

CRISTINE NUNES FERREIRA

Estrutura algébrica de alguns modelos de
spin integráveis multiparamétricos

(Tese de Mestrado)

Rio de Janeiro

(1997)

ESTRUTURA ALGÉBRICA DE ALGUNS
MODELOS DE SPIN INTEGRÁVEIS



1997/15

F383

020268

Índice

1	O Método do Espalhamento Inverso Quântico: O Modelo de Heisenberg Isotrópico (XXX)	4
1.1	Obtenção do Hamiltoniano.	13
1.2	O <i>ansatz</i> de Bethe Algébrico.	17
1.3	A Álgebra	22
1.4	As Coálgebras	23
1.5	A Álgebra de Lie	25
1.6	As Álgebras de Hopf \mathcal{H}	26
1.7	A Álgebra Envelope $U(su(2))$	27
1.8	A Estrutura Algébrica do Modelo XXX	29
2	O Método do Espalhamento Inverso Quântico: O Modelo XXZ	31
2.1	A Álgebra de Hopf quase-triangular	31
2.2	A Álgebra Envelope Quantizada $U_q(su(2))$	33
2.3	Modelo XXZ	35
2.3.1	O <i>ansatz</i> de Bethe Algébrico	38
2.3.2	Estruturas Algébricas do Modelo XXZ	41
3	Modelos de Spin Multiparamétricos	51
3.1	Cálculo do Hamiltoniano.	54
3.2	O Método do <i>ansatz</i> de Bethe	56
3.3	As Estruturas Algébricas	59

4	Estrutura Algébrica e Solução dos Modelos	64
4.1	O Modelo XY	65
4.2	O Modelo XY com torção	69
A	Integrabilidade dos Modelos	74

Agradecimentos

- Aos meus orientadores e amigos Ligia M.C.S.Rodrigues e Itzhak Roditi, por terem participado da minha formação , fornecendo as ferramentas necessárias para o meu desenvolvimento intelectual.
- Aos Professores Helio Manoel Portella, Regina Maldonado e Neusa Amato pela amizade constante, por terem me iniciado na ciência e me incentivado ao longo de minha vida acadêmica.
- Ao Professor José A. Helayël-Neto, que além de ser um amigo valoroso, teve a paciência para me escutar, aconselhar e incentivar nos momentos mais difíceis e importantes de minha vida profissional.
- Ao Professor Sebastião Alves Dias, o grande Tião, por toda a dedicação que teve comigo.
- Aos Professores Roman Paunov, Agostinho Ferreira, Marcelo Chiapparini e Bartolomeu Figeredo por importantes discussões.
- Ao CNPq pela bolsa e à Coordenação de Formação Científica/CBPF, por todas as facilidades a mim proporcionadas.
- A Miryam e seus ajudantes, pela paciência e amizade que tiveram por todos estes anos.
- A Rosangela, Elizabete e Regina, pela amizade e por estarem sempre disponíveis para resolver os problemas do departamento.
- A todo o pessoal da Biblioteca, principalmente a Maria do Socorro Costa do Vale, pelas dicas de Latex, que permitiram uma apresentação mais apropriada da tese.

- À minha grande amiga e madrinha Carla, por nunca me abandonar e sempre me lembrar o motivo de estarmos nessa vida, que é servir e amar a Deus acima de qualquer coisa.

- Aos velhos amigos Elcio, Joana D'Arc, Alan, Rodrigo, Denise, Vitor Luiz, Alvaro e aos novos Ana Lucia, André P. Firme, Guillermo, Nelson, Alexandre, Marcia, Francisco juntamente com toda a galera do DCP, que tornaram minha vida no CBPF mais agradável.

- Aos meus pais e amigos, pela compreensão e apoio que sempre me deram, principalmente a meu pai que sempre me incentivou.

- Gostaria de finalizar agradecendo a DEUS pela sua constante presença em minha vida e por tomar conta dos meus passos, me proporcionando paz e tranquilidade no coração .

Dedico esta tese ao meu namorado
Carlos Eduardo Campos Lima,
que participou de todos
os momentos.

Resumo

Nesta tese, apresentamos o estudo das cadeias XY de spin $\frac{1}{2}$, com condições de contorno periódicas e periódicas torcidas, através do Método do Espalhamento Inverso Quântico. A partir de uma matriz R multiparamétrica, obtemos os Hamiltonianos que descrevem tais cadeias, mostrando que são modelos integráveis e obtendo seus autovetores e autovalores através do *ansatz* de Bethe algébrico. Devido à introdução de um elemento central, crucial para a existência de torção, encontramos os coprodutos e mostramos que as estruturas algébricas subjacentes aos referidos modelos são grupos quânticos.

Abstract

In this work, we study the $XY \frac{1}{2}$ spin chains, with periodical and twisted periodical boundary conditions, through the Quantum Inverse Scattering Method. From a multiparametric R matrix we obtain the Hamiltonians that describe those chains and show that the models are integrable. We also obtain the eigenvectors and eigenvalues by the algebraic Bethe *ansatz*. The introduction of a central element is crucial and allows us to find the coproducts and to show that the underlying algebraic structures are quantum groups.

Introdução

O estudo de sistemas integráveis tem sua origem na mecânica clássica Hamiltoniana, em particular, nos trabalhos de Liouville. Um sistema clássico com N graus de liberdade é dito integrável se existir um conjunto de N integrais de movimento independentes, cujos parênteses de Poisson se anulam; uma delas é o Hamiltoniano do sistema. Quando o sistema é quântico pode-se estender a noção de integrabilidade, substituindo os parênteses de Poisson pelos comutadores e o sistema será completamente integrável quando houver um conjunto completo de observáveis que comutem entre si. Neste caso, encontra-se autoestados comuns a todos estes observáveis. e é possível calcular quantidades físicas sem realizar aproximações mesmo que existam muitos graus de liberdade.

Para sistemas tais como o gás de bosons unidimensional, o modelo de Thirring com massa, modelos estatístico clássicos bidimensionais (modelos de vértices) ou quânticos a uma dimensão, que possuem muitos graus de liberdade, foi desenvolvida uma técnica para resolução destes sistemas, o método do *ansatz* de Bethe [1], introduzido em 1931 para resolver o modelo de Heisenberg isotrópico (modelo XXX). Posteriormente, R.J.Baxter aprimorou essa abordagem, utilizando-a para a resolução do modelo de oito vértices (modelo XYZ) [2]. No presente trabalho, estamos interessados no método de resolução de sistemas quânticos integráveis criado por Faddeev, Takhtajan e Sklyanin [3, 4], chamado de Método do Espalhamento Inverso Quântico (MEIQ), posteriormente desenvolvido pelo grupo de Leningrado. Trata-se de um método muito potente que permite a formulação de novos modelos quânticos integráveis. Sua abordagem parte de um ponto de vista algébrico, possibilitando resolver de maneira sistemática modelos cuja solução por outros métodos seria muito difícil. Além disto, a partir do seu desenvolvimento surgiu pela primeira vez o conceito de Grupo Quântico [5, 6]. O MEIQ permite encontrar o espectro de um modelo através da resolução de um sistema de equações transcendentais chamadas de equações do *ansatz* de Bethe, onde os autovetores e autovalores são caracteriza-

dos pelas raízes destas equações. Um determinado modelo é solúvel por este método quando seu Hamiltoniano pode ser associado a um problema auxiliar linear, formulado em termos de um operador local, a matriz $L(\lambda)$, que satisfaz à relação de comutação ,

$$R(\lambda_{12})L(\lambda_1) \otimes L(\lambda_2) = L(\lambda_2) \otimes L(\lambda_1)R(\lambda_{12}),$$

onde λ é um parâmetro espectral complexo. Nos casos tratados neste trabalho, esta equação é equivalente à equação de Yang-Baxter [7, 8]. A matriz $R(\lambda)$ desempenha um papel semelhante ao das constantes de estrutura nas álgebras de Lie. As soluções da equação de Yang-Baxter podem ser classificadas de acordo com a dependência da matriz $R(\lambda)$ com o parâmetro espectral λ como racionais, trigonométricas ou elípticas. Em geral as soluções racionais estão associadas a álgebras de Lie; nos casos trigonométricos, as estruturas algébricas subjacentes são deformações das álgebras de Lie. A noção de deformação de uma estrutura algébrica é bem definida matematicamente : o ponto de partida é tornar as constantes de estrutura dependentes de um parâmetro de deformação q . As q -álgebras determinadas pelas constantes de estrutura deformadas em geral diferem das originais pois algumas das propriedades são alteradas pela deformação . Quando, como no caso do modelo XXZ, as álgebras deformadas tem a estrutura de álgebras de Hopf quase-triangulares, são também chamadas álgebras ou grupos quânticos[9, 10].

