo ITORSION.

A solução de Seitz tem diversas propriedades interessantes que podemos determinar utilizando TCLASSI. Para investigar os efeitos da torção na curvatura usamos CLASSI para calcular o tensor de Riemann (RIE), que depende apenas da métrica. Antes, porém, é conveniente iniciar uma nova sessão de CLASSI para realizar os cálculos em uma base de tétradas, encerrando a sessão na base de coordenadas com o comando (QUIT). Assim, depois de executar CLASSI novamente e carregar seitzb.lor com o comando (LOAD "SEITZB.LOR"), prosseguimos calculando o tensor de Riemann RIE através do comando

```
SHP> (MAKE RIE)
Flat space
```

Portanto, a solução de Seitz é caracterizada por uma métrica plana e por um campo vetorial tipo-nulo definido pela torção. Neste caso, ao contrário da solução de ondas planas vista anteriormente, embora o tensor de Riemann (RIE) seja nulo a curvatura de Riemann-Cartan (TRIE) é diferente de zero, como podemos constatar calculando o

tensor de Ricci. Para realizar esse cálculo e ilustrar uma mudança de tetradas, usamos o comando (NULLT FRAME) para mudar da tetrada de Lorentz usada para a entrada dos dados para uma tetrada nula. Em seguida, calculamos o tensor de Ricci (TRIC) com o comando WMAKE, obtendo os seguintes componentes (onde  $i = \sqrt{-1}$ ) não-nulos

SHP> (WMAKE TRIC)

$$\text{TR}_{11} = -4a E \quad \begin{matrix} 4 & -6kt-4kx \end{matrix}$$

$$\text{TR}_{23} = 4ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

$$\text{TR}_{32} = -4ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

A partir deste resultado, podemos verificar que a parte anti-simétrica do tensor de Ricci (ATRIC) é diferente de zero. Calculando o pseudo-tensor de Ricci (PTRIC) obtemos que ele também é não-nulo. Mas o escalar de curvatura (TRSCL) e o pseudo-escalar de curvatura (PTRSCL) são nulos. Para completar as partes irredutíveis da curvatura falta apenas calcular os tensores de Weyl (TWEYL) e de Weyl-Cartan (CWEYL), o que pode ser feito através dos comandos

SHP> (WMAKE TWEYL)

$$\text{TW}_{0123} = -4ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

$$\text{TW}_{1213} = 2ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

$$\text{TW}_{1312} = -2ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

$$\text{TW}_{2301} = 4ia kE \quad \begin{matrix} 2 & -4kt-2kx \end{matrix}$$

SHP> (WMAKE CWEYL)

CWEYL all components zero

Portanto, além de obter que o tensor de Weyl-Cartan é nulo podemos verificar que o tensor de Weyl não tem a simetria da troca de pares.

Os cálculos dessa seção poderiam ter sido realizados usando os espinores correspondentes dos tensores que foram calculados. Na próxima seção vamos mostrar como esses espinores podem ser calculados usando *TCLASSI*.

### 4.3 Cálculos de espinores

Além dos recursos algébrico-computacionais relativos ao cálculo de tensores, *TCLASSI* também dispõe de diversos programas para a manipulação de espinores em espaços-tempos de Riemann-Cartan. O método dos coeficientes de spin de Newman-Penrose [76] foi estendido de modo a incluir a torção [37] e foi empregado na obtenção de algumas soluções exatas das TGT [77, 78, 79].

Nesta seção mostramos como utilizar os módulos de *TCLASSI* para calcular os espinores da conexão (coeficientes de spin), da curvatura, da torção e das partes irredutíveis da curvatura e da torção. Os elementos do conjunto mínimo de escalares de Cartan, obtido no capítulo 3, também podem ser calculados para escalares de Cartan de ordem  $q \leq 3$ .

O espinor da conexão, os coeficientes de spin e o espinor da torção são calculados usando o módulo *TSPINOR*. O espinor da curvatura de Riemann-Cartan é calculado usando *SPTCURV* e as partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção podem ser calculadas usando *SPTCURV* ou *TPSIPHI*. Estes espinores estão dados na tab. (4.3) na página 98, com os nomes utilizados em *TCLASSI*. Finalmente, os espinores do conjunto mínimo de escalares de Cartan que são definidos por derivadas covariantes da curvatura e da torção, dados nas tabs. (3.1)–(3.6), podem ser calculados usando *TEQUSPI*. As definições desses espinores e as convenções usadas estão no apêndice B.

Os espinores são calculados a partir dos mesmos dados de entrada empregados para calcular tensores usando tetradas. Quando os módulos *TSPINOR*, *SPTCURV* e *TEQUSPI* forem utilizados o referencial deve ser uma tetrada nula (*NULLT*) onde  $Z^a{}_\mu = (l_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu)$  (*ZUD*), com  $l_\mu$  e  $n_\mu$  reais e  $m_\mu$  e  $\bar{m}_\mu$  complexo conjugados. Para calcular usando *TPSIPHI* o referencial pode ser uma tetrada nula (*NULLT*) ou de Lorentz (*LORENTZ*).

A seguir, mostraremos como calcular alguns espinores da solução da teoria de Einstein-Cartan-Dirac obtida por Seitz, dada pelas eqs. (4.4)–(4.6) [65]. Como vimos na seção anterior, esta solução é caracterizada por uma métrica plana e por um campo vetorial tipo-nulo definido pelo pseudo-traço da torção (*PTOR*).

Nome em <i>TCLASSI</i>	Espinor	Nome
SPTOR	$T_{ABCX'} = T_{(AB)CX'}$	torção
SPTTOR	$T_{AX'}$	traço da torção
SPPTOR	$P_{AX'}$	pseudo-traço da torção
SPLTOR	$L_{ABCX'} = L_{(ABC)X'}$	Lanczos da torção
STGAM	$\Gamma_{ABCX'} = \Gamma_{(AB)X'}$	conexão de Riemann-Cartan (RC)
SPTCURV	$R_{ABCX'DY'} = R_{(AB)CX'DY'}$	curvatura de RC
TPHI	$\Phi_{AX'BY'} = \Phi_{(AB)(X'Y')}$	espinor de Ricci de RC
THETA	$\Theta_{AX'BY'} = \Theta_{(AB)(X'Y')}$	pseudo-espinor de Ricci
SIGMA	$\Sigma_{AB} = \Sigma_{(AB)}$	bi-espinor de Ricci
TLAMBD	$\Lambda$	escalar de curvatura de RC
OMEGA	$\Omega$	pseudo-escalar de curvatura
TPSI	$\Psi_{ABCD} = \Psi_{(ABCD)}$	Weyl de RC

Tabela 4.2: Os espinores da curvatura, da torção, suas partes irredutíveis e o espinor da conexão, que podem ser calculados usando os módulos TSPINOR, TPSIPHI e SPTCURV de *TCLASSI*. Os espinores SPTOR e STGAM estão implementados em TSPINOR, SPTCURV em SPTCURV e os restantes tanto em TPSIPHI quanto em SPTCURV. As definições e convenções utilizadas podem ser encontradas no apêndice B.

Quando o campo de vetores nulos dado pelo pseudo-traço da torção da solução de Seitz for paralelo a um dos vetores  $l_\mu$  ou  $n_\mu$  da base de tétradas nulas, podemos usar o espinor da conexão  $\Gamma_{ABCX'}$  (STGAM) e os coeficientes de spin para investigar algumas das suas propriedades. Depois de carregar o arquivo de métrica-torção `seitzb.lor` (veja a listagem na p. 210) com o comando (`LOAD "SEITZB.LOR"`) e de usar o comando (`NULLT FRAME`) para mudar das tétradas de Lorentz para tétradas nulas, podemos usar `WMAKE` para calcular o pseudo-traço  $P_\mu$  (PTOR) da torção com o comando

`SHP> (WMAKE PTOR)`

$$PTOR_1 = 6(2) \begin{matrix} 1/2 & 2 & -3kt-2kx \\ & a & E \end{matrix}$$

Assim, obtemos que  $P_\mu$  é paralelo a  $n_\mu$ , isto é,  $P_\mu = P n_\mu$ , onde  $P = 6\sqrt{2}a^2 e^{-3k6-2kx}$ . Em seguida, devemos carregar o módulo `TSPINOR` para calcular o espinor da conexão  $\Gamma_{ABCX'}$  (STGAM) e os coeficientes de spin. `TSPINOR` carrega o módulo `SPINOR` de `CLASSI`, onde estão implementados os símbolos de Infield e Van der Waerden  $\sigma_\mu^{AB'}$ , o espinor da conexão  $\overset{\circ}{\Gamma}_{ABCX'} = \overset{\circ}{\Gamma}_{(AB)CX'}$  (SGAM) e os coeficientes de spin em um espaço-tempo Riemanniano [39]. Considerando `TSPINOR` já esteja carregado, calculamos `STGAM` através do comando

`SHP> (WMAKE STGAM)`

$$TGAM_{0010'} = trho = -(2) \begin{matrix} 1/2 & -kt \\ & kE \end{matrix}$$

$$TGAM_{0100'} = tepsilon = 1/4(2) \begin{matrix} 1/2 & -kt \\ & kE \end{matrix}$$

$$TGAM_{0111'} = tgamma = -1/4(2) \begin{matrix} 1/2 & -kt \\ & kE \end{matrix} - 1/2(2) \begin{matrix} 1/2 & 2 & -3kt-2kx \\ & ia & E \end{matrix}$$

$$TGAM_{1101'} = tmu = (2) \begin{matrix} 1/2 & 2 & -3kt-2kx \\ & ia & E \end{matrix}$$

Logo, os seguintes coeficientes de spin são não-nulos:  $\Gamma_{0010'} = \rho$ ,  $\Gamma_{0100'} = \epsilon$ ,  $\Gamma_{0111'} = \gamma$  e  $\Gamma_{1101'} = \mu$ . Note que são escritos tanto os componentes da conexão quanto os nomes dos coeficientes de spin, que iniciam com a letra "t" para distingui-los dos nomes dos coeficientes de spin da conexão riemanniana `SGAM` calculados usando `CLASSI`. Para que os componentes da conexão ou os coeficientes de spin não sejam escritos basta acionar a chave `PRTNOSTGAM` ou `PRTNOSTNAM`, respectivamente.

Utilizando os coeficientes de spin acima podemos mostrar que as curvas integrais do pseudo-traço PTOR são auto-paralelas [1], como veremos a seguir. Esta propriedade de PTOR também foi obtida por Seitz, que usou uma téttrada de Lorentz para mostrar que  $P^\nu \nabla_\nu P_\mu$  é proporcional a  $P_\mu$  [65]. De acordo com as definições dos coeficientes de spin dadas em [37], podemos escrever  $n^\nu \nabla_\nu n_\mu = -\nu \bar{m}_\mu - \bar{\nu} m_\mu + (\gamma + \bar{\gamma}) n_\mu$ , onde  $\nabla_\mu$  é o operador diferencial covariante do espaço-tempo de Riemann-Cartan. A partir dos componentes não-nulos de STGAM obtidos acima, podemos verificar que  $n_\mu$  é um vetor tangente a uma congruência de curvas auto-paralelas  $n^\nu \nabla_\nu n_\mu = (\gamma + \bar{\gamma}) n_\mu$ , cujo parâmetro não é afim ( $\gamma + \bar{\gamma} \neq 0$ ). Finalmente, tendo em vista que  $P_\mu = P n_\mu$ , podemos concluir que as curvas integrais de PTOR também são auto-paralelas.

Consideremos agora o cálculo das partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção (cf. tab. (4.3), p. 98), que pode ser feito usando TPSIPHI ou SPTCURV. Quando o módulo TPSIPHI for usado estes espinores serão calculados a partir das correspondentes partes irredutíveis dos tensores da curvatura e da torção, em uma téttrada nula ou de Lorentz. Portanto, é necessário que o módulo TWEYLTF tenha sido previamente carregado.

Como veremos na próxima seção, algumas das partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção podem ser classificadas algebricamente através de um problema de autovalores, sendo agrupadas em classes de equivalência que são representadas por formas canônicas desses espinores. Geralmente é necessário realizar uma transformação de díada para colocar esses espinores nas respectivas formas canônicas. Para tornar possível esta mudança de base, os espinores estão implementados nos módulos TSPINOR e TPSIPHI de duas maneiras que diferem por uma transformação de díada denominada DYTRSP. O traço da torção, por exemplo, é definido como UNSPTTOR e SPTTOR, onde SPTTOR é calculado a partir de UNSPTTOR utilizando DYTRSP. Representando SPTTOR e UNSPTTOR por  $\tilde{T}_{BY'}$  e  $\mathcal{T}_{AX'}$ , temos  $\tilde{T}_{BY'} = S_A^B \bar{S}_{X'}^{Y'} \mathcal{T}_{AX'}$ , onde  $S_A^B$  e  $\bar{S}_{X'}^{Y'}$  são os elementos de DYTRSP e da transformação complexo conjugada, respectivamente. As iniciais UN nos nomes dos espinores referem-se a “*untransformed*”, isto é, não transformado.

A transformação DYTRSP é calculada a partir de três matrizes DYTRSP1, DYTRSP2 e DYTRSP3 que são aplicadas nesta ordem. Os fatores do produto matricial que não forem especificados pelo usuário são dados pela transformação identidade. As transformações utilizadas para calcular o espinor de Lanczos da torção SPLTOR a partir de UNSPLTOR estão implementadas no módulo TDYTRSP de TCLASSI, que carrega o módulo DYTRSP de

*CLASSI* onde estão implementadas as transformações dos demais espinores [17]. Sempre que *DYTRSP* for usada, o arquivo de métrica-torção deve conter no seu início o comando (*LOAD TDYTRSP*) para carregar *TDYTRSP*.

Como exemplo do cálculo das partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção com o uso de *DYTRSP*, vamos calcular o espinor de Ricci (*UNTPHI* e *TPHI*) da solução de Seitz dada pelas eqs. (4.4)–(4.6), usando o arquivo de métrica-torção *seitzb.spi* (veja a listagem na p. 211). Conforme veremos na próxima seção, a forma canônica deste espinor é dada por  $\Phi_{22'} \equiv \Phi_{111'1'} = \pm 1$ , com os demais componentes iguais a zero. Depois de carregar *seitzb.spi* e o módulo *TPSIPHI*, podemos calcular o espinor de Ricci antes da transformação *DYTRSP* ser realizada (*UNTPHI*) com o comando

*SHP> (WMAKE UNTPHI)*

$$\text{TPHI} \begin{matrix} u \\ 22' \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & -6kt-4kx \\ -2a & E \end{matrix}$$

Assim, constatamos que o espinor de Ricci não está na forma canônica. Entretanto, a transformação *DYTRSP* dada no arquivo *seitzb.spi* coloca o espinor de Ricci na forma canônica, como podemos verificar calculando o espinor de Ricci depois que *DYTRSP* é realizada (*TPHI*) com o comando

*SHP> (WMAKE TPHI)*

$$\text{TPHI} \begin{matrix} \\ 22' \end{matrix} = \begin{matrix} -1 \\ \end{matrix}$$

Note que *seitzb.spi* difere do arquivo *seitzb.lor* usado na seção anterior por definir tetradas nulas e especificar as transformações *DYTRSP1* e *DYTRSP2*, necessárias para colocar *TPHI* na forma canônica. A transformação *DYTRSP* pode ser calculada usando *WMAKE*.

Quando o tensor de curvatura (*TRIE*) não tiver sido calculado, *SPTCURV* é carregado por *TPSIPHI* para que os espinores dados na tab. (4.3) possam ser calculados a partir dos espinores da torção  $T_{ABCX'}$  (*SPTOR*) e da conexão  $\Gamma_{ABCX'}$  (*STGAM*), implementados em *TSPINOR*. O espinor da curvatura  $R_{ABCDZ'W'}$  (*SPTCURV*) é calculado a partir da seguinte definição

$$\begin{aligned} R_{ABCD'GH'} = & \partial_{CD'} \Gamma_{ABGH'} - \partial_{GH'} \Gamma_{ABCD'} + \varepsilon^{EF} (\Gamma_{AFGH'} \Gamma_{BECD'} \\ & - \Gamma_{AFCD'} \Gamma_{BEGH'} + \Gamma_{ABED'} \Gamma_{FCGH'} - \Gamma_{ABEH'} \Gamma_{FGCD'}) \\ & + \varepsilon^{E'F'} (\Gamma_{ABCE'} \bar{\Gamma}_{F'D'H'G} - \Gamma_{ABGE'} \bar{\Gamma}_{F'H'D'C'}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Note que as transformações DYTRSP também são aplicadas nos espinores calculados usando SPTCURV através da sua atuação em STGAM e SPTOR.

Além de DYTRSP, existe uma outra transformação de díada que também atua nos espinores, denominada DYTR. Esta transformação atua diretamente na mudança da tétrada usada para a entrada de dados (IZUD e IFRAME) para a tétrada onde os cálculos são realizados (ZUD e FRAME), sendo calculada a partir do produto de três matrizes DYTR1, DYTR2 e DYTR3. Enquanto DYTRSP atua apenas nos espinores, DYTR atua em tensores e espinores. As transformações DYTR estão implementadas nos módulos TDYTRSP e DYTRSP de maneira análoga às transformações DYTRSP [17].

Como exemplo do cálculo das partes irreduzíveis dos espinores da curvatura e da torção com o uso de DYTR, vamos calcular o espinor de Weyl (TPSI) do espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo-Gödel cujas métrica e torção são dadas em uma tétrada de Lorentz por [34, 35, 75]

$$\omega^0 = dt + H(x) dy, \quad \omega^1 = dx, \quad \omega^2 = D(x) dy, \quad \omega^3 = dz, \quad (4.11)$$

$$T^0_{12} = S(x). \quad (4.12)$$

As funções  $S$ ,  $H$  e  $D$  satisfazem as condições  $S = \text{const} \equiv L$ ,  $H'/D = \text{const} \equiv 2\omega$  e  $D''/D = \text{const} \equiv m^2$ , onde a plica denota a derivada em relação a  $x$ .

Os dados de entrada deste espaço-tempo tipo-Gödel com torção estão no arquivo `tgotyh.spi` (veja a listagem na p. 214). Este arquivo contém uma transformação DYTR usada para colocar TPSI na forma canônica, que é definida a partir de DYTR1, DYTR2 e DYTR3. Conforme veremos na próxima seção, TPSI é Petrov tipo D e sua forma canônica é dada por  $\Psi_2 \equiv \Psi_{1100} \neq 0$ , com os demais componentes iguais a zero. Assim, depois de carregar o arquivo `tgotyh.spi` e TPSIPHI (ou SPTCURV) em seguida, podemos utilizar WMAKE para calcular TPSI com o comando

```
SHP> (WMAKE TPSI)
```

$$\text{TPSI} = \begin{matrix} & 2 & & 2 & & 2 \\ -1/12L & +1/2LW & +1/6m & -2/3W & & \\ 2 & & & & & \end{matrix}$$

Podemos verificar o efeito da transformação DYTR sobre TPSI usando o comando LOSE em DYTR1, DYTR2 e DYTR3, fazendo com que estas transformações voltem a ser iguais à identidade. Depois de remover DYTR, podemos recalcular TPSI com o comando

```
SHP> (WMAKE TPSI)
```

$$\text{TPSI}_0 = 1/8L^2 - 3/4LW - 1/4m^2 + W^2$$

$$\text{TPSI}_2 = 1/24L^2 - 1/4LW - 1/12m^2 + 1/3W^2$$

$$\text{TPSI}_4 = 1/8L^2 - 3/4LW - 1/4m^2 + W^2$$

onde  $\Psi_0$  e  $\Psi_4$  são definidos por  $\Psi_0 \equiv \Psi_{0000}$  e  $\Psi_4 \equiv \Psi_{1111}$ . Este último resultado também pode ser obtido calculando TPSI depois de carregar o arquivo `tgotyh.lor` (veja a listagem na p. 216), que não contém as transformações de díadas.

No próximo capítulo, mostraremos como obter as transformações DYTRSP e DYTR que colocam um espinor de um dado espaço-tempo de Riemann-Cartan na forma canônica, utilizando o módulo TDYTSYM. Antes, porém, vamos mostrar como obter as classificações algébricas das partes irredutíveis dos espinores de curvatura e torção usando *TCLASSI*.

## 4.4 Classificações algébricas

As classificações algébricas de objetos geométricos, determinadas pelos problemas de autovalores construídos com suas partes irredutíveis, têm sido bastante úteis em diversos campos da física, pois permitem agrupar estes objetos em classes de equivalência e definir formas canônicas para os elementos dessas classes. Assim, propriedades locais desses objetos podem ser investigadas utilizando suas formas canônicas. Na TRG, por exemplo, diversas propriedades do campo gravitacional têm sido obtidas utilizando as classificações algébricas da curvatura e do campo eletromagnético [41].

Enquanto na TRG a estrutura algébrica da curvatura é determinada pelas classificações de Petrov do espinor de Weyl e de Segre do espinor de Ricci, nas TGT a situação é complexa. Além dos espinores com as mesmas simetrias dos espinores de Weyl e de Ricci da TRG, as partes irredutíveis da curvatura e da torção também contêm espinores que correspondem a bivectores e a vetores, de acordo com as eqs. (3.15)–(3.16).

Nesta seção vamos mostrar como utilizar os módulos VECTCLA, BIVTCLA e SEGPET de *TCLASSI* para obter as classificações algébricas de vetores, bivectores e de espinores com as mesmas simetrias que os espinores de Weyl e de Ricci da TRG.

Esses módulos foram desenvolvidos tendo em vista a determinação do referencial canônico utilizado no algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan (cf. seção 2.4). A escolha deste referencial pode ser feita de uma maneira sistemática utilizando direções privilegiadas que são determinadas por objetos geométricos. Alinhando os vetores da base ao longo dessas direções, podemos definir e fixar o máximo possível um referencial canônico.

A seguir vamos mostrar como utilizar *TCLASSI* para obter as classificações algébricas de alguns espinores do conjunto completo mínimo  $C_q$  de escalares de Cartan de ordem  $q \leq 3$ , usado no algoritmo para testar a equivalência. O conjunto mínimo  $C_0$  (cf. tab. (3.1), p. 56), por exemplo, contém dois espinores com a simetria do espinor de Weyl (TPSI e PSILTOR), cinco espinores com a simetria do espinor de Ricci (TPHI, THETA, PHILTOR, DSPTTOR e DSPPTOR), três bivectores (SIGMA, BVTTOR e BVPTOR) e dois vetores (SPTTOR e SPPTOR). Portanto, existem diferentes alternativas para fixar o referencial canônico, que podem fazer uso tanto das classificações de Petrov e de Segre, quanto das classificações de bivectores e de vetores.

Consideremos inicialmente a classificação algébrica do espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI) de um espaço-tempo de Riemann-Cartan. Como este espinor corresponde aos tensores de Weyl na TRG e de Weyl-Cartan (cf. apêndice A) nas TGT, a sua classificação nada mais é do que a *classificação de Petrov* (veja [39, 41] e referências ali citadas), que é obtida resolvendo o problema de auto-valores construído com tensor de Weyl-Cartan. Note que a classificação de Petrov não se aplica ao tensor de Weyl dos espaços-tempos de Riemann-Cartan, pois este tensor não é completamente sem traço.

Como o espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$  é totalmente simétrico (cf. apêndice B), podemos utilizar um 1-espinor  $\xi^A = (\xi^0, \xi^1)$  para construir um polinômio na variável complexa  $z = \xi^1/\xi^0$  de acordo com

$$\Psi_{ABCD}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D = (\xi^0)^4 (\Psi_0 + 4\Psi_1z + 6\Psi_2z^2 + 4\Psi_3z^3 + \Psi_4z^4), \quad (4.13)$$

onde definimos  $\Psi_0 = \Psi_{0000}$ ,  $\Psi_1 = \Psi_{1000}$ ,  $\Psi_2 = \Psi_{1100}$ ,  $\Psi_3 = \Psi_{1110}$  e  $\Psi_4 = \Psi_{1111}$ . O teorema fundamental da álgebra nos garante que o polinômio dado pela eq. (4.13) pode ser fatorado de acordo com

$$\begin{aligned} \Psi_{ABCD}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D &= (\xi^0)^4 (\alpha_0 + \alpha_1z) (\beta_0 + \beta_1z) (\gamma_0 + \gamma_1z) (\delta_0 + \delta_1z) \\ &= \alpha_A\xi^A\beta_B\xi^B\gamma_C\xi^C\delta_D\xi^D = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}\xi^A\xi^B\xi^C\xi^D. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, como  $\xi^A$  é um espinor arbitrário, obtemos que espinor de Weyl pode ser decomposto em termos do produto simetrizado de espinores com um índice apenas, isto é,

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}, \quad (4.15)$$

onde os 1-espinores  $\alpha_A$ ,  $\beta_B$ ,  $\gamma_C$  e  $\delta_D$  são denominados espinores principais do espinor de Weyl. Estes 1-espinores são determinados pelas raízes do polinômio dado pela eq. (4.13), a menos de fatores de escala cujo produto seja igual a 1.

Considerando que cada espinor  $\xi^A$  determina um vetor real tipo-nulo de acordo com  $k^\mu = \sigma^\mu_{AB'} \xi^A \bar{\xi}^{B'}$ , os 1-espinores principais do espinor de Weyl determinam quatro direções nulas denominadas direções nulas principais do espinor de Weyl. Quando duas ou mais dessas direções coincidem o espinor de Weyl é denominado algebricamente especial, caso contrário é algebricamente geral [39, 41].

A classificação de Petrov é obtida a partir das multiplicidades das raízes do polinômio dado pela eq. (4.13), que determinam os tipos de Petrov a partir do número de direções principais coincidentes de acordo com [39, 41]:

1. tipo I, com quatro raízes simples (distintas):

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)};$$

2. tipo II, com uma raiz dupla e duas raízes simples:

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\gamma_C\delta_{D)};$$

3. tipo D, com duas raízes duplas:

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\gamma_C\gamma_{D)};$$

4. tipo III, com uma raiz tripla e uma raiz simples:

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\alpha_C\delta_{D)};$$

5. tipo N, com uma raiz quádrupla:

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\alpha_B\alpha_C\alpha_{D)};$$

6. tipo 0, o espinor de Weyl é identicamente nulo.

Para cada tipo de Petrov, o espinor de Weyl pode ser colocado em uma forma canônica alinhando-se o referencial o máximo possível com as direções nulas principais do espinor de Weyl [26, 41]. Os grupos de isotropia correspondentes também podem ser determinados

investigando-se a invariância das formas canônicas sob transformações de Lorentz [26, 41]. Essas formas canônicas estão dadas na tab. (4.3), na página 106, em termos dos cinco escalares complexos  $\Psi_0, \dots, \Psi_4$ .

Tipo de Petrov	Grupo de Isotropia	Forma Canônica I	Forma Canônica II
I	0	$\Psi_0 = \Psi_4 \neq 0, \Psi_2$	$\Psi_1 = \Psi_3 \neq 0, \Psi_2$
II	0	$\Psi_3 = 1, \Psi_2 \neq 0$	$\Psi_1 = 1, \Psi_2 \neq 0$
III	0	$\Psi_3 = 1$	<i>não tem</i>
D	<i>e</i>	$\Psi_2 \neq 0$	<i>não tem</i>
N	<i>n</i>	$\Psi_4 = 1$	<i>não tem</i>
0	6	$\Psi_a = 0$ (todos)	<i>não tem</i>

Tabela 4.3: Os tipos de Petrov com as correspondentes formas canônicas usadas em *CLASSI* e *TCLASSI*, bem como os respectivos grupos de isotropia. As abreviaturas dos grupos de isotropia são: 0 (zero) quando não existe isotropia; 6 para o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ ; *e* para  $SO(1, 1) \times SO(2)$ ; e *n* para o grupo das rotações nulas com dois parâmetros (cf. tab.(1.1), p. 24). Para o tipo de Petrov I,  $\Psi_2$  pode ser zero ou não e a forma  $\Psi_0 = -\Psi_4$  também é uma alternativa aceita por *CLASSI* e *TCLASSI*.

Embora a classificação de Petrov esteja implementada no módulo PTRVSP de *CLASSI* (veja [17] e referências ali citadas), as quantidades utilizadas internamente no algoritmo são definidas em termos do espinor de Weyl (PSI) da TRG. Assim, foi necessário desenvolver o módulo SEGPET de *TCLASSI* com programas adaptando o algoritmo usado em PTRVSP para classificar os espinores das TGT.

Os tipos de Petrov dos espinores  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI),  $\psi_{ABCD}$  (PSILTOR) e  $\Upsilon_{ABCD}$  (PSIXITH) do conjunto completo mínimo (cf. teorema 3.1 na p.81) podem ser obtidos com os comandos (TPSICLA), (PSILTORCLA) e (PSIXITHCLA), respectivamente. Cada vez que estes comandos são utilizados as quantidades calculadas nas classificações anteriores retornam aos valores iniciais. Os dados da classificação do espinor de Weyl (PSI) da TRG também são removidos.

Uma outra maneira de realizar a classificação de Petrov consiste em usar o comando (TPETROV *espinor*), onde *espinor* deve ter a mesma simetria do espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$ .

Neste caso, porém, TPETROV atribui os valores dos componentes de *espinor* aos componentes correspondentes do espinor  $\tilde{\Psi}_{ABCD} = \tilde{\Psi}_{(ABCD)}$  (TSPINCRIT) e classifica este último, dando o resultado em termos das quantidades  $\tilde{\Psi}_0 \equiv \tilde{\Psi}_{0000}$  (TSPICR0),  $\tilde{\Psi}_1 \equiv \tilde{\Psi}_{1000}$  (TSPICR1),  $\tilde{\Psi}_2 \equiv \tilde{\Psi}_{1100}$  (TSPICR2),  $\tilde{\Psi}_3 \equiv \tilde{\Psi}_{1110}$  (TSPICR3) e  $\tilde{\Psi}_4 \equiv \tilde{\Psi}_{1111}$  (TSPICR4). Antes de utilizar TPETROV para realizar uma nova classificação, devemos executar o comando (CLEANTPETROV) para que as quantidades calculadas nas classificações anteriores retornem aos valores iniciais.

Como exemplo do uso do programa vamos determinar o tipo de Petrov do espinor de Weyl (TPSI) do espaço-tempo tipo-Gödel com torção dado pelas eqs. (4.11)–(4.12), usando o arquivo de métrica-torção `tgotyh.spi` (veja listagem na p. 214).

Como vimos na seção anterior o arquivo `tgotyh.spi` contém uma transformação DYTR que coloca TPSI na forma canônica. Quando removemos o efeito de DYTR, verificamos que apenas  $\Psi_0 = \Psi_4$  e  $\Psi_2$  são não-nulos. Isto pode nos levar a pensar que TPSI é Petrov tipo I (cf. tab. (4.3), p. 106), mas este não é o caso como podemos verificar obtendo a classificação de TPSI com o comando (TPSICLA). Assim, depois de carregar `tgotyh.spi`, `SEGPET` e remover a influência de DYTR aplicando o comando `LOSE` em `DYTR1`, `DYTR2` e `DYTR3`, obtemos o tipo de Petrov de TPSI com o comando

```
SHP> (TPSICLA)
```

```
Please check that TPSI2 is really non-zero !
If so, Petrov type is D
```

$$\text{TPSI} = \frac{1}{24}L^2 - \frac{1}{4}LW - \frac{1}{12}m^2 + \frac{1}{3}W^2$$

Portanto, TPSI é Petrov tipo D, considerando que  $L$ ,  $W$  e  $m$  são constantes arbitrárias. Este exemplo ilustra o fato de que embora as formas canônicas sejam obtidas a partir dos tipos de Petrov, a recíproca não é verdadeira. Note que o programa apresenta os valores de algumas quantidades *consideradas* diferente de zero, para que o usuário verifique se elas são realmente diferentes de zero. Isto ocorre porque não existe um algoritmo que possibilite a realização de todas as simplificações possíveis, permitindo determinar se uma quantidade é zero ou não [57].

Quando os espinores com a mesma simetria do espinor de Weyl não forem suficientes para fixar completamente o referencial, os outros elementos do conjunto mínimo para a ordem  $q = 0$  do algoritmo para testar a equivalência podem ser usados para fixá-lo um

pouco mais.

Consideremos agora a classificação algébrica dos espinores com a mesma simetria do espinor de Ricci  $\Phi_{ABX'Y'}$  (TPHI), que corresponde ao tensor de Ricci simétrico sem traço  $S_{ab}$  de um espaço-tempo de Riemann-Cartan. Esta classificação aplica-se a qualquer tensor simétrico de segunda ordem, sendo conhecida como *classificação de Segre*.

A classificação de Segre do tensor de Ricci simétrico sem traço  $S_{ab}$  pode ser obtida de diversas maneiras (veja [41, 68, 69] e referências ali citadas). Aqui ela será obtida construindo um problema de auto-valores para  $S^a_b$  de acordo com

$$(S^a_b - \lambda \delta^a_b) V^b = 0, \quad (4.16)$$

onde temos que determinar os auto-valores  $\lambda$  e auto-vetores  $V^b$  de  $S^a_b$ . A solução deste problema em um espaço com métrica euclidiana é obtida diagonalizando a matriz formada por  $S_{ab}$  através de uma transformação de similaridade. Entretanto, como a métrica nas TGT é de Lorentz, apenas podemos reduzir  $S_{ab}$  a uma forma canônica de Jordan [67].

O sistema de equações algébricas lineares nos componentes  $V^b$  dos auto-vetores dado pela eq. (4.16) só possui solução não-trivial para os valores de  $\lambda$  que sejam soluções da equação algébrica do quarto grau obtida fazendo igual a zero o determinante [41, 57, 58]

$$|S^a_b - \lambda \delta^a_b| = \lambda^4 - \frac{1}{2}I_6\lambda^2 - \frac{1}{3}I_7\lambda + \frac{1}{8}[(I_6)^2 - 2I_8] = 0, \quad (4.17)$$

denominada de equação característica, cujos os coeficientes são dados por

$$I_6 = S^a_b S^b_a, \quad I_7 = S^a_b S^b_c S^c_a, \quad I_8 = S^a_b S^b_c S^c_d S^d_a. \quad (4.18)$$

De acordo com o teorema fundamental da álgebra a eq. (4.17) tem quatro raízes no no corpo dos complexos, que determinam os auto-valores  $\lambda$  de  $S^a_b$ . Obtidos os auto-valores podemos reduzir a matriz  $S^a_b$  a uma das formas canônicas de Jordan [67] e representá-la com a notação de Segre, como veremos a seguir. Na forma de Jordan uma matriz é diagonal por blocos, onde cada bloco pode ser dado por:

$$\begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

onde os elementos  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  da diagonal principal são um dos auto-valores.

Considerando que a multiplicidade das raízes reais da equação característica pode ser 1, 2, 3 ou 4, e que também podem existir duas raízes complexas conjugadas e duas reais, as possíveis formas canônicas de Jordan para  $S^a_b$  que são consistentes com a assinatura da métrica de Lorentz são [68]

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{z} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

onde os auto-valores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $\lambda_4$  são reais e  $z$  e  $\bar{z}$  são complexos conjugados. Para cada auto-valor em um dos blocos de Jordan existe associada uma direção principal do tensor de Ricci  $S^a_b$  determinada pelo auto-vetor correspondente, que pode ser tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-nulo. Quando auto-valores de dois ou mais blocos de Jordan são iguais dizemos que existe degenerescência de auto-valores.

Na notação de Segre as formas canônicas de Jordan são representadas por uma lista, colocada entre colchetes, com os algarismos que correspondem às dimensões dos blocos de Jordan e com as letras  $z\bar{z}$  que representam os blocos com auto-valores complexo conjugados. Os algarismos correspondentes a blocos com o mesmo auto-valor são escritos juntos entre parêntesis e aos blocos associados a auto-vetores tipo-nulo e tipo-tempo são escritos por último à direita, sendo o correspondente ao auto-vetor tipo-tempo separado por uma vírgula (convenção usada em *TCLASSI*).

De acordo com a notação de Segre, as formas canônicas de Jordan para  $S^a_b$  dadas nas eqs. (4.20)–(4.21) acima são representadas por [111, 1], [112], [13] e [11z $\bar{z}$ ], respectivamente. Considerando as possíveis degenerescências, os tipos de Segre para o tensor de Ricci simétrico (veja, por exemplo, [41, 68, 69, 70]), podem ser agrupados de acordo com:

1. tipos de Segre com um auto-vetor tipo-tempo:

[111, 1] e degenerescências [11(1, 1)], [(11)1, 1], [(11)(1, 1)], [1(11, 1)], [(111), 1] e [(111), 1];

2. tipos de Segre com um auto-vetor tipo-nulo:

(a)  $[112]$  e degenerescências  $[1(12)]$ ,  $[(11)2]$  e  $[(112)]$ ;

(b)  $[13]$  e degenerescência  $[(13)]$ ;

3. tipos de Segre com um auto-vetor complexo:

$[11z\bar{z}]$  e degenerescência  $[(11)z\bar{z}]$ .

Para cada tipo de Segre, o espinor de Ricci pode ser colocado em uma forma canônica alinhando-se o referencial o máximo possível com as direções principais do espinor de Ricci [41, 69]. Os grupos de isotropia correspondentes também podem ser determinados investigando-se a invariância das formas canônicas sob transformações de Lorentz [41, 69].

Como a classificação de Segre é utilizada na implementação em *TCLASSI* do algoritmo para testar a equivalência, que é realizada com os escalares de Cartan independentes expressos em termos de espinores totalmente simetrizados, as formas canônicas dos tipos de Segre estão dadas na tab. (4.4), na página 106, em termos dos três escalares reais  $\Phi_{00'} = \Phi_{000'0'}$ ,  $\Phi_{11'} = \Phi_{010'1'}$  e  $\Phi_{22'} = \Phi_{111'1'}$ ; três escalares complexos  $\Phi_{01'} = \Phi_{000'1'}$ ,  $\Phi_{02'} = \Phi_{001'1'}$ ,  $\Phi_{12'} = \Phi_{011'1'}$  e seus complexos conjugados  $\Phi_{10'} = \Phi_{010'0'}$ ,  $\Phi_{20'} = \Phi_{110'0'}$  e  $\Phi_{21'} = \Phi_{110'1'}$ , respectivamente.

A classificação de Segre está implementada em *CLASSI* através do módulo *SEGRE* [57, 58], sendo realizada em duas etapas. Na primeira delas o espinor de Plebański (CHI)

$$\chi_{ABCD} = \frac{1}{4} \Phi_{(AB}{}^{X'Y'} \Phi_{CD)X'Y'} \quad (4.22)$$

é classificado em tipos de Petrov, originando os tipos de Plebański-Petrov. Na segunda etapa, vários métodos são utilizados para separar os diversos tipos de Segre presentes nas classes correspondentes a cada tipo de Plebański-Petrov.

Com relação ao tipo  $[(111, 1)]$  devemos observar que existem situações onde o tensor de Ricci simétrico sem traço  $S^a_b$  é nulo mas o escalar de curvatura  $R$  não é. Estas ocorrências são consideradas no módulo *SEGRE*, pois o algoritmo separa a classe do tipo  $[(111, 1)]$  em três classes cujos tipos são:

1. tipo  $l$ : quando  $R \neq 0$ , denominado “lambda term”. Neste caso  $R^a_b$  é proporcional ao termo de constante cosmológica  $\Lambda \delta^a_b$ , nas equações de Einstein;
2. tipo  $v$ : quando  $R = 0$ , denominado “vacuum”, pois corresponde às soluções  $R_{ab} = 0$  para o vácuo na TRG;

3. tipo 0: quando o algoritmo não consegue separar entre os dois casos anteriores, isto é,  $R = 0$  ou  $R \neq 0$ .

Como a implementação da classificação de Segre em *CLASSI* utiliza internamente quantidades definidas em termos do espinor de Ricci (PHISTD) da TRG, tivemos que incluir no módulo SEGPET de *TCLASSI* alguns programas adaptando o algoritmo usado em SEGRE para classificar os espinores das TGT.

No conjunto completo mínimo  $C_0$  (cf. tab. (3.1), p. 56) existem cinco espinores com as mesmas simetrias do espinor de Ricci da TRG, a saber: o espinor de Ricci  $\Phi_{ABX'Y'}$  (TPHI), o pseudo-espinor de Ricci  $\Theta_{ABX'Y'}$  (THETA) e os espinores  $\phi_{ABX'Y'}$  (PHILTOR),  $\nabla^{(A}_{(X'}\mathcal{T}^{B)}_{Y')}$  (DSPTTOR) e  $\nabla^{(A}_{(X'}\mathcal{P}^{B)}_{Y')}$  (DSPPTOR) obtidos a partir da derivada covariante de primeira ordem da torção.

Os tipos de Segre dos espinores  $\Phi_{ABX'Z'}$  (TPHI) e  $\Theta_{ABX'Z'}$  (THETA) podem ser obtidos com os comandos (TPHICLA) e (THETACLA), respectivamente. Cada vez que estes comandos são utilizados, as quantidades calculadas nas classificações anteriores (inclusive de PHI) retornam aos valores iniciais.

Uma outra maneira de realizar a classificação de Segre consiste em usar o comando (TSEGRE *espinor*), onde *espinor* deve ter a mesma simetria do espinor de Ricci. Este comando é implementado de maneira análoga ao comando TPETROV. Antes de realizar uma nova classificação usando TSEGRE devemos executar o comando (CLEANTSEGRE) para que as quantidades calculadas nas classificações anteriores retornem aos valores iniciais.

As classificações de Segre dos espinores  $\phi_{ABX'Y'}$  (PHILTOR),  $\nabla^{(A}_{(X'}\mathcal{T}^{B)}_{Y')}$  (DSPTTOR) e  $\nabla^{(A}_{(X'}\mathcal{P}^{B)}_{Y')}$  (DSPPTOR) são obtidas usando os comandos (PHILTORCLA), (DSPTTORCLA) e (DSPPTORCLA), respectivamente, que foram implementados usando TSEGRE.

Cada tipo de Segre tem uma abreviatura e um nome que é escrito junto com o resultado da classificação de Segre, tanto em *CLASSI* quanto em *TCLASSI*. Entretanto, como os nomes usados em *CLASSI* fazem referência a situações existentes na TRG que não têm necessariamente correspondentes nas TGT, *novos nomes* são utilizados em *TCLASSI*. Estes novos nomes estão dados tab. (4.4) na página 112, juntamente como os tipos de Segre correspondentes, seus grupos de isotropia e suas formas canônicas. Apenas não constam na tabela os tipos  $l$  e  $v$ , denominados “lambda term” e “vacuum”, que passam a se chamar “metric proportional” e “metric proportional or 0”, respectivamente.

