

SINGULARIDADES ISOTRÓPICAS
E A
CONJECTURA COSMOLÓGICA DE TOD

F. M. T. MONTENEGRO

TESE DE MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 1997

1997/05 M777 Tese

Autor: Montenegro, Fláv

Título: Singularidades isotróp



20358

19793

CBPF

Dedicatória

Dedico esta tese a

Denise Freire Mondaini

Guardarei em minha lembrança sua imagem de doçura, inteligência e dedicação.

Agradecimentos

Aos meus pais por tudo que fizeram por mim e pelo apoio que sempre me deram para que eu estivesse em condições de aproveitar as oportunidades de estudo que me foram oferecidas.

À minha mulher Elba por seu afeto, por toda a sua ajuda nos problemas cotidianos e por compreender as exigências impostas pela carreira que escolhi.

Ao Prof. Rubem Mondaini por sua orientação, por sua paciência, por sua disposição de trabalho e por tudo que me ensinou.

A Denise Mondaini por sua ajuda em computação algébrica e por todo o incentivo profissional que sempre me transmitiu.

Ao CBPF pela oportunidade.

Ao Programa de Engenharia de Sistemas da COPPE/UFRJ onde a parte final deste trabalho foi realizada.

Ao CNPq pela bolsa de estudos que me foi concedida.

Resumo

Neste trabalho é proposto um novo enfoque para uma prova geral de uma conjectura de evolução cosmológica formulada por K. P. Tod no contexto de *Singularidades Isotrópicas*. Inicialmente, nos dois primeiros capítulos, é apresentada uma revisão dos principais conceitos envolvidos, tais como o próprio conceito de Singularidade Isotrópica, a Entropia Gravitacional e a Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW), bem como mostrando-se a importância da Conjectura de Tod para a fundamentação de modelos com alto grau de regularidade inicial, em especial a *Cosmologia “Quiescent”*, como uma possível explicação para a estrutura observada em grandes escalas e o conteúdo de entropia do Universo. Após esta revisão é desenvolvida uma análise detalhada de alguns exemplos que esperamos ser uma boa ilustração de tais idéias.

No início do terceiro capítulo algumas tentativas de prova da Conjectura de Tod, sem sucesso ou com sucesso parcial, são também comentadas. É apresentada então uma nova proposta que, inicialmente sem a presença de um fator conforme $\Omega(t)$ característico das Singularidades Isotrópicas, utiliza intensivamente o conceito de *curvatura extrínseca* para clarificar alguns dos principais aspectos do problema. O que se espera é que este enfoque venha a ser útil na eliminação de muitas das dificuldades que devem aparecer quando for levado em conta o fator conforme. Concluímos com alguns comentários relacionados à complexidade da dinâmica após a introdução do fator conforme bem como sobre a possibilidade de algumas propostas alternativas ao paradigma inflacionário.

Summary

In this work it is proposed a new way to improve generically a cosmological evolution conjecture formulated by K. P. Tod within the context of *Isotropic Singularities*. In the first two chapters a review on the subject is presented by introducing the main concepts involved, such as the Isotropic Singularity itself, the Gravitational Entropy and the Weyl Curvature Hypothesis (WCH), as well as showing the importance of Tod's Conjecture to the foundation of initially highly regular models, in special the *Quiescent Cosmology*, as a possible explication to the observed large scale structure and the entropy content of the Universe. After this review, it is developed a detailed analysis of some examples which we hope to be a good illustration of these ideas.

At the beginning of the third chapter some unsuccessful or partially successful tentatives of improving Tod's Conjecture are also commented. It is presented then a new proposal which, although without the introduction of the characteristic conformal factor $\Omega(t)$ for Isotropic Singularities, makes intensive use of the concept of *extrinsic curvature* in order to clarify some of the main aspects of the problem. It is to be expected that the introduction of this new approach should be useful to get rid of so many difficulties which are known to appear when we take into consideration the conformal factor. We conclude with some remarks related to the complexity of the dynamics after the introduction of the conformal factor as well as on the possibility of some alternative proposals to inflationary scenarios.

Índice

Dedicatória	ii	
Agradecimentos	iii	
Resumo	iv	
Summary	v	
Lista de Ilustrações	viii	
Lista de Tabelas	x	
1 – O Conceito de Singularidades Isotrópicas e o Advento da Cosmologia		
“Quiescent”	1	
1.1 – Singularidade Isotrópica e Singularidade Conforme	1	
1.2 – Compatibilidade da Cosmologia “Quiescent” com as Idéias		
Anteriores	14	
2 – A Hipótese da Curvatura de Weyl e o Conteúdo de Entropia do Universo		24
2.1 – Hipótese da Curvatura de Weyl	24	
2.2 – Entropia Gravitacional. Propostas.	31	
2.3 – Exemplos e Contra-Exemplos	37	

3 – Conjecturas de Evolução Cosmológica	57
3.1 – Primeira Conjectura de Tod	57
3.2 – Modificação da Conjectura por Evolução do Conceito de Entropia Gravitacional	67
3.3 – Última Forma da Conjectura de Tod. Resultados Úteis para uma Prova Geral	77
3.4 – Conclusões e Sugestões para Trabalho Futuro	123
Referências	129

Lista de Ilustrações

Figura 3.1.1 – Representação das soluções existentes.	63
Figura 3.1.2 – Representação de soluções com curvatura espacial constante.	64
Figura 3.1.3 – Representação de unicidade das soluções.	66
Figura 3.3.1 – Diagrama representando o enunciado (E1).	108
Figura 3.3.2 – Decomposição do enunciado (E1) nos enunciados (E3), (E4) e (E5) em $D = 3$	110
Figura 3.3.3 – Decomposição do enunciado (E1) em $D = 3$, em termos das pre- missas P1, P2, P3, e P4, representando os enunciados (E5), (E6), (E7) e (E8).	112
Figura 3.3.4 – (Diagrama 1) Diagrama sem memória de (E1) em termos das premissas P1, P2, P3 e P4 em $D = 3$	114
Figura 3.3.5 – (Diagrama 2) Diagrama com memória de (E1) em termos das premissas P1, P2, P3 e P4 em $D = 3$	116
Figura 3.3.6 – Decomposição de (E1) em $D > 3$ em termos das premissas P1, P2 e P4.	118

Figura 3.3.7 - Decomposição do enunciado (E1) em $D > 3$, em termos das premissas P1, P2, P3, e P4, representando os enunciados (E4), (E8), (E11) e (E12).	119
Figura 3.3.8 - (Diagrama 3) Diagrama sem memória de (E1) em termos das premissas P1, P2, P3 e P4 em $D > 3$	120
Figura 3.3.9 - (Diagrama 4) Diagrama com memória de (E1) em termos das premissas P1, P2, P3 e P4 em $D > 3$	121

Lista de Tabelas

Tabela 2.3.1 – Valores de P e \dot{P} nos limites $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow \infty$ segundo intervalos de valores de α	53
---	----

1. O Conceito de Singularidade Isotrópica e o Advento da Cosmologia “Quiescent”

1.1 Singularidade Isotrópica e Singularidade Conforme

Uma das características da estrutura da Teoria de Einstein com termo cosmológico nulo ($\Lambda = 0$), quando as equações da dinâmica se escrevem:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \kappa T_{ab} , \quad (1.1.1)$$

é a previsão da existência de singularidades da variedade riemanniana subjacente nas quais observamos um mau comportamento de algum objeto geométrico. Esta característica está expressa claramente em um teorema [1] que estabelece que, uma vez que as equações de Einstein, eqs.(1.1.1), acima sejam válidas e sejam satisfeitas as condições de energia:

$$\text{Condição Fraca :} \quad T_{ab}V^aV^b \geq 0 ; \quad (1.1.2)$$

$$\text{Condição Forte : } \quad \left(T_{ab} - \frac{1}{D-1}Tg_{ab}\right)V^aV^b \geq 0 ; \quad (1.1.3)$$

$$\text{Condição Dominante : } T_{ab}V^aV^b \geq 0 \quad \epsilon \quad T_{ab}V^bT^{ac}V_c \leq 0 , \quad (1.1.4)$$

onde V^a é um campo vetorial não tipo-espaço (ou seja, $V_aV^a \leq 0$), então existirá obrigatoriamente uma singularidade no espaço-tempo.

Exemplos típicos elementares de soluções das eqs.(1.1.1) que apresentam singularidade são as soluções espacialmente homogêneas e isotrópicas, com fonte T_{ab} de fluido perfeito, ou seja,

$$T_{ab} = (p + \rho)V_aV_b + pg_{ab} , \quad (1.1.5)$$

onde “p” é a pressão isotrópica e “ ρ ” é a densidade de energia, e com elemento de linha [2]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{\left(1 + \frac{\epsilon}{4}r^2\right)^2}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2)) , \quad (1.1.6)$$

onde $a = a(t)$ e $\epsilon = +1, 0, -1$. Tais soluções, os chamados modelos Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW), são uma primeira aproximação de um modelo realístico do Universo, que apresenta-se com uma distribuição aproximadamente homogênea e isotrópica de matéria em expansão (em grandes escalas). Nestas soluções existe uma singularidade tal como mencionamos acima em $a(t_0) = 0$, o que faz com que em t_0 a curvatura do espaço

divirja e as eqs.(1.1.1) não possam mais descrever o que acontece nesse momento.

Para evitar esse problema dos modelos FLRW, pode-se tentar buscar outros modelos, que no entanto podem vir a ser menos realísticos (o Universo de Einstein, o Universo de de Sitter e o Universo de Gödel são exemplos bem conhecidos de modelos menos realísticos mas que não apresentam singularidade [3]),ou mesmo desprezar as eqs.(1.1.1) para o Universo primitivo, usando-as apenas a partir de um certo $t_1 > t_0$.

Essas são maneiras de contornar, mas não de resolver, o problema da aplicabilidade das equações de Einstein em $t = t_0$. Dessa forma não podemos, por exemplo, estudar um problema de valor inicial para os modelos FLRW (e mesmo outros modelos não-FLRW mas com singularidade) no qual a superfície de dados iniciais seja uma hipersuperfície tipo espaço suave correspondente a $t = t_0$ em uma foliação do espaço-tempo. Tal superfície seria na verdade apenas um ponto singular onde a continuidade do espaço-tempo é quebrada, devido à singularidade nas soluções das eqs.(1.1.1).¹

O problema entretanto pode ser encarado, de forma inversa, não como um limite intransponível das equações de Einstein, mas sim como um problema da variedade (no caso, o espaço-tempo físico, isto é, o espaço-tempo no qual ocorrem todos os fenômenos físicos do Universo real) sobre a qual estão sendo aplicadas. Este é um ponto fundamental no conceito do que chamaremos “singularidade isotrópica”. A idéia é que podemos evitar a singularidade nas eqs.(1.1.1) ao relacionar conformemente a métrica g_{ab} da variedade M do espaço-tempo físico, que é a variedade sobre a qual se aplicam tais equações, à métrica \hat{g}_{ab} de uma variedade não física \hat{M} na qual existe uma hipersuperfície tipo-espaço

¹Certamente há problemas quânticos em altas concentrações de matéria que podem até invalidar as eqs.(1.1.1) dentro de um intervalo de tempo t tal que $t_0 < t < t_1$, mas estamos preocupados aqui apenas com a teoria de gravitação clássica de Einstein.

Σ_0 suave que corresponde à singularidade no espaço-tempo em $t = t_0$ e onde poderão ser especificados os dados iniciais. Assim, faremos

$$g_{ab} = \Omega^2 \hat{g}_{ab} . \quad (1.1.7)$$

Se o fator conforme Ω for zero sobre a hipersuperfície Σ_0 de \hat{M} , ou seja, $\Omega(t = t_0) = 0$ dizemos que em $t = t_0$ temos uma singularidade isotrópica em M .

Vemos então que a singularidade em g_{ab} será devida totalmente à nulidade do fator conforme. Não há singularidade em \hat{g}_{ab} para $t \geq t_0$, mas devido à singularidade de g_{ab} em $t = t_0$ a eq.(1.1.7) só será válida para $t > t_0$, quando teremos $\Omega > 0$. Note-se que as eqs.(1.1.1), que só podem ser aplicadas diretamente sobre M , continuam resultando em uma curvatura divergente em $t = t_0$ e portanto a singularidade é mantida. Entretanto, como \hat{M} é suave em $t = t_0$, podemos agora estudar o comportamento das grandezas não-físicas de \hat{M} desde a singularidade isotrópica (correspondente a Σ_0 em \hat{M}) para então relacioná-las através da eq.(1.1.7) para $t > t_0$ com as grandezas físicas (definidas em M). Já podemos então tentar, por exemplo, estabelecer um problema de valor inicial com a superfície de dados iniciais sendo a hipersuperfície suave Σ_0 de \hat{M} . Para tanto devemos verificar o comportamento de grandezas de \hat{M} , tais como o “shear” $\hat{\sigma}_{ab}$ ou a parte elétrica \hat{E}_{ab} do tensor de Weyl, partindo de Σ_0 (para $t = t_0$) e passando para as grandezas físicas correspondentes, σ_{ab} e E_{ab} de M (tratadas intensivamente no cap.3), através de relações obtidas a partir da eq.(1.1.7).² No capítulo III apresentaremos um

²Convencionaremos representar com o sinal “ $\hat{\quad}$ ” às grandezas definidas na variedade do espaço-tempo não-físico \hat{M} , ao passo que as grandezas sem este sinal serão referentes, em geral, à variedade do espaço-tempo físico M .

problema de valor inicial proposto por Tod [4, 5] para cosmologias de fluido perfeito, com equação barotrópica de estado ($p = p(\rho)$), e contendo uma singularidade isotrópica, no qual é utilizado esse procedimento.

Para o tratamento matemático das singularidades isotrópicas é interessante defini-las com maior rigor, mas antes vamos procurar clarificar este conceito através de uma visão pictórica, bem como acrescentar algumas informações sobre a história das singularidades isotrópicas e o porquê do recente impulso no estudo do assunto.

Intuitivamente, o conceito de singularidade isotrópica pode ser apresentado da seguinte maneira [6] : Vamos considerar uma pequena “gota” esférica e comóvel de um fluido perfeito que preenche um universo espacialmente homogêneo e com uma singularidade inicial. Vamos agora imaginar que o tempo está recuando de volta para a singularidade inicial, de forma que a gota de fluido e tudo o mais no universo em questão esteja se concentrando, com correspondente aumento de densidade de energia, à medida em que se aproxima o momento do “big-bang”.

Para observar melhor o que acontece com o formato da gota de fluido independentemente da alta concentração de seu volume nas vizinhanças da singularidade (ou seja, próximo ao momento do big-bang. Singularidades cosmológicas são globais, isto é, não possuem uma localização definida no espaço já que contêm, em si mesmas, todo o universo em seu momento inicial — ou final no caso das singularidades que ocorrem no chamado “big-crunch”, quando o universo, como um todo, sofre colapso gravitacional — ver [7]) pode-se fazer uma mudança de escala de tal modo que o volume da gota de fluido permaneça constante no tempo. Apesar disso, seu formato pode variar bastante e sofrer distorções arbitrariamente grandes à medida em que se aproxima da singularidade,

podendo por exemplo ir colapsando em duas direções e se alongando infinitamente na terceira (colapso em forma de “charuto”), ou ir colapsando em uma direção e se alongando infinitamente nas outras duas (colapso em forma de “panqueca”), ou mesmo oscilar caoticamente entre esses dois formatos em direção à singularidade. Entretanto a gota de fluido pode também sofrer apenas variações finitas do seu formato. Neste caso, se a taxa de colapso da gota de fluido é, à medida em que se aproxima a singularidade, independente da direção, dizemos que a singularidade é *isotrópica*.

O quadro acima pode também ser visualizado a partir da análise do comportamento dos tensores de curvatura de Ricci R_{ab} e de Weyl W_{abcd} . A curvatura do espaço-tempo é dada pelo tensor de Riemann R_{abcd} . Em 2 dimensões o tensor de Riemann é dado intrinsecamente pelo escalar de curvatura R . Em 3 dimensões, isto não é suficiente, necessitando-se também do tensor de Ricci. Em 4 (ou mais) dimensões é necessário introduzir o tensor de Weyl para descrever completamente a curvatura. Neste caso o tensor de Riemann pode ser expresso, com índices mistos, de acordo com a seguinte decomposição [8, 9]

$$R^{ab}{}_{cd} = 2\delta^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} - \frac{R}{3}\delta^{[a}{}_{[c}\delta^{b]}{}_{d]} + W^{ab}{}_{cd} , \quad (1.1.8)$$

$$a, b, c, d \in \{0, 1, 2, 3\} ,$$

onde R , o escalar de curvatura, é dado por

$$R = g^{ef} R_{ef} \ , \quad (1.1.9)$$

$W^{ab}_{\ \ cd}$ é a parte sem traço de $R^{ab}_{\ \ cd}$, ou seja,

$$W^{ab}_{\ \ ad} = 0 \ , \quad (1.1.10)$$

e onde os colchetes indicam anti-simetrização de índices:

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba}) \ . \quad (1.1.11)$$

A singularidade na visão pictórica que demos acima deveu-se à densidade de energia, que cresceu ao infinito. Nas equações de Einstein com fluido perfeito, eqs.(1.1.1) e (1.1.5), quando a densidade de energia ρ diverge ($\rho \rightarrow \infty$) a curvatura de Ricci R_{ab} também vai divergir. Portanto a singularidade do espaço-tempo refere-se no caso à divergência da curvatura de Ricci. Quando fazemos a mudança de escala, de forma a manter o volume da gota de fluido constante mesmo na singularidade, estamos na realidade como que “removendo” a singularidade ao manter a curvatura R_{ab} finita. Como vimos, mesmo fazendo a mudança de escala ainda era possível haver distorções infinitamente grandes no formato da gota de fluido. Tais distorções infinitas correspondem justamente a singularidades do tensor de Weyl W_{abcd} (na verdade podemos considerar que alterações no formato da gota de fluido, mesmo finitas, referem-se ao tensor de Weyl enquanto que variações do volume relacionam-se ao tensor de Ricci [10]). Uma vez que não haja distorções infinitas,

isto é, uma vez que o tensor de Weyl seja finito e a taxa de colapso independa da direção, teremos uma singularidade isotrópica. Deste modo podemos dizer que uma singularidade isotrópica é uma singularidade na qual a curvatura de Ricci R_{ab} diverge, mas quando se “remove” esta divergência através de uma mudança de escala teremos uma curvatura de Weyl finita. No caso particular das cosmologias FLRW, a singularidade inicial é isotrópica, pois tais modelos são conformemente planos, o que significa que o tensor de Weyl é nulo, com a singularidade inicial devendo-se totalmente à divergência para infinito de R_{ab} .

O conceito de singularidade isotrópica vem sendo tratado já há algum tempo na literatura, embora com outras denominações e sem uma definição formal. Historicamente podemos considerar que tal conceito se originou como um caso especial na análise geral de singularidades feita por Lifshitz e Khalatnikov [11] (ver também [12]). Eles consideraram universos preenchidos com radiação ($p = \frac{1}{3}\rho$) com uma singularidade inicial em $t = t_0$ e com métrica espacial tratada como uma expansão em série de potências da forma

$$h_{\alpha\beta} = ta_{\alpha\beta} + t^2b_{\alpha\beta} + t^3c_{\alpha\beta} + \dots \quad (1.1.12)$$

onde $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, \dots$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) são independentes de t . Notaram então que o termo líder $a_{\alpha\beta}$ era livremente arbitrado e chamaram este tipo de singularidade de “quasi-isotrópica”. Como podemos ver, a singularidade na 3-métrica $h_{\alpha\beta}$ deve-se totalmente à anulação de t , tal como as singularidades isotrópicas devem-se à anulação, em $t = t_0$, do fator conforme Ω , que relaciona as métricas do espaço-tempo físico e do não-físico através da eq.(1.1.7). Além disso a taxa de colapso na eq.(1.1.12) é a mesma em todas as direções, como nas singularidades isotrópicas.

Esse tipo de singularidade é encontrado também em Eardley et al. [13] e Liang [14], como um caso especial de uma classe de singularidades chamadas “dominadas por velocidade”, em soluções das equações de Einstein, com fluido perfeito e equação barotrópica de estado, onde a 3-métrica e a curvatura extrínseca iniciais (ver capítulo III desta monografia para uma definição de curvatura extrínseca) eram os dados arbitrários. Chamaram ao caso particular no qual a 3-métrica na singularidade era independente do tempo de singularidade “tipo Friedmann”.

Um grande impulso no estudo das singularidades isotrópicas foi dado pela “Hipótese da Curvatura de Weyl” (“*Weyl Curvature Hypothesis*”) proposta por Penrose [15]. Baseando-se na necessidade de algo como um vínculo de baixa entropia na singularidade inicial, para que possa haver crescimento de entropia em atenção à Segunda Lei da Termodinâmica, Penrose argumentou que a geometria inicial do universo deveria ser altamente regular, o que o levou à hipótese de que a curvatura de Weyl W_{abcd} deveria ser nula na singularidade inicial. Esta hipótese é bastante útil no contexto de singularidades isotrópicas. Sua utilização se dá de diversas formas. Primeiramente tal hipótese nos conduz a selecionar cosmologias singulares nas quais o tensor de Weyl é finito, ao menos durante um certo período de tempo após o “big-bang”, com a singularidade inicial sendo portanto devida totalmente à divergência para infinito da curvatura de Ricci. Isto significa, como sabemos, que podemos fazer uma mudança de escala (uma transformação conforme) para “remover” a singularidade, com o tensor de Weyl permanecendo finito. Este quadro leva justamente ao conceito de singularidade isotrópica, de forma que sua utilização parece ser bastante apropriada.

Outra utilidade importante da hipótese de Penrose, em seguida ao que foi comen-

tado, é que o tensor de Weyl na forma W^a_{bcd} é invariante por transformação conforme:

$$W^a_{bcd} = \hat{W}^a_{bcd} . \quad (1.1.13)$$

Dessa forma, quando se afirma que o tensor W^a_{bcd} é nulo na singularidade inicial está se afirmando que também o tensor \hat{W}^a_{bcd} é nulo na singularidade. Portanto, temos uma condição inicial imposta sobre a variedade M do espaço-tempo físico que passa integralmente para a variedade \hat{M} do espaço-tempo não-físico na **singularidade inicial**, de forma que pode ser aplicada diretamente sobre a hipersuperfície inicial Σ_0 de \hat{M} , ou seja, sobre a singularidade isotrópica.

Um terceiro aspecto da referida hipótese é que, como o tensor de Weyl está relacionado a variações de formato de um elemento de fluido (a “gota de fluido” de que falávamos) causadas pela distribuição irregular do fluido que preenche o Universo, gerando um campo gravitacional irregular, a nulidade inicial do tensor de Weyl induz a um universo totalmente regular inicialmente. Um tipo de modelo que pode atender a esta característica é a “Quiescent Cosmology”, uma cosmologia singular com alto grau de isotropia inicial proposta por Barrow em um artigo de 1978 [16]. Nesse artigo já aparece o termo “singularidade isotrópica”.

Assim, uma forte motivação para o estudo das singularidades isotrópicas é que, a partir deste conceito, pode-se construir um arcabouço matemático que, espera-se, venha a permitir o estudo de um problema de valor inicial, baseado na Hipótese da Curvatura de Weyl, que possibilite a determinação da evolução de cosmologias singulares (em especial a “Quiescent Cosmology”) partindo-se da própria singularidade.

Desde então vários autores vêm publicando trabalhos, que em linhas gerais serão comentados no decorrer deste nosso trabalho, relacionados diretamente com esses assuntos e baseados no conceito de singularidades isotrópicas. Atualmente um importante problema a ser resolvido é o de uma conjectura formulada por Tod [17]. Ele observou que a Hipótese da Curvatura de Weyl, no contexto de singularidades isotrópicas, pode ser restritiva o bastante para determinar que qualquer cosmologia de fluido perfeito, com equação barotrópica de estado, e possuindo uma singularidade isotrópica será necessariamente uma cosmologia FLRW. Tal suposição ficou conhecida como “conjectura de Tod” e será tratada extensivamente no capítulo III desta monografia. A compatibilidade entre o conceito de singularidades isotrópicas e a “Quiescent Cosmology” será comentada na seção (1.2), enquanto que um tratamento mais detalhado sobre a Hipótese da Curvatura de Weyl será realizado no próximo capítulo.

Apresentaremos a seguir duas propostas de definição matemática mais elaboradas do conceito de singularidade isotrópica. Uma deve-se a Goode e Wainwright [18] e outra a Newman [19], esta última introduzindo a expressão “singularidade conforme”.

Definição de Goode e Wainwright

As abordagens de Lifshitz-Khalatnikov [11] e de Eardley et al. [13] e Liang [14], que comentamos acima, ao conceito de singularidade isotrópica restringiam-se a fluidos perfeitos com equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$ e eram dependentes de coordenadas. Goode e Wainwright [18] procuraram então dar uma definição geométrica deste conceito

de forma a que fosse independente de coordenadas e das equações de Einstein, sendo portanto independente também da fonte do campo gravitacional. A partir da eq.(1.1.7), deram a seguinte definição:

*Um espaço-tempo (M, g) é dito admitir uma **singularidade isotrópica** se existe um espaço-tempo (\hat{M}, \hat{g}) , uma função suave T definida sobre \hat{M} (isto é, uma função que cresce ao longo de cada curva não tipo-espaço direcionada para o futuro) e um fator conforme $\Omega(T)$ que satisfaz:*

(1) M é a sub-variedade aberta $T > 0$;

(2) $g = \Omega^2(T)\hat{g}$ sobre M , com \hat{g} regular (no mínimo C^3 e não-degenerado) sobre uma vizinhança aberta de $T = 0$;

(3) $\Omega(0) = 0$, Ω é contínuo em $T = 0$ e no mínimo C^3 e positivo sobre um intervalo $(0, b]$, $b > 0$;

(4a) $\lim_{T \rightarrow 0^+} (\frac{\Omega'}{\Omega}) = \infty$;

(4b) $\lim_{T \rightarrow 0^+} L(T) = l < 1$, onde $L = (\Omega''/\Omega)(\Omega/\Omega')^2$ e o símbolo $(')$ denota diferenciação com respeito a T .

Na definição acima T é um parâmetro de foliação de \hat{M} (e portanto de M), gerando uma família de hipersuperfícies tipo-espaço. A hipersuperfície de \hat{M} na qual $T = 0$ é justamente a singularidade isotrópica.

Posteriormente, seguindo sugestão de Scott [20], a condição (4a) foi retirada, pois segue das outras.

Definição de Newman

A proposta de Newman [19] de definição matemática do conceito de singularidades isotrópicas é buscar uma analogia com o conceito de *infinito conforme*, como definido por Penrose [21]. Para evitar o que considera um termo (“isotropia”) que pode levar a confusões (pois a singularidade é chamada isotrópica não porque a 3-métrica da hipersuperfície conforme inicial seja isotrópica, o que aliás nem sempre acontece, mas porque a existência da relação conforme considerada aqui é suficiente para indicar que o campo de autovetores tipo-tempo do tensor de Ricci transformado deve encontrar a hipersuperfície inicial ortogonalmente, ou seja, com componente nula em qualquer direção paralela à hipersuperfície em cada ponto) e também para evidenciar a analogia com o infinito conforme, Newman introduz a denominação “singularidade conforme” ao invés do termo “singularidade isotrópica”. O conceito de singularidade conforme é então definido também utilizando-se a eq.(1.1.7):

Seja (M, g) um espaço-tempo. Suponha que existe uma variedade \hat{M} com fronteira $(\partial\hat{M})$ tal que

(i) $\hat{M} = M \cup \partial\hat{M}$ e para todo $x \in \partial\hat{M}$ existe um triplete (\hat{U}, \hat{g}, t) , com \hat{U} uma vizinhança aberta de x em \hat{M} , \hat{g} uma métrica de assinatura Lorentziana sobre \hat{U} , e t uma função de valor real sobre \hat{U} tal que

$$(ii) \hat{U} - \partial\hat{U} = \hat{U} \cap M \text{ e } \partial\hat{U} = \hat{U} \cap \partial\hat{M};$$

$$(iii) g = t^2 \hat{g} \text{ sobre } \hat{U} - \partial\hat{U};$$

$$(iv) t|_{\partial\hat{U}} = 0, t|_{(\hat{U}-\partial\hat{U})} > 0 \text{ e } \nabla t \neq 0 \text{ sobre } \hat{U}$$

*então $\partial\hat{M}$ é uma **singularidade conforme** de (M, g) .*

Nessa definição o tripleto (\hat{U}, \hat{g}, t) é chamado uma “carta conforme”, onde t é o fator conforme.

Comparando-se as duas definições acima vemos que há diferenças nas propriedades relacionadas à suavidade do fator conforme pois, utilizando a notação de Goode e Wainwright, nas singularidades conformes além de Ω ser C^∞ sobre \hat{M} temos também que $\nabla\Omega \neq 0$ em $\Omega = 0$. Esta diferença faz com que a definição de singularidade conforme conduza a uma classe de singularidades mais restrita, porém pode simplificar o tratamento matemático.