Neste trabalho, empregaremos o MEIQ para tratar algumas cadeias de spin unidimensionais partindo de uma matriz $R(\lambda)$ multiparamétrica geral que inclui os modelos ~~os modelos~~ XXZ e XY, com ou sem torção . Nos Capítulos I e II, revisaremos o MEIQ para os modelos XXX e XXZ, respectivamente, obtendo seus Hamiltonianos, suas autofunções e autovalores e determinando as estruturas algébricas associadas. Nesses Capítulos, também é feita uma revisão dos conceitos algébricos relevantes. Nos Capítulos III e IV desenvolveremos nosso trabalho propriamente dito: no Capítulo III introduziremos a matriz $R(\lambda)$ multiparamétrica que para diferentes valores dos parâmetros descreve as cadeias XXZ e XY, com condições de

contorno periódicas e periódicas torcidas. Na construção de $R(\lambda)$ aparece um novo elemento da álgebra, o elemento central Z , necessário para que ao segundo parâmetro de deformação estejam associadas condições de contorno periódicas torcidas, bem como para obtermos as estruturas algébricas corretas. No Capítulo IV, exibiremos a estrutura algébrica dos modelos XY com e sem torção e em seguida apresentaremos nossas conclusões.

Capítulo 1

O Método do Espalhamento Inverso Quântico: O Modelo de Heisenberg Isotrópico (XXX)

O método do espalhamento inverso quântico (MEIQ)[3, 4, 11] tem provado ser um instrumento potente para investigar sistemas quânticos integráveis em teoria quântica de campos e física estatística.

O termo "integrabilidade" teve sua origem na mecânica clássica Hamiltoniana e foi introduzido por Liouville (1855) [12, 13]. Um sistema em um espaço de fase Γ_{2l} de dimensão $2l$ com coordenadas (p_i, q_i) , $i = 1..l$ e Hamiltoniano $H(p, q)$ é chamado completamente integrável se existem $2l$ funções independentes $I_i(p, q)$ tais que

$$\{H, I_i\} = 0, \quad \{I_i, I_j\} = 0, \quad (1.1)$$

onde $\{, \}$ é o parênteses de Poisson.

As funções I_i são chamadas integrais do movimento ou cargas conservadas. O Hamiltoniano de um sistema integrável é função destas integrais do movimento,

dependendo de p e q unicamente através delas.

No caso de um sistema quântico [14] a idéia de integrabilidade é semelhante a do caso clássico, isto é, existe um conjunto completo de observáveis I_i , tais que

$$[H, I_i] = 0, \quad [I_i, I_j] = 0, \quad i, j = 1..n \quad (1.2)$$

onde H é o Hamiltoniano que descreve o sistema e $[,]$ é o comutador.

De acordo com um dos princípios da mecânica quântica, se os observáveis do sistema comutam entre si, é possível encontrar um autoestado comum a todos estes observáveis; num sistema integrável, podemos portanto encontrar autoestados comuns a todas as cargas conservadas. No MEIQ, isto é feito através do *ansatz* de Bethe Algébrico [15, 16].

A técnica do MEIQ introduz um problema auxiliar que possibilita a obtenção de um conjunto completo de cargas conservadas do sistema, identificando uma delas com seu Hamiltoniano. Com o objetivo de apresentarmos este método, faremos, neste capítulo uma breve revisão da solução do modelo de Heisenberg isotrópico (modelo XXX) [11].

O Hamiltoniano [7]

$$H = \sum_{n=1}^N \{J^1 S_n^1 S_{n+1}^1 + J^2 S_n^2 S_{n+1}^2 + J^3 S_n^3 S_{n+1}^3\} \quad (1.3)$$

descreve uma cadeia de N spins $1/2$ com interação somente entre os vizinhos mais próximos. A cada ponto da cadeia está associado um operador de spin S_n^α definido por:

$$S_n^i = \frac{1}{2} \sigma_n^i, \quad (1.4)$$

onde σ^i com $i = 1, 2, 3$ são matrizes de Pauli e n designa o sítio. Usaremos a

representação das matrizes de Pauli dada por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Em (1.3), J^i são as constantes de acoplamento.

O operador local de spin S_n^i atua sobre o espaço bidimensional $\eta_n = C^2$ e H sobre o espaço de Hilbert μ_N , de dimensão 2^N , que é o espaço completo de uma rede com N sítios:

$$\mu_N = \prod_{n=1}^N \otimes \eta_n, \quad \eta_n = C^2. \quad (1.6)$$

Assim, os operadores S_n^i no Hamiltoniano (1.3) atuam sobre os sítios da cadeia e são dados por

$$S_n^i = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{n-1} \otimes S^i \otimes I \otimes \dots \otimes I, \quad (1.7)$$

onde \otimes designa o produto direto e I é a matriz identidade 2×2 .

Dependendo dos valores das constantes de acoplamento J^i e das relações entre elas, o Hamiltoniano (1.3) pode descrever 4 modelos distintos, a saber:

- 1) $J^1 = J^2 = J^3$, o modelo de Heisenberg isotrópico ou modelo XXX.
- 2) $J_3 = 0$, modelo XY.
- 3) $J^1 = J^2 \neq J^3$, modelo XXZ.
- 4) $J^1 \neq J^2 \neq J^3$, modelo XYZ.

O modelo XXX [11, 17], descreve um sistema isotrópico de N partículas de spin $1/2$, com interação somente entre os primeiros vizinhos, localizadas em N sítios de uma rede unidimensional. A cada sítio associa-se o operador local de spin S_n^i , que comuta em diferentes sítios da rede. Este modelo é descrito pelo Hamiltoniano

$$H = J \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 S_n^i S_{n+1}^i, \quad (1.8)$$

caso particular de (1.3) com $J^1 = J^2 = J^3 = J$, obedecendo a condições de contorno periódicas dadas por:

$$S_{N+1}^i = S_1^i. \quad (1.9)$$

O Hamiltoniano (1.8) pode ser escrito como a soma dos Hamiltonianos que descrevem a interação entre os spins de dois sítios vizinhos,

$$H = \sum_{n=1}^N H_{n,n+1} = J \sum_{i=1}^3 S_n^i S_{n+1}^i; \quad (1.10)$$

o operador $H_{n,n+1}$ age em $\eta_n \otimes \eta_{n+1}$.

O objeto básico do MEIQ é o operador matricial $L_n(\lambda)$, a matriz de transferência local, que depende de um parâmetro complexo λ , chamado parâmetro espectral. No modelo XXX, este operador é a matriz 2x2,

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I_n + i S_n^3 & i S_n^- \\ i S_n^+ & \lambda I_n - i S_n^3 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

onde, $S_n^+ = S_n^1 + i S_n^2$ e $S_n^- = S_n^1 - i S_n^2$. $L_n(\lambda)$ age num espaço auxiliar $V = \mathbb{C}^2$, assim chamado para distinguir do espaço quântico η_n , onde agem os elementos de matriz de $L_n(\lambda)$, chamado de espaço interno. Os elementos de matriz de $L_n(\lambda)$ são operadores que atuam no espaço interno. A matriz $L_n(\lambda)$ pode também ser representada na forma:

$$L_n(\lambda) = \sum_{\alpha\beta=0}^3 V_{\alpha\beta} \sigma_0^\alpha \otimes \sigma_n^\beta, \quad (1.12)$$

onde $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $\sigma^0 = I$ é a identidade, I_0 e σ_0^α agem no espaço auxiliar e I_n , σ_n^α no espaço interno; os $V_{\alpha\beta}$ são coeficientes dependentes do parâmetro espectral. Efetuando o produto tensorial em (1.12) e comparando com (1.11) temos:

$$\begin{aligned} V_{00} &= \lambda \\ V_{11} &= V_{22} = V_{33} = \frac{i}{2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Logo, a matriz L para o modelo XXX é:

$$L_n(\lambda) = \lambda I_0 \otimes I_n + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma^i \otimes \sigma_n^i. \quad (1.14)$$