Como exemplo do uso do programa vamos utilizar a solução da teoria de Einstein-

Tipo de Segre	Nome Abreviado	Nome em <i>TCLASSI</i>	Grupo de Isotropia	Forma Canônica
[111,1]	<i>g</i>	general (real case)	0	$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0,$ $\Phi_{02'} = \Phi_{20'} \neq 0$ $(\Phi_{02'} \neq \pm 2\Phi_{11'} \pm \Phi_{00'})$
[11(1,1)]	<i>b</i>	boost symmetric	<i>b</i>	$\Phi_{02'} = \Phi_{20'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0,$ $(\Phi_{02'} \neq \pm 2\Phi_{11'})$
[(11)1,1]	<i>s</i>	spin symmetric (real case)	<i>s</i>	$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0,$ $(\Phi_{11'} \neq \pm 2\Phi_{00'})$
[(11)(1,1)]	<i>e</i>	boost and spin symmetric	<i>e</i>	$\Phi_{11'} \neq 0$
[1(11,1)]	<i>t</i>	Lorentz group $SO(2,1)$ symmetric	<i>t</i>	$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} = -2\Phi_{11'} \neq 0$
[(111),1]	<i>p</i>	spatial rotations $SO(3)$ symmetric	<i>p</i>	$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} = 2\Phi_{11'} \neq 0$
[(111,1)]	0	Lorentz group $SO(3,1)$ symmetric	6	$\Phi_{AB'} = 0$ (todos)
[1Lz $\bar{z}$ ]	<i>z</i>	general (complex case)	0	$\Phi_{00'} = -\Phi_{22'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0,$ $\Phi_{02'} = \Phi_{20'} \neq 0$
[(11)z $\bar{z}$ ]	<i>c</i>	spin symmetric (complex case)	<i>s</i>	$\Phi_{00'} = -\Phi_{22'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0$
[112]	2	general, with three eigenvectors (one null)	0	$\Phi_{02'} = \Phi_{20'} \neq 0, \Phi_{11'} \neq 0,$ $\Phi_{22'} = \pm 1$
[(11)2]	<i>h</i>	spin symmetric, with three eigenvectors (one null)	<i>s</i>	$\Phi_{11'} \neq 0, \Phi_{22'} = \pm 1$
[1(12)]	<i>n</i>	1-dim null rotations symmetric, with three eigenvectors (one null)	<i>k</i>	$\Phi_{22'} = \pm 1,$ $\Phi_{02'} = \Phi_{20'} = 2\Phi_{11'} \neq 0$
[(112)]	<i>r</i>	2-dim null rotations and spin symmetric, with three eigenvectors (one null)	<i>r</i>	$\Phi_{22'} = \pm 1$
[13]	3	general, with two eigenvectors (one null)	0	$\Phi_{01'} = \Phi_{10'} = 1$ $\Phi_{02'} = 2\Phi_{11'} \neq 0$
[(13)]	4	1-dim null rotations symmetric, with two eigenvectors (one null)	<i>k</i>	$\Phi_{12'} = 1,$

Tabela 4.4: Os tipos de Segre com as abreviaturas e as formas canônicas usadas em *CLASSI* [57] e *TCLASSI*, os nomes em *TCLASSI* e os grupos de isotropia. As abreviaturas destes grupos são (cf. tab. (1.1), p. 24): 6 para o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ ; *p* para  $SO(3)$ ; *t* para  $SO(2, 1)$ ; *r* para o grupo gerado por  $SO(2)$  e rotações nulas com 2 parâmetros; *e* para  $SO(1, 1) \times SO(2)$ ; *n* para o grupo das rotações nulas com 2 parâmetros; *s*, *b* e *k* para  $SO(2)$ ,  $SO(1, 1)$  e o grupo das rotações nulas com 1 parâmetro, respectivamente.

Cartan que representa o campo gravitacional no interior de um cilindro de um fluido perfeito com spin, onde o spin está alinhado com o eixo de simetria, obtida por Tsoubelis [90]. A métrica e a torção desta solução são dadas em uma tetrada de Lorentz por

$$\omega^0 = dt, \quad \omega^1 = e^{-\frac{1}{2}(rS_0)^2} dr, \quad \omega^2 = r d\theta, \quad \omega^3 = e^{-\frac{1}{2}(rS_0)^2} dz, \quad (4.23)$$

$$T^0_{12} = 2S_0 e^{-\frac{1}{2}(rS_0)^2}, \quad (4.24)$$

onde  $S_0$  é uma constante arbitrária. Os dados de entrada deste espaço-tempo estão no arquivo `tsoubl.lor` (veja listagem na p. 218).

Depois de carregar o arquivo `tsoubl.lor` e o módulo `TPSIPHI`, podemos usar o comando `(WMAKE TPhi)` para obter que o espinor de Ricci  $\Phi_{ABX'Y'}$  desse espaço-tempo é dado por

$$\Phi_{00'} = \Phi_{11'} = \Phi_{22'} = -\Phi_{02'} = \frac{1}{2}(S_0)^2 e^{r^2(S_0)^2} \quad (4.25)$$

Carregando em seguida `SEGPET`, podemos obter o tipo de Segre de `TPhi` com o comando `SHP>(TSEGRE TPhi)`

```
Please check that CHI2 is really non-zero !
If so, Plebanski-Petrov type is D
```

$$\text{CHI} = \frac{-1/24S_0 E}{2}$$

Segre type is

A1 [(11)1,1]: spin symmetric (real case) or

A1 [11(1,1)]: boost symmetric or

A2 [(11)ZZ\*]: spin symmetric (complex case)

Turning on switch `SIGNTEST` may give further information

A partir do resultado acima podemos verificar um ponto importante. O algoritmo para a classificação de Segre não consegue separar todos os tipos de Segre. Este problema ocorre nas seguintes situações [57, 58]:

1. Para Plebański-Petrov tipo I: Internamente o tipo de Segre é denotado por 1 (um), representando as possibilidades dos tipos  $g$  e  $z$ , isto é,  $[111,1]$  e  $[11z\bar{z}]$ , respectivamente. Se o sinal de  $D = I^3 - 27J^2$  for positivo ou negativo o tipo de Segre é  $[111,1]$  ou  $[11z\bar{z}]$ , respectivamente, onde  $I$  e  $J$  são definidos por

$$I = \frac{1}{48}[7(I_6)^2 - 12I_8], \quad (4.26)$$

$$J = \frac{1}{1728} [36I_6I_8 - 17(I_6)^3 - 12(I_7)^2], \quad (4.27)$$

sendo  $I_6$ ,  $I_7$  e  $I_8$  definidos pelas eqs. (4.18).

2. Para Plebański-Petrov tipo D: Internamente, neste caso, o tipo de Segre é denotado por  $d$  e representa as possibilidades do tipo de Segre ser  $[(11)z\bar{z}]$ ,  $[11(1, 1)]$  e  $[(11)1, 1]$ . Se o sinal da quantidade

$$M = 4I_6I_8 - 4(I_7)^2 - (I_6)^3 \quad (4.28)$$

for negativo, então o tipo de Segre é  $c$ , isto é,  $[(11)z\bar{z}]$ . Quando o sinal for positivo temos internamente o tipo  $i$  que representa os tipos de Segre  $s$  ou  $b$ , isto é,  $[(11)1, 1]$  ou  $[11(1, 1)]$ , respectivamente. O algoritmo não tem como separar estes casos.

3. Para Plebański-Petrov tipo 0: O algoritmo não separa os tipos  $[(111), 1]$  e  $[1(11), 1]$ . Internamente, neste caso, o tipo de Segre é denotado por  $f$ .

Embora as classificações algébricas apresentadas até aqui possam fixar completamente o referencial canônico, ainda falta obter a classificação algébrica do bi-espinor de Ricci  $\Sigma_{AB}$  para determinar a estrutura algébrica do espinor de curvatura por completo. Este problema será abordado a seguir, onde mostramos como obter a classificação algébrica de um bivector utilizando o módulo BIVTCLA.

Consideremos a classificação algébrica de bivectores tendo como exemplo o tensor campo eletromagnético  $F_{ab}$  (tensor de Maxwell). A estrutura algébrica do bivector  $F_{ab}$  pode ser obtida a partir da solução do problema de auto-valores  $(F^a_b - \lambda\delta^a_b)V^b = 0$  [39, 41, 68]. Entretanto, como tensor de Maxwell corresponde a um bi-espinor simétrico  $\varphi_{AB}$  onde

$$F_{AX'BY'} = \sigma^a_{AX'} \sigma^b_{BY'} F_{ab} = \varepsilon_{X'Y'} \varphi_{AB} + \varepsilon_{AB} \bar{\varphi}_{X'Y'}, \quad (4.29)$$

a classificação obtida através do problema de auto-valores é equivalente à determinação do bi-espinor de Maxwell em termos das suas direções nulas principais [39]. Esta classificação pode ser obtida de uma maneira bastante simples utilizando a decomposição de bi-espinor de Maxwell em termos do produto simetrizado de 1-espinores dada por

$$\varphi_{AB} = \alpha_{(A} \beta_{B)}, \quad (4.30)$$

onde os 1-espinores principais do espinor de Maxwell  $\alpha_A$  e  $\beta_B$  são determinados a menos de fatores de escala.

Os 1-espinores principais do bi-espinor de Maxwell podem ser determinados a partir das raízes da equação

$$\varphi_{AB} \xi^A \xi^B = \varphi_2 z^2 + \varphi_1 z + \varphi_0 = 0, \quad (4.31)$$

obtida fazendo  $\xi^A = (1, z)$  e definindo os escalares  $\varphi_0 = \varphi_{00}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_{10}$  e  $\varphi_2 = \varphi_{11}$ . Considerando  $\varphi_2 \neq 0$ , a solução da eq. (4.31) é dada por

$$z = \frac{-\varphi_1 \pm \sqrt{-K/2}}{\varphi_2}, \quad (4.32)$$

onde  $K$  é um escalar complexo definido por

$$K = \varphi_{AB} \varphi^{AB} = -2[(\varphi_1)^2 - \varphi_0 \varphi_2] = K_1 + i K_2, \quad (4.33)$$

cujas partes real e imaginárias podem ser escritas em termos de  $F_{ab}$  e do seu dual  $F^*_{ab}$  como  $K_1 = \frac{1}{4} F^{ab} F_{ab}$  e  $K_2 = \frac{1}{4} F^{ab} F^*_{ab}$  [39].

O bi-espinor de Maxwell pode ser classificado em cinco tipos, determinados pela multiplicidade das raízes da eq. (4.31), que podem ser expressos em termos do escalar  $K$  de acordo com [68]:

1. tipo geral, quando  $K \neq 0$  (não degenerado). Neste caso, temos duas direções nulas principais  $\varphi_{AB} = \alpha_{(A} \beta_{B)}$  e o bi-espinor ainda pode ser:
  - (a) tipo não-simples, quando  $K_2 \neq 0$ .
  - (b) tipo simples, quando  $K_2 = 0$ . Estes bi-espinores ainda podem ser:
    - i. tipo-espaço, quando  $K_1 < 0$ ;
    - ii. tipo-tempo, quando  $K_1 > 0$ .
2. tipo especial, quando  $K = 0$  (degenerado ou nulo). Neste caso, temos apenas uma direção nula principal  $\varphi_{AB} = \alpha_{(A} \alpha_{B)}$  e o bi-espinor é também tipo simples.
3. tipo 0 (zero), quando o bi-espinor for identicamente nulo.

Para cada tipo algébrico de bi-espinor, os grupos de isotropia podem ser determinados e o bi-espinor pode ser colocado em uma forma canônica definida em termos dos três escalares complexos  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , de acordo com a tab. (4.5) na página 116.

A classificação algébrica de bi-espinores está implementada no módulo `BIVTCLA` de `TCLASSI`. No algoritmo utilizado nesta primeira implementação os bi-espinores são classificados em tipo-geral, tipo-especial e tipo 0 (todos componentes nulos), sem considerar

nenhuma subdivisão. Cada tipo recebe uma abreviatura contendo um caracter: a letra  $g$  para o tipo-geral,  $s$  para o tipo-especial e 0 (zero) para o tipo 0.

O algoritmo para a classificação de bi-espinores é formado por duas partes. Na primeira, é verificado se o bi-espinor está em uma das formas canônicas possíveis. Este teste inicial evita obter a classificação diretamente do escalar  $K$  dado pela eq. (4.33), considerando apenas os componentes do bi-espinores que são, via de regra, expressões algébricas mais simples do que  $K$ . O resultado é apresentado com as quantidades que o programa considera não-nulas, para serem verificadas pelo usuário se são realmente diferentes de zero. A segunda parte é utilizada nos casos em que o bi-espinor não está na forma canônica. Ela consiste simplesmente em verificar se  $K$  é zero ou não. Aqui também, o programa imprime  $K$  e pede ao usuário para verificar se é realmente não-nulo.

bi-espinor	Nome abreviado	Grupo de Isotropia	Forma Canônica I	Forma Canônica II
tipo-especial	$s$	$n$	$\varphi_{00} = 1$	$\varphi_{11} = 1$
tipo-geral	$g$	$e$	$\varphi_{10} \neq 0$	<i>não tem</i>
0	0	6	$\varphi_{AB} = 0$ (todos)	<i>não tem</i>

Tabela 4.5: Os tipos de bi-espinores com os nomes, abreviaturas, formas canônicas usadas em *TCLASSI* e os os grupos de isotropia. As abreviaturas destes grupos são (cf. tab. (1.1), p. 24): 6 para o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ ;  $e$  para  $SO(1, 1) \times SO(2)$ ; e  $n$  para o grupo das rotações nulas com 2 parâmetros. As formas canônicas para o tipo-geral dadas por  $\varphi_{00} = \varphi_{11} \neq 0$  e  $\varphi_{00} = -\varphi_{11} \neq 0$  não são estão implementadas.

No módulo *BIVTCLA* estão implementados os comandos (*SIGMACLA*), (*BVTTORCLA*) e (*BVPTORCLA*) que realizam as classificações dos bi-espinores  $\Sigma_{AB}$  (*SIGMA*),  $\mathcal{M}_{AB}$  (*BIVTTOR*) e  $\mathcal{B}_{AB}$  (*BIVPTOR*), respectivamente, do conjunto mínimo  $C_0$  (cf. tab. (3.1), p. 56). Os bi-espinores *BVTTOR* e *BVPTOR* estão implementados em *TEQUSPI*. Antes de realizar as classificações, estes comandos fazem com que as quantidades calculadas nas classificações anteriores retornam aos valores iniciais.

Em geral podemos obter a classificação de um bi-espinor simétrico qualquer denominado *spinor*, por exemplo, com o comando (*BIVTCLA spinor*), que é implementado de modo semelhante a *TPETROV*. Da mesma forma, antes de realizar uma nova classificação

usando BIVTCLA o comando (CLEANBIVCLA) deve ser executado para que os dados das classificações anteriores sejam removidos.

Uma outra maneira de determinar a classificação de  $\Sigma_{AB}$  (SIGMA) consiste em calcular o escalar  $K = \Sigma_{AB} \Sigma^{AB}$  que está implementado em BIVTCLA como SIGMASQ. Analogamente, as classificações de BIVTTOR e BIVPTOR podem ser obtidas calculando os escalares BIVTTORSQ e BIVPTORSQ, respectivamente.

Concluídas as classificações das partes irreduzíveis da curvatura, resta considerar a classificação algébrica da torção. Como o espinor de Lanzaos da torção não pode ser usado para construir um problema de auto-valores, temos que considerar apenas a classificação do traço e do pseudo-traço. A seguir vamos mostrar como obter essas classificações usando o módulo VECTCLA.

A classificação algébrica de um vetor cujos componentes são dependentes da posição pode ser considerada em duas etapas. Inicialmente, o vetor é classificado em tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-nulo. Posteriormente, esta classificação é refinada pela caracterização das propriedades das suas derivadas covariantes de primeira ordem [41].

Nesta primeira implementação, o módulo VECTCLA apenas classifica os vetores em tipo-tempo, tipo-espaço, tipo-nulo e tipo 0 (todos componentes nulos), sem considerar as propriedades das derivadas covariantes.

O algoritmo usado para classificar vetores é composto de duas partes. Na primeira, ele verifica se o vetor está em uma das formas canônicas possíveis para os vetores tipo-tempo, tipo-espaço, tipo-nulo ou tipo 0 (todos componentes nulos) dadas na tab. (4.6) na página 119. Cada um desses tipos tem uma abreviação contendo um caracter, a saber: a letra  $t$  para tipo-tempo,  $s$  para tipo-espaço,  $n$  para tipo-nulo e 0 (zero) para tipo 0. Dessa forma o resultado é obtido sem que seja necessário verificar o sinal do quadrado da norma do vetor, embora as quantidades consideradas não-nulas sejam apresentadas para que o usuário verifique se elas são diferentes de zero.

A segunda parte do algoritmo para classificar vetores é utilizada quando o vetor não está na forma canônica. Ela consiste em utilizar o quadrado da norma do vetor para verificar se o vetor é tipo-nulo. Se isto não ocorrer, o programa informa que o vetor pode ser tipo-tempo ou tipo-espaço e pede ao usuário para verificar o *sinal* do quadrado da norma do vetor. Neste último caso, o tipo do vetor tem como abreviatura a letra  $i$  (para indeterminado). É importante observar que assinatura da métrica é, obviamente, levada

em consideração no algoritmo.

Existem sete vetores que fazem parte do conjunto completo mínimo  $C_q$  de escalares de Cartan de ordem  $q$ , usado no algoritmo para testar a equivalência (cf. teorema 3.1, p.81). Para  $q = 0$ , temos os espinores  $\mathcal{T}_{AX'}$  (SPTTOR) e  $\mathcal{P}_{AX'}$  (SPPTOR) que correspondem ao traço e ao pseudo-traço da torção, respectivamente. Os outros cinco aparecem quando  $q = 1$ , onde temos os vetores correspondentes às derivadas covariantes  $\nabla_{AX'}\Lambda$  (DTLAMBDA),  $\nabla_{AX'}\Omega$  (DOMEGA) e  $\nabla_{AX'}\mathcal{T}$  (DSCTTOR) e aos espinores  $\mathcal{U}_{AX'}$  (TSIGM) e  $\mathcal{V}_{AX'}$  (PSIGM). Cada um destes vetores pode ser classificado usando o comando (VECTCLA *spinor*), onde *spinor* deve ser o espinor correspondente a um vetor real. Quando este comando for utilizado, os dados armazenados nas classificações anteriores são automaticamente removidos com o comando (VECTCLAINI).

As classificações dos espinores que correspondem ao traço (SPTTOR) e ao pseudo-traço (SPPTOR) da torção também podem ser obtidas com os comandos (TTORCLA) e (PTORCLA), respectivamente, que estão implementados em VECTCLA. Cada vez que estes comandos são executados, os dados armazenados nas classificações anteriores são removidos.

Consideremos, por exemplo, a classificação do espinor correspondente ao pseudo-traço da torção (SPPTOR) da solução de Tsoubelis, dada pelas eqs. (4.23)–(4.24), utilizando novamente o arquivo `tsoub1.lor` (veja listagem na p. 218). Depois de carregar `tsoub1.lor` e os módulos `TPSIPHI` e `VECTCLA`, calculamos e classificamos SPPTOR com os comandos

```
SHP> (WMAKE SPPTOR)
SPPTOR      = (2) 1/2 1/2r S0
01'
```

```
SHP> (VECTCLA SPPTOR)
```

```
Please check that
```

```
SPPTOR      = (2) 1/2 1/2r S0
01'
```

```
is really non-zero!
If so, vector type is space-like
```

Os vetores que correspondem aos espinores SPTTOR e SPPTOR também pode ser classificados usando `WMAKE` para calcular os quadrados das suas normas `SPTTORSQ` e `SPPTORSQ`, respectivamente, que estão implementados em `VECTCLA`.

Vetor	Nome abreviado	Grupo de Isotropia	Forma Canônica I	Forma Canônica II
tipo-espaço	$s$	$t$	$\mathcal{V}_{00'} = -\mathcal{V}_{11'} \neq 0$	$\mathcal{V}_{01'} = \mathcal{V}_{10'} \neq 0$
tipo-tempo	$t$	$p$	$\mathcal{V}_{00'} = \mathcal{V}_{11'} \neq 0$	<i>não tem</i>
tipo-nulo	$n$	$r$	$\mathcal{V}_{00'} = 1$	$\mathcal{V}_{11'} = 1$
0	0	6	$\mathcal{V}_{AB'} = 0$ ( <i>todos</i> )	<i>não tem</i>

Tabela 4.6: Os tipos de vetores com os nomes, abreviaturas, formas canônicas usadas em *TCLASSI* e os grupos de isotropia. As abreviaturas desses grupos são (cf. tab. (1.1), p. 24):  $p$  para o grupo  $SO(3)$ ;  $t$  para  $SO(2, 1)$ ;  $r$  para o grupo gerado por  $SO(2)$  e rotações nulas com 2 parâmetros; e 6 para o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ . A forma canônica  $\mathcal{V}_{01'} = -\mathcal{V}_{10'} \neq 0$  para os vetores tipo-espaço também é uma alternativa aceitável por *TCLASSI*.

# Capítulo 5

## Testando a equivalência com *TCLASSI*

### 5.1 Introdução

Neste capítulo concluímos a discussão dos resultados obtidos na terceira etapa do projeto de tese, iniciada no capítulo anterior, abordando os módulos de *TCLASSI* que são especificamente relacionados com a implementação do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos com torção.

Na segunda seção, discutimos a implementação dos passos do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos com torção. Na terceira seção, mostramos as maneiras de obter a classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan usando *TCLASSI*. Na quarta, mostramos como obter e interpretar um sumário dos resultados de uma classificação, contendo as quantidades discretas calculadas. Na quinta, apresentamos alguns recursos de *TCLASSI* que são úteis para realizar a classificação das soluções exatas das TGT e para lidar com o problema da equivalência na prática. A sexta seção contém uma breve descrição dos módulos de *TCLASSI* e dos recursos de cálculo disponíveis. Na sétima seção discutimos os programas escritos para testar os programas e algoritmos de *TCLASSI*.

Os resultados principais deste capítulo fazem parte de um artigo sobre a equivalência de soluções das TGT na prática, que está sendo escrito em colaboração [25].

## 5.2 Etapas de uma classificação

Nesta seção discutimos a implementação em *TCLASSI* dos passos do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan (cf. seção 2.4). Como esse algoritmo é uma extensão do algoritmo de Karlhede (cf. seção 1.4) para espaços-tempos Riemannianos, a sua implementação foi realizada seguindo o mesmo procedimento utilizado para implementar o algoritmo de Karlhede em *CLASSI*, descrito na seção 1.6. Por esta razão, os nome de vários módulos de *TCLASSI* diferem dos nomes dos módulos correspondentes de *CLASSI* apenas pela letra “T” inicial.

A implementação dos passos do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan foi realizada utilizando espinores com dois componentes segundo as etapas abaixo.

No passo 1 do algoritmo temos o cálculo dos escalares de Cartan do conjunto  $I_q$ , para  $q \geq 0$ . Em vista da grande quantidade de escalares de Cartan, a implementação desse passo exigiu todo um trabalho teórico [29] que resultou no conjunto completo mínimo de escalares de Cartan definido na seção 3.4. Assim, apenas os espinores do conjunto completo mínimo precisam ser calculados. Na versão atual de *TCLASSI* estes espinores estão implementados para  $q \leq 3$ .

O passo 1 está implementado através dos módulos: (i) TSPINOR, para calcular o espinor da conexão; (ii) TPSIPHI (ou SPTCURV) para calcular as partes irredutíveis dos espinores de curvatura e de torção; (iii) TSYMSP1, para calcular d’Alembertianos e derivadas covariantes de espinores totalmente simetrizados; (iv) TEQUSP1 para calcular o restante dos espinores do conjunto completo mínimo até as derivadas de terceira ordem da curvatura e de quarta ordem da torção, de acordo com as tabs. (3.1)–(3.6).

No passo 2, para  $q = 0$ , temos as classificações algébricas dos elementos do conjunto mínimo  $C_0$ , dados na tab. (3.1) na página 56, e os procedimentos para fixar o referencial canônico. Os tipos de Petrov e de Segre dos espinores com as mesmas simetrias dos espinores de Weyl e de Ricci da TRG são obtidos utilizando o módulo SEGPET e os tipos dos bivectores e vetores através dos módulos BIVTCLA e VECTCLA, respectivamente. O espinor de Lanczos da torção e sua derivada covariante não são classificados.

Para facilitar a comparação com os resultados que podem ser obtidos a partir da métrica utilizando *CLASSI*, é conveniente fixar inicialmente o referencial canônico a partir das direções nulas principais do espinor de Weyl (TPSI). Neste caso, os procedimentos para

fixar o referencial começam com a transformação de díada (DYTR ou DYTRSP) que coloca o espinor de Weyl (TPSI) na forma canônica (cf. tab. (4.3)). Da mesma forma que na TRG, esta é a parte mais difícil de ser realizada na prática. Considerando que não existe em *TCLASSI* uma extensão do módulo DYTAUT [17], que realiza automaticamente a mudança para o referencial canônico do espinor de Weyl em *CLASSI*, a transformação é obtida iterativamente utilizando o módulo TDYTSYM (veja a seção 5.5). Em seguida, os demais espinores do conjunto  $C_0$  também devem ser sucessivamente colocados nas respectivas formas canônicas (cf. tabs. (4.4)–(4.6)), fixando o referencial o máximo possível.

As transformações DYTRSP e DYTR, utilizadas para colocar os espinores nas formas canônicas (veja a seção 4.3), estão implementadas nos módulos TDYTRSP de *TCLASSI* e DYTRSP de *CLASSI*. A transformação do espinor SPLTOR de Lanczos da torção a partir de UNSPLTOR estão implementadas no módulo TDYTRSP de *TCLASSI*, que carrega o módulo DYTRSP de *CLASSI* onde estão implementadas as transformações dos demais espinores.

Nos passos 3 e 4, para  $q \geq 0$ , temos a determinação do grupo de isotropia e a obtenção do número de funções funcionalmente independentes, realizadas através dos módulos ISOTSTOR de *TCLASSI*, ISOTST e FUNTST de *CLASSI*.

O módulo ISOTSTOR introduz algumas mudanças nos programas que implementam o comando ISOTST no módulo ISOTST, usado para determinar o grupo de isotropia a partir das formas canônicas [17]. Estas mudanças implementam, essencialmente, o uso de  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI) ou  $\psi_{ABCD}$  (PSILTOR) para determinar inicialmente o referencial canônico e uma alteração no algoritmo afim de que os grupos de isotropia corretos sejam obtidos para bi-espinores simétricos.

O grupo de isotropia de um espinor denominado *tspinor*, por exemplo, é determinado com o comando (ISOTST *tspinor*). Este comando apresenta uma mensagem informando se o espinor está na forma canônica ou não. Se o espinor estiver na forma canônica o grupo de isotropia correto é apresentado, em caso contrário um provável grupo de isotropia é sugerido. Utilizando novamente ISOTST em um outro espinor, o grupo de isotropia comum a ambos é obtido se os espinores estiverem nas respectivas formas canônicas. O resultado pode ser verificado com o comando (ISOTST). Os dados retornam aos valores iniciais, onde o grupo de isotropia coincide com o grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ , através do comando (CLEANISOTOR) que substitui os comandos (CLEANISOTST) e (ISOTSINI) de *CLASSI*.

Não foi necessário implementar nenhuma extensão de *CLASSI* para determinar o

número de funções funcionalmente independentes. A independência funcional é encontrada a partir do posto do jacobiano das possíveis funções funcionalmente independentes, utilizando o módulo FUNTST [17].

As funções funcionalmente independentes entre os componentes de um espinor denominado *tspinor*, por exemplo, são obtidas utilizando o comando (FUNTST *tspinor*). Utilizando novamente FUNTST em outro espinor obtém-se as funções que são funcionalmente independentes não só entre os componentes do espinor, mas também entre todas as funções funcionalmente independentes encontradas anteriormente. O resultado pode ser verificado utilizando o comando (FUNTST). Os dados obtidos com o teste da dependência funcional são removidos com o comando (FUNTSINI).

No passo 5, para  $q \geq 1$ , é necessário comparar os grupos de isotropia e os números de funções funcionalmente independentes. A implementação deste passo é uma consequência direta das implementações dos passos 3 e 4.

No passo 2, para  $q > 0$ , toda vez que ocorrer uma redução do grupo de isotropia, isto é, quando o grupo de isotropia  $H_q$  for um subgrupo de  $H_{(q-1)}$ , o referencial pode ser fixado um pouco mais. Isto pode ser feito através das classificações algébricas dos elementos de  $C_q$  ou usando as rotações generalizadas de  $H_{(q-1)}$  que não pertencem a  $H_q$ , conforme iremos discutir na próxima seção.

Por último temos o módulo *tclassi*, que utiliza os comandos que implementam os passos do algoritmo em um programa onde os mesmos são sucessivamente aplicados até as derivadas de terceira ordem da curvatura e quarta ordem da torção. Este programa implementa o comando TCLASSIFY que é utilizado para obter a classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan. Este comando será discutido na próxima seção, onde mostramos as maneiras como os comandos que implementam os passos do algoritmo para testar a equivalência podem ser utilizados para obter a classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan.

### 5.3 Maneiras de realizar uma classificação

Nesta seção vamos apresentar duas maneiras de realizar a classificação dos espaços-tempos de Riemann-Cartan usando *TCLASSI*. Em uma delas todos os cálculos do algoritmo são realizados em uma ordem prefixada pelo sistema sem a interferência do usuário. Na outra,

os cálculos são realizados pelo usuário interativamente, passo a passo, até completar a classificação.

Considerando que *TCLASSI* não interfere com *CLASSI*, a parte determinada apenas pela métrica de um espaço-tempo de Riemann-Cartan também pode ser classificada usando *CLASSI* de acordo com as maneiras discutidas em [17]. O comando (TCLASSINI) deve ser usado antes de repetir uma classificação interativamente, para que sejam removidos os dados das classificações anteriores e fazer com que os parâmetros utilizados voltem aos valores iniciais.

Para classificar um espaço-tempo de Riemann-Cartan devemos inicialmente carregar o módulo TCLASSI, que carrega todos os módulos necessários. Em seguida, devemos entrar com os dados da métrica e da torção, conforme discutimos na seção 4.2. No que se segue, consideraremos que estas etapas já foram cumpridas, faltando apenas obter a classificação.

O comando (TCLASSIFY) é utilizado para realizar uma classificação através da maneira prefixada pelo sistema. Dessa forma, todos os cálculos do algoritmo são realizados automaticamente até concluir a classificação ou até completar os passos para  $q = 3$ . Caso seja necessário prosseguir com a classificação, uma mensagem informa esta necessidade e a classificação é interrompida. Este comando também realiza a mudança para uma base de tétradas nulas automaticamente. Quando o referencial utilizado não for canônico, o usuário é informado deste fato e a classificação também é interrompida ao final dos passos para  $q = 0$ .

Os cálculos do algoritmo também podem ser realizados apenas com os escalares de Cartan de ordem  $q$  utilizando o comando (TCLASSIFY $q$ ), onde  $q = 0, \dots, 3$ . Neste caso, porém, a mudança para tétradas nulas deve ser realizada interativamente. Este comandos serão discutidos a seguir, pois são utilizados sucessivamente no comando TCLASSIFY.

O comando (TCLASSIFY $q$ ), para  $q = 0, \dots, 3$ , calcula os espinores do conjunto mínimo  $C_q$  com WMAKE de acordo com a *ordem* dada nas tabs. (3.1)–(3.6) nas páginas 56, 66, 73, 74, 78 e 79. Após o cálculo de cada espinor os testes para determinar o grupo de isotropia e o número de funções funcionalmente independentes são realizados com ISOTST e FUNTST, respectivamente. Estes comandos são reunidos no comando FUNISOTST, que é utilizado para  $q \geq 1$ . No final o grupo de isotropia e o número de funções independentes encontrados podem ser obtidos com os comandos (ISOTST) e (FUNTST), respectivamente.

No comando (TCLASSIFY0) temos as classificações algébricas dos elementos do con-

junto mínimo  $C_0$ , dados na tab. (3.1) na página 56, e os procedimentos para fixar o referencial canônico. Primeiro são obtidos os tipos de Petrov de Segre dos espinores com as mesmas simetrias dos espinores de Weyl e de Ricci da TRG utilizando o módulo SEGRET, depois os tipos dos bivectores e dos vetores através dos módulos BIVTCLA e VECTCLA, na ordem dada na tab. (3.1). Dessa forma, o referencial canônico é fixado inicialmente pelas direções nulas principais do espinor de Weyl (TPSI), a fim de facilitar a comparação com os resultados correspondentes obtidos usando CLASSI. Note que o espinor de Lanczos da torção (SPLTOR) e sua derivada covariante (DSPLTOR) não são classificados.

A maneira utilizada em (TCLASSIFY0) para fixar inicialmente o referencial é controlada por três chaves, que não estão acionadas quando TCLASSI é carregado. Quando a chave PSILTFIRST está acionada PSILTOR é usado no lugar de TPSI. Acionando a chave SEGREFIRST o referencial passa a ser fixado pelos espinores com as mesmas simetrias do espinor de Ricci da TRG, começando por TPhi. A chave THETAFIRST faz com que THETA venha em primeiro lugar, sendo classificado antes de TPhi.

A transformação de díada (DYTR ou DYTRSP) que coloca o espinor de Weyl (TPSI) na forma canônica (cf. tab. (4.3), p. 106) deve ser dada antes de utilizar o comando (TCLASSIFY). As transformações (DYTRSP) que colocam os demais espinores do conjunto  $C_0$  nas respectivas formas canônicas (cf. tabs. (4.4)–(4.6), p. 112, 116, 119) também devem ser dadas, a fim de que a classificação não seja interrompida quando os passos para  $q = 0$  forem concluídos.

No passo 2, para  $q > 0$ , o referencial pode ser fixado um pouco mais quando ocorrer uma redução do grupo de isotropia. Entretanto, isto deve ser feito interativamente, pois o comando TCLASSIFY apenas testa se uma invariância existente para  $q = 0$  permanece, sem determinar novas formas canônicas quando isto não acontece.

A quantidade de informação apresentada durante uma classificação pode ser controlada através das chaves SHORTPRI, LESSPRI e MUCHPRI, que também são utilizadas por CLASSI [17]. Estas chaves não estão acionadas quando TCLASSI é carregado. Quando a chave LESSPRI está acionada os escalares de Cartan de ordem  $q > 0$  não são mais escritos. Uma redução ainda maior é obtida com SHORTPRI. Agora os escalares de Cartan de ordem  $q = 0$  também deixam de ser escritos. Neste caso, além do elemento de linha (DS2) e da torção (ITOR), são escritos apenas os resultados das classificações algébricas dos escalares de Cartan de ordem  $q = 0$  e dos testes dos correspondentes grupos de isotropia e números

de funções independentes.

Com a chave MUCHPRI acionada o resultado é acrescido de alguns tensores, onde destacamos o tensor de Ricci  $R_{ab}$  (TRIC), o pseudo-tensor de Ricci  $P_{ab}$  (PTRIC), o espinor da conexão (STGAM) e as partes irredutíveis dos tensores de curvatura e torção.

O comando TCLASSIFY também pode ser utilizado tendo como argumento o nome (com 6 caracteres no máximo) de um arquivo de métrica-torção com os dados de entrada de um espaço-tempo de Riemann-Cartan. Por exemplo, a classificação do espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel dado pelas eqs. (4.11)–(4.12) pode ser obtida com o comando (TCLASSIFY "tgotyh.spi"), onde tgotyh.spi (veja listagem na p. 214) é o arquivo de com os dados deste espaço-tempo. Neste caso, os comandos (CLEAN) e (TCLASSINI) são utilizados, o arquivo tgotyh.spi é carregado e todos os resultados da classificação são escritos no arquivo tgotyhsp.RES. Um sumário da classificação também é escrito no arquivo tgotyhsp.TMS. Este sumário será discutido na próxima seção.

Consideremos agora a maneira interativa, onde os cálculos do algoritmo são realizados pelo usuário, passo a passo. Quando a classificação é realizada dessa forma existe uma certa liberdade para realizar os cálculos em cada passo do procedimento prático. Por exemplo, apesar de nenhuma classificação algébrica ter sido implementada no comando (TCLASSIFY) para  $q > 0$ , várias delas podem ser realizadas interativamente e utilizadas para fixar o referencial. A seguir sugerimos algumas maneiras de realizar esses cálculos.

Inicialmente, para  $q = 0$ , é necessário calcular os elementos do conjunto mínimo  $C_0$  (tab. (3.1), p. 56) e fixar o referencial o máximo possível colocando os espinores nas formas canônicas. Esses espinores podem ser calculados com o comando WMAKE na ordem que for mais conveniente para fixar o referencial. Utilizando ISOTST e (CLEANISOTOR) podemos determinar quais elementos de  $C_0$  estão na forma canônica. Utilizando novamente ISOTST apenas nos espinores que estão na forma canônica o grupo de isotropia comum aos mesmos é obtido e o referencial é fixado a menos dessas isotropias.

Se o referencial não estiver completamente fixo, será necessário colocar os demais espinores nas respectivas formas canônicas, para fixar o referencial o máximo possível. Para tanto, precisamos realizar a classificação algébrica de cada um deles e determinar a sua forma canônica. Depois, é necessário usar TDYTSYM para obter a transformação para o referencial canônico e TDYTRSP para realizar essa mudança de referencial (veja a seção 4.3), a fim de podermos prosseguir com a classificação.

Entretanto, como ocorre na TRG [17], nem sempre é possível colocar todos os espinores de  $C_0$  nas respectivas formas canônicas em um mesmo referencial. Por isso, os espinores com os menores grupos de isotropia devem ser colocados nas formas canônicas em primeiro lugar, procurando fixar o referencial com o menor número possível de espinores. Considerando que, de acordo com as tabs. (4.3)–(4.4) nas páginas 106 e 112), o referencial está completamente fixo em 50% dos tipos de Petrov e em 27% dos tipos de Segre, os procedimentos para fixar o referencial devem começar com os elementos de  $C_0$  que têm as mesmas simetrias dos espinores de Weyl e de Ricci da TRG. Os comandos para obter as classificações algébricas desses espinores estão implementados em SEGPET e podem ser utilizados de acordo com as maneiras discutidas na seção 4.4.

Uma das formas mais simples de realizar os passos do algoritmo para  $q = 0$ , consiste em utilizar os seguintes comandos que atuam nos 17 escalares de Cartan do conjunto mínimo  $C_0$ :

1. (PETCLASSI), que atua em TPSI e PSILTOR;
2. (SEGTCLASSI), atuando TPhi, THETA, DSPTTOR, DSPPTOR e PHILTOR;
3. (BIVTCLASSI), que atua nos bivectores SIGMA, BVTOR e BVPTOR;
4. (VECTCLASSI), atuando em SPTOR e SPPTOR;
5. (SCLTCLASSI), que atua nos escalares TLAMBDA, OMEGA e SCTOR;
6. (SPLTORCLA), que atua em SPLTOR e DSPLTOR.

Os cinco primeiros comandos na lista acima podem ser utilizados para fixar inicialmente o referencial. Na ordem apresentada, o referencial é fixado pelas direções nulas principais do espinor TPSI, pois ele é o primeiro a ser classificado. Utilizando cada um dos comandos acima as classificações algébricas são realizadas, o grupo de isotropia de cada espinor é determinado com ISOTST e o número de funções independentes é obtido com FUNTST. Além dos escalares, apenas o espinor de Lanczos da torção SPLTOR e a sua derivada totalmente simetrizada DSPLTOR não são classificados. Utilizando (ISOTST) e (FUNTST) no final, obtemos o grupo de isotropia  $H_0$  e o número  $t_0$  de funções funcionalmente independentes para  $q = 0$ .

Considerando que o espinor de curvatura é decomposto em partes irreduzíveis de acordo com a eq. (3.16), podemos obter a sua classificação algébrica utilizando os coman-

dos (TPSICLA), (TPHICLA), (THETACLA) e (SIGMACLA) para classificar o espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI), o espinor de Ricci  $\Phi_{AX'BY'}$  (TPHI), o pseudo-espinor de Ricci  $\Theta_{AX'BY'}$  (THETA) e o bi-espinor de Ricci  $\Sigma_{AB}$  (SIGMA), respectivamente. No caso do espinor de torção, decomposto em partes irredutíveis de acordo com a eq. (3.15), podemos usar os comandos (TTORCLA) e (PTORCLA) para classificar o traço  $\mathcal{T}_{X'A}$  (SPTTOR) e o pseudo-traço  $\mathcal{P}_{X'A}$  (SPPTOR), respectivamente. O espinor de Lanczos  $\mathcal{L}_{X'ABC}$  (SPLTOR) não é classificado, apenas se verifica se ele é zero ou não. As partes irredutíveis dos espinores de curvatura e de torção também podem ser calculadas com os comandos (WMAKE TRIESP) e (WMAKE TORSP), respectivamente, que estão implementados em TPSIPHI.

Depois de obter o grupo de isotropia  $H_0$  e o número  $t_0$  de funções funcionalmente independente para  $q = 0$ , prosseguimos aplicando os passos do algoritmo para  $q = 1$ . Assim, inicialmente temos que calcular os 21 espinores do conjunto mínimo  $C_1$  (cf. tab.3.2, p. 66). Em seguida, utilizando o mesmo procedimento anterior, devemos colocar os elementos de  $C_1$  na forma canônica, determinar o grupo de isotropia  $H_1$  e obter o número  $t_1$  de funções funcionalmente independentes.

Quando o grupo de isotropia  $H_1$  for um subgrupo de  $H_0$ , o referencial pode ser fixado um pouco mais. Isto pode ser feito de duas maneiras. Quando esta redução for determinada por uma parte dos sete vetores existentes em  $C_1$  (cf. tab. (3.2), p. 66), estes vetores podem ser classificados usando VECTCLA, de acordo com as maneiras discutidas na seção 4.4 e depois colocados nas formas canônicas (cf. tab. (4.6), p. 119). Dessa forma o referencial é alinhado o máximo possível com os vetores, sendo fixado um pouco mais.