No capítulo III apresentaremos exemplos de aplicação dessas duas definições em soluções das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito e equação barotrópica de estado.

1.2 Compatibilidade da Cosmologia “Quiescent” com as Idéias Anteriores

Do que os dados observacionais nos sugerem, o Universo se apresenta com características marcadamente diferentes de acordo com a escala em que é observado. Em escalas pequenas em relação ao Universo conhecido verifica-se a existência de grandes aglomerados de matéria, formando estruturas tais como estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias.

Nessas escalas o Universo parece ser altamente não homogêneo, havendo grandes variações da densidade de energia entre as diferentes (pequenas) regiões do espaço. O quadro, entretanto, é totalmente diverso em grandes escalas. O Universo observado passa a ter um aspecto notadamente homogêneo, com a densidade de energia variando muito pouco de uma região para outra (as regiões consideradas agora são bem maiores que as do caso anterior). Além disso, parece não importar em qual direção se está observando, pois o aspecto será o mesmo, sugerindo que o Universo real é também caracteristicamente isotrópico (mais que isso: expande-se isotropicamente).

Essa diferença ou contradição entre a estrutura em pequena e em grande escala constitui-se em uma grande questão cosmológica que até hoje não foi satisfatoriamente respondida. As soluções espacialmente homogêneas e isotrópicas exatas das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, os modelos Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) que citamos na seção (1.1), são bastante adequadas no que se refere à estrutura em grande escala, mas por si só não parecem capazes de resolver o problema do aparecimento de estruturas em pequenas escalas, pois tais soluções são também **localmente** homogêneas e isotrópicas.

Pode-se pensar em diversas maneiras de se obter um modelo mais condizente com os dados observacionais, não só nas grandes mas também nas pequenas escalas. Pode-se, por exemplo, procurar uma solução aproximada, um modelo FLRW perturbado, com uma geometria apenas aproximadamente homogênea e isotrópica ou talvez com uma fonte de fluido um pouco mais genérico, ou mesmo acrescentar considerações tais como os efeitos advindos de mecanismos quânticos nos estágios primitivos do Universo. Em todo caso, porém, deve-se procurar um modelo não só que explique a presente distribuição de

matéria, mas também que possua uma evolução que não esteja em desacordo com dados observados atualmente, como a entropia de 10^8 fótons por bárion [15, 22] . Além disso, no que se refere às condições iniciais, se forem necessárias, tais condições devem ser as mais razoáveis e de maior probabilidade possível, de forma que o atual estado de regularidade do Universo, que é um estado de muito pouca probabilidade, não seja considerado apenas uma “grande coincidência”. Este último aspecto, referente às condições iniciais, tem sido bastante considerado nas propostas de modelos cosmológicos mais realísticos do Universo e vamos desenvolvê-lo um pouco mais.

Para ter uma idéia do quanto o presente estado altamente isotrópico é especial, vamos considerar todos os estados de distribuição de matéria nos quais o Universo poderia, a priori, se encontrar. O número de tais estados é infinito, cada um representando um conjunto de valores fixos de dois parâmetros contínuos relacionados à posição e velocidade de cada elemento de matéria (os elementos do fluido que preenche o Universo, os quais podem ser considerados cada um como sendo um aglomerado de galáxias). Por simplicidade, vamos considerar inicialmente apenas o grau de simetria nas posições instantâneas de todos os elementos, desprezando completamente sua velocidade e, portanto, quaisquer considerações sobre dados de isotropia na expansão ou presença de vorticidade, aceleração ou “shear” no fluxo do fluido. Os estados serão considerados diferentes de acordo apenas com seu grau de homogeneidade e isotropia. Assim, a distribuição do tipo FLRW exato corresponde a apenas um destes estados, exatamente aquele com isotropia e homogeneidade máxima, sendo um conjunto de medida zero em relação ao conjunto dos estados possíveis. Mesmo para uma distribuição do tipo FLRW “perturbado”, haverá apenas um intervalo muito pequeno de estados correspondentes, se comparado com intervalos de es-

tados relacionados a distribuições mais genéricas. Para se perceber um pouco melhor em que medida isto ocorre, vamos separar as distribuições segundo sua isotropia em relação a um dado número de eixos. É fácil perceber que há um número muito maior de estados sem qualquer isotropia do que estados com isotropia em ao menos uma direção, onde estamos considerando isotrópicos também os estados que apresentam uma ligeira anisotropia, da ordem por exemplo de 10^{-4} , que é o limite máximo da anisotropia atualmente registrada da radiação de fundo [23], na direção considerada. Assim, a probabilidade de se encontrar um estado isotrópico em relação ao menos a uma direção é muito pequena (grosso modo, da ordem de 10^{-4}). Seguindo em frente temos que a chance de encontrar um estado com isotropia relacionada a duas direções é muito menor ainda, sendo mínima a chance de se obter um estado com isotropia em relação às três direções. Considerando-se agora a isotropia da expansão e os pequenos valores de “shear” e vorticidade [24], reduz-se ainda mais a probabilidade de se obter um estado próximo ao estado do Universo presente.

É nesse sentido que a grande regularidade observada no universo pode ser considerada tratar-se de um caso excepcional. Aliás, ao invés do problema de formação de estrutura, talvez a questão a ser colocada seja “O que levou o Universo atual a apresentar um grau tão alto de isotropia?”. Esta pergunta nos conduz naturalmente à análise de como se processou a evolução do universo desde o seu início. A questão poderia ser reformulada para: “Qual era o estado inicial do Universo e em que medida tal estado interferiu ou determinou sua evolução para a grande regularidade observada atualmente?”.

Uma possível resposta poderia vir das considerações feitas por Charles Misner dentro de seu programa de “Cosmologia Caótica” [25]. A proposta central das cosmologias caóticas é que o caráter isotrópico atual do Universo deveria independe de seu estado

inicial, que poderia ser arbitrariamente caótico. A isotropização se daria através de mecanismos dispersores que com o passar do tempo suavizariam as irregularidades iniciais, que poderiam ser muito grandes.

A ação desses mecanismos dispersores talvez seja melhor entendida do ponto de vista da criação de entropia no sentido de perda de informação. Um outro exemplo pictórico pode facilitar a compreensão [26]: Suponha que haja uma pessoa no alto de um penhasco atirando pedras na água do mar. As pedras poderiam ser atiradas para baixo com velocidades iniciais arbitrariamente diferentes ou serem simplesmente largadas do repouso. Em um caso ideal, sem o atrito do ar, a aceleração da gravidade aumentaria uniformemente a velocidade, de forma que se houvesse um observador medindo a velocidade com que as pedras entram na água, bastaria que fosse conhecida a altura do penhasco para se obter, através de um cálculo simples, a velocidade inicial com que a pedra foi lançada. Pode-se interpretar que neste caso, sem atrito do ar, houve a preservação (ou conservação) da informação de qual foi a velocidade inicial da pedra. O quadro entretanto é diferente quando se considera o atrito do ar. A gravidade agora terá a oposição da força deste atrito, que será tanto maior quanto maior for a velocidade da pedra, de tal maneira que haverá uma tendência a se estabilizar o movimento da pedra levando-a a uma “velocidade terminal” constante e igual para todas as pedras (consideradas aqui como sendo todas de mesmo peso e tamanho). Se o penhasco for suficientemente alto, todas as pedras terão tempo suficiente para alcançar esta velocidade terminal, de forma que ao chegarem ao nível do mar terão todas a mesma velocidade. Assim não será mais possível saber a velocidade inicial de cada uma. Esta informação terá sido perdida no processo de dispersão realizado pelo atrito com o ar.

A idéia básica das cosmologias caóticas pode ser entendida em analogia com o quadro descrito acima. Como vimos o Universo poderia, a priori, iniciar-se em qualquer um dos infinitos estados de distribuição de seu conteúdo de matéria, mas com maior probabilidade de ser um estado bastante irregular. No contexto das cosmologias caóticas, o que se espera é que as irregularidades iniciais suavizem-se devido a processos dissipativos, que funcionariam de maneira análoga à resistência do ar na experiência acima, fazendo com que a informação de qual era o estado inicial de Universo fosse perdida e conduzindo-o a tornar-se, depois de certo tempo, homogêneo e isotrópico.

Foram propostos mecanismos de dissipação tais como viscosidade induzida por neutrinos [27] e criação de pares de partículas induzida por curvatura [28]. Em pouco tempo, porém, o programa das cosmologias caóticas tornou-se insustentável ao menos na sua forma “pura” como foi inicialmente proposto por Misner, pois mostrou-se [29] que processos viscosos podem suavizar apenas anisotropias que não sejam muito grandes em intensidade e extensão espacial. Com isso, verifica-se que nem todos os “a priori” possíveis estados iniciais do Universo conduzem ao estado isotrópico atual. Portanto o estado presente poderia não ser necessariamente independente do estado inicial, ou seja, das condições iniciais na evolução do Universo.

Isso por si só não implicou na inviabilidade do programa de cosmologias caóticas, pois ainda assim era esperado que o conjunto de condições iniciais que levavam a universos anisotrópicos ou com isotropia não tão alta fosse um conjunto de medida zero, de forma que qualquer perturbação destes estados iniciais levaria novamente a um universo altamente isotrópico. Contudo, este não foi o caso. Estudos feitos por Collins e Hawking [30] (ver também Barrow e Matzner [31]) mostraram que as instabilidades gravitacionais fariam

com que quaisquer anisotropias iniciais crescessem. Desta forma, não apenas o conjunto de estados iniciais que conduzem a universos anisotrópicos no presente não é um conjunto de medida zero como também predominam sobre aqueles estados iniciais que geram universos tipo FLRW perturbado, os quais pertencem a um conjunto bem mais restrito. Portanto o programa de cosmologias caóticas parece ter se tornado insustentável como um todo, e não apenas na forma “pura” em que fora proposto inicialmente. Assim, permanece o problema de por que o Universo apresenta tamanha isotropia espacial em grande escala.

Outra possível resposta para essa questão pode ser fornecida pelos famosos modelos chamados inflacionários. Tais modelos têm estado em evidência desde o início da década passada em várias versões, tais como a “Old Inflation” [32], “New Inflation” [33, 34], “Chaotic Inflation” [35] e “Extended Inflation” [36], e baseiam-se na aplicação das “Grand Unified Theories” (GUT), da física de partículas a cosmologias FLRW. Foram e ainda são espécies de paradigmas para físicos de partículas desconfiados dos cosmólogos e seu estudo predileto de geometria. A proposta é que o Universo como um todo é bastante irregular, mas quando se iniciou sofreu, em seus primeiros momentos, uma fase de expansão exponencial que inflacionou o horizonte de partícula da região do Universo que podemos observar, tornando-a uma região isotrópica em um universo potencialmente anisotrópico. As cosmologias inflacionárias causaram muito impacto quando foram propostas, pois resolviam alguns outros problemas dos modelos FLRW padrão, além de possibilitarem a resolução do problema de formação de estrutura destes modelos. Contudo têm havido dificuldades não só na implementação das cosmologias inflacionárias (por exemplo, o problema do monopolo magnético), como também estas têm sofrido muitas críticas [10, 37, 38, 39] em relação ao caráter algo especulativo dos mecanismos sugeridos de in-

flação e às restrições sobre as condições iniciais necessárias para se obter um universo com a estrutura em grande escala atual, entre outras coisas. A proposta inflacionária portanto não consegue explicar satisfatoriamente, ao menos por enquanto, essa contradição entre a estrutura em pequena e em grande escala do Universo, e a discussão sobre os modelos inflacionários permanece em aberto. Ou quem sabe deve ser fechada para sempre?

Há, entretanto, uma outra visão do problema que pode ser promissora. É a chamada “Cosmologia Quiescent”. proposta por John Barrow em um artigo já referido acima [16], onde são criticadas as cosmologias caóticas no que se refere à relação entre a “pouca” quantidade de entropia e a grande regularidade presentes no Universo atual. Sua argumentação é de que a entropia finita e altamente isotrópica do Universo atual (medida a partir da radiação de fundo) em conjunto com a Segunda Lei da Termodinâmica, a qual estabelece que a entropia total do Universo deve sempre aumentar com o tempo, permitiria apenas uma quantidade finita de dissipação de energia no passado, de forma que apenas um grau finito de irregularidade inicial é compatível com a entropia de 10^8 fótons por bárion da radiação de fundo observada. A partir daí sugere que o Universo iniciou-se com um caráter marcadamente isotrópico, do tipo das cosmologias FLRW, chamando a uma tal cosmologia de “Quiescent Cosmology”. Ao contrário das cosmologias caóticas, que afirmam que a isotropia presente ocorre devido a que o Universo se encontra em um estágio já avançado de seu desenvolvimento, a Cosmologia “Quiescent” atribui a grande regularidade atual do Universo ao pouco tempo que teve para evoluir e aumentar seu grau de anisotropia, significando que se encontra, de certa forma, ainda em um estágio primitivo de sua evolução. Ou seja, o Universo tal como o conhecemos é ainda muito “novo”.

Há em princípio dois problemas na proposta da Cosmologia “Quiescent”. O primeiro é explicar **por que** o estado inicial do Universo era tão homogêneo e isotrópico, já que, a priori, tal estado como vimos é de muito baixa probabilidade. A argumentação de Barrow é que este estado altamente improvável deveria ser o estado termodinamicamente preferido se a equação de estado da matéria interagindo fortemente fosse do tipo “stiff” (matéria “dura”), $p = \rho$, em alta densidade, sendo esta a única equação de estado compatível com uma “singularidade isotrópica” completamente estável. Existe entretanto uma outra possível resposta, que é mais abrangente que a proposta por Barrow, pois não faz a princípio qualquer restrição sobre a equação de estado. Tal possível resposta é fornecida pela já mencionada, na seção (1.1), “Hipótese da Curvatura de Weyl”, formulada por Penrose, a qual vincula o tensor de Weyl W_{abcd} a ser nulo na singularidade inicial. Tal imposição, no contexto de universos preenchidos com fluido perfeito, conduz naturalmente a modelos espacialmente isotrópicos, ou seja, os modelos FLRW, nos quais o tensor de Weyl é identicamente nulo. Assim, a hipótese de Penrose, que será melhor desenvolvida no próximo capítulo, pode vir a se constituir em uma resposta satisfatória de por que deveria o Universo se iniciar em um estado tão isotrópico.

O segundo problema relacionado à Cosmologia “Quiescent” é estabelecer a unicidade da evolução a partir de estados isotrópicos que na verdade possuem um caráter inicialmente singular. As condições iniciais, tais como a nulidade do tensor de Weyl, são aplicadas desde a singularidade inicial. Ou seja, o estado inicial deve ser definido, de alguma forma, sobre a própria singularidade. Uma maneira de se fazer isso é justamente utilizar o conceito de singularidade isotrópica (ou conforme) apresentado na seção (1.1). É através deste conceito e de sua definição matemática que se tem procurado resolver

essa questão de unicidade da evolução, a qual ainda está razoavelmente em aberto. Neste trabalho demos vários passos em frente no contexto de entender melhor o problema e de resolvê-lo sem reservas. Mais à frente, no capítulo III desta tese, trataremos esse problema de valor inicial de forma mais detalhada, relacionando-o em particular com uma conjectura formulada por Tod [17], a qual afirma que universos preenchidos com um fluido perfeito e com equação barotrópica de estado possuem, uma vez imposta a Hipótese da Curvatura de Weyl, uma evolução necessariamente do tipo FLRW.

2. A Hipótese da Curvatura de Weyl e o Conteúdo de Entropia do Universo

2.1 Hipótese da Curvatura de Weyl

Uma das leis mais bem estabelecidas da Física é a *Segunda Lei da Termodinâmica*, a qual afirma que a entropia total do Universo deve sempre aumentar (ou ao menos permanecer constante, o que obviamente não está acontecendo, pois observa-se a todo momento uma quantidade muito grande de processos dispersivos, com grande produção de entropia. ocorrendo por todo o Universo). Partindo justamente de uma característica subjacente a esta lei, que é seu caráter essencialmente assimétrico no tempo. Penrose [15, 10] fez uma série de considerações a respeito de processos gravitacionais e da geometria do Universo, relacionando as singularidades do espaço-tempo com a presença de uma assimetria temporal na Física, que o levaram a formular uma hipótese acerca do tensor de Weyl. Vamos nesta seção apresentar um resumo dessas considerações, bem como introduzir a formulação da hipótese referida acima, a chamada “Hipótese da Curvatura de Weyl”,

já mencionada no primeiro capítulo desta monografia. Em particular introduziremos o conceito de “entropia gravitacional”, que é de importância fundamental para as idéias apresentadas aqui e cujo tratamento será estendido às seções restantes deste capítulo.

Em sua argumentação, Penrose nos afirma que, em atenção à Segunda Lei da Termodinâmica, é necessário algum tipo de vínculo de baixa entropia na origem do Universo. A entropia até o presente, devido aos processos dispersores de energia observados, vem sempre aumentando, devendo continuar este aumento até que cessem todos esses processos dispersivos no Universo. Se entretanto invertermos a “seta do tempo”, tal entropia, que antes era sempre crescente, deverá decrescer até o instante inicial do “big-bang”, correspondente à singularidade inicial nos modelos FLRW padrão. Assim o “big-bang” corresponderia a um estágio de baixa entropia no Universo. A pergunta a fazer é então: **O que na natureza do “big-bang” é de baixa entropia?**

Se levarmos em conta alguns cálculos [40] referentes aos processos físicos que provavelmente aconteceram no “big-bang”, seremos a princípio levados à direção contrária. Ao que parece a matéria e a radiação no Universo, nos instantes iniciais, estavam em um estado completamente termalizado, isto é, estavam em equilíbrio térmico, que é um estado de entropia máxima. Portanto parece que chegamos a um paradoxo, pois se em seus instantes iniciais o Universo se encontrava em um estado de máxima entropia como então esta entropia poderia continuar a aumentar, como é observado hoje em dia? Poder-se-ia pensar em termos da expansão do Universo. Talvez a entropia fosse máxima apenas para o reduzido volume que o Universo apresentava em seus momentos iniciais, sendo relativamente baixa para o volume que o Universo atualmente apresenta. Assim, à medida em que o Universo fosse se expandindo também a quantidade máxima possível de entropia, sendo

uma quantidade proporcional ao volume do Universo, seria cada vez maior, permitindo-se que os processos dispersivos continuassem a ocorrer. Não é difícil, entretanto, verificar que tal raciocínio, considerando-se válida a Segunda Lei da Termodinâmica, representa uma visão inapropriada. Basta aplicá-lo a um modelo de universo em que haja recolapso. O Universo se expandiria com sua entropia real sendo, ao final da expansão, mais alta que o limite máximo permitido nos primeiros momentos após o “big-bang”. Teria início então a fase de contração, com o limite máximo da entropia reduzindo-se progressivamente à medida em que se aproximasse o momento do colapso total do Universo, o “big-crunch”. A entropia existente entretanto continuaria a aumentar (ou ao menos permaneceria constante) durante este segundo processo. Assim, pouco antes do “big-crunch”, quando o Universo apresentaria um volume mínimo, a entropia real seria maior do que o limite máximo permitido, o que não é possível. O paradoxo portanto permaneceria.

Segundo Penrose, a resposta para este questionamento está no que chamou de “entropia gravitacional”. O argumento é que os processos dispersores de energia, ou seja, os processos que produzem entropia, são oriundos em última análise da aglomeração de matéria devido à gravidade. Como exemplo, praticamente toda a energia que utilizamos no nosso cotidiano vem de uma forma ou de outra do Sol, ou melhor, dos processos term nucleares que ocorrem no interior do Sol devidos fundamentalmente às altas pressões ocasionadas pelo acúmulo de matéria devido à força gravitacional. O que fazemos é utilizar esta energia que chegou à Terra através de fótons de alta energia e que está armazenada nos alimentos, resultados diretos ou indiretos da fotossíntese realizada pelas plantas. armazenada nos lagos e rios mais altos na forma de energia potencial (tendo chegado ali devido à condensação da água, evaporada pelo calor do Sol, nas nuvens), e mesmo nos

combustíveis fósseis, cuja energia veio de processos de fermentação de organismos que, apesar de mortos, conservaram parte da energia solar usada para constituí-los. Mesmo a energia nuclear, como aquela gerada da fissão do isótopo do urânio 235 nas usinas nucleares, é provavelmente obtida a partir de elementos pesados criados em explosões de supernovas, desencadeadas por grandes pressões gravitacionais ocorrendo no interior de algumas estrelas. Quando utilizamos a energia obtida dessas diversas fontes o que fazemos é transformá-la em calor, ou seja, em fótons de baixa energia. Assim um pequeno número de fótons de alta energia é transformado em um grande número de fótons de baixa energia, de maneira que a quantidade total de energia é conservada. Entretanto a entropia do Universo, que pode ser entendida como a razão entre a quantidade de fótons e a quantidade de bárions existentes, vai aumentar, uma vez que a quantidade de fótons aumentou mas a de bárions permaneceu constante. Tais processos de criação de fótons de alta energia, e posterior dispersão em um número maior de fótons de baixa energia, ocorrem por toda parte no Universo. Parece bastante razoável supor então que, de uma forma ou de outra, toda a produção de entropia que acontece atualmente, não só na Terra como em todo o Universo, está relacionada à aglomeração de matéria devido ao campo gravitacional, daí o termo “entropia gravitacional”.

Note-se que, seguindo esta linha de raciocínio, podemos afirmar que quanto maior for a aglomeração de matéria no Universo, tanto maior será sua entropia. Um buraco negro representaria assim o máximo de entropia que pode ser obtida de uma dada quantidade de matéria. Pode parecer contraditório que a entropia aumente quanto mais estruturas agrupadas apareçam no Universo quando, por exemplo, em um gás a entropia é tanto maior quanto mais desagrupadas estejam suas moléculas. Deve-se lembrar porém que a

força gravitacional entre os corpos é universalmente de caráter *atrativo*, enquanto que em um gás as forças que predominam entre as moléculas têm caráter *repulsivo*.

Atentando à geometria do espaço-tempo, Penrose visualizou uma correlação do quadro acima com a curvatura de Weyl, que pode ser entendida como a parte da curvatura do espaço-tempo relacionada a um efeito de maré, ou seja, à presença de um campo gravitacional não-uniforme criado por uma distribuição não-isotrópica de matéria (ver capítulo V de [10]). Para entender esta correlação, vamos considerar a evolução de um universo que se expande a partir de uma singularidade, começando com um “big-bang”. Nos momentos iniciais, a energia (matéria e radiação) preenche todo o Universo. A distribuição dessa energia pode não ser perfeitamente isotrópica, mas certamente não há ainda praticamente nenhuma aglomeração de matéria causada pela interação gravitacional, pois esta é, pelo menos em média, sobrepujada pela energia cinética da explosão inicial. Aos poucos, porém, o campo gravitacional vai passando a predominar. O momento em que ocorre esse predomínio, em cada região do espaço, depende do grau de irregularidade já existente naquela região, bem como, segundo Penrose, provavelmente de outros fatores ainda desconhecidos. Começa a haver então aglomeração de matéria em algumas regiões devido ao campo gravitacional. Vamos considerar agora uma dessas regiões, por exemplo, preenchida com uma “nuvem” de matéria suficiente para formar uma estrela. A curvatura de Weyl nas vizinhanças da região deve ser pequena, pois está sendo tomada a uma distância tal do centro de massa da estrutura que o efeito de maré, ou seja, a deformação produzida pelo campo gravitacional, e relacionada à curvatura de Weyl, sobre uma “bolha de matéria” (similar à “gota de fluido” na descrição pictórica que fizemos na seção 1.1 desta monografia) de pequena densidade, é ainda muito fraco. À medida em

que há contração da nuvem até ser formada a estrela, vão se abrindo espaços vazios onde a curvatura de Weyl pode aumentar bastante dentro da região, sendo tanto maior quanto mais próximo da superfície da estrela. Havendo colapso gravitacional, quando a estrela continuará seu processo de contração até a formação de um buraco negro, a curvatura de Weyl pode aumentar muito mais ainda, divergindo para infinito na singularidade formada.

O comportamento da curvatura de Weyl descrito acima está relacionado a um colapso esfericamente simétrico. Mas mesmo no caso de um colapso mais genérico este comportamento não parece ser muito diferente. A curvatura de Weyl novamente deve divergir para infinito na singularidade e, nas vizinhanças da singularidade, deve dominar completamente a curvatura de Ricci (isto pode ser visto com mais clareza em [12]), que, grosso modo, é a outra parte da curvatura de Riemann (ver eqs.(1.1.8) e (1.1.9)), relacionada a alterações de volume de uma distribuição de matéria devido ao seu próprio campo gravitacional interno (ver capítulo V de [10]; ver também seção 1.1 desta monografia).

Analisamos então dois tipos de singularidade: uma singularidade inicial global, que representava todo o Universo em seu início, e uma singularidade final local, que representava o colapso gravitacional espacialmente localizado de matéria em uma pequena região do Universo, formando um buraco negro.

Aplicando o conceito de entropia gravitacional a esta análise temos então que próximo à singularidade inicial (isto é, nos primeiros momentos do Universo, pois por ser global esta singularidade pode ter localização apenas no tempo, não havendo como definir sua localização no espaço) praticamente não há aglomeração de matéria, e tanto a curvatura de Weyl, em comparação com a curvatura de Ricci, quanto a entropia gravitacional

possuem valores muito baixos. Estes valores aumentam à medida em que há aglomeração de matéria e finalmente, nas regiões em que há colapso, teremos singularidades finais de alta entropia. já que a energia potencial gravitacional contida nas partículas de matéria que antes havia na região foi toda dispersada no processo de queda até a singularidade do buraco negro, e com a curvatura de Weyl divergindo para infinito (e dominando a curvatura de Ricci) na singularidade. Isto sugere que deve haver uma fórmula matemática que relacione o conceito de entropia gravitacional com a curvatura de Weyl (e possivelmente a de Ricci). Na próxima seção será apresentada uma possível candidata a definição matemática de entropia gravitacional que leva em conta esta relação. Por enquanto vamos nos ater apenas à formulação da hipótese de Penrose acerca do tensor de curvatura de Weyl, a qual já estamos em condições de introduzir.

Nas considerações acima tratamos do quadro evolutivo de um universo que se inicia em uma singularidade de “big-bang” e verificamos que, em seus primeiros instantes, este universo tem curvatura de Weyl muito pequena, ou pelo menos muito menor que a curvatura de Ricci, em qualquer de suas regiões. A hipótese de Penrose vai mais longe do que apenas considerar o predomínio da curvatura de Ricci sobre a de Weyl nos instantes iniciais do Universo e, com a extensão para qualquer tipo de singularidade inicial (não só do tipo “big-bang”, mas também aquelas eventuais singularidades das quais poderiam emergir grandes quantidades de matéria e radiação, os chamados “buracos brancos”), pode ser enunciada como:

“A curvatura de Weyl W_{abcd} se anula em qualquer singularidade inicial”.

Esta é a formulação da hipótese, como feita por Penrose em [15] (p. 630), que passou a ser conhecida na literatura como “Weyl Curvature Hypothesis” (WCH) ou “Weyl Tensor Hypothesis” (WTH). Será utilizada neste texto, como já vinhamos fazendo, a expressão “Hipótese da Curvatura de Weyl” (HCW). Como já dissemos no primeiro capítulo, esta é uma importante condição inicial a ser imposta sobre a geometria do Universo e será aplicada, no terceiro capítulo desta monografia, ao contexto de universos preenchidos com fluido perfeito e que contêm uma singularidade isotrópica. Veremos também que, em tal contexto, a Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW) serve de base para a importante conjectura formulada por Tod sobre a determinação da evolução de tais universos desde a singularidade.

Nas seções que se seguem neste capítulo, vamos analisar a possibilidade de definição de um parâmetro de medida da entropia gravitacional baseada na hipótese acima (HCW). Veremos que pode ser conveniente um ligeiro enfraquecimento dessa hipótese, mas que entretanto não vai de encontro às considerações apresentadas nesta seção, até porque tal possibilidade é mencionada nos próprios argumentos de Penrose [15].

2.2 Entropia Gravitacional. Propostas.

Veremos nesta seção algumas propostas para uma formulação matemática do conceito de entropia gravitacional, no contexto de singularidades isotrópicas, e sua relação

com a Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW), que introduzimos na seção 2.1.