Os elementos de matriz do operador L_n comutam para diferentes sítios (propriedade de ultralocalidade):

$$[L_n(\lambda), L_{n+1}(\lambda)] = 0. \quad (1.15)$$

As matrizes $L_n(\lambda)$ e $L_n(\mu)$, onde λ e μ são parâmetros espectrais distintos, obedecem às relações de comutação

$$R(\lambda - \mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))R(\lambda - \mu), \quad (1.16)$$

chamadas de Relações de Comutação Fundamentais (RCF). R é uma matriz 4×4 , que funciona como uma "constante de estrutura" e atua no espaço auxiliar $V \otimes V$. Quando o espaço auxiliar tem a mesma dimensão que o espaço interno, a matriz R , está associada à matriz L através de

$$L_n(\lambda) = R_{0n}(\lambda - \lambda') \quad (1.17)$$

e satisfaz à equação de Yang-Baxter [7],

$$R_{12}(\lambda_{12})R_{13}(\lambda_{13})R_{23}(\lambda_{23}) = R_{23}(\lambda_{23})R_{13}(\lambda_{13})R_{12}(\lambda_{12}), \quad (1.18)$$

onde $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ e

$$R = \sum_i a_i \otimes b_i \quad (1.19.a)$$

$$R_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes I \quad (1.19.b)$$

$$R_{13} = \sum_i a_i \otimes I \otimes b_i \quad (1.19.c)$$

$$R_{23} = \sum_i I \otimes a_i \otimes b_i. \quad (1.19.d)$$

Podemos demonstrar que as RCF são equivalentes à eq. de Yang-Baxter. Reescrevemos as Relações de Comutação Fundamentais (RCF) na forma,

$$R_{12}(\lambda_{12})(L_{n1}(\lambda_1) \otimes L_{n2}(\lambda_2)) = (L_{n2}(\lambda_2) \otimes L_{n1}(\lambda_1))R_{12}(\lambda_{12}). \quad (1.20)$$

onde explicitamos os índices i , que se referem ao espaço auxiliar e n , ao espaço local. Multiplicando (1.20) à esquerda por $R_{1,2}^{-1}$, temos:

$$L_{n1}(\lambda_1) \otimes L_{n2}(\lambda_2) = R_{12}^{-1}(\lambda_{12})(L_{n2}(\lambda_2) \otimes L_{n1}(\lambda_1))R_{12}(\lambda_{12}). \quad (1.21)$$

Multiplicando (1.21) à direita por $L_{n3}(\lambda_3)$ e usando convenientemente (1.20) temos:

$$\begin{aligned} \underbrace{L_{n1}(\lambda_1) \otimes L_{n2}(\lambda_2)} \otimes L_{n3}(\lambda_3) &= R_{12}^{-1}(\lambda_{12})L_{n2}(\lambda_2) \otimes \underbrace{L_{n1}(\lambda_1) \otimes L_{n3}(\lambda_3)} R_{12}(\lambda_{12}) \\ &= R_{12}^{-1}(\lambda_{12})R_{13}^{-1}(\lambda_{13}) \underbrace{L_{n2}(\lambda_2) \otimes L_{n3}(\lambda_3)} \otimes L_{n1}(\lambda_1)R_{13}(\lambda_{13})R_{12}(\lambda_{12}) \\ &= R_{12}^{-1}(\lambda_{12})R_{13}^{-1}(\lambda_{13})R_{23}^{-1}(\lambda_{23})L_{n3}(\lambda_3) \otimes L_{n2}(\lambda_2) \otimes L_{n1}(\lambda_1)R_{23}(\lambda_{23})R_{13}(\lambda_{13})R_{12}(\lambda_{12}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} L_{n1}(\lambda_1) \otimes \underbrace{L_{n2}(\lambda_2) \otimes L_{n3}(\lambda_3)} &= R_{23}^{-1}(\lambda_{23}) \underbrace{(L_{n,1}(\lambda_1) \otimes L_{n3}(\lambda_3))} \otimes L_{n2}(\lambda_2)R_{23}(\lambda_{23}) \\ &= R_{23}^{-1}(\lambda_{23})R_{13}^{-1}(\lambda_{13})L_{n3}(\lambda_3) \otimes \underbrace{L_{n1}(\lambda_1) \otimes L_{n,2}(\lambda_2)} R_{13}(\lambda_{13})R_{23}(\lambda_{23}) \\ &= R_{23}^{-1}(\lambda_{23})R_{13}^{-1}(\lambda_{13})R_{12}^{-1}(\lambda_{12})L_{n3}(\lambda_3) \otimes L_{n,2}(\lambda_2) \otimes L_{n1}(\lambda_1)R_{12}(\lambda_{12})R_{13}(\lambda_{13})R_{23}(\lambda_{23}). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Portanto, para que (1.22) e (1.23) sejam iguais, é condição necessária que

$$R_{23}(\lambda_{23})R_{13}(\lambda_{13})R_{12}(\lambda_{12}) = R_{12}(\lambda_{12})R_{13}(\lambda_{13})R_{23}(\lambda_{23}),$$

que é a eq. de Yang-Baxter (1.18).

Veremos adiante que a existência de matriz L é necessária à construção das cargas conservadas. Portanto, quando (1.17) não é válida, são as eqs. (1.16) que asseguram a integrabilidade de um dado modelo com R satisfazendo à eq.(1.18).

No modelo XXX, R é dada por:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & i & 0 \\ 0 & i & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda + i) \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

que pode ser escrita em função das matrizes de Pauli:

$$R(\lambda) = \sum_{\alpha\beta=0}^3 W_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \otimes \sigma^\beta. \quad (1.25)$$

Efetuando o produto tensorial em (1.25) e comparando com (1.24), obtemos:

$$\begin{aligned} W_{00} &= \lambda + \frac{i}{2} \\ W_{11} &= W_{22} = \frac{i}{2} \\ W_{33} &= \frac{i}{2}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Em (1.25), I e σ agem no espaço auxiliar.

No presente caso, a integrabilidade do modelo XXX é facilmente demonstrada construindo-se (1.19.a-d) com (1.25) e (1.26) e verificando-se que a eq.(1.18) é satisfeita; este procedimento encontra-se no apêndice A.

Com as $L_n(\lambda)$, constrói-se a matriz de transição $T_{mn}(\lambda)$, que é o produto das $L_n(\lambda)$ em cada sítio:

$$T_{mn}(\lambda) = L_m(\lambda) \dots L_n(\lambda) \quad n \leq m. \quad (1.27)$$

Vamos mostrar que a matriz de transição (1.27) satisfaz uma relação similar às (RCF) (1.16).

Multiplicamos a eq.(1.16) por $L_{n-1}(\lambda) \otimes L_{n-1}(\mu)$ à direita,

$$\begin{aligned} R(\lambda - \mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu))(L_{n-1}(\lambda) \otimes L_{n-1}(\mu)) &= \\ = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))R(\lambda - \mu)(L_{n-1}(\lambda) \otimes L_{n-1}(\mu)), \end{aligned} \quad (1.28)$$

e usamos novamente a eq.(1.16) para o sítio $n - 1$, obtendo

$$\begin{aligned} R(\lambda - \mu)(L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)) \otimes (L_n(\mu)L_{n-1}(\mu)) &= \\ = (L_n(\mu)L_{n-1}(\mu) \otimes L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda))R(\lambda - \mu). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Repetindo o processo k vezes, com $n - k = m$, temos:

$$\begin{aligned} R(\lambda - \mu)(L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\dots L_m(\lambda) \otimes (L_n(\mu)L_{n-1}(\mu)\dots L_m(\mu)) &= \\ = (L_n(\mu)L_{n-1}(\mu)\dots L_m(\mu) \otimes (L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\dots L_m(\lambda))R(\lambda - \mu). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Lembrando que $T_{nm}(\lambda) = L_n(\lambda)L_{n-1}(\lambda)\dots L_m(\lambda)$, com $m \leq n$. obtemos

$$R(\lambda - \mu)T_{mn}(\lambda) \otimes T_{mn}(\mu) = T_{mn}(\mu)T_{mn}(\lambda)R(\lambda - \mu). \quad (1.31)$$

A matriz de monodromia $T_N(\lambda)$,

$$T_N(\lambda) = T_{N,1}(\lambda), \quad (1.32)$$

é a matriz transição ou translação através da rede inteira e descreve o transporte ao longo da cadeia:

$$T_N(\lambda) = \prod_{n=1}^N L_n(\lambda). \quad (1.33)$$

Pode ser facilmente demonstrado que a eq. (1.31) também é válida para a matriz de monodromia:

$$R(\lambda - \mu)(T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)) = (T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda))R(\lambda - \mu). \quad (1.34)$$

$T_N(\lambda)$ pode também ser escrita na forma geral:

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}; \quad (1.35)$$

$A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ e $D(\lambda)$ são operadores agindo no espaço μ_N .