Quando as classificações algébricas não puderem ser usadas, uma outra maneira de fixar o referencial consiste em usar as rotações generalizadas de  $H_{(q-1)}$  que não pertencem a  $H_q$  para determinar relações algébricas entre os elementos de  $C_q$ . Consideremos, por exemplo, o espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel dado pelas eqs. (4.11)–(4.12). O espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI) desse espaço-tempo é Petrov tipo D, como podemos verificar carregando o arquivo `tgotyh.spi` e usando (TPSICLA). Isto significa que o grupo de isotropia  $H$  de TPSI é formado por rotações espaciais em torno de um eixo e transformações de Lorentz especiais ao longo desse mesmo eixo (cf. tab. (4.3), p. 106) definidas por [39]

$$H = \begin{pmatrix} a e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & a e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  e  $a$  são parâmetros reais. Entretanto, a derivada totalmente simetrizada DTPSI de TPSI não é invariante sob o grupo de isotropia  $H$  de TPSI dado pela eq. (5.1), pois se transforma de acordo com

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{20'} = a^2\nabla\Psi_{20'}, \quad (5.2)$$

$$\widetilde{\nabla}\Psi_{31'} = a^{-2}\nabla\Psi_{31'}, \quad (5.3)$$

sob a ação de  $H$ . Portanto, ocorre uma redução do grupo de isotropia, pois o grupo de isotropia comum de TPSI e DTPSI é formado apenas pelas rotações espaciais. Neste caso, podemos fixar um pouco mais o referencial escolhendo o parâmetro  $a$  das transformações de Lorentz especiais tal que  $\widetilde{\nabla}\Psi_{20'}$  e  $\widetilde{\nabla}\Psi_{31'}$  sejam iguais a menos de sinal. Um procedimento semelhante pode ser realizado com os demais elementos de  $C_1$ , fixando o referencial o máximo possível.

Depois de fixar o referencial o máximo possível, podemos obter o grupo de isotropia  $H_1$  e o número  $t_1$  das funções funcionalmente independentes utilizando o comando FUNISOTST. Concluídos estes passos, resta apenas comparar os resultados obtidos com  $H_0$  e  $t_0$  para verificar se a classificação está completa ou se é preciso prosseguir com o algoritmo para  $q = 2$ .

Se o algoritmo não terminar na etapa  $q = 1$ , prosseguimos com os passos calculando agora os elementos do conjunto mínimo  $C_2$  de escalares de Cartan para  $q = 2$  (cf. tabs. (3.3)–(3.4), p. 73, 74) e procedendo da mesma maneira que foi utilizada anteriormente para  $q = 1$ . Caso ainda seja necessário fixar um pouco mais o referencial, podemos utilizar as classificações algébricas dos elementos de  $C_2$  que podem ser obtidas através dos módulos SEGPET e BIVTCLA. Em  $C_2$  podemos determinar os tipos de Petrov de PSIXITH, ATPSI e APSILTOR; os tipos de Segre de ATPHI, ATHETA, ADSPTTOR, ADSPPTOR, APHILTOR, DTSIGM, DPSIGM, D2TLAMBDA, D2OMEGA e D2SCTTOR; e, finalmente, também podemos classificar os bi-espinores BVTSIGM, ASIGMA, ABVTTOR e ABVPTOR.

Se a classificação do espaço-tempo não ficar concluída para  $q = 2$ , então prosseguimos para  $q = 3$ , utilizando o mesmo procedimento anterior. O conjunto  $C_3$  contém sete vetores que podem ser classificados utilizando VECTCLA, a saber: ADTLAMBDA, ADOMEGA, ADSCTTOR, ATSIGM, APSIGM, A2SPTTOR e A2SPPTOR. (cf. tabs. (3.5)–(3.6), p. 78, 79).

Qualquer classificação que não terminar quando  $q = 3$  não poderá ser concluída utilizando a versão atual de TCLASSI, pois o algoritmo está implementado até os escalares de Cartan de ordem 3 apenas.

Um exemplo de como obter uma classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan pela maneira interativa será dado no próximo capítulo, onde obtemos a classificação do espaço-tempo tipo Gödel dado pelas eqs. (4.11)–(4.12) e investigamos algumas de suas propriedades.

Na próxima seção apresentaremos uma maneira de obter um sumário com algumas quantidades discretas obtidas em uma classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan.

## 5.4 Sumários de uma classificação

Um aspecto importante do algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan consiste nas *condições necessárias* que são utilizadas em cada ordem de diferenciação  $q = 0, 1, 2, \dots, (p + 1)$  que possibilitam determinar quando a equivalência não ocorre.

Nesta seção vamos apresentar uma maneira de obter um sumário com um conjunto de quantidades (locais) invariantes que podem ser obtidas utilizando essas condições. Dessa forma, podemos comparar espaços-tempos de Riemann-Cartan e determinar, em muitos casos, quando eles *não* são equivalentes. Este sumário pode ser obtido com o comando (TCLASSISUM). Este comando está implementado no módulo TCLASUM, que é carregado por TCLASSI.

Alguns exemplos de sumários de soluções exatas das TGT estão apresentados na tab. (5.1) na página 131. Os nomes utilizados para as soluções são os dos arquivos de métrica-torção que estão no diretório `tmetrics`.

O sumário também pode ser apresentado de uma forma distinta da tab. (5.1), com a indicação do que cada parte representa, acionando a chave MUCHPRI. Consideremos, por exemplo, o espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel (arquivo `tgotyh.spi`). O sumário da sua classificação está apresentado na primeira linha da tabela 5.1. Acionando MUCHPRI e repentinando o comando (TCLASSISUM), obtemos:

```
SHP> (TCLASSISUM)
```

```
TGOTYH.SPI
```

```
Godel-type metric with torsion. Conditions for homogeneity in  
space and time: S=L=const, H=2*W*D, W=const; D''/D=const= m-2.  
c.f. M.J. Reboucas, J.E. Aman, J.Math.Phys., Vol.28, p.888 (1987).  
c.f. M.J. Reboucas and J. Tiomno, Phys.Rev.D, vol.28, p.1251 (1983)
```

c.f. J. Duarte De Oliviera, A.F.F. Texeira, J. Tiomno, Phys.Rev.D, vol.34, p.3661.

Petrov's classifications:

(a)TPSI: D, (b)PSILTOR: D;

Segre's classifications:

(a)TPHI: s, (b)THETA: 0, (c)PHILTOR: s, (d)DSPTTOR: 0, (e)DSPPTOR: 0;

Bivector's classifications:

(a)SIGMA: 0, (b)BVTTOR: 0, (c)BVPTOR: 0;

Torsion's classification:

(a)TTOR: 0, (b)PTOR: s, (c)LTOR: 1;

Scalar's classifications:

(a)TLAMBD: 1, (b)OMEGA: 0, (c)SCTTOR: 0;

Dim.Symmet.Gr.: 5, Dim.Isot.Gr.: 1, Isot.Gr.: ss--, Ind.Funs.: 00--

nome	$\Psi \psi$	$\Phi \Theta \phi$	$\nabla T \nabla P$	$\Sigma B M$	$T P \mathcal{L}$	$\Lambda \Omega T$	$r$	$s$	$H_i$	$t_i$
tgotyh	D D	s 0 s 0 0	0 0 0	0 0 0	0 s 1	1 0 0	5	1	ss--	00--
seitza	0 0	r r 0 0 h	0 0 h	0 0 g	0 n 0	0 0 0	3	1	ss--	22--
seitzb	0 0	r h 0 0 h	0 0 h	g 0 g	0 n 0	0 0 0	3	1	ss--	22--
seitzf	0 0	r h 0 0 h	0 0 h	g 0 g	0 n 0	1 0 0	4	1	ss--	11--
chen	1 1	1 1 1 1 0	0 0 0	g 0 0	s 0 1	0 0 1	2	0	00--	22--
soleng	1 1	d 0 d 0 d	0 0 0	0 0 0	0 s 1	1 0 0	3	0	00--	11--
tsoubl	1 1	d 0 d d d	0 0 0	0 0 0	0 s 1	0 0 0	3	0	00--	11--
twavez	N 0	0 0 0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1	0 0 0	5	2	nn--	11--

Tabela 5.1: Sumários de classificações de espaços-tempos com torção. As colunas contêm os seguintes dados: (1) *nome* é o nome (com 6 caracteres no máximo) de um arquivo de métrica-torção; (2)  $\Psi$  e  $\psi$  são os tipos de Petrov (cf. tab. (4.3), p.106) de TPSI e de PSILTOR, (3)  $\Phi$ ,  $\Theta$ ,  $\phi$ ,  $\nabla T$  e  $\nabla P$  são os tipos de Segre (cf. tab. (4.4), p.112) de TPHI, THETA, DSPTTOR, DSPPTOR e PHILTOR, (4)  $\Sigma$ ,  $B$  e  $M$  são os tipos dos bi-espinores (cf. tab. (4.5), p.116) SIGMA, BVTTOR e BVPTOR, (5)  $T$  e  $P$  são os tipos dos vetores (cf. tab. (4.6), p.119) SPTTOR e SPPTOR, (6)  $\mathcal{L}$ ,  $\Lambda$ ,  $\Omega$  e  $T$  indicam se SPLTOR, TLAMBD, OMEGA e SCTTOR são iguais a zero (0) ou não (1), (7)  $r$  e  $s$  são as dimensões dos grupos de simetria e de isotropia, respectivamente; (8)  $H_q$  ( $q = 0, \dots, 3$ ) é o grupo de isotropia (cf. tab. (1.1), p.24) dos escalares de Cartan de ordem  $q$  e  $t_q$  é o número de funções funcionalmente independentes que eles contêm. Nas oito últimas colunas, o sinal "--" representa um valor não calculado.

## 5.5 Recursos adicionais para uma classificação

Nesta seção apresentamos alguns recursos de *TCLASSI* que são úteis para realizar a classificação das soluções exatas das TGT e para lidar com o problema da equivalência na prática. Mostramos como usar o módulo *TDYTSYM* para realizar interativamente transformações de díada e para identificar um referencial onde um dado espinor esteja na forma canônica.

O módulo *TDYTSYM* provê recursos que permitem ao usuário realizar transformações de díadas interativamente e verificar o efeitos dessas transformações nos elementos do conjunto mínimo de escalares de Cartan que estão implementados em *TCLASSI*. As transformações de díadas implementadas em *TDYTSYM* são denominadas *DYTRX* e são calculadas a partir de três fatores *DYTRX1*, *DYTRX2* e *DYTRX3* nessa ordem. Os elementos do conjunto mínimo transformados por *DYTRX* estão implementados em *TDYTSYM* com nomes que, exceto pelo acréscimo das letras *TR* no final, são iguais aos dos espinores nas tabs. (3.1)–(3.6) nas páginas 56, 66, 73, 74, 78 e 79. Por exemplo, a transformação do espinor *SPTTOR* do traço da torção pela atuação de *DYTRX* resulta no espinor *SPTTORTR*.

Nesta seção vamos mostrar como encontrar uma transformação de díada *DYTRX* que coloque um dado espinor na forma canônica e como realizar a mudança para o referencial especificado pelas direções principais desse espinor. Para que esta mudança seja aplicada automaticamente, conforme vimos na seção 4.3, os valores de *DYTRX* devem ser atribuídos uma transformação *DYTR* ou *DYTRSP* em um arquivo de métrica-torção. Esta é uma das dificuldades que surgem quando lidamos com o problema da equivalência na prática.

Como as transformações de díada *DYTR*, *DYTRSP* e *DYTRX* são elementos do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , suas matrizes deve ter determinante igual a 1. Cada vez que uma dessas transformações for utilizada o sistema automaticamente calcula o determinante correspondente *DYTRDET*, *DYTRSPDET* ou *DYTRXDET* e verifica se é igual a 1. Quando esta condição não for satisfeita, o sistema avisa que a transformação está incorreta.

Como exemplo do uso de *TDYTSYM* vamos obter a transformação de díada *DYTRX* que coloca na forma canônica o espinor de Weyl (*TPSI*) do espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel dado pelas eqs. (4.11)–(4.12). Consideremos que o arquivo de métrica-torção *tgotyh.1or* (veja listagem na p. 216) com os dados de entrada deste espaço-tempo e os módulos *TPSIPHI* e *TDYTSYM* já estejam carregados.

Conforme vimos nas seções 4.3 e 4.4 o espinor de Weyl *TPSI* do espaço-tempo dado

pelas eqs. (4.11)–(4.12) é Petrov tipo D e não está na forma canônica (cf. tab. (4.3, p. 106) no referencial utilizado no arquivo `tgotyh.lor`. Utilizando `WMAKE` podemos obter os componentes não-nulos de `TPSI` através do comando

`SHP> (WMAKE TPSI)`

$$TPSI_0 = \frac{1}{8}L^2 - \frac{3}{4}LW - \frac{1}{4}m^2 + W^2$$

$$TPSI_2 = \frac{1}{24}L^2 - \frac{1}{4}LW - \frac{1}{12}m^2 + \frac{1}{3}W^2$$

$$TPSI_4 = \frac{1}{8}L^2 - \frac{3}{4}LW - \frac{1}{4}m^2 + W^2$$

Para encontrar a transformação `DYTRX` que coloca `TPSI` na forma canônica inicialmente procuramos expressar os componentes de `TPSI` na forma mais simples possível. Como estes componentes estão relacionados entre si de acordo com  $\Psi_2 = \Psi_0/3 = \Psi_4/3$ , podemos usar `RPL` para defini-los em termos de um parâmetro arbitrário `A` apenas utilizando o comando

`SHP> (RPL TPSI 2 TPSI 0 TPSI 3) A/3 $ A $ A $`

`SHP> (WMAKE TPSI)`

$$TPSI_0 = A$$

$$TPSI_2 = \frac{1}{3}A$$

$$TPSI_4 = A$$

Com os componentes de `TPSI` expressos da forma mais simples possível, vamos procurar obter uma transformação de díada `DYTRX` tal que `TPSITR` tenha o maior número possível de componentes nulos, utilizando os fatores `DYTRX1`, `DYTRX2` e `DYTRX3`. Note que a única condição imposta a `DYTRX` é que o determinante `DYTRXDET` seja igual a 1. Assim, primeiramente utilizamos `RPL` para definir `DYTRX1` como sendo uma rotação nula com um parâmetro `B` arbitrário, depois usamos `WMAKE` para calcular `TPSITR`, isto é, `TPSI` transformado. Dessa forma, executamos os seguintes comandos:

`SHP> (RPL DYTRX1)1$B$0$1$`

`SHP> (WMAKE TPSITR)`

$$\text{TPSITR}_0 = AB^4 + 2AB^2 + A$$

$$\text{TPSITR}_1 = AB^3 + AB$$

$$\text{TPSITR}_2 = AB^2 + 1/3A$$

$$\text{TPSITR}_3 = AB$$

$$\text{TPSITR}_4 = A$$

Em seguida procuramos escolher um valor para B de modo que o maior número de componentes de TPSITR seja igual a zero. A solução do sistema de equações  $\Psi_0 = 0$  e  $\Psi_1 = 0$  é  $B = i = \sqrt{-1}$ . Assim, redefinimos DYTRX1 com este valor de B e calculamos novamente TPSITR com os comandos

```
SHP> (RPL DYTRX1)1$i$0$1$
```

```
SHP> (WMAKE TPSITR)
```

$$\text{TPSITR}_2 = -2/3A$$

$$\text{TPSITR}_3 = iA$$

$$\text{TPSITR}_4 = A$$

Depois usamos RPL para definir DYTRX2 como sendo uma outra rotação nula com um parâmetro C e calculamos novamente TPSITR de acordo com:

```
SHP> (RPL DYTRX2)1$0$C$1$
```

```
SHP> (WMAKE TPSITR)
```

$$\text{TPSITR}_2 = -2/3A$$

$$\text{TPSITR}_3 = -2AC + iA$$

$$\text{TPSITR}_4 = -4AC^2 + A + 4iAC$$

Procuramos novamente escolher um valor para  $C$  de modo que o maior número de componentes de  $TPSITR$  seja igual a zero e obtemos que  $C = i/2$ . Assim, redefinido  $DYTRX2$  com  $C = i/2$  e calculando  $TPSITR$  mais uma vez, obtemos

```
SHP> (RPL DYTRX2)1$0$i/2$1$
```

```
SHP> (WMAKE TPSITR)
```

```
TPSITR = -2/3A  
        2
```

Como conseguimos colocar  $TPSITR$  na forma canônica, não será necessário utilizar  $DYTRX3$ . Finalmente, a transformação de díada  $DYTRX$  resultante que coloca  $TPSI$  na forma canônica pode ser obtida com o comando  $WMAKE$ . Utilizando em um arquivo de métrica-torção uma transformação  $DYTR$  ou  $DYTRSP$  com mesmos valores que  $DYTRX$ , a mudança para o referencial canônico passa a ser realizada automaticamente. Considerando  $DYTR$ , por exemplo, teríamos que acrescentar no arquivo o comando  $(RPL DYTR1)1$i/i/2$1/2$$ . Note que nem estas transformações nem o referencial canônico resultante são determinados de modo único, pois são obtidos a menos de elementos do grupo de isotropia de  $TPSI$ .

## 5.6 Os módulos de *TCLASSI*

Nesta seção faremos uma breve descrição dos módulos de *TCLASSI*, sintetizando os recursos de cálculo disponíveis em cada um. O código fonte de *TCLASSI* contém 13.900 linhas e é formado por 24 módulos, que ocupam 400 kbytes no diretório `tclasrc` do disquete que é parte desta tese. Cada módulo contém diversos programas com comentários sobre o conteúdo dos mesmos e sobre a maneira de utilizá-los.

Os módulos de *TCLASSI* precisam ser compilados, para serem executados de forma mais rápida. Depois de criar o diretório `tclabin` e ir para o mesmo, a imagem compilada pode ser gerada automaticamente carregando o arquivo `tclmod.shp` do diretório `tclasrc`. Entretanto, no MS-DOS os módulos `TDYTSYM`, `TCORD` e `TWEYLTC` devem ser compilados separadamente dos demais. Neste caso, para compilar `TCORD`, por exemplo, deve ser utilizado o comando `(LOAD SIDMOD)`, e depois o comando `(MKSIDEFAP TCORD)`.

Os módulos de *TCLASSI* estão escritos em arquivos com o mesmo nome e com a terminação `shp`, no diretório `tclasrc`. A seguir apresentamos uma lista desses módulos com uma breve descrição dos recursos de cálculos disponíveis:

1. ITORSION: Usado para a entrada de dados (input) da torção e para a transformação da torção do referencial usado para a entrada de dados para o utilizado para a realização de cálculos;
2. TORSION: Usado para o cálculo do tensor de curvatura e das partes irredutíveis tanto da torção quanto da curvatura (exceto os tensores de Weyl e de Weyl-Cartan), em uma base de tétradas. Também estão incluídas a contorção, a conexão, as 1-formas conexão e as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan;
3. TWEYLTF: Usado para o cálculo do tensor de Weyl e do tensor de Weyl-Cartan (que não tem traço nem pseudo-traço), em uma base de tétradas;
4. TCORD: Usado para cálculo do tensor de curvatura e das partes irredutíveis tanto da torção quanto da curvatura (exceto os tensores de Weyl e de Weyl-Cartan), em uma base de coordenadas. Inclui também a contorção, a conexão e as equações de campo da teoria de Einstein-Cartan;
5. TWEYLTC: Usado para o cálculo do tensor de Weyl e do tensor de Weyl-Cartan (que não tem traço nem pseudo-traço), em uma base de coordenadas;
6. TSPINOR: Usado para o cálculo do espinor de torção (contraído) e do espinor da conexão. Os coeficientes de spin também são definidos;
7. TPSIPHI: Usado para o cálculo das partes irredutíveis dos espinores de torção e de curvatura, a partir dos tensores correspondentes em tétradas de Lorentz ou tétradas nulas;
8. SPTCURV: Usado para o cálculo do espinor de curvatura (contraído) e das partes irredutíveis dos espinores de torção e de curvatura, a partir da métrica e dos componentes da torção em tétradas nulas;
9. TSYMSPi: Usado para a manipulação de espinores totalmente simetizados, definido espinores totalmente simetizados, seus d'Alembertianos e suas derivadas covariantes;
10. TEQUSPI: Usado para o cálculos dos espinores do conjunto completo mínimo dos escalares de Cartan para espaços-tempos de Riemann-Cartan, até as derivadas covariantes de terceira ordem da curvatura e de quarta ordem da torção;

11. VECTCLA: Usado para a classificação de vetores, usando o formalismo espinorial. Os vetores são classificados em tipo-tempo, tipo-espaço e tipo-nulo;
12. BIVTCLA: Usado para a classificação de bivectores, usando o formalismo espinorial. Os bivectores são classificados em tipo-geral (não nulo) e tipo-especial (nulo);
13. SEGPET: Usado para a realização das classificações de Petrov e de Segre de espinores, utilizando os módulos PTRVSP e SEGRE de *CLASSI*;
14. ISOTSTOR Usado para determinar o grupo de isotropia de um espinor e verificar se o referencial está alinhado com as direções principais do espinor;
15. TCLABAS: Contendo as abreviaturas e os nomes utilizados para os tipos de Segre, os grupos de isotropia, os tipos de bivectores e vetores, além dos programas para obter esses dados a partir do resultado de uma classificação;
16. TCLASSI: Usado para classificar espaços-tempos de Riemann-Cartan, de acordo com o algoritmo para testar a equivalência (cf. seção 2.4);
17. TDYTSYM: Usado para realizar, interativamente, transformações de díadas dos espinores do conjunto completo mínimo de escalares de Cartan para  $q \leq 3$ ;
18. TDYTRSP: Usado para realizar transformações de espinores contendo um grupo de três índices simetrizados. Transformações de díadas especiais para os espinor de Ricci e para o pseudo-espinor de Ricci também são implementadas, para serem usadas junto com os programas de classificação quando for necessário. É uma pequena adição ao módulo DYTRSP de *CLASSI* onde as transformações dos demais espinores está definida;
19. TCLASUM: Usado para obter um sumário dos resultados da classificação de espaços-tempos de Riemann-Cartan, obtida a partir do algoritmo para testar a equivalência (cf. seção 2.4);
20. TRIEUF: Usado para calcular os componentes do tensor de curvatura com o primeiro índice contravariante, em uma base de tétradas;
21. DTORDF: Usado para calcular a derivada covariante do tensor de torção com todos os índices covariantes, em uma base de tétradas;

22. D2TORDF: Usado para calcular a derivada covariante de segunda ordem do tensor de torção, em uma base de tétradas;
23. DTRIEF: Usado para calcular a derivada covariante do tensor de curvatura, em uma base de tétradas;
24. D2TRIEF: Usado para calcular a derivada covariante de segunda ordem do tensor de curvatura, em uma base de tétradas.

## 5.7 Testando *TCLASSI*

Nesta seção apresentamos alguns dos testes realizados para verificar se os programas e algoritmos de *TCLASSI* estão corretos. Considerando que muitos programas de *CLASSI* são usados em *TCLASSI*, uma discussão detalhada de *TCLASSI* nos obrigaria a discutir alguns aspectos internos da própria implementação de *CLASSI* que se situam na interface entre as áreas de computação, matemática e física. Uma abordagem inicial destes aspectos internos pode ser encontrada em [17] e maiores detalhes só podem ser obtidos a partir do código fonte de *CLASSI*, que é distribuído juntamente com *CLASSI*. Por esta razão, vamos nos ater apenas aos aspectos gerais dos módulos de *TCLASSI*, discutindo apenas o que for efetivamente uma extensão de *CLASSI*.

Diversos programas foram escritos para realizar os testes em *TCLASSI*. Estes programas estão no diretório *tclatst* do disquete que acompanha esta tese. Podemos separar os testes realizados com estes programas em três grupos: (a) os testes feitos utilizando o comando *SYMBOLIC* de *SHEEP/CLASSI* [17]; (b) os testes utilizando espinores em formas canônicas; (c) os testes utilizando soluções exatas tanto das TGT quanto da TRG. A seguir vamos discutir esses testes, mostrando também como são realizados.

A fim de que os programas utilizados para testar *TCLASSI* possam ser acessados a partir de qualquer diretório é necessário acrescentar na lista de diretórios no comando (`ADDSUBDIRS MYTOPDIR!* '("TCLABIN" "TCLASRC" "TMETRICS")`), incluído no arquivo `classi.ini`, a indicação da localização dos subdiretórios de *tclatst*. Por exemplo, para incluir o subdiretório *VECTST* basta acrescentar `"TCLATST\VECTST"` nesta lista.

Consideremos inicialmente os testes dos módulos utilizados para *calcular tensores*, discutidos na seção 4.2. Um procedimento adotado na implementação desses módulos

foi implementar os tensores das TGT em *TCLASSI* utilizando os mesmos programas que implementam os tensores correspondentes da TRG em *CLASSI*, sempre que esses tensores forem expressos por fórmulas idênticas. Este é o caso do tensor de curvatura TRIE, que foi implementado da mesma maneira que RIE, apenas trocando a conexão GAM por TGAM e fazendo a mudança da simetria (de R para AA). Os tensores de Weyl TWEYL e de Weyl-Cartan CWEYL também foram implementado de maneira semelhante. Apenas no caso do tensor de Ricci foi necessário adaptar os programas porque o tensor de Ricci de uma variedade de Riemann-Cartan não é simétrico. Os módulos de *CLASSI* cujos programas foram utilizados são CORD, XCORD, FRAME e WEYLTF. Por esta razão, os testes desses módulos de *TCLASSI* foram realizados apenas utilizando soluções exatas não só das TGT, mas também da TRG para verificar o caso particular com torção nula. Entretanto, como veremos mais adiante, estes módulos também foram testados indiretamente através dos testes do módulo TPSIPHI.

Um aspecto importante no cálculo de tensores diz respeito às *transformações* do referencial usado para a entrada de dados para o referencial usado para a realização dos cálculos, que estão implementadas em ITORSION. Como elas são idênticas às transformações utilizadas no módulo NEWFRM de *CLASSI*, não nos preocupamos em testá-las.

Consideremos agora os testes dos módulos utilizados para *calcular espinores*, discutidos na seção 4.3. Os módulos TSPINOR, TPSIPHI e SPTCURV são formalmente idênticos aos módulos SPINOR, PSIPHI e SPCURV de *CLASSI*, diferindo apenas nos programas usados especificamente para calcular os espinores. Por isso, foi necessário escrever programas para testar se os espinores são calculados de forma correta. Este programas estão nos arquivos sptorcur, tbunults, tbulorts e tbuspits do subdiretório spitst de tclatst e são utilizados para realizar os testes que explicamos a seguir.

Como vimos na seção 4.3, quando usamos o módulo TPSIPHI os espinores são calculados a partir dos tensores correspondentes, que podem ser dados em uma tétroda nula ou de Lorentz. Os programas para calcular TPSI a partir de CWEYL são os mesmos usados para calcular PSI a partir de WEYL. Analogamente, os programas para calcular TPhi e THETA a partir de STRIC e SPTRIC também são os mesmos usados para calcular PHI a partir de RIC. Os programas para calcular SIGMA e as partes irredutíveis da torção são novos.

Os programas no arquivo tbunults.shp foram escritos para testar TPSIPHI quando os espinores são calculados a partir dos tensores correspondentes em uma *tétroda nula*.



```
.....  
THETA    = ITHETA  
  01'    = 01'  
.....  
SIGMA    = ISIGMA  
  0      = 0  
.....  
TLAMBD   = ITLAMBD  
OMEGA    = IOMEGA  
.....
```

Podemos notar que, quando *SYMBOLIC* é usado, *CLASSI* não reconhece  $\Phi_{00'}$  e  $\Theta_{00'}$  como quantidades reais. O mesmo acontece com os outros componentes reais de *TPHI* e *THETA*.

Os programas no arquivo *tbulorts.shp* foram escritos para testar *TPSIPHI* quando os espinores são calculados a partir dos tensores correspondentes em uma *tétrada de Lorentz*. Quando *tbulorts* é carregado, também são carregados os módulos *TWEYLTF*, *TPSIPHI* e o arquivo *sptorcur*. O programa de teste transforma os componentes de *NULTOR* e *NULTRIE* das tétradas nulas (*NULLT*) para as de Lorentz (*LORENTZ*) e atribui os novos valores dos componentes a *TOR* e *TRIE*, respectivamente. Depois calcula as partes irredutíveis dos espinores da torção e da curvatura e escreve os resultados no arquivo *tbulorts.lst*. Este arquivo está no subdiretório *spitst* e o seu conteúdo é semelhante ao de *tbunults.lst*.

O módulo *SPTCURV* foi testado com o os programas do arquivo *tbuspits.shp*. Quando este módulo é usado os espinores são calculados a partir dos *espinores* da torção *SPTOR* e da curvatura *SPTCURV* (cf. seção 4.3). Esses testes são realizados usando os espinores da torção e curvatura que estão implementados em *sptorcur.shp* como *RCTOR* e *RCCUR* em termos das partes irredutíveis que foram utilizadas para definir *NULTOR* e *NULTRIE*, respectivamente. Quando *tbuspits* é carregado, também são carregados o módulo *SPTCURV* e o arquivo *sptorcur*. Em seguida o programa de teste calcula *RCTOR* e *RCCUR* e atribui os valores dos seus componentes a *SPTOR* e *SPTCURV*, respectivamente. Depois calcula as partes irredutíveis desses espinores e escreve os resultados no arquivo *tbuspits.lst*. Este arquivo está no subdiretório *spitst* e o seu conteúdo também é semelhante ao de *tbunults.lst*.

Para completar a discussão dos testes dos módulos utilizados para calcular espinores, falta apenas considerar os testes dos módulos *TSPINOR*, *TSYMSPi* e *TEQUSPI*. O módulo *TSPINOR* implementa o espinor da conexão  $\Gamma_{X'ABC}$  (*STGAM*) a partir da conexão *TGAM*

utilizando o mesmo programa que implementa SGAM a partir de GAM em SPINOR, pois a mesma fórmula é usada tanto na TRG quanto nas TGT. Este programa foi adaptado para implementar o espinor da torção  $\mathcal{T}_{X'ABC}$  (SPTOR) a partir do tensor da torção TOR em tétradas nulas. Os programas do arquivo `tspints.shp` são usados para testar a implementação de SPTOR usando NULTOR e calculando as partes irredutíveis do espinor de torção usando SPTCURV. Da mesma forma que nos testes anteriores, os resultados estão escritos no arquivo `tspints.lst` no subdiretório `spitst` de `tclatst`.

O módulo TSYMSPi não foi testado de modo especial, pois difere do módulo SYMSPi de CLASSI apenas por substituir SGAM por STGAM e pela adição dos programas SYMCONTRPR e SYMCONTRPR1 escritos por Jan E. Åman. Estes programas são usados para contrair índices com plicas na derivada covariante de um espinor totalmente simetrizado e depois simetrizar o resultado. O módulo TEQUSPI com a implementação dos espinores do conjunto mínimo também não foi testado diretamente. Este módulo utiliza os programas de TSYMSPi para implementar espinores que são formalmente idênticos aos espinores implementados no módulo EQUSPI de CLASSI, com exceção daqueles onde SYMCONTRPR e SYMCONTRPR1 são usados.

Consideremos agora os módulos utilizados para obter as *classificações algébricas* de espinores, discutidos na seção 4.4. Como o módulo SEGRET usa os algoritmos dos módulos SEGRE e PTRVSP de CLASSI, não nos preocupamos em testá-lo de modo especial. Esses testes são realizados apenas com os módulos BIVTCLA e VECTCLA usados para classificar algebricamente os espinores correspondentes de bivectores e vetores. De modo análogo aos testes anteriores, os programas de teste classificam bivectores e vetores dados em formas canônicas (cf. tabs. (4.5)–(4.6), p. 116–119) e depois escrevem cada espinor e o resultado da sua classificação em um arquivo, para posterior conferência.

Os algoritmos e programas que implementam os comandos VECTCLA, (TTORCLA) e (PTORCLA) em VECTCLA são testados usando os programas nos arquivos `vecclats.shp`, `ttorclts.shp` e `ptorclts.shp`, respectivamente. Analogamente, os comandos BIVTCLA, (SIGMACLA), (BVTORCLA) e (BVPTORCLA) implementados em BIVTCLA são testados com os programas em `bivclats.shp`, `sigmclts.shp`, `bvtclts.shp` e `bvptclts.shp`. Quando estes arquivos são carregados, os testes são automaticamente realizados e os resultados são escritos em arquivos com o mesmo nome mas com a terminação `lst`. Os arquivos com os resultados dos testes de BIVTCLA e VECTCLA estão nos subdiretórios `vectst` e `bivtst`

de `tclatst`, respectivamente.

Finalmente, temos os testes dos módulos ISOTSTOR usado para determinar os *grupos de isotropia* e TCLASSI usado para realizar a classificação de um dado espaço-tempo de Riemann-Cartan. Como o TCLASSI usa os mesmos programas que CLASSI, apenas realizamos um teste para verificar se nenhum dos *elementos do conjunto mínimo* deixou de ser implementado. Os programas do módulo ISOTSTOR são testados de modo especial apenas com relação a bivectores, pois os demais espinores dos conjuntos mínimos de escalares de Cartan para as TGT (cf. seção 3.4) e para a TRG (cf. seção 1.5) têm os mesmos números de índices e as mesmas simetrias.

O programa usado para testar TCLASSI está no arquivo `teqvtst.shp`. Quando este arquivo é carregado, o programa utiliza sucessivamente os comandos (TCLASSIFY $q$ ) desde  $q = 0$  até  $q = 3$  em um espaço-tempo com métrica de Minkowski e torção nula. Como nos testes anteriores, os resultados são escritos no arquivo `teqvtst.lst`, separados por comentários indicando o número de espinores que deve haver para cada valor de  $q$ , de acordo com as tabs. (3.1)–(3.6) nas páginas 56, 66, 73, 74, 78 e 79.

Os programas do módulo ISOTSTOR são essencialmente uma adaptação dos programas do módulo ISOTST de CLASSI, que são generalizados para incluir mais de um espinor de um dado tipo como, por exemplo, TPSI e TPSILTOR (cf. tab. (3.1), p. 56). A única exceção ocorre no caso dos bivectores, onde novos programas tiveram de ser escritos para corrigir os resultados incorretos que são obtidos usando ISOTST.

O módulo ISOTST de CLASSI foi testado com relação à *bivectores* usando os programas do arquivo `bvisots.shp`. Quando este arquivo é carregado, o programa de teste determina o grupo de isotropia de um conjunto de bi-espinores dados nas formas canônicas (cf. tab. (4.5), p 116) e verifica se o referencial utilizado é canônico, escrevendo o resultado no arquivo `bvisots.lst` que está no subdiretório `bivtst` de `tclatst`. Além dos bivectores nas formas canônicas, também foram utilizados bi-espinores cujos componentes são dados por  $(A, A, A)$  e  $(A, B, \pm A)$ , em termos dos parâmetros  $A$  e  $B$ . No caso destes bi-espinores o módulo `isotst` de CLASSI informa incorretamente que o referencial é canônico, como podemos verificar examinando a parte do conteúdo de `bvisots.lst` apresentada a seguir. As partes suprimidas estão representadas por linhas pontilhadas.

BVISOTS.LST

---

Testing ISOTST using BIVECTORS in CANONICAL FORMS

-----  
-----  
Bivector type special (null):  
-----  
.....

(D) This is not a canonical form (all components are equal):

$$\text{NULBIV} = A$$

0

$$\text{NULBIV} = A$$

1

$$\text{NULBIV} = A$$

2

Remaining isotropy group is:  
none (0-dim), (shorthand notation: 0) and swap of null directions

This is so far a standard frame.  
.....

Para corrigir o problema existente no módulo ISOTST com relação a bivectores, tivemos que escrever o programa BIVISO em ISOTSTOR. O teste de ISOTSTOR é realizado usando os programas do arquivo `tbvisots.shp` que são análogos ao de `tbvisost.shp`. Podemos verificar os resultados no arquivo `tbvisots.lst` que está no subdiretório `bivtst` de `tclatst`.

Nesta versão de *TCLASSI* nos preocupamos apenas em garantir resultados corretos, sem considerar as questões relacionadas com a otimização do tempo de CPU utilizado. Entretanto, podemos ter uma idéia da eficiência dos programas considerando que são utilizados 1,0 s e 1,9 s de CPU para classificar os espaços-tempos de ondas planas e tipo Gödel, dados nos arquivos `twavez.spi` e `tgotyh.spi`, respectivamente, em um IBM-PC Pentium de 100 MHz, com 8 Mb de memória RAM.

## Capítulo 6

# Equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo-Gödel

### 6.1 Introdução

Neste capítulo as técnicas do problema da equivalência implementadas em *TCLASSI* são utilizadas para investigar o problema da homogeneidade espaço-temporal (homogeneidade ET, daqui em diante) de uma classe de espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel, onde a métrica é tipo Gödel e a torção tem as mesmas simetrias translacionais da métrica.

Na segunda seção, apresentamos um breve sumário dos principais resultados [36, 71] sobre o problema da homogeneidade ET de espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel. Na terceira seção, generalizamos estes resultados estabelecendo as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade ET dos espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel e discutimos a equivalência dos espaços-tempos com homogeneidade ET.

Os resultados deste capítulo fazem parte de um trabalho original submetido para publicação [34]. A generalização dos mesmos para uma torção sem as mesmas simetrias translacionais da métrica é tratada em um artigo também submetido para publicação recentemente [35].

### 6.2 Espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel

Nesta seção vamos apresentar um breve sumário dos principais resultados obtidos nas investigações sobre o problema da homogeneidade ET de espaços-tempos Riemannianos

tipo Gödel.

A solução de Gödel [72] para as equações de Einstein é um caso particular do elemento de linha tipo Gödel, definido por

$$ds^2 = [dt + H(x) dy]^2 - D^2(x) dy^2 - dx^2 - dz^2, \quad (6.1)$$

onde as funções  $H$  e  $D$  são dadas por

$$H(x) = e^{mx}, \quad D(x) = e^{mx}/\sqrt{2}, \quad (6.2)$$

e o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  por

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu, \quad v^\alpha = \delta^\alpha_0, \quad (6.3)$$

$$\kappa\rho = -2\Lambda = m^2 = 2\omega^2, \quad (6.4)$$

onde  $\kappa$  e  $\Lambda$  são, respectivamente, a constante de Einstein e a constante cosmológica,  $\rho$  é a densidade e  $v^\alpha$  é a 4-velocidade do fluido e, finalmente,  $\omega$  é a rotação da matéria.

O modelo de Gödel apresenta homogeneidade ET. Na verdade, ele admite um grupo de isometria com cinco parâmetros ( $G_5$ ) que tem um grupo de isotropia unidimensional.

O problema da homogeneidade ET das variedades Riemannianas de dimensão 4 que são dotadas de uma métrica tipo Gödel, dada pela eq. (6.1), foi investigado pela primeira vez por Raychaudhuri e Thakurta [73]. Eles determinaram condições necessárias para a existência de homogeneidade ET. Posteriormente, Rebouças e Tiomno [71] mostraram que as condições de Raychaudhuri-Thakurta eram também suficientes. Entretanto, em ambos artigos [71, 73] o estudo da homogeneidade ET não foi completo, pois ficou restrito aos espaços-tempos com vetores de Killing independentes do tempo.

Utilizando as técnicas do problema da equivalência implementadas em *CLASSI* [33], Rebouças e Åman [36] obtiveram as condições necessárias e suficientes para a homogeneidade ET de um espaço-tempo tipo Gödel arbitrário, estendendo os resultados anteriores com a inclusão das isometrias dependentes do tempo. Os teoremas abaixo contêm os principais resultados obtidos em [36]:

**Teorema 6.1** *As condições necessárias e suficientes para que um espaço-tempo Riemanniano tipo Gödel apresente homogeneidade ET são:*

$$H'/D = \text{const} \equiv 2\omega, \quad (6.5)$$

$$D''/D = \text{const} \equiv m^2, \quad (6.6)$$

onde a plica denota derivada com relação a  $x$ .

**Teorema 6.2** *Todos os espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel são caracterizados por dois parâmetros  $m^2$  e  $\omega$ : pares idênticos  $(m^2, \omega)$  especificam espaços-tempos equivalentes.*

**Teorema 6.3** *Os espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel podem ser agrupados em classes, determinadas pelos valores dos parâmetros  $m^2$  e  $\omega$ , de acordo com:*

- (i)  $m^2 \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$  e  $m^2 \neq \omega^2$ , são Petrov tipo  $D$  e têm um grupo de isometria com 5 parâmetros ( $G_5$ );
- (ii)  $m^2 \neq 0$ ,  $\omega = 0$  e  $m^2 \neq \omega^2$ , são Petrov tipo  $D$  e têm um grupo  $G_6$  de isometria;
- (iii)  $m^2 \neq 0$ ,  $\omega \neq 0$  e  $m^2 = \omega^2$ , são Petrov tipo  $0$  e têm um grupo  $G_7$  de isometria;
- (iv)  $m^2 = \omega = 0$ , são espaços-tempos planos.

A seguir estes resultados serão generalizados para o contexto das TGT, incluindo agora uma torção com as mesmas simetrias translacionais da métrica tipo-Gödel.

### 6.3 Espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel

Nesta seção vamos aplicar as técnicas do problema da equivalência para investigar o problema da homogeneidade ET nos *espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel*, utilizando *TCLASSI*. Consideremos um sistema de coordenadas onde o elemento de linha tipo Gödel e a torção são dados pela eq. (6.1) e por  $T^t_{xy} = D(x)S(x)$ , respectivamente. O arquivo de métrica-torção *tgotyg.lor* (veja listagem na p. 212) contém os dados de entrada desta família de espaços-tempos, onde  $H(x)$ ,  $D(x)$  e  $S(x)$  são consideradas funções arbitrárias. Ao ser carregado em *TCLASSI* com o comando (LOAD "TGOTYG.LOR") este arquivo define uma tétrada de Lorentz  $\theta^A$  ( $A=0, 1, 2, 3$ ) dada por

$$\theta^0 = dt + H(x) dy, \quad \theta^1 = dx, \quad \theta^2 = D(x) dy, \quad \theta^3 = dz, \quad (6.7)$$

onde os componentes da torção são definidos por

$$T^0_{12} = S(x). \quad (6.8)$$

A fim de podermos utilizar as técnicas do problema da equivalência precisamos, em primeiro lugar, determinar o referencial canônico para esta família de espaços-tempos. Calculando o espinor de Weyl  $\Psi_{ABCD}$  (TPSI) a partir das tétradas de Lorentz dadas pelas eqs. (6.7) acima, verificamos que todos os seus componentes são diferentes de zero. A classificação de Petrov de  $\Psi_{ABCD}$ , realizada com o comando (TPSICLA), mostra que TPSI é Petrov tipo I, tendo em vista que as funções  $H(x)$ ,  $D(x)$  e  $S(x)$  são arbitrárias. Portanto, é necessário realizar uma transformação para o referencial canônico, colocando  $\Psi_{ABCD}$  na forma canônica.