O que desejamos é um parâmetro que possa nos fornecer uma medida da entropia gravitacional nas cosmologias que satisfazem às equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, atendendo a uma equação barotrópica de estado, e que admitem uma singularidade isotrópica. Com esse fim, vamos procurar uma expressão que possua a característica básica da entropia total do Universo, qual seja, de crescer com o tempo em atenção à Segunda Lei da Termodinâmica. Seja P este parâmetro. Devemos ter então que

$$\partial_0 P > 0 \quad . \quad (2.2.1)$$

Considerando-se agora a hipótese referida acima (HCW), a grandeza P deve também ser nula na singularidade inicial, ou seja, em $t = 0$:

$$P(t = 0) = 0 \quad . \quad (2.2.2)$$

Além disso deve ser uma grandeza escalar, bem como deve também conter o tensor de Weyl em sua expressão, como segue das idéias discutidas na seção 2.1 . Uma expressão bastante simples para P atendendo-se às características acima seria

$$P = W_{abcd} W^{abcd} \quad . \quad (2.2.3)$$

Há entretanto um problema com a expressão acima: o parâmetro P em geral diverge em uma singularidade isotrópica, o que não está de acordo com a eq.(2.2.2). Um

exemplo deste tipo de comportamento foi apresentado por Wainwright e Anderson [41] para os modelos Bianchi VI_h . Em tais modelos, o parâmetro P só não vai divergir na singularidade inicial para os casos particulares correspondentes a modelos FLRW exatos, nos quais o tensor de Weyl é sempre nulo e, em consequência, P é identicamente zero.

Poder-se-ia pensar em restringir a definição de P aos modelos que fossem FLRW apenas na singularidade isotrópica, de forma que para $t > 0$ fossem necessariamente não-FLRW e portanto com W_{abcd} não nulo.³ Porém, ao menos por enquanto, não foi encontrado nenhum modelo FLRW para $t = 0$ que não evolua para um universo sempre FLRW, o qual possui tensor de Weyl sempre nulo (o que está de acordo com uma conjectura formulada por Tod, e já mencionada anteriormente, da qual trataremos em maior detalhe no próximo capítulo).

Parece então haver desacordo entre a HCW e o crescimento de entropia no Universo, pois, se $W_{abcd} = 0$ inicialmente, como poderia haver evolução para um universo com $W_{abcd} \neq 0$ e portanto poder apresentar uma quantidade de entropia mensurável através de um parâmetro do tipo dado pela eq.(2.2.3)?

De fato, utilizando-se apenas as equações da gravitação clássica conhecida, isso não parece ser possível. A idéia de Penrose [15, 10] era que houvesse um mecanismo dinâmico, oriundo de uma teoria de gravitação quântica assimétrica no tempo, que se encarregaria de criar, mesmo num universo totalmente regular no seu início, algum grau de anisotropia e não-homogeneidade que cresceria com o tempo. Com isso, mesmo que o tensor de Weyl fosse nulo em um universo inicialmente FLRW, com o passar do tempo

³Modelos de universo com $W_{abcd} = 0$ e preenchido com um fluido perfeito que atende a uma equação barotrópica de estado são necessariamente FLRW [24]. Portanto, um modelo não-FLRW mas com fluido perfeito atendendo a uma equação barotrópica de estado possui necessariamente $W_{abcd} \neq 0$.

haveria irregularidades cada vez maiores, de forma que o parâmetro P , como dado pela eq.(2.2.3), teria de fato o comportamento dado na eq.(2.2.1). Contudo estamos interessados aqui em tratar a HCW utilizando a teoria clássica da gravitação, e dessa forma o parâmetro P , como definido na eq.(2.2.3), não é apropriado.

É necessário portanto definir-se uma outra expressão para o parâmetro P . A dificuldade em obter-se uma expressão que possa ser utilizada para um tratamento do ponto de vista da gravitação clássica é que, quando aplicada a cosmologias de fluido perfeito com equação barotrópica de estado, a HCW é uma imposição muito forte, vinculando a singularidade inicial a ter forçosamente uma geometria espacial totalmente homogênea e isotrópica, de forma que o universo será obrigatoriamente FLRW em seu início.⁴ Devido a isso, alguns autores (ver Wainwright e Anderson [41] e Goode et al. [42]) propuseram um enfraquecimento da HCW. Na própria argumentação de Penrose [15] a idéia mais fundamental é que a curvatura de Ricci deve dominar a curvatura de Weyl no início do Universo. Com isso se pode considerar uma outra versão da HCW que enunciaremos como:

“A curvatura de Ricci R_{ab} domina a curvatura de Weyl W_{abcd} em qualquer singularidade inicial.”

Seguindo Nesteruk [43], chamaremos esta segunda versão de “Hipótese da Curvatura de Weyl Fraca” (HCW fraca), enquanto que à primeira versão, que foi enunciada na seção 2.1, chamaremos “Hipótese da Curvatura de Weyl Forte” (HCW Forte) ou simples-

⁴Vide última nota de pé de página.

mente de “Hipótese da Curvatura de Weyl” (HCW), como já vínhamos denominando-a, quando não houver dúvida.

A nova proposta, apresentada mais claramente em Goode et al. [42], para o parâmetro P , baseada na Hipótese da Curvatura de Weyl Fraca foi a expressão:

$$P = \frac{W_{abcd}W^{abcd}}{R_{ef}R^{ef}} . \quad (2.2.4)$$

Nesta expressão, o invariante $W_{abcd}W^{abcd}$ não é mais exigido ser nulo na singularidade inicial, o que permite que se tenha algum grau de não-homogeneidade já no início do Universo, que portanto não precisa ser inicialmente FLRW mesmo que esteja preenchido com um fluido perfeito atendendo a uma equação barotrópica de estado. Dessa forma a condição expressa na eq.(2.2.2), relacionada à HCW Forte, não mais precisará ser satisfeita pelo parâmetro P , que entretanto, para poder ser considerado como um bom parâmetro de medida da entropia gravitacional, além de se comportar de acordo com a eq.(2.2.1), deve também atender à HCW Fraca, ou seja, à condição

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P = 0 . \quad (2.2.5)$$

Na próxima seção apresentaremos alguns exemplos (e contra-exemplos) do comportamento do parâmetro P em modelos que admitem uma singularidade isotrópica, quando verificaremos a necessidade de investigar os limites dentro dos quais o parâmetro P , definido através da eq.(2.2.4), irá atender tanto à eq.(2.2.5) (HCW Fraca) quanto à eq.(2.2.1) (Segunda Lei da Termodinâmica), quando então poderá ser considerado como

um bom parâmetro de medida da entropia gravitacional.

Antes porém vamos falar um pouco mais sobre o enfraquecimento da HCW como fora introduzida na seção 2.1 (HCW Forte). Vamos nos concentrar no efeito deste enfraquecimento sobre o papel da entropia gravitacional na exigência de baixa entropia na singularidade inicial.

A questão é que esse enfraquecimento da HCW permite que o tensor de Weyl seja não nulo na singularidade inicial, o que indica, como vimos na seção 2.1, que pode haver já alguma irregularidade no início do Universo. Pode-se pensar, então, que esta irregularidade inicial seja suficiente para explicar, por si só, o crescimento de entropia que observamos atualmente, pois o Universo não estará mais inicialmente em um estado de entropia termodinâmica máxima. Assim, ao contrário da argumentação de Penrose, talvez não seja necessário se levar em conta a entropia gravitacional.

Há informações advindas da observação que parecem apoiar este questionamento. De fato, observa-se que a entropia total manteve-se praticamente a mesma desde o início do Universo (aproximadamente 10^8 fótons para cada bárion), de forma que uma relativamente “pequena” irregularidade inicial talvez pudesse ser a causadora fundamental do crescimento de entropia em um universo que procura o equilíbrio termodinâmico.

Pode-se, entretanto, perceber a importância da entropia gravitacional quando se considera a entropia de buracos negros. Segundo Penrose [44], se considerarmos por exemplo um modelo de universo fechado, veremos que, em termos da entropia como número total de fótons, a entropia do Universo, inicialmente de 10^{88} fótons, passará a um valor várias ordens de grandeza mais alto quando considerada a entropia que pode ser produzida pelos buracos negros, sendo tanto maior quanto mais buracos negros forem se

formando no Universo, chegando a 10^{123} fótons em um “big-crunch”. Assim, a entropia gravitacional parece ter um papel muito mais importante que o da entropia “puramente termodinâmica” na entropia total do Universo. Mais que isso, o próprio valor da entropia total atual de 10^{88} fótons, desprezível quando comparado com a entropia total de 10^{123} fótons em um “big-crunch”, sugere que de fato estamos vivenciando uma era ainda bastante primitiva na evolução do Universo, o que está em pleno acordo com o que se espera de uma cosmologia do tipo “Quiescent” tal como a que foi apresentada no capítulo anterior.

2.3 Exemplos e Contra-Exemplos.

A partir de sua definição de singularidade isotrópica, apresentada na seção 1.1 desta monografia, Goode e Wainwright [18] desenvolveram uma demonstração de que em toda singularidade isotrópica temos necessariamente que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_{abcd}W^{abcd}}{R_{ef}R^{ef}} = 0 . \quad (2.3.1)$$

Da equação acima vemos então que o parâmetro P de medida da entropia gravitacional como definido pela eq.(2.2.4) sempre atenderá à condição dada na eq.(2.2.5) em universos que iniciam sua evolução em uma singularidade isotrópica. Porém, como foi visto

na seção anterior, para ser considerado um parâmetro adequado de medida da entropia gravitacional, é necessário que o parâmetro P atenda à Segunda Lei da Termodinâmica, isto é, deve satisfazer também à condição expressa na eq.(2.2.1), o que nem sempre é verdadeiro nos universos que possuem singularidade isotrópica. Nesta seção apresentaremos exemplos de soluções que admitem uma singularidade isotrópica e verificaremos em que medida a definição de parâmetro P , dada pela eq.(2.2.4), estará de acordo com a Segunda Lei da Termodinâmica, sendo então uma definição apropriada de um parâmetro de medida da entropia gravitacional.

Com vistas à comparação das idéias apresentadas até aqui com cálculos que desenvolveremos no próximo capítulo, bem como a uma posterior correlação com os resultados apresentados em uma outra tese [2, 45, 46], vamos iniciar realizando a análise da geometria de um espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional (com $D \geq 3$) de métrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 f^2 d\Omega_{(D)}^2, \quad (2.3.2)$$

onde $a = a(t)$, $f = f(\gamma_D)$ e

$$\begin{aligned} d\Omega_{(D)}^2 &= d\gamma_D^2 + \text{sen}^2 \gamma_D d\gamma_{D-1}^2 + \text{sen}^2 \gamma_D \text{sen}^2 \gamma_{D-1} d\gamma_{D-2}^2 \\ &+ \dots + \text{sen}^2 \gamma_D \dots \text{sen}^2 \gamma_2 d\gamma_1^2 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

é a métrica das seções espaciais homogêneas e isotrópicas correspondentes à topologia S^D ,

com $\gamma_1 \dots \gamma_D$ como coordenadas angulares.

Os Símbolos de Christoffel não nulos para a métrica dada pela eq.(2.3.2) são

$$\Gamma_{\gamma_j \gamma_j}^0 = a \dot{a} f^2 \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \quad , \quad (2.3.4)$$

$$\Gamma_{0 \gamma_j}^{\gamma_j} = \frac{\dot{a}}{a} \quad , \quad (2.3.5)$$

$$\Gamma_{\gamma_D \gamma_D}^{\gamma_D} = \frac{f'}{f} \quad , \quad (2.3.6)$$

$$\Gamma_{\gamma_j \gamma_j}^{\gamma_D} = - \left(\frac{f'}{f} + \cot \gamma_D \right) \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_k \quad , (j < D) \quad , \quad (2.3.7)$$

$$\Gamma_{\gamma_D \gamma_j}^{\gamma_j} = \frac{f'}{f} + \cot \gamma_D \quad , (j < D) \quad , \quad (2.3.8)$$

$$\Gamma_{\gamma_l \gamma_j}^{\gamma_j} = \cot \gamma_l \quad , (j < l < D) \quad , \quad (2.3.9)$$

$$\Gamma_{\gamma_l \gamma_l}^{\gamma_j} = - \cot \gamma_j \prod_{k=j}^{l+1} \text{sen}^2 \gamma_k \quad , (l < j < D) \quad , \quad (2.3.10)$$

onde $(\dot{}) \equiv d/dt$ e $(\prime) \equiv d/d\gamma_D$ e onde estamos usando para o produtório “ Π ” a convenção

$$\Pi_{k=j}^l \xi(\gamma_k) \equiv \begin{cases} \xi(\gamma_j)\xi(\gamma_{j-1})\dots\xi(\gamma_l) & \text{para } j > l , \\ \xi(\gamma_l) & \text{para } j = l , \\ 1 & \text{para } j = l - 1 . \end{cases}$$

Quando não especificado outro intervalo de variação de j , consideraremos $1 \leq j \leq D$. As componentes do tensor de Riemann R^a_{bcd} , que definiremos como [47]

$$R^a_{bcd} \equiv \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{bc}^e \quad , \quad a, b, c, d, e = 0, 1, \dots, D \quad , \quad (2.3.11)$$

não nulas da métrica dada na eq.(2.3.2) serão portanto

$$R^0_{\gamma_j 0 \gamma_j} = a \ddot{a} f^2 \Pi_{k=D}^{j+1} s e n^2 \gamma_k \quad , \quad (2.3.12)$$

$$R^{\gamma_j}_{0 \gamma_j 0} = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad , \quad (2.3.13)$$

$$R^u_{\gamma_j \gamma_l \gamma_j} = \left(-\frac{f'^2}{f^2} - 2\frac{f'}{f} \cot \gamma_D + 1 + \dot{a}^2 f^2 \right) \Pi_{k=D}^{j+1} s e n^2 \gamma_k \quad , (j \neq l \text{ e } (j, l) < D) \quad , \quad (2.3.14)$$

$$R^{\gamma_j}_{\gamma_D \gamma_j \gamma_D} = -\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot \gamma_D + 1 + \dot{a}^2 f^2 \quad , (j < D) \quad , \quad (2.3.15)$$

$$R^{\gamma_D}_{\gamma_j \gamma_D \gamma_j} = \left(-\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot \gamma_D + 1 + \dot{a}^2 f^2 \right) \Pi_{k=D}^{j+1} s e n^2 \gamma_k \quad , (j < D) \quad , \quad (2.3.16)$$

As componentes do tensor de Ricci $R_{bd} = R^a_{\ b a d}$ não nulas serão assim

$$R_{00} = -D \frac{\ddot{a}}{a} , \quad (2.3.17)$$

$$R_{\gamma_j \gamma_j} = \left[-\frac{f''}{f} - (D-3) \frac{f'^2}{f^2} - (2D-3) \frac{f'}{f} \cot \gamma_D + (D-1) + \right. \\ \left. + (D-1) \dot{a}^2 f^2 + a \ddot{a} f^2 \right] \Pi_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2 \gamma_j , (j < D) , \quad (2.3.18)$$

$$R_{\gamma_D \gamma_D} = (D-1) \left(-\frac{f''}{f} + \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot \gamma_D + 1 + \dot{a}^2 f^2 \right) + a \ddot{a} f^2 , \quad (2.3.19)$$

e o escalar de curvatura $R = g^{bd} R_{bd}$ será

$$R = -\frac{2(D-1)f''}{a^2 f^3} - \frac{(D-1)(D-4)f'^2}{a^2 f^4} - \frac{2(D-1)^2 f'}{a^2 f^3} \cot \gamma_D + \\ + \frac{D(D-1)}{a^2} \frac{1}{f^2} + D(D-1) \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2D \frac{\ddot{a}}{a} . \quad (2.3.20)$$

As componentes independentes não nulas do tensor de Weyl W_{abcd} podem agora ser obtidas através da seguinte expressão [8, 48]

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{N-2} (g_{ac} R_{bd} - g_{ad} R_{bc} - g_{bc} R_{ad} + g_{bd} R_{ac}) +$$

$$+ \frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \quad (2.3.21)$$

para $N = D + 1$. Tais componentes serão

$$W_{0\gamma_j 0\gamma_j} = \frac{(D-2)}{D(D-1)} \left(\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot\gamma_D \right) \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2\gamma_k \quad , (j < D) \quad , \quad (2.3.22)$$

$$W_{0\gamma_D 0\gamma_D} = -\frac{(D-2)}{D} \left(\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot\gamma_D \right) \quad , \quad (2.3.23)$$

$$W_{\gamma_l \gamma_l \gamma_l \gamma_l} = \frac{2a^2}{D(D-1)} \left(f f'' - 2f'^2 - f f' \cot\gamma_D \right) \times \\ \times \prod_{k=D}^{l+1} \text{sen}^2\gamma_k \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2\gamma_k \quad , (l \neq j, (l, j) < D) \quad , \quad (2.3.24)$$

$$W_{\gamma_j \gamma_D \gamma_j \gamma_D} = -\frac{(D-2)a^2}{D(D-1)} \left(f f'' - 2f'^2 - f f' \cot\gamma_D \right) \prod_{k=D}^{j+1} \text{sen}^2\gamma_k \quad , (j < D) \quad . \quad (2.3.25)$$

A partir das eqs.(2.3.22) a (2.3.25) já podemos calcular o invariante $W_{abcd}W^{abcd}$,

que será

$$W_{abcd}W^{abcd} = \frac{4(D-2)}{D} \frac{1}{a^4 f^4} \left(\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot\gamma_D \right)^2 \quad , \quad (2.3.26)$$

e das eqs.(2.3.17) a (2.3.19) obteremos, depois de alguns cálculos, o invariante

$$R_{ef}R^{ef} = \frac{1}{a^4 f^4} \left\{ F_1 + [(D-1)\dot{a}^2 + a\ddot{a}] F_2 + \right. \\ \left. + D [(D-1)\dot{a}^4 + (D+1)a^2\ddot{a}^2 + 2(D-1)a\dot{a}^2\ddot{a}] f^4 \right\} , \quad (2.3.27)$$

onde

$$F_1 = (D-1) \left[D \frac{f'^2}{f^2} + (D^2 - 5D + 8) \frac{f'^4}{f^4} + (4D^2 - 11D + 8) \frac{f'^2}{f^2} \cot^2 \gamma_D + D(D-1) - \right. \\ \left. - 4 \frac{f'^2 f''}{f^3} + 2(3D-4) \frac{f' f''}{f^2} \cot \gamma_D - 4(D-1) \frac{f''}{f} + 4(D^2 - 5D + 5) \frac{f'^3}{f^3} \cot \gamma_D - \right. \\ \left. - 2(D-1)(D-4) \frac{f'^2}{f^2} - 4(D-1)^2 \frac{f'}{f} \cot \gamma_D \right] \quad (2.3.28)$$

e

$$F_2 = -2(D-1) \left[2f f'' + (D-4)f'^2 + 2(D-1) f f' \cot \gamma_D - D f^2 \right] . \quad (2.3.29)$$

De acordo com a definição dada na eq.(2.2.4), o parâmetro P de medida da entropia gravitacional será portanto

$$P = \frac{\frac{4(D-2)}{D} \left(\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot\gamma_D \right)^2}{F_1 + [(D-1)\dot{a}^2 + a\ddot{a}] F_2 + D [(D-1)\dot{a}^4 + (D+1)a^2\ddot{a}^2 + 2(D-1)a\dot{a}^2\ddot{a}] f^4} \quad (2.3.30)$$

A equação diferencial

$$\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot\gamma_D = 0 \quad (2.3.31)$$

pode ser integrada em duas quadraturas imediatas e a solução é

$$f = \frac{1}{(A + B \cos\gamma_D)^2} \quad (2.3.32)$$

onde A e B são constantes, constituindo-se num exemplo trivial em que P será sempre nulo, estando de acordo com a eq.(2.3.1) mas não atendendo à condição expressa pela eq.(2.2.1). A métrica dada na eq.(2.3.2) com a função f na forma acima na verdade engloba todas as métricas correspondentes a universos FLRW, que em $N = D + 1$ dimensões são da forma [2]

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{\left(1 + \frac{\epsilon}{4}r^2\right)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{(D-1)}^2) \quad (2.3.33)$$

com $a = a(t)$ e $\epsilon = -1, 0, 1$ (segundo o espaço ser de curvatura negativa, ser plano ou ser

de curvatura positiva respectivamente).

Para ver isso podemos comparar os termos em $d\gamma_D^2$ e $d\Omega_{(D-1)}^2$ da métrica expressa na eq.(2.3.2) com os termos em dr^2 e $d\Omega_{(D-1)}^2$ na eq.(2.3.33) acima, fazendo

$$\frac{d\gamma_D}{A + B\cos\gamma_D} = \frac{dr}{1 + \frac{\epsilon}{4}r^2} \quad (2.3.34)$$

e

$$\frac{\text{sen}\gamma_D}{A + B\cos\gamma_D} = \frac{r}{1 + \frac{\epsilon}{4}r^2} \quad (2.3.35)$$

Diferenciando a eq.(2.3.35) e comparando o resultado com a eq.(2.3.34) obtemos

$$\frac{A\cos\gamma_D + B}{A + B\cos\gamma_D} = \frac{1 - \frac{\epsilon}{4}r^2}{1 + \frac{\epsilon}{4}r^2} \quad (2.3.36)$$

As eqs.(2.3.35) e (2.3.36) devem ser compatíveis. Escolhendo valores para A e B e lembrando que $\epsilon = -1, 0, 1$ temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Para } B = 0 : \quad \epsilon = A^2 \quad \rightarrow \quad \epsilon = 1, A = 1, B = 0 \\ \text{Para } A = 0 : \quad \epsilon = -B^2 \quad \rightarrow \quad \epsilon = -1, A = 0, B = 1 \\ \text{Para } A = B : \quad \epsilon = 0 \quad \rightarrow \quad \epsilon = 0, A = B = 1 \end{array} \right.$$

e para tais valores concluímos que $\epsilon = A - B$. Obtivemos assim três pares de valores

de A e B que a partir da métrica dada na eq.(2.3.2), com f dado pela eq.(2.3.32), originam todas as métricas relacionadas aos modelos FLRW (ou simplesmente as métricas Robertson-Walker — RW), representadas na eq.(2.3.33), para os três possíveis valores de ϵ . Mais que isso, é possível construir-se, com a ajuda dos pares de valores de A e B acima, uma nova parametrização das métricas correspondentes às cosmologias FLRW em que a constante ϵ novamente aparece de forma explícita identificando o tipo de curvatura. Pode-se verificar que a métrica

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{[1 + (1 - \epsilon)\cos\gamma_D]^2} d\Omega_{(D)}^2 \quad (2.3.37)$$

é completamente equivalente à métrica dada pela eq.(2.3.33), dando origem a todas as métricas possíveis nos FLRW, com curvatura negativa, nula ou positiva de acordo com os valores -1 , 0 e 1 , respectivamente, da constante ϵ .

Portanto temos que a utilização da função f na forma da eq.(2.3.32) de fato fará com que a métrica da eq.(2.3.2), a partir da qual o parâmetro P foi especificado, eq.(2.3.30), contenha todos os casos tipo FLRW, que são modelos em que o tensor de Weyl e, portanto, o parâmetro P são sempre nulos. Entretanto há escolhas para os valores de A e B que não recaem em modelos FLRW, mas que mesmo assim satisfazem a eq.(2.3.31), por conseguinte anulando P , ou seja, os modelos FLRW não são os únicos modelos para os quais P é sempre nulo.

Prosseguindo no estudo do comportamento do parâmetro P , tal como dado na eq.(2.3.30) acima, vamos agora considerar uma solução do tipo Kantowski-Sachs degene-

rada.⁵ fazendo

$$f = \csc \gamma_D \quad (2.3.38)$$

na métrica dada na eq.(2.3.2). Com isso teremos que o termo entre parênteses no numerador da eq.(2.3.30) será dado por

$$\left(\frac{f''}{f} - 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f'}{f} \cot \gamma_D \right) = \csc^2 \gamma_D \quad , \quad (2.3.39)$$

e no denominador da mesma, teremos,

$$F_1 = (D - 1)(D - 2) \csc^4 \gamma_D \quad , \quad (2.3.40)$$

$$F_2 = 2(D - 1)(D - 2) \csc^4 \gamma_D \quad . \quad (2.3.41)$$

A eq.(2.3.30), torna-se-á então

$$P = \frac{4(D - 2)}{D} \times \frac{1}{\xi(t)} \quad , \quad (2.3.42)$$

onde

⁵Topologia $R^1 \times R^1 \times S^{D-1}$ e fatores de escala iguais $\forall t$.

$$\begin{aligned} \xi(t) = & (D-1)(D-2)^2 + 2(D-1)(D-2)[(D-1)\dot{a}^2 + a\ddot{a}] \\ & + D[(D-1)\dot{a}^4 + (D+1)a^2\ddot{a}^2 + 2(D-1)a^2\dot{a}^2] . \end{aligned}$$

Vamos supor agora que o fator de escala $a(t)$ é uma função da forma

$$a = t^\alpha , \quad (2.3.43)$$

com $\alpha > 0$ (Universo em expansão). Soluções deste tipo foram encontradas na ref.[46] que trata de uma espécie de modelo sigma acoplado à gravitação. Teremos, neste caso,

$$P = \frac{4(D-2)}{D} \frac{1}{(I + Jt^{2\alpha-2} + Lt^{4\alpha-4} + Mt^{4\alpha-2})} , \quad (2.3.44)$$

com as constantes I, J, L, M , dadas por

$$I = (D-1)(D-2)^2 , \quad (2.3.45)$$

$$J = 2(D-1)(D-2)(D\alpha^2 - \alpha) , \quad (2.3.46)$$

$$L = 2D^2\alpha^4 - D(D+1)(2\alpha-1)\alpha^2 , \quad (2.3.47)$$

$$M = 2D(D-1)\alpha^2 , \quad (2.3.48)$$

e a derivada temporal de P será

$$\begin{aligned} \dot{P} = & -\frac{4(D-2)}{D} \frac{1}{(I + Jt^{2\alpha-2} + Lt^{4\alpha-4} + Mt^{4\alpha-2})^2} \times \\ & \times [J(2\alpha-2)t^{2\alpha-3} + L(4\alpha-4)t^{4\alpha-5} + M(4\alpha-2)t^{4\alpha-3}] . \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Vemos na eq.(2.3.44) que quando $t \rightarrow 0^+$ e $\alpha < 1$ o termo em $t^{4\alpha-4}$ no denominador da expressão dominará os termos restantes. Assim, para $\alpha < 1$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4(D-2)}{D} \frac{1}{L} t^{4-4\alpha} = 0 \quad , (\alpha < 1) . \quad (2.3.50)$$

Portanto o parâmetro P no caso que estamos tratando aqui, de uma solução Kantowski-Sachs degenerada, atenderá à condição representada pela eq.(2.2.5) sempre que (e somente quando) $\alpha < 1$, o que também permitirá a presença de uma singularidade isotrópica. As eqs.(2.3.50) e (2.3.47) nos mostram que P tem a característica desejável de tender a zero por valores positivos quando $t \rightarrow 0$. Isso pode ser visto estudando-se o sinal de L , cuja definição, de acordo com a eq.(2.3.47), pode ser escrita como

$$L = D\alpha^2(2D\alpha^2 - 2(D+1)\alpha + (D+1)) .$$

A equação

$$2D\alpha^2 - 2(D+1)\alpha + (D+1) = 0 \quad (2.3.51)$$

possui raízes

$$\alpha = \frac{D + 1 \pm \sqrt{1 - D^2}}{2D} , \quad (2.3.52)$$

que só são reais quando $D \leq 1$, o que não é de interesse, e além disso o coeficiente $2D$ do termo quadrático da eq.(2.3.51) é maior que zero. Assim L será sempre positivo e portanto teremos que $P \rightarrow 0^+$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Entretanto para poder ser considerado um bom parâmetro de medida da entropia gravitacional é necessário que P atenda também à condição expressa pela eq.(2.2.1) para qualquer $t > 0$, devendo sempre crescer com o tempo. Para ver em que medida o parâmetro P satisfaz a esta condição devemos estudar a expressão para \dot{P} dada pela eq.(2.3.49). Nesta equação vemos que para $t \approx 0$ e $\alpha < 1$ o termo que domina no numerador é aquele em $t^{4\alpha-5}$ e no denominador é o termo em $t^{8\alpha-8}$ e assim, com algumas simplificações:

$$\dot{P} \sim \frac{16(D-2)(1-\alpha)}{D} \frac{1}{L} t^{-4\alpha+3} , \quad (t \approx 0, \alpha < 1) , \quad (2.3.53)$$

que é sempre uma grandeza positiva, pois como vimos L é sempre positivo. O limite de \dot{P} quando $t \rightarrow 0^+$ vai variar agora de acordo com o valor de α :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{P} = 0 \quad \text{para } 0 < \alpha < \frac{3}{4} , \quad (2.3.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{P} = \frac{512(D-2)}{9D^2(5D-4)} \quad \text{para } \alpha = \frac{3}{4}, \quad (2.3.55)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{P} = +\infty \quad \text{para } \frac{3}{4} < \alpha < 1. \quad (2.3.56)$$

Os limites dados acima indicam portanto possibilidades diferentes para o incremento de entropia, nos momentos imediatamente seguintes ao início do Universo, de acordo com o valor de α . O resultado importante é que todos os limites serão positivos ou vão a zero por valores positivos, como no caso $0 < \alpha < \frac{3}{4}$. Isto significa que a entropia, como representada por P crescerá nos primeiros momentos do “big-bang” no modelo estudado, o que satisfaz à Segunda Lei da Termodinâmica ao menos na vizinhança de $t = 0$. É necessário contudo, para que o modelo seja realístico de acordo com a definição do parâmetro P , que a condição dada pela eq.(2.2.1)(Segunda Lei da Termodinâmica) seja satisfeita em todo o intervalo de validade do modelo. Para ver se tal condição poderá ser satisfeita vamos verificar agora o comportamento de P e \dot{P} para valores muito grandes de t .