Define-se a matriz de transferência $F_N(\lambda)$ como sendo o traço no espaço auxiliar da matriz de monodromia:

$$F_N(\lambda) = \text{tr} T_N(\lambda). \quad (1.36)$$

A relação (1.34) contém todas as relações de comutação dos elementos de matriz de $T_N(\lambda)$. Em particular, obtém-se:

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu); \quad (1.37)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu); \quad (1.38)$$

e

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad (1.39)$$

onde a , b e c são os elementos de matriz de R ,

$$\begin{aligned} a &= \lambda + i \\ b &= i \\ c &= \lambda. \end{aligned} \quad (1.40)$$

A eq. (1.34) também pode ser escrita na forma

$$R(\lambda - \mu)T_N(\lambda) \otimes T_N(\mu)R(\lambda - \mu)^{-1} = T_N(\mu) \otimes T_N(\lambda). \quad (1.41)$$

Tomando o traço de (1.41) no espaço auxiliar, usando que $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(B \otimes A)$ e a propriedade cíclica do traço, obtemos:

$$[trT_N(\lambda), trT_N(\mu)] = 0. \quad (1.42)$$

Desta maneira, a partir de (1.34), constrói-se um conjunto infinito de operadores $F_N(\lambda) = trT_N(\lambda)$ que comutam. Veremos adiante que a família de operadores $F_N(\lambda)$ contém o operador momento p e o Hamiltoniano H do sistema.

1.1 Obtenção do Hamiltoniano.

Sabemos de (1.2) que $F(\lambda)$ é conservada se $[F_N(\lambda), H] = 0$; deste modo podemos escrever qualquer carga conservada do sistema como função de $F_N(\lambda)$. Para os modelos tratados neste trabalho, podemos escrever o Hamiltoniano do sistema como derivada logarítmica do operador $F_N(\lambda)$ [18]:

$$H = (F_N(\lambda_0))^{-1} \frac{iJ}{2} \frac{d}{d\lambda} F_N(\lambda) |_{\lambda=\lambda_0} - \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} I_n I_{n+1}, \quad (1.43)$$

onde $\lambda_0 = \frac{i}{2}$.

Para encontrar o Hamiltoniano da cadeia de spin XXX a partir de (1.43), precisamos reescrever $F_N(\lambda)$ em função das matrizes de Pauli; lembramos que

$$F_N(\lambda) = tr(L_N(\lambda) \dots L_1(\lambda)) \quad (1.44)$$

e

$$L_n(\lambda) = \lambda I_0 \otimes I_n + \frac{i}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_0^i \otimes \sigma_n^i. \quad (1.12)$$

I_n e σ_n^i atuam no espaço físico enquanto I_0 e σ_0^i , no espaço auxiliar. Então,

$$F_N\left(\frac{i}{2}\right) = tr\left(L_N\left(\frac{i}{2}\right) \dots L_1\left(\frac{i}{2}\right)\right) \quad (1.45)$$

e

$$L_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha=0}^3 \sigma_0^\alpha \otimes \sigma_n^\alpha = iP_{0n}, \quad (1.46)$$

onde P_{0n} é a matriz permutação ,

$$P_{0n} = \frac{1}{2}(I_0 \otimes I_n + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_0^\alpha \otimes \sigma_n^\alpha), \quad (1.47)$$

cuja forma matricial é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (1.48)$$

P_{0n} atua no espaço $V \otimes \eta_n$ e estamos, por conveniência, explicitando o índice "0" do espaço auxiliar. O operador P_{0n} , permuta índices auxiliares e internos, de acordo com

$$P_{0i}A_{0j} = A_{ij}P_{0i}, \quad (1.49)$$

onde A_{ij} é um operador que atua no espaço $V \otimes \eta_j$.

Deste modo, (1.45) assume a forma:

$$F_N(i/2) = i^N \text{tr}(P_{0N} \dots P_{01}). \quad (1.50)$$

Vamos mostrar que:

$$\text{tr}(P_{0N} \dots P_{0n} \dots P_{01}) \sigma_n^b = \sigma_{n+1}^b \text{tr}(P_{0N} \dots P_{0n} \dots P_{01}). \quad (1.51)$$

Sabemos que

$$\text{tr}(P_{0N} \dots P_{0n} \dots P_{01}) \sigma_n^b = \text{tr}(P_{0N} \dots P_{0n} \sigma_n^b \dots P_{01}), \quad (1.52)$$

uma vez que

$$P_{0i}\sigma_j^b = \sigma_j^b P_{0i}, \quad i \neq j. \quad (1.53)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} P_{0n}\sigma_n^b &= \frac{1}{2}(I_0 \otimes I_n + \sum_{a=1}^3 \sigma_0^a \otimes \sigma_n^a)\sigma_n^b \\ &= \frac{1}{2}(I_0 \otimes \sigma_n^b + \sigma_0^a \otimes I_n + i\epsilon_{abc}\sigma_0^a \otimes \sigma_n^c) \end{aligned} \quad (1.54)$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_0^b P_{0n} &= \frac{1}{2}\sigma_0^b(I_0 \otimes I_n + \sum_{a=1}^3 \sigma_0^a \otimes \sigma_n^a) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_0^b \otimes I_n + I_0 \otimes \sigma_n^b + i\epsilon^{abc}\sigma_0^a \otimes \sigma_n^c); \end{aligned} \quad (1.55)$$

então:

$$\sigma_0^b P_{0n} = P_{0n}\sigma_n^b. \quad (1.56)$$

Usando (1.56) em (1.52), temos:

$$\begin{aligned} tr(P_{0N}\dots P_{0n}\sigma_n^b\dots P_{01}) &= tr(P_{0N}\dots\sigma_0^b P_{0n}\dots P_{01}) \\ &= tr(P_{0N}\dots \underbrace{P_{0,n+1}\sigma_0^b}_{\sigma_{n+1} P_{0,n+1}} P_{0n}\dots P_{01}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

e, usando novamente (1.52), temos finalmente,

$$tr(P_{0N}\dots P_{0n}\dots P_{01})\sigma_n^b = \sigma_{n+1}^b tr(P_{0N}\dots P_{0n}\dots P_{01}). \quad (1.58)$$

Chamamos o operador $tr(P_{0N}\dots P_{0n}\dots P_{01})$ de U_N ,

$$U_N = tr(P_{0N}\dots P_{01}); \quad (1.59)$$

da eq(1.57) temos:

$$U_N\sigma_n^b = \sigma_{n+1}^b U_N. \quad (1.60)$$

O operador U_N transporta do sítio n para o sítio $n+1$ ao longo da cadeia e é unitário; pode portanto ser escrito

$$U_N = e^{ip}, \quad (1.61)$$

onde p pode ser interpretado como o operador momento transferido ao longo da cadeia.

Substituindo as relações (1.50) e (1.59) em (1.43), o Hamiltoniano passa a ser escrito:

$$H = \frac{J}{2} i^N U_N^{-1} \frac{dF_N(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=i/2} - \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} I_n I_{n+1}. \quad (1.62)$$

De (1.12) calculamos $\frac{dF_N(\lambda)}{d\lambda}$, obtendo:

$$\frac{dF_N(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{n=1}^N \text{tr}(L_N(\lambda) \dots \frac{dL_n(\lambda)}{d\lambda} \dots L_1(\lambda)). \quad (1.63)$$

Mas, de (1.46), temos que

$$\frac{dL_n}{d\lambda} \Big|_{\lambda=i/2} = I_0 \otimes I_n, \quad (1.64)$$

de modo que

$$\frac{dF_N(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=i/2} = i \sum_n^N \text{tr}(P_{0N} \dots I_{0n} \dots P_{01}) \quad (1.65)$$

e, finalmente,

$$H \equiv \sum_{n=1}^N \frac{J}{2} U^{-1} \text{tr}(P_{0N} \dots I_{0n} \dots P_{01}) - \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} I_n I_{n+1}, \quad (1.66)$$

onde $I_{0n} = I_0 \otimes I_n$.