A transformação para o referencial canônico é obtida iterativamente utilizando o módulo TDYTSYM. A fim de possibilitar uma comparação com os resultados sobre os espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel obtidos utilizando CLASSI [36], encontramos uma transformação de díada DYTRX que atua em TPSI de modo que o espinor transformado TPSITR tenha apenas  $\Psi_1 = \Psi_3$  e  $\Psi_2$  como componentes não-nulos. Apesar de não corresponder a uma base canônica, esta escolha é uma alternativa aceitável tanto por CLASSI quanto por TCLASSI.

A mudança de referencial realizada por DYTRX está implementada no arquivo de métrica-torção tgotyg.spi (veja a listagem na p. 213), que difere do arquivo tgotyg.lor pelo acréscimo da transformação de díada DYTRSP, definida com os mesmos elementos encontrados para DYTRX. Portanto, a tetrada nula apropriada (canônica) à nossa investigação revelou-se ser

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 + \theta^3), & \Theta^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^0 - \theta^3), \\ \Theta^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 - i\theta^1), & \Theta^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^2 + i\theta^1),\end{aligned}\tag{6.9}$$

onde  $\theta^A$  é a tétrada de Lorentz dada pelas eqs (6.7).

Os componentes da torção na tétrada canônica podem ser calculados com o comando (WMAKE TOR), cujo resultado são os seguintes componentes não-nulos:

$$T_{23}^0 = T_{23}^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} i S(x).\tag{6.10}$$

Agora podemos calcular os escalares de Cartan de ordem  $q = 0$  que fazem parte do conjunto mínimo  $C_0$  (cf. tab. (3.1), p. 56), utilizados no nosso algoritmo para testar a equivalência de espaços-tempos de Riemann-Cartan dado no capítulo 2. Na implementação

do conjunto mínimo em *TCLASSI* cada espinor tem apenas um par de índices covariantes, cujos valores numéricos são as somas simetrizadas de todos os índices com plica e sem plica, respectivamente. Assim, por exemplo, temos  $\mathcal{L}_{21'} = \mathcal{L}_{(110)1'}$  e  $\nabla \Psi_{31'} = \Psi_{(1110;0)1'}$ . Realizando os cálculos interativamente com o comando *WMAKE* obtemos que, dos 17 espinores de  $C_0$ , apenas os seguintes são não-nulos:

$$\Psi_1 = \Psi_3 = \frac{1}{8} \left[ S' - \left( \frac{H'}{D} \right)' \right], \quad (6.11)$$

$$\Psi_2 = -\frac{S}{4} \left( \frac{S}{3} - \frac{H'}{D} \right) + \frac{1}{6} \left[ \frac{D''}{D} - \left( \frac{H'}{D} \right)^2 \right], \quad (6.12)$$

$$\psi_1 = \psi_3 = \frac{S'}{8}, \quad (6.13)$$

$$\psi_2 = -\frac{S}{4} \left( S - \frac{H'}{D} \right), \quad (6.14)$$

$$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} = \frac{S}{4} \left( \frac{S}{2} - \frac{H'}{D} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{H'}{D} \right)^2, \quad (6.15)$$

$$\Phi_{01'} = \Phi_{12'} = -\frac{S'}{8} + \frac{1}{8} \left( \frac{H'}{D} \right)', \quad (6.16)$$

$$\Phi_{11'} = \frac{S}{4} \left( \frac{S}{4} - \frac{H'}{D} \right) + \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{H'}{D} \right)^2 - \frac{D''}{D} \right], \quad (6.17)$$

$$\phi_{00'} = \phi_{22'} = \phi_{11'} = \frac{S}{4} \left( S - \frac{H'}{D} \right), \quad (6.18)$$

$$\phi_{01'} = \phi_{12'} = -\frac{S'}{8}, \quad (6.19)$$

$$\nabla \mathcal{P}_{01'} = -\nabla \mathcal{P}_{12'} = -\frac{i}{4} S', \quad (6.20)$$

$$\mathcal{B}_0 = -\mathcal{B}_2 = -\frac{i}{2} S', \quad (6.21)$$

$$\mathcal{P}_{00'} = -\mathcal{P}_{11'} = -\frac{\sqrt{2}}{2} S, \quad (6.22)$$

$$\Lambda = -\frac{S^2}{48} - \frac{1}{12} \left[ \frac{D''}{D} - \frac{1}{4} \left( \frac{H'}{D} \right)^2 \right], \quad (6.23)$$

$$\mathcal{L}_{10'} = \mathcal{L}_{21'} = -\frac{i}{6} \sqrt{2} S, \quad (6.24)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{10'} = -\nabla \mathcal{L}_{32'} = \frac{S}{16} \left( S - \frac{H'}{D} \right), \quad (6.25)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{11'} = -\nabla \mathcal{L}_{31'} = -\frac{3}{4} \nabla \mathcal{L}_{20'} = \frac{3}{4} \nabla \mathcal{L}_{22'} = \frac{S'}{16}, \quad (6.26)$$

onde a plica denota derivada com relação a  $x$ .

Para que exista homogeneidade ET, o grupo de simetria de um espaço-tempo deve atuar em uma órbita de dimensão  $d = 4$ . Substituindo esta condição na eq. (2.33), isto é, fazendo  $d = r - s = 4 - t_p = 4$ , obtemos que o número  $t_p$  das funções das coordenadas do espaço-tempo que são funcionalmente independentes no conjunto  $I_{(p+1)}$  deve ser zero. Portanto, para que exista homogeneidade ET é necessário que todos os escalares de Cartan sejam constantes. Impondo estas condições nas eqs.(6.11)–(6.26), obtemos as seguintes condições necessárias para a homogeneidade ET dos espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel:

$$S = \text{const} \equiv \ell, \quad (6.27)$$

$$\frac{H'}{D} = \text{const} \equiv 2\omega, \quad (6.28)$$

$$\frac{D''}{D} = \text{const} \equiv m^2. \quad (6.29)$$

Utilizando as técnicas do problema da equivalência podemos mostrar que as condições necessárias acima também são suficientes. Este resultado é obtido realizando a classificação um espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel onde as condições dadas pelas eqs. (6.27)–(6.29) são satisfeitas. O arquivo `tgotyh.spi` (veja a listagem na p. 214) foi escrito com esta finalidade, pois difere de `tgotyg.spi` apenas pela introdução destas condições.

O primeiro passo para realizar a classificação de um espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo Gödel onde as condições dadas pelas eqs. (6.27)–(6.29) são satisfeitas, consiste no cálculo dos escalares de Cartan de ordem  $q = 0$  que fazem parte do conjunto mínimo  $C_0$ . Depois de carregar o arquivo `tgotyh.spi` em `TCLASSI` e calcular os elementos de  $C_0$  utilizando `WMAKE`, obtemos que os seguintes escalares de Cartan são não-nulos:

$$\Psi_2 = \frac{\ell}{2} \left( \omega - \frac{\ell}{6} \right) + \frac{m^2}{6} - \frac{2}{3} \omega^2, \quad (6.30)$$

$$\psi_2 = -\frac{\ell}{4} (\ell - 2\omega), \quad (6.31)$$

$$\Phi_{00'} = \Phi_{22'} = \frac{\ell}{4} \left( \frac{\ell}{2} - 2\omega \right) + \frac{\omega^2}{2}, \quad (6.32)$$

$$\Phi_{11'} = \frac{\ell}{4} \left( \frac{\ell}{4} - 2\omega \right) + \frac{3}{4} \omega^2 - \frac{m^2}{4}, \quad (6.33)$$

$$\phi_{00'} = \phi_{22'} = \phi_{11'} = \frac{\ell}{4} (\ell - 2\omega), \quad (6.34)$$

$$\mathcal{P}_{00'} = -\mathcal{P}_{11'} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ell, \quad (6.35)$$

$$\Lambda = -\frac{\ell^2}{48} + \frac{1}{12} (\omega^2 - m^2), \quad (6.36)$$

$$\mathcal{L}_{10'} = \mathcal{L}_{21'} = -\frac{i}{6} \sqrt{2} \ell, \quad (6.37)$$

$$\nabla \mathcal{L}_{10'} = -\nabla \mathcal{L}_{32'} = \frac{\ell}{16} (\ell - 2\omega). \quad (6.38)$$

De acordo com o algoritmo apresentado no capítulo 2, o próximo passo consiste em determinar o grupo de isotropia que deixa invariantes os escalares de Cartan dados pelas eqs. (6.30)–(6.38) acima, utilizando o comando ISOST em cada um destes espinores. Apesar de existirem escalares de Cartan que são invariantes sob o grupo de Lorentz  $SO(2,1)$  como, por exemplo,  $\mathcal{P}_{AX'}$ , o grupo de isotropia comum a todos é o grupo das rotações espaciais

$$R = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro real. Portanto, para  $q = 0$  obtemos um grupo isotropia residual  $H_0$  com dimensão igual a um.

Como todos os escalares de Cartan dados pelas eqs. (6.30)–(6.38) são constantes, obviamente não é preciso utilizar o comando FUNTST para determinar o número de funções das coordenadas do espaço-tempo que são funcionalmente independentes. Assim, obtemos que  $t_0 = 0$ .

Concluídos os passos para  $q = 0$ , prosseguimos com os passos para  $q = 1$ . Como estamos realizando a classificação interativamente, temos agora que utilizar WMAKE para calcular os escalares de Cartan do conjunto mínimo  $C_1$  (cf. tab. (3.2), p. 66). Como resultado, obtemos que somente 6 dos 22 elementos de  $C_1$  são não-nulos, a saber:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi_{20'} &= -\nabla \Psi_{31'} = \frac{i}{40} \sqrt{2} \ell (2m^2 + 8\ell\omega - \ell^2 - 20\omega^2) \\ &\quad + \frac{i}{10} \sqrt{2} \omega (4\omega^2 - m^2), \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\nabla \psi_{20'} = -\nabla \psi_{31'} = -\frac{i}{40} 3\sqrt{2} \ell (4\omega^2 - 4\ell\omega + \ell^2), \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{10'} &= \Xi_{21'} = \frac{i}{16} \sqrt{2} \ell (2m^2 + 8\ell\omega - \ell^2 - 20\omega^2) \\ &\quad + \frac{i}{4} \sqrt{2} \omega (4\omega^2 - m^2), \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\square \mathcal{L}_{10'} = \square \mathcal{L}_{21'} = \frac{i}{4} \sqrt{2} \ell (4\omega^2 - 4\ell\omega + \ell^2), \quad (6.43)$$

$$\nabla^2 \mathcal{L}_{10'} = \nabla^2 \mathcal{L}_{43'} = \frac{i}{80} \sqrt{2} \ell (4\omega^2 - 4\ell\omega + \ell^2), \quad (6.44)$$

$$\nabla^2 \mathcal{L}_{21'} = \nabla^2 \mathcal{L}_{32'} = -\frac{i}{480} \sqrt{2} \ell (4\omega^2 - 4\ell\omega + \ell^2). \quad (6.45)$$

Como nenhuma função funcionalmente independente foi obtida, podemos concluir que  $t_1 = t_0$ . Além disso, os escalares de Cartan dados pelas eqs. (6.40)–(6.45) são invariantes sob o mesmo grupo de isotropia dado pela eq. (6.39), como pode ser verificado aplicando ISOTST em cada um deles. Assim, obtemos que  $H_1 = H_0$  e a classificação está terminada, nenhum escalar de Cartan para  $q = 2$  precisa ser calculado.

Com os resultados acima podemos concluir que o grupo de simetria tem cinco parâmetros ( $G_5$ ), de acordo com a eq. (2.33) onde  $r = s+4-t_p$ . Portanto, as condições dadas pelas eqs. (6.27)–(6.29) são também suficientes para que haja homogeneidade ET. Resumindo, temos os seguinte teoremas:

**Teorema 6.4** *As condições necessárias e suficientes para um espaço-tempo de Riemann-Cartan tipo-Gödel ser homogêneo ET são dadas pelas eqs. (6.27)–(6.29).*

**Teorema 6.5** *Todos os espaços-tempos de Riemann-Cartan do tipo Gödel que são homogêneos ET têm um grupo de simetria com cinco parâmetros ( $G_5$ ) e são caracterizados por três parâmetros independentes ( $\ell, m^2, \omega$ ): triadas idênticas especificam espaços-tempos equivalentes.*

Quando a torção for igual a zero, isto é, quando  $\ell = 0$ , as eqs. (6.30)–(6.45) se reduzem às equações correspondentes para os espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel (eqs. (3.12)–(3.15) e eqs. (3.18)–(3.21) em [36]). Analogamente, os teoremas 6.4 e 6.5 generalizam os teoremas 6.1 e 6.3. Portanto, os resultados de Rebouças e Áman [36] podem ser reobtidos como um caso especial.

Os resultados acima também poderiam ter sido obtidos carregando o módulo TCLASSI de TCLASSI e usando apenas o comando (TCLASSIFY "tgotyh.spi"). Como vimos no capítulo anterior, este comando carrega o arquivo tgotyh.spi e realiza a classificação automaticamente, escrevendo os resultados no arquivo tgotyhsp.res e o sumário no arquivo tgotyhsp.tsm. O sumário desta classificação é o seguinte:

```
tgotyh DD s0s00 000 0s1 100 51 ss-- 00--.
```

De acordo com a explicação dos elementos desse sumário dada na seção 5.4, também obtemos que o grupo de simetria tem cinco parâmetros ( $G_5$ ) e que existe um grupo

de isotropia com um parâmetro apenas ( $H_1$ ). Portanto, o grupo de simetria atua em uma órbita com dimensão  $d = 4$  e as condições necessárias dadas pelas eqs. (6.27)–(6.29) também são suficientes para a homogeneidade ET.

Um aspecto importante dos espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel com homogeneidade ET é o fato dos seus grupos de isometria poderem ter dimensão maior do que 5, como ocorre nas classes onde  $m^2 = 4\omega^2$ , que tem um grupo  $G_7$ , e  $\omega = 0$ ,  $m^2 \neq 0$  com o grupo  $G_6$ . Esta propriedade é perdida no caso dos espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel com homogeneidade ET, pois não existe nenhuma relação entre os parâmetros  $(\ell, m^2, \omega)$  que possibilite um grupo de simetria com dimensão maior do que 5, exceto o caso especial dos espaços-tempos de Riemann-Cartan com curvatura e torção nulas ( $\ell = m^2 = \omega = 0$ ).

Com relação às classificações de Petrov e de Segre dos escalares de Cartan não-nulos, temos os seguintes resultados. A partir das eqs. (6.30)–(6.34) para uma tríade  $(\ell, m^2, \omega)$  arbitrária, verificamos que  $\Psi_A$  e  $\psi_A$  são Petrov tipo D e que  $\Phi_{AB'}$  e  $\phi_{AB'}$  são Segre tipo  $[(11)1,1]$ . Entretanto, existem muitos exemplos onde casos especiais destes tipos algébricos podem ser obtidos. Alguns deles são mencionados a seguir:

1. Quando  $m = \ell/3 = 2\omega$  ou quando  $m^2 = \ell^2/2$ ,  $\omega = 0$ , obtemos que  $\Psi_A$  e  $\psi_A$  são, respectivamente, Petrov tipo 0 e D; enquanto  $\Phi_{AB'}$  é Segre tipo  $[1(11,1)]$  e  $\phi_{AB'}$  é Segre tipo  $[(11)1,1]$ ;
2. Para  $\ell = 2\omega$  e  $m^2 \neq 0$ ,  $\Psi_A$  é Petrov tipo D,  $\psi_A$  é Petrov tipo 0,  $\Phi_{AB'}$  é Segre tipo  $[(11)(1,1)]$  e  $\phi_{AB'}$  é Segre tipo 0;
3. Quando  $\ell = 2\omega$  e  $m^2 = 0$ ,  $\Psi_A$  e  $\psi_A$  são Petrov tipo 0, enquanto  $\Phi_{AB'}$  e  $\phi_{AB'}$  são Segre tipo 0;
4. No caso em que  $m^2 = \omega = 0$ ,  $\ell \neq 0$  (métrica de Minkowski),  $\Psi_A$  e  $\psi_A$  são Petrov tipo D,  $\Phi_{AB'}$  é Segre tipo  $[(111),1]$  e  $\phi_{AB'}$  é Segre tipo  $[(11)1,1]$ .

As partes irredutíveis não-nulas da torção são o pseudo-traço e o espinor de Lanczos. O espinor  $\mathcal{P}_{AX'}$  corresponde a um vetor tipo-espaço, cujo grupo de isotropia é  $SO(2,1)$ . O espinor de Lanczos  $\mathcal{L}_{ABCX'}$  é invariante apenas sob o grupo das rotações espaciais, dado pela eq. (6.39), com dimensão igual a um. Assim, mesmo no caso do item 4 acima, isto é, do espaço-tempo com métrica de Minkowski e torção ( $m^2 = \omega = 0, \ell \neq 0$ ), onde o

espaço-tempo Riemanniano correspondente admite um  $G_{10}$  de isometria, a presença da torção reduz o grupo de simetria da variedade de Riemann-Cartan para um  $G_5$ .

Como nenhuma equação de campo foi utilizada para obter os resultados acima, eles são válidos para qualquer solução tipo Gödel (por exemplo, as soluções em [74] e [75]), independentemente da TGT em consideração.

# Conclusão

Investigamos o problema da equivalência de campos gravitacionais, no contexto das teorias da gravitação com torção, nos seus aspectos teóricos e práticos. No capítulo 2 apresentamos a solução formal do problema para variedades de Riemann-Cartan de dimensão  $n$ , e também um algoritmo para testar a equivalência na prática [22, 24]. No capítulo 3, obtivemos explicitamente um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan, o que tornou possível a implementação do algoritmo para testar a equivalência usando computação algébrica [22]–[24], [29]. Nos capítulos 4 e 5 mostramos como utilizar o pacote de computação algébrica *TCLASSI*, onde as técnicas do problema da equivalência desenvolvidas nos capítulos anteriores são implementadas, escrito utilizando o sistema *SHEEP/CLASSI* [22]–[24], [25]. Todos estes resultados estendem resultados anteriores obtidos no contexto da TRG [17].

A solução do problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan e a sua implementação no pacote de computação algébrica *TCLASSI* constituem uma ferramenta poderosa na investigação das TGT. Elas são úteis tanto para encontrar novas soluções quanto na investigação das propriedades das soluções existentes.

No capítulo 6 mostramos como as técnicas do problema da equivalência implementadas em *TCLASSI* podem ser usadas no estudo das propriedades das soluções exatas das TGT. Investigamos o problema da homogeneidade espaço-temporal dos espaços-tempos de Riemann-Cartan tipo Gödel, isto é, com métrica tipo Gödel e com uma torção com as mesmas simetrias translacionais da métrica. As condições necessárias e suficientes para a homogeneidade espaço-temporal foram derivadas, generalizando trabalhos anteriores sobre espaços-tempos Riemannianos tipo Gödel [34]. A equivalência destes espaços-tempos homogêneos também foi estudada e mostramos que eles admitem um grupo de transformações afim-isométricas com dimensão 5 e também que são caracterizados por três parâmetros essenciais  $\ell, m^2, \omega$ : tríades idênticas  $(\ell, m^2, \omega)$  correspondem a varia-

des equivalentes. Estes resultados têm um caráter geral, pois são válidos para qualquer solução tipo Gödel em qualquer TGT.

Os resultados principais desta tese fazem parte de alguns trabalhos originais publicados e submetidos para publicação [18], [22]–[24], [25, 29, 34]. Uma primeira extensão foi tratada em um novo artigo recentemente submetido para publicação [35].

Quanto aos desenvolvimentos dos resultados obtidos, queremos mencionar três aspectos de interesse do ponto de vista teórico. O primeiro diz respeito à determinação do menor valor para a ordem máxima  $p$  das derivadas da curvatura e da torção. Os resultados já obtidos no caso da TRG [51, 52], podem ser estendidos para as TGT, onde esperamos que sejam obtidos limites menores do que aqueles da TRG. O segundo é a questão da determinação da álgebra de Lie do grupo das transformações afim-isométricas a partir dos escalares de Cartan, também estendendo os resultados existentes para a TRG [45, 46]. Finalmente, temos a investigação dos limites de famílias de espaços-tempos com torção, utilizando os escalares de Cartan [19, 20].

# Apêndice A

## Variedades de Riemann-Cartan e fibrados

### A.1 Introdução

Considerando que o formalismo de fibrados constitui o contexto natural para abordar o problema da equivalência, apresentamos neste apêndice alguns resultados sobre fibrados de referenciais (frame bundles) em variedades de Riemann-Cartan. Este apêndice também tem a finalidade de estabelecer as *convenções e notações* utilizadas no corpo desta tese, que são iguais às da referência [80].

Na segunda seção, apresentamos alguns tópicos sobre variedades de Riemann-Cartan  $M$ , onde discutimos algumas propriedades que estão relacionadas tanto com o problema da equivalência quanto com a definição dos fibrados. Na terceira e na quarta seção apresentamos, respectivamente, algumas propriedades do fibrado dos referenciais lineares  $B(M)$  e do fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$ . Em particular, na quarta seção calculamos as derivadas exteriores e as derivadas de Lie dos escalares de Cartan, obtidos no capítulo 2. Maiores detalhes podem ser obtidos nas referências [14], [16], [80]–[85] e outras ali citadas. Entretanto, procuramos apresentar os assuntos de forma que não seja necessário recorrer às referências acima.

## A.2 Variedades de Riemann-Cartan

Uma *variedade de Riemann-Cartan* é uma variedade diferenciável  $M$ , dotada de uma métrica  $g_{\mu\nu}$  e de uma conexão  $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$  que satisfaz a duas condições: (1) a conexão é compatível com a métrica, isto é, a derivada covariante da métrica é identicamente nula  $g_{\mu\nu;\rho} = 0$ ; (2) a conexão é não-simétrica, isto é, o tensor de torção  $T^{\alpha}_{\mu\nu} = -2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$  é diferente de zero. Quando esta segunda condição não for satisfeita, a variedade é denominada *variedade Riemanniana* e a conexão é completamente determinada pela métrica.

Como estamos interessados nas TGT, vamos considerar variedades com dimensão  $n = 4$  que são dotadas de métricas Lorentzianas. A menos que seja indicado o contrário, os índices denotados por letras minúsculas variam de 0 até 3. As letras gregas e latinas estão relacionadas, respectivamente, com referenciais lineares e referenciais ortogonais generalizados. Utilizaremos a convenção da soma de Einstein, onde somatórios são representados por índices repetidos.

Diversos objetos geométricos podem ser definidos na variedade  $M$  como, por exemplo, tensores, formas diferenciais e espinores. Os tensores e as formas diferenciais são definidos utilizando o produto tensorial e o produto exterior a partir do espaço tangente  $T_p(M)$  e do espaço cotangente  $T^*_p(M)$ , definidos em um ponto  $p$  de  $M$ . O espaço tangente  $T_p(M)$  é formado pelos vetores tangentes definidos no ponto  $p$  de  $M$ , isto é, operadores lineares  $v$  que associam a cada função real  $f$  definida em  $M$  um número real  $v[f]$ . O espaço cotangente  $T^*_p(M)$ , também chamado espaço dual de  $T_p(M)$ , é formado por 1-formas diferenciais. Estas 1-formas são aplicações lineares  $w$  que associam a cada vetor  $v$  de  $T_p(M)$  um número real  $\langle w, v \rangle$ . Em qualquer ponto  $p$  de  $M$ , os espaços  $T_p(M)$  e  $T^*_p(M)$  têm a mesma dimensão que a variedade  $M$ .

Geralmente os tensores e 1-formas são dados, respectivamente, em termos de componentes em relação a bases de  $T_p(M)$  e de  $T^*_p(M)$ . Em uma variedade espaço-tempo estas bases são denominadas, respectivamente, referenciais e co-referenciais. A partir dos tensores e formas diferenciais, definidos em um ponto  $p$  de  $M$ , podemos definir campos de tensores e de formas diferenciais que variam de forma contínua em cada ponto de um subconjunto  $U$  de  $M$ . Referenciais e co-referenciais são definidos em uma vizinhança  $U$  de  $M$  a partir de campos de vetores  $\{u_{\alpha}\}$  e campos de 1-formas  $\{w^{\alpha}\}$ , que formam em cada ponto  $p$  de  $U$  bases de  $T_p(M)$  e de  $T^*_p(M)$ , respectivamente. Eles serão duais se  $\langle w^{\alpha}, u_{\beta} \rangle = \delta^{\alpha}_{\beta}$ , onde  $\delta^{\alpha}_{\beta}$  é o delta de Kronecker.

Dado um sistema de coordenadas  $(U, x)$ , que define coordenadas  $x^\mu$  em uma vizinhança  $U$  de  $M$ , podemos definir referenciais e co-referenciais duais através das bases de coordenadas dadas, respectivamente, por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad dx^\nu. \quad (\text{A.1})$$

Assim, quaisquer campos de vetores  $v$  e 1-formas  $w$  definidos em  $U$  podem ser expressos de modo único como  $v = v^\alpha \partial_\alpha$  e  $w_\beta dx^\beta$ , onde  $v^\alpha$  e  $w_\beta$  são os componentes de  $v$  e  $w$ , respectivamente, em relação as bases de coordenadas.

Um referencial  $\{u_\alpha\}$  é chamado de não-holonômico, se os componentes do objeto de não-holonomia  $C^\mu_{\alpha\beta}$  definidos pelo comutador  $[u_\alpha, u_\beta]f = (u_\alpha u_\beta - u_\beta u_\alpha)[f] = C^\mu_{\alpha\beta} u_\mu[f]$ , para uma função  $f$  qualquer, forem diferentes de zero. Neste caso, não existe uma escolha de coordenadas onde o referencial  $\{u_\beta\}$  e o seu dual  $\{w^\alpha\}$  coincidam com as bases de coordenadas.

Os referenciais e co-referenciais não são determinados de modo único, pois eles são definidos a menos de transformações lineares não-singulares. A partir de dois referenciais  $\{u_\alpha\}$  e  $\{w^\alpha\}$  que formam bases duais, por exemplo, podemos definir novos referenciais duais através de uma mudança de bases dada por

$$\tilde{u}_\beta(x) = u_\alpha(x) L_\beta^\alpha \quad \text{e} \quad \tilde{w}^\beta(x) = (L^{-1})^\beta_\alpha w^\alpha(x), \quad \text{onde} \quad L_\alpha^\mu (L^{-1})^\alpha_\beta = \delta^\mu_\beta, \quad (\text{A.2})$$

onde as matrizes  $L = (L_\beta^\alpha)$  e  $L^{-1} = ((L^{-1})^\beta_\alpha)$  são elementos das representações do grupo geral linear  $GL(4, R)$  em  $T_p(M)$  e  $T_p^*(M)$ , respectivamente. Nesta notação estamos utilizando a seguinte convenção: o índice contravariante representa as colunas de uma matriz e o índice covariante as linhas.

As transformações de coordenadas também determinam elementos de  $GL(4, R)$  dados por  $L^\mu_\nu = \partial x^\mu / \partial \tilde{x}^\nu$  que, juntamente com sua inversa, atuam nas bases de coordenadas, nos componentes dos vetores e das 1-formas. Os componentes de  $u_\alpha = u_\alpha^\nu \partial_\nu$ , por exemplo, se transformam de acordo com

$$u_\alpha^\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} u_\alpha^\nu(x) = L^\mu_\nu u_\alpha^\nu(x). \quad (\text{A.3})$$

Podemos distinguir entre as transformações dadas pelas eqs. (A.2)–(A.3) considerando que nas mudanças de base o grupo  $GL(4, R)$  atua à direita, enquanto nas transformações de coordenadas ele atua à esquerda, segundo a nossa convenção para a multiplicação de

matrizes. Estes referenciais também são chamados de referenciais lineares por se transformarem sob a ação do grupo geral linear  $GL(4, R)$ .

Utilizando o produto escalar definido pela métrica  $g$  em cada espaço tangente  $T_p(M)$ , podemos definir um conjunto especial de referenciais, denominados referenciais ortogonais generalizados. O produto escalar de dois vetores,  $v = v^\mu u_\mu$  e  $r = r^\mu u_\mu$ , é definido por  $g(v, r) = g_{\mu\nu} v^\mu r^\nu$ , onde  $g_{\mu\nu} = g(u_\mu, u_\nu)$  são os componentes da métrica no referencial  $\{u_\mu\}$ . Quando este produto escalar for igual a zero os vetores são ortogonais. Um *referencial ortogonal generalizado* é definido pelos campos vetoriais  $\{h_a\}$ , dados por

$$h_a = h_a^\mu(x) \partial_\mu, \quad (\text{A.4})$$

onde os componentes da métrica  $\eta_{ab} = g(h_a, h_b) = g_{\mu\nu} h_a^\mu h_b^\nu$  são constantes determinadas pelos elementos de uma matriz simétrica  $\eta = (\eta_{ab})$ , com a assinatura apropriada. O co-referencial dual do referencial ortogonal generalizado  $\{h_a\}$  é definido pelo conjunto de 1-formas  $\{\theta^a\}$ , dadas por

$$\theta^a = h^a_\mu(x) dx^\mu, \quad (\text{A.5})$$

que satisfaz as seguintes condições

$$h_a^\nu h^a_\mu = \delta^\nu_\mu \text{ e } h^a_\mu h_b^\mu = \delta^a_b. \quad (\text{A.6})$$

Os componentes dos tensores com relação a um referencial ortogonal generalizado são escalares, isto é, invariantes sob transformações de coordenadas. Os componentes  $T^a_b$  de um tensor em um referencial ortogonal generalizado estão relacionados com os componentes  $T^\mu_\nu$  em coordenadas de acordo com

$$T^\mu_\nu = h_a^\mu h^b_\nu T^a_b \text{ e } T^a_b = h^a_\mu h_b^\nu T^\mu_\nu. \quad (\text{A.7})$$

Os referenciais ortogonais generalizados também não são determinados de modo único, pois existem transformações lineares não singulares que preservam o produto escalar definido pela métrica. Estas transformações formam um subgrupo do grupo geral linear  $GL(4, R)$  que denominamos de *grupo ortogonal generalizado*  $O(4)$  [41]. Consideremos os referenciais ortogonais generalizados  $\{h_a\}$  e  $\{\theta^a\}$  que formam bases duais. Eles se transformam sob o grupo  $O(4)$  de acordo com

$$\tilde{h}_b = \Lambda_b^a h_a \text{ e } \tilde{\theta}^b = (\Lambda^{-1})^b_a \theta^a, \text{ onde } (\Lambda^{-1})^a_b \Lambda_a^c = \delta_b^c. \quad (\text{A.8})$$

As matrizes  $\Lambda = (\Lambda_b^a)$  e  $\Lambda^{-1} = ((\Lambda^{-1})^b_a)$  são, respectivamente, elementos das representações do grupo ortogonal generalizado  $O(4)$  em  $T_p(M)$  e  $T_p^*(M)$ . Estas matrizes satisfazem às seguintes condições

$$\eta_{ab} = \Lambda_a^c \eta_{cd} \Lambda_b^d. \quad (\text{A.9})$$

Uma transformação ortogonal generalizada local, definida em um subconjunto aberto  $U$  de  $M$ , é uma aplicação diferenciável  $\Lambda : U \mapsto O(4)$ , que determina uma transformação ortogonal generalizada  $\Lambda(p)$  em cada ponto  $p$  de  $U$ .

As representações dos grupos  $GL(4, R)$  e  $O(4)$  são distinguidas entre si por dois conjuntos de índices, aqueles relacionados com  $GL(4, R)$  são indicados por letras gregas minúsculas, e aqueles relacionados com  $O(4)$  são indicados por letras latinas minúsculas.

A partir da conexão podemos definir os conceitos de transporte paralelo e derivada covariante. A conexão pode ser definida, em cada ponto  $p$  de  $M$ , pela 1-forma  $\Gamma : T_p(M) \mapsto \mathcal{G}$  com valores na álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  do grupo geral linear  $GL(4, R)$ , isto é, no conjunto das matrizes  $4 \times 4$  [83]. Dada uma base de  $\mathcal{G}$ , a conexão pode ser expressa em um sistema de coordenadas  $x^\mu$  através do conjunto de 1-formas com valores reais  $\Gamma^\nu_\mu = \Gamma^\nu_{\mu\rho} dx^\rho$ , que se transformam de acordo com  $\tilde{\Gamma}^\nu_\mu = L^\nu_\beta \Gamma^\beta_\alpha L_\mu^\alpha + L^\nu_\beta dL_\mu^\beta$ . Em um referencial ortogonal generalizado  $h_a = h_a^\mu \partial_\mu$ , a conexão fica expressa pelas 1-formas

$$\omega_b^a = \gamma_{b\rho}^a dx^\rho, \quad (\text{A.10})$$

cujos coeficientes  $\gamma_{b\rho}^a$  se transformam de acordo com

$$\tilde{\gamma}_{b\mu}^a = \Lambda_a^c \gamma_{d\mu}^c \Lambda_b^d + \Lambda_a^c \partial_\mu \Lambda_b^c. \quad (\text{A.11})$$

Estes coeficientes estão relacionados com  $\Gamma^\nu_{\mu\rho}$  através das equações

$$\gamma_{b\mu}^a = h_a^\beta (\partial_\mu h_b^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} h_b^\alpha). \quad (\text{A.12})$$

Utilizando a conexão podemos definir a derivada covariante. Para um campo vetorial  $v$ , por exemplo, com componentes  $v^a$  em um referencial ortogonal generalizado  $\{h_a\}$ , as derivadas covariantes são definidas por

$$\nabla_b v^a = v^a_{;b} = v^a|_b + \gamma_{nb}^a v^n, \quad (\text{A.13})$$

onde  $v^a|_b$  é a derivada de  $v^a$  na direção do vetor  $h_b$  definida por

$$v^a|_b = h_b^\mu \partial_\mu v^a. \quad (\text{A.14})$$

Como a conexão é *não-simétrica*, devemos identificar qual das duas maneiras de definir a derivada covariante é utilizada, isto é, qual é o índice da conexão utilizado na contração com o vetor na eq. (A.13).

Comprimentos (e ângulos) são preservados sob transporte paralelo em uma variedade de Riemann-Cartan, uma vez que a conexão é compatível com a métrica. Em um referencial ortogonal generalizado, a condição necessária e suficiente para uma conexão ser compatível com a métrica é dada por  $\nabla_c \eta_{ab} = \eta_{ab;c} = \eta_{ab|c} - \gamma_{ac}^n \eta_{nb} - \gamma_{bc}^n \eta_{an} = 0$ , isto é, a derivada covariante da métrica deve ser igual a zero. Como os componentes  $\eta_{ab}$  são constantes, esta condição se reduz a

$$\eta_{an} \omega_b^n + \eta_{bn} \omega_a^n = \omega_{ab} + \omega_{ba} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Isto significa que a conexão  $\omega_b^a$  é uma 1-forma  $\omega : T_p(M) \mapsto \mathcal{H}$  com valores na algébra de Lie  $\mathcal{H}$  do grupo ortogonal generalizado  $O(4)$ , isto é, o conjunto das matrizes que satisfazem às eqs. (A.15) acima [85].

A conexão e a curvatura de uma variedade de Riemann-Cartan podem ser determinadas a partir da métrica e da torção através das equações de estrutura de Cartan. Sejam dados um co-referencial ortogonal generalizado  $\{\theta^a\}$  (isto é, uma métrica) e uma torção definida pela 2-forma

$$T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c, \quad \text{onde} \quad T_{bc}^a = -T_{cb}^a. \quad (\text{A.16})$$

Neste caso, além dos 16 componentes  $h^a_\mu$  dos co-referenciais  $\theta^a = h^a_\mu dx^\mu$ , também precisamos especificar os 24 componentes independentes da torção.

A partir destes dados podemos determinar os componentes da conexão e da curvatura, utilizando as equações de estrutura de Cartan dadas por

$$d\theta^a = -\omega_b^a \wedge \theta^b + T^a, \quad (\text{A.17})$$

$$d\omega_b^a = -\omega_n^a \wedge \omega_b^n + R_b^a, \quad (\text{A.18})$$

onde  $\omega_b^a$  é a 1-forma conexão definida pela eq. (A.10),  $T^a$  é a 2-forma torção definida acima e  $R_b^a$  é a 2-forma curvatura definida por

$$R_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a \theta^c \wedge \theta^d, \quad \text{onde} \quad R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a. \quad (\text{A.19})$$

Definindo  $R_{abcd} = \eta_{an} R_{bcd}^n$ , obtemos também as simetrias  $R_{abcd} = -R_{badc}$ , a partir da segunda equação de estrutura de Cartan dada pela eq. (A.18) e da condição de metricidade dada pela eq. (A.15). Portanto, a curvatura tem 36 componentes independentes.

A torção é decomposta em três partes irredutíveis: o traço e o pseudo-traço, cada um com 4 componentes, e o tensor de Lanczos da torção com 16 componentes. Consideremos os componentes da torção  $T^a_{bc}$  em um referencial ortogonal generalizado e os componentes do dual da torção definido por

$$T^{*a}_{bc} = \frac{1}{2} \eta_{bc}{}^{kl} T^a_{kl}, \quad (\text{A.25})$$

onde  $\eta^{abcd}$  é o pseudo-tensor totalmente anti-simétrico com  $\eta^{0123} = 1/\sqrt{-\det(\eta_{ab})}$ . O traço e o pseudo-traço da torção são definidos, respectivamente, por

$$T_a = T^n_{an} \text{ e } P_a = T^{*n}_{an}. \quad (\text{A.26})$$

O tensor de Lanczos da torção  $L^a_{bc}$  é a parte irredutível restante, isto é, a parte sem traço e sem pseudo-traço, que tem as seguintes propriedades

$$L^n_{an} = 0 \text{ e } L^{*n}_{an} = 0 \text{ (} L_{[abc]} = 0 \text{)}. \quad (\text{A.27})$$

Este tensor recebe este nome porque tem as mesmas simetrias que o tensor de Lanczos da TRG, que atua como um potencial para o tensor de Weyl da TRG [61, 88]. Reunindo estas três partes, a decomposição da torção fica dada por

$$T^a_{bc} = L^a_{bc} + \frac{1}{3} (\delta^a_b T_c - \delta^a_c T_b) - \frac{1}{3} \eta^{an}{}_{bc} P_n. \quad (\text{A.28})$$

A curvatura é decomposta em seis partes irredutíveis. Quando a torção for nula, três delas também são identicamente nulas e as outras três coincidirão com as partes irredutíveis da curvatura da variedade Riemanniana resultante. Podemos realizar esta decomposição a partir dos componentes  $R^a_{bcd}$  do tensor de curvatura e dos componentes

$$R^{*a}_{bcd} = \frac{1}{2} \eta_{cd}{}^{mn} R^a_{bmn}, \quad (\text{A.29})$$

do dual do tensor de curvatura, dados em um referencial ortogonal generalizado. Calculando o traço de cada um destes tensores obtemos o tensor de Ricci e o pseudo-tensor de Ricci definidos, respectivamente, por

$$R_{ab} = R^n_{anb} \text{ e } P_{ab} = R^{*n}_{anb}. \quad (\text{A.30})$$

A partir destes traços cinco partes irredutíveis da curvatura podem ser obtidas, a saber: o escalar de curvatura  $R = \eta^{ab} R_{ab}$ , o pseudo-escalar de curvatura  $P = \eta^{ab} P_{ab}$ , a parte anti-simétrica do tensor de Ricci

$$A_{ab} = R_{[ab]} = \frac{1}{2} (R_{ab} - R_{ba}), \quad (\text{A.31})$$

e as partes sem traço de  $R_{(ab)}$  e de  $P_{(ab)}$  definidas, respectivamente, por

$$S_{ab} = R_{(ab)} - \frac{1}{4} \eta_{ab} R \text{ e } Q_{ab} = P_{(ab)} - \frac{1}{4} \eta_{ab} P. \quad (\text{A.32})$$

Resta apenas obter as partes sem traço e sem pseudo-traço do tensor de curvatura. A parte sem traço tem as mesmas simetrias que  $R^a{}_{bcd}$  e é definida pelo tensor

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{2} (\eta_{ac} R_{bd} - \eta_{ad} R_{bc} - \eta_{bc} R_{ad} + \eta_{bd} R_{ac}) + \frac{1}{6} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) R, \quad (\text{A.33})$$

que denominamos tensor de Weyl, pois este tensor coincide com o tensor de Weyl da TRG quando a torção é nula.

Embora o traço do tensor de Weyl seja nulo  $W^n{}_{anb} = 0$ , o mesmo não ocorre com o seu pseudo-traço que é dado por

$$W^{*n}{}_{anb} = P_{ab} - A^*{}_{ab}, \quad (\text{A.34})$$

onde  $P_{ab}$  é o pseudo-tensor de Ricci e  $A_{ab}$  é a parte anti-simétrica do tensor de Ricci definidos pelas eqs. (A.30) e (A.31), respectivamente.

Utilizando a expressão para o pseudo-traço do tensor de Weyl dada pela eq. (A.36), podemos mostra que a parte anti-simétrica do tensor de Ricci está relacionada com a parte anti-simétrica do pseudo-tensor de Ricci de acordo com

$$P_{[ab]} = A^*{}_{ab}, \quad (\text{A.35})$$

pois calculando o dual da eq. (A.34) obtemos  $P^*{}_{ab} = -A_{ab}$ , tendo em vista que  $W^n{}_{anb} = 0$ .