A expressão de P , dada pela eq.(2.3.44), para valores muito grandes de t será equivalente, para $\alpha < 1$, a

$$P \sim \frac{4(D-2)}{D} \frac{1}{I + Mt^{4\alpha-2}} \quad , (t \gg 1, \alpha < 1) \quad , \quad (2.3.57)$$

sendo sempre positivo pois I e M , de acordo com as eqs.(2.3.45) e (2.3.48), são sempre positivos. O limite de P quando $t \rightarrow \infty$ vai também depender do valor de α :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \frac{4}{D(D-1)(D-2)} \quad \text{para } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad (2.3.58)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \frac{8(D-2)}{D(D-1)[2(D-2)^2 + D]} \quad \text{para } \alpha = \frac{1}{2}, \quad (2.3.59)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = 0 \quad \text{para } \frac{1}{2} < \alpha < 1. \quad (2.3.60)$$

Já a variação temporal \dot{P} da entropia gravitacional, para valores muito grandes de t e para $\alpha < 1$, poderá ter duas expressões diferentes de acordo com os casos $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$:

$$\dot{P} \sim \frac{4(D-2)}{D} \frac{M(2-4\alpha)t^{4\alpha-3}}{(I + Mt^{4\alpha-2})^2}, \quad \left(t \gg 1, \alpha < 1, \alpha \neq \frac{1}{2}\right), \quad (2.3.61)$$

$$\dot{P} \sim \frac{4(D-2)}{D} \frac{Jt^{-2}}{(I + Jt^{-1} + M)^2}, \quad \left(t \gg 1, \alpha = \frac{1}{2}\right). \quad (2.3.62)$$

Para o caso $\alpha = \frac{1}{2}$ temos $\dot{P} > 0$, pois de acordo com a eq.(2.3.46) temos $J > 0$ para $D \geq 3$, e no limite quando $t \rightarrow \infty$ temos diretamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P} = 0 \quad \text{para } \alpha = \frac{1}{2}. \quad (2.3.63)$$

No caso $\alpha \neq \frac{1}{2}$ o sinal de \dot{P} será dado pelo fator $(2 - 4\alpha)$ no numerador da eq.(2.3.61), sendo portanto positivo para $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e negativo para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. O valor de \dot{P} no

limite quando $t \rightarrow \infty$ (como pode ser visto analisando os casos $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$, $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4} < \alpha < 1$) será sempre zero, e assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{P} = 0 \quad \text{para } 0 < \alpha < 1, \quad (2.3.64)$$

onde já está acrescentada a eq.(2.3.63).

Os resultados obtidos até aqui, referentes à métrica dada na eq.(2.3.2) com as escolhas $f = \text{csc}\gamma_D$ e $a = t^\alpha$, estão reunidos na tabela 1.

Tabela 1: Valores de P e \dot{P} nos limites $t \rightarrow 0^+$ e $t \rightarrow \infty$ segundo intervalos de valores de α .

Valor de α	P		\dot{P}	
	$t \rightarrow 0^+$	$t \rightarrow \infty$	$t \rightarrow 0^+$	$t \rightarrow \infty$
$(0, \frac{1}{2})$	0^+	$\frac{4}{D(D-1)(D-2)}$	0^+	0^+
$\frac{1}{2}$	0^+	$\frac{8(D-2)}{D(D-1)[D+2(D-2)^2]}$	0^+	0^+
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	0^+	0^+	0^+	0^-
$\frac{3}{4}$	0^+	0^+	$\frac{512(D-2)}{9D^2(5D-4)}$	0^-
$(\frac{3}{4}, 1)$	0^+	0^+	$+\infty$	0^-

Vemos nesta tabela, na coluna dos limites $t \rightarrow 0^+$ de P , que para todos os valores de α ($0 < \alpha < 1$) a geometria correspondente à métrica dada na eq.(2.3.2), com as respectivas especificações que fizemos para f e a , estará de pleno acordo com a HCW Fraca

e também atenderá à condição necessária, senão suficiente, dada pela eq.(2.3.1), para a existência de uma singularidade isotrópica segundo a definição de Goode e Wainwright, apresentada na seção 1.1 desta monografia. Entretanto, analisando os outros limites, vemos que há alguns intervalos de valores de α para os quais os comportamentos de P e de \dot{P} não estão de acordo com a Segunda Lei da Termodinâmica. Assim, por exemplo, no caso $\frac{3}{4} < \alpha < 1$ a entropia crescerá muito inicialmente ($\dot{P} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow 0^+$), mas decorrido muito tempo ($\Delta t \rightarrow \infty$) a entropia P possuirá um valor próximo de zero, o que indica que P aumentou e depois reduziu-se, não atendendo à Segunda Lei da Termodinâmica. O mesmo ocorre para os casos $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$, embora de maneira mais suave. Particularmente neste último caso, que possui todos os limites nulos, poder-se-ia pensar num universo com muito pouca produção de entropia gravitacional, com a quantidade total de entropia sempre muito próxima de zero mas sempre crescente, de forma que a Segunda Lei da Termodinâmica pudesse ser válida. Porém no limite $t \rightarrow \infty$ o sinal de \dot{P} é negativo. Isto significa que, como nos casos anteriores, a quantidade de entropia está decrescendo, o que não pode acontecer. Estes são portanto exemplos de casos que permitem uma singularidade isotrópica, mas que não corroboram a definição do parâmetro P de medida da entropia gravitacional como proposta na eq.(2.2.4). Vale dizer que não conhecemos nenhuma solução das equações dinâmicas de Einstein que correspondam a esses casos. Isto não parece ser mera casualidade.

Para os casos $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ entretanto, os comportamentos de P e \dot{P} nos seus valores limites estão, como se pode ver, em bom acordo com a Segunda Lei da Termodinâmica. Nestes dois casos a entropia inicia-se nula e cresce tendendo a valores finitos quando t torna-se muito grande. Este crescimento parece ser muito suave, numa taxa

muito próxima de zero como se vê dos valores assintóticos de \dot{P} . De fato, da eq.(2.3.49) com $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ e lembrando que I, J, L e M, definidos nas eqs.(2.3.45) a (2.3.48), são sempre maiores que zero, podemos ver que \dot{P} também será sempre maior que zero, não importa qual seja o valor de t . Assim a entropia gravitacional, como dada por P , crescerá lentamente, para sempre e tendendo a um valor assintótico finito (crescimento monótono), satisfazendo à Segunda Lei da Termodinâmica e com um tipo de comportamento semelhante àquele da entropia em uma cosmologia tipo “Quiescent”. Esse é na verdade um dos comportamentos mais característicos da cosmologia “Quiescent”. Para estes valores de α , $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, temos portanto exemplos de casos que não só possibilitam a ocorrência de uma singularidade isotrópica mas também estão de acordo com a definição de P como medida de entropia gravitacional (além de serem exemplos em que a produção de entropia se processa numa escala condizente com a esperada em uma cosmologia “Quiescent”).

Há outros exemplos e contra-exemplos de soluções além destes apresentados aqui. Podemos citar entre eles os exemplos desenvolvidos por Goode e Wainwright [18], que verificaram a validade da eq.(2.2.1) para as soluções Kantowski-Sachs e Bianchi III com $p = \frac{1}{3}\rho$ e que admitem uma singularidade isotrópica. Outros exemplos são as soluções com “poeira” ($p = 0$) de Szekeres estudadas por Goode e Wainwright [49, 42] e também por Bonnor [50]. Foi mostrado que nas soluções deste tipo a presença de uma singularidade isotrópica era suficiente para garantir que a eq.(2.2.1) fosse satisfeita. Podemos citar também um estudo feito por Wainwright e Anderson [41] de um modelo Bianchi VI_h que admite uma singularidade isotrópica. O parâmetro P nesse modelo tem um comportamento, para tempos muito grandes, dependente de uma equação de estado tipo lei- γ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \begin{cases} \infty & 1 \leq \gamma < \frac{4}{3} \\ \text{cte} & \gamma = \frac{4}{3} \\ -\infty & \gamma > \frac{4}{3} \end{cases} .$$

Tal como no exemplo desenvolvido anteriormente nesta seção, o valor de P nestes modelos aumentará monotonicamente ao menos dentro de um intervalo de tempo $(0, c)$. Entretanto P atenderá a eq.(2.2.1) para todo t se e somente se $1 \leq \gamma \leq \frac{4}{3}$.

Os exemplos desenvolvidos nesta seção, bem como os citados acima, mostram que o parâmetro P nem sempre será adequado como um parâmetro de medida da entropia gravitacional nos modelos que admitem uma singularidade isotrópica. Porém, entre os modelos comentados aqui foram apresentados vários casos em que o parâmetro P de fato parece ser bastante apropriado como uma medida de entropia, e em particular mostramos haver casos que apresentam um comportamento do tipo “Quiescent Cosmology”. Assim sendo, parece razoável considerar o parâmetro P , definido através da eq.(2.2.4), como um bom parâmetro de medida da entropia gravitacional, no contexto de singularidades isotrópicas e dos argumentos de Penrose e de Barrow acerca da relação entre a estrutura geométrica e a quantidade de entropia do Universo.

3. Conjecturas de Evolução Cosmológica

3.1 Primeira Conjectura de Tod.

A Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW), como formulada no capítulo anterior, não é uma condição de contorno apropriada para ser utilizada num problema de Cauchy usual para as equações de Einstein. Tais problemas, como são aplicados no espaço-tempo físico (M, g_{ab}) , devem utilizar condições de contorno definidas sobre uma superfície de Cauchy, isto é, uma hipersuperfície inicial suave, não singular, e dessa forma a hipótese acima, que deve ser aplicada na singularidade inicial (em $t = 0$), não parece ter qualquer consequência clara na evolução de uma cosmologia quando analisada através de um problema de valor inicial desse tipo. Entretanto se encaixa muito bem no contexto de singularidades isotrópicas, pois a um só tempo é uma hipótese que, por um lado, ao atribuir um valor finito ao tensor de Weyl, corrobora a existência de um espaço conforme onde se pode construir um aparato matemático, como o das singularidades isotrópicas, que permita verificar a evolução de uma cosmologia desde a singularidade inicial e, por outro

lado, é como dissemos uma condição (ao que parece bastante restritiva) a ser aplicada na própria singularidade.

Assim, utilizando-se o conceito de singularidades isotrópicas, temos uma condição de contorno apropriada, a HCW, e uma hipersuperfície inicial suave, a hipersuperfície conforme correspondente à singularidade, e já podemos estudar um problema de valor inicial semelhante a um problema de Cauchy. Fundamentalmente, o que se espera é que o estudo desse problema permita a conclusão de que, submetida à HCW, a evolução de universos singulares preenchidos com fluido perfeito (possivelmente atendendo a uma equação barotrópica de estado) deva ser necessariamente do tipo FLRW. Com isto mostraríamos que os argumentos de Penrose, bem como aqueles de Barrow referentes à Cosmologia “Quiescent”, realmente representam uma explicação plausível para o alto grau de isotropia e homogeneidade verificado no Universo atual em grandes escalas.

Contudo este “problema de Cauchy no espaço-tempo conforme” não tem se mostrado simples. Muito trabalho já foi realizado nesse estudo, mas as conclusões até aqui ainda mantêm o problema razoavelmente em aberto. Apresentaremos nesta e na próxima seção alguns dos problemas matemáticos a serem resolvidos nessa análise, concentrando-nos em conjecturas devidas a Tod [17] e a Goode e Wainwright [18, 51], com propostas de solução e também algumas das soluções (particulares) já obtidas. Em seguida, na seção 3.3, apresentaremos alguns resultados, obtidos no espaço-tempo físico, com os quais esperamos contribuir para uma comprovação dessas conjecturas no sentido de clarificar alguns dos pontos principais referentes ao assunto, bem como fornecer subsídios para provas mais gerais.

Como foi dito acima, espera-se que a hipótese de Penrose, a HCW, seja suficiente

para determinar que cosmologias com fluido perfeito sujeitas a tal hipótese devam apresentar uma evolução do tipo FLRW, o que no entanto não se mostra como um resultado óbvio. Entretanto este parece ser um resultado ao menos sugestivo, como mostrou Tod em um artigo de 1987 [17]. Neste artigo, analisando perturbações lineares de modelos FLRW e procurando soluções exatas das equações de Einstein com singularidades isotrópicas, Tod observou que a presença de uma singularidade isotrópica não é uma propriedade muito restritiva como um princípio de seleção entre modelos cosmológicos. O que parece ser bastante restritiva é a condição adicional de nulidade do tensor de Weyl inicialmente. Nos exemplos de perturbações de modelos FLRW apresentados por Tod nesse artigo, tanto os modos de crescimento quanto de decaimento presentes eram completamente eliminados quando era imposta não só a condição de existência de uma singularidade isotrópica mas também a nulidade do tensor de Weyl inicial (HCW), fazendo com que fosse possível apenas uma solução FLRW exata. Tal análise levou Tod então a formular uma conjectura, que pode ser enunciada como:

Conjectura de Tod:

Uma cosmologia de fluido perfeito, com uma equação barotrópica de estado, que possua uma singularidade isotrópica na qual o tensor de Weyl se anula é necessariamente uma solução FLRW.

Obs.: A existência de uma equação de estado no enunciado acima, segundo Tod [17], é necessária para eliminar, por exemplo, as soluções de Stephani ([52, 53]).

Algumas tentativas de comprovação da conjectura acima têm sido feitas. Na próxima seção apresentaremos dois exemplos de tratamento do problema desenvolvidos

respectivamente por Goode e Wainwright [18, 51, 54] e por Newman [19, 55]. A seguir vamos apresentar uma proposta de tratamento devida a Tod [6] (detalhes em [4, 5]), que desenvolve um problema de valor inicial para cosmologias de fluido perfeito com equação de estado da forma $p = (\gamma - 1)\rho$, no qual a 3-métrica da singularidade constitui o conjunto de dados iniciais. Partindo de um resultado de Goode [54] de que o fluxo de fluido em uma cosmologia de fluido perfeito com uma singularidade isotrópica é necessariamente irrotacional, Tod considera uma foliação do espaço-tempo cujas superfícies de nível podem ser correlacionadas com certas funções Z , que são potências do tempo próprio. Assim pode-se procurar cosmologias que possam ser “regularizadas” por um fator conforme que é função apenas de Z (ou seja, do tempo). A proposta de Tod é tratar tal função Z como um campo escalar no espaço-tempo conforme \hat{M} , satisfazendo a uma “equação de onda” em \hat{M} , e procurar resolver as equações de Einstein com uma “fonte” construída a partir de Z .

Utilizando um fator conforme Ω relacionado a Z por

$$\Omega = Z^{\frac{2}{3\gamma-2}} \tag{3.1.1}$$

na transformação conforme dada pela eq.(1.1.7), as equações de Einstein (conformes) serão

$$\hat{R}_{ab} - \frac{4}{3\gamma-2} \frac{1}{Z} \hat{\nabla}_a \hat{\nabla}_b Z + \frac{12\gamma}{(3\gamma-2)^2} \frac{1}{Z^2} (1-G) \hat{\nabla}_a Z \hat{\nabla}_b Z -$$

$$-\hat{g}_{ab} \left(\frac{2}{3\gamma - 2} \frac{1}{Z} \hat{\nabla}^c \hat{\nabla}_c Z - \frac{6(2 - \gamma) U^2}{(3\gamma - 2)^2 Z^2} (1 - G) \right) = 0 , \quad (3.1.2)$$

onde

$$U^2 = -\hat{g}^{ab} \hat{\nabla}_a Z \hat{\nabla}_b Z \quad (3.1.3)$$

e

$$G = U^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} , \quad (3.1.4)$$

com “ $\hat{\nabla}$ ” indicando derivação covariante no espaço-tempo conforme \hat{M} . No caso específico $1 < \gamma < 2$, as identidades de Bianchi contraídas [24] fornecem (em \hat{M}) a equação de onda [5]

$$\hat{\nabla}^a \hat{\nabla}_a Z + \frac{(2 - \gamma) 1}{(\gamma - 1) U} \hat{\nabla}^a Z \hat{\nabla}_a U = 0 . \quad (3.1.5)$$

(Para os casos $\gamma = 2$ —“matéria dura”— e $\gamma = 1$ —“poeira”— tratados respectivamente em [4] e [5] os resultados são similares.) Uma vez dada uma solução das eqs.(3.1.2) e (3.1.5) acima, deve-se reutilizar o fator conforme Ω dado pela eq.(3.1.1) para, usando uma transformação inversa àquela da eq.(1.1.7), obter-se uma solução das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, o qual flui ortogonalmente às hipersuperfícies de Z constante e atende a uma equação de estado do tipo $p = (\gamma - 1)\rho$.

Entretanto as condições iniciais devem ser aplicadas sobre a hipersuperfície Σ correspondente a $Z = 0$, a qual, como vemos da eq.(3.1.2) possui uma singularidade de curvatura (a curvatura de Ricci conforme \hat{R}_{ab} vai a infinito). Portanto deve-se “regularizar” a hipersuperfície Σ para que se possa obter soluções da eq.(3.1.2). Para fazer isso, Tod basicamente realiza uma decomposição (3+1) das eqs.(3.1.2) e (3.1.5), com respeito às hipersuperfícies de Z constante, para obter as equações de evolução e de vínculo do problema de valor inicial. Em geral as condições de contorno de tal problema a serem dadas para Z constante incluem a 3-métrica da hipersuperfície correspondente a Z , a segunda forma fundamental (a “curvatura extrínseca” — ver seção 3.3 desta monografia) e o valor de U . Porém haverá singularidades, em $Z = 0$, nessas equações de vínculo e evolução e, para que o problema de valor inicial seja bem colocado, um número menor de condições iniciais será permitido, restando como dado arbitrário apenas a 3-métrica da hipersuperfície Σ correspondente a $Z = 0$. Veremos na próxima seção que este resultado concorda com uma outra conjectura formulada por Goode e Wainwright [18].

Segundo Tod [6] a vantagem desse tipo de tratamento é que ele resulta em uma questão precisa: Quais são os tipos de teoremas de existência e unicidade possíveis para o sistema obtido na decomposição das eqs.(3.1.2) e (3.1.5) (e as variantes para $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$) tendo apenas a 3-métrica em $Z = 0$ como dado arbitrário? Uma vez que existam soluções para esse sistema poder-se-á, então, realizar a transformação inversa daquela representada pela eq.(1.1.7) para passar do espaço-tempo conforme para o espaço-tempo físico, para obter assim cosmologias de fluido perfeito com equação de estado e possuindo uma singularidade isotrópica. Porém a correlação com a conjectura de Tod só se dá de fato quando as soluções não só existirem, mas também quando forem únicas.

Para entender melhor este ponto vamos considerar inicialmente que existem soluções para o problema. Vamos representar por H , na fig.1, o conjunto de todas as 3-métricas ${}_0\hat{h}_{\alpha\beta}$ apropriadas a servirem de dados iniciais para o problema e por C o conjunto de todas as 3-métricas associadas às cosmologias de fluido perfeito (e equação de estado barotrópica) com singularidade isotrópica, métricas estas obtidas a partir de ao menos uma das soluções do conjunto H decorrido um intervalo de tempo Δt desde $t = 0$. As

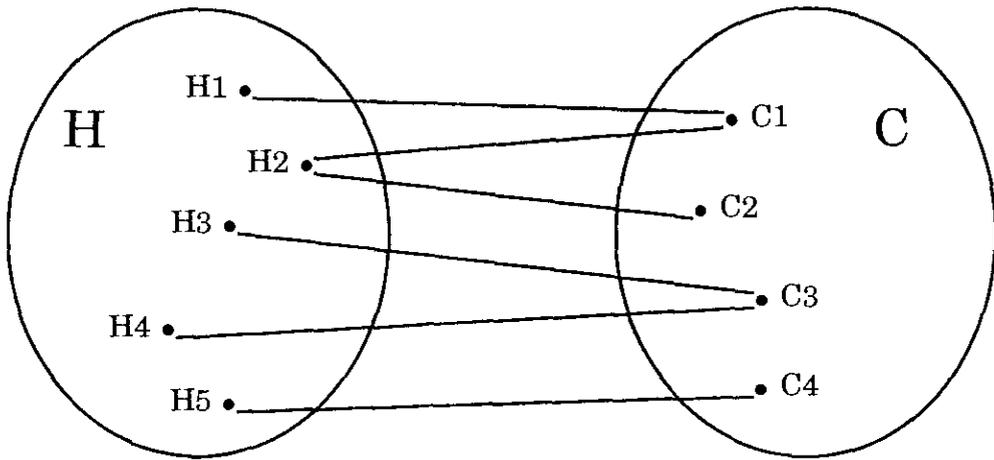


Figura 1: Representação das soluções existentes. O conjunto H é o conjunto das 3-métricas iniciais na singularidade isotrópica. O conjunto C é o conjunto das cosmologias em $t = \Delta t$, no espaço-tempo físico, que se iniciaram com 3-métrica pertencente a H . As linhas ligando os dois conjuntos indicam quais 3-métricas iniciais dão origem a quais cosmologias.

linhas ligando os dois conjuntos indicam as soluções possíveis no intervalo Δt , ou seja, quais 3-métricas iniciais H_i evoluem para quais 3-métricas C_j decorrido um intervalo de tempo Δt . Como estamos considerando apenas as soluções existentes, cada métrica de um conjunto deve estar relacionada ao menos a uma métrica do outro, podendo entretanto haver mais de uma correlação para uma mesma métrica de qualquer dos dois conjuntos

pois nada foi afirmado sobre a unicidade das soluções. Vemos assim por exemplo que a métrica H_1 , aplicada sobre a hipersuperfície Σ correspondente a $t = 0$, fornece os dados iniciais que determinam a cosmologia de métrica C_1 . Já H_2 fornece dados iniciais tanto para C_1 quanto para C_2 , enquanto que H_5 está relacionada apenas a C_4 e assim por diante de forma a que todas as H_i de H estejam relacionadas a todas as C_j de C .

Vamos supor agora que existam 3-métricas em C relacionadas a espaços de curvatura constante, e portanto a cosmologias FLRW, representadas na fig.2 por C' . As

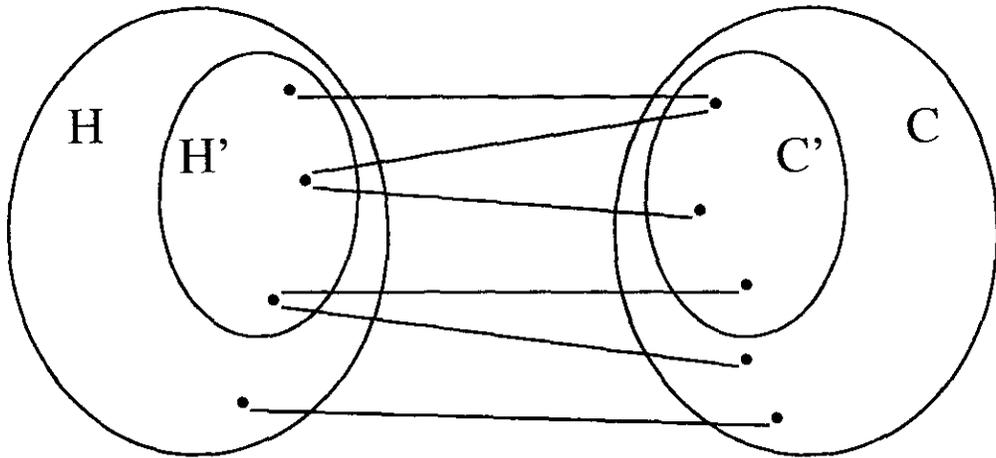


Figura 2: Representação de soluções com curvatura espacial constante. O sub-conjunto H' de H é formado por todas as 3-métricas correspondentes a superfícies de curvatura constante. O sub-conjunto C' contém todas as cosmologias com curvatura espacial constante de C . Os elementos de C' só podem ter correspondência com aqueles de H' , mas os elementos de H' podem ter correspondência com quaisquer elementos de C .

cosmologias FLRW necessariamente possuem tensor de Weyl sempre nulo (ver seção 2.2 desta monografia). De acordo com o resultado de Goode e Wainwright [18] de que o tensor de Weyl inicial, isto é, o tensor de Weyl em Σ tem parte magnética nula e parte elétrica proporcional ao tensor de Ricci sem traço, temos que o tensor de Weyl inicial é

nulo se e somente se Σ é um espaço de curvatura constante (ver seção 3.3 desta monografia). Portanto os pontos de C' , que representam as soluções FLRW do problema de valor inicial tratado aqui, necessariamente devem estar relacionados **apenas** com pontos pertencentes ao conjunto H' (contido em H) das 3-métricas correspondentes a superfícies de curvatura constante, pois o tensor de Weyl não só é nulo para todo o sub-conjunto H' como também é nulo **apenas** para este sub-conjunto. Isto já está mostrado na fig.2. Na mesma figura vemos que a recíproca não é verdadeira, isto é, pode haver pontos de H' relacionados também a pontos que não pertencem a C' . Também ilustrado na fig.2 é o fato de que cada ponto de H' deve estar relacionado a pelo menos um dos pontos de C' . Isto porque para cada 3-métrica de H' há **pelo menos uma** possibilidade de evolução para uma cosmologia de curvatura espacial constante que é aquela correspondente ao caso trivial $\Delta t = 0$.

Se agora além da existência for garantida também a unicidade das soluções haverá então uma correspondência bi-unívoca entre os pontos de H e C , como mostrado na fig.3. Como os pontos de C' só podem ter correspondência com pontos de H' e como estes últimos, como foi dito acima, devem manter **ao menos uma** correspondência com um dos pontos de C' , deveremos ter obrigatoriamente que cada ponto de H' deve estar relacionado apenas a um único ponto de C' e vice-versa. Haverá assim uma correspondência bi-unívoca entre todos os pontos de H' e todos aqueles de C' .

Podemos então concluir, uma vez que existam soluções do problema de valor inicial tratado aqui e que estas soluções sejam únicas (e lembrando que o tensor de Weyl é nulo apenas para as soluções cujas 3-métricas espaciais pertencem ao sub-conjunto H' de H), que as únicas cosmologias de fluido perfeito (com equação de estado) que admitem

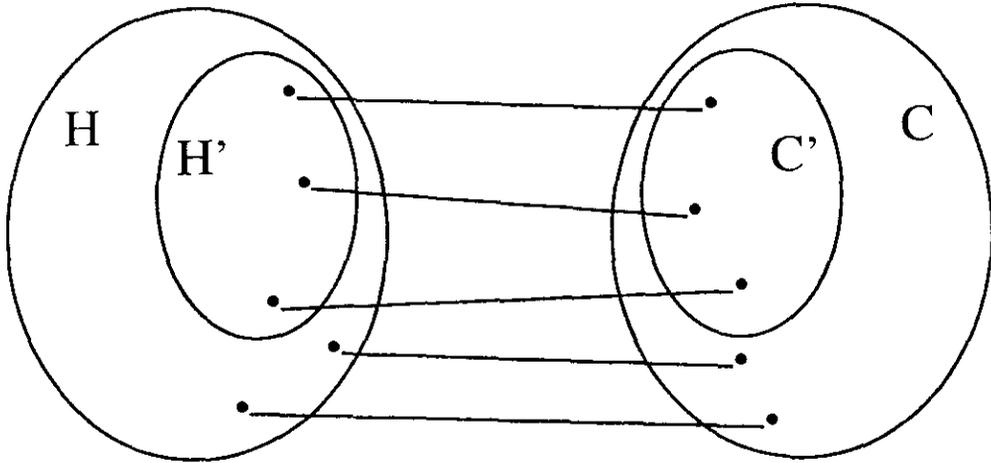


Figura 3: Representação de unicidade das soluções. Neste caso a relação entre H e C é bi-unívoca. Assim sendo, a relação entre H' e C' também deverá ser bi-unívoca (ou seja, os pontos de C' relacionam-se unicamente com aqueles de H' e vice-versa).

uma singularidade isotrópica (cosmologias correspondentes ao conjunto C) e cujo tensor de Weyl é nulo na singularidade inicial (3-métrica pertencente a H') são as cosmologias FLRW (correspondentes ao sub-conjunto C'). Ou seja, garantidas a existência e a unicidade das soluções, a concordância com a conjectura de Tod segue naturalmente.