Vamos calcular $U = \text{tr}(P_{0N} \dots P_{01})$ e $\text{tr}(P_{0N} \dots I_{0n} \dots P_{01})$; lembrando a propriedade (1.49) do operador permutação P_{0n} e que o traço atua no espaço auxiliar,

$$\begin{aligned} U &= \text{tr}(P_{0N} \dots P_{0,n+1} P_{0n} \dots P_{01}) \\ &= \text{tr}(P_{0N} \dots P_{n+1,n} P_{0,n+1} \dots P_{01}) \\ &= P_{n+1,n} \text{tr}(P_{0N} \dots P_{0,n+1} P_{0,n-1} \dots P_{01}); \end{aligned} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned}
tr(P_{0N}\dots P_{0,n+1}I_{0n}\dots P_{01}) &= tr(P_{0N}\dots I_{n+1,n}P_{0,n+1}P_{0,n-1}\dots P_{01}) \\
&= I_{n+1,n}tr(P_{0N}\dots P_{0,n+1}P_{0,n-1}\dots P_{01}).
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Multiplicando U^{-1} por (1.68), temos:

$$U^{-1}tr(P_{0N}\dots I_{0n}\dots P_{01}) = P_{n+1,n}; \tag{1.69}$$

então

$$H \equiv \sum_{n=1}^N \frac{J}{2} I_{N,N-1}\dots P_{n+1,n}\dots I_{2,1} - \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} I_n I_{n+1}, \tag{1.70}$$

onde

$$P_{n+1,n} = \frac{1}{2} (I_{n+1,n} + \sum_{i=1}^3 \sigma_{n+1} \sigma_n). \tag{1.71}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} (I_{n+1,n} + \sum_{i=1}^3 \sigma_{n+1} \sigma_n) - \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} I_n I_{n+1} \\
&= J \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 S_n^i S_{n+1}^i.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

1.2 O *ansatz* de Bethe Algébrico.

Nesta seção revisaremos o método do *Ansatz* de Bethe Algébrico (ABA)[15, 16] aplicado ao modelo XXX, para encontrar os autovalores e autovetores dos operadores $F_N(\lambda)$.

Vamos construir o estado inicial da rede de N sítios para a cadeia XXX.

Consideremos então o vetor $\omega_n \in \eta_n$, onde η_n é o espaço de Hilbert do operador local de spin S_n^α ,

$$\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = 1, \dots, N, \tag{1.73}$$

que representa um estado com spin para cima. O operador $\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2)$, que na representação (1.5) tem a forma

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

age sobre w_n como um operador de aniquilação :

$$\sigma^+ \omega_n = 0. \quad (1.75)$$

Considerando como estado inicial da rede de N sítios,denotado por Ω_N , a configuração em que todos os spins estão orientados para cima, temos então:

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^N \otimes \omega_n, \quad \Omega_N \in \mu_N. \quad (1.76)$$

Aplicando (1.11) a w_n , vê-se imediatamente que:

$$L_n(\lambda)\omega_n = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{i}{2} & * \\ 0 & \lambda - \frac{i}{2} \end{pmatrix} \omega_n. \quad (1.77)$$

A forma do elemento denotado * não é relevante para o desenvolvimento do método.

A matriz de monodromia (1.35),

$$T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

como já vimos, obedece à Eq(1.34), que é equivalente a Eq(1.16), e atua sobre os vetores do espaço de Hilbert μ_N . Aplicando $T_N(\lambda)$ em Ω_N , temos:

$$\begin{aligned} T_N(\lambda)\Omega_N &= L_N(\lambda), \dots, L_1(\lambda) \prod_{n=1}^N \otimes \omega_n \\ &= L_N(\lambda)\omega_N, \dots, L_1(\lambda)\omega_1, \end{aligned} \quad (1.78)$$

que, devido à (1.77), nos dá a matriz de autovalores de $T_N(\lambda)$,

$$T_N(\lambda)\Omega_N = \begin{pmatrix} (\lambda + \frac{i}{2})^N & * \\ 0 & (\lambda - \frac{i}{2})^N \end{pmatrix} \Omega_N. \quad (1.79)$$

Do mesmo modo, $F_N(\lambda) = tr(T_N(\lambda))$ atua sobre os vetores $\Omega_N \in \mu_N$, de acordo com

$$F_N(\lambda)\Omega_N = tr(T_N(\lambda))\Omega_N = A(\lambda)\Omega_N + D(\lambda)\Omega_N. \quad (1.80)$$

De (1.35) e (1.79), temos que Ω_N é autovetor de $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ e portanto de $F_N(\lambda)$, de acordo com:

$$F_N(\lambda)\Omega_N = \left[(\lambda + \frac{i}{2})^N + (\lambda - \frac{i}{2})^N \right] \Omega_N. \quad (1.81)$$

O *Ansatz* de Bethe consiste em, uma vez conhecido Ω_N , construir autovetores da forma:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda_1, \dots, \lambda_l) &\equiv \phi(\{\lambda\}) \equiv \overset{D(\lambda_1)}{\underset{B}{B}} \dots \overset{D(\lambda_l)}{\underset{B}{B}} \Omega_N \\ &= \prod_{j=1}^l B(\lambda_j)\Omega_N. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Os geradores $B(\lambda)$ podem ser interpretados como operadores de criação, conforme (1.82).

Veremos que os autovetores de $F_N(\lambda)$ serão desta forma se o conjunto de todos os λ , $\{\lambda\}$, satisfizer às relações algébricas chamadas equações do *Ansatz* de Bethe.

Nosso objetivo é encontrar os autovalores do operador $F_N(\lambda)$ relativos aos autovetores (1.82), ou seja, determinar os $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ tais que

$$\begin{aligned} F(\lambda)\phi(\{\lambda\}) &= [A(\lambda) + B(\lambda)] \prod_{j=1}^l B(\lambda_j)\Omega_N \\ &= \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j)\Omega_N. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Como Ω_N é autovetor de $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$, fazendo uso das relações de comutação (1.37)-(1.39), entre estes operadores e $B(\lambda)$, em (1.83), obtemos dois tipos de termos, a saber,

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \Omega_N \quad (1.84)$$

e

$$\Lambda_k(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1, j \neq k}^l B(\lambda_j) B(\lambda) \Omega_N. \quad (1.85)$$

Os termos do tipo (1.84) são devidos aos primeiros termos do lado direito de (1.37) e (1.38). Desenvolvendo (1.83), temos:

$$[A(\lambda) + D(\lambda)] \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \Omega_N = [A(\lambda)B(\lambda_1) + D(\lambda)B(\lambda_1)] \prod_{j=2}^l B(\lambda_j) \Omega_N. \quad (1.86)$$

Mas, lembrando que

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu), \quad (1.37)$$

e

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu), \quad (1.38)$$

vamos desenvolver o 1^o termo de (1.37) e (1.38) em (1.86), ou seja:

$$\left[\frac{a(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} B(\lambda_1)A(\lambda) + \frac{a(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} B(\lambda_1)D(\lambda) \right] \prod_{j=2}^l B(\lambda_j) \Omega_N;$$

atuando sucessivamente $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ em $\prod_{j=2}^l B(\lambda_j)$, obtemos:

$$[A(\lambda) + D(\lambda)] \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \Omega_N = \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) [Y(\lambda_j - \lambda)A(\lambda) + Y(\lambda - \lambda_j)D(\lambda)] \Omega_N, \quad (1.87)$$

com

$$\begin{aligned} Y(\lambda_j - \lambda) &= \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{c(\lambda_j - \lambda)} \\ Y(\lambda - \lambda_j) &= \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda - \lambda_j)}{c(\lambda - \lambda_j)}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

De (1.79) sabemos que $A(\lambda)\Omega_N = (\lambda + \frac{i}{2})^N \Omega_N$ e $D(\lambda)\Omega_N = (\lambda - \frac{i}{2})^N \Omega_N$. Portanto

$$(A(\lambda) + D(\lambda)) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \Omega_N = \prod_{j=1}^l B(\lambda_1) [(\lambda + \frac{i}{2})^N Y(\lambda_j - \lambda) + (\lambda - \frac{i}{2})^N Y(\lambda - \lambda_j)] \Omega_N, \quad (1.89)$$

e, finalmente, temos os autovetores $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l)$ (1.84), que têm a seguinte forma:

$$\Lambda(\lambda; \{\lambda\}) \phi(\{\lambda\}) = \left((\lambda + \frac{i}{2})^N Y(\lambda_j - \lambda) + (\lambda - \frac{i}{2})^N Y(\lambda - \lambda_j) \right) \phi(\{\lambda\}). \quad (1.90)$$

Os termos do tipo (1.85) são obtidos desenvolvendo os segundos termos de (1.37) e (1.38) em (1.86):

$$\left[\frac{b(\lambda_1 - \lambda)}{c(\lambda_1 - \lambda)} B(\lambda_1) A(\lambda) + \frac{b(\lambda - \lambda_1)}{c(\lambda - \lambda_1)} B(\lambda_1) D(\lambda) \right] \prod_{j=2}^l B(\lambda_j) \Omega_N.$$