Decompondo em partes irreduzíveis os componentes do pseudo-traço do tensor de Weyl dados pela eq. (A.34) e substituindo na eq. (A.35), obtemos que o pseudo-traço do tensor de Weyl coincide com a parte simétrica do pseudo-tensor de Ricci, sendo dado por

$$W^{*n}{}_{anb} = P_{(ab)} = Q_{ab} + \frac{1}{4} P. \quad (\text{A.36})$$

Como o tensor de Weyl tem um pseudo-traço não nulo, podemos decompor o dual do tensor de Weyl em partes irreduzíveis de acordo com

$$W^*{}_{abcd} = C^*{}_{abcd} + \frac{1}{2} (\eta_{ac} P_{(bd)} - \eta_{ad} P_{(bc)} - \eta_{bc} P_{(ad)} + \eta_{bd} P_{(ac)}) - \frac{1}{6} (\eta_{ac} \eta_{bd} - \eta_{ad} \eta_{bc}) P, \quad (\text{A.37})$$

onde  $C^*{}_{abcd}$  é o dual da parte sem pseudo-traço do tensor de Weyl, isto é, a parte sem traço e sem pseudo-traço da curvatura. Calculando o dual da eq. (A.37) acima, obtemos a sexta e última parte irreduzível da curvatura que é definida por

$$C_{abcd} = W_{abcd} + \frac{1}{2} [\eta^n{}_{cda} P_{(bn)} - \eta^n{}_{cdb} P_{(an)}] + \frac{1}{12} \eta_{abcd} P, \quad (\text{A.38})$$

que denominamos *tensor de Weyl-Cartan*. Este tensor será nulo, quando a torção for igual a zero. O tensor de Weyl-Cartan tem as mesmas simetrias que o tensor de Weyl da TRG, dadas por

$$C_{anb}^n = 0 \quad \text{e} \quad C^{*n}_{anb} = 0 \quad (C_{[abc]d} = 0). \quad (\text{A.39})$$

Os componentes das parte irredutíveis da curvatura e da torção estão relacionados entre si pelas identidades de Ricci e de Bianchi, como veremos a seguir. Em geral os componentes das derivadas covariantes de um tensor qualquer em um referencial ortogonal generalizado não são todos independentes entre si.

Consideremos, por exemplo, um campo vetorial  $v^a$ . Utilizando a eq. (A.22) e a definição de derivada covariante dada pela eq. (A.13), obtemos que as derivadas covariantes de primeira ordem de  $v^a$  estão relacionadas pelas 6 equações

$$\nabla_a v_b - \nabla_b v_a = -(C_{ab}^n + T_{ab}^n)v_n, \quad (\text{A.40})$$

onde  $C_{ab}^n$  e  $T_{ab}^n$  são, respectivamente, os componentes do objeto de não-holonomia e da torção. Portanto, apenas 10 dos 16 componentes de  $\nabla_a v_b$  são independentes entre si. As derivadas de ordens superiores estão relacionadas entre si pelas identidades de Ricci. Considerando um tensor  $v^a_b$ , por exemplo, estas identidades são dadas por

$$(\nabla_c \nabla_d - \nabla_d \nabla_c)v^a_b = R^a_{ncd}v^n_b - R^n_{bcd}v^a_n - T^n_{cd}\nabla_n v^a_b. \quad (\text{A.41})$$

Assim, se em lugar de  $v^a_b$  tivermos as derivadas covariante de ordem  $n$  de um tensor qualquer, obtemos que os componentes das derivadas covariantes de ordem  $(n+2)$  desse tensor estão relacionadas tanto entre si quanto com os componentes da curvatura, da torção e das derivadas covariantes de ordem  $(n+1)$ .

Enquanto as identidades de Ricci podem ser obtidas com relação a qualquer tensor, as identidades de Bianchi relacionam apenas a curvatura com a torção, pois determinam as condições de integrabilidade das equações de estrutura de Cartan. Estas identidades nos mostram que as derivadas covariantes de primeira ordem, tanto da curvatura quanto da torção, estão algebricamente relacionadas com os componentes da torção e da curvatura.

O primeiro conjunto das identidades de Bianchi é obtido igualando a zero a derivada exterior da primeira equação de estrutura de Cartan dada pela eq. (A.17). Seguindo este procedimento, obtemos que  $R^a_b \wedge \theta^b - dT^a - \omega^a_b \wedge T^b = 0$ . Em um referencial ortogonal generalizado estas indentidades têm os seguintes componentes

$$R^a_{[bcd]} - T^a_{[bc;d]} + T^n_{[bc}T^a_{d]n} = 0. \quad (\text{A.42})$$

Utilizando os duais dos tensores de curvatura e de torção definidos pelas eq. (A.25) e eq. (A.29), respectivamente, podemos expressar os componentes da eq. (A.42) acima de acordo com

$$R^*_{a \ n \ nc} = -\nabla^b T^*_{abc} + T^*_{nbc} T^a \ ^{bn}. \quad (\text{A.43})$$

O segundo conjunto de identidades de Bianchi é obtido a partir da segunda equação de estrutura de Cartan dada pela eq. (A.18), sendo dado por  $dR^a_b + \omega^a_n \wedge R^n_b - \omega^n_b \wedge R^a_n = 0$ . Os componentes destas equações, em relação a um referencial ortogonal generalizado, são dados por

$$R^a_{b[cd;e]} + R^a_{bn[c} T^n_{de]} = 0 \quad (\text{A.44})$$

que, utilizando os duais dos tensores de curvatura e de torção, também podem ser escritos como

$$\nabla^c R^*_{abcd} + R_{ab} \ ^{nc} T^*_{ncd} = 0. \quad (\text{A.45})$$

Concluimos a seção sobre variedades de Riemann-Cartan, definindo não só aplicações entre variedades, mas também as aplicações derivadas e as aplicações derivadas adjuntas que relacionam, respectivamente, os vetores e as 1-formas definidos nestas variedades.

Sejam  $M$  e  $\tilde{M}$  duas variedades diferenciáveis e seja  $\phi : M \mapsto \tilde{M}$  uma aplicação diferenciável. A aplicação derivada de  $\phi$ , em um ponto  $p$  de  $M$ , é uma aplicação linear  $\phi_* : T_p(M) \mapsto T_{\phi(p)}(\tilde{M})$  que associa um vetor  $v_p$  de  $T_p(M)$  com um vetor  $(\phi_*v)_{\phi(p)}$  de  $T_{\phi(p)}(\tilde{M})$ , definido por

$$(\phi_*v)_{\phi(p)}[f] = v_p[f \circ \phi], \quad (\text{A.46})$$

onde  $f$  é uma função real qualquer, definida em  $\tilde{M}$ . A *aplicação adjunta da derivada* de  $\phi$  é uma aplicação de 1-formas, induzida por  $\phi$  em um ponto  $\phi(p)$  de  $\phi(M)$ , definida pela aplicação linear  $\phi^* : T^*_{\phi(p)}(\tilde{M}) \mapsto T^*_p(M)$ , que aplica a 1-forma  $w$  de  $T^*_{\phi(p)}(\tilde{M})$  na 1-forma  $(\phi^*w)$  definida em  $T^*_p(M)$  por

$$\langle (\phi^*w), v \rangle_p = \langle w, (\phi_*v) \rangle_{\phi(p)}, \quad (\text{A.47})$$

para um vetor  $v$  quaisquer definido em  $T_p(M)$ . Considerando uma função  $f$  como uma 0-forma, temos  $\phi^*f = f \circ \phi$ . Quando  $\phi$  é um difeomorfismo podemos definir uma aplicação que atua em tensores mistos, utilizando  $\phi^{-1*}$  que atua no mesmo sentido que  $\phi_*$  [80].

Com estes resultados completamos a seção sobre variedades de Riemann-Cartan. A seguir, tendo uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  como variedade base, vamos definir

o fibrado dos referenciais lineares  $B(M)$  e o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$ , apresentando algumas propriedades dos mesmos que são relevantes para a discussão do problema da equivalência.

### A.3 O fibrado dos referenciais lineares

A primeira abordagem do problema da equivalência traz subjacente o conceito de fibrado dos referenciais lineares  $B(M)$ , pois é formulada utilizando bases de coordenadas[49]. Esta abordagem foi abandonada em favor do método de Cartan, que utiliza o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$ . Entretanto, como  $F(M)$  é um *subfibrado* de  $B(M)$ , apresentaremos alguns resultados sobre  $B(M)$  que são importantes para a realização de diversos cálculos sobre o problema da equivalência.

O fibrado dos referenciais sobre uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  é uma variedade diferenciável definida no conjunto  $B(M) = \cup_{p \in M} G_p$ , onde  $G_p$  é o conjunto de todos os referenciais  $u = \{u_\mu\}$  definidos no ponto  $p$  de  $M$ , isto é, o conjunto de todas as bases de  $T_p(M)$ . Podemos determinar o ponto de  $M$  onde um referencial  $u$  de  $B(M)$  está definido através a *projeção*  $\pi : B(M) \mapsto M$ , que aplica cada referencial  $u$  de  $B(M)$  no ponto  $\pi(u) = p$  de  $M$  onde o referencial  $u$  está definido. Por esta razão,  $M$  é denominada variedade base e o fibrado  $B(M)$  é dito ser definido sobre  $M$ .

Usando a projeção  $\pi$  podemos determinar, para cada ponto  $p$  de  $M$ , uma subvariedade  $\pi^{-1}(p)$  de  $B(M)$  denominada fibra sobre o ponto  $p$ , definida no conjunto  $G_p$  de todos os referenciais definidos em  $T_p(M)$ . Portanto, podemos nos referir a  $B(M)$  como um feixe de fibras ("fiber bundle"), isto é, um *fibrado* definido sobre a variedade  $M$ .

A projeção  $\pi$  também nos permite definir uma seção local de  $B(M)$  sobre uma vizinhança  $U$  de  $M$ . Esta seção é de uma aplicação diferenciável  $\sigma : U \mapsto B(M)$ , onde  $\pi(\sigma(p)) = p$  para todo  $p$  de  $U$ , isto é,  $\pi \circ \sigma = id_M$ . Devido a esta condição, cada ponto  $p$  de  $U$  é associado com um elemento  $\sigma(p) = \{u_\alpha\}$  de  $B(M)$  pertencente à fibra  $\pi^{-1}(p)$  sobre  $p$ , isto é, uma base de  $T_p(M)$ . Portanto, corresponde à definição de um referencial linear local em uma vizinhança  $U$  de  $M$ .

A partir de um sistema de coordenadas  $x^\mu$  em uma vizinhança  $U$  de  $M$ , podemos definir coordenadas em  $\pi^{-1}(U)$  através do difeomorfismo  $\Phi : \pi^{-1}(U) \mapsto U \times GL(4, R)$  que aplica um ponto  $u = \{u_\alpha\}$  em  $\Phi(u) = (p, \mathcal{U})$ , onde  $p = \pi(u)$  e  $\mathcal{U}$  é a matriz não-singular

formada pelos componentes de  $u_\alpha = u_\alpha^\nu \partial_\nu$  na base de coordenadas. As coordenadas de  $u$  são definidas por  $(y^\mu, u_\alpha^\nu)$ , onde  $y^\mu = x^\mu \circ \pi$  são as coordenadas do ponto  $p$  e  $u_\alpha^\nu$  são os elementos da matriz  $\mathcal{U}$ . Podemos dizer que estas coordenadas determinam, respectivamente, a posição e a orientação do referencial  $u$  em relação ao sistema de coordenadas  $x^\mu$ . Neste caso, dizemos que o fibrado  $B(M)$  é localmente trivial, pois admite uma trivialização local entre  $\pi^{-1}(U)$  e o produto cartesiano  $U \times GL(4, R)$  dada pelo difeomorfismo  $\Phi$ . Esta propriedade nos permite concluir que, para uma variedade com dimensão  $n$ , a dimensão de  $B(M)$  é igual a  $n + n^2 = n(n + 1)$ , onde  $n^2$  é a dimensão do grupo  $GL(n, R)$ .

O difeomorfismo  $\Phi$  definido em  $\pi^{-1}(U)$  é tal que, em cada ponto  $p$  de  $U$ , temos  $\pi(\Phi^{-1}(p, \mathcal{U})) = p$  para todo elemento  $\mathcal{U}$  do grupo  $GL(4, R)$ . Devido a esta propriedade, existe um difeomorfismo  $\phi_p : \pi^{-1}(p) \mapsto GL(4, R)$  que associa cada referencial linear  $u$  definido no ponto  $p$ , isto é, cada elemento da fibra  $\pi^{-1}(p)$ , com um elemento  $\phi_p(u) = \mathcal{U}$  do grupo  $GL(4, R)$ . Em particular o referencial definido pela base de coordenadas  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}(p)\}$  está associado ao elemento identidade  $I = (\delta^\mu_\nu)$  de  $GL(4, R)$ . O grupo  $GL(4, R)$  é denominado fibra típica de  $B(M)$ , pois as fibras  $\pi^{-1}(p)$  sobre os pontos  $p$  de  $U$  são diferentes cópias de  $GL(4, R)$ .

Como o difeomorfismo  $\phi_p$  não é canônico, pois depende do sistema de coordenada  $\{x^\mu\}$ , não existe nenhuma estrutura de grupo que seja natural em  $\pi^{-1}(p)$ . Se duas vizinhanças de coordenadas  $U$  e  $U'$  em  $M$  são tais que  $U \cap U' \neq \emptyset$ , então qualquer ponto  $p$  de  $U \cap U'$  a fibra  $\pi^{-1}(p)$  é identificada com o grupo  $GL(4, R)$  de duas maneiras: através de  $\phi_p$  e de  $\phi'_p$ . A junção entre estas identificações é realizada através das funções de transição  $\mathcal{T}(p) \equiv \phi'_p \circ \phi_p^{-1} : GL(4, R) \mapsto GL(4, R)$ . Portanto, as trivializações locais  $\Phi$  e  $\Phi'$  estão relacionadas por uma aplicação diferenciável  $\mathcal{T} : U \cap U' \mapsto GL(4, R)$  tal que  $\Phi'^{-1}(p, \mathcal{U}') = \Phi^{-1}(p, \mathcal{T}(p)\mathcal{U})$ . A topologia de  $B(M)$  é determinada pelas distorções e rotações que ocorrem nas fibras  $\pi^{-1}(p)$  através dessas junções. Por esta razão,  $GL(4, R)$  é denominado grupo de estrutura do fibrado.

A partir destes resultados podemos considerar  $B(M)$  como sendo formado pela variedade  $M$  com uma cópia do grupo  $GL(4, R)$  em cada ponto de  $M$  de tal forma que, apenas localmente os pontos de  $M$  podem ser separados das cópias de  $GL(4, R)$ . Dizemos que o fibrado é *trivial* quando esta separação é global. Neste caso, podemos escrever  $B(M) = M \times GL(4, R)$ , pois a variedade  $M$  pode ser identificada com a subvariedade de  $B(M)$  definida por  $\Phi^{-1}(p, I)$ , onde  $I$  é o elemento identidade de  $GL(4, R)$ .

Como vimos na seção anterior, existe uma liberdade de transformação dos referenciais e co-referenciais definidos em  $M$  que é determinada pela ação do grupo  $GL(4, R)$ . Do ponto de vista do fibrado, uma transformação de coordenadas corresponde a uma mudança de trivialização local, realizada através das funções de transição (onde o grupo atua à esquerda). Por outro lado, uma mudança de base corresponde uma ação do grupo de estrutura  $D : GL(4, R) \times B(M) \mapsto B(M)$  sobre o fibrado. Esta ação define, para cada elemento  $L$  de  $GL(4, R)$ , uma transformação do fibrado  $D_L : B(M) \mapsto B(M)$  de acordo com  $u' = D_L(u) = uL = \Phi^{-1}(p, UL)$ , isto é, através de uma ação à direita de  $GL(4, R)$  dada por  $u'_\alpha = u_\mu L_\alpha^\mu$ , de acordo com a nossa convenção para a multiplicação de matrizes.

A ação do grupo de estrutura sobre  $B(M)$  é independente da trivialização local, pois comuta com a ação à esquerda. Em cada ponto  $u$  do fibrado temos  $\pi(uL) = \pi(u)$ , onde  $L$  é um elemento qualquer de  $GL(4, R)$ ; portanto, a ação à direita de  $GL(4, R)$  em  $\pi^{-1}(p)$  é transitiva, pois para quaisquer elementos  $u$  e  $v$  da fibra  $\pi^{-1}(p)$  existe um elemento  $L$  de  $GL(4, R)$  tal que  $v = uL$  [16]. Assim, dado um referencial  $u$  tal que  $p = \pi(u)$ , podemos construir a fibra  $\pi^{-1}(p)$  de acordo com  $\pi^{-1}(p) = \{uL \mid L \in GL(4, R)\}$ .

A ação à direita do grupo  $GL(4, R)$  também é livre, isto é, se  $uL = u$  em algum ponto  $u$  de  $B(M)$ , então  $L$  deve ser o elemento identidade  $I$  de  $GL(4, R)$  [16]. Portanto, a liberdade de transformação dos referenciais existente em  $M$  é perdida em  $B(M)$ , pois tanto a posição quanto a orientação de cada referencial são fixadas em  $B(M)$ . Isto significa que o difeomorfismo  $\phi_p$  é tal que  $\phi_p(D_L(u)) = \phi_p(uL) = \phi_p(u)L = UL$  e que a ação do grupo à direita preserva as fibras, isto é, para todo  $L$  em  $GL(4, R)$  temos  $\pi \circ D_L = \pi$ .

Como  $B(M)$  é uma variedade diferenciável, em cada ponto  $u$  de  $B(M)$  podem ser definidos o espaço tangente  $T_u(F)$  e o espaço cotangente  $T_u^*(F)$ . A partir de um sistema de coordenadas  $\{y^\mu, u_\alpha^\nu\}$  em  $\pi^{-1}(U)$ , onde  $U$  é uma vizinhança de coordenadas em  $M$ , podemos definir as bases de coordenadas duais

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial u_\alpha^\sigma} \right\} \text{ e } \{dy^\mu, du_\beta^\rho\}, \quad (\text{A.48})$$

onde as seguintes relações são satisfeitas

$$\langle dy^\mu, \frac{\partial}{\partial y^\nu} \rangle = \delta^\mu_\nu \text{ e } \langle dw_\beta^\rho, \frac{\partial}{\partial u_\alpha^\sigma} \rangle = \delta_\beta^\alpha \delta_\sigma^\rho. \quad (\text{A.49})$$

Portanto, podemos expressar qualquer vetor tangente  $v$  ou 1-forma  $w$  definidos em  $B(M)$  em termos das bases de coordenadas, respectivamente, de acordo com

$$v = v^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + v_\beta^\nu \frac{\partial}{\partial u_\beta^\nu} \text{ e } w = w_\mu dy^\mu + w_\beta^\alpha du_\alpha^\beta. \quad (\text{A.50})$$

Além das bases de coordenadas, existe uma base do espaço cotangente  $T_u^*(F)$  que é independente de coordenadas e que é definida de modo único em todo ponto  $u$  de  $B(M)$ . Esta base é definida pelas 1-formas  $\{\Theta^\mu, \Sigma^\alpha_\beta\}$ , onde  $\Theta^\mu$  são as 1-formas canônicas e  $\Sigma^\alpha_\beta$  são as 1-formas da conexão de  $B(M)$  [14, 16]. Utilizando um sistema de coordenadas  $(y^\mu, u_\alpha^\nu)$  estas 1-formas podem ser definidas da seguinte maneira [14, 16]: as 1-formas da conexão  $\Sigma^\alpha_\beta$  de  $B(M)$  são definidas a partir das 1-formas  $\Gamma^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda$  da conexão de  $M$  expressa nas coordenadas  $\{x^\mu\}$ , de acordo com

$$\Sigma^\alpha_\beta = u^\alpha_\mu du^\mu_\beta + u^\alpha_\mu (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \circ \pi) u^\nu_\beta dy^\lambda; \quad (\text{A.51})$$

e as 1-formas canônicas são definidas por

$$\Theta^\alpha = u^\alpha_\mu dy^\mu, \quad (\text{A.52})$$

onde  $\mathcal{U}^{-1} = (u^\alpha_\mu)$  é o elemento de  $GL(4, R)$  definido pela matriz inversa de  $\mathcal{U} = (u^\nu_\beta)$ , que satisfaz as seguintes relações

$$u^\alpha_\mu u^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad \text{e} \quad u^\mu_\beta u^\beta_\nu = \delta^\mu_\nu. \quad (\text{A.53})$$

O espaço tangente  $T_u(F)$  tem um subespaço  $V_u(F)$  denominado subespaço vertical, que é determinado de modo único através da ação à direita do grupo  $GL(4, R)$  em  $B(M)$ . O subespaço vertical  $V_u(F)$  é definido, em cada ponto  $u$  de  $B(M)$ , pelos vetores tangentes à fibra  $\pi^{-1}(p)$  sobre o ponto  $p = \pi(u)$  de  $M$  [16, 83]. Podemos definir bases duais dos subespaços  $V_u(F)$  e  $V_u^*(F)$  em termos das coordenadas de acordo com  $\{\frac{\partial}{\partial u_\alpha^\nu}\}$  e  $\{du^\mu_\beta\}$ , ou então utilizando os campos de vetores fundamentais e os campos de 1-formas dados por [16]

$$\mathcal{L}_\rho^\sigma = u_\rho^\mu \frac{\partial}{\partial u_\sigma^\mu} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^\alpha_\beta = u^\alpha_\mu du^\mu_\beta. \quad (\text{A.54})$$

Entretanto, são as 1-formas da conexão  $\Sigma^\alpha_\beta$  que são normalmente utilizadas como base dual dos campos de vetores fundamentais  $\mathcal{L}_\rho^\sigma$ , tendo em vista a eq. (A.51) e as relações dadas pelas eqs. (A.49), isto é, definem uma base do subespaço cotangente vertical  $V_u^*(F)$  em todo ponto  $u$  de  $B(M)$ .

O espaço tangente  $T_u(F)$  pode ser representado por uma soma direta

$$T_u(F) = V_u(F) \oplus H_u(F) \quad (\text{A.55})$$

através da escolha de um subespaço suplementar  $H_u(F)$  do subespaço vertical  $V_u(F)$ , denominado subespaço horizontal. Apesar da estrutura do fibrado determinar o subespaço

vertical  $V_u(F)$  de uma maneira única, não existe nenhum procedimento canônico semelhante para determinar o subespaço horizontal  $H_u(F)$ , a não ser que  $B(M)$  seja dotado de uma conexão.

O subespaço horizontal  $H_u(F)$  é formado pelos vetores tangentes às curvas  $h(t)$  em  $B(M)$ , cujas projeções  $\gamma(t) = \pi(h(t))$  na variedade base  $M$  são curvas onde os referenciais  $u = \{u_\alpha\}$  são transportados paralelamente ao longo de cada uma delas. As curvas  $h(t)$  são denominadas curvas horizontais [16]. Esta definição pode ser reformulada em termos das 1-formas  $\Sigma^\alpha_\beta$  da conexão de  $B(M)$  de acordo com

$$H_u(F) = \{v \in T_u(F) \mid \langle \Sigma^\alpha_\beta, v \rangle = 0\}, \quad (\text{A.56})$$

tendo em vista que as 1-formas  $\Sigma^\alpha_\beta$  definem uma base do subespaço cotangente vertical. Utilizando as eqs. (A.50)–(A.51) que definem, respectivamente, os componentes de um vetor  $v$  e das 1-formas  $\Sigma^\alpha_\beta$  na base de coordenadas, obtemos as seguintes condições  $\langle \Sigma^\alpha_\beta, v \rangle = u^\alpha_\mu (v^\mu_\beta + (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \circ \pi) u^\nu_\beta v^\lambda) = 0$ , que devem ser satisfeitas por qualquer vetor  $v$  horizontal. Utilizando as condições dadas pelas eqs. (A.53), obtemos que os componentes de um vetor horizontal  $v$  são tais que

$$v^\mu_\beta = -(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \circ \pi) u^\nu_\beta v^\lambda. \quad (\text{A.57})$$

Substituindo (A.57) em (A.50), obtemos que o vetor  $v$  é dado por  $v = v^\lambda D_\lambda$ , onde os vetores

$$D_\lambda = \frac{\partial}{\partial y^\lambda} - (\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \circ \pi) u^\nu_\beta \frac{\partial}{\partial u^\mu_\beta} \quad (\text{A.58})$$

definem uma base para o subespaço horizontal. Entretanto, em muitos casos, é mais conveniente utilizar a base independente de coordenadas dada por

$$\mathcal{D}_\alpha = u^\mu_\alpha D_\mu. \quad (\text{A.59})$$

A base dual destes vetores no subespaço cotangente horizontal é dada pelas 1-formas canônicas  $\Theta^\beta$ , definidas pelas eqs. (A.52).

Podemos resumir todos estes resultados dizendo que as bases horizontal-vertical de  $T_u(F)$  e  $T^*_u(F)$  dadas, respectivamente, por  $\{\mathcal{D}_\beta, \mathcal{L}^\nu_\mu\}$  e  $\{\Theta^\alpha, \Sigma^\alpha_\beta\}$ , são independentes de coordenadas e satisfazem às seguintes relações (bases duais)

$$\langle \Sigma^\alpha_\beta, \mathcal{L}^\mu_\mu \rangle = \delta^\alpha_\mu \delta^\nu_\beta, \quad (\text{A.60})$$

$$\langle \Theta^\alpha, \mathcal{D}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta. \quad (\text{A.61})$$

Neste caso, qualquer vetor tangente  $v$  e 1-forma  $w$  definidos em  $B(M)$  podem ser expressos em termos das bases horizontal-vertical de forma única de acordo com

$$v = v^\mu \mathcal{D}_\mu + v^\alpha_\beta \mathcal{L}_\alpha^\beta \quad \text{e} \quad w = w_\mu \Theta^\mu + w_\alpha^\beta \Sigma^\alpha_\beta. \quad (\text{A.62})$$

A partir da conexão  $\Sigma^\alpha_\beta$  podemos definir os tensores de curvatura e torção do fibrado  $B(M)$ , através das equações de estrutura de Cartan. Entretanto, deixaremos para desenvolver este tópico na próxima seção, quando discutimos o fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $O(M)$ , que é um subfibrado de  $B(M)$ .

## A.4 O fibrado dos referenciais ortogonais generalizados

Esta seção contém uma breve apresentação do fibrado dos referenciais ortogonais generalizados, com ênfase nas propriedades que são utilizadas na obtenção, não só da solução do problema da equivalência de variedades de Riemann-Cartan, como também da dimensão do grupo das transformações afim-isométricas a partir dos escalares de Cartan.

Como a variedade de Riemann-Cartan  $M$  é dotada de uma métrica, existe um subconjunto de  $B(M)$  formado pelos referenciais ortogonais generalizados, definidos a menos de transformações do grupo ortogonal generalizado  $O(4)$ , que constitui um subgrupo de  $GL(4, R)$ . O conjunto destes referenciais forma o fibrado  $F(M)$  dos referenciais ortogonais generalizados que é um *subfibrado* de  $B(M)$ , obtido através da redução do grupo de estrutura de  $B(M)$  para o subgrupo  $O(4)$  de  $GL(4, R)$  [14].

O fibrado dos referenciais ortogonais generalizados sobre uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  é uma variedade diferenciável  $F(M)$  definida no conjunto  $F(M) = \cup_{p \in M} F_p$ , onde  $F_p$  é o conjunto de todos os referenciais ortogonais generalizados  $w = \{h_\mu\}$  definidos no ponto  $p$  de  $M$ , isto é, no subconjunto de  $B(M)$  definido por

$$F(M) = \{w \in B(M) \mid g(h_a, h_b) - \eta_{ab} = 0\}, \quad (\text{A.63})$$

onde  $\eta_{ab}$  é uma matriz simétrica, com a assinatura apropriada. Podemos determinar o ponto de  $M$  onde um referencial  $w$  de  $F(M)$  está definido através da restrição da *projeção*  $\pi$  de  $B(M)$  para  $\pi : F(M) \mapsto M$ , que aplica cada referencial  $w$  de  $F(M)$  no ponto  $\pi(u) = p$  de  $M$  onde o referencial  $w$  está definido.

Uma seção local no fibrado dos referenciais ortogonais generalizados  $F(M)$  é uma aplicação diferenciável  $\sigma : U \mapsto F(M)$  de um subconjunto aberto  $U$  de  $M$  em  $F(M)$  tal que  $\pi \circ \sigma = id_M$ , onde  $id_M$  é a aplicação identidade em  $M$  e  $\pi$  é a projeção de  $F(M)$ . Do ponto de vista de  $M$ , uma seção de  $F(M)$  sobre  $U$  consiste em associar a cada ponto  $p$  de  $U$  um único referencial ortogonal generalizado  $\sigma(p) = \{h_i\}$  da fibra  $\pi^{-1}(p)$  sobre  $p$ , definindo um referencial ortogonal generalizado local em  $U$ .

Existe uma correspondência biunívoca entre as seções locais e as trivializações definidas sobre um mesmo subconjunto  $U$  da variedade base  $M$  [83]. Associada a cada seção local  $\sigma : U \mapsto F(M)$  existe uma trivialização local  $\Phi : \pi^{-1}(U) \mapsto U \times O(4)$  definida por  $\Phi(w) = (p, \Lambda)$ , onde  $p = \pi(w)$  e  $\Lambda$  é o único elemento de  $O(4)$  tal que  $w = \sigma(p)\Lambda$ , para todo  $w$  em  $\pi^{-1}(U)$ . Nesta trivialização local, denominada trivialização local canônica, a seção  $\sigma$  fica dada por  $\sigma(p) = \Phi(p, I)$ , onde  $I = (\delta^i_j)$  é o elemento identidade de  $O(4)$ , para todo  $p$  em  $U$ . Reciprocamente, esta última expressão pode ser utilizada para definir uma seção local a partir da trivialização [83]. Esta propriedade nos permite concluir que, para uma variedade com dimensão  $n$ , a dimensão de  $F(M)$  é igual a  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , onde  $\frac{1}{2}n(n-1)$  é a dimensão do grupo  $O(n)$ .

A partir de um sistema de coordenadas  $x^\mu$  definido em uma vizinhança  $U$  de  $M$  e de uma seção local  $\sigma : U \mapsto F(M)$  dada por  $\sigma(p) = \{h_i(p)\}$ , onde

$$h_i(p) = h_i{}^\nu(p) \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.64})$$

podemos seguir o procedimento apresentado em [83] para definir coordenadas em  $\pi^{-1}(U)$  utilizando a trivialização local canônica  $\Phi : \pi^{-1}(U) \mapsto U \times O(4)$ , associada à seção  $\sigma$ . Através desta trivialização cada ponto  $w = \{e_i\}$  de  $\pi^{-1}(U)$  é aplicado em  $\Phi(w) = (p, \Lambda)$ , onde  $p = \pi(u)$  e  $\Lambda$  é o elemento da representação de  $O(4)$  em  $T_p(M)$ , de acordo com  $w = \sigma(p)\Lambda$ , isto é,

$$e_i = \Lambda_i{}^j h_j. \quad (\text{A.65})$$

As coordenadas de  $w$  são definidas por  $(y^\mu, \xi^A)$ , onde  $y^\mu = x^\mu \circ \pi$  são as coordenadas do ponto  $p$  e  $\xi^A$  ( $A = 1, \dots, 6$ ) são os parâmetros do grupo  $O(4)$  que determinam de modo único o elemento  $\Lambda = (\Lambda_i{}^j(\xi))$ . Como ocorre em  $B(M)$ , aqui também podemos dizer que as coordenadas  $(y^\mu)$  e  $(\xi^A)$  determinam, respectivamente, a posição e a orientação do referencial ortogonal generalizado  $w$  em relação ao sistema de coordenadas  $x^\mu$ .

Entretanto, como  $F(M)$  é uma *subvariedade* de  $B(M)$ , também podemos utilizar a trivialização canônica associada a seção local  $\sigma$  para representar cada ponto  $w = \{e_i\}$  de

$F(M)$  em termos das coordenadas  $(y, h_i^\nu)$  de  $B(M)$  utilizando as relações

$$e_i = e_i^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \Lambda_i^j h_j = \Lambda_i^j h_j^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (\text{A.66})$$

onde as coordenadas  $e_i^\beta$  de  $B(M)$  são parametrizadas pelas coordenadas  $(y, \xi)$  de  $F(M)$  de acordo com

$$e_i^\beta(y, \xi) = \Lambda_i^j(\xi) h_j^\beta(y) \quad (\text{A.67})$$

e satisfazem às equações  $e_i^\mu e_j^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ij}$  que definem os pontos da subvariedade  $F(M)$ . Utilizando o co-referencial  $\{\theta^j\}$  dual da seção  $\sigma(p) = \{h_i(p)\}$  dada pela eq. (A.64), definido por

$$\theta^j = h^j_\nu(x) dx^\nu, \quad (\text{A.68})$$

em todo ponto de  $U$ , podemos definir a matriz inversa de  $e_i^\mu$  de acordo com

$$e^i_\nu(y, \xi) = \Lambda^i_j(\xi) h^j_\nu(y), \quad (\text{A.69})$$

de modo a satisfazer as condições

$$e^i_\nu e_j^\nu = \delta^i_j \quad \text{e} \quad e^i_\nu e_i^\mu = \delta^\mu_\nu. \quad (\text{A.70})$$

Nos cálculos realizados nas referências [44] e [46], está implícita uma descrição do fibrado  $F(M)$  em termos das coordenadas de  $B(M)$ , de acordo com resultados apresentados acima.

A partir das coordenadas  $(y^\mu, \xi^A)$  de  $F(M)$  podemos definir bases duais para os espaços tangente  $T_w(O)$  e cotangente  $T_w^*(O)$  em um ponto  $w$  de  $O(M)$  dadas, respectivamente, por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial \xi^A} \right\} \quad \text{e} \quad \{ dy^\nu, d\xi^B \}, \quad (\text{A.71})$$

que satisfazem às seguintes relações

$$\langle dy^\nu, \partial/\partial y^\mu \rangle = \delta^\nu_\mu \quad \text{e} \quad \langle d\xi^B, \partial/\partial \xi^A \rangle = \delta^B_A. \quad (\text{A.72})$$

As condições de compatibilidade entre a métrica e a conexão são definidas na variedade base  $M$  pelas eqs. (A.15). No contexto do fibrado  $F(M)$ , estas condições significam que, para todo ponto  $u = w = (y^\mu, e_i^\nu)$  de  $F(M)$ , o subespaço horizontal  $H_w(F)$  está contido em  $T_w(F)$ , isto é, que a conexão  $\Sigma^i_j$  tem valores na álgebra de Lie  $\mathcal{H}$  de  $F(M)$  [14, 89].

Neste caso, obtemos que as restrições da conexão e da 1-forma canônica de  $B(M)$  para o subfibrado  $F(M)$  ficam dadas, respectivamente, por

$$\Sigma^i_j = e^i_\mu de_j^\mu + e^i_\mu \Gamma^\mu_{\nu\lambda} h_j^\nu dy^\lambda, \quad (\text{A.73})$$

$$\Theta^i = e^i_\mu dy^\mu, \quad (\text{A.74})$$

onde  $e^i_\mu$  e  $e_j^\nu$  são as coordenadas de  $B(M)$  parametrizadas pelas coordenadas de  $F(M)$  de acordo com a eq. (A.67) e a eq. (A.69), respectivamente. Podemos facilmente verificar que  $\eta_{ik}\Sigma^k_j + \eta_{kj}\Sigma^k_i = \Sigma_{ij} + \Sigma_{ji} = 0$ , isto é,  $\Sigma_{ij}$  pertence à álgebra de Lie de  $F(M)$ .

Como os fibrados  $B(M)$  e  $F(M)$  são variedades dotadas de conexão, podemos utilizar a base não-holonômica  $\{\Sigma^i_j, \Theta^i\}$  de  $T_w(F)$ , definida pelas 1-formas canônicas  $\Theta^i$  e pelas 1-formas  $\Sigma^i_j$  da conexão, para determinar a curvatura e a conexão através das equações de estrutura de Cartan para  $O(M)$  dadas por [14]

$$d\Theta^a = -\Sigma^a_b \wedge \Theta^b + \tau^a, \quad (\text{A.75})$$

$$d\Sigma^a_b = -\Sigma^a_n \wedge \Sigma^n_b + \Omega^a_b, \quad (\text{A.76})$$

onde a torção e a curvatura de  $O(M)$  são definidas, respectivamente, pelas 2-formas

$$\tau^a = \frac{1}{2} \tau^a_{bc}(x, \xi) \Theta^b \wedge \Theta^c, \quad (\text{A.77})$$

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2} \Omega^a_{bcd}(x, \xi) \Theta^c \wedge \Theta^d. \quad (\text{A.78})$$

Os componentes da torção e da curvatura satisfazem, respectivamente, às seguintes relações  $\tau^a_{bc} = -\tau^a_{cb}$  e  $\Omega^a_{bcd} = -\Omega^a_{bdc}$ .

Formas diferenciais definidas em  $F(M)$  podem ser projetadas sobre a variedade base  $M$ , utilizando a aplicação derivada de uma seção local. Dessa forma, podemos obter as formas diferenciais definidas em  $M$  que correspondem às 1-formas canônicas  $\Theta^i$  e 1-formas  $\Sigma^i_j$  da conexão, bem como as 2-formas curvatura  $\Omega^i_j$  e torção  $\tau^i$  de  $F(M)$ .

Estes resultados podem ser obtidos de uma maneira simples em termos das coordenadas  $\{y^\mu, \xi^A\}$  definidas a partir da trivialização canônica associada à uma seção local  $\sigma : U \mapsto F(M)$ , definida sobre uma vizinhança de coordenadas  $U$  de  $M$ . Utilizando estas coordenadas obtemos, para todo ponto  $p$  de  $U$ , que  $\sigma(p) = (y^\mu, \delta^i_j)$ , isto é,  $\Lambda = (\delta^i_j)$  coincide com a identidade de  $O(4)$  [83]. Neste caso, considerando as eq. (A.67) e eq. (A.69), as coordenadas de  $B(M)$  correspondentes ficam dadas por

$$e_i^\mu(\sigma(p)) = h_i^\mu \quad \text{e} \quad e^i_\nu(\sigma(p)) = h^i_\nu. \quad (\text{A.79})$$

Inicialmente, vamos expressar as 1-formas  $\Sigma^i_j$  da conexão e as 1-formas canônicas  $\Theta^i$  de  $F(M)$ , em função das bases duais  $\sigma(p) = \{h_i\}$  e  $\theta^j$  e da conexão  $\gamma^i_j$  de  $M$  definida pela eq. (A.10) em relação a estas bases. Para obtermos estes resultados precisamos, inicialmente, substituir a eq. (A.67) e a eq. (A.69) nas eqs. (A.73)–(A.74). Finalmente, utilizando as eq. (A.68) e eq. (A.12), obtemos as relações

$$\Theta^i = e^i_\alpha dy^\alpha = (\Lambda^{-1})^i_j \theta^j \circ \pi, \quad (\text{A.80})$$

$$\Sigma^i_j = \Sigma^i_{jA}(\xi) d\xi^A + \Sigma^i_{j\mu}(y, \xi) dy^\mu, \quad (\text{A.81})$$

onde os componentes  $\Sigma^i_{j\mu}$  são dados por

$$\Sigma^i_{j\mu} = e^i_\alpha \left[ \frac{\partial e_j^\alpha}{\partial y^\mu} + (\Gamma^\alpha_{\beta\mu} \circ \pi) e_j^\beta \right] = (\Lambda^{-1})^i_k (\gamma^k_{n\mu} \circ \pi) \Lambda_j^n, \quad (\text{A.82})$$

e os componentes  $\Sigma^i_{jA}$  são dados por

$$\Sigma^i_{jA} = e^i_\alpha \frac{\partial e_j^\alpha}{\partial \xi^A} = e_j^\alpha \frac{\partial e^i_\alpha}{\partial \xi^A} = (\Lambda^{-1})^i_k \frac{\partial \Lambda_j^k}{\partial \xi^A}. \quad (\text{A.83})$$

Obtemos as projeções em  $M$  das 1-formas canônicas e das 1-formas da conexão de  $F(M)$ , utilizando a eq. (A.80) e a eq. (A.81), que são dadas por [14, 85]

$$\sigma^* \Sigma^i_j = \gamma^i_j, \quad (\text{A.84})$$

$$\sigma^* \Theta^i = \theta^i, \quad (\text{A.85})$$

onde  $\sigma^*$  é a adjunta da aplicação derivada de  $\sigma$  e  $\gamma^i_j$  são as 1-formas conexão de  $M$ , definidas pela eq. (A.10).

As 2-formas torção e curvatura de  $F(M)$  também podem ser expressas em função das 2-formas torção e curvatura de  $M$ , utilizando a trivialização canônica associada a seção local  $\sigma$ . Para tanto, substituímos a eq. (A.81) e a eq. (A.80) nas equações de estrutura de Cartan do fibrado  $F(M)$  dadas pelas eqs. (A.75)–(A.76), obtendo

$$\tau^i = (\Lambda^{-1})^i_j (d\theta^j + \gamma^j_k \wedge \theta^k) \quad \text{e} \quad \Omega^i_j = (\Lambda^{-1})^i_k \Lambda_j^l (d\gamma^k_l + \gamma^k_n \wedge \gamma^n_l). \quad (\text{A.86})$$

Depois substituímos as equações de estrutura de Cartan da variedade base  $M$  dadas pelas eqs. (A.17)–(A.18), nas eqs. (A.86) acima, obtendo

$$\tau^i = (\Lambda^{-1})^i_j T^j \quad \text{e} \quad \Omega^i_j = (\Lambda^{-1})^i_k \Lambda_j^l R^k_l, \quad (\text{A.87})$$

onde  $T^j$  e  $R^k_i$  são as 2-formas torção e curvatura de  $M$  definidas, respectivamente, pelas eqs. (A.16) e eq. (A.19). Em seguida, utilizando a eq. (A.80) e substituindo as definições de  $\tau^i$  e  $\Omega^i_j$ , bem como de  $T^j$  e  $R^k_i$  nas eqs. (A.87) acima, obtemos

$$\tau^i_{kl}\Lambda^k_m\Lambda^l_n = (\Lambda^{-1})^i_j T^j_{mn} \text{ e } \Omega^i_{jkl}\Lambda^k_m\Lambda^l_n = (\Lambda^{-1})^i_a \Lambda_j^b R^a_{bmn}. \quad (\text{A.88})$$

Finalmente, utilizando as coordenadas de  $B(M)$  parametrizadas pelas coordenadas de  $F(M)$  de acordo com a eq. (A.67) e a eq. (A.69), podemos escrever as eqs. (A.88) acima na forma

$$\tau^i_{jk} = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu T^\alpha_{\mu\nu}, \quad (\text{A.89})$$

$$\Omega^i_{jkl} = e^i_\alpha e_j^\beta e_k^\mu e_l^\nu R^\alpha_{\beta\mu\nu}. \quad (\text{A.90})$$

A partir destes resultados podemos obter as projeções da torção e da curvatura de  $F(M)$  na variedade base  $M$ , que são dadas por [14, 85]

$$(\sigma^* \tau^i_{jk})(p) = \tau^i_{jk}(\sigma(p)) = T^i_{jk}(p), \quad (\text{A.91})$$

$$(\sigma^* \Omega^i_{jkl})(p) = \Omega^i_{jkl}(\sigma(p)) = R^i_{jkl}(p). \quad (\text{A.92})$$

Consideremos agora o cálculo da derivada exterior da torção e da curvatura de  $F(M)$ , expressando a 1-forma resultante em termos da base  $\{\Theta^i, \Sigma^i_j\}$ , de acordo com um procedimento que pode ser utilizado com os componentes de um objeto geométrico qualquer. Estes resultados são utilizados na demonstração do teorema da equivalência e na determinação da dimensão do grupo das transformações afim-isométricas.