O exemplo específico de problema de valor inicial tratado acima foi elaborado de maneira um pouco particularizada. Em ambos os trabalhos onde tal problema é apresentado [4, 5] foram feitas certas escolhas em relação às variáveis do problema. Por exemplo foi imposto $\gamma = cte$, onde γ é o coeficiente da lei- γ de estado, o que talvez não seja estritamente necessário (ver [19, 55]). Portanto as considerações utilizadas nestes trabalhos por Tod a respeito das variáveis do problema podem, talvez, tê-lo particularizado a tal ponto que possa haver outros problemas de valor inicial, com conclusões diferentes, possíveis de

serem elaborados. Neste caso não basta verificar a existência e a unicidade de soluções do problema acima, onde $\gamma = cte$, para que a conjectura de Tod seja declarada verdadeira. Necessitaremos na verdade elaborar um problema mais geral para, aí sim, verificar a existência e a unicidade das soluções. Note-se que nesse caso geral a conjectura de Tod fica provada bastando que a existência e a unicidade sejam referentes apenas às soluções cujas 3-métricas iniciais pertencem a um conjunto H' de 3-métricas correspondentes a espaços de curvatura constante, análogo ao caso anterior, não importando as outras soluções (isto será equivalente, no problema específico de Tod, a dizer que, na fig.3, deve haver correspondência bi-unívoca apenas entre os pontos dos conjuntos H' e C' . Os pontos restantes de H e C poderiam se corresponder de maneira não bi-unívoca, desde que não fossem correlacionados com aqueles de H' e C').

3.2 Modificação da Conjectura por Evolução do Conceito de Entropia Gravitacional.

Na seção anterior apresentamos um exemplo de problema de valor inicial, elaborado por Tod [4, 5], para cosmologias de fluido perfeito com singularidade isotrópica, o qual, para ser bem colocado, exigia que as únicas condições iniciais que podiam ser dadas arbitrariamente sobre a hipersuperfície conformemente relacionada à singularidade fôsem justamente as componentes da 3-métrica desta hipersuperfície. Este é um resultado que

concorda plenamente com uma outra conjectura, devida a Goode e Wainwright [18, 51], que introduziremos nesta seção.

Uma prova da conjectura de Tod certamente será de muita importância no contexto dos argumentos apresentados tanto por Barrow, a respeito de uma possível correlação entre o alto grau de isotropia e a relativamente baixa quantidade de entropia observados no universo atual (ver seção 1.2), quanto por Penrose, acerca da “entropia gravitacional” e sua relação com a geometria do Universo (seção 2.1). Uma vez provada tal conjectura, a conclusão de que um Universo com fluido perfeito (obedecendo a uma equação de estado) e satisfazendo à Hipótese da Curvatura de Weyl apresenta necessariamente uma evolução do tipo FLRW será, ao menos, um fator a mais no sentido de adicionar plausibilidade a tais argumentos. Certamente este seria um resultado muito forte, pois o Universo atual, satisfeitas as condições expressas no enunciado da conjectura, seria perfeitamente isotrópico, não apresentando formação de estrutura (isto no caso da teoria clássica de gravitação de Einstein, com a qual estamos trabalhando aqui. No caso de uma teoria mais geral de gravitação quântica, como sugere Penrose [15], talvez pudesse haver mecanismos que gerassem não-homogeneidades na distribuição de matéria no Universo) nem processos dispersivos geradores de entropia. Isto pode ser amenizado, como sugere Tod [17], simplesmente não considerando que o fluido que preenche o Universo seja exatamente perfeito ou com equação de estado. Mas há também a possibilidade, aliás já prevista por Penrose [15] de se enfraquecer a própria Hipótese da Curvatura de Weyl. Na seção 2.2 desta monografia tal enfraquecimento, a que chamamos “HCW Fraca”, foi usado quando da procura de um parâmetro de medida da entropia gravitacional baseado no tensor de Weyl W_{abcd} . Foi visto que a primeira proposta de um tal parâmetro, eq.(2.2.3), que

levava em conta o enunciado original da HCW (“HCW Forte”), foi descartada por não se ter encontrado nenhum exemplo de cosmologia de fluido perfeito com equação barotrópica de estado, e possuindo uma singularidade isotrópica a qual, sujeita à condição de nulidade do tensor de Weyl inicialmente, não evoluísse sempre como uma cosmologia FLRW (o que concorda plenamente com a conjectura de Tod). Sendo sempre modelos FLRW, tais cosmologias possuiriam tensor de Weyl sempre nulo, o que impediria o aumento da entropia gravitacional como medida pelo parâmetro P definido pela eq.(2.2.3). A nova proposta de parâmetro de medida de entropia gravitacional, baseada no enfraquecimento da HCW, está representada na eq.(2.2.4), que repetiremos aqui:

$$P = \frac{W_{abcd}W^{abcd}}{R_{ef}R^{ef}} . \quad (3.2.1)$$

Na expressão acima, para que o parâmetro P seja nulo inicialmente, em atenção à condição de que a entropia gravitacional deve ser inicialmente nula (ver eq.(2.2.2)), é necessário que o tensor de Ricci R_{ab} domine o tensor de Weyl W_{abcd} em $t = 0$. Essa exigência guarda uma correlação clara com a definição matemática do conceito de singularidade isotrópica como proposta por Goode e Wainwright que apresentamos na seção 1.1 desta monografia. No mesmo artigo onde introduzem esta definição matemática [18], Goode e Wainwright apresentam também uma demonstração de que a mesma implica na dominância do tensor de Ricci R_{ab} sobre o tensor de Weyl W_{abcd} em uma singularidade isotrópica, ou seja, de que em toda singularidade isotrópica tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_{abcd}W^{abcd}}{R_{ef}R^{ef}} = 0 . \quad (3.2.2)$$

Assim vemos que a definição matemática de singularidade isotrópica dada por Goode e Wainwright está bem de acordo com a exigência de nulidade inicial do parâmetro P de medida de entropia gravitacional, mostrando-se também como um formalismo adequado para se tratar do enfraquecimento da Hipótese da Curvatura de Weyl. Com isso já estamos em condições de procurar modelos mais realísticos de universos em que haja formação de estrutura.

Outros resultados [18] foram obtidos a partir da definição de Goode e Wainwright de singularidade isotrópica. A partir de tais resultados e analisando a natureza das condições iniciais que podem ser especificadas arbitrariamente em uma singularidade isotrópica, verificaram que, satisfeitas as equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, o comportamento dos tensores de Einstein, de Weyl e de alguns outros tensores era determinado pela geometria intrínseca da singularidade inicial, ou seja, pela 3-métrica da hipersuperfície conforme correspondente a $t = 0$. Por outro lado nenhum vínculo era imposto sobre a 3-métrica da singularidade isotrópica. Isso levou Goode e Wainwright à sugestão que chamaremos de “Conjectura de Goode e Wainwright”, também chamada de “Conjectura de Valor Inicial” [42], e que pode ser enunciada como [18, 51]:

Conjectura de Goode e Wainwright:

Seja I o conjunto de todas as soluções das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito e equação barotrópica de estado que admitem uma singularidade isotrópica. A especificação da 3-métrica da singularidade isotrópica determina um único membro de I .

De acordo com Goode [51] (ver também discussão na seção anterior sobre a unicidade das soluções do problema de valor inicial elaborado por Tod), se a conjectura acima for correta seguirá que no caso da curvatura na singularidade isotrópica ser constante o modelo resultante deverá ser um dos modelos FLRW. O tensor de Weyl pode ser decomposto em uma parte *elétrica* E_{ab} e em uma parte *magnética* H_{ab} (ver eq.(3.3.56) da próxima seção). Entretanto foi mostrado em [18] que nas hipersuperfícies conformes a parte elétrica \hat{E}_{ab} do tensor de Weyl é proporcional ao tensor de Ricci espacial conforme sem traço, enquanto que a parte magnética \hat{H}_{ab} na singularidade isotrópica é nula. Como o tensor de Ricci espacial sem traço é nulo se e somente se a curvatura espacial for constante (ver seção 3.3), a conjectura passa a ser então que a nulidade dos tensores \hat{E}_{ab} e \hat{H}_{ab} na singularidade isotrópica resulta em que o membro correspondente do conjunto I , do enunciado acima, deve ser um modelo FLRW. Tal redução da conjectura de Goode e Wainwright é então equivalente à conjectura de Tod formulada na seção anterior, uma vez que as partes elétrica E_{ab} e magnética H_{ab} do tensor de Weyl, no espaço-tempo físico, relacionam-se àquelas do espaço-tempo conforme através das transformações

$$E^a_b = \Omega^{-2} \hat{E}^a_b \quad (3.2.3)$$

e

$$H^a_b = \Omega^{-2} \hat{H}^a_b . \quad (3.2.4)$$

Vemos assim que a conjectura de Tod pode ser entendida como um caso particular da

conjectura mais geral de Goode e Wainwright. A conjectura de Goode e Wainwright pode ser visualizada na fig.3 da seção 3.1 .

Baseando-se na definição sua e de Wainwright de singularidade isotrópica, Goode [51] então desenvolveu um problema de valor inicial que governa a evolução dos tensores de Weyl e de “shear” da congruência normal às superfícies de nível em \hat{M} . Concentrou sua atenção nas soluções das equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, com o fluido satisfazendo a uma equação de estado tipo lei- γ e a uma condição de regularidade dada pela definição [18, 51]:

Definição de Regularidade:

Podemos associar, com qualquer congruência tipo-tempo V em M , uma congruência tipo-tempo \hat{V} em \hat{M} tal que $\hat{V} = \Omega V$ em \hat{M} . Se pudermos escolher \hat{V} como sendo regular (no mínimo C^3) sobre uma vizinhança aberta de $t = 0$ em \hat{M} , dizemos que V é regular na singularidade isotrópica.

Se o universo em questão possui uma singularidade isotrópica e é satisfeita a condição de regularidade em $t = 0$ o fluxo de fluido, como mostrado em [20, 54, 56], é necessariamente irrotacional. Como foi feito por Tod no problema de valor inicial apresentado na seção anterior, Goode então considerou que as superfícies de nível de t coincidiam com as hiper-superfícies ortogonais ao fluxo de fluido. Além disso, por simplicidade, considerou apenas fluxos geodésicos (fluxos com aceleração nula). Com tais escolhas não só a vorticidade e a aceleração (ver seção 3.3) no espaço-tempo físico serão nulas, mas também os seus respectivos pares conformes.

Utilizando as identidades de Bianchi relacionadas à divergência do tensor de Weyl expresso em termos de suas partes elétrica e magnética (“equações de Maxwell da gravitação” [24]), Goode então apresenta um conjunto de equações diferenciais parciais que governam a evolução no tempo dos tensores conformes de “shear” $\hat{\sigma}_{ab}$ (ver definição na seção 3.3), campo elétrico \hat{E}_{ab} e campo magnético \hat{H}_{ab} . Tais equações são válidas para $t > 0$, mas no contexto de singularidades isotrópicas o sistema de equações pode ser estendido para $t = 0$. Os dados iniciais poderão ser impostos, então, na singularidade isotrópica. A condição de contorno dada pela Hipótese da Curvatura de Weyl exige que os valores iniciais dos campos elétrico e magnético conformes, respectivamente ${}_0\hat{E}_b^a$ e ${}_0\hat{H}_b^a$, sejam

$${}_0\hat{E}_b^a = 0 \quad , \quad {}_0\hat{H}_b^a = 0 \quad , \quad (3.2.5)$$

e além disso o valor inicial do tensor de “shear” conforme ${}_0\hat{\sigma}_b^a$ também será nulo:

$${}_0\hat{\sigma}_b^a = 0 \quad . \quad (3.2.6)$$

O problema de valor inicial proposto acima terá como solução possível

$$\hat{E}_b^a = 0 \quad , \quad \hat{H}_b^a = 0 \quad , \quad \hat{\sigma}_b^a = 0 \quad (3.2.7)$$

para todo $t \geq 0$. Para $t > 0$ as eqs.(3.2.3) e (3.2.4) e a transformação conforme do tensor de “shear”

$$\sigma_{ab} = \Omega \hat{\sigma}_{ab} \quad (3.2.8)$$

vão nos garantir que teremos então também

$$E^a_b = 0 \quad , H^a_b = 0 \quad , \sigma^a_b = 0 \quad , \quad (3.2.9)$$

o que corresponde a um modelo FLRW. Porém não foi estabelecida a unicidade da solução dada pela eq.(3.2.7), o que será necessário para que a conjectura de Tod fique provada ao menos para as restrições sobre o fluxo do fluido feitas aqui. De qualquer maneira, o problema de valor inicial desenvolvido por Goode por um outro caminho, talvez mais geral que aquele desenvolvido por Tod, foi mais uma vez reduzido a um problema de unicidade de soluções.

Uma outra proposta de comprovação das conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright foi feita por Newman [57, 19, 55]. Ele parte de sua definição de singularidade isotrópica, a que chama de “singularidade conforme” [19], apresentada na seção 1.1 desta monografia. Newman [55] utilizou um método similar à técnica usada por Friedrich [58], no estudo de “equações de campo conformes no vácuo”. de redução das equações de evolução a um *sistema hiperbólico simétrico quasi-linear*. Seu desenvolvimento é muito técnico e trabalhoso, e vamos apresentá-lo apenas em linhas gerais.

Como Tod e Goode, Newman também utiliza o resultado de vorticidade nula [20, 54, 56] e considera que o fluido encontra a hipersuperfície da singularidade conforme ortogonalmente a ela para que o fator conforme seja tal que suas superfícies de nível

sejam ortogonais à velocidade do fluido. Alguns resultados concordantes com o de Goode e Wainwright também são encontrados em relação aos tensores \hat{E}^a_b e \hat{H}^a_b . Uma diferença em relação ao desenvolvimento de Goode e Wainwright é que o fator conforme é agora considerado C^∞ . Como consequência, segundo Newman [57] “curiosa mas desejável”, o índice γ para a equação barotrópica $p = (\gamma - 1)\rho$ tenderá ao valor $\frac{4}{3}$, apropriado para um “big-bang” quente.

Basicamente, o que Newman faz é selecionar um conjunto de variáveis independentes de forma a obter, das equações conformemente transformadas de Einstein, com fonte de fluido perfeito e equação de estado $p = (\gamma - 1)\rho$, um sistema de equações de evolução hiperbólico simétrico quasi-linear de primeira ordem da forma [55, 57]

$$A^0(u)\partial_t u = A^\alpha(u)\partial_\alpha u + (B(u) + t^{-1}C(u))u \quad (3.2.10)$$

com $u = u_0$ em $t = 0$. Aqui u é um vetor coluna de 63 componentes formado pela justaposição das famílias de variáveis correspondentes a soluções de um conjunto de equações diferenciais provenientes das equações de Einstein. As famílias possuem respectivamente 9, 9, 1, 1, 3, 9, 27, 3, 1 componentes o que perfaz o número de componentes do vetor coluna u referido. $A^0(u), \dots, A^3(u)$, $B(u)$ e $C(u)$ são então matrizes 63×63 , analíticas em u , com $A^0(u), \dots, A^3(u)$ simétricas (daí a *simetria* do sistema), e $A^0(u)$ é definida positiva (portanto a *hiperbolicidade*). Além disso $(A^0(u))^{-1}C(u)$ não possui autovalores positivos e $C(u)u_0 = 0$ para todo u . A quantidade t é o fator conforme que também serve como coordenada temporal e a função u_0 sobre a hipersuperfície inicial é fixada pela 3-métrica conforme juntamente com condições de calibre.

O sistema representado pela eq.(3.2.10) é que deve agora ser resolvido objetivando a uma comprovação da conjectura de Tod. Para que tal comprovação seja completa é necessário, como antes, estabelecer um teorema de unicidade para as soluções do sistema. Entretanto sérias dificuldades são encontradas, que no entanto se resolvem para o caso $\gamma = \frac{4}{3}$. Newman assim apresenta uma prova do teorema [57, 55]:

Teorema: Um espaço-tempo, preenchido com um fluido perfeito com $\gamma = \frac{4}{3}$, que evolui de uma singularidade conforme tipo-espaço sujeita à Hipótese da Curvatura de Weyl é necessariamente Robertson-Walker próximo à singularidade.

Este resultado portanto é uma resposta afirmativa para a conjectura de Tod no caso $\gamma = \frac{4}{3}$.

Com relação à conjectura de Goode e Wainwright a resposta também é afirmativa no caso $\gamma = \frac{4}{3}$. Newman conclui em seu desenvolvimento que, para $\gamma = \frac{4}{3}$, a redução realizada das equações de Einstein conformes a um sistema hiperbólico simétrico de primeira ordem garante a existência e unicidade da evolução, para tempos pequenos, para qualquer escolha da 3-métrica sobre a hipersuperfície inicial. Esta 3-métrica portanto constitui-se, nesse caso, no conjunto de dados iniciais livremente especificáveis, mesmo que não seja satisfeita a Hipótese da Curvatura de Weyl.

O desenvolvimento de Newman, juntamente com a argumentação de Penrose, já é um passo importante no sentido de se fornecer uma explicação para a grande isotropia do Universo atual, pelo menos para o caso $\gamma = \frac{4}{3}$. É desejável entretanto uma extensão para índices γ mais gerais. Assim, por exemplo, se for verificada a validade de tais conjec-

turas também para o caso $\gamma = 2$, as idéias de Barrow acerca da “Quiescent Cosmology” ganhariam novo impulso como possível explicação para o quadro atual da evolução do Universo.

3.3 Última Forma da Conjectura de Tod. Resultados Úteis para uma Prova Geral.

Como vimos nas seções anteriores deste capítulo, foram tentados diferentes caminhos para uma prova da conjectura de Tod. Goode e Wainwright partiram das identidades de Bianchi, através das equações de Maxwell da gravitação, para definir um problema de valor inicial relacionando os tensores conformes de shear $\hat{\sigma}_b^a$, campo elétrico \hat{E}_b^a e magnético \hat{H}_b^a , com dados iniciais ${}_0\hat{\sigma}_b^a = 0$, ${}_0\hat{E}_b^a = 0$ e ${}_0\hat{H}_b^a = 0$. Entretanto restou o problema de unicidade da evolução, de forma que a conjectura não pôde ser provada. O problema de unicidade também não ficou resolvido no enfoque de Tod de utilizar uma função Z do tempo próprio como um campo escalar, satisfazendo a uma equação de onda em \hat{M} , e a partir desta função construir uma fonte para as equações de Einstein. Já Newman tratou as equações de Einstein, escritas em termos de quantidades definidas em \hat{M} , como um sistema de equações hiperbólicas simétricas para um vetor de 63 componentes dependendo das coordenadas espaciais e do tempo. A partir daí apresentou uma prova das conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright, mas apenas para a matéria satisfazendo à equação de

estado da radiação, $p = \frac{1}{3}\rho$, nas vizinhanças da singularidade.

O que se pretende nesta seção é fornecer subsídios para uma prova das conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright para equações de estado mais gerais. Iniciaremos nossa exposição das identidades de Ricci [24]:

$$V_{b||c||d} - V_{b||d||c} = R_{abcd}V^a \quad , \quad (3.3.1)$$

onde $(||)$ denota derivação covariante com respeito à N -métrica g_{ab} . Através das identidades acima podemos obter equações de imersão de uma variedade espacial D -dimensional em uma variedade espaço-temporal N -dimensional, onde $N = D + 1$, com termos de correção dados em função da curvatura extrínseca K_{ab} , usualmente definida da seguinte forma [3]

$$K_{ab} = -V_{a||c}h^c_b \quad (3.3.2)$$

com as propriedades

$$K_{ab} = K_{ba} \quad , \quad K_{ab}V^a = 0 \quad , \quad (3.3.3)$$

onde estamos considerando que V^a é um campo de vetores normais à hipersuperfície D -dimensional imersa em um espaço-tempo $(D + 1)$ -dimensional e normalizado por

$$V^aV_a = -1 \quad (3.3.4)$$

e h_{ab} é o tensor de projeção

$$h_{ab} = g_{ab} + V_a V_b . \quad (3.3.5)$$

O problema de valor inicial, ou problema de Cauchy, para as equações de Einstein envolve a especificação tanto da métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ quanto da curvatura extrínseca $K'_{\alpha\beta}$. Se o problema de Cauchy é bem posto, os valores iniciais destes dois objetos formam o conjunto das condições iniciais necessárias para se determinar a evolução da métrica espaço-temporal g_{ab} e, uma vez especificado o tipo de fluido, determinar a evolução da própria cosmologia. O que se espera é que a utilização de equações (no caso as equações de imersão obtidas com a ajuda das eq.(3.3.1)) que contenham explicitamente o termo em K'_{ab} (e suas derivadas) e que além disso relacionem objetos definidos sobre a hipersuperfície de métrica $h_{\alpha\beta}$ com aqueles definidos em todo o espaço-tempo de métrica g_{ab} , possa simplificar o problema de valor inicial de forma a facilitar a prova daquelas duas conjecturas, para equações de estado mais gerais que a da radiação, bem como a resolução do problema de unicidade. No desenvolvimento que faremos a seguir vamos procurar verificar o comportamento dos objetos geométricos envolvidos nas duas conjecturas citadas acima, tais como o tensor de Weyl W_{abcd} , a métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ e a curvatura extrínseca $K'_{\alpha\beta}$, no espaço-tempo físico. Procuraremos esquematizar os cálculos efetuados aqui esperando que, uma vez que os problemas tenham sido bem compreendidos no espaço-tempo físico M , a passagem para o espaço-tempo conforme \hat{M} possa levar a um melhor entendimento ou mesmo a uma comprovação daquelas duas conjecturas.

Vamos, portanto, inicialmente apresentar as equações de imersão. A dedução destas equações, um pouco longa, pode ser acompanhada em seus principais passos em [3]. Em coordenadas gaussianas

$$g_{0\alpha} = 0 \quad , \quad g_{00} = -1 \quad , \quad (3.3.6)$$

e para um sistema comóvel

$$V_a = (-1, 0, 0, 0) \quad , \quad V^a = (1, 0, 0, 0) \quad . \quad (3.3.7)$$

as equações de imersão que usaremos podem ser escritas na forma [8]:

$${}^{(N)}R = {}^{(D)}R - 2\dot{K} + K^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} + K^2 \quad (3.3.8)$$

$${}^{(N)}R^\beta_\nu = {}^{(D)}R^\beta_\nu - \dot{K}^\beta_\nu + K K^\beta_\nu \quad (3.3.9)$$

$${}^{(N)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} = {}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} + K^\alpha_\gamma K^\beta_\nu - K^\alpha_\nu K^\beta_\gamma \quad (3.3.10)$$

onde

$$K = h^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} \quad ; \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt} \quad . \quad (3.3.11)$$

A este ponto é interessante observar que para um tensor A^β_α D -dimensional

$$A^\beta_{\nu|0} = \dot{A}^\beta_\nu + A^\beta_\alpha K^\alpha_\nu - K^\beta_\alpha A^\alpha_\nu . \quad (3.3.12)$$

Partindo da definição dada pela eq.(3.3.2), temos

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -V_{a||c} h^c_b \\ &= -\Gamma^0_{ac} h^c_b \\ &= -\frac{1}{2} g_{ac|0} h^c_b \end{aligned}$$

e portanto, sabendo que $h^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, a curvatura extrínseca pode ser escrita como

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \dot{h}_{\alpha\beta} . \quad (3.3.13)$$

No desenvolvimento seguinte consideraremos, exceto especificação em contrário, apenas cosmologias com fonte de fluido perfeito nas equações de Einstein:

$${}^{(N)}R^a_b - \frac{1}{2} \delta^a_b {}^{(N)}R = \kappa((p + \rho)V^a V_b + p\delta^a_b) . \quad (3.3.14)$$

A correlação entre o tensor de Weyl e as equações de imersão, eqs.(3.3.8) a (3.3.10), será feita através da decomposição do tensor de Riemann [8, 48]

$${}^{(N)}R^{ab}{}_{cd} = \frac{4}{N-2} \delta^{[a}{}_{[c} {}^{(N)}R^{b]}{}_{d]} - \frac{2 {}^{(N)}R}{(N-1)(N-2)} \delta^{[a}{}_{[c} \delta^{b]}{}_{d]} + {}^{(N)}W^{ab}{}_{cd} . \quad (3.3.15)$$

Obs.: A equação acima foi escrita para N dimensões, onde $N \geq 4$ é o número de dimensões do espaço-tempo ($N = D + 1$). Entretanto a mesma equação é válida também para os tensores definidos só no espaço, bastando para isso simplesmente substituir N por D , onde $D \geq 3$, e mudar os índices latinos para índices gregos.

A caracterização de uma cosmologia preenchida por fluido perfeito como sendo FLRW se dará quando a curvatura espacial for constante, portanto atendendo à seguinte condição necessária e suficiente [8, 48]:

$${}^{(D)}R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu} = \frac{2 {}^{(D)}R}{D(D-1)} \delta^{[\alpha}{}_{[\gamma} \delta^{\beta]}{}_{\nu]} , \quad (3.3.16)$$

onde ${}^{(D)}R_{|\gamma} = 0$, ou ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$.

A derivada covariante $V_{a||b}$ do vetor velocidade que aparece na definição de K_{ab} dada pela eq.(3.3.2) pode ser decomposta numa parte perpendicular e outra paralela a V_b da seguinte maneira

$$V_{a||b} = V_{a||c} g^c{}_b = V_{a||c} h^c{}_b - V_{a||c} V^c V_b = V_{a||c} h^c{}_b - \dot{V}_a V_b , \quad (3.3.17)$$

onde usamos a definição de “aceleração” do fluxo de fluido

$$\dot{V}_a \equiv V_{a||c} V^c . \quad (3.3.18)$$

A parte perpendicular a V_a , puramente espacial, pode ser desmembrada em um tensor simétrico e outro anti-simétrico:

$$\begin{aligned} V_{a||c} h^c{}_b &= \frac{1}{2}(V_{a||c} h^c{}_b + V_{b||c} h^c{}_a) + \frac{1}{2}(V_{a||c} h^c{}_b - V_{b||c} h^c{}_a) \\ &= \frac{1}{2}(V_{a||c} h^c{}_b + V_{b||c} h^c{}_a) + \omega_{ab} , \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

onde usamos a definição de “tensor vorticidade” ω_{ab} :

$$\omega_{ab} \equiv \frac{1}{2}(V_{a||c} h^c{}_b - V_{b||c} h^c{}_a) . \quad (3.3.20)$$

O traço do primeiro termo do lado direito da eq.(3.3.19) é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(V_{a||c} h^c{}_b + V_{b||c} h^c{}_a) h^{ab} &= V_{a||c} h^{ca} \\ &= V_{a||c} (g^{ca} + V^c V^a) \\ &= V_{a||c} g^{ca} \\ &= \theta , \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

onde θ é a “expansão” definida por

$$\theta \equiv V_{\parallel a}^a . \quad (3.3.22)$$

O primeiro termo do lado direito de (3.3.19) pode portanto ser desmembrado em uma parte sem traço e outra com traço, fazendo-se

$$\frac{1}{2}(V_{a\parallel c}h^c_b + V_{b\parallel c}h^c_a) = \sigma_{ab} + \frac{\theta}{D}h_{ab} , \quad (3.3.23)$$

onde foi usada a definição do “tensor de shear” σ_{ab}

$$\sigma_{ab} \equiv \frac{1}{2}(V_{a\parallel c}h^c_b + V_{b\parallel c}h^c_a) - \frac{\theta}{D}h_{ab} . \quad (3.3.24)$$

Das eqs.(3.3.17) a (3.3.21), juntamente com a eq.(3.3.24), temos finalmente a seguinte decomposição da derivada covariante do vetor velocidade:

$$V_{a\parallel b} = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{\theta}{D}h_{ab} - \dot{V}_a V_b . \quad (3.3.25)$$

Tendo em vista a simetria do tensor K_{ab} , defido pela eq.(3.3.2), a decomposição acima nos fornece, para a curvatura extrínseca,

$$K_{ab} = -\sigma_{ab} - \frac{\theta}{D} h_{ab} . \quad (3.3.26)$$

A partir desta equação, que contém explicitamente os tensores K_{ab} e h_{ab} definidos no espaço-tempo físico M , podemos já desenvolver algumas considerações que talvez possam dar uma melhor idéia do que acontece no espaço-tempo conforme \hat{M} .