Aplicando sucessivamente $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ em $\prod_{j=2}^l B(\lambda_j)$, obtemos a seguinte expressão:

$$- \left[\frac{b(\lambda_k - \lambda)}{c(\lambda_k - \lambda)} (\lambda_k + \frac{i}{2})^N Y(\lambda_j - \lambda_k) + \frac{b(\lambda - \lambda_k)}{c(\lambda - \lambda_k)} (\lambda_k - \frac{i}{2})^N Y(\lambda_k - \lambda_j) \right]. \quad (1.91)$$

com

$$\begin{aligned} Y(\lambda_j - \lambda_k) &= \prod_{j=1, k \neq j}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{c(\lambda_j - \lambda)} \\ Y(\lambda_k - \lambda_j) &= \prod_{j=1, k \neq j}^l \frac{a(\lambda - \lambda_j)}{c(\lambda - \lambda_j)}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Como $\frac{b(\lambda_k - \lambda)}{c(\lambda_k - \lambda)} = -\frac{b(\lambda - \lambda_k)}{c(\lambda - \lambda_k)}$, temos:

$$\Lambda_k(\lambda; \{\lambda\}) = \frac{b(\lambda_k - \lambda)}{c(\lambda_k - \lambda)} \left[(\lambda_k + \frac{i}{2})^N Y(\lambda_j - \lambda_k) - (\lambda_k - \frac{i}{2})^N Y(\lambda_k - \lambda_j) \right]. \quad (1.93)$$

Para que $\phi(\{\lambda\})$ seja autovetor de $F_N(\lambda)$, ou seja, que

$$F_N(\lambda) \phi(\{\lambda\}) = \Lambda(\lambda; \lambda_1 \dots \lambda_l) \phi(\{\lambda\}),$$

é necessário que os termos do tipo (1.91) sejam nulos, ou seja, que

$$\Lambda_k(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_j) = 0. \quad (1.94)$$

Usando a condição (1.94), de (1.93), obtemos as equações do *Ansatz* de Bethe:

$$\left(\frac{\lambda_k + \frac{i}{2}}{\lambda_k - \frac{i}{2}} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{a(\lambda_k - \lambda_j)c(\lambda_j - \lambda_k)}{c(\lambda_k - \lambda_j)a(\lambda_j - \lambda_k)}. \quad (1.95)$$

Com esses resultados resolvemos o problema, pois conhecendo os autovalores de $F_N(\lambda)$ podemos obter os autovalores do conjunto de cargas conservadas que satisfazem a $[F_N(\lambda), F_N(\mu)] = 0$, onde uma delas foi identificada com o Hamiltoniano da seção anterior. Convém analisarmos a estrutura de $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$: podemos notar que $c(\lambda)$ tem um polo em $\lambda = 0$, logo Λ tem um polo em $\lambda = \lambda_j$. Por outro lado, como podemos notar, a matriz $T_N(\lambda)$ é uma função de λ (de fato é um polinômio em λ) e como tal não pode ter polos; similarmente para Λ . Conseqüentemente, se Λ é um autovalor, tem resíduo "0" no polo, e com isto obtemos novamente as equações do *Ansatz* de Bethe.

1.3 A Álgebra

Nesta seção faremos uma revisão das estruturas algébricas [9] necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Uma álgebra (\mathcal{A}, m, η) é um espaço vetorial sobre um corpo complexo k , onde m é o produto e η a unidade, definidos por:

A) O Produto m :

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (1.96)$$

B) A Unidade η :

$$\eta : k \rightarrow \mathcal{A} \quad (1.97)$$

A álgebra é associativa quando o seguinte diagrama é satisfeito:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{I \otimes m} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \\
 m \otimes I \downarrow & & \downarrow m \\
 \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{m} & \mathcal{A}
 \end{array}$$

Se além de (1.96) usarmos a aplicação (1.97), podemos representar a propriedade da unidade pelo diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & & \\
 \eta \otimes I \nearrow & & & & \nwarrow I \otimes \eta \\
 k \otimes \mathcal{A} & & \downarrow m & & \mathcal{A} \otimes k \\
 \cong \searrow & & & & \swarrow \cong \\
 & & \mathcal{A} & &
 \end{array}$$

Neste diagrama, as aplicações $\mathcal{A} \otimes k \rightarrow \mathcal{A}$ e $k \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ são isomorfias.

1.4 As Coálgebras

Uma coálgebra associativa $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ [9] é um espaço vetorial sobre um corpo complexo k , onde Δ é o coproduto e ϵ a counidade, definidos por:

i) Coproduto Δ ,

$$\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \tag{1.98}$$

ii) Counidade ϵ ,

$$\epsilon : \mathcal{C} \rightarrow k \tag{1.99}$$

e satisfazendo às seguintes propriedades:

i) Coassociatividade,

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.100}$$

ii) Counidade ϵ ,

$$(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(a) = (I \otimes \epsilon) \circ \Delta(a) = a. \quad (1.101)$$

Podemos representar as propriedades da álgebra coassociativa do mesmo modo que na seção anterior, através de diagramas:

i) Coassociatividade,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{I \otimes \Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \Delta \otimes I \uparrow & & \uparrow \Delta \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \xleftarrow{\Delta} & \mathcal{C} \end{array}$$

ii) Counidade,

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & & \\ \epsilon \otimes I \swarrow & & & & \searrow I \otimes \epsilon \\ k \otimes \mathcal{C} & \uparrow \Delta & & & \mathcal{C} \otimes k \\ \cong \swarrow & & & & \nearrow \cong \\ & & \mathcal{C} & & \end{array}$$

Neste diagrama, as aplicações $\mathcal{C} \rightarrow k \otimes \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes k$ são isomorfas.

Uma biálgebra $(\mathcal{B}, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ é definida como sendo uma álgebra (\mathcal{A}, m, η) e uma coálgebra $(\mathcal{A}, \Delta, \epsilon)$ satisfazendo a :

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \quad (1.102.a)$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad (1.102.b)$$

$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b) \quad (1.102.c)$$

$$\epsilon(1) = 1 \quad (1.102.d)$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

1.5 A Álgebra de Lie

Uma álgebra de Lie associativa \mathcal{L} é um espaço vetorial, onde é definido um tipo particular de operação binária, comumente denotada como parênteses de Lie ou comutador [19],

$$[,] : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad (1.103)$$

$$[a, b] = ab - ba \quad (1.104)$$

com $a, b \in \mathcal{L}$, e que satisfaz às seguintes propriedades:

i) Antissimetria

$$[a, b] = -[b, a] \quad (1.105)$$

ii) Identidade de Jacobi

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]; \quad (1.106)$$

iii) Se $a, b \in \mathcal{A}$ e $f(a), f(b) \in \mathcal{L}$, onde f é uma aplicação linear,

$$f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}', \quad (1.107)$$

então

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]. \quad (1.108)$$

I é o elemento identidade em \mathcal{L} .

Uma álgebra de Lie é real ou complexa quando seu espaço vetorial é respectivamente real ou complexo.

$sl(2, R)$ é a álgebra de Lie, isomorfa a $su(2, C)$, gerada pelos elementos, σ^+ , σ^- e σ^3 que satisfazem às relações [19, 10]

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^3, \quad [\sigma^3, \sigma^\pm] = \pm\sigma^\pm. \quad (1.109)$$

Na representação (1.5),

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

1.6 As Álgebras de Hopf \mathcal{H}

Uma álgebra de Hopf \mathcal{H} [10, 20] é uma biálgebra sobre o corpo k equipada com uma aplicação \mathcal{S} , denominado antípoda,

$$\mathcal{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad (1.111)$$

satisfazendo à seguinte propriedade:

$$m(\mathcal{S} \otimes I) \circ \Delta(h) = m(I \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta(h) = \eta \epsilon(h), \quad (1.112)$$

onde $h \in \mathcal{H}$ e m é o produto (1.96).

O coproduto pode sempre ser escrito na forma ([20])

$$\Delta(h) = \sum_i h_i^{(1)} \otimes h_i^{(2)}, \quad (1.113)$$

onde $h_1 \in \mathcal{H}_1$ e $h_2 \in \mathcal{H}_2$.