Antes de prosseguirmos, vamos obter um resultado que possibilita os cálculos tanto das derivadas exteriores, quanto das derivadas de Lie, serem efetuados de forma bastante simples. Podemos expressar as derivadas das coordenadas  $e_i^\mu$  e  $e_j^\nu$  de  $B(M)$  em relação às coordenadas  $\{y^\mu, \xi^A\}$  de  $F(M)$  de acordo com:

$$\frac{\partial e_i^\mu}{\partial \xi^A} = -e_n^\mu \Sigma^i_{nA} \text{ e } \frac{\partial e_j^\nu}{\partial \xi^A} = e_n^\nu \Sigma^n_{jA}, \quad (\text{A.93})$$

para as derivadas em relação a  $\xi^A$  e

$$\frac{\partial e_i^\mu}{\partial y^\rho} = -\Sigma^i_{n\rho} e_n^\mu + e^i_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\rho} \text{ e } \frac{\partial e_j^\nu}{\partial y^\rho} = e_n^\nu \Sigma^n_{j\rho} - \Gamma^\nu_{\alpha\rho} e_j^\alpha \quad (\text{A.94})$$

para as derivadas com relação a  $y^\mu$ . Estas expressões são obtidas a partir dos componentes das 1-formas  $\Sigma^i_j$  da conexão na base de coordenadas de  $F(M)$  dados pelas eqs. (A.82)–(A.83) e das relações dadas pelas eqs. (A.70).

Consideremos, inicialmente, o cálculo da derivada exterior dos componentes  $\tau^i_{jk}$  da torção. Como  $\tau^i_{jk}$  é uma função das coordenadas  $(y, \xi)$  de  $F(M)$ , temos

$$d\tau^i_{jk} = \frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial y^\rho} dy^\rho + \frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial \xi^A} d\xi^A. \quad (\text{A.95})$$

Assim, utilizando a eq. (A.89) e expressando as coordenadas de  $B(M)$  de acordo com as eqs. (A.67)–(A.69), obtemos que as derivadas de  $\tau^i_{jk}$  em relação a  $\xi^A$  são dadas por

$$\frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial \xi^A} = -\sum^i_{nA} \tau^n_{jk} + \sum^n_{jA} \tau^i_{nk} + \sum^n_{kA} \tau^i_{jn}, \quad (\text{A.96})$$

tendo em vista as relações dadas pelas eqs. (A.93). Procedendo de modo semelhante com as derivadas com relação a  $y^\rho$  e utilizando as relações dada pelas eqs. (A.94) obtemos que

$$\frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial y^\rho} = -\sum^i_{n\rho} \tau^n_{jk} + \sum^n_{j\rho} \tau^i_{nk} + \sum^n_{k\rho} \tau^i_{jn} + e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu T^\alpha_{\mu\nu;\rho}. \quad (\text{A.97})$$

Finalmente, substituindo as eqs. (A.96)–(A.97) na eq. (A.95), e depois utilizando as eq. (A.80) e eq. (A.81), obtemos que a derivada exterior fica dada por

$$d\tau^i_{jk} = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\rho T^\alpha_{\mu\nu;\rho} \Theta^l - \sum^i_n \tau^n_{jk} + \sum^n_j \tau^i_{nk} + \sum^n_k \tau^i_{kn}. \quad (\text{A.98})$$

Consideremos agora a derivada exterior da derivada covariante da torção. A derivada covariante de primeira ordem  $\nabla \tau^i_{jk}$  dos componentes da torção é definida por [14]

$$\langle \nabla \tau^i_{jk}, z \rangle = \langle d\tau^i_{jk}, z_{hor} \rangle \quad (\text{A.99})$$

onde  $d\tau^i_{jk}$  é a derivada exterior de  $\tau^i_{jk}$  e  $z = z_{hor} + z_{ver}$  é um vetor qualquer definido em  $T_w(F)$ , decomposto de modo único em uma parte horizontal  $z_{hor}$  e uma parte vertical  $z_{ver}$ .

Considerando que a base dual de  $\Theta^a$  é dada pelos vetores  $D_a$ , então podemos escrever  $v_{hor} = v^a D_a$ , onde  $\langle \Theta^a, D_b \rangle = \delta^a_b$  e  $\pi_*(D_a) = e_a$ , tendo em vista a seguinte definição da 1-forma canônica [16]

$$\langle \Theta^a, Y_w \rangle e_a = \pi_* Y_w, \quad (\text{A.100})$$

onde  $Y_w$  é um vetor tangente qualquer definido em no ponto  $w = \{e_a\}$  de  $F(M)$ . Neste caso, como  $\langle \Sigma^i_j, z_{hor} \rangle = 0$  e  $\langle \Theta^a, z_{ver} \rangle = 0$ , obtemos a partir da eq. (A.98) que

$$\langle d\tau^i_{jk}, z_{hor} \rangle = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\rho T^\alpha_{\mu\nu;\rho} v^l, \quad (\text{A.101})$$

tendo em vista que  $\langle \Theta^l, z_{hor} \rangle = v^l$ .

Finalmente, denotando a derivada covariante de acordo com

$$\langle \nabla \tau^i_{jk}, z \rangle = \tau^i_{jk;l} \langle \Theta^l, z \rangle, \quad (\text{A.102})$$

podemos escrever a derivada covariante de acordo com

$$\tau^i_{jk;l} = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\rho T^\alpha_{\mu\nu;\rho} = (\Lambda^1)^i_q \Lambda_j^m \Lambda_k^n \Lambda_l^p T^q_{mn;q}. \quad (\text{A.103})$$

Portanto, podemos expressar a derivada exterior em função da derivada covariante na base  $\{\Theta^i, \Sigma^i_j\}$ , de acordo com

$$d\tau^i_{jk} = \tau^i_{jk;n} \Theta^n - \Sigma^n_n \tau^n_{jk} + \Sigma^n_j \tau^i_{nk} + \Sigma^n_k \tau^i_{jn}. \quad (\text{A.104})$$

Este processo de cálculo pode ser aplicado aos componentes de qualquer objeto geométrico definido em  $F(M)$ . Consideremos, por exemplo, a derivada exterior dos componentes  $\tau^i_{jk;l}$  da derivada covariante da torção que, naturalmente, são funções das coordenadas  $(x, \xi)$  de  $F(M)$ . Neste caso, inicialmente, temos

$$d\tau^i_{jk;l} = d(\tau^i_{jk;l}) = \frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial y^\rho} dy^\rho + \frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial \xi^A} d\xi^A. \quad (\text{A.105})$$

Depois, utilizando as eqs. (A.103) e as relação dadas pelas eqs. (A.93)–(A.94), obtemos as derivadas dos componentes de  $\tau^i_{jk;l}$  em relação as coordenadas de  $F(M)$  de acordo com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial y^\rho} &= e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\beta T^\alpha_{\mu\nu;\rho\beta} \\ &\quad - \Sigma^n_{n\rho} \tau^n_{jk;l} + \Sigma^n_{j\rho} \tau^i_{nk;l} + \Sigma^n_{k\rho} \tau^i_{jn;l} + \Sigma^n_{l\rho} \tau^i_{jk;n}, \end{aligned} \quad (\text{A.106})$$

$$\frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial \xi^A} = -\Sigma^i_{nA} \tau^n_{jk;l} + \Sigma^n_{jA} \tau^i_{nk;l} + \Sigma^n_{kA} \tau^i_{jn;l} + \Sigma^n_{kA} \tau^i_{jk;n}, \quad (\text{A.107})$$

onde  $T^\alpha_{\mu\nu;\rho\beta}$  é a derivada covariante de segunda ordem dos componentes da torção de  $M$ , na base de coordenadas. Por fim, substituindo as eqs. (A.106)–(A.107) acima na eq. (A.105), obtemos

$$d\tau^i_{jk;l} = \tau^i_{jk;lm} \Theta^m - \Sigma^i_n \tau^n_{jk;l} + \Sigma^n_j \tau^i_{nk;l} + \Sigma^n_k \tau^i_{kn;l} + \Sigma^n_k \tau^i_{jk;n}, \quad (\text{A.108})$$

onde a derivada covariante de segunda ordem da torção de  $F(M)$  é dada por

$$\tau^i_{jk;lm} = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\rho e_m^\beta T^\alpha_{\mu\nu;\rho\beta}. \quad (\text{A.109})$$

As derivadas exteriores dos componentes das derivadas covariantes da curvatura podem ser obtidas de modo semelhante. A derivada exterior de  $\Omega^i_{jkl}$ , por exemplo, pode ser expressa como

$$d\Omega^i_{jkl} = \Omega^i_{jkl;n}\Theta^n - \Sigma^i_n\Omega^n_{jkl} + \Sigma^n_j\Omega^i_{nkl} + \Sigma^n_k\Omega^i_{jnl} + \Sigma^n_l\Omega^i_{jkn}. \quad (\text{A.110})$$

Consideremos agora o cálculo de algumas derivadas de Lie que são necessárias para a investigação das simetrias de uma variedade de Riemann-Cartan  $M$  utilizando o fibrado  $F(M)$ . Não apresentaremos aqui a definição e as propriedades da derivada de Lie, que podem ser encontradas nas referências citadas no início deste apêndice.

Os cálculos serão realizados utilizando as coordenadas  $(y^\mu, \xi^A)$  de  $F(M)$  definidas a partir de uma trivialização canônica associada a uma seção do fibrado  $F(M)$ . Consideremos um campo vetorial  $z$  definido em  $F(M)$ , cujos componentes são dadas por

$$z = z^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} + z^A \frac{\partial}{\partial \xi^A}. \quad (\text{A.111})$$

Vamos considerar também que  $z$  seja o levantamento do campo vetorial  $v$  definido em  $M$ , isto é, onde  $\pi_*(z) = v$ . Neste caso, temos

$$z^\alpha = v^\alpha. \quad (\text{A.112})$$

Utilizando a eq. (A.80), a derivada de Lie da 1-forma canônica  $\Theta^i$  de  $F(M)$  fica

$$\mathcal{L}_z\Theta^i = \mathcal{L}_z(e^i_\mu dy^\mu) = (\mathcal{L}_z e^i_\mu)dy^\mu + e^i_\mu \mathcal{L}_z(dy^\mu). \quad (\text{A.113})$$

Considerando que a derivada de Lie comuta com a derivada exterior, obtemos

$$\mathcal{L}_z(dy^\mu) = d(\mathcal{L}_z y^\mu) = d(z[y^\mu]) = dz^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial y^\beta} dy^\beta + \frac{\partial z^\mu}{\partial \xi^A} d\xi^A. \quad (\text{A.114})$$

Portanto, substituindo a eq. (A.114) na eq. (A.113), obtemos

$$\mathcal{L}_z\Theta^i = (\mathcal{L}_z e^i_\alpha + e^i_\beta \frac{\partial z^\beta}{\partial y^\alpha}) dy^\alpha + e^i_\alpha \frac{\partial z^\beta}{\partial \xi^A} d\xi^A. \quad (\text{A.115})$$

Consideremos agora o cálculo da derivada de Lie  $\mathcal{L}_z e^i_\alpha$ . Inicialmente, a partir da definição de derivada de Lie de uma função, obtemos

$$\mathcal{L}_z e^i_\alpha = z[e^i_\alpha] = \frac{\partial e^i_\alpha}{\partial y^\mu} z^\mu + \frac{\partial e^i_\alpha}{\partial \xi^A} z^A. \quad (\text{A.116})$$

tendo em vista a definição da 2-forma curvatura  $\Omega^i_j$ , dada pelas eqs. (A.87). Neste caso, a derivada de Lie da conexão fica dada por

$$\mathcal{L}_z \Sigma^i_j = dz^i_j + \Sigma^i_k z^k_j - \Sigma^k_j z^i_k + \Omega^i_{jkl} z^k \Theta^l. \quad (\text{A.126})$$

Finalmente, considerando que  $z^i_j = e^i_\mu e_j^\nu z^\mu_\nu$ , podemos calcular  $dz^i_j$  da mesma forma que calculamos  $d\tau^i_{jk}$ , obtendo

$$dz^i_j = z^i_{j;k} \Theta^k - \Sigma^i_n z^n_j + \Sigma^n_j z^i_n, \quad (\text{A.127})$$

Agora substituindo estas equações acima nas eqs. (A.126), obtemos

$$\mathcal{L}_z \Sigma^i_j = (z^i_{j;k} + \Omega^i_{jnk} z^n) \Theta^k. \quad (\text{A.128})$$

Calculadas as derivadas de Lie das 1-formas canônicas  $\Theta^i$  e das 1-formas conexão  $\Sigma^i_j$ , vamos agora calcular as derivadas de Lie dos componentes das derivadas covariantes da curvatura e da torção.

Consideremos inicialmente a derivada de Lie de  $\tau^i_{jk}$ . Como  $\tau^i_{jk}$  é uma função das coordenadas  $(y, \xi)$  de  $F(M)$ , temos

$$\mathcal{L}_z \tau^i_{jk} = \frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial y^\rho} z^\rho + \frac{\partial \tau^i_{jk}}{\partial \xi^A} z^A. \quad (\text{A.129})$$

Utilizando as expressões para as derivadas de  $\tau^i_{jk}$  em relação as coordenadas  $(x, \xi)$  dadas pelas eqs. (A.96)–(A.97), bem como as relações análogas para as 1-formas canônica e da conexão dadas pelas eqs. (A.80)–(A.81), obtemos

$$\mathcal{L}_z \tau^i_{jk} = e^i_\alpha e_j^\mu e_k^\nu e_l^\rho T^\alpha_{\mu\nu;\rho} z^l - z^i_n \tau^n_{jk} + z^n_j \tau^i_{nk} + z^n_k \tau^i_{kn}. \quad (\text{A.130})$$

Finalmente, substituindo a expressão para a derivada covariante de  $\tau^i_{jk}$ , obtemos

$$\mathcal{L}_z \tau^i_{jk} = \tau^i_{jk;l} z^l - z^i_n \tau^n_{jk} + z^n_j \tau^i_{nk} + z^n_k \tau^i_{kn}. \quad (\text{A.131})$$

Este processo de cálculo pode ser aplicado aos componentes de qualquer objeto geométrico definido em  $F(M)$ . Consideremos, por exemplo, a derivada de Lie dos componentes da derivada covariante  $\tau^i_{jk;l}$  da torção que, naturalmente, são funções das coordenadas  $(x, \xi)$  de  $F(M)$ . Neste caso, inicialmente, temos

$$\mathcal{L}_z \tau^i_{jk;l} = \mathcal{L}_z (\tau^i_{jk;l}) = \frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial y^\rho} z^\rho + \frac{\partial \tau^i_{jk;l}}{\partial \xi^A} z^A. \quad (\text{A.132})$$

Agora, utilizando as derivadas dos componentes de  $\tau^i_{jk;l}$  em relação as coordenadas de  $F(M)$  dadas pelas eqs. (A.106)–(A.107), bem como as relações análogas para as 1-formas canônica e da conexão dadas pelas eqs. (A.80)–(A.81), finalmente obtemos

$$\mathcal{L}_z \tau^i_{jk;l} = \tau^i_{jk;lm} z^m - z^i_n \tau^n_{jk;l} + z^n_j \tau^i_{nk;l} + z^n_k \tau^i_{kn;l} + z^n_k \tau^i_{jk;n}, \quad (\text{A.133})$$

onde utilizamos a eq. (A.109) que define a derivada covariante de segunda ordem da torção.

Analogamente, obtemos que a derivada de Lie de  $\Omega^i_{jkl}$  pode ser expressa como

$$\mathcal{L}_z \Omega^i_{jkl} = \Omega^i_{jkl;n} z^n - z^i_n \Omega^n_{jkl} + z^n_j \Omega^i_{nkl} + z^n_k \Omega^i_{jnl} + z^n_l \Omega^i_{jkn}. \quad (\text{A.134})$$

# Apêndice B

## Espinores em espaços-tempos com torção

### B.1 Introdução

Neste apêndice, definimos espinores com dois componentes em variedades de Riemann-Cartan [37, 38, 39] e obtemos diversos resultados que são relevantes para o problema da equivalência no contexto das TGT. Embora os espinores sejam bastante utilizados no contexto da TRG [39, 66], o mesmo não ocorre com relação às TGT. Entretanto, o método dos coeficientes de spin de Newman-Penrose [76] foi estendido de modo a incluir conexões não-simétricas [37] e algumas soluções exatas de TGT foram obtidas através do mesmo [77, 78, 79].

Na segunda seção apresentamos alguns conceitos básicos sobre espinores com dois componentes que estabelecem as *convenções* e a notação utilizadas nesta tese. Na terceira seção obtemos as partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção de uma variedade de Riemann-Cartan. Na quarta seção a derivada covariante do espinor da torção também é decomposta em partes irredutíveis. Finalmente, na quinta seção obtemos as identidades de Bianchi e de Ricci em termos das partes irredutíveis da curvatura, da torção e da derivada covariante da torção.

## B.2 Conceitos básicos

Nesta seção apresentamos alguns conceitos básicos do formalismo dos espinores com dois componentes e definimos as convenções utilizadas nesta tese. Maiores detalhes podem ser encontrados em [39].

O formalismo dos espinores com dois componentes é desenvolvido em uma variedade diferenciável  $M$  definindo-se, em cada ponto  $p$  de  $M$ , um espaço vetorial linear complexo, de dimensão 2, que denotamos  $S_p(M)$ . Dizemos que  $S_p(M)$  é o *espaço espinorial* formado pelos espinores  $\varphi = (\varphi_A)$  ( $A=0,1$ ), cujos componentes  $\varphi_A(x)$  são funções complexas das coordenadas  $\{x^\mu\}$  de  $M$ . Podemos determinar o complexo conjugado de cada elemento  $\varphi$  de  $S_p(M)$ , obtendo novos espinores  $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_{A'})$ , cujos componentes são definidos por  $\bar{\varphi}_{A'} = \overline{\varphi_A}$ , onde  $\overline{\varphi_A}$  são os complexos conjugados dos componentes de  $\varphi$ . Em cada ponto  $p$  de  $M$ , os espinores  $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_{A'})$  formam um espaço vetorial  $\bar{S}_p(M)$ , que é anti-isomorfo a  $S_p(M)$  [39]. Espinores de ordens mais altas, com um número qualquer de índices com linha e de índices sem linha, podem ser definidos através do produto tensorial. Os índices com linha podem ter qualquer ordem em relação aos índices sem linha, e vice-versa.

Os espinores  $\varphi = (\varphi_A)$  estão definidos a menos de transformações lineares representadas por matrizes  $S = (S^A_B)$  que têm determinante igual a 1 e cujos elementos  $S^A_B$  são funções complexas. As transformações dos espinores  $\bar{\varphi}$  são dadas por  $\bar{S} = (\bar{S}^{A'}_{B'})$ , onde  $\bar{S}^{A'}_{B'} = \overline{S^A_B}$ . Estas transformações são elementos das representações do grupo  $SL(2, C)$  em  $S_p(M)$  e  $\bar{S}_p(M)$ , respectivamente, sendo denominadas transformações de spin [39].

As transformações de spin deixam invariante o espinor anti-simétrico unitário

$$\varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA}, \tag{B.1}$$

onde  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB}$  e  $\varepsilon_{01} = 1$ . Este espinor também é chamado de espinor métrico, pois é utilizado para definir o produto escalar de dois espinores  $\phi^A$  e  $\psi^B$  quaisquer de acordo com  $\varepsilon_{AB} \phi^A \psi^B = \phi_B \psi^B = -\phi^A \psi_A$ , e para definir as regras para levantar e para abaixar índices de acordo com

$$\phi^A = \varepsilon^{AB} \phi_B = -\phi_B \varepsilon^{BA} = \phi_B \varepsilon^{AB} \quad \text{e} \quad \phi_B = \phi^A \varepsilon_{AB} = -\varepsilon_{BA} \phi^A = \varepsilon_{AB} \phi^A. \tag{B.2}$$

De acordo com a definição do produto escalar, o sinal de uma expressão espinorial deve ser mudado toda vez que um índice mudo é levantado ou abaixado.

Utilizando as regras dadas pelas eqs. (B.2) acima para levantar e para abaixar os índices do espinor métrico  $\varepsilon_{AB}$ , obtemos as seguintes propriedades

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CB} = \varepsilon_A^C = -\varepsilon_A^C = \delta_A^C, \quad (\text{B.3})$$

onde  $\delta_A^C$  é o delta de Kronecker. Os complexos conjugados de  $\delta_A^C$  e  $\varepsilon_{AB}$  são denotados por  $\bar{\delta}_{A'}^{C'}$  e  $\bar{\varepsilon}_{A'B'}$  em lugar de  $\bar{\delta}_{A'}^{C'}$  e  $\bar{\varepsilon}_{A'B'}$ , respectivamente, como ocorre com os demais espinores, pois  $\delta_{A'}^{C'} = \delta_A^C$  e  $\bar{\varepsilon}_{A'B'} = \varepsilon_{AB}$ . Além disso, como o espaço espinorial tem dimensão 2, os espinor métrico também satisfaz as identidades

$$\varepsilon_{[AB}\varepsilon_{C]D} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD} + \varepsilon_{CA}\varepsilon_{BD} = 0 \quad (\text{B.4})$$

que podem ser escritas na forma

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD} = \delta_A^C\delta_B^D - \delta_B^C\delta_A^D. \quad (\text{B.5})$$

Esta última expressão tem uma importante aplicação, pois é utilizada para decompor a parte anti-simétrica de um espinor  $\Psi_{CD}$  qualquer. Utilizando contração dada por  $\varepsilon_{AB}\varepsilon^{CD}\Psi_{CD} = (\delta_A^C\delta_B^D - \delta_B^C\delta_A^D)\Psi_{CD}$  e a regra para levantar índices obtemos o seguinte resultado  $\varepsilon_{AB}\Psi_C^C = \Psi_{AB} - \Psi_{BA}$ , que pode ser expresso como

$$\Psi_{[AB]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\Psi_C^C. \quad (\text{B.6})$$

No caso em que  $\Psi_{AB} = \Phi_A\Theta_B$ , obtemos  $\Phi_A\Theta_B - \Phi_B\Theta_A = \varepsilon_{AB}\Phi_C\Theta^C$ , de modo que  $\Phi_A$  e  $\Theta_A$  são proporcionais se, e somente se, seu produto escalar é nulo.

Os tensores definidos na variedade  $M$ , cujos componentes são funções reais das coordenadas de  $M$ , são associados a espinores hermitianos. Um espinor  $\Psi_{AX'BY'}$  é hermitiano se for igual ao seu complexo conjugado  $\bar{\Psi}_{AX'BY'}$ . Como definimos  $\bar{\Psi}_{AX'BY'} = \overline{\Psi_{A'XB'Y'}}$ , a condição de hermiticidade fica expressa por

$$\Psi_{AX'BY'} = \bar{\Psi}_{AX'BY'} \quad \text{ou} \quad \Psi_{AX'BY'} = \overline{\Psi_{A'XB'Y'}}. \quad (\text{B.7})$$

A correspondência entre tensores e espinores é definida através das quantidades  $\sigma_\mu^{AX'}$ , que se comportam como um espinor em relação aos índices  $AX'$  e como um vetor em relação ao índice  $\mu$  sob transformações de spin e de coordenadas, respectivamente [39]. O espinor  $\Psi^{AX'}_{BY'}$ , por exemplo, está associado ao tensor  $T^\mu_\nu$  de acordo com

$$T^\mu_\nu = \sigma^\mu_{AX'}\sigma_\nu^{BY'}\Psi^{AX'}_{BY'} \quad \text{e} \quad \Psi^{AX'}_{BY'} = \sigma^\mu_{AX'}\sigma^\nu_{BY'}T^\mu_\nu. \quad (\text{B.8})$$

As quantidades  $\sigma_\mu^{AX'}$  são hermitianas e satisfazem as relações  $\varepsilon_{AB}\varepsilon_{X'Y'} = g_{\mu\nu}\sigma_{AX'}^\mu\sigma_{BY'}^\nu$  e  $g_{\mu\nu} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{X'Y'}\sigma_\mu^{AX'}\sigma_\nu^{BY'}$ , onde  $g_{\mu\nu}$  são os componentes da métrica da variedade  $M$  em uma base de coordenadas.

O pseudo-tensor totalmente anti-simétrico  $\eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ , utilizado para definir o dual de um tensor, está associado ao espinor

$$\eta_{AX'BY'}^{CZ'DW'} = i(\delta_A^C\delta_B^D\delta_{Y'}^{Z'}\delta_{X'}^{W'} - \delta_B^C\delta_A^D\delta_{X'}^{Z'}\delta_{Y'}^{W'}). \quad (\text{B.9})$$

As quantidades  $\sigma_{AX'}^\mu$  podem ser escolhidas de modo que para cada base  $\{o^A, \iota^B\}$  do espaço espinorial definida por  $\varepsilon_{AB}o^A\iota^B = 1$ , existe em correspondência bijetiva uma tetrada nula  $\{z_a^\mu\} = \{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$  na variedade  $M$  definida por  $l^\mu = \sigma_{AB'}^\mu o^A \iota^{B'}$ ,  $n^\mu = \sigma_{AB'}^\mu \iota^A \iota^{B'}$ ,  $m^\mu = \sigma_{AB'}^\mu o^A \iota^{B'}$  e  $\bar{m}^\mu = \sigma_{AB'}^\mu \iota^A o^{B'}$ .

Finalmente, a derivada covariante  $\nabla_\mu$  e as derivadas parciais  $\partial/\partial x^\mu$  também têm os seus correspondentes no espaço espinorial, que são definidos de acordo com

$$\nabla_{AX'} = \sigma_{AX'}^\mu \nabla_\mu, \quad \partial_{AX'} = \sigma_{AX'}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (\text{B.10})$$

A derivada covariante comuta com  $\varepsilon_{AB}$  e com  $\sigma_\mu^{AX'}$ , pois estes espinores satisfazem as seguintes condições:

$$\nabla_\mu \sigma_{AX'}^\nu = 0, \quad \nabla_\mu \varepsilon_{AB} = 0. \quad (\text{B.11})$$

### B.3 Partes irredutíveis dos espinores da curvatura e da torção

Nesta seção, decompomos em partes irredutíveis os espinores de curvatura [37] e de torção. Consiremos inicialmente o espinor de curvatura, que pode ser determinado a partir dos componentes  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  do tensor de curvatura em relação a uma base de coordenadas de acordo com

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \sigma_{AA'}^\alpha \sigma_{BB'}^\beta \sigma_{CC'}^\mu \sigma_{DD'}^\nu R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (\text{B.12})$$

A partir das simetrias de  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  obtemos que as simetrias do espinor de curvatura são dadas por

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = -R_{BB'AA'CC'DD'}, \quad R_{AA'BB'CC'DD'} = -R_{AA'BB'DD'CC'}. \quad (\text{B.13})$$

Utilizando as simetrias dadas pelas eqs. (B.13) e as identidades dadas pelas eqs. (B.5) obtemos

$$\varepsilon_{AB} R_{XA' B' CC' DD'}^X = 2 R_{[AB]A' B' CC' DD'}, \quad (\text{B.14})$$

$$\varepsilon_{A'B'} R_{AX'B' CC' DD'}^{X'} = 2 R_{(AB)A' B' CC' DD'}, \quad (\text{B.15})$$

de modo que o espinor de curvatura fica decomposto de acordo com

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{A'B'} R_{AX'B' CC' DD'}^{X'} + \varepsilon_{AB} R_{XA' B' CC' DD'}^X). \quad (\text{B.16})$$

Como o espinor de curvatura é hermitiano, podemos escrever a eq. (B.16) de uma forma mais simples definindo o espinor de curvatura contraído

$$R_{ABCC'DD'} = \frac{1}{2} R_{AX'B' CC' DD'}^{X'}, \quad (\text{B.17})$$

cujas simetrias são dadas por

$$R_{ABCC'DD'} = R_{BACC'DD'}, \quad R_{ABCC'DD'} = -R_{ABDD'CC'}. \quad (\text{B.18})$$

Assim, substituindo  $R_{ABCC'DD'}$  e o seu complexo conjugado na eq. (B.16), obtemos

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = \varepsilon_{A'B'} R_{ABCC'DD'} + \varepsilon_{AB} \bar{R}_{A' B' CC' DD'}. \quad (\text{B.19})$$

Entretanto, a decomposição do espinor de curvatura ainda não está completa, pois ainda podemos decompor  $R_{ABCC'DD'}$ . Seguindo o mesmo procedimento anterior, isto é, utilizando as simetrias dadas pelas eqs. (B.18) e as identidades dadas pelas eqs. (B.5), obtemos

$$\varepsilon_{CD} R_{ABXC' D'}^X = 2 R_{AB[CD]C' D'} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{C'D'} R_{ABCX'D}^{X'} = 2 R_{AB(CD)C' D'}, \quad (\text{B.20})$$

que nos permitem escrever

$$R_{ABCC'DD'} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{C'D'} R_{ABCX'D}^{X'} + \varepsilon_{CD} R_{ABXC' D'}^X). \quad (\text{B.21})$$

Analogamente, podemos escrever a decomposição dada pelas eqs. (B.21) acima de uma forma mais simples definindo os espinores

$$Q_{ABCD} = \frac{1}{2} R_{ABCX'D}^{X'} \quad \text{e} \quad P_{ABC'D'} = \frac{1}{2} R_{ABXC' D'}^X. \quad (\text{B.22})$$

Substituindo a eq. (B.22) na eq. (B.21), obtemos que a decomposição de  $R_{ABCC'DD'}$  fica dada por

$$R_{ABCC'DD'} = \varepsilon_{C'D'} Q_{ABCD} + \varepsilon_{CD} P_{ABC'D'} . \quad (\text{B.23})$$

Utilizando as propriedades de  $R_{ABCX'DY'}$ , obtemos que  $Q_{ABCD}$  e  $P_{ABX'Y'}$  são espinores não-hermitianos, pois os seus complexos conjugados são dados, respectivamente, por  $\bar{Q}_{A'B'C'D'} = \frac{1}{2} \bar{R}_{A'B'C'XD'}{}^X$  e  $\bar{P}_{A'B'CD} = \frac{1}{2} \bar{R}_{A'B'CX'D}{}^{X'}$ . Finalmente, também obtemos que as suas simetrias são

$$Q_{ABCD} = Q_{(AB)(CD)} \quad \text{e} \quad P_{ABC'D'} = P_{(AB)(C'D')} . \quad (\text{B.24})$$

Para continuarmos com a decomposição do espinor de curvatura em partes irredutíveis, devemos agora decompor os espinores  $Q_{ABCD}$  e  $P_{ABX'Y'}$ . A decomposição deste último é bastante simples. Podemos decompô-lo em uma parte hermitiana e uma parte anti-hermitiana, de acordo com

$$P_{ABC'D'} = \frac{1}{2} (\Phi_{ABC'D'} + i \Theta_{ABC'D'}) , \quad (\text{B.25})$$

onde  $\Phi_{ABC'D'}$  e  $\Theta_{ABC'D'}$  são espinores hermitianos que têm as mesmas simetrias que  $P_{ABC'D'}$ . Denominamos  $\Phi_{ABC'D'}$  de *espinor de Ricci* e  $\Theta_{ABC'D'}$  de *pseudo-espinor de Ricci*, pois estes espinores correspondem às partes irredutíveis do tensor de curvatura dadas pelo tensor de Ricci simétrico sem traço  $S_{ab}$  e pelo pseudo-tensor de Ricci simétrico sem traço  $Q_{ab}$ , respectivamente, definidas no apêndice A. Portanto, para completar a decomposição do espinor de curvatura resta apenas decompor o espinor  $Q_{ABCD}$ .

Começaremos a decomposição de  $Q_{ABCD}$  determinando, inicialmente, a sua parte totalmente simétrica  $Q_{(ABCD)}$  através da seguinte relação [39]

$$Q_{(ABCD)} = \frac{1}{4} [ Q_{A(BCD)} + Q_{B(CDA)} + Q_{C(DAB)} + Q_{D(ABC)} ] , \quad (\text{B.26})$$

onde cada uma das parcelas é definida por

$$Q_{A(BCD)} = \frac{1}{3} ( Q_{AB(CD)} + Q_{AC(DB)} + Q_{AD(BC)} ) . \quad (\text{B.27})$$

Considerando agora as simetrias de  $Q_{ABCD}$  dadas pelas eqs. (B.24), pois as relações acima são válidas para um espinor qualquer, obtemos

$$Q_{(ABCD)} = \frac{1}{6} ( Q_{ABCD} + Q_{ACBD} + Q_{ADBC} + Q_{CDAB} + Q_{BCAD} + Q_{BDAC} ) . \quad (\text{B.28})$$

Decompondo  $Q_{ABCD}$  em uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica nos pares de índices AB e CD de acordo com  $Q_{ABCD} = U_{ABCD} + V_{ABCD}$ , onde

$$U_{ABCD} = \frac{1}{2}(Q_{ABCD} + Q_{CDAB}) \quad \text{e} \quad V_{ABCD} = \frac{1}{2}(Q_{ABCD} - Q_{CDAB}), \quad (\text{B.29})$$

podemos expressar o resultado dado na eq. (B.28) da seguinte forma

$$U_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{3}(Q_{A[BC]D} + Q_{A[BD]C} + Q_{C[DB]A} + Q_{D[CB]A}). \quad (\text{B.30})$$

Em seguida, considerando que  $2Q_{A[BC]D} = \varepsilon_{BC}Q_{AN}{}^N{}_D$ , de acordo com a eq. (B.6), podemos escrever a eq. (B.30) como

$$U_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{6}(\varepsilon_{BC}Q_{AN}{}^N{}_D + \varepsilon_{BD}Q_{AN}{}^N{}_C + \varepsilon_{DB}Q_{CN}{}^N{}_A + \varepsilon_{CB}Q_{DN}{}^N{}_A). \quad (\text{B.31})$$

Depois, usando as simetrias dadas pelas eq. (B.24) e eq. (B.1), as eqs. (B.31) também podem ser escritas na forma

$$U_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{3}(\varepsilon_{BC}Q_{N[A}{}^N{}_D] + \varepsilon_{BD}Q_{N[A}{}^N{}_C]). \quad (\text{B.32})$$

Fazendo uso mais uma vez da decomposição de espinores anti-simétricos dada pela eq. (B.6), obtemos que  $2Q_{N[A}{}^N{}_B]} = \varepsilon_{AB}Q_{XZ}{}^{XZ}$ . Finalmene, substituindo este resultado na eq. (B.32) acima, a decomposição de  $U_{ABCD}$  em partes irredutíveis fica dada por

$$U_{ABCD} = Q_{(ABCD)} + \frac{1}{6}(\varepsilon_{BC}\varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD}\varepsilon_{AC})Q_{NK}{}^{NK}. \quad (\text{B.33})$$

Para completarmos a decomposição de  $Q_{ABCD}$  falta apenas decompor o espinor  $V_{ABCD}$  definido pela eq. (B.29). Inicialmente, utilizando as simetrias  $V_{ABCD} = V_{(AB)(CD)}$ , expressamos  $V_{ABCD}$  como

$$V_{ABCD} = \frac{1}{4}(V_{ABCD} + V_{BACD} + V_{ABDC} + V_{BADC} - V_{ACBD} - V_{BCAD} - V_{ADBC} - V_{BDAC}) \quad (\text{B.34})$$

e depois reagrupamos as parcelas de modo a obter

$$V_{ABCD} = \frac{1}{4}(Q_{A[BD]C} + Q_{C[BD]A} + Q_{B[AD]C} + Q_{C[AD]B} + Q_{A[BC]D} + Q_{D[BC]A} + Q_{B[AC]D} + Q_{D[AC]B}). \quad (\text{B.35})$$

Em seguida, utilizando as simetrias de  $Q_{ABCD}$  dadas pelas eqs. (B.24) e as identidades dadas pelas eqs. (B.5), obtemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{BD}\varepsilon^{NK}Q_{N(AC)K} &= (\delta_B{}^N\delta_D{}^K - \delta_D{}^N\delta_B{}^K)Q_{N(AC)K}, \\ \varepsilon_{BD}Q_{N(AC)}{}^N &= Q_{A[BD]C} + Q_{C[BD]A}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Finalmente, substituindo a eq. (B.36) na eq. (B.35), obtemos que a decomposição de  $V_{ABCD}$  em partes irredutíveis é dada por

$$V_{ABCD} = \frac{1}{4} (\varepsilon_{BD} Q_{N(AC)}^N + \varepsilon_{AD} Q_{N(BC)}^N + \varepsilon_{BC} Q_{N(AD)}^N + \varepsilon_{AC} Q_{N(BD)}^N). \quad (B.37)$$

A partir das decomposições de  $U_{ABD}$  e de  $V_{ABCD}$  dadas pelas eqs. (B.33)–(B.37), respectivamente, finalmente obtemos que a decomposição de  $Q_{ABDCD} = Q_{(AB)(CD)}$  em partes irredutíveis é dada por

$$\begin{aligned} Q_{ABCD} &= Q_{(ABCD)} + \frac{1}{6} (\varepsilon_{BC} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD} \varepsilon_{AC}) Q_{NK}^{NK} \\ &+ \frac{1}{4} (\varepsilon_{BD} Q_{N(AC)}^N + \varepsilon_{AD} Q_{N(BC)}^N \\ &+ \varepsilon_{BC} Q_{N(AD)}^N + \varepsilon_{AC} Q_{N(BD)}^N). \end{aligned} \quad (B.38)$$

As partes irredutíveis do espinor de curvatura que estão presentes no espinor  $Q_{ABCD}$  são definidas por

$$\Lambda + i\Omega = \frac{1}{6} Q_{NK}^{NK}, \quad (B.39)$$

$$\Psi_{ABCD} = Q_{(ABCD)}, \quad (B.40)$$

$$\Sigma_{AB} = \frac{1}{4} Q_{N(AB)}^N, \quad (B.41)$$

Estes espinores estão relacionados com as partes irredutíveis do tensor de curvatura (cf. apêndice A) da seguinte forma:  $\Psi_{ABCD}$  é denominado de *espinor de Weyl* e corresponde ao tensor de Weyl-Cartan  $C_{abcd}$  que tem as mesmas simetrias do tensor de Weyl da TRG;  $\Sigma_{AB}$  corresponde à parte anti-simétrica do tensor de Ricci (*bivetor de Ricci*)  $A_{ab}$ ; finalmente,  $\Lambda$  e  $\Omega$  correspondem ao *escalar de curvatura*  $R$  e ao *pseudo-escalar de curvatura*  $P$ , respectivamente. Substituindo as eqs. (B.39)–(B.41) na eq. (B.38), podemos escrever a decomposição de  $Q_{ABCD}$  de acordo com

$$\begin{aligned} Q_{ABCD} &= \Psi_{ABCD} + (\varepsilon_{BC} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD} \varepsilon_{AC}) (\Lambda + i\Omega) \\ &+ \varepsilon_{AC} \Sigma_{BD} + \varepsilon_{AD} \Sigma_{BC} + \varepsilon_{BC} \Sigma_{AD} + \varepsilon_{BD} \Sigma_{AC}. \end{aligned} \quad (B.42)$$

Finalmente, substituindo (B.25) e (B.42) em (B.23), obtemos que  $R_{ABCC'DD'}$  é decomposto em seis partes irredutíveis de acordo com

$$\begin{aligned} R_{ABCC'DD'} &= \varepsilon_{C'D'} [\Psi_{ABCD} + (\varepsilon_{BC} \varepsilon_{AD} + \varepsilon_{BD} \varepsilon_{AC}) (\Lambda + i\Omega) \\ &+ \varepsilon_{AC} \Sigma_{BD} + \varepsilon_{AD} \Sigma_{BC} + \varepsilon_{BC} \Sigma_{AD} + \varepsilon_{BD} \Sigma_{AC}] \\ &+ \varepsilon_{CD} (\Phi_{ABC'D'} + i\Theta_{ABC'D'}). \end{aligned} \quad (B.43)$$

Consideremos agora a decomposição do espinor de torção em partes irredutíveis, obtendo os espinores correspondentes às partes irredutíveis do tensor de torção, dadas no apêndice A. A partir dos componentes do tensor de torção  $T_{\alpha\mu\nu}$  em uma base de coordenadas, obtemos que o espinor de torção é dado por

$$T_{AA'BB'CC'} = \sigma^{\alpha}_{AA'}\sigma^{\mu}_{BB'}\sigma^{\nu}_{CC'}T_{\alpha\mu\nu} \quad (\text{B.44})$$

e que as suas simetrias são

$$T_{AA'BB'CC'} = -T_{AA'CC'BB'}. \quad (\text{B.45})$$

Seguindo um procedimento análogo ao utilizado na decomposição do espinor de curvatura, obtemos que

$$\varepsilon_{BC}T_{AA'XB'C'} = 2T_{AA'[BC]B'C'} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{B'C'}T_{AA'BX'C} = 2T_{AA'(BC)B'C'}, \quad (\text{B.46})$$

a partir das identidades dadas pelas eqs. (B.5) e das simetrias dadas pela eq. (B.45). Estes resultados nos permitem expressar a decomposição da torção como

$$T_{AA'BB'CC'} = \varepsilon_{B'C'}T_{A'ABC} + \varepsilon_{BC}\bar{T}_{AA'B'C'}, \quad (\text{B.47})$$

onde o espinor de torção contraído  $T_{A'ABC}$  é definido por

$$T_{AA'BC} = T_{A'A(BC)} = \frac{1}{2}T_{AA'BN'C}{}^{N'}. \quad (\text{B.48})$$

Entretanto, a decomposição da torção ainda não está completa, pois falta decompor  $T_{A'ABC}$  com relação aos índices ABC. Para decompormos  $T_{A'ABC}$  precisamos, primeiramente, determinar a sua parte totalmente simétrica. A partir das relações dadas pelas eqs. (B.27) e das simetrias dadas pela eq. (B.48), podemos mostrar que a parte totalmente simétrica é dada por  $T_{A'(ABC)} = \frac{1}{3}(T_{A'ABC} + T_{A'BCA} + T_{A' CAB})$ . Utilizando este resultado podemos expressar a decomposição de  $T_{A'ABC}$  como

$$T_{A'ABC} = T_{A'(ABC)} + \frac{1}{3}(2T_{A'ABC} - T_{A'BCA} - T_{A' CAB}) \quad (\text{B.49})$$

que, de acordo com as simetrias dadas pela eq. (B.48), podemos escrever da seguinte forma

$$T_{A'ABC} = T_{A'(ABC)} + \frac{2}{3}(T_{A'[AB]C} + T_{A'[AC]B}). \quad (\text{B.50})$$

Em seguida, considerando que  $2T_{A'[AB]C} = \varepsilon_{AB} T_{A'N}{}^N{}_C$ , de acordo com a eq. (B.6), podemos substituir este resultado na eq. (B.50) acima obtendo

$$T_{A'ABC} = T_{A'(ABC)} + \frac{1}{3}(\varepsilon_{AB} T_{NA'}{}^N{}_C + \varepsilon_{AC} T_{NA'}{}^N{}_B), \quad (\text{B.51})$$

onde  $T_{NA'}{}^N{}_B$  é um espinor não-hermitiano. A decomposição do espinor de torção em partes irreduzíveis fica concluída com a decomposição em uma parte hermitiana e uma parte anti-hermitiana do espinor

$$\mathcal{D}_{A'B} = T_{A'N}{}^N{}_B = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_{A'B} + i\mathcal{P}_{A'B}), \quad (\text{B.52})$$

onde os espinores hermitianos  $\mathcal{T}_{A'B}$  e  $\mathcal{P}_{A'B}$  correspondem ao traço  $T_a$  e ao pseudo-traço  $P_a$  (traço do dual) da torção, respectivamente. A parte irreduzível restante corresponde ao tensor de Lanczos  $L^a{}_{bc}$  da torção (cf. apêndice A) e nós a denominamos *espinor de Lanczos* da torção, definindo

$$\mathcal{L}_{A'ABC} = T_{A'(ABC)}. \quad (\text{B.53})$$

Assim, substituindo as eqs. (B.52)–(B.53) nas eqs. (B.51), finalmente completamos a decomposição do espinor de torção em partes irreduzíveis com o seguinte resultado

$$T_{A'ABC} = \mathcal{L}_{A'ABC} + \frac{1}{6}(\varepsilon_{AB} \mathcal{T}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \mathcal{T}_{A'B}) + \frac{i}{6}(\varepsilon_{AB} \mathcal{P}_{A'C} + \varepsilon_{AC} \mathcal{P}_{A'B}). \quad (\text{B.54})$$

## B.4 Partes irreduzíveis da derivada covariante do espinor da torção

Nesta seção, realizamos a decomposição em partes irreduzíveis da derivada covariante de primeira ordem do espinor da torção. Como veremos na próxima seção, estes resultados estão algebricamente relacionados com as partes irreduzíveis dos espinores da curvatura e da torção, obtidas nas seções anteriores, através das identidades de Bianchi.