O problema de Cauchy para as equações de campo de Einstein que estamos tratando é, a partir de g_{ab} e de \dot{g}_{ab} definidos sobre a hipersuperfície inicial $t = t_1$ (onde $t_1 > 0$, pois o problema de Cauchy não é definido na singularidade, isto é, em $t = 0$) numa foliação do espaço-tempo físico M , encontrar os valores de g_{ab} e \dot{g}_{ab} na hipersuperfície correspondente a $t = t_1 + \delta t$, o que pode ser obtido caso se conheça \ddot{g}_{ab} em $t = t_1$. O problema de Cauchy fica bem posto se \ddot{g}_{ab} em $t = t_1$ puder ser obtido de g_{ab} e \dot{g}_{ab} em $t = t_1$, o que pode ser feito através das próprias equações de Einstein [40]. Assim o processo poderá ser continuado, obtendo-se \ddot{g}_{ab} em $t = t_1 + \delta t$ de g_{ab} e \dot{g}_{ab} em $t = t_1 + \delta t$ para fornecer g_{ab} e \dot{g}_{ab} em $t = t_1 + 2\delta t$ e assim por diante até que se determine a evolução completa de g_{ab} e \dot{g}_{ab} no tempo desde $t = t_1$. Sabemos que, uma vez que escolhermos coordenadas gaussianas em um sistema comóvel, eqs.(3.3.6) e (3.3.7), o problema se reduz a encontrar a evolução no tempo de $h_{\alpha\beta}$ e de $\dot{h}_{\alpha\beta}$ a partir do conjunto de equações dinâmicas de Einstein

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} , \quad (3.3.27)$$

sendo as equações restantes

$$G^{a0} = \kappa T^{a0} \quad (3.3.28)$$

apenas equações de vínculo sobre os dados iniciais g_{ab} e \dot{g}_{ab} . Destes dados iniciais os dados “livres”, isto é, que ainda podem ser arbitrariamente especificados, são apenas $h_{\alpha\beta}$ e $\dot{h}_{\alpha\beta}$, pois devido à escolha de coordenadas que fizemos já foi imposto que $g_{00} = -1$, $g_{0\alpha} = 0$, e assim $\dot{g}_{0\alpha} = 0$ ($\forall t$). É necessário portanto obter-se $\ddot{h}_{\alpha\beta}$ a partir dos dados iniciais $h_{\alpha\beta}$ e $\dot{h}_{\alpha\beta}$.

No contexto no qual estamos trabalhando, de utilizar a curvatura extrínseca e as identidades de Ricci, podemos substituir, através da eq.(3.3.13), $\dot{h}_{\alpha\beta}$ por $K_{\alpha\beta}$ e $\ddot{h}_{\alpha\beta}$ por $\dot{K}_{\alpha\beta}$ e tratar assim de um problema totalmente equivalente. O que queremos então é conhecer a evolução temporal de $K_{\alpha\beta}$, ou seja, $\dot{K}_{\alpha\beta}$ a partir dos dados iniciais $h_{\alpha\beta}$ e $K_{\alpha\beta}$ em $t = t_1$. Faremos isto a partir da eq.(3.3.26), que nos fornece

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = -\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{\dot{\theta}}{D} h_{\alpha\beta} - \frac{\theta}{D} \dot{h}_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.3.29)$$

Lembremos, a partir da eq.(3.3.12), que podemos também escrever para um tensor arbitrário A^β_{ν}

$$A^\beta_{\nu|0} = \dot{A}^\beta_{\nu} + A^\beta_{\alpha} \sigma^\alpha_{\nu} - \sigma^\beta_{\alpha} A^\alpha_{\nu} \quad ,$$

o que será satisfeito por qualquer combinação linear de σ^α_{ν} e δ^α_{ν} , por exemplo, K^α_{ν} .

Utilizando a eq.(3.3.13) teremos, da eq.(3.3.29),

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = -\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{\dot{\theta}}{D}h_{\alpha\beta} + \frac{2\theta}{D}K_{\alpha\beta} \ , \quad (3.3.30)$$

e usando outra vez a eq.(3.3.26):

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = -\dot{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{2\theta}{D}\sigma_{\alpha\beta} - \left(\frac{\dot{\theta}}{D} + \frac{2\theta^2}{D^2}\right)h_{\alpha\beta} \ . \quad (3.3.31)$$

Das eqs.(3.3.26) e (3.3.31) acima vemos que uma condição necessária para que os únicos valores a serem definidos sobre a superfície de Cauchy do problema (ou seja, a superfície suave correspondente ao tempo inicial $t = t_1$ na foliação do espaço-tempo e sobre a qual são especificados todos os dados iniciais) sejam as componentes da D -métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ é que o tensor de “shear” $\sigma_{\alpha\beta}$ seja sempre nulo (pois $\sigma_{\alpha\beta}$ e $\frac{\theta}{D}h_{\alpha\beta}$ são partes irredutíveis na definição de $K_{\alpha\beta}$, obtida a partir da decomposição de $V_{a||b}$). A evolução temporal de $K_{\alpha\beta}$ passa a ser dada neste caso por

$$\dot{K}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{\dot{\theta}}{D} + \frac{2\theta^2}{D^2}\right)h_{\alpha\beta} \quad (3.3.32)$$

e a evolução temporal de $h_{\alpha\beta}$, representada por $K_{\alpha\beta}$, passa a ser dada, de acordo com a eq.(3.3.26), por

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{\theta}{D}h_{\alpha\beta} \ . \quad (3.3.33)$$

A expansão θ , nas equações acima, definida pela eq.(3.3.22) como a divergência do vetor velocidade, envolve termos em $h_{\mu\nu}$ e $\dot{h}_{\mu\nu}$ devido à derivação covariante. Na eq.(3.3.32) $\dot{\theta}$ irá envolver termos até $\ddot{h}_{\mu\nu}$ (ou $\dot{K}_{\mu\nu}$). Portanto a condição $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ não é, até aqui, suficiente para garantir que os únicos valores a serem definidos sobre a superfície de Cauchy sejam as componentes de $h_{\alpha\beta}$. Porém, como já foi mostrado, é uma condição necessária e vamos, mais à frente, analisar o que significa uma cosmologia com $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ no contexto de cosmologias com fluido perfeito. Antes disso, entretanto, vamos apresentar algumas equações que serão importantes nessa análise.

Começaremos com uma equação que nos fornece a própria evolução temporal da expansão, a grandeza $\dot{\theta}$ que aparece na eq.(3.3.32). Para obtê-la multiplicaremos a eq.(3.3.1) por $V^c g^{bd}$, o que resulta em

$$\dot{V}_{\parallel d}^d - V_{\parallel c}^d V_{\parallel d}^c - V_{\parallel d \parallel c}^d V^c - {}^{(N)}R_{ac} V^a V^c = 0 \quad . \quad (3.3.34)$$

Utilizando-se a decomposição de $V_{a\parallel b}$, dada pela eq.(3.3.25), e as equações de Einstein com fonte de fluido perfeito, eqs.(3.3.14), obtemos depois de alguns cálculos

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{D} - \dot{V}_{\parallel a}^a + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{\kappa[(D-2)\rho + Dp]}{D-1} = 0 \quad , \quad (3.3.35)$$

onde usamos as definições [24]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma^{ab} \sigma_{ab} \quad , \quad \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{ab} \omega_{ab} \quad . \quad (3.3.36)$$

A eq.(3.3.35) acima é a equação de Raychaudhuri em $N = D + 1$ dimensões e é válida para um fluido genérico. Sua importância para nós, como veremos a seguir, é que, entre outras coisas, apresenta-nos um vínculo entre $\dot{V}_{||a}^a$ e ω . Para ver isto, podemos comparar, através da eq.(3.3.15), as decomposições das curvaturas de Riemann em D e em $N = D + 1$ dimensões:

$$\begin{aligned} {}^{(N)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} - {}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} &= \frac{4}{D-1}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} {}^{(N)}R^{\beta]}_{\nu]} - \frac{4}{D-2}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} {}^{(D)}R^{\beta]}_{\nu]} - \frac{2}{D(D-1)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} \delta^{\beta]}_{\nu]} + \\ &+ \frac{2}{(D-1)(D-2)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} \delta^{\beta]}_{\nu]} + {}^{(N)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} - {}^{(D)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} . \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Das equações de imersão para a curvatura de Riemann $R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$, eq.(3.3.10), e das eqs.(3.3.14) de Einstein, as quais com índices espaciais simplificam-se para

$${}^{(N)}R^{\alpha}_{\beta} = \left(\frac{{}^{(N)}R}{2} + \kappa p \right) \delta^{\alpha}_{\beta} , \quad (3.3.38)$$

temos, depois de alguns cálculos simples

$$\begin{aligned} 2K^{\alpha}_{[\gamma} K^{\beta]}_{\nu]} &= \frac{4\kappa p}{D(D-1)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} \delta^{\beta]}_{\nu]} + \frac{2}{(D-1)(D-2)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} \delta^{\beta]}_{\nu]} - \\ &- \frac{4}{D-2}\delta_{[\gamma}^{[\alpha} {}^{(D)}R^{\beta]}_{\nu]} + {}^{(N)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} - {}^{(D)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} . \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Contraindo a equação acima com δ_α^γ obtemos

$$K K^\beta{}_\nu - K^{\beta\alpha} K_{\alpha\nu} = \frac{2\kappa\rho}{D} \delta_\nu^\beta - {}^{(D)}R^\beta{}_\nu + E^\beta{}_\nu . \quad (3.3.40)$$

onde $E^\beta{}_\nu$ vem da definição bastante conhecida na literatura [24] como “parte elétrica do tensor de Weyl”

$$E^b{}_d \equiv {}^{(N)}W^{ab}{}_{cd} V_a V^c \quad (3.3.41)$$

com propriedades

$$E_{ab} = E_{ba} , \quad E^a{}_a = 0 , \quad E_{ab} V^b = 0 . \quad (3.3.42)$$

Contraindo agora a eq.(3.3.40) chegamos a

$${}^{(D)}R = 2\kappa\rho - K^2 + K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} . \quad (3.3.43)$$

Usando agora a equação de imersão para o escalar de curvatura. eq.(3.3.8), juntamente com a contração da eq.(3.3.14), dada por

$${}^{(N)}R = \frac{2\kappa(\rho - Dp)}{D - 1} , \quad (3.3.44)$$

obtemos finalmente

$$\dot{K} - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} = \frac{\kappa}{D-1} [(D-2)\rho + Dp] , \quad (3.3.45)$$

ou

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{D} - 2\sigma^2 - \frac{\kappa}{D-1} [(D-2)\rho + Dp] , \quad (3.3.46)$$

onde utilizamos a decomposição de K_{ab} dada pela eq.(3.3.26).

Como vemos, a eq.(3.3.46) acima é equivalente à equação de Raychaudhuri, eq.(3.3.35), com vorticidade ω e divergência da aceleração $\dot{V}_{\parallel a}^a$ relacionadas por

$$\dot{V}_{\parallel a}^a + 2\omega^2 = 0 . \quad (3.3.47)$$

Isto nos leva a considerar apenas fluidos cuja vorticidade é nula pois devido à escolha que fizemos de coordenadas gaussianas em um sistema comóvel, eqs.(3.3.6) e (3.3.7), temos que

$$\dot{V}^a = V_{\parallel b}^a V^b = \Gamma_{00}^a = 0 , \quad (3.3.48)$$

ou seja, o fluido é geodésico (fluido cujos constituintes possuem aceleração nula). Conse-

quentemente $\omega^2 = 0$ também, e como ω_{ab} é um tensor tipo-espaço (lembrando também que a métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ é definida positiva) teremos necessariamente

$$\omega_{ab} = 0 \quad . \quad (3.3.49)$$

A anulação do tensor vorticidade ω_{ab} , imposta acima pela escolha de coordenadas que fizemos, pode parecer um tanto restritiva, mas está de acordo com o importante resultado devido a Goode [54] e Scott [20, 56], muito utilizado por outros autores, como mostramos nas seções anteriores deste capítulo, de que uma vez que a congruência do fluido seja regular em $t = 0$ o fluxo do fluido é necessariamente irrotacional. Obs.: As eqs.(3.3.48) e (3.3.49) acima referem-se a quantidades $(\dot{V}^a$ e $\omega_{ab})$ definidas no espaço-tempo físico M , mas implicam que as quantidades $(\hat{V}_a)'$ e $\hat{\omega}_{ab}$, definidas no espaço-tempo conforme \hat{M} , também vão se anular [51]:

$$\hat{\omega}_{ab} = 0 \quad , \quad (\hat{V}_a)' = 0 \quad . \quad (3.3.50)$$

Daqui em diante estaremos considerando sempre $\dot{V}^a = 0$ e $\omega_{ab} = 0$. Com isso a decomposição de $V_{a||b}$, por exemplo, dada pela eq.(3.3.25) passa a ser simplesmente

$$V_{a||b} = \sigma_{ab} + \frac{\theta}{D} h_{ab} \quad , \quad (3.3.51)$$

o que facilitará os cálculos a seguir.

Algumas equações importantes podem ser obtidas com a ajuda do pseudotensor totalmente antissimétrico η^{abcd} , amplamente utilizado [24]. Temos que

$$\eta^{abcd} = \eta^{[abcd]} \quad , \quad \eta^{1234} = (-g)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad (3.3.52)$$

onde g é o determinante da métrica g_{ab} . Se multiplicarmos a eq.(3.3.1) por $\eta_{sf}{}^{cd}V^f$, utilizando também as decomposições dadas pelas eqs.(3.3.15) e (3.3.25), obteremos, depois de alguns cálculos,

$$H_{bs} = -h^a{}_b h^l{}_s \sigma_{(a}{}^{c||d} \eta_{l)fcd} V^f \quad , \quad (3.3.53)$$

onde os parênteses denotam simetrização ($S_{(ab)} = \frac{1}{2}(S_{ab} + S_{ba})$) e onde foi usada a definição [24] de “parte magnética do tensor de Weyl”

$$H_{ac} \equiv \frac{1}{2} \eta_{ab}{}^{gh} {}^{(N)}W_{ghcd} V^b V^d \quad (3.3.54)$$

com propriedades

$$H_{ab} = H_{ba} \quad , \quad H^a{}_a = 0 \quad , \quad H_{ab} V^b = 0 \quad . \quad (3.3.55)$$

Usando a definição dada pela eq.(3.3.54), bem como a definição dada pela eq.(3.3.41), podemos também decompor o tensor de Weyl W_{abcd} em partes independentes relacionadas

aos tensores E_{ab} e H_{ab} . Em N dimensões teremos

$$\begin{aligned} {}^{(N)}W_{abcd} &= \left(-\frac{1}{N-3} \eta_{abpq} \eta_{cdrs} + g_{abpq} g_{cdrs} \right) V^p V^r E^{qs} \\ &\quad - \frac{2}{(N-2)(N-3)} (\eta_{abpq} g_{cdrs} + g_{abpq} \eta_{cdrs}) V^p V^r H^{qs} \ , \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

onde η_{abcd} foi definido em eq.(3.3.52) e g_{abcd} é o tensor dado por

$$g_{abcd} \equiv g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \ . \quad (3.3.57)$$

Outra equação para ${}^{(N)}W_{abcd}$ pode ser obtida a partir da comparação das decomposições das curvaturas de Riemann em D e em $N = D + 1$ dimensões, dada pela eq.(3.3.37). Utilizando-se as equações de imersão, eqs.(3.3.8) a (3.3.10), a eq.(3.3.43), a eq.(3.3.14) e a decomposição da curvatura extrínseca K_{ab} , eq.(3.3.26), obteremos

$$\begin{aligned} {}^{(N)}W^{\alpha\beta}_{\ \gamma\nu} &= {}^{(D)}W^{\alpha\beta}_{\ \gamma\nu} + 2\sigma^{\alpha[\gamma} \dot{\sigma}^{\beta]\nu} + \frac{4\sigma^2}{D(D-1)} \delta^{\alpha[\gamma} \delta^{\beta]\nu} \\ &\quad - \frac{4}{D-2} \delta^{\alpha[\gamma} \dot{\sigma}^{\beta]\nu} - \frac{8\theta}{D(D-2)} \delta^{\alpha[\gamma} \sigma^{\beta]\nu} \ , \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

que contraída resulta em

$$E^{\beta}_{\ \nu} = -\sigma^{\beta\alpha} \sigma_{\alpha\nu} + \frac{2\sigma^2}{D} \delta^{\beta}_{\ \nu} - \dot{\sigma}^{\beta}_{\ \nu} - \frac{2\theta}{D} \sigma^{\beta}_{\ \nu} \ , \quad (3.3.59)$$

onde foi feito uso da relação $W^{\alpha\beta}_{\alpha\gamma} - E^{\beta}_{\gamma} = 0$, (ver eq.(3.3.41)). A eq.(3.3.58) nos fornece portanto uma comparação entre os tensores de Weyl em D e em $N = D + 1$ dimensões e a eq.(3.3.59) nos fornece a evolução temporal do tensor de “shear” σ^{β}_{ν} . Utilizando as eqs.(3.3.40) e (3.3.43) assim como a eq.(3.3.26), podemos obter também, da eq.(3.3.59) acima, uma relação entre o tensor de Ricci D -dimensional sem traço e a evolução temporal do tensor de “shear”

$${}^{(D)}R^{\beta}_{\nu} - \frac{{}^{(D)}R}{D}\delta^{\beta}_{\nu} = -\dot{\sigma}^{\beta}_{\nu} - \theta\sigma^{\beta}_{\nu} \ , \quad (3.3.60)$$

que nos será muito útil.

Uma última equação independente pode ser obtida multiplicando-se a eq.(3.3.1) por $g^{bc}h^d_e$ e usando a eq.(3.3.25). Para um fluido perfeito teremos, após usar a eq.(3.3.14),

$$h^d_e \left(\frac{(D-1)}{D}\theta_{|d} - \sigma^c_{d||c} \right) = 0 \ . \quad (3.3.61)$$

As eqs.(3.3.46) e (3.3.59) (equações de propagação) e as eqs.(3.3.53) e (3.3.61) (equações de vínculo) acima são um conjunto de equações equivalente às identidades de Ricci para $\dot{V}_a = 0$, $\omega_{ab} = 0$ e fluido perfeito [24]. Sua obtenção pode ser feita independentemente das equações de imersão, eq.(3.3.8) a (3.3.10). Em particular, a eq.(3.3.59), obtida com a ajuda das equações de imersão, pode ser obtida a partir da identidade de Ricci e da equação de Raychaudhuri.

Com relação à fonte das equações de Einstein, como já foi dito, estaremos con-

siderando sempre um fluido perfeito. As equações de conservação de energia e momentum, válidas para um fluido genérico, são

$$T^{ab}{}_{|b} = 0 \quad . \quad (3.3.62)$$

Para um fluido perfeito, eq.(1.1.5), e com a aceleração $\dot{V}^a = 0$, multiplicando a eq.(3.3.62) pelo vetor velocidade V_a , temos a equação para a conservação de energia

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0 \quad , \quad (3.3.63)$$

e multiplicando a mesma eq.(3.3.62) por h_{ac} , temos a equação para a conservação de momentum

$$p|_b h^b{}_c = 0 \quad . \quad (3.3.64)$$

Da equação acima vemos imediatamente que $p|_{\gamma} = 0$, ou seja, a pressão p é função apenas do tempo. Esta informação é muito importante pois, se por exemplo o fluido está sujeito a uma equação de estado $p = p(\rho)$ (como de fato é considerado nas conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright) temos que

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad (3.3.65)$$

de onde se conclui que $\rho = \rho(t)$. Portanto, da equação de conservação de energia, eq.(3.3.63), temos que $\theta = \theta(t)$, da equação de Raychaudhuri, eq.(3.3.46), temos também que $\sigma = \sigma(t)$ e finalmente da eq(3.3.43), escrita na forma

$${}^{(D)}R = 2\kappa\rho - \frac{(D-1)}{D}\theta^2 + 2\sigma^2 \quad , \quad (3.3.66)$$

temos que ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$, o que é uma condição necessária para que se tenha, de acordo com a eq.(3.3.16), um universo de curvatura espacial constante, como são os universos FLRW.

Vamos agora analisar o significado da anulação do tensor de “shear” σ_{ab} em cosmologias com fluido perfeito e com \dot{V}_a e ω_{ab} nulos. Podemos partir da eq.(3.3.66) acima, que derivada no tempo

$${}^{(D)}\dot{R} = 2\kappa\dot{\rho} - \frac{2(D-1)}{D}\theta\dot{\theta} + 4\sigma\dot{\sigma} \quad (3.3.67)$$

e com as substituições de $\dot{\rho}$ e $\dot{\theta}$, dadas respectivamente pela eq.(3.3.63) e pela eq.(3.3.46), nos fornece

$${}^{(D)}\dot{R} + \frac{2}{D}\theta {}^{(D)}R = 4\sigma(\dot{\sigma} + \theta\sigma) \quad . \quad (3.3.68)$$

Se fizermos agora $\sigma_{ab} = 0$, a equação acima pode ser posta na forma

$$\frac{D}{2} \frac{{}^{(D)}\dot{R}}{{}^{(D)}R} = \frac{\dot{\rho}}{p + \rho} , \quad (3.3.69)$$

onde usamos novamente a eq.(3.3.63). Além disso o “shear” nulo na eq.(3.3.61) nos dará $\theta = \theta(t)$. o que através da eq.(3.3.46) de Raychaudhuri nos dá $\rho = \rho(t)$ (lembrando que para um fluido perfeito e $\dot{V}^a = 0$ teremos necessariamente $p = p(t)$ — ver eq.(3.3.64)) e daí, pela eq.(3.3.66), ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$. Assim sendo, como ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$ e $\rho = \rho(t)$, as derivadas temporais de ${}^{(D)}R$ e ρ são totais e , da eq.(3.3.69), podemos fazer

$$d {}^{(D)}R = \frac{2}{}^{(D)}R \frac{d\rho}{p + \rho} . \quad (3.3.70)$$

Finalmente da equação de imersão para ${}^{(D)}R$, eq.(3.3.8), vemos que ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(p, \rho, \theta)$.

Assim

$$d {}^{(D)}R = \frac{\partial {}^{(D)}R}{\partial p} dp + \frac{\partial {}^{(D)}R}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial {}^{(D)}R}{\partial \theta} d\theta , \quad (3.3.71)$$

e da comparação com a eq.(3.3.70) temos $p = p(\rho)$ e $\theta = \theta(\rho)$ necessariamente. Vemos portanto que, para $\sigma_{ab} = 0$, uma equação barotrópica de estado, $p = p(\rho)$, emerge naturalmente, uma vez que $\dot{V}_a = 0$, $\omega_{ab} = 0$ e o fluido seja perfeito.

Temos então que a nulidade do tensor de “shear” é suficiente para que ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$, que é uma condição necessária, mas não suficiente, para que tenhamos uma cosmologia FLRW. Entretanto a nulidade do tensor de “shear” apresenta outras con-

seqüências importantes. Vê-se diretamente que $\sigma_{ab} = 0$ na eq.(3.3.60) resulta na anulação do tensor de Ricci sem traço:

$${}^{(D)}R^\beta{}_\nu - \frac{{}^{(D)}R}{D}\delta^\beta{}_\nu = 0 . \quad (3.3.72)$$

A equação acima, quando levada em conta na decomposição do tensor de Riemann em D dimensões, dada através da eq.(3.3.15), resulta em

$${}^{(D)}R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu} = \frac{2}{D(D-1)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha}\delta^{\beta]}{}_{\nu]} + {}^{(D)}W^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu} . \quad (3.3.73)$$

Das eqs.(3.3.53) e (3.3.59) temos que $H_{bs} = 0$ e $E_{bs} = 0$ e, da decomposição de ${}^{(N)}W_{abcd}$, eq.(3.3.56), segue-se que também ${}^{(N)}W_{abcd} = 0$. Finalmente ${}^{(D)}W^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu}$ na eq.(3.3.58) será também nulo e teremos, da eq.(3.3.73) acima,

$${}^{(D)}R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu} = \frac{2}{D(D-1)}\delta_{[\gamma}^{[\alpha}\delta^{\beta]}{}_{\nu]} , \quad (3.3.74)$$

que é a mesma eq.(3.3.16). Obs.: Para $D = 3$ o tensor de Weyl espacial, ${}^{(3)}W^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu}$, já é automaticamente nulo (para ver isto pode-se “abrir” a eq.(3.3.15), com $N = 3$, em função das derivadas da métrica — ver também [40]) e a passagem da eq.(3.3.73) para a eq.(3.3.74) é imediata.

O resultado expresso na eq.(3.3.74) indica que a curvatura espacial será portanto constante, pois também teremos ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$ como havíamos concluído a partir da nulidade do tensor de “shear”. Aliás, uma vez que a expressão de ${}^{(D)}R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\nu}$ possa ser

dada na forma da eq.(3.3.74), não será necessário utilizar a informação de que o tensor de “shear” seja nulo (ou qualquer outra informação) para que se tenha ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$. A própria forma da eq.(3.3.74) já garante que ${}^{(D)}R_{|\gamma} = 0$, como já foi observado logo ao escrevermos a eq.(3.3.16). Para ver isto basta utilizar as identidades de Bianchi [24] em D dimensões

$${}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu;\lambda} + {}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\nu\lambda;\gamma} + {}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\lambda\gamma;\nu} = 0 \quad , \quad (3.3.75)$$

onde “;” indica derivação covariante com respeito à D -métrica espacial $h_{\alpha\beta}$. Assim, uma vez que o tensor de Riemann espacial ${}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ possa ser expresso como na eq.(3.3.74), a curvatura espacial do universo será necessariamente constante.

No caso que estamos tratando aqui, o fluido é perfeito. Portanto, como a eq.(3.3.74) nos garante que a curvatura espacial é constante, temos que o universo em questão é necessariamente do tipo FLRW. Ou seja, as únicas cosmologias com fluido perfeito, $\dot{V}_a = 0$ e $\omega_{ab} = 0$ e tais que $\sigma_{ab} = 0$ são as cosmologias FLRW. Mas, como foi dito, a partir da observação das eqs.(3.3.26) e (3.3.31), uma condição necessária para que os únicos valores, a serem definidos sobre a superfície de Cauchy do problema de Cauchy tratado aqui, sejam as componentes de $h_{\alpha\beta}$ em $t = t_1$ é que o tensor de “shear” σ_{ab} seja nulo, quando a curvatura espacial será sempre constante e o fluido será regido necessariamente por uma equação de estado $p = p(\rho)$, como foi mostrado nas páginas anteriores, a partir da eq.(3.3.66). Portanto chegamos a uma conclusão que pode ser apresentada através do seguinte enunciado:

As únicas cosmologias com fluido perfeito, tais que a vorticidade ω e a aceleração \dot{V}_a são nulas, para as quais os únicos valores a serem definidos sobre a superfície de Cauchy, do problema de Cauchy para as equações de Einstein, sejam as componentes da D -métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ inicial, são as cosmologias FLRW em que o fluido obedece a uma equação barotrópica de estado.

A relação do enunciado acima com a conjectura de Goode e Wainwright é bastante clara. Como vimos na seção anterior deste capítulo, o enunciado da conjectura afirma que para um universo preenchido com um fluido perfeito sujeito a uma equação barotrópica de estado e com uma singularidade isotrópica, a 3-métrica espacial da singularidade determina uma única cosmologia. Se for possível estender o enunciado que fizemos acima, a partir de uma superfície de Cauchy, que é necessariamente não-singular, para a singularidade isotrópica teremos, ao menos para $\omega = 0$ e $\dot{V}_a = 0$, uma restrição muito forte para o enunciado de Goode e Wainwright, qual seja, a cosmologia determinada unicamente pela 3-métrica (ou, no nosso caso mais geral, pela D -métrica) espacial da singularidade isotrópica deverá ser necessariamente do tipo FLRW. Além disso não será necessário exigir $p = p(\rho)$ no enunciado, pois isto segue naturalmente. O que esperamos é que uma tal extensão possa ser feita, posteriormente, através da procura, utilizando-se o conceito de curvatura extrínseca, de resultados a serem obtidos no espaço-tempo conforme \hat{M} similares aos apresentados aqui.

Isto é o que esperamos também com relação à conjectura de Tod, que pode ser entendida, como vimos, como um caso particular da conjectura de Goode e Wainwright. Seu enunciado afirma que as únicas cosmologias de fluido perfeito, com $p = p(\rho)$, que

possuem singularidade isotrópica e com ${}^{(4)}W_{abcd} = 0$ na singularidade inicial são as cosmologias FLRW. Esse enunciado, exceto na referência a um universo 4-dimensional que se inicia em uma singularidade isotrópica, será essencialmente análogo ao que apresentamos acima desde que se tenha que uma métrica espacial inicial (isto é, em $t = t_1$) de curvatura constante em um universo preenchido com o fluido perfeito de tipo usado aqui implique na nulidade do tensor de Weyl ${}^{(4)}W_{abcd}$ inicial. É justamente isto que desejamos mostrar em seguida para $N \geq 4$ dimensões. Como veremos, nossa demonstração independerá do tipo de fluido preenchendo o universo.