Vamos definir a propriedade de co-comutatividade; consideremos a aplicação τ ,

$$\tau : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1, \quad (1.114)$$

$$\tau(h_2 \otimes h_1) = h_1 \otimes h_2, \quad (1.115)$$

onde $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$. Uma álgebra de Hopf é chamada de co-comutativa quando:

$$\tau o\Delta = \Delta. \quad (1.116)$$

1.7 A Álgebra Envelope $U(su(2))$

A álgebra envelope universal $U(su(2))$ [10, 20] é uma álgebra associativa \mathcal{L} gerada por σ^+ , σ^- e σ^3 de $su(2)$ e a identidade I, obedecendo às relações de comutação dadas por (1.109),

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^3 \quad (1.117.a)$$

$$[\sigma^3, \sigma^\pm] = \pm\sigma^\pm \quad (1.117.b)$$

$$[\sigma^\pm, I] = [\sigma^3, I] = 0. \quad (1.117.c)$$

Em outras palavras, $U(su(2))$ contém todos os possíveis polinômios dos três geradores, o que, devido às propriedades dos geradores de $su(2)$, nos reproduz novamente estes mesmos geradores e a identidade I.

A álgebra envelope universal $U(\mathcal{L})$, onde \mathcal{L} é a álgebra de Lie associada (que neste caso é $su(2)$), é uma álgebra de Hopf quando:

i) O coproduto é:

$$\Delta(\sigma^3) = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 \quad (1.118.a)$$

$$\Delta(\sigma^\pm) = \sigma^\pm \otimes I + I \otimes \sigma^\pm \quad (1.118.b)$$

ii) Podemos encontrar a counidade de \mathcal{L} utilizando a propriedade (1.101) para σ^\pm, σ^3 . Para σ^3 , temos

$$(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(\sigma^3) = \sigma^3. \quad (1.119)$$

Usando (1.118.a), vemos que

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes I) \circ (\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3) &= \sigma^3 \quad \text{ou} \\ \epsilon(\sigma^3) \otimes I + \epsilon(I) \otimes \sigma^3 &= \sigma^3 \quad . \end{aligned} \quad (1.120)$$

Usando (1.99) temos:

$$\epsilon(\sigma^3)I + \epsilon(I)\sigma^3 = \sigma^3, \quad (1.121)$$

o que nos dá:

$$\epsilon(\sigma^3) = 0. \quad (1.122)$$

Aplicando o mesmo procedimento para σ^\pm encontramos a cunidade para $su(2)$

$$\epsilon(\sigma^3) = 0 \quad (1.123.a)$$

$$\epsilon(\sigma^\pm) = 0 \quad . \quad (1.123.b)$$

iii) Utilizando a propriedade (1.112) temos:

$$m(\mathcal{S} \otimes I) \circ \Delta(\sigma^3) = \eta \epsilon(\sigma^3). \quad (1.124)$$

Usando (1.118.a) e (1.124), temos:

$$m(\mathcal{S} \otimes I) \circ (\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3) = 0. \quad (1.125)$$

Da definição (1.81), temos que $m(\mathcal{S} \otimes I) = \mathcal{S}$, logo $\mathcal{S}(\sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3) = 0$ ou, finalmente, usando (1.96) obtemos:

$$\mathcal{S}(\sigma^3) + \mathcal{S}(I)\sigma^3 = 0. \quad (1.126)$$

Portanto,

$$\mathcal{S}(\sigma^3) = -\sigma^3 \quad (1.127)$$

Utilizando o mesmo procedimento para σ^\pm , temos:

$$\mathcal{S}(\sigma^3) = -\sigma^3 \quad (1.128.a)$$

$$\mathcal{S}(\sigma^\pm) = -\sigma^\pm. \quad (1.128.b)$$

1.8 A Estrutura Algébrica do Modelo XXX

Vamos então obter as relações algébricas para o modelo XXX [11]; para isto usaremos a Relação de Comutação Fundamental (RCF) (1.16),

$$R(\lambda - \mu)(L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)) = (L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda))R(\lambda - \mu), \quad (1.16)$$

onde as matrizes $L_n(\lambda)$ e $R(\lambda)$ são dadas por

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda I_n + iS_n^3 & iS_n^- \\ iS_n^+ & \lambda I_n - iS_n^3 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

e $R(\lambda - \mu)$ é

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \mu + i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \mu & i & 0 \\ 0 & i & \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - \mu + i) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Substituindo R e L na RCF (1.16), obtemos as relações de comutação

$$[\sigma^3, \sigma^\pm] = \pm\sigma^\pm \quad (1.129.a)$$

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^3 \quad (1.129.b)$$

$$[\sigma^3, I] = [\sigma^\pm, I] = 0. \quad (1.129.c)$$

Obtemos portanto a álgebra envelope $U(su(2))$ e podemos associar uma álgebra de Hopf a estas estruturas. $U(su(2))$, não é uma álgebra quase-triangular (Grupo Quântico) por ser co-comutativa. No próximo capítulo abordaremos, através do modelo XXZ, o caso não co-comutativo.

Capítulo 2

O Método do Espalhamento

Inverso Quântico: O Modelo XXZ

O modelo XXZ [1, 8] descreve uma cadeia de spins com interação entre os primeiros vizinhos; esta interação apresenta uma anisotropia na direção Z . A solução deste modelo [21] corresponde a uma matriz R trigonométrica. Esta forma especial da matriz R implica que as Relações de Comutação Fundamentais somente são satisfeitas se os operadores de spin obedecerem a relações de comutação modificadas. A álgebra definida por tais relações de comutação constitui um grupo quântico [5, 6] ou seja uma álgebra de Hopf quase-triangular.

2.1 A Álgebra de Hopf quase-triangular

Álgebras deformadas são generalizações das álgebras de Lie \mathcal{L} onde as constantes de estrutura são séries de potências de um parâmetro de deformação que denotaremos q [22, 23, 24]. Quando estas álgebras têm a estrutura de uma álgebra de Hopf quase-triangular, são chamadas de Grupos Quânticos [5, 6]. Exemplos destas estruturas são as álgebras envelope quantizadas $U_q(\mathfrak{su}(2))$ associadas a álgebras de Lie \mathcal{L} .

Uma álgebra de Hopf quase-triangular \mathcal{H} , é uma álgebra de Hopf não co-comutativa, isto é,

$$\tau \circ \Delta = \Delta', \quad (2.1)$$

onde $\Delta' \neq \Delta$, satisfazendo a

$$\Delta'(x) = \mathcal{R}\Delta(x)\mathcal{R}^{-1} \quad (2.2)$$

para todo $x \in \mathcal{H}$, $\mathcal{R} \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ é uma matriz não singular que satisfaz a

$$(\Delta \otimes I)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} \quad (2.3)$$

$$(I \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \quad (2.4)$$

com

$$\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i \quad (2.5.a)$$

$$\mathcal{R}_{13} = \sum_i a_i \otimes I \otimes b_i \quad (2.5.b)$$

$$\mathcal{R}_{23} = \sum_i I \otimes a_i \otimes b_i' \quad (2.5.c)$$

$$\mathcal{R}_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes I, \quad (2.5.d)$$

com $a, b \in \mathcal{H}$.

Podemos relacionar as matrizes \mathcal{R}_{12} , \mathcal{R}_{13} e \mathcal{R}_{23} , definidas em (2.3) e (2.4), da seguinte forma:

i) Usando a propriedade (2.1) temos que

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta')\mathcal{R} &= (I \otimes \tau \circ \Delta)\mathcal{R} \\ &= (I \otimes \tau)(I \otimes \Delta)\mathcal{R}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

de (2.4) obtemos,

$$(I \otimes \tau)(I \otimes \Delta)\mathcal{R} = (I \otimes \tau)\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \quad (2.7)$$

Pela propriedade (1.115) temos,

$$(I \otimes \tau)\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}; \quad (2.8)$$

então,

$$(I \otimes \Delta')R = R_{12}R_{13}. \quad (2.9)$$

ii) Usando (2.2) temos:

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta')\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{23}(I \otimes \Delta\mathcal{R})\mathcal{R}_{23}^{-1} = \\ &= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Igualando (2.9) e (2.10) obtemos:

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}^{-1}. \quad (2.11)$$

Multiplicando ambos os lados de (2.11) por R_{23} , temos:

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \quad (2.12)$$

Esta é a equação de Yang-Baxter. Observamos que neste caso a matriz \mathcal{R} não envolve os parâmetros espectrais, como a equação de Yang-Baxter usada no capítulo I; no entanto, a equação de Yang-Baxter nesta forma é suficiente para definirmos o aspecto algébrico dos modelos tratados.