Para decompor a derivada covariante do espinor da torção, primeiramente expressamos o espinor da torção em partes irreduzíveis e depois calculamos a derivada covariante do mesmo. Considerando que a derivada covariante comuta com o espinor métrico  $\varepsilon_{AB}$ , podemos utilizar a eq. (B.47) para obter

$$\nabla_{DD'} T_{AA'BB'CC'} = \varepsilon_{B'C'} \nabla_{DD'} T_{A'ABC} + \varepsilon_{BC} \nabla_{DD'} \bar{T}_{AA'B'C'}, \quad (\text{B.55})$$

onde a derivada covariante do espinor da torção é dada em função do espinor  $\nabla_{DD'}T_{A'ABC}$  e do seu complexo conjugado. Portanto, é necessário decompor apenas a derivada covariante de  $T_{A'ABC}$ . Utilizando a decomposição de  $T_{A'ABC}$  dada pela eq. (B.54), obtemos que esta derivada fica expressa por

$$\begin{aligned} \nabla_{DD'}T_{A'ABC} &= \nabla_{DD'}\mathcal{L}_{A'ABC} + \frac{1}{6}(\varepsilon_{AB}\nabla_{DD'}\mathcal{T}_{A'C} + \varepsilon_{AC}\nabla_{DD'}\mathcal{T}_{A'B}) \\ &+ \frac{i}{6}(\varepsilon_{AB}\nabla_{DD'}\mathcal{P}_{A'C} + \varepsilon_{AC}\nabla_{DD'}\mathcal{P}_{A'B}). \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Analisando este resultado, verificamos que apenas dois espinores precisam ser decompostos: (a) a derivada covariante do espinor de Lanczos  $\nabla_{DD'}\mathcal{L}_{A'ABC}$  e (b) a derivada covariante do traço do espinor da torção  $\nabla_{DD'}\mathcal{T}_{A'C}$ ; pois  $\nabla_{DD'}\mathcal{T}_{A'C}$  e  $\nabla_{DD'}\mathcal{P}_{A'C}$  são decompostos de maneira idêntica.

Consideremos inicialmente item (b) acima, isto é, a derivada do traço do espinor da torção, cuja decomposição é mais simples. Decompondo  $\nabla_{B'}^B\mathcal{T}_{X'}^A$  em partes simétricas e anti-simétricas em cada par de índices, podemos utilizar a relação dada pela eq. (B.6) para obter

$$\nabla_{B'}^B\mathcal{T}_{X'}^A = \nabla_{(B'}^B\mathcal{T}_{X')}^A + \frac{1}{2}\varepsilon_{B'X'}\nabla_{N'}^B\mathcal{T}^{AN'}, \quad (\text{B.57})$$

como também

$$\nabla_{(B'}^B\mathcal{T}_{X')}^A = \nabla^{(B}\mathcal{T}_{X')}^A + \frac{1}{2}\varepsilon^{BA}\nabla_{N(B'}\mathcal{T}_{X')}^N \quad (\text{B.58})$$

e também

$$\nabla_{N'}^B\mathcal{T}^{AN'} = \nabla_{N'}^{(B}\mathcal{T}^{A)N'} + \frac{1}{2}\varepsilon^{BA}\nabla_{NN'}\mathcal{T}^{NN'}. \quad (\text{B.59})$$

Substituindo as eqs. (B.58)–(B.59) na eq. (B.57), obtemos que a decomposição da derivada covariante do traço  $\mathcal{T}_{X'}^A$  do espinor da torção é dada por

$$\nabla_{B'}^B\mathcal{T}_{X'}^A = \mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'} + \frac{1}{2}(\varepsilon^{BA}\bar{\mathcal{M}}_{B'X'} + \varepsilon_{B'X'}\mathcal{M}^{BA}) + \frac{1}{4}\varepsilon^{BA}\varepsilon_{B'X'}\mathcal{T}, \quad (\text{B.60})$$

onde suas três partes irreduzíveis são dadas por

$$\mathcal{T}^{BA}{}_{B'X'} = \nabla_{(B'}^B\mathcal{T}_{X')}^A, \quad (\text{B.61})$$

$$\mathcal{M}^{BA} = \nabla_{N'}^{(B}\mathcal{T}^{A)N'}, \quad (\text{B.62})$$

$$\mathcal{T} = \nabla_{NN'}\mathcal{T}^{NN'}, \quad (\text{B.63})$$

sendo  $\mathcal{T}$  um escalar real.

Através de um procedimento análogo, também obtemos que a derivada covariante do pseudo-traço  $\mathcal{P}_{X'}^A$  do espinor da torção é decomposta em partes irreduzíveis de acordo com:

$$\nabla_{B'}^B \mathcal{P}_{X'}^A = \mathcal{P}_{B'X'}^{BA} + \frac{1}{2} (\varepsilon^{BA} \bar{\mathcal{B}}_{B'X'} + \varepsilon_{B'X'} \mathcal{B}^{BA}) + \frac{1}{4} \varepsilon^{BA} \varepsilon_{B'X'} \mathcal{P}, \quad (\text{B.64})$$

cujas três partes irreduzíveis são definidas por:

$$\mathcal{P}_{B'X'}^{BA} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{P}_{X')}^{A)}, \quad (\text{B.65})$$

$$\mathcal{B}^{BA} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{P}^{A)N'}, \quad (\text{B.66})$$

$$\mathcal{P} = \nabla_{NN'} \mathcal{P}^{NN'}, \quad (\text{B.67})$$

onde  $\mathcal{P}$  é um escalar real.

Consideremos agora a decomposição do espinor do item (a), isto é, a derivada covariante do espinor de Lanczos  $\nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}^{CDE}$ . Procedendo de modo análogo ao utilizado para decompor o traço do espinor da torção, utilizamos (B.6) para decompor  $\nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}^{CDE}$  de acordo com

$$\nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}^{CDE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{C)DE} + \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \nabla_{N'}^B \mathcal{L}^{N'CDE}. \quad (\text{B.68})$$

Prosseguindo com este processo, obtemos

$$\nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{C)DE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{C)DE} + \frac{1}{2} \varepsilon^{BC} \nabla_{N(B'} \mathcal{L}_{X')}^{N)DE}, \quad (\text{B.69})$$

e também

$$\nabla_{N'}^B \mathcal{L}^{N'CDE} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{C)DEN'} + \frac{1}{2} \varepsilon^{BC} \nabla_{NN'} \mathcal{L}^{N'NDE}. \quad (\text{B.70})$$

Finalmente, substituindo as eqs. (B.69)–(B.70) na eq. (B.68), chegamos ao seguinte resultado

$$\nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}^{CDE} = J_{B'X'}^{BCDE} + \frac{1}{2} (\varepsilon^{BC} L_{B'X'}^{DE} + \varepsilon_{B'X'} K^{BCDE}) + \frac{1}{4} \varepsilon^{BC} \varepsilon_{B'X'} \mathcal{L}^{DE}, \quad (\text{B.71})$$

onde definimos as partes resultantes da decomposição de acordo com:

$$J_{B'X'}^{BCDE} = J_{(B'X')}^{(BC)(DE)} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{C)DE}, \quad (\text{B.72})$$

$$K^{BCDE} = K^{(BC)(DE)} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{C)DEN'}, \quad (\text{B.73})$$

$$L_{B'X'}^{DE} = L_{(B'X')}^{(DE)} = \nabla_{N(B'} \mathcal{L}_{X')}^{N)DE}, \quad (\text{B.74})$$

$$\mathcal{L}^{DE} = \mathcal{L}^{ED} = \nabla_{N'N} \mathcal{L}^{N'NDE}. \quad (\text{B.75})$$

Como as simetrias dos espinores  $J_{B'X'}^{BCDE}$  e  $K^{BCDE}$  (nos índices sem linha) são idênticas às simetrias do do espinor  $Q_{ABCD}$ , obtido na decomposição do espinor da curvatura, concluímos que eles também são decompostos de acordo com a eq. (B.38). Assim, considerando inicialmente  $K^{BCDE}$ , obtemos a decomposição

$$K^{BCDE} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{CDE)N'} + \frac{1}{8} (\varepsilon^{BE} \mathcal{L}^{CD} + \varepsilon^{CE} \mathcal{L}^{BD} + \varepsilon^{BD} \mathcal{L}^{CE} + \varepsilon^{CD} \mathcal{L}^{BE}), \quad (\text{B.76})$$

onde utilizamos os resultados  $K_N^{(CD)N} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{CD}$  e  $K_{NK}^{NK} = 0$ , que são válidos por causa das simetrias do espinor de Lanczos.

Procedendo de modo semelhante com relação a  $J_{B'X'}^{BCDE}$ , obtemos a decomposição

$$J_{B'X'}^{BCDE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{CDE)} + \frac{1}{8} (\varepsilon^{BE} L_{B'X'}^{CD} + \varepsilon^{CE} L_{B'X'}^{BD} + \varepsilon^{BD} L_{B'X'}^{CE} + \varepsilon^{CD} L_{B'X'}^{BE}), \quad (\text{B.77})$$

onde utilizamos os resultados  $J_{B'X'N}^{(CD)N} = \frac{1}{2} L_{B'X'}^{CD}$  e  $J_{B'X'NK}^{NK} = 0$ .

Substituindo as decomposições dadas pelas eq. (B.76) e eq. (B.77) na eq. (B.71), obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}^{CDE} &= \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}^{CDE)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{CDE)N'} \\ &+ \frac{1}{8} (\varepsilon^{BE} L_{B'X'}^{CD} + \varepsilon^{CD} L_{B'X'}^{BE} + \varepsilon^{BD} L_{B'X'}^{CE} \\ &+ \varepsilon^{CE} L_{B'X'}^{BD} + 4\varepsilon^{BC} L_{B'X'}^{DE}) \\ &+ \frac{1}{16} \varepsilon_{B'X'} (\varepsilon^{BE} \mathcal{L}^{CD} + \varepsilon^{CD} \mathcal{L}^{BE} + \varepsilon^{BD} \mathcal{L}^{CE} \\ &+ \varepsilon^{CE} \mathcal{L}^{BD} + 4\varepsilon^{BC} \mathcal{L}^{DE}). \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Entretanto, a decomposição dada pela eq. (B.78) acima pode ser expressa em uma forma mais compacta utilizando algumas identidades satisfeitas por  $L_{B'X'}^{AB}$  e por  $\mathcal{L}^{AB}$ , como veremos a seguir.

A partir das identidades dadas pelas eqs. (B.4), obtemos que  $\mathcal{L}^{AB}$  satisfaz as identidades  $\varepsilon^{(BE} \varepsilon^{C)N} \mathcal{L}_N^D = 0$  e  $\varepsilon^{(BD} \varepsilon^{C)N} \mathcal{L}_N^E = 0$ . Considerando que  $\varepsilon^{AB}$  é anti-simétrico e que  $\mathcal{L}^{AB}$  é simétrico, podemos escrever a primeira delas como  $\varepsilon^{BC} \mathcal{L}^{DE} = \varepsilon^{BE} \mathcal{L}^{CD} - \varepsilon^{CE} \mathcal{L}^{BD}$  e a segunda delas como  $\varepsilon^{BC} \mathcal{L}^{DE} = \varepsilon^{BD} \mathcal{L}^{CE} - \varepsilon^{CD} \mathcal{L}^{BE}$ . Somando estas duas equações obtemos que

$$2\varepsilon^{BC} \mathcal{L}^{DE} = (\varepsilon^{BE} \mathcal{L}^{CD} - \varepsilon^{CE} \mathcal{L}^{BD}) + (\varepsilon^{BD} \mathcal{L}^{CE} - \varepsilon^{CD} \mathcal{L}^{BE}). \quad (\text{B.79})$$

Utilizando este resultado, obtemos novas identidades para  $\mathcal{L}^{AB}$  dadas por

$$2(\varepsilon^{BE}\mathcal{L}^{CE} + \varepsilon^{BD}\mathcal{L}^{CE}) - 2\varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE} = \varepsilon^{BE}\mathcal{L}^{CD} + \varepsilon^{CD}\mathcal{L}^{BE} + \varepsilon^{BD}\mathcal{L}^{CE} + \varepsilon^{CE}\mathcal{L}^{BE}, \quad (\text{B.80})$$

como podemos verificar substituindo a expressão para  $2\varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE}$  dada pela eq. (B.79) nestas equações.

Somando  $4\varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE}$  a ambos os membros das novas identidades dadas pelas eqs. (B.80) e considerando que  $\varepsilon^{B(C}\mathcal{L}^{DE)} = \frac{1}{3}(\varepsilon^{BE}\mathcal{L}^{CD} + \varepsilon^{BD}\mathcal{L}^{CE} + \varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE})$ , obtemos

$$\varepsilon^{B(C}\mathcal{L}^{DE)} = \frac{1}{6}(\varepsilon^{BE}\mathcal{L}^{CD} + \varepsilon^{CD}\mathcal{L}^{BE} + \varepsilon^{BD}\mathcal{L}^{CE} + \varepsilon^{CE}\mathcal{L}^{BE} + 4\varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE}). \quad (\text{B.81})$$

Um resultado análogo também é válido para o espinor  $L^{AB}{}_{B'X'}$ , pois o mesmo tem as mesmas simetrias que  $\mathcal{L}^{AB}$ . Portanto, utilizando um procedimento semelhante, obtemos

$$\varepsilon^{B(C}\mathcal{L}^{DE)}{}_{B'X'} = \frac{1}{6}(\varepsilon^{BE}\mathcal{L}^{CD}{}_{B'X'} + \varepsilon^{CD}\mathcal{L}^{BE}{}_{B'X'} + \varepsilon^{BD}\mathcal{L}^{CE}{}_{B'X'} + \varepsilon^{CE}\mathcal{L}^{BD}{}_{B'X'} + 4\varepsilon^{BC}\mathcal{L}^{DE}{}_{B'X'}). \quad (\text{B.82})$$

Finalmente, substituindo as identidades dadas pelas eqs. (B.81)–(B.82) na eq. (B.78), a decomposição da derivada do espinor de Lanczos fica expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}{}^{CDE} &= \nabla_{(B'}^B \mathcal{L}_{X')}{}^{CDE)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \nabla_{N'} ({}^B \mathcal{L}^{CDE)N'} \\ &\quad + \frac{3}{4} \varepsilon^{B(C} \mathcal{L}^{DE)}{}_{B'X'} + \frac{3}{8} \varepsilon_{B'X'} \varepsilon^{B(C} \mathcal{L}^{DE)}. \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

Para completarmos a decomposição do item (b), falta apenas decompor o espinor  $L^{DE}{}_{B'X'}$  em uma parte hermitiana e uma parte anti-hermitiana de acordo com

$$L^{DE}{}_{B'X'} = \frac{1}{2}(L^{DE}{}_{B'X'} + \bar{L}^{DE}{}_{B'X'}) - \frac{i}{2}(L^{DE}{}_{B'X'} - \bar{L}^{DE}{}_{B'X'}), \quad (\text{B.84})$$

e depois substituir este resultado na eq. (B.83). Dessa forma, o resultado final da decomposição da derivada covariante do espinor de Lanczos fica dado por

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^B \mathcal{L}_{X'}{}^{CDE} &= \mathcal{L}_{B'X'}{}^{BCDE} + \frac{1}{2} \varepsilon_{B'X'} \psi^{BCDE} \\ &\quad + \frac{3}{4} [\varepsilon^{B(C} \phi^{DE)}{}_{B'X'} + i \varepsilon^{B(C} \theta^{DE)}{}_{B'X'}] \\ &\quad + \frac{3}{8} \varepsilon_{B'X'} \varepsilon^{B(C} \mathcal{L}^{DE)}, \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

onde as partes irredutíveis são definidas por

$$\mathcal{L}_{B'X'}{}^{BCDE} = \nabla_{(B'}^{(B} \mathcal{L}_{X')}{}^{CDE)}, \quad (\text{B.86})$$

$$\psi^{BCDE} = \nabla_{N'}^{(B} \mathcal{L}^{CDE)N'}, \quad (\text{B.87})$$

$$\phi_{ABX'Z'} = -\frac{1}{2} (\nabla_{(X'}^N \mathcal{L}_{Z')}{}_{ABN} + \nabla_{(A}^{N'} \bar{\mathcal{L}}_{B)X'Z'N'}), \quad (\text{B.88})$$

$$\theta_{ABX'Z'} = \frac{i}{2} (\nabla_{(X'}^N \mathcal{L}_{Z')}{}_{ABN} + -\nabla_{(A}^{N'} \bar{\mathcal{L}}_{B)X'Z'N'}), \quad (\text{B.89})$$

$$\mathcal{L}^{DE} = \nabla_{N'N} \mathcal{L}^{N'DE}. \quad (\text{B.90})$$

Portanto, a derivada covariante da torção fica totalmente determinada por onze partes irredutíveis, onde: (i)  $\mathcal{T}^{AB}{}_{B'X'}$ ,  $\mathcal{M}^{AB}$  e  $\mathcal{T}$  são determinadas pelo traço do espinor da torção; (ii)  $\mathcal{P}^{AB}{}_{B'X'}$ ,  $\mathcal{B}^{AB}$  e  $\mathcal{P}$ , pelo pseudo-traço do espinor da torção; e (iii)  $\mathcal{L}_{B'X'}{}^{BCDE}$ ,  $\psi^{BCDE}$ ,  $\phi_{ABX'Z'}$ ,  $\theta_{ABX'Z'}$  e  $\mathcal{L}_{AB}$ , pelo espinor de Lanczos.

Denominamos  $\psi^{ABCD}$  de *espinor de Weyl-Lanczos* e  $\phi_{ABX'Z'}$  de *espinor de Ricci-Lanczos*, pois têm as mesmas simetrias que os espinores de Weyl e de Ricci da TRG, sendo determinados pelo espinor de Lanczos da torção. Em particular, a eq. (3.27) que determina  $\psi^{ABCD}$  em função do espinor de Lanczos da torção é a mesma que relaciona o espinor de Weyl da TRG com o espinor de Lanczos [62].

## B.5 Identidades de Bianchi e de Ricci

Nesta seção as identidades de Bianchi e de Ricci para uma variedade de Riemann-Cartan são decompostas em partes irredutíveis. Estas partes estabelecem relações algébricas entre os escalares de Cartan obtidos no capítulo 2 e são utilizadas no capítulo 3 para definir um conjunto completo mínimo de escalares de Cartan.

Consideremos, em primeiro lugar, as identidades de Bianchi onde não ocorrem derivadas da curvatura, dadas em termos dos duais da curvatura e da torção pela eq. (A.43). Utilizando os resultados das seções anteriores, podemos expressar estas identidades de acordo com

$$\nabla^{BB'} T^*{}_{AA'BB'CC'} = R^*{}_{AA'}{}^{BB'}{}_{BB'CC'} + T^*{}_{NN'BB'CC'} T_{AA'}{}^{BB'NN'}. \quad (\text{B.91})$$

Estas equações podem ser colocadas em uma forma mais simple substituindo os espinores correspondentes aos duais da curvatura e da torção definidos pelas eq. (A.29) e eq. (A.25),

respectivamente, por

$$R^*_{AA'BB'CC'DD'} = i R_{AA'BB'CD'DC'} \quad \text{e} \quad T^*_{NN'BB'CC'} = iT_{NN'BC'CB'}, \quad (\text{B.92})$$

onde o dual foi calculado utilizando espinor definido pela eq. (B.9). Assim, substituindo as eqs. (B.92) na eq. (B.91), obtemos que as identidades de Bianchi ficam dadas por

$$\nabla^{BB'} T_{AA'BC'CB'} - R_{AA'}{}^{BB'}{}_{BC'CB'} - T_{NN'BC'CB'} T_{AA'}{}^{BB'NN'} = 0. \quad (\text{B.93})$$

A partir deste resultado faremos a decomposição das identidades de Bianchi acima em três etapas: primeiro decomponemos (a)  $R_{AA'}{}^{BB'}{}_{BC'CB'}$ , depois (b)  $\nabla^{BB'} T_{AA'BC'CB'}$  e, finalmente, (c)  $T_{NN'BC'CB'} T_{AA'}{}^{BB'NN'}$ .

Consideremos, inicialmente, o item (a). Utilizando a decomposição do espinor da curvatura dada pela eq. (B.21), obtemos que  $R_{AA'}{}^{BB'}{}_{BC'CB'} = R_A{}^B{}_{BC'CA'} + \bar{R}_{A'}{}^{B'}{}_{AC'CB'}$ , onde expressamos  $R_A{}^B{}_{BC'CA'}$  de acordo com

$$R_A{}^B{}_{BC'CA'} = \varepsilon_{C'A'} Q^N{}_{ACN} + P_{ACC'A'}, \quad (\text{B.94})$$

tendo em vista a sua decomposição dada na eq. (B.23). Depois, substituindo na eq. (B.94) os resultados das decomposições de  $P_{ABX'W'}$  e  $Q_{ABCD}$  dadas, respectivamente, pelas eq. (B.25) e eq. (B.42), obtemos

$$R_A{}^B{}_{BC'CA'} = 4\varepsilon_{C'A'} \Sigma_{AC} + 3\varepsilon_{C'A'} \varepsilon_{AC} (\Lambda + i\Omega) + \Phi_{ACC'A'} + i\Theta_{ACC'A'}. \quad (\text{B.95})$$

Finalmente, a partir da eq. (B.95) e do seu complexo conjugado, completamos a decomposição do espinor do item (a) com o seguinte resultado

$$R_{AA'}{}^{BB'}{}_{BC'CB'} = -4(\varepsilon_{AC} \bar{\Sigma}_{A'C'} + \varepsilon_{C'A'} \Sigma_{AC}) - 6i\varepsilon_{AB} \varepsilon_{C'A'} \Omega + 2i\Theta_{ACC'A'}. \quad (\text{B.96})$$

Consideremos agora a decomposição do item (b), isto é, o divergente do dual da torção dado por  $\nabla^{BB'} T_{AA'BC'CB'}$ . Inicialmente, utilizando a decomposição da torção dada pela eq. (B.51), obtemos que

$$\nabla^{BB'} T_{AA'BC'CB'} = -\nabla^B{}_{C'} T_{A'ABC} + \nabla^{B'}{}_{C'} \bar{T}_{AA'B'C'}, \quad (\text{B.97})$$

onde cada parcela é o complexo conjugado da outra. Portanto, temos apenas que decompor  $\nabla^B{}_{C'} T_{A'ABC}$ . Como  $T_{A'ABC}$  é decomposto de acordo com a eq. (B.54), obtemos que esta derivada é dada por

$$\nabla^B{}_{C'} T_{A'ABC} = \nabla^B{}_{C'} \mathcal{L}_{A'ABC} + \frac{1}{6} [\varepsilon_{AC} \nabla^B{}_{C'} (\mathcal{T}_{A'B} + i\mathcal{P}_{A'B}) - \nabla_{AC'} (\mathcal{T}_{A'C} + i\mathcal{P}_{A'C})]. \quad (\text{B.98})$$

Analisando este resultado, verificamos que precisamos decompor as seguintes derivadas: (i)  $\nabla_{C'}^B \mathcal{L}_{A'ABC}$ , (ii)  $\nabla_{C'}^B \mathcal{T}_{A'B}$  e (iii)  $\nabla_{AC'} \mathcal{T}_{A'C}$ ; pois as derivadas de pseudo-traço  $\mathcal{P}_{AB'}$  são decompostas do mesmo modo que as derivadas do traço  $\mathcal{T}_{AB'}$  o espinor da torção.

A partir da decomposição da derivada covariante do espinor de Lanczos  $\mathcal{L}_{A'ABC}$ , dada pela eq. (B.85), obtemos que a decomposição do item (i) é dada por

$$\nabla_{C'}^B \mathcal{L}_{A'ABC} = -\phi_{ACC'A'} - i\theta_{ACC'A'} - \frac{1}{2} \varepsilon_{C'A'} \mathcal{L}_{AC}, \quad (\text{B.99})$$

em termos das partes irredutíveis da derivada de  $\mathcal{L}_{A'ABC}$ , definidas nas eqs. (B.86)–(B.90). Da mesma forma, as decomposições dos itens (ii) e (iii) são dadas, respectivamente, por

$$\nabla_{C'}^B \mathcal{T}_{A'B} = -\bar{\mathcal{M}}_{C'A'} - \frac{1}{2} \varepsilon_{C'A'} \mathcal{T}, \quad (\text{B.100})$$

$$\nabla_{AC'} \mathcal{T}_{A'C} = \mathcal{T}_{ACC'A'} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{AC} \bar{\mathcal{M}}_{C'A'} + \varepsilon_{C'A'} \mathcal{M}_{AC}) + \frac{1}{4} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{C'A'} \mathcal{T}, \quad (\text{B.101})$$

em termos das partes irredutíveis da derivada do traço do espinor da torção, definidas nas eqs. (B.61)–(B.63). Analogamente, as parcelas da eq. (B.98) que são formadas por derivadas de  $\mathcal{P}_{AX'}$  são dadas por

$$\nabla_{C'}^B \mathcal{P}_{A'B} = -\bar{\mathcal{B}}_{C'A'} - \frac{1}{2} \varepsilon_{C'A'} \mathcal{P}, \quad (\text{B.102})$$

$$\nabla_{AC'} \mathcal{P}_{A'C} = \mathcal{P}_{ACC'A'} + \frac{1}{2} (\varepsilon_{AC} \bar{\mathcal{B}}_{C'A'} + \varepsilon_{C'A'} \mathcal{B}_{AC}) + \frac{1}{4} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{C'A'} \mathcal{P}, \quad (\text{B.103})$$

em termos das partes irredutíveis da derivada do pseudo-traço do espinor da torção definidas nas eqs. (B.65)–(B.67). Portanto, as cinco parcelas da eq. (B.98) são decompostas de acordo com as eqs. (B.99)–(B.103). Substituindo estes resultados na eq. (B.98), obtemos que as derivadas  $\nabla_{C'}^B \mathcal{T}_{A'ABC}$  são decompostas de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_{C'}^B \mathcal{T}_{A'ABC} = & -(\phi_{ACC'A'} + \frac{1}{6} \mathcal{T}_{ACC'A'}) - i(\theta_{ACC'A'} + \frac{1}{6} \mathcal{P}_{ACC'A'}) \\ & - \frac{3}{24} \varepsilon_{AC} [2\bar{\mathcal{M}}_{C'A'} + 2i\bar{\mathcal{B}}_{C'A'} + \varepsilon_{C'A'} (\mathcal{T} + i\mathcal{P})] \\ & - \frac{1}{12} \varepsilon_{C'A'} (6\mathcal{L}_{AC} + \mathcal{M}_{AC} + i\mathcal{P}_{AC}). \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

Para completarmos a decomposição do item (b) falta apenas decompor  $\nabla_{C'}^{B'} \bar{\mathcal{T}}_{AA'B'C'}$ , que é o complexo conjugado de  $\nabla_{C'}^B \mathcal{T}_{A'ABC}$ . Utilizando as propriedades das partes irredutíveis da derivada covariante da torção, obtemos que o complexo conjugado da eq. (B.104) é dado por

$$\nabla_{C'}^{B'} \bar{\mathcal{T}}_{AA'B'C'} = -(\phi_{ACC'A'} + \frac{1}{6} \mathcal{T}_{ACC'A'}) + i(\theta_{ACC'A'} + \frac{1}{6} \mathcal{P}_{ACC'A'})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{24}\varepsilon_{C'A'}[2\mathcal{M}_{AC}-2i\mathcal{B}_{AC}+\varepsilon_{AC}(\mathcal{T}-i\mathcal{P})]. \\
 & -\frac{1}{12}\varepsilon_{AC}(6\bar{\mathcal{L}}_{C'A'}+\bar{\mathcal{M}}_{C'A}-i\bar{\mathcal{P}}_{C'A'}). \tag{B.105}
 \end{aligned}$$

Finalmente, subtraindo a eq. (B.104) da eq. (B.105) obtemos que a decomposição do item (b), isto é, do divergente do dual do espinor da torção, é dada pelo seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 \nabla^{BB'}\mathcal{T}_{AA'BC'CB'} &= 2i\theta_{C'A'AC}+\frac{i}{3}\mathcal{P}_{C'A'AC}+\frac{i}{4}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{C'A'}\mathcal{P} \\
 & +\frac{1}{6}\varepsilon_{C'A'}(2\mathcal{M}_{AC}-i\mathcal{B}_{AC}+3\mathcal{L}_{AC}) \\
 & +\frac{1}{6}\varepsilon_{AC}(2\bar{\mathcal{M}}_{C'A'}+i\bar{\mathcal{B}}_{C'A'}+3\bar{\mathcal{L}}_{AC}). \tag{B.106}
 \end{aligned}$$

Para concluirmos a decomposição das identidades de Bianchi falta apenas decompor a parcela correspondente ao item (c), isto é, o espinor quadrático na torção dado por  $T_{NN'BC'CB'}T_{AA'}{}^{BB'NN'}$ , que expressamos em uma forma mais conveniente para realizar a decomposição de acordo com

$$T_{NN'BC'CB'}T_{AA'}{}^{BB'NN'}=\varepsilon_{E'C'}\varepsilon_{F'A'}T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'C}T_A{}^{F'BB'NN'}. \tag{B.107}$$

Dessa forma, podemos decompor  $T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'C}T_A{}^{F'BB'NN'}$  em partes simétricas e anti-simétricas nos pares de índices  $E'F'$  e  $CA$ , de modo a podermos utilizar a eq. (B.6), obtendo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
 T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'C}T_A{}^{F'BB'NN'} &= T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{B'C}T_A{}^{F')BB'NN'} \\
 & +\frac{1}{2}\varepsilon^{E'F'}T_{NN'BK'B'C}T_A{}^{K'BB'NN'}, \tag{B.108}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{B'C}T_A{}^{F')BB'NN'} &= T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{B'(C}T_A{}^{F')BB'NN'} \\
 & +\frac{1}{2}\varepsilon_{CA}T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{B'K}T^{F')KBB'NN'}, \tag{B.109}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{NN'BK'B'C}T_A{}^{K'BB'NN'} &= T_{NN'BK'B'(C}T_A{}^{K')BB'NN'} \\
 & +\frac{1}{2}\varepsilon_{CA}T_{NN'BK'B'K}T^{KK'BB'NN'}. \tag{B.110}
 \end{aligned}$$

Substituindo as eqs. (B.109)–(B.110) na eq. (B.108) e depois substituindo o resultado na eq. (B.107), obtemos que a decomposição do item (c) é dada por

$$\begin{aligned}
 T_{NN'BC'CB'}T_{AA'}{}^{BB'NN'} &= -\varepsilon_{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'(C}T_A{}^{F'BB'NN'} \\
 & -\frac{1}{2}\varepsilon_{AC}\varepsilon^{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{KB'}T^{F')KBB'NN'} \\
 & -\frac{1}{2}\varepsilon_{C'A'}T_{NN'BK'B'(C}T_A{}^{K')BB'NN'} \\
 & +\frac{1}{4}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{C'A'}T_{NN'BK'KB'}T^{KK'BB'NN'}. \tag{B.111}
 \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo as decomposições dos itens (a), (b) e (c) dadas, respectivamente, pelas eq. (B.96), eq. (B.106) e eq. (B.111) na eq. (B.93) e depois reagrupando os termos correspondentes, obtemos o resultado

$$\begin{aligned}
 & - [2i\Theta_{C'A'AC} - 2i\theta_{C'A'AC} - \frac{i}{3}\mathcal{P}_{C'A'AC} - \varepsilon_{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'(A}T_C{}^{F'}{}^{BB'NN'}] \\
 & + \varepsilon_{C'A'}[4\Sigma_{AC} + \frac{1}{3}\mathcal{M}_{AC} - \frac{i}{6}\mathcal{B}_{AC} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{AC} + \frac{1}{2}T_{NN'BK'B'(A}T_C{}^{K'}{}^{BB'NN'}] \\
 & + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{C'A'}[6i\Omega + \frac{i}{4}\mathcal{P} + \frac{1}{4}T_{NN'BK'KB'}T^{KK'}{}^{BB'NN'}] \\
 & + \varepsilon_{AC}[4\bar{\Sigma}_{C'A'} + \frac{1}{3}\bar{\mathcal{M}}_{C'A'} + \frac{i}{6}\bar{\mathcal{B}}_{C'A'} + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{L}}_{C'A'} \\
 & + \frac{1}{2}\varepsilon_{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}{}^{(E'}{}_{KB'}T^{F')}{}^{KBB'NN'}] = 0.
 \end{aligned} \tag{B.112}$$

que é composto por três equações independentes. Portanto, a decomposição das identidades de Bianchi dadas pelas eqs. (B.93) resulta nas três equações abaixo:

$$\Omega = -\frac{1}{24}\mathcal{P} - \frac{i}{24}T_{NN'BK'KB'}T^{KK'}{}^{BB'NN'}, \tag{B.113}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{AC} &= -\frac{1}{12}\mathcal{M}_{AC} + \frac{i}{24}\mathcal{B}_{AC} - \frac{1}{8}\mathcal{L}_{AC} \\
 & - \frac{1}{8}T_{NN'BK'B'(A}T_C{}^{K'}{}^{BB'NN'},
 \end{aligned} \tag{B.114}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_{C'A'AC} &= \theta_{C'A'AC} + \frac{1}{6}\mathcal{P}_{C'A'AC} \\
 & + \frac{1}{2}\varepsilon_{E'(C'}\varepsilon_{A')F'}T_{NN'B}{}^{E'}{}_{B'(A}T_C{}^{F'}{}^{BB'NN'}.
 \end{aligned} \tag{B.115}$$

Consideremos agora as identidades de Bianchi onde as derivadas da curvatura estão presentes, dadas em termos dos duais da curvatura e da torção pela eq. (A.45). Utilizando novamente os resultados das seções anteriores estas identidades ficam expressas em termos dos espinores de curvatura e de torção de acordo com

$$\nabla^{CC'}R^*{}_{AA'BB'CC'DD'} + R_{AA'BB'}{}^{NN'CC'}T^*{}_{NN'CC'DD'} = 0. \tag{B.116}$$

Adotando um procedimento semelhantemente ao que foi utilizado anteriormente, primeiro substituímos a eq. (B.92) na eq. (B.116) para obter

$$\nabla^{CC'}R_{AA'BB'CD'DC'} + R_{AA'BB'}{}^{NN'CC'}T_{NN'CD'DC'} = 0. \tag{B.117}$$

Depois substituímos a decomposição do espinor da curvatura dada pela eq. (B.21) no resultado dado pela eq. (B.117) acima, obtendo as identidades de Bianchi termos das equações

$$\nabla^{CC'}R_{ABCD'DC'} + R_{AB}{}^{NN'CC'}T_{NN'CD'DC'} = 0 \tag{B.118}$$

e das equações complexo conjugadas das mesmas.