Sabemos das eqs.(3.3.53) e (3.3.59) que se o tensor de “shear” $\sigma_{\alpha\beta}$ for nulo então necessariamente o tensor de Weyl ${}^{(N)}W_{abcd}$ também será. Assim basta demonstrarmos a nulidade do tensor de “shear” para universos com curvatura espacial constante. Ou seja, universos cujo tensor de Riemann espacial ${}^{(D)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ relaciona-se ao escalar de curvatura espacial ${}^{(D)}R$ através da eq.(3.3.16). Contraíndo esta equação obtemos a eq.(3.3.72) e vemos que o tensor de Ricci D -dimensional sem traço é nulo para universos cuja curvatura espacial é constante. Da decomposição do tensor de Riemann, eq.(3.3.15), em D dimensões temos então também

$${}^{(D)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu} = 0 . \quad (3.3.76)$$

Obs.: Mais uma vez lembramos que ${}^{(3)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ é automaticamente nulo independente da curvatura D -dimensional ser ou não constante (ver obs. seguinte à eq.(3.3.74).

Para $D > 3$ a equação acima nos diz que a parte espacial do universo em questão é conformemente relacionada ao espaço euclidiano D -dimensional [48], de métrica $\delta_{\alpha\beta}$, ou

seja

$$h_{\alpha\beta} = F^2 \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.3.77)$$

onde F é uma função das coordenadas espaciais e do tempo.

Utilizando a eq.(3.3.26) na forma

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h_{\alpha\beta|0} - \frac{1}{D} \theta h_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.3.78)$$

e a conhecida expressão de $V_{||a}^a$ para a expansão θ , qual seja

$$\theta = V_{||a}^a = (\ln \sqrt{-g})' \quad , \quad (3.3.79)$$

vamos verificar qual o efeito da eq.(3.3.77) sobre o tensor de “shear”. O determinante da métrica g_{ab} que aparece na eq.(3.3.79), no sistema de coordenadas gaussianas que estamos usando, será

$$g = \det(g_{ab}) = -\det(h_{\alpha\beta}) = -\det(F^2 \delta_{\alpha\beta}) = -F^{2D} \det(\delta_{\alpha\beta}) \quad , \quad (3.3.80)$$

e assim, como $\delta_{\alpha\beta}$ não depende do tempo,

$$\theta = \left(\ln \sqrt{F^{2D} \det(\delta_{\alpha\beta})} \right)' = (D \ln F)' = D \frac{\dot{F}}{F} \quad . \quad (3.3.81)$$

Por outro lado, como temos também

$$h_{\alpha\beta|0} = (F^2\delta_{\alpha\beta})' = 2F\dot{F}\delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.3.82)$$

as eqs.(3.3.77) e (3.3.81) substituídas na eq.(3.3.78) vão resultar em

$$\sigma_{\alpha\beta} = F\dot{F}\delta_{\alpha\beta} - F\dot{F}\delta_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (3.3.83)$$

Portanto está provada, para $D > 3$, a nulidade do tensor de “shear” para universos de curvatura espacial constante. Para o caso $D = 3$ a eq.(3.3.76) não implica em uma relação conforme com o espaço euclidiano. Para que tal relação aconteça, de forma que a eq.(3.3.77) seja válida, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita [48]:

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma} \equiv {}^{(3)}R_{\alpha\beta;\gamma} - {}^{(3)}R_{\alpha\gamma;\beta} + \frac{1}{4}(h_{\alpha\gamma} {}^{(3)}R_{,\beta} - h_{\alpha\beta} {}^{(3)}R_{,\gamma}) = 0 \quad , \quad (3.3.84)$$

onde introduzimos a definição do tensor ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma}$. Na literatura [59], é usual definir-se um dual do mesmo, o tensor de Cotton-York, dado por

$$C^\alpha{}_\beta = \varepsilon^{\alpha\gamma\nu} {}^{(3)}R_{\beta\gamma\nu} = 2\varepsilon^{\alpha\gamma\nu} ({}^{(3)}R_{\beta\gamma} - \frac{1}{4} {}^{(3)}R h_{\beta\gamma})_{||\nu}$$

Universos de curvatura espacial constante, como vimos, possuem o tensor de Ricci sem

traço nulo, ou seja, obedecem à eq.(3.3.72), que com os índices abaixados é expressa simplesmente por

$${}^{(D)}R_{\alpha\beta} = \frac{{}^{(D)}R}{D} h_{\alpha\beta} . \quad (3.3.85)$$

Como $h_{\alpha\beta;\gamma} = 0$ e ${}^{(D)}R_{;\gamma} = {}^{(D)}R_{|\gamma}$, a expressão para ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma}$ será

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{12} (h_{\alpha\beta} {}^{(3)}R_{|\gamma} - h_{\alpha\gamma} {}^{(3)}R_{|\beta}) , \quad (3.3.86)$$

e como ${}^{(3)}R_{|\gamma} = 0$ para universos de curvatura espacial constante teremos que ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma}$ será nulo, sendo então atendida a condição dada pela eq.(3.3.84). Assim a métrica $h_{\alpha\beta}$ em 3 dimensões poderá ser expressa como na eq.(3.3.77) e daí teremos $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ também em $D = 3$, o que completa nossa demonstração. Assim mostramos, para o tipo de universo tratado aqui, que se o tensor de “shear” é nulo o espaço é de curvatura constante, portanto o universo é FLRW. A condição de nulidade do “shear” para que a cosmologia seja determinada somente pela métrica espacial $h_{\alpha\beta}$ inicial é portanto não apenas necessária mas também suficiente.

Como vimos, os cálculos realizados aqui baseiam-se fortemente em equações nas quais aparecem explicitamente o tensor de “shear” σ_{ab} . Tais equações nos permitiram verificar causas e conseqüências da anulação do tensor de “shear” (e portanto do tensor de Weyl N -dimensional ${}^{(N)}W_{abcd}$) em universos preenchidos com fluido perfeito. Resumindo os resultados acima podemos afirmar (enunciado (E1)) que para os universos considerados, com $\dot{V}_a = 0$ e $\omega_{ab} = 0$, temos que

$$(E1): \quad \sigma_{ab} = 0 \iff \text{curvatura espacial constante} ,$$

ressaltando mais uma vez que o fluido deve ser perfeito. Não será necessário impor a presença de uma equação barotrópica de estado. Como já vimos através da eq.(3.3.68), a nulidade do tensor de “shear” faz com que o lado direito desta equação se anule, o que implicará, mais à frente, no aparecimento de uma equação barotrópica de estado. No caso de universos com curvatura espacial constante uma tal equação de estado também aparecerá naturalmente. Para se ver isso pode-se utilizar a eq.(3.3.60). Se o espaço é de curvatura constante sabemos que o tensor de Ricci espacial sem traço, o lado esquerdo da eq.(3.3.60), será nulo, e teremos

$$\dot{\sigma}^\beta{}_\nu + \theta\sigma^\beta{}_\nu = 0 . \quad (3.3.87)$$

Multiplicando os termos da equação acima por $\sigma^\nu{}_\beta$ e sabendo que

$$(\sigma^\beta{}_\nu \sigma^\nu{}_\beta)' = 2\dot{\sigma}^\beta{}_\nu \sigma^\nu{}_\beta = 4\sigma\dot{\sigma} \quad (3.3.88)$$

obtemos

$$\sigma(\dot{\sigma} + \theta\sigma) = 0 , \quad (3.3.89)$$

o que também anula o lado direito da eq.(3.3.68), dando origem a uma equação barotrópica de estado pela repetição dos argumentos contidos nas eqs.(3.3.68) a (3.3.71). Assim, tanto no caso de nulidade do tensor de “shear” quanto no caso de curvatura espacial constante, aparecerá naturalmente uma equação de estado $p = p(\rho)$ para o fluido perfeito, não havendo porque exigi-la previamente em nossa análise.

Há, nos cálculos realizados nesta seção, outras conclusões e enunciados lógicos além do enunciado E1 que podem ser muito úteis quando for feita a extensão para o contexto das singularidades isotrópicas. Finalizando nossa análise, vamos esquematizar estes cálculos através da construção de um diagrama, o qual objetiva não só reunir os resultados obtidos aqui mas também possibilitar a obtenção de novas relações de implicação e, principalmente, fornecer indicações de possíveis caminhos para a extensão do problema ao espaço-tempo conforme. Tal diagrama será construído a partir do enunciado (E1) simplesmente percorrendo alguns pontos principais de sua comprovação. Como sempre, estaremos considerando que o fluido é perfeito e que a aceleração \dot{V}_a e o tensor vorticidade ω_{ab} são nulos.

Para iniciar a construção do diagrama, vamos primeiramente simplificar ligeiramente a expressão do enunciado (E1). Para tanto vamos chamar de P1 a premissa à esquerda do símbolo de equivalência do enunciado e de P2 chamaremos a premissa à direita:

P1: *O Universo possui tensor de “shear” nulo.*

P2: *O Universo possui curvatura espacial constante.*

Assim, o enunciado (E1) passa a ser expresso como

$$(E1): \quad P1 \iff P2 .$$

A representação dos enunciados no diagrama será feita da seguinte maneira: as premissas serão representadas por pontos acompanhados das denominações das premissas respectivas; a cada enunciado corresponderá uma linha ligando duas premissas; relações de implicação entre duas premissas serão representadas, sobre a linha reta correspondente, por uma seta direcionada para a premissa implicada (relações de equivalência serão representadas então por duas setas apontando em sentidos contrários). O enunciado (E1) será portanto, representado no diagrama de acordo com a fig.1 . Vamos agora “decom-

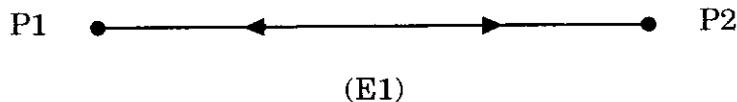


Figura 1: Diagrama representando o enunciado (E1). P1 e P2 são premissas básicas e a linha com setas duplas indica equivalência entre elas.

por” o enunciado (E1) em suas componentes lógicas, ou seja, vamos verificar a cadeia de implicações que compõem o desenvolvimento da prova do enunciado (E1). De imediato

já temos as componentes (E2): $P1 \implies P2$ e (E3): $P2 \implies P1$ que devemos em seguida decompor. Devido a diferenças nos respectivos desenvolvimentos, é conveniente tratar os casos $D = 3$ e $D > 3$ separadamente.

Para $D = 3$ a decomposição do enunciado (E2) é bastante simples. A eq.(3.3.60) nos diz que P1 implicará na anulação do tensor de Ricci sem traço. A eq.(3.3.73) nos dirá então que P2 deve ser verdadeira, pois ${}^{(3)}W^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ é sempre nulo (vide observação seguinte à eq.(3.3.74)) e o tensor ${}^{(3)}R^{\alpha\beta}_{\gamma\nu}$ poderá ser expresso na forma dada pela eq.(3.3.74). Portanto, acrescentando apenas a premissa P3, dada por

P3: O tensor de Ricci espacial sem traço do Universo é nulo.

teremos os enunciados:

$$(E4): \quad P1 \implies P3 \ ;$$

$$(E5): \quad P3 \implies P2 \ ,$$

que podem ser representados no diagrama como na fig.2 .

Já o enunciado (E3), Também representado na fig.2, possui uma decomposição um pouco mais complicada. O desenvolvimento que fizemos de sua prova, contida entre as eqs.(3.3.77) e (3.3.86), pode ser resumido da seguinte forma: Um universo de curvatura espacial constante possui necessariamente tensor de Ricci sem traço nulo e escalar de

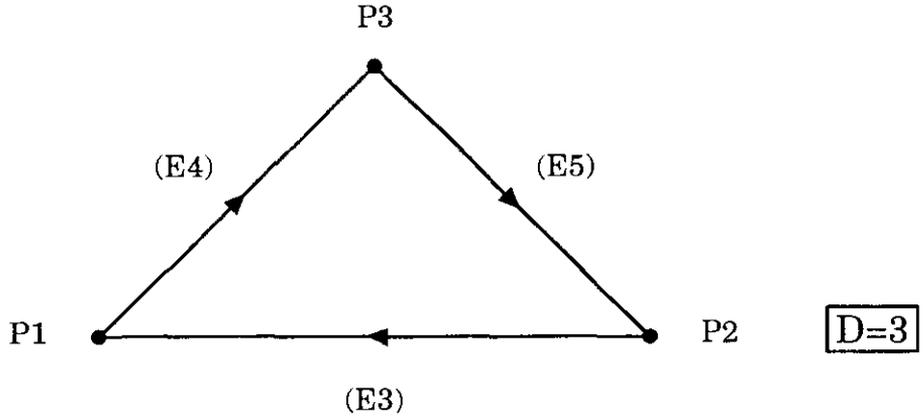


Figura 2: Decomposição do enunciado (E1) nos enunciados (E3), (E4) e (E5) em $D = 3$. O enunciado (E2) aparece implicitamente através de sua decomposição nos enunciados (E4) e (E5), devidos à inclusão da premissa P3.

curvatura ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$; estas duas características em conjunto implicam, em $D = 3$, na existência de uma relação conforme entre a parte espacial do universo e um espaço euclidiano 3-dimensional, o que por sua vez implica na nulidade do tensor de “shear”. Para representar esse desenvolvimento no diagrama, vamos introduzir a premissa

P4: *A parte espacial do Universo é conformemente relacionada a um espaço euclidiano.*

Poder-se-ia pensar por exemplo em introduzir uma premissa referente a ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$, que é necessária para a validade de P4. Entretanto ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$ é uma premissa que já é parte integrante, de acordo com a eq.(3.3.16), da definição de um espaço de curvatura constante, não havendo porque separá-la de tal definição. Assim, tendo em vista que

$(^D)R = (^D)R(t)$ faz na verdade parte de P2, haverá necessidade apenas de se introduzir a premissa P4 acima, e teremos portanto apenas os seguintes enunciados na decomposição do enunciado (E3):

$$(E6): \quad P2 \implies P3 \ ;$$

$$(E7): \quad P2 \wedge P3 \implies P4 \ ;$$

$$(E8): \quad P4 \implies P1 \ ,$$

onde o símbolo (\wedge) no enunciado (E7) significa que as premissas devem ser tomadas em conjunto. Uma observação a ser feita é que os enunciados (E6) e (E7) poderiam ser reduzidos ao enunciado único $P2 \implies P4$. Entretanto, como já existe no diagrama a premissa P3, é de interesse saber como ela se relaciona com as demais premissas.

A representação da decomposição do enunciado (E3) na cadeia de enunciados (E6), (E7) e (E8) não é tão simples devido justamente ao enunciado (E7). Para a representação deste enunciado, e de quaisquer outros compostos por um conjunto de duas premissas implicando em uma terceira, vamos introduzir uma nova regra na construção do diagrama: A premissa implicada deve ser ligada por uma linha tracejada a cada uma das premissas do conjunto de partida de modo que seja formado um ângulo menor que 180° entre as duas linhas tracejadas; nenhuma linha, tracejada ou cheia, com extremidade na premissa implicada poderá passar por este ângulo. Assim, a decomposição do enunciado (E3) deverá estar de acordo com a fig.3, onde representamos novamente, para maior

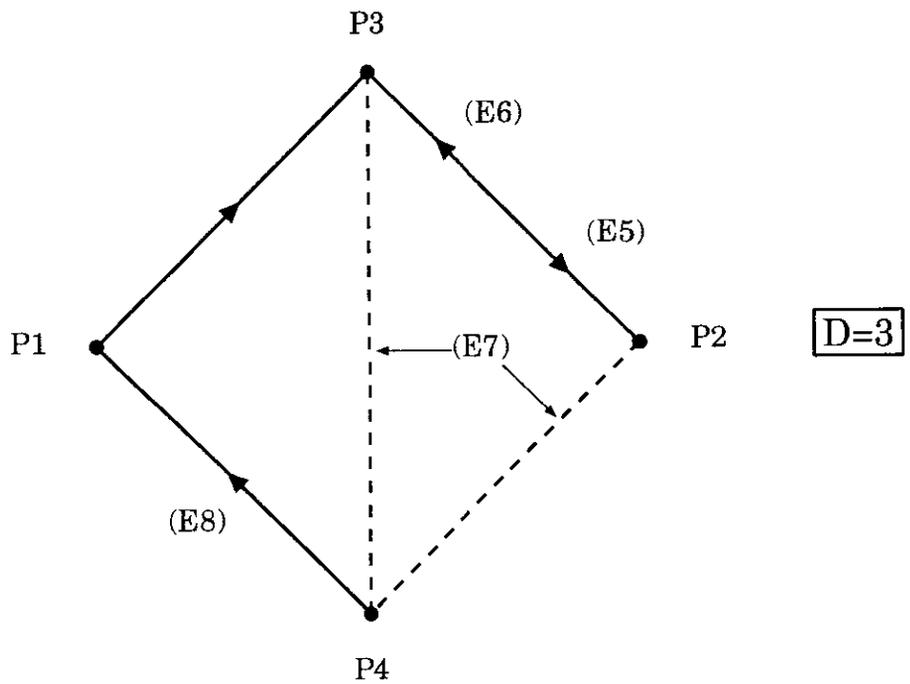


Figura 3: Decomposição do enunciado (E1) em $D = 3$, em termos das premissas P1, P2, P3 e P4, representando os enunciados (E5), (E6), (E7) e (E8). O enunciado (E7) aparece sob a forma de convergência de duas linhas tracejadas partindo respectivamente de P2 e de P3 e convergindo em P4.

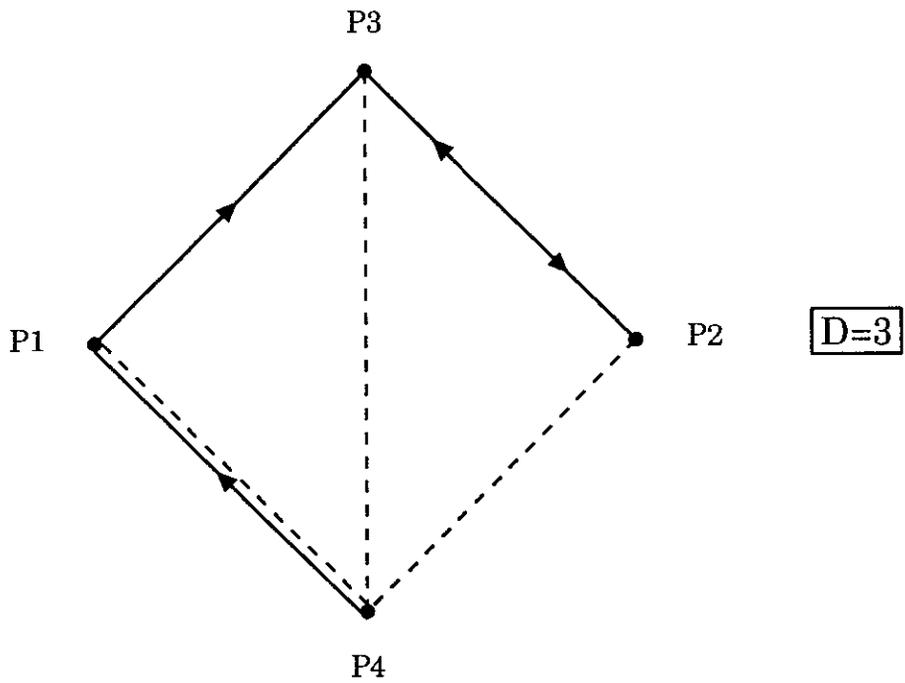
clareza, o enunciado (E5). A leitura do enunciado (E7) no diagrama desenhado nesta figura será feita, na ausência de setas, simplesmente verificando para onde convergem duas linhas tracejadas vizinhas. O ponto de convergência será a premissa implicada e as outras duas extremidades serão as premissas que formam o conjunto de partida.

A fig.3 já representa a decomposição do enunciado (E1) em termos das premissas P1 a P4. Para efeito de completeza podemos acrescentar, baseado nessas premissas, um outro enunciado ao diagrama. Sabemos que P3 acompanhado de ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$, fornecido por P2, é condição suficiente para implicar em P4. Entretanto ${}^{(D)}R = {}^{(D)}R(t)$ pode ser também fornecido por P1 como segue a partir da eq.(3.3.69), e daí temos o enunciado

$$(E9): \quad P1 \wedge P3 \implies P4 .$$

O diagrama completo do enunciado (E1) para $D = 3$ está representado na fig.4 . A ele chamaremos “diagrama *sem memória* do enunciado (E1) em termos das premissas P1...P4”, ou simplesmente “diagrama 1”. A expressão *sem memória* é para indicar que as relações de implicação entre as premissas são diretas, isto é, não necessitam passar por nenhuma outra das premissas representadas no diagrama. Assim, por exemplo, a premissa P4, no diagrama 1, aparece implicando na premissa P1 (enunciado (E8)) que por sua vez implica na premissa P3 (enunciado (E4)). Portanto, por transitividade, a premissa P4 implica na premissa P3, mas esta implicação não é direta, necessitando portanto da premissa P1 e das informações expressas pelos enunciados (E8) e (E4). Dessa forma sem ter a “memória” do que aconteceu em P1, não podemos representar a implicação de P4

Diagrama 1

Figura 4: Diagrama sem memória de (E1) em termos das premissas $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$ em $D = 3$.

em P3. Outro tipo de exemplo é a premissa P2. Esta premissa implica, como se vê no diagrama 1, na premissa P3 e estas, P2 e P3, implicam em P4. Portanto tem-se que P2 de fato implica em P4 pela memória da informação contida em P3. É por isto que esta relação de implicação não está expressa explicitamente no diagrama, pois mais uma vez seria necessária a utilização de uma terceira premissa juntamente com informações trazidas por outros enunciados. O diagrama 1 (sem memória) representa portanto os procedimentos básicos para se provar o enunciado (E1) com base nas premissas P1...P4.

É natural inferir agora que um outro diagrama pode ser construído de tal forma que todas as relações de implicação contidas implicitamente no diagrama 1 sejam expressas claramente. Tal construção será feita percorrendo todos os caminhos possíveis através das setas sobre as linhas e dos pares de linhas tracejadas, procurando-se conectar logicamente os pontos do diagrama entre si o máximo possível. Por exemplo, como vimos no parágrafo anterior, o ponto (premissa) P4 liga-se diretamente ao ponto P1 que também se liga diretamente ao ponto P3. Assim é possível ir de P4 até P3, e pode-se então traçar uma linha ligando estes dois pontos com uma seta apontada para P3. A recíproca também é verdadeira, pois P3 liga-se diretamente a P2 e ambos, P3 e P2, ligam-se em conjunto a P4, e pode-se desenhar uma seta apontando para P4 sobre a linha que liga P3 e P4 e assim por diante. Chamaremos de “diagrama com memória do enunciado (E1) em termos das premissas P1...P4” (diagrama 2) ao novo diagrama formado, o qual está representado na fig.5. Obs.: Os pontos de interseção, como o que é formado pelas duas linhas centrais da fig.5, não devem ser considerados, até porque não possuem designação (não são premissas).

Como vemos, o diagrama 2 é completamente conectado, ou seja, todos os seus pontos são ligados entre si por relações de equivalência. De outra forma: *As premissas*

Diagrama 2

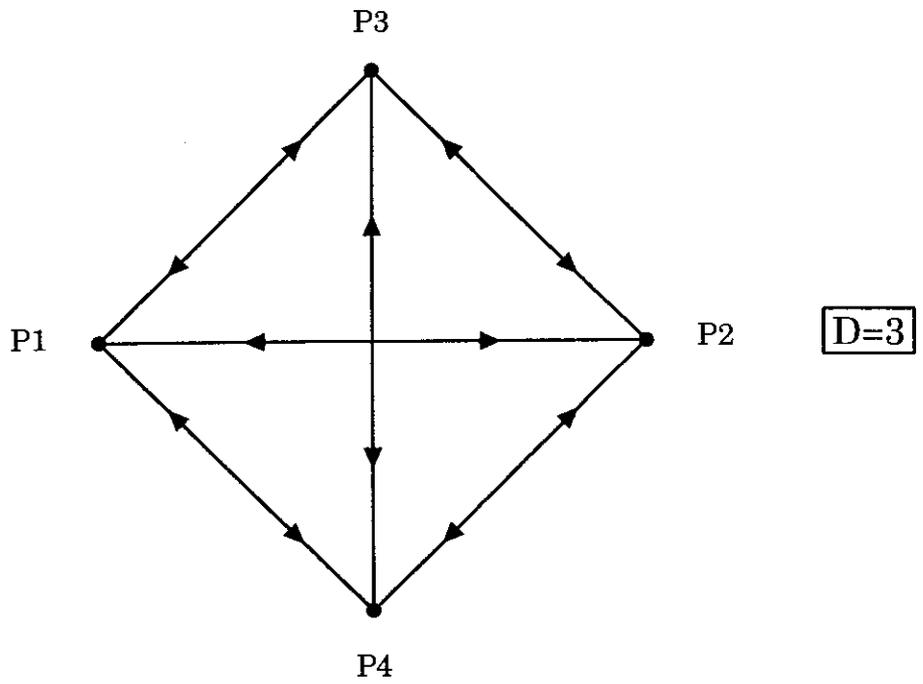


Figura 5: Diagrama com memória de (E1) em termos das premissas P1, P2, P3 e P4 em $D = 3$. O diagrama é completamente conectado.

P1...P4 são todas equivalentes entre si. Este é um resultado interessante pois só acontece para $D = 3$, como veremos mais à frente.