Convém observarmos que se $\Delta' = \Delta$, como é o caso no modelo XXX, a equação de Yang-Baxter também é satisfeita.

2.2 A Álgebra Envelope Quantizada $U_q(su(2))$

A álgebra envelope $U(su(2))$, apresentada na seção (1.7), pode ser deformada de maneira a obter-se uma estrutura de Grupo Quântico. Para tal, introduzimos um coproduto Δ não co-comutativo, conforme (2.2), de acordo com

$$\Delta(q^{\sigma^3}) = q^{\sigma^3} \otimes q^{\sigma^3} \quad (2.13.a)$$

$$\Delta(\sigma^3) = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3 \quad (2.13.b)$$

$$\Delta(\sigma^\pm) = \sigma^\pm \otimes q^{\sigma^3} + q^{-\sigma^3} \otimes \sigma^\pm \quad (2.13.c)$$

$$[\Delta(A), \Delta(B)] = \Delta[A, B], \quad (2.13.d)$$

onde A e B designam os geradores σ^\pm e σ^3 . É imediato mostrar a não co-comutatividade de (2.1), usando-se a definição (1.115). Os coprodutos (2.13.a-b) são co-comutativos. O coproduto deve satisfazer às propriedades

$$\Delta(\sigma^\pm \sigma^3) = \Delta(\sigma^\pm) \Delta(\sigma^3) \quad (2.14)$$

$$\Delta(\sigma^+ \sigma^-) = \Delta(\sigma^+) \Delta(\sigma^-). \quad (2.15)$$

Mas, de acordo com (2.13.d), temos

$$\Delta([\sigma^3, \sigma^\pm]) = [\sigma^3, \sigma^\pm] \otimes q^{\sigma^3} + q^{-\sigma^3} \otimes [\sigma^3, \sigma^\pm]. \quad (2.16)$$

Vê-se facilmente que se

$$[\sigma^3, \sigma^\pm] = \pm \sigma^\pm, \quad (2.17)$$

(2.16) é compatível com (2.13.c). Do mesmo modo, temos que

$$\Delta([\sigma^+, \sigma^-]) = [\sigma^+, \sigma^-] \otimes q^{\sigma^3} + q^{-\sigma^3} \otimes [\sigma^+, \sigma^-]. \quad (2.18)$$

Vemos que $[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma^3$ não é compatível com o coproduto (2.13.b), de modo que neste caso (2.18) não é satisfeita. Portanto, é necessário modificar a relação de comutação $[\sigma^+, \sigma^-]$. Podemos facilmente verificar que o coproduto (2.18) é satisfeito se

$$[\sigma^+, \sigma^-] = [\sigma^3], \quad (2.19)$$

onde $[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$. As relações (2.13.a-d) são assim consistentes. Então, a álgebra $U_q(su(2))$ é dada pelas relações de comutação :

$$[\sigma^+, \sigma^-] = [\sigma^3] \quad (2.20.a)$$

$$[\sigma^3, \sigma^\pm] = \pm \sigma^\pm \quad (2.20.b)$$

$$[\sigma^\pm, I] = [\sigma^3, I] = 0. \quad (2.20.c)$$

Usando as propriedades da counidade e da antípoda definidas no Capítulo I e seguindo um procedimento semelhante ao da seção 1.7, obtemos que

$$\epsilon(\sigma_i) = 0 \quad (2.21.a)$$

$$S(\sigma_\pm) = -q^\pm \sigma_\pm \quad (2.21.b)$$

$$S(q^\mp \sigma^3) = q^\mp \sigma^3, \quad (2.21.c)$$

onde $i = \pm, 3$.

2.3 Modelo XXZ

Para mostrar a integrabilidade e resolver o modelo XXZ [17], segue-se o mesmo procedimento utilizado no caso da cadeia XXX.

O Hamiltoniano do modelo XXZ é [8]

$$H = J(S_n^1 S_{n+1}^1 + S_n^2 S_{n+1}^2 + \Delta S_n^3 S_{n+1}^3), \quad (2.22)$$

onde Δ é a anisotropia, que demonstraremos adiante estar relacionada à deformação, n são os sítios da rede e os operadores σ^n têm a forma (1.5).

A matriz $L_n(\lambda)$ é um operador matricial local, dependendo do parâmetro espectral λ , que atua em um espaço auxiliar V , cujos elementos de matriz são operadores agindo no espaço interno no sítio n ; para o modelo XXZ tem a forma:

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh \gamma(\lambda I_n + iS_n^3) & S_n^- \sin \gamma \\ S_n^+ \sin \gamma & \sinh \gamma(\lambda I_n - iS_n^3) \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Pode ser escrita em função das matrizes de Pauli na forma (1.12), com V_{00}, V_{11}, V_{22} e V_{33} dados por:

$$\begin{cases} V_{00} = \frac{i}{2} \sinh \gamma \lambda \cosh \gamma \\ V_{11} = \frac{i}{2} \sin \gamma \\ V_{22} = \frac{i}{2} \sin \gamma \\ V_{33} = \frac{i}{2} \sin \gamma \cosh(\gamma \lambda). \end{cases} \quad (2.24)$$

A matriz R que satisfaz a equação de Yang-Baxter (1.18) é:

$$R(\lambda\gamma) = \begin{pmatrix} \sinh \gamma(\lambda + i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \gamma \lambda & i \sin \gamma & 0 \\ 0 & i \sin \gamma & \sinh \gamma \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh \gamma(\lambda + i) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Na representação de Pauli (1.25), os coeficientes são:

$$\begin{cases} W_{00} = \frac{\sinh \gamma(\lambda+i) + \sinh \gamma \lambda}{2} \\ W_{11} = i \frac{\sin \gamma}{2} \\ W_{22} = i \frac{\sin \gamma}{2} \\ W_{33} = \frac{\sinh \gamma(\lambda+i) - \sinh \gamma \lambda}{2} \end{cases}. \quad (2.26)$$

As matrizes L e R satisfazem às Relações de Comutação Fundamentais (1.16) e à equação de Yang-Baxter, logo este modelo é integrável e existe um conjunto de cargas conservadas $F_N(\lambda)$ que satisfaz à eq. (1.36); podemos escrever o Hamiltoniano como derivada logarítmica do operador $F_N(\lambda)$ [18]:

$$H = (F_N(\frac{i}{2}))^{-1} \frac{iJ \sin \gamma}{2\gamma} \frac{d}{d\lambda} F_N(\lambda)|_{\lambda=\frac{i}{2}} - \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N I_n I_{n+1}. \quad (2.27)$$

Procedendo do mesmo modo que na solução do modelo XXX, escrevemos $F_N(\lambda)$ em função das matrizes $L_n(\lambda)$, de acordo com (1.33) e (1.36). Escrevendo L_n na forma (1.12) e com os coeficientes (2.24), calculamos os $L_n(\lambda = \frac{i}{2})$ e obtemos

$$L_n(\frac{i}{2}) = i \sin \gamma P_{0n}, \quad (2.28)$$

onde P_{0n} é a matriz permutação

$$P_{0n} = \frac{1}{2} (I_0 \otimes I_n + \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_0^\alpha \otimes \sigma_n^\alpha).$$

Aqui estaremos omitindo o índice "0" do espaço auxiliar, a não ser no operador permutação P_{0n} . De acordo com a definição (1.44) de $F_N(\lambda)$, temos que

$$F_N(i/2) = (i \sin \gamma)^N \text{tr}(P_N \dots P_1). \quad (2.29)$$

O operador

$$U_N = \text{tr}(P_N \dots P_1),$$

que atua de acordo com

$$U_N \sigma_n^b = \sigma_{n+1}^b U_N,$$

é um operador unitário que transporta do sítio n para $n + 1$ e pode, como no caso XXX, ser escrito

$$U_N = e^{ip},$$

onde p é o operador momento transferido ao longo da cadeia.

Substituindo (2.29) e $U_N = \text{tr}(P_N \dots P_1)$ em (2.27) o Hamiltoniano passa a ser escrito:

$$H = \frac{iJ \sin \gamma}{2\gamma} (i \sin \gamma)^{-N} U_N^{-1} \frac{dF_N(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=i/2} - \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N I_n I_{n+1}. \quad (2.30)$$

Calculando $\frac{d}{d\lambda} F_k(\lambda)$, temos:

$$\frac{dF_k(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{k=1}^N \text{tr}(L_N(\lambda) \dots \frac{dL_k(\lambda)}{d\lambda} \dots L_1(\lambda)). \quad (2.31)$$

Derivando