Considerando que  $R_{ABCX'DZ'}$  é decomposto em termos de  $Q_{ABCD}$  e  $P_{ABX'Z'}$  de acordo com a eq. (B.23), podemos substituir a eq. (B.23) na eq. (B.118) para obter

$$-\nabla_{D'}{}^C Q_{ABCD} + \nabla^{C'}{}_D P_{ABD'C'} + R_{AB}{}^{NN'CC'} T_{NN'CD'DC'} = 0. \quad (B.119)$$

Cada parcela da eq. (B.119) acima tem as mesmas simetrias que o espinor da torção contraído  $T_{D'DAB}$ , definido na eq. (B.48). Portanto, podem ser decompostas da mesma forma, isto é, de acordo com a eq. (B.50). Assim, obtemos que a decomposição das duas primeiras parcelas é dada por

$$\nabla_{D'}{}^C Q_{ABDC} = \nabla_{D'}{}^C Q_{(ABD)C} + \frac{1}{3} \nabla_{D'}{}^C (\varepsilon_{AD} Q_{NBC}{}^N + \varepsilon_{BD} Q_{NAC}{}^N), \quad (B.120)$$

$$\nabla^{C'}{}_D P_{ABD'C'} = \nabla^{C'}{}_{(D} P_{AB)D'C'} + \frac{1}{3} \nabla^{C'}{}_N (\varepsilon_{DA} P_{BD'C'}{}^N + \varepsilon_{DB} P_{AD'C'}{}^N). \quad (B.121)$$

Procedendo de modo análogo, obtemos que a terceira parcela da eq. (B.119) é decomposta de acordo com

$$\begin{aligned} R_{AB}{}^{NN'CC'} T_{NN'CD'DC'} &= -\varepsilon_{KN} \varepsilon_{K'N'} R_{(AB}{}^{NN'CC'} T^{KK'}{}_{D)C'DC'} \\ &\quad + \frac{1}{3} (\varepsilon_{AD} R_B{}^{KNN'CC'} T_{NN'KC'DC'} \\ &\quad + \varepsilon_{BD} R_A{}^{KNN'CC'} T_{NN'KC'DC'}). \end{aligned} \quad (B.122)$$

Finalmente, substituindo as eqs. (B.120)–(B.122) na eq. (B.119), a decomposição das identidades de Bianchi fica dada por

$$\begin{aligned} &\nabla_{D'}{}^C Q_{(ABD)C} - \nabla^{C'}{}_{(A} P_{BD)D'C'} - R_{(AB}{}^{NN'CC'} T^{KK'}{}_{|NN'|D)C'DC'} \\ &\quad + \frac{1}{3} [\varepsilon_{AD} (\nabla_{D'}{}^C Q_{NBC}{}^N + \nabla^{C'}{}_N P_{BD'C'}{}^N - R_B{}^{KNN'CC'} T_{NN'KC'DC'}) \\ &\quad + \varepsilon_{BD} (\nabla_{D'}{}^C Q_{NAC}{}^N + \nabla^{C'}{}_N P_{AD'C'}{}^N - R_A{}^{KNN'CC'} T_{NN'KC'DC'})] = 0, \end{aligned} \quad (B.123)$$

que podem ser decompostas em duas partes independentes dadas por

$$\nabla_{D'}{}^C Q_{NAC}{}^N + \nabla^{C'}{}_N P_{AD'C'}{}^N - R_A{}^{KNN'CC'} T_{NN'KC'DC'} = 0, \quad (B.124)$$

$$\nabla_{D'}{}^C Q_{(ABD)C} - \nabla^{C'}{}_{(A} P_{BD)D'C'} - R_{(AB}{}^{NN'CC'} T^{KK'}{}_{|NN'|D)C'DC'} = 0. \quad (B.125)$$

Em seguida, substituímos na eq. (B.124) o resultado das decomposições dos espinores  $Q_{ABCD}$  e  $P_{ABX'Z'}$  dadas, respectivamente, pelas eq. (B.25) e eq. (B.42), obtemos finalmente que as identidades de Bianchi dadas por eq. (B.117) ficam decompostas de acordo

com

$$\begin{aligned} & \nabla_{D'}^C \Psi_{ABCD} - \nabla_{(D}^{C'} \Phi_{AB)D'C'} - i \nabla_{(D}^{C'} \Theta_{AB)D'C'} - 2 \nabla_{D'(A} \Sigma_{BD)} \\ & - R_{(AB}^{NN'CC'} T^{KK'}_{|NN'|D)C'CD'} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

$$\begin{aligned} & (\nabla_{N'}^{C'} \Phi_{BD'C'}^N - 3 \nabla_{BD'} \Lambda) + i (\nabla_{N'}^{C'} \Theta_{BD'C'}^N - 3 \nabla_{BD'} \Omega) \\ & - 4 \nabla_{D'}^C \Sigma_{BC} - R_B^{KNN'CC'} T_{NN'KC'CD'} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.127})$$

onde a eq. (B.127) ainda pode ser decomposta em uma parte hermitiana, dada por

$$\begin{aligned} & 4\mathcal{U}_{D'B} + 3 \nabla_{BD'} \Lambda - \nabla_{N'}^{C'} \Phi_{BD'C'}^N \\ & + \frac{1}{2} (R_B^{KNN'CC'} T_{NN'KC'CD'} + \bar{R}_{D'}^{K'N'NC'C} T_{N'NK'CC'B}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.128})$$

e em outra parte anti-hermitiana, dada por

$$\begin{aligned} & 4\mathcal{V}_{D'B} + 3 \nabla_{BD'} \Omega - \nabla_{N'}^{C'} \Theta_{BD'C'}^N \\ & - \frac{i}{2} (R_B^{KNN'CC'} T_{NN'KC'CD'} - \bar{R}_{D'}^{K'N'NC'C} T_{N'NK'CC'B}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.129})$$

onde definimos os espinores

$$\mathcal{U}_{D'B} = \frac{1}{2} (\nabla_{D'}^C \Sigma_{BC} + \nabla_{B'}^{C'} \bar{\Sigma}_{D'C'}) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{D'B} = -\frac{i}{2} (\nabla_{D'}^C \Sigma_{BC} - \nabla_{B'}^{C'} \bar{\Sigma}_{D'C'}). \quad (\text{B.130})$$

Consideremos agora a decomposição das identidades de Ricci em termos das partes irreduzíveis dos espinores da curvatura e da torção, obtidas nas seções anteriores. Utilizaremos o mesmo procedimento que é adotado no caso particular das variedades Riemannianas expressamos, inicialmente, as identidades de Ricci dadas pela eq. (A.41) em termos de espinores, obtendo

$$\begin{aligned} [\nabla_{AW'}, \nabla_{BX}] X_{CK'DZ'} &= R^{NN'}_{CK'BX'AW'} X_{NN'DZ'} + R^{NN'}_{DZ'BX'AW'} X_{CK'NN'} \\ &- 2 T^{NN'}_{BX'AW'} \nabla_{NN'} X_{CK'DZ'}, \end{aligned} \quad (\text{B.131})$$

onde definimos o comutador dos operadores das derivadas covariantes por

$$[\nabla_{AW'}, \nabla_{BX}] = \nabla_{AW'} \nabla_{BX'} - \nabla_{BX'} \nabla_{AW'} \quad (\text{B.132})$$

e o espinor  $X_{CK'DZ'}$  em função de um espinor  $\phi_C$  arbitrário por

$$X_{CK'DZ'} = \varepsilon_{K'Z'} \phi_C \phi_D. \quad (\text{B.133})$$

O comutador  $[\nabla_{AW'}, \nabla_{BX}]$  pode ser decomposto da seguinte forma. Inicialmente, utilizamos as identidades dadas pelas eqs. (B.6) para obter as relações

$$\varepsilon_{W'X'} \nabla_{N'}^A \nabla^{BN} = 2 \nabla_{[W'}^A \nabla_{X']}^B \quad \text{e} \quad \varepsilon^{AB} \nabla_{NX'} \nabla_{W'}^N = 2 \nabla_{X'}^{[A} \nabla_{W']}^B, \quad (\text{B.134})$$

cujas soma é dada por

$$[\nabla_{W'}^A, \nabla_{X'}^B] = \varepsilon^{AB} \nabla_{NW'} \nabla_{X'}^N + \varepsilon_{W'X'} \nabla_{K'}^A \nabla^{BK'}. \quad (\text{B.135})$$

Em seguida, procedendo de maneira análoga, decomponemos o comutador  $[\nabla_{X'}^B, \nabla_{W'}^A]$  de acordo com

$$[\nabla_{X'}^B, \nabla_{W'}^A] = \varepsilon^{BA} \nabla_{NX'} \nabla_{W'}^N + \varepsilon_{X'W'} \nabla_{K'}^B \nabla^{AK'}. \quad (\text{B.136})$$

Por fim, considerando que  $[\nabla_{W'}^A, \nabla_{X'}^B] = -[\nabla_{X'}^B, \nabla_{W'}^A]$ , subtraindo a eq. (B.136) da eq. (B.135) e utilizando as regras para levantar e abaixar índice obtemos

$$[\nabla_{AW'}, \nabla_{BX'}] = \varepsilon_{AB} \nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N - \varepsilon_{W'X'} \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'}, \quad (\text{B.137})$$

tendo em vista que  $\nabla_{N'}^A \nabla^{BN'} = -\nabla^{AN'} \nabla_{N'}$ .

Utilizando a eq. (B.137) acima nas identidades de Ricci dadas pelas eqs. (B.131), podemos decompor essas identidades em duas partes independentes dadas por

$$\begin{aligned} 2 \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'} X_{CK'DZ'} &= -\varepsilon^{W'X'} R^{NN'}{}_{CK'BX'AW'} X_{NN'DZ'} \\ &\quad - \varepsilon^{W'X'} R^{NN'}{}_{DZ'BX'AW'} X_{CK'NN'} \\ &\quad + 2 \varepsilon^{W'X'} T^{NN'}{}_{BX'AW'} \nabla_{NN'} X_{CK'DZ'}, \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

$$\begin{aligned} 2 \nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N X_{CK'DZ'} &= \varepsilon^{AB} R^{NN'}{}_{CK'BX'AW'} X_{NN'DZ'} \\ &\quad + \varepsilon^{AB} R^{NN'}{}_{DZ'BX'AW'} X_{CK'NN'} \\ &\quad - 2 \varepsilon^{AB} T^{NN'}{}_{BX'AW'} \nabla_{NN'} X_{CK'DZ'}. \end{aligned} \quad (\text{B.139})$$

Considerando que o espinor  $X_{CK'DZ'}$  é dado pela eq. (B.133), isto é, tem a forma  $X_{CK'DZ'} = \varepsilon_{K'Z'} \phi_C \phi_D$ , podemos obter as identidades de Ricci para o espinor  $\phi_C$  utilizando as relações

$$\nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N} \phi_C \phi_D = \phi_C \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_D + \phi_D \nabla_{(A}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C, \quad (\text{B.140})$$

$$\nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C \phi_D = \phi_C \nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_D + \phi_D \nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C. \quad (\text{B.141})$$

Primeiramente, substituindo a eq. (B.133) na eq. (B.138) e utilizando a eq. (B.140), obtemos que

$$\begin{aligned} \phi_C \nabla_{(A}{}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_D + \phi_D \nabla_{(A}{}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C &= -\frac{1}{4} \varepsilon^{W'X'} [(R^{NN'}{}_{CN' BX' AW'} \phi_N \\ &- 4T^{NN'}{}_{BX' AW'} \nabla_{NN'} \phi_C) \phi_D \\ &+ (R^{NN'}{}_{DN' BX' AW'} \phi_N \\ &- 4T^{NN'}{}_{BX' AW'} \nabla_{NN'} \phi_D) \phi_C]. \quad (\text{B.142}) \end{aligned}$$

Em seguida, contraindo a eq. (B.142) com  $\eta^C \eta^D$ , onde  $\eta^C$  é um espinor arbitrário tal que  $\eta^D \phi_D \neq 0$ , obtemos que a primeira parte das identidades de Ricci para o espinor  $\phi_C$  é dada por

$$\nabla_{(A}{}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C = -\frac{1}{4} \varepsilon^{W'X'} (R^{NN'}{}_{CN' BX' AW'} \phi_N - 4T^{NN'}{}_{BX' AW'} \nabla_{NN'} \phi_C). \quad (\text{B.143})$$

De maneira análoga, substituindo a eq. (B.133) na eq. (B.139), utilizando a eq. (B.141) e contraindo com  $\eta^D$ , obtemos que a segunda parte das identidades de Ricci é dada por

$$\nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C = \frac{1}{4} \varepsilon^{AB} (R^{NN'}{}_{CN' BX' AW'} \phi_N - 4T^{NN'}{}_{BX' AW'} \nabla_{NN'} \phi_C). \quad (\text{B.144})$$

Finalmente, substituindo nas eqs. (B.143)–(B.144) as decomposições da curvatura dadas pelas eq. (B.19) e eq. (B.43), bem como a decomposição da torção dada pela eq. (B.49), obtemos as identidades de Ricci para  $\phi_C$  em termos das partes irredutíveis da curvatura de acordo com

$$\begin{aligned} \nabla_{(A}{}^{N'} \nabla_{B)N'} \phi_C &= -\Psi_{ABCN} \phi^N - 2\varepsilon_{C(A} \phi_{B)} [\Lambda + i\Omega] \\ &+ 2[\varepsilon_{C(A} \Sigma_{B)N} \phi^N - \Sigma_{C(A} \phi_{B)}] + 2T_{NN' AB} \nabla^{NN'} \phi_C, \quad (\text{B.145}) \end{aligned}$$

$$\nabla_{N(W'} \nabla_{X')}^N \phi_C = (\Phi_{NCW'X'} + i\Theta_{NCW'X'}) \phi^N + 2\bar{T}_{NN'W'X'} \nabla^{NN'} \phi_C. \quad (\text{B.146})$$

Para obter as identidades de Ricci também em termos das partes irredutíveis da torção, basta substituir a decomposição da torção dada pela eq. (B.54) nas eqs. (B.145)–(B.146).

# Apêndice C

## Arquivos de espaços-tempos de Riemann-Cartan

Neste apêndice listamos o conteúdo de alguns arquivos de métrica-torção de soluções exatas das equações de campo das TGT, do diretório `tmetrics` do disquete em anexo. As referências estão indicadas no comando `TITLE` no conteúdo de cada arquivo abaixo.

### 1. `twave.crd`

```
% ### TWAVE.CRD
(Load TWEYLTC)
(TITLE " TWAVE.CRD
Generalized pp wave.
Adamowicz,W. Gen. Rel. Grav. 12 (1980) p. 677
Given in coordinates. Petrov type N
c.f. Hawking-Ellis p. 178 ")
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(NAMLC U V X Y I)
(VARS U V X Y)          % (u,v,x,y)
(RPL H)
(A/2)*(X^2-Y^2) + B*X*Y $
(FUNS (A U) (B U) (C U) H (D U) (F U))  % H(u,x,X)
% Plane wave metric
(ZEROINIT GDD)
```

```
(RPL GDD 0 0 GDD 0 1 GDD 2 2 GDD 3 3)2*H$1$-1$-1$
% Torsion
(ZEROINIT TORC)
(RPL TORC 1 0 2 TORC 1 0 3) D $ F $
% ### TWAVE.CRD end
```

## 2. twavez.spi

```
% ### TWAVEZ.SPI
(LOAD TWEYLTf TDYTRSP)
(TITLE " TWAVEZ.SPI
Generalized pp wave.
Adamowicz, W. Gen. Rel. Grav. 12 (1980) p. 677
Plane wave in null tetrad. Petrov type N.
c.f. Hawking-Ellis p. 178
c.f. Landau-Lifshitz paragraph 109, the problem")
(OFF ALL) (ON NOZERO COMPLX)
(NAMLC U V X Y Z D F)
(DEFNAM ZST (LC z UP !* DOWN))
(REAL U V H)
(DEFCONJL (Z ZST))
(COMPLEX D F)
(VARS U V Z ZST)          % (u, v, z=x+iy, z!*=x-iy)
(RPL H)
RE(Z^2*CONJ(D)^2) $
(FUNS (D U) H (F U))      % d(u), H(u,z,z*), f(u)
% Plane wave metric. Input frame.
(RPL IZUD)
  1 $   0 $           0 $           0 $
-H/2 $ -1 $           0 $           0 $
  0 $   0 $  2^(-1/2) $           0 $
  0 $   0 $           0 $  2^(-1/2) $
% Input torsion.
```

```
(ZEROINIT ITOR)
(RPL ITOR 1 0 2 ITOR 1 0 3) F $ CONJ(F) $
(NULLT IFRAME)
% Changing to canonical frame.
(RPL DYTR1)
CONJ D(-1/2) $      0      $
      0      $ CONJ D(1/2) $
(RPL DYTR2)
O $ I $
I $ O $
(RPL DYTR3)
I(1/2) $      0      $
      0      $ I(-1/2) $
(NULLT FRAME)
% ### TWAVEZ.SPI end
```

3. seitzb.lor

```
% ### SEITZB.LOR
(LOAD TWEYLTF)
(TITLE " SEITZB.LOR
Neutrino solution of Einstein-Cartan theory.
Bianchi V metric. Case (b): Ricci anti-symmetric.
M. Seitz, Class. Quantum Grav.,vol. 2, p.919 (1985)")
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(NAMLC K A T X Y Z I)
(VARS T X Y Z)
(FUNS (K) (A) (J)) % K and A=|B| are real; B = C+i*D is complex.
(NAMLC T X Y Z)
% Input frame.
(RPL IZUD)
E(K*T) $      0      $      0      $      0      $
      0      $ E(K*T) $      0      $      0      $
```

```

0      $      0      $ E^(K*(T+X)) $      0      $
0      $      0      $      0      $ E^(K*(T+X)) $

```

% Input torsion

(ZEROINIT ITTOR ILTOR)

(RPL IPTOR)

```

6*(A^2)*E^(-K*(3*T+2*X)) $ -6*(A^2)*E^(-K*(3*T+2*X)) $

```

```

0      $      0      $      0      $

```

(LORENTZ FRAME)

% ### SEITZB.LOR end.

#### 4. seitzb.spi

% ### SEITZB.SPI

(LOAD TWEYLTF TDYTRSP)

(TITLE " SEITZB.SPI

Neutrino solution of Einstein-Cartan theory.

Bianchi V metric. Case (b): Ricci anti-symmetric.

M. Seitz, Class. Quantum Grav., vol. 2, p.919 (1985)")

% The frame is initially fixed by TPhi.

% In this solution TPSI=0 and PSILTOR=0.

(OFF ALL) (ON NOZERO)

(NAMLC K A T X Y Z I)

(VARS T X Y Z)

(FUNS (K) (A) (J)) % K and A=|B| are real; B=C+i\*D is complex.

(NAMLC T X Y Z)

% Input frame.

(RPL IZUD)

```

E^(K*T) $      0      $      0      $      0      $

```

```

0      $ E^(K*T) $      0      $      0      $

```

```

0      $      0      $ E^(K*(T+X)) $      0      $

```

```

0      $      0      $      0      $ E^(K*(T+X)) $

```

% Input torsion

(ZEROINIT ITTOR ILTOR)

(RPL IPTOR)

$6*(A^2)*E^{(-K*(3*T+2*X))}$  \$  $-6*(A^2)*E^{(-K*(3*T+2*X))}$  \$  
0 \$ 0 \$

(LORENTZ IFRAME)

% Changing to canonical frame.

(RPL DYTRSP1)

$2^{(1/4)}*A*E^{(-3*K*T/2 - K*X)}$  \$ 0 \$  
0 \$  $2^{(-1/4)}*(1/A)*E^{(3*K*T/2 + K*X)}$  \$

(RPL DYTRSP2)

$J^{(1/4)}$  \$ 0 \$  
0 \$  $J^{(-1/4)}$  \$

% Correction - J Skea

(NEWSUL 4 JSUL) %Old:J \$ -1\$

$J^2$  \$ I \$  $J^{(-2)}$  \$ -I \$

$J^4$  \$ -1 \$  $J^{(-4)}$  \$ -1 \$

(USESUL JSUL SIG SPPTOR TPhi THETA)

(USESUL JSUL SPPTORD ASPPTOR TPhiD THETAD SIGMAD)

(USESUL JSUL DSPPTORD SCPTORD BVPTORD)

(NULLT FRAME)

% ### SEITZB.SPI end.

## 5. tgotyg.lor

% ### TGOTYG.LOR

(LOAD TWEYLTF)

(TITLE " TGOTYG.LOR

Godel-type metric with torsion.

c.f. M.J. Reboucas, J.E. Aman,

J. Math. Phys., Vol. 28, p. 888 (1987).

c.f. M.J. Reboucas and J. Tiomno,

Phys. Rev. D, vol. 28, p. 1251 (1983)

c.f. J. Duarte De Oliviera, A.F.F. Texeira, J. Tiomno,

Phys. Rev. D, vol. 34, p. 2661 (1986)."

```
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(NAMLC T X Y Z M)
(VARS T X Y Z) % (t,x,y,z)
(FUNS (M) (W) (H X) (D X) (S X))
% Input frame.
(RPL IZUD)
  1 $ 0 $ H $ 0 $
  0 $ 1 $ 0 $ 0 $
  0 $ 0 $ D $ 0 $
  0 $ 0 $ 0 $ 1 $
% Input torsion.
(ZEROINIT ITOR)
(RPL 0 1 2) S $
% ### TGOTYG.LOR end
```

6. tgotyg.spi

```
%### TGOTYG.SPI
(LOAD TWEYLTF TDYTRSP)
(TITLE " TGOTYG.SPI
Godel-type metric with torsion. Einstein-Cartan theory.
C.f. M.J. Reboucas, J.E. Aman,
  J. Math. Phys., Vol. 28, p. 888 (1987).
C.f. M.J. Reboucas and J. Tiomno,
  Phys. Rev. D, vol. 28, p. 1251 (1983)
C.f. J. Duarte De Oliviera, A.F.F. Texeira, J. Tiomno,
  Phys. Rev. D, vol. 34, p. 2661 (1986).")
(OFF ALL) (ON NOZERO COMPLX)
(NAMLC T X Y Z M J I)
(REAL T X Y Z M W H D S)
(UNITARY J)
(VARS T X Y Z) % (t,x,y,z)
(FUNS (M) (W) (H X) (D X) (S X))
```

% Godel-type metric. Input frame.

(RPL IZUD)

1 \$ 0 \$ H \$ 0 \$

0 \$ 1 \$ 0 \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ D \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ 0 \$ 1 \$

% Input torsion.

(ZEROINIT ITOR)

(RPL 0 1 2) S \$

(LORENTZ IFRAME)

% Changing to canonical frame.

(NEWSUL 4 ZUDSUL)

$J^2$  \$ I \$  $J^{-2}$  \$ -I \$

$J^4$  \$ -1 \$  $J^{-4}$  \$ -1 \$

(USESUL ZUDSUL ZUD DTRD)

(RPL DYTR1)

J \$ 0 \$

0 \$ 1/J \$

(RPL DYTR2)

$2^{-1/2}$  \$  $2^{-1/2}$  \$

$2^{-1/2}$  \$  $-2^{-1/2}$  \$

(RPL DYTR3)

J \$ 0 \$

0 \$ 1/J \$

(NULLT FRAME)

% ### TGOTYG.SPI end

## 7. tgotyh.spi

% ### TGOTYH.SPI

(LOAD TWEYLTF TDYTRSP)

(TITLE " TGOTYH.SPI

Godel-type metric with torsion. Einstein-Cartan theory.

Conditions for homogeneity in space and time:

$$S = L = \text{const}; \quad H'/D = 2*W = \text{const}; \quad D''/D = m^2 = \text{const}.$$

C.f. M.J. Reboucas, J.E. Aman,

J. Math. Phys., Vol. 28, p. 888 (1987).

C.f. M.J. Reboucas and J. Tiomno,

Phys. Rev. D, vol. 28, p.1251 (1983).

C.f. J. Duarte De Oliviera, A.F.F. Texeira, J. Tiomno,

Phys. Rev. D, vol. 34, p. 2661 (1986).")

(OFF ALL) (ON NOZERO COMPLX)

(NAMLC T X Y Z M J I)

(REAL T X Y Z M W H D L)

(UNITARY J)

(VARS T X Y Z) % (t,x,y,z)

(FUNS (M) (W) (L) (H X) (D X) )

% ET homogeneity conditions

(NEWSUL 2 ETSUL)

H&X \$ 2\*W\*D \$

D&X&X \$ M^2\*D \$ %S=L=const

(USESUL ETSUL ASD RIEF TRIEF)

% Input frame.

(RPL IZUD)

1 \$ 0 \$ H \$ 0 \$

0 \$ 1 \$ 0 \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ D \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ 0 \$ 1 \$

% Input torsion.

(ZEROINIT ITOR)

(RPL 0 1 2) L \$

(LORENTZ IFRAME)

% Changing to canonical frame.

(NEWSUL 4 ZUDSUL)

J^2 \$ I \$ J^(-2) \$ -I \$

```
J^4    $ -1 $ J^(-4) $ -1 $
(USESUL ZUDSUL ZUD DTRD)
(RPL DYTR1)
J $    0 $
0 $   1/J $
(RPL DYTR2)
2^(-1/2) $ 2^(-1/2) $
2^(-1/2) $ -2^(-1/2) $
(RPL DYTR3)
1/J $ 0 $
0 $ J $
(NULLT FRAME)
% ### TGOTYH.SPI end
```

8. tgotyh.lor

```
% ## TGOTYH.LOR
(Load TWEYLTF)
(TITLE " TGOTYH.LOR
Godel-type metric with torsion. Einstein-Cartan theory.
C.f. M.J. Reboucas, J.E. Aman,
    J. Math. Phys., Vol. 28, p. 888 (1987).
C.f. M.J. Reboucas and J. Tiomno,
    Phys. Rev. D, vol. 28, p.1251 (1983)
C.f. J. Duarte De Oliviera, A.F.F. Teixeira, J. Tiomno,
    Phys. Rev. D, vol. 34, p. 2661 (1986).")
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(VARS T R PH Z) % (t, phi, r, z).
(NAMLC T R PH Z M S RHO PRESS)
(FUNS (W) (L) (M) (D R) (H R))
%ET homogeneity conditions
(NEWSUL 2 HDRSUL)
H&R$ 2*W*D$           % W = const.
```

D&R\$ 1 - H\*M\*\*2/(2\*W)\$ % D&R&R/D = M\*\*2 = const.

% S=L= const.

(USEMSUL HDRSUL ASD TRIE RIE DIVKMSP)

% Input frame.

(RPL IZUD)

1 \$ 0 \$ H \$ 0 \$

0 \$ 1 \$ 0 \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ D \$ 0 \$

0 \$ 0 \$ 0 \$ 1 \$

% Input torsion.

(ZEROINIT ITOR)

(RPL ITOR 0 1 2) 2\*L\$

% Solution of EC field equations.

% Source: Weissenhoff fluid - perfect fluid with spin.

% Five parameters (rho, press, L, m, W) and three relations:

% choosing W and L as independent.

(RPL M RHO PRESS)

% M\*\*2 = 2W(W + L) = 2W^2(1+L/W)

SQRT(2\*W\*\*2 + 2\*W\*S)\$

% RHO = PRESS = (W + L)^2 = WG.

(W + L)\*\*2\$

(W + L)\*\*2\$

(NEWSUL 2 KTTSUL )

RHO \$ :RHO \$

PRESS \$ :PRESS \$

(USESUL KTTSUL KTT)

(NEWSUL ECSUL)

M\*\*2 \$ :M\*\*2 \$

(USESUL ECSUL ECEQS)

(ZEROINIT KT)

(RPL KT 0 0 KT 1 1 KT 2 2 KT 3 3) % Lorentz frame

RHO\$PRESS\$PRESS\$PRESS\$

```
(LORENTZ FRAME)
% ### TGOTYH.LOR
```

9. tsoubl.lor

```
% TSOUBL.LOR
(Load TWEYLTF)
(TITLE " TSOUBL.LOR
Static spin-polarized cylinder in Einstein-Cartan Theory.
Only interior solution here.
D. Tsoubelis Phys.Rev. D, vol 30, p. 1632 (1984) ")
(OFF ALL) (ON NOZERO)
(VARS T R H Z) % (t, r, theta, z)
(NAMLC T R H Z I)
(FUNS (S0))
% Input frame.
(RPL IZUD)
1 $      0      $ 0 $      0      $
0 $ E^(-(S0*R)^2/2) $ 0 $      0      $
0 $      0      $ R $      0      $
0 $      0      $ 0 $ E^(-(S0*R)^2/2) $
% Input torsion
(ZEROINIT ITOR)
(RPL ITOR 0 1 2) 2*S0*E^((S0*R)^2/2) $ % 2*S
% Energy-momentum tensor. Lorentz frame
(ZEROINIT KT)
(RPL KT 0 0 KT 1 1 KT 2 2 KT 3 3) % (Rho,P1,P2,P3)
2*S0^2*E^((S0*R)^2) $ % Rho=P
0 $ % P1=P-2*S^2
0 $ % P2=P-2*S^2
2*S0^2*E^((S0*R)^2) $ % P3=P
(LORENTZ FRAME)
% ### end TSOUBL.LOR
```

# Referências

- [1] Hehl, F. W. , von der Heyde, P. , Kerlick, G. D. & Nester, J. M. (1976), “*General relativity with spin and torsion: foundations and prospects*”, *Rev. Mod. Phys.* **48**, 393.
- [2] Baekler, P. , Hehl, F. W. & Mielke, E. W. (1986), “Nonmetricity and Torsion: Facts and Fancies in Gauge Approach to Gravity”, in *Proceedings of the 4th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, ed. by R. Ruffini. North-Holland, Amsterdam.
- [3] Obukhov, Y. N. , Ponovarev, V. N. & Zhytnikov, V. V. (1989), “*Quadratic Poincaré gauge theory of gravity: a comparison with the general relativity theory*”, *Gen. Rel. Grav.* **21**, 1107.
- [4] E. Kröner, “Continuum Theory of Defects”, *Physics of Defects*, Les Houches, Session XXXV, edited by R. Balian *et al.*. North-Holland, Amsterdam (1981).
- [5] E. Kröner, *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 1219 (1990).
- [6] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, *Ann. Phys. (NY)* **216**, 1 (1992).
- [7] F. Moraes, *Phys. Lett. A* **214**, 189 (1996).
- [8] A. P. Balachandran, V. John, A. Momen and F. Moraes, “Anomalous Defects and Their Quantized Transverse Conductivities”, hep-th/9612247, to appear in *Int. J. Theor. Phys.* (1997).
- [9] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman, *Phys. Rep.* **258**, 1 – 171 (1995).

- [10] Ehlers, J. (1981), “Christoffel’s Work on the Equivalence Problem for Riemannian Spaces and its Importance for Modern Field Theories”, in *E. B. Christoffel*, ed. by P. L. Butzer & F. Feher, Birkhäuser-Verlag, Basel.
- [11] Cartan, E. (1946), “*Leçons sur la Géométrie des Éspaces de Riemann*”, 2<sup>a</sup> edição, Gauthier-Villars, Paris. Tradução para o Inglês por J. Glazebrook, Math. Sci. Press, Brookline (1983).
- [12] Thomas, T. Y. (1934), “The Differential Invariants of Generalized Spaces”, Cambridge U. P. , Cambridge.
- [13] Schouten, J. A. (1954), “*Ricci Calculus*”, 2<sup>a</sup> edição, Springer-Verlag, Berlin.
- [14] Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1963), “*Foundations of Differential Geometry*”, Vol. 1, Interscience, New York.
- [15] Stenberg, S. (1964), “*Lectures on Differential Geometry*”, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs.
- [16] Spivak, M. (1979), “*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*”, vol. 1, Publish or Perish, Berkeley.
- [17] MacCallum, M. A. H. & Skea, J. E. F. (1994), “SHEEP: A Computer Algebra System for General Relativity”, in “*Algebraic Computing in General Relativity: Lecture Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra*”, Vol. 2, ed. by M. J. Rebouças & W. L. Roque, Oxford U. P. , Oxford.
- [18] Fonseca-Neto, J. B. , Rebouças, M. J. & Teixeira, A. F. F. (1992), “*The equivalence problem in torsion theories of gravitation*”, J. Math. Phys. **33**, 2574.
- [19] Paiva, F. M. (1993), “*Limites em Teorias de Gravitação*”, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.
- [20] Paiva, F. M. , Rebouças, M. J. & MacCallum, M. A. H. (1993), “*On limits of spacetimes – a coordinate-free approach*”, Class. Quantum Grav. **10**, 1165.
- [21] Trautman, A. (1973), “*On the Einstein-Cartan equations IV*”, Bull. Acad. Polon. Sci. , Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **31**, 345.

- [22] Fonseca-Neto, J. B. , Rebouças, M. J. & MacCallum, M. A. H. (1993), “Algebraic Computing in Torsion Theories of Gravitation”, in *Proceedings of International IMACS Symposium on Symbolic Computation*, p. 103, ed. by G. Jacob, M. F. Oussous & S. Steimberg, IMACS Press.
- [23] Åman, J. E. , Fonseca-Neto, J. B. , MacCallum, M. A. H. & Rebouças, M. J. (1995), “TCLASSI: A Computer Algebra Package for Torsion Theories of Gravitation”, in *Abstracts of Contributed papers, 14th International Conference on General Relativity and Gravitation*, p. 179, University of Firenze.
- [24] Fonseca-Neto, J. B. , Rebouças, M. J. & MacCallum, M. A. H. (1996), “Algebraic computing in torsion theories of gravitation”, *Maths. Comp. Simul.* **42**, 739.
- [25] Åman, J. E. , Fonseca-Neto, J. B. , MacCallum, M. A. H. & Rebouças, M. J. (1997), “A practical procedure for the equivalence problem in torsion theories of gravitation”, in preparation.
- [26] Karlhede, A. (1980), “A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity”, *Gen. Rel. Grav.* **12**, 693.
- [27] MacCallum, M. A. H. (1983), “Classifying Metrics in Theory and Practice”, in *Unified Field Theory in More Than 4 Dimensions, Including Exact Solutions*, ed. by V. de Sabbata & E. Schmutzer. World Scientific, Singapore.
- [28] MacCallum, M. A. H. & Åman, J. E. (1986), “Algebraically independent  $n^{\text{th}}$  derivatives of the Riemann curvature in general relativity”, *Class. Quantum Grav.* **3**, 1133.
- [29] Fonseca-Neto, J. B. , MacCallum, M. A. H. & Rebouças, M. J. (1997), “Algebraically independent derivatives of curvature and torsion Tensors in Riemann-Cartan spacetimes”, in preparation.
- [30] Marti, J. , Hearn, A. C. , Griss M. L. & Griss, C. (1979). “Standard LISP Report, SIGPLAN Notices”. ACM, New York **14**, no. 10, 48. (Distribuído com o código fonte de REDUCE).
- [31] Winston, P. H. & Horhn, B. K. P. (1981), “LISP”, Addison-Wesley, New York.

- [32] Frick, I. (1977), “*SHEEP Users Guide*”, Institute of Theoretical Physics, University of Stockholm Report 77.
- [33] Åman, J. E. (1987), “*Manual for CLASSI - Classification Programs for Geometries in General Relativity*”, third Provisional Edition, University of Stockholm Report.
- [34] Åman, J. E. , Fonseca-Neto, J. B. , MacCallum, M. A. H. & Rebouças, M. J. (1996), “*Riemann-Cartan spaces of gödel type*”, submitted.
- [35] Fonseca-Neto, J. B. & Rebouças, M. J. (1997), “*On a class of Riemann-Cartan space-times of Gödel type*, submitted.
- [36] Rebouças, M. J. & Åman, J. E. (1987), “*Computer-aided study of a class of Riemannian space-times*”, J. Math. Phys. **28**, 888.
- [37] Jogia, S. & Griffiths, J. B. (1980), “*A Newman-Penrose-type formalism for space-times with torsion*”, Gen. Rel. Grav. **12**, 597.
- [38] Penrose, R. (1983), “*Spinors and torsion in general relativity*”, Found. Phys. **13**, 325.
- [39] Penrose, R. & Rindler, W. (1984), “*Spinors and Space-Time*”, 2 vol. , Cambridge U. P. , Cambridge.
- [40] Koutras, A. & McIntosh, C. (1996), “*A metric with no symmetries or invariants*”, Class. Quantum Grav. **13**, L47.
- [41] Kramer, D. , Stephani, H. , MacCallum, M. A. H. & Herlt, E. (1980), “*Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*”, Cambridge University Press.
- [42] Hawking, S. W. & Ellis, G. F. R. (1973), “*The Large Scale Structure of Space-Time*”, Cambridge U. P. , Cambridge.
- [43] Weinberg, S. (1972), “*Gravitation and Cosmology*”, New York, John Wiley & Sons.
- [44] Karlhede, A. (1979), “*A Review of the Equivalence Problem*”, University of Stockholm Report 79-05.
- [45] Karlhede, A. & MacCallum, M. A. H. (1982), “*On determining the isometry group of a Riemannian space*”, Gen. Relat. Grav. **14**, 673.

- [46] Araújo, M. E. , Dray, T. & Skea, J. E. F. (1992), “*Finding isometry groups in theory and practice*”, Gen. Rel. Grav. **24**, 477.
- [47] Bradley, M. (1986), “*Construction and invariant classification of perfect fluids in general relativity*”, Class. Quantum Grav. **3**, 317.
- [48] Seixas, W. (1991), “*Killing vectors in conformally flat perfect fluids via invariant classification*”, Class. Quantum Grav. **9**, 225.
- [49] MacCallum, M. A. H. (1986), “Computer-aided Classification of Exact Solution in General Relativity”, in *Gravitational Collapse and Relativity*, ed. by T. Nakamura & H. Sato, World Scientific, Singapore.
- [50] Koutras, A. (1992), “*A spacetime for which the Karlhede invariant classification requires the fourth covariant derivative of the Riemann tensor*”, Class. Quantum Grav. **9**, L143.
- [51] Collins, J. M. , D’Inverno, R. A. & Vickers, J. A. (1990), “*The Karlhede classification of type D vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **7**, 2005.
- [52] Collins, J. M. (1991), “*The Karlhede classification of type N vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **8**, 1859.
- [53] Collins, J. M. & D’Inverno, R. A. (1993), “*The Karlhede classification of type-D non-vacuum spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **10**, 343.
- [54] Ramos, M. P. M. & Vickers, J. A. G. (1996), “*Invariant differential operators and the Karlhede classification of type N vacuum solutions*”, Class. Quantum Grav. **13**, 1589.
- [55] Åman, J. E. , d’Inverno, R. A. & MacCallum, M. A. H. (1984), “Quartic Equations and Algorithms for Riemann Tensor Classification”, in *Lectures Notes in Computer Science* (EUROSAM 84: Proceedings of the 1984 European Conference on Symbolic and Algebraic Manipulation) **174**, ed. by J. Fitch, Springer Verlag, Berlin & Heidelberg.
- [56] Letniowski, F. W. & McLenaghan, R. G. (1988), “*An improved algorithm for quartic equation classification and Petrov classification*”, Gen. Relat. Grav. **20**, 463.

- [57] Joly, G. C. & MacCallum, M. A. H. (1990), "*Computer-aided classification of the Ricci tensor in general relativity*", *Class. Quantum Grav.* **7**, 541.
- [58] Seixas, W. (1991), "*Extensions to the computer-aided classification of the Ricci tensor*", *Class. Quantum Grav.* **8**, 1577.
- [59] Yano, K. (1957), "*The Theory of Lie Derivatives and Its Applications*", North-Holland, Amsterdam.
- [60] Petrov, A. Z. (1969), "*Einstein Spaces*", 1<sup>a</sup> edição inglesa, Pergamon Press.
- [61] Lanczos, C. (1962) "*The splitting of the Riemann tensor*", *Rev. Mod. Phys.* **34**, 379.
- [62] Maher Jr. , W. F. & Zund, J. D. (1968), "*A spinor approach to the Lanczos spin tensor*", *Nuovo Cimento* **LXII A**, 638.
- [63] Penrose, R. (1960), "*A spinor approach to general relativity*, *Ann. Phys. NY* **10**, 171.
- [64] Adamowicz, W. (1980), "*Plane waves in gauge theories of gravitation*", *Gen. Relat. Grav.* **12**, 677.
- [65] Seitz, M. (1985), "*On solutions of the Einstein-Cartan-Dirac theory*", *Clas. Quantum Grav.* **2**, 919.
- [66] Pirani, F. A. E. (1964), "Introduction to Gravitational Radiation Theory", in *Brandeis Lectures on General Relativity*, vol. 1, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [67] Wilkinson, J. H. (1965), "*The Algebraic Eigenvalue Problem*", Clarendon Press, Oxford.
- [68] Hall, G. S. (1993), "*Physical and Geometrical Classification in General Relativity*", monografia do CBPF.
- [69] Santos, J. , Rebouças, M. J. & Teixeira, A. F. da F. (1995), "*Classification of second order symmetric tensors in 5-dimensional Kaluza-Klein-type theories*", *J. Math. Phys.* **36**, 3074.

- [70] Hall, G. S. & Negm, D. A. (1986), “*Physical structure of the energy-momentum tensor in general relativity*” *Int. J. Theor. Phys.* **25**, 405.
- [71] Rebouças, M. R. & Tiomno, J. (1983), “*Homogeneity of Riemannian space-times of Gödel type*”, *Phys. Rev. D* **28**, 1251.
- [72] Gödel, K. (1949), “*An example of a new type of cosmological solution of Einstein’s field equation of gravitation*”, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 447.
- [73] Raychaudhuri, A. K. & Thakurta, S. N. G. (1980), *Phys. Rev. D* **22**, 802.
- [74] Oliveira, J. D. Teixeira, A. F. F. Teixeira & Tiomno, J. (1983), “Gödel-type Metric in Einstein-Cartan Spaces”, in *Proceedings of the 10th International Conference on General Relativity and Gravitation*, ed. by B. Bertotti, F. de Felice and A. Pascolini. Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma.
- [75] Oliveira, J. D. Teixeira, A. F. F. Teixeira & Tiomno, J. (1986), “*Homogeneous cosmos of Weyssenhoff fluid in Einstein-Cartan spaces*”, *Phys. Rev. D* **34**, 2661.
- [76] Newman, E. & Penrose, R. (1962), “*An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients*”, *J. Math. Phys.* **3**, 566. Errata: *J. Math. Phys.* **4**, 998.
- [77] Griffiths, J. B. (1981), “*Neutrinos fields in Einstein-Cartan theory*”, *Gen. Rel. Grav.* **13**, 227.
- [78] Singh, P. & Griffiths, J. B. (1990) “*The application of spin coefficient techniques in the vacuum quadratic Poincaré gauge field theory*”, *Gen. Rel. Grav.* **22**, 269.
- [79] Singh, P. & Griffiths, J. B. (1990) “*A new class of exact solutions of the vacuum quadratic Poincaré gauge field theory*”, *Gen. Rel. Grav.* **22**, 947.
- [80] Crampin, M. & Pirani, F. A. E. (1986), “*Applied Differential Geometry*”, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge.
- [81] Daniel, M. & Viallet, C. M. (1980), “*The geometrical setting of gauge theories of the Yang-Mills type*”, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 175.

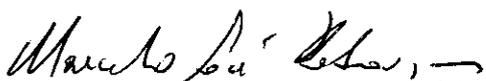
- [82] Eguchi, T. , Gilkey, P. B. & Hanson, A. J. (1980), “*Gravitation, gauge theories and differential geometry*”, Phys. Report **66**, 213.
- [83] Nakahara, M. (1990), “*Geometry, Topology and Physics*”, Adam Hilger, Bristol.
- [84] Nash, C. & Sen, S. (1983), “*Topology and geometry for physicists*”, Academic Press, London.
- [85] Choquet-Bruhat, Y. , DeWitt-Morette, C. & Dillard-Bleick, M. (1982), “*Analysis, Manifolds and Physics*”, ed. revisada, North-Holland, Amsterdam.
- [86] Hayashi, K. & Shirafuji, T. (1981), “*Gravity from Poincaré gauge theory of the fundamental particles I*”, Prog. Theor. Phys. **64**, 866.
- [87] Wallner, R. P. (1983) “*On hyperbolic  $U_4$  manifolds with local duality*”, Acta Phys. Aust. **55**, 67.
- [88] López-Bonilla, J. L. , Morales, J. , Navarrete, D. & Rosales, M. A. (1993) “*Lanczos spin tensor for empty type D spacetimes*”, Class. Quantum Grav. **10**, 2153.
- [89] Trautman, A. (1984), “*Differential Geometry for Physics*”, Stony Brook Lectures, Bibliopolis, Nápoles.
- [90] Tsoubelis, D. (1984), “*The spin-polarized cylinder in the Einstein-Cartan theory*”, Phys. Rev. D **30**, 1632.
- [91] Hehl, F. W. & McCrea, J. D. (1986), “*Bianchi identities and the automatic conservation of energy-momentum and angular momentum in general-relativistic field theories*”, Found. Phys. **16**, 267.
- [92] Greenberg, P. J. (1970) “*The general theory of space-like congruences with an application to vorticity in relativistic hydrodynamics*”, J. Math. Anal. and Applic. **30**, 128.
- [93] MacCallum, M. A. H. (1991), “Computer-aided classification of exact solutions in general relativity” in *General Relativity and Gravitational Physics (9th Italian Conference)*, p. 318, ed. by R. Cianci, R. de Ritis, M. Francaviglia, G. Marmo, C. Rubano & P. Scudellaro, World Scientific, Singapore.

- [94] MacCallum, M. A. H. (1984), “Algebraic Computer in General Relativity”, in *Classical General Relativity*, ed. by W. B. Bonnor, J. N. Islam & M. A. H. MacCallum, Cambridge U. P. , Cambridge.

**“A EQUIVALÊNCIA DE ESPAÇOS-TEMPOS NAS TEORIAS  
DA GRAVITAÇÃO COM TORÇÃO UTILIZANDO  
COMPUTAÇÃO ALGÉBRICA”**

*Joel Batista da Fonseca Neto*

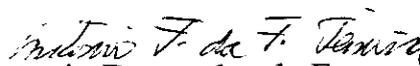
Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

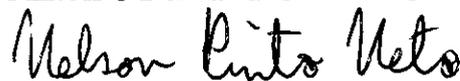
  
Marcelo José Rebouças - Presidente

  
Filipe de Moraes Paiva

  
Nivaldo Agostinho Lemos

  
James Ewan Faskin Skea

  
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira

  
Nelson Pinto Neto

  
José Martins Salim - Suplente

Rio de Janeiro, 31 de outubro de 1997