Em $D > 3$ os diagramas sem memória e com memória do enunciado (E1) em termos das premissas P1...P4 serão construídos com as mesmas regras mas com resultados um pouco diferentes. Iniciaremos a construção do diagrama original do enunciado (E1) em $D > 3$ decompondo (E3), por ser mais simples. Basta utilizar P2, cuja expressão matemática é dada pela eq.(3.3.16) na eq.(3.3.15) para obter a nulidade do tensor de Weyl D -dimensional, o que significa, em $D > 3$, que a parte espacial do universo é conformemente relacionada ao espaço euclidiano, implicando na nulidade do tensor de “shear”. Estes passos estão representados na fig.6, onde definimos (E10) por

$$(E10): \quad P2 \implies P4 .$$

Decompondo agora o enunciado (E2) temos que a anulação do tensor de “shear” por um lado faz com que o tensor de Ricci espacial sem traço seja também nulo, como no caso $D = 3$, e também sejam nulos o tensor de Weyl N -dimensional, através das eqs.(3.3.53), (3.3.56) e (3.3.59), e o tensor de Weyl D -dimensional, através da eq.(3.3.58). As nulidades do tensor de Weyl D -dimensional, equivalente em $D > 3$ à premissa P4 [48], e do tensor de Ricci espacial sem traço, que é a própria premissa P3, implicam enfim, através da eq.(3.3.73), na constância da curvatura espacial do universo em questão. Para representar diagramaticamente o que foi dito acrescentaremos dois novos enunciados, quais sejam:

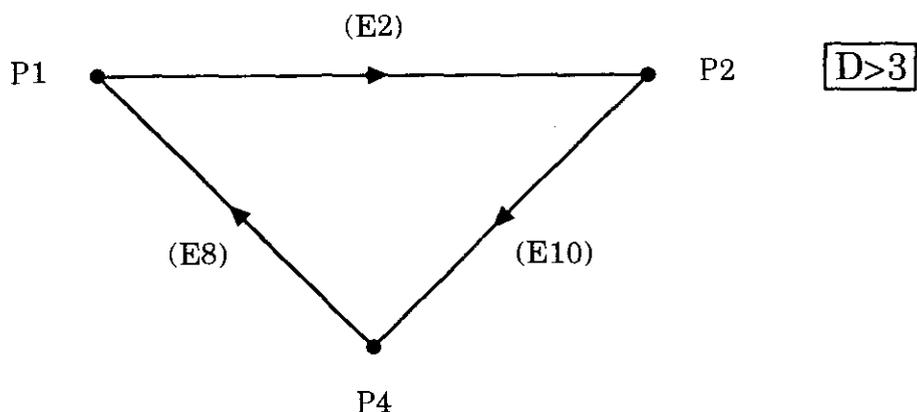


Figura 6: Decomposição de (E1) em $D > 3$ em termos das premissas P1, P2 e P4. O enunciado (E3) aparece decomposto em (E8) e (E10).

$$(E11): \quad P1 \implies P4 ;$$

$$(E12): \quad P3 \wedge P4 \implies P2 .$$

Na verdade o enunciado (E11) contém as implicações $P1 \implies {}^{(N)}W_{abcd} = 0$ e $P1 \wedge ({}^{(N)}W_{abcd} = 0) \implies P4$. Como vemos, para que esta cadeia de implicações possa ser representada no diagrama deveremos acrescentar outra premissa, referente a ${}^{(N)}W_{abcd} = 0$. Entretanto a única função desta nova premissa seria explicitar de que maneira P1 implica em P4. Em nossa análise, esta premissa, ${}^{(N)}W_{abcd} = 0$, por si só, não implica em nenhuma das outras premissas e é implicada apenas por P1. Sendo assim vamos considerá-la como estando

“embutida” na premissa P1, não sendo necessário representá-la em separado. Os enunciados (E11) e (E12) estão representados na fig.7 juntamente com o enunciado (E4), com o qual formam a cadeia que parte de P1 e vai até P2. A fig.7 já mostra a decomposição

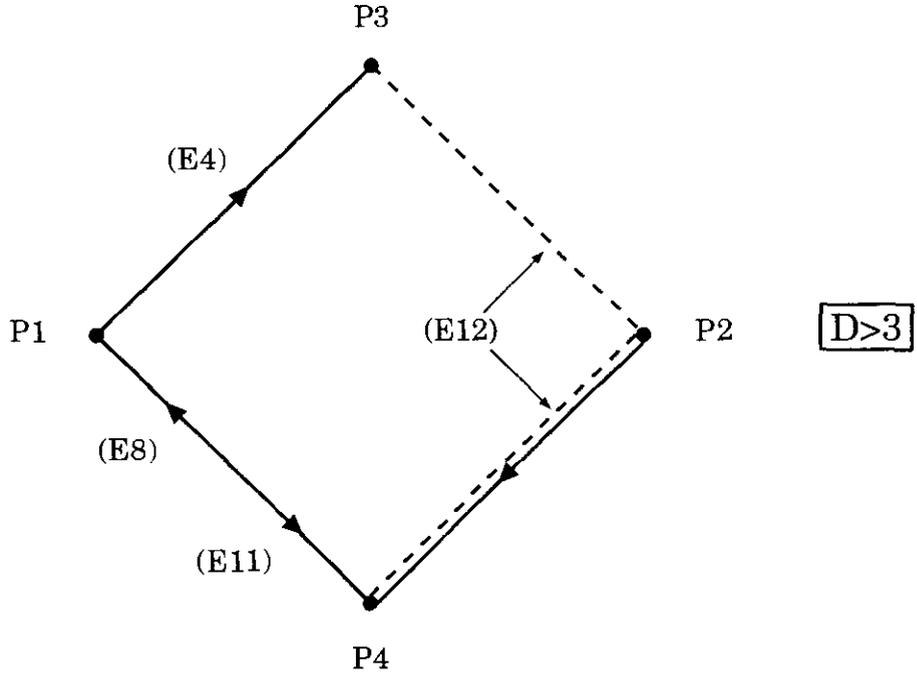


Figura 7: Decomposição do enunciado (E1) em $D > 3$, em termos das premissas P1, P2, P3 e P4, representando os enunciados (E4), (E8), (E11) e (E12). O enunciado (E12) é representado pela convergência de linhas tracejadas.

do enunciado (E1) em termos das premissas P1 a P4 para $D > 3$. Como fizemos no caso $D = 3$, vamos agora completar o diagrama para obter o diagrama *sem memória* (diagrama 3). Faremos isso apenas acrescentando o enunciado (E6), qual seja, que curvatura espacial constante implica na anulação do tensor de Ricci espacial sem traço, enunciado válido para qualquer $D \geq 3$, resultando assim no diagrama apresentado na fig.8 . Conectando-se

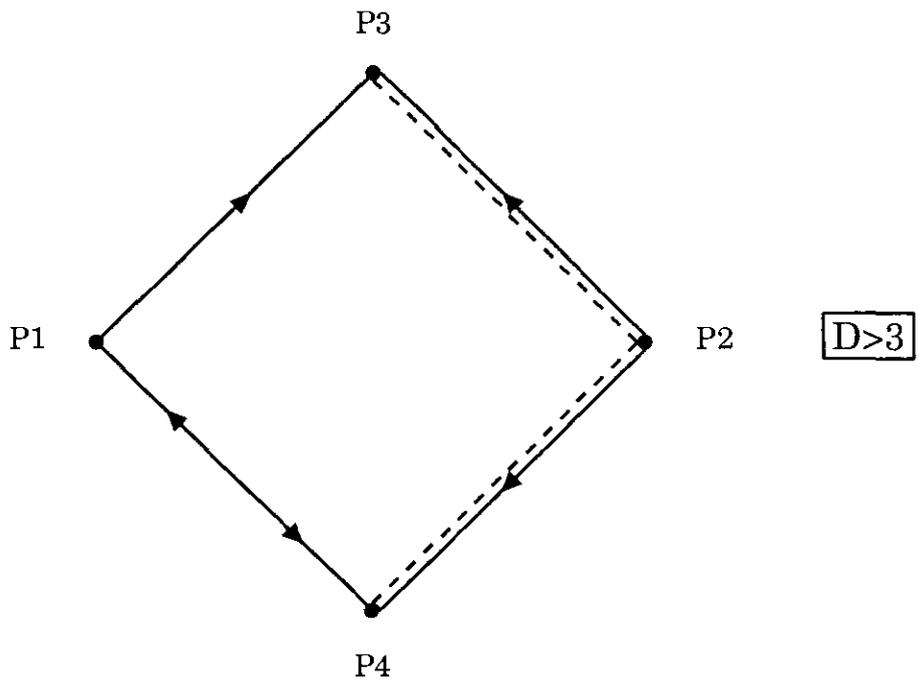
Diagrama 3

Figura 8: Diagrama *sem* memória de (E1) em termos das premissas $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$ em $D > 3$.

ao máximo possível os pontos $P1...P4$ através de todos os caminhos lógicos possíveis apresentados no diagrama 3, fig. 8, obtemos enfim o diagrama *com memória* do enunciado (E1) em termos das premissas $P1...P4$ (diagrama 4), representado na fig.9 . Note-se que

Diagrama 4

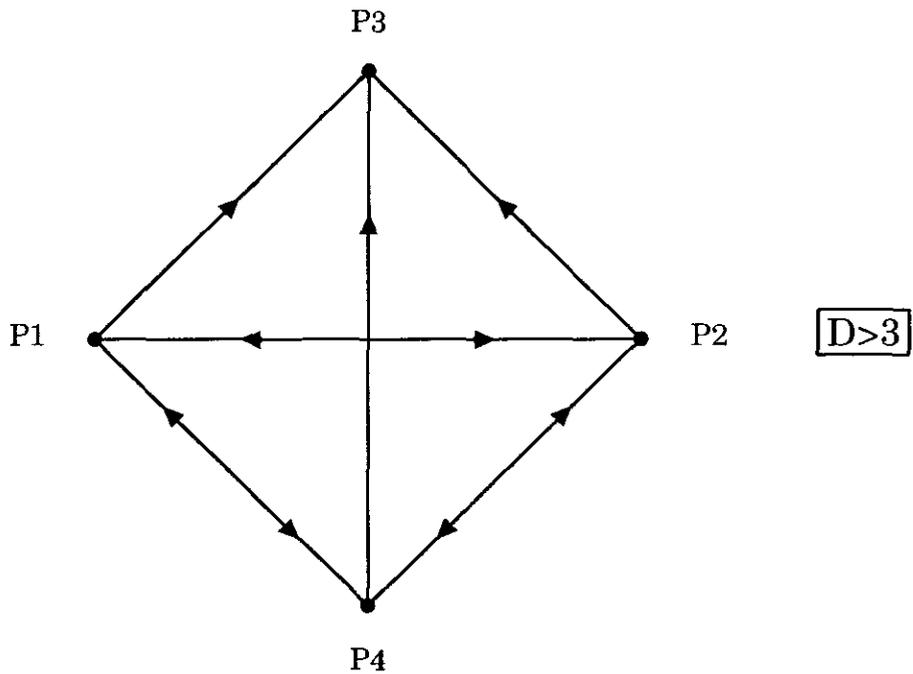


Figura 9: Diagrama **com** memória de (E1) em termos das premissas $P1$, $P2$, $P3$ e $P4$ em $D > 3$. O diagrama **não** é completamente conectado.

o diagrama 4 não é completamente conectado: as premissas $P1$, $P2$ e $P4$ implicam todas entre si e na premissa $P3$, mas a premissa $P3$ não implica em nenhuma delas.

Pode-se agora comparar os diagramas sem memória e com memória em $D = 3$ com aqueles em $D > 3$. Os diagramas em $D = 3$, como vemos, são razoavelmente diferentes

daqueles em $D > 3$. O que talvez seja mais curioso neste fato é que para $D = 4$, $D = 5$, $D = 6$, etc ($D > 3$) os diagramas são todos iguais. Justamente para $D = 3$, e somente neste caso, os diagramas apresentam uma cadeia diferente de implicações, sugerindo haver de fato uma diferenciação do comportamento da teoria de gravitação de Einstein quando aplicada a universos $(3 + 1)$ -dimensionais. Uma possível explicação para isto pode vir da premissa P4 (relacionada à existência de uma transformação conforme entre a parte espacial do universo e o espaço euclidiano), que parece ser a origem dessa diferenciação. Como vimos, para $D > 3$ a premissa P4 equivale a ${}^{(D)}W_{\alpha\beta\gamma\nu} = 0$ enquanto que em $D = 3$ P4 equivale a ${}^{(3)}R_{\alpha\beta\gamma} = 0$ (ver eq.(3.3.84)). Tal fato deve ser melhor analisado, mas é de interesse verificar como esta nova informação poderá afetar a comprovação das conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright quando for realizada a extensão dos procedimentos apresentados aqui para o espaço-tempo conforme. De qualquer maneira, para um número maior de dimensões espaciais, como evidenciam os diagramas, parece haver um tipo de comportamento geométrico e físico essencialmente diferente daquele encontrado nas usuais aplicações $(3 + 1)$ -dimensionais da teoria gravitacional de Einstein. Isto, de per si, sugere que uma análise de teorias multidimensionais, tais como aquelas criadas no contexto de campos escalares de componentes internas [45, 46], ou mesmo usando algumas idéias das teorias de Kaluza-Klein, pode vir a ser bastante frutífera.

Acreditamos que os diagramas introduzidos aqui podem ser melhor desenvolvidos para tornarem-se úteis no entendimento de outras questões. Podemos não só continuar a decompor seus enunciados, acrescentando novas premissas e procurando correlações não triviais na aplicação de uma teoria, mas pode-se mesmo sondar a própria geometria dos procedimentos e implicações representados nesses diagramas. Por exemplo, se acrescen-

tarmos. como uma nova regra, que as linhas retas do diagrama com memória não podem se interceptar. os enunciados contidos no diagrama 4 (fig.9) poderão ser realizados com a inclusão de mais uma dimensão no espaço no qual o diagrama é representado. Vemos que o diagrama poderá ser representado em um espaço 3-dimensional, sendo seu formato concebido obrigatoriamente como aquele de um tetraedro. Tendo em vista este exemplo talvez seja de interesse verificar as topologias dos diagramas de outras aplicações da teoria de Einstein e de teorias alternativas de gravitação, comparando-as e buscando outros aspectos da teoria.

Os diagramas 1 a 4 encerram a maior parte da contribuição contida nesta monografia para a comprovação das conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright. O próximo passo é introduzir o fator conforme $\Omega(t)$ nos cálculos e discussões delineados aqui. Tal introdução, apesar de fundamental no contexto de singularidades isotrópicas, deverá complicar um pouco mais o problema, pois haverá mais uma grandeza evoluindo ($\Omega(t)$), ou seja, teremos que descrever a evolução de uma dinâmica mais extensa. Faremos então a seguir apenas alguns comentários relativos ao fator conforme, deixando as idéias e procedimentos desenvolvidos nesta seção como uma outra proposta de estudo do problema.

3.4 Conclusões e Sugestões para Trabalho Futuro.

O conceito de singularidade isotrópica e sua matematização, realizada principal-

mente por Goode e Wainwright e por Newman, como mostrado no primeiro capítulo desta monografia, tem de fato se mostrado muito útil na análise das argumentações de Barrow e de Penrose acerca da relação entre a relativamente baixa quantidade de entropia e o alto grau de isotropia na distribuição de matéria observadas no Universo atual. Particularmente, a definição de um parâmetro P de medida da entropia gravitacional na forma simples dada pela eq.(2.2.5)

$$P = \frac{W_{abcd}W^{abcd}}{R_{ef}R^{ef}}$$

mostrou-se, em certa medida, dentro do estudo matemático das singularidades isotrópicas desenvolvido especialmente por Goode e Wainwright, bastante condizente com a Hipótese da Curvatura de Weyl, na sua forma fraca, e também, como mostrado na seção 2.3, com alguns tipos de cosmologias que evoluem lenta e suavemente, num comportamento semelhante ao da “Quiescent Cosmology” [45, 46].

Contudo uma outra utilidade, talvez mais importante, do aparato matemático fornecido a partir do conceito de singularidades isotrópicas, com relação às propostas de Barrow e Penrose, vem expressa na formulação da Conjectura de Tod, com respeito à evolução de cosmologias de fluido perfeito, com equação barotrópica de estado, e sujeitas à Hipótese da Curvatura de Weyl. Se em uma cosmologia desse tipo for admitida uma singularidade isotrópica já se terá, a princípio, meios matemáticos de se analisar sua evolução através de um problema de valor inicial cujo dado inicial, fornecido pela HCW, qual seja, a nulidade do tensor de Weyl W_{abcd} , é imposto em $t = 0$, isto é, na própria singularidade. Uma vez que se consiga verificar que a evolução de todas as cosmologias

do tipo acima, contendo uma singularidade isotrópica, será continuamente regular, sendo sempre um modelo FLRW exato, a conjectura de Tod estará provada e um grande passo será dado em favor das argumentações de Barrow e de Penrose no sentido de fornecer uma explicação para a grande isotropia do Universo atual, pois o Universo apresentaria uma forte tendência a permanecer totalmente regular.

Do que foi exposto nesta monografia, a Conjectura de Tod ainda não pode, entretanto, ser considerada provada. Certamente, como vimos, existem muitas cosmologias, do tipo mencionado, que apresentam uma evolução do tipo FLRW, mas ainda não foi provado que *todas* evoluirão unicamente para modelos FLRW. Esta parte do problema referente à unicidade é justamente o que falta para ser resolvido nas tentativas de prova da Conjectura de Tod que apresentamos nas duas primeiras seções deste capítulo. Segundo Goode [51] e Newman [57], a dificuldade em se determinar a unicidade na evolução das cosmologias consideradas é que os teoremas padrão, existentes na literatura, a respeito da unicidade de soluções de problemas de valor inicial, de uma forma ou de outra, não parecem se aplicar ao menos aos problemas desenvolvidos por esses dois autores. Tal problema de unicidade tem se mantido portanto em aberto, a não ser para o caso $p = \frac{1}{3}\rho$ desenvolvido por Newman [55], do qual falávamos na seção 3.2 desta monografia, quando então foi comentada uma prova da conjectura com essa restrição.

Importante também é a Conjectura de Goode e Wainwright com relação à unicidade da evolução de universos com singularidade isotrópica e preenchidos com fluido perfeito sujeito a uma equação de estado, quando dada a métrica inicial, definida na hipersuperfície conforme correspondente à singularidade isotrópica. como foi mostrado, tal conjectura pode, por um lado, ser considerada um caso mais geral da conjectura de

Tod e, por outro lado, como uma possibilidade de se estudar o enfraquecimento da HCW, de forma a ser permitida a formação de estruturas, no contexto da teoria clássica de gravitação de Einstein, nas cosmologias consideradas. Como no caso da Conjectura de Tod, ainda não foi obtida uma prova geral da Conjectura de Goode e Wainwright.

O desenvolvimento que realizamos na seção 3.3 tem como objetivo contribuir para o entendimento de alguns dos principais aspectos matemáticos e problemas envolvidos na comprovação das duas conjecturas acima do ponto de vista do espaço-tempo físico M , concentrando a atenção no conceito de curvatura extrínseca. O passo seguinte, a ser feito posteriormente, é realizar a correspondência com o espaço-tempo conforme \hat{M} através do fator conforme $\Omega(t)$. Certamente a introdução deste fator conforme acrescentará algum grau de complicação ao desenvolvimento realizado, com a inclusão de uma equação de evolução para Ω . Além disso as grandezas envolvidas, definidas através da transformação conforme, deverão ser manipuladas no espaço-tempo conforme \hat{M} . Assim, por exemplo, o tensor de “shear” σ_{ab} sofrerá a transformação

$$\sigma_{ab} = \Omega \hat{\sigma}_{ab} \quad (3.4.1)$$

com $\hat{\sigma}_{ab}$ passando a ser a grandeza correspondente a σ_{ab} no espaço-tempo \hat{M} com a introdução de um fator Ω . As próprias equações de Einstein deverão passar por uma tal transformação, similar, embora mais geral, àquela realizada por Tod e apresentada na eq.(3.1.2) da primeira seção deste capítulo. Assim o tratamento a ser feito deverá dificultar-se em certa medida. Entretanto, espera-se que a utilização de alguns dos procedimentos realizados na seção 3.3, reunidos nos diagramas apresentados, possam, senão

contribuir para uma prova direta, ao menos facilitar a utilização de teoremas de unicidade mais simples.

Quanto aos diagramas que aqui foram introduzidos, sua utilidade a princípio é de fato tornar mais claros alguns dos procedimentos efetuados, simplificando a obtenção de novas conclusões. Entretanto acreditamos que tais diagramas podem conter algumas outras informações importantes mas não óbvias, e pode ser interessante uma análise mais cuidadosa de aspectos geométricos das suas interligações lógicas.

Enfim, podemos afirmar que as idéias e argumentos apresentados por Barrow e por Penrose possuem assim um aparato matemático, originado do conceito de singularidades isotrópicas, apropriado para serem comprovadas e desenvolvidos. As conjecturas de Tod e de Goode e Wainwright, referentes a universos que se iniciam em singularidades isotrópicas, são de grande importância para a explicação da estrutura em grande escala bem como do conteúdo de entropia do Universo atual. Se provadas, a Conjectura de Tod caracterizará a Hipótese da Curvatura de Weyl (HCW) como uma condição inicial bastante restritiva em cosmologias de fluido perfeito com equação de estado barotrópica e na presença de uma singularidade isotrópica, enquanto que a Conjectura de Goode e Wainwright dará embasamento a um universo que, sob a HCW Fraca, comporta-se de maneira muito semelhante à “Quiescent Cosmology”, com crescimento lento e suave da quantidade de entropia. Como repetidamente dissemos nesta monografia, tais provas ainda não ocorreram de forma plena. Entretanto não foi encontrado ainda nenhum contra-exemplo a nenhuma dessas conjecturas. Isto por si só já é um bom indício de que se deve prosseguir na investigação das idéias acima, no contexto de singularidades isotrópicas, o que pode vir a se constituir em um bem sucedido programa de pesquisa, alternativo aos modelos

inflacionários. Vale lembrar que estes, desafortunadamente serviram de paradigma não só à compreensão de muitos cosmólogos experientes seduzidos pelos resultados das “teorias de grande unificação” mas também, como não poderia deixar de ser, foram paradigmas aos recém-chegados, que pensaram não ser necessário estudar cosmologia com alguma profundidade para competir em igualdade de condições.

Referências

- [1] S.W.Hawking, G.F.R.Ellis; “The Large Scale Structure of Space-Time”; Cambridge University Press (1973) pp. 88–96.
- [2] L.C.Q.Vilar; “Texturas Globais e a Extensão do Teorema No-Hair para Cosmologias Fechadas”; Tese de Mestrado — CBPF (1992).
- [3] H.Stephani; “General Relativity - An Introduction to the Theory of the Gravitational Field”; CUP Press, 2nd ed. (1990) pp. 160–165, 289.
- [4] K.P.Tod; “Isotropic Singularities and the $\gamma = 2$ Equation of State”; Class. Quantum Grav. 7 (1990) L13.
- [5] K.P.Tod; “Isotropic Singularities and the Polytropic Equation of State”; Class. Quantum Grav. 8 (1991) L77.
- [6] K.P.Tod; “Isotropic Singularities”; Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 50 (1992) 69.
- [7] R.M.Wald; “General Relativity”; The University of Chicago Press (1984) pp. 211–242.

- [8] R.Mondaini, F.M.T.Montenegro; “Towards a Proof of Tod’s Conjecture”: 14th International Conference on General Relativity and Gravitation — Florence, Italy; (1995) p. A77.
- [9] R.Mondaini, F.M.T.Montenegro; “A Contribution to the Study of Tod’s Conjecture of Cosmological Evolution”; Preprint UFRJ (1995) — Submetido a publicação.
- [10] R.Penrose; “The Emperor’s New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics.”; Oxford University Press (1989) Caps. V, VII.
- [11] E.M.Lifshitz, I.M.Khalatnikov; “Investigations in Relativistic Cosmology”; Adv. Phys. 12 (1963) 185.
- [12] V.A.Belinski, I.M.Khalatnikov, E.M.Lifshitz; “Oscillatory Approach to a Singular Point in the Relativistic Cosmology”; Adv.Phys. 19 (1970) 525.
- [13] D.Eardley, E.Liang, R.K.Sachs; “Velocity-Dominated Singularities in Irrotational and Time-Asymmetry”; J. Math. Phys. 13 (1972) 99.
- [14] E.P.T.Liang; “Velocity-Dominated Singularities in Irrotational Hydrodynamic Cosmological Models”; J.Math.Phys. 13 (1972) 386.
- [15] R.Penrose; “Singularities and Time-Asymmetry”; In General Relativity: an Einstein centennial volume ed. W.Israel and S.W.Hawking, CUP Cambridge (1979) p. 581.
- [16] J.D.Barrow; “Quiescent Cosmology”; Nature 272 (1978) 211.

- [17] K.P.Tod; “Quasi-local Mass and Cosmological Singularities”; *Class. Quantum Grav.* 4 (1987) 1457.
- [18] S.W.Goode, J.Wainwright; “Isotropic Singularities in Cosmological Models”; *Class. Quantum Grav.* 2 (1985) 99.
- [19] R.P.A.C.Newman; “On the Structure of Conformal Singularities in Classical General Relativity”; *Proc. R. Soc. Lond. A* 443 (1993) 473.
- [20] S.M.Scott; “Isotropic Singularities — the definition and Vorticity.”; *Proc. of the 2nd Canadian Conf. on General Relativity and Astrophysics* (1988) 373.
- [21] R.Penrose; “Conformal treatment of infinity”; *Relativity, groups and topology.* (ed. B.S. De Witt, C.M. De Witt - Gordon & Breach) (1964) 563.
- [22] P.J.E.Peebles; “Principles of Physical Cosmology”; *Princeton Series in Physics* (1993) p. 159.
- [23] E.W.Kolb, M.S.Turner; “The Early Universe”; *Frontiers in Physics* 69, Addison-Wesley (1990), p. 8.
- [24] G.F.R.Ellis; “Relativistic Cosmology”; In *General Relativity and Cosmology*, ed. R.K.Sachs (New York: Academic Press) (1971) pp. 108–136, 172.
- [25] C.Misner; “The Isotropy of The Universe”; *Astrophys. J.* 151 (1968) 431.
- [26] J.D.Barrow, F.J.Tipler; “The Antropic Cosmological Principle”; Oxford at Clarendon Press (1986) p. 421.

- [27] R.A.Matzner, C.W.Misner; "Dissipative Effects in the Expansion of the Universe"; *Astrophys. J.* 171 (1972) 415.
- [28] Ya.B.Zel'dovich; "The Creation of Particles and Antiparticles in Electric and Gravitational fields": In *Magic without Magic: John Archibald Wheeler*, ed. J.Klauder, W.H. Freeman, San Francisco (1972) 277.
- [29] C.B.Collins, J.M.Stewart; "Qualitative Cosmology"; *Mon. Not. R. astr. Soc.* 153 (1971) 419.
- [30] C.B.Collins, S.W.Hawking; "Why is the Universe Isotropic?"; *Astrophys.J.* 180 (1973) 317.
- [31] J.D.Barrow, R.A.Matzner; "The Homogeneity and Isotropy of the Universe"; *Mon. Not. R. astr. Soc.* 181 (1977) 719.
- [32] A.Guth; "Inflationary Universe: a possible solution to the Horizon and Flatness Problems"; *Phys. Rev.* D23 (1981) 347.
- [33] A.D.Linde; "A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems"; *Phys. Lett.* 108B (1982) 389.
- [34] A.Albrecht, P.J.Steinhardt; "Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking"; *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1220.
- [35] A.D.Linde; "Chaotic Inflation"; *Phys. Lett.* 129B (1983) 177.
- [36] P.J.Steinhardt; "Inflation and the Ω -Problem"; *Nature* 345 (1990) 47.

- [37] G.F.R.Ellis; “Does Inflation Necessarily imply $\Omega = 1$?”; *Class. Quantum Grav.* 5 (1988) 891.
- [38] I.G.Dymnikova; “Inflationary Universe from the point of view of General Relativity”; *Sov. Phys. JETP* 63 (1986) 1111.
- [39] M.S.Turner; “Toward the Inflationary Paradigm: Lectures on Inflationary Cosmology”; *Acta Phys. Pol.* B18 (1987) 813.
- [40] S.Weinberg; “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”; J.Wiley and Sons (1972) pp. 145–146, 163–165, 528–545.
- [41] J.Wainwright, P.J.Anderson; “Isotropic Singularities and Isotropization in a Class of Bianchi Type $-VI_h$ Cosmologies”; *Gen. Rel. Grav.* 16 (1984) 609.
- [42] S.W.Goode, A.A.Coley, J.Wainwright; “The isotropic singularity in cosmology”; *Class. Quantum Grav.* 9 (1992) 445.
- [43] A.V.Nesteruk; “The Weyl curvature hypothesis and a choice of the initial vacuum for quantum fields at the cosmological singularity”; *Class. Quantum Grav.* 11 (1994) L15.
- [44] R.Penrose; “Time-Asymmetry and Quantum Gravity”; In *Quantum Gravity II* ed. C.J.Isham, R.Penrose & D.W. Sciama, Oxford University Press (1981) p. 244.
- [45] R.Mondaini, L.C.Q.Vilar; “Elementary Analysis of the Recollapse and No-Hair Conjectures in Closed (D+1)-Dimensional FLRW Cosmologies”; *Int. J. Mod. Phys.* D2 (1993) 477.

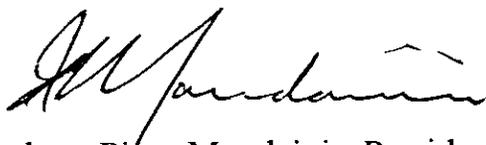
- [46] R.Mondaini, L.C.Q.Vilar; "Multiplet $SO(N+1)$ Scalar Fields Driving Eternal Expansion in Closed $(D+1)$ -Dimensional FLRW Cosmologies": *Gen. Rel. Grav.* 26 (1994) 233.
- [47] Misner, Thorne, Wheeler; "Gravitation"; San Francisco, W.H.Freeman (1973) p. 340.
- [48] L.P.Eisenhart; "Riemannian Geometry"; Princeton U.P., Princeton, N.J. (1966) pp. 89–92.
- [49] S.W.Goode, J.Wainwright; "Singularities and evolution of the Szekeres cosmological models"; *Phys. Rev. D* 26 (1982) 3315.
- [50] W.B.Bonnor; "The gravitational arrow of time and the Szekeres cosmological models"; *Class. Quantum Grav.* 3 (1986) 495.
- [51] S.W.Goode; "Isotropic singularities and the Penrose - Weyl tensor hypothesis"; *Class. Quantum Grav.* 8 (1991) L1.
- [52] H.Stephani; "Über Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, die sich in einen fünfdimensionalen flachen Raum einbetten lassen"; *Commun. Math. Phys.* 4 (1967) 137.
- [53] A.Krasinski; "On the Global Geometry of the Stephani Universe"; *Gen. Rel. Grav.* 15 (1983) 673.
- [54] S.W.Goode; "Vorticity and Isotropic Singularities"; *Gen. Rel. Grav.* 19 (1987) 1075.

- [55] R.P.A.C.Newman; “On the structure of conformal singularities in classical general relativity.II. Evolution equations and a conjecture of K.P.Tod.”; Proc. R. Soc. Lond. A 443 (1993) 493.
- [56] S.M.Scott; “Conjectures Related to the Weyl Curvature Hypotesis”; Proc. of the 5th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (1988) 1033.
- [57] R.P.A.C.Newman; “Conformal Singularities and the Weyl Curvature Hypothesis”; Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 50 (1992) 61.
- [58] H.Friedrich; “On the hyperbolicity of Einstein’s and other gauge field equations”; Comm. Math. Phys. 100 (1985) 525.
- [59] D.Kramer, H.Stephani, E.Herlt, M.MacCallum; “Exact Solutions of Einstein’s Field Equations”; CUP Press, Cambridge (1980) p. 55.

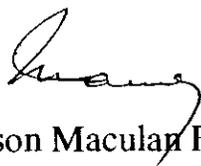
**“SINGULARIDADES ISOTRÓPICAS E A
CONJECTURA COSMOLÓGICA DE TOD”**

Flávio Marcelo Tavares Montenegro

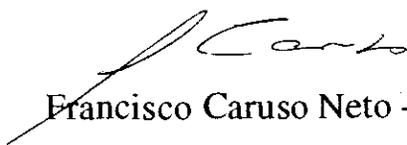
Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Rubem Pinto Mondaini - Presidente



Nelson Maculan Filho



Francisco Caruso Neto - Convidado Especial

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayël-Neto

Bartolomeu Bonorino Figueiredo

Bartolomeu Donatila Bonorino Figueiredo - Suplente

Rio de Janeiro, 21 de março de 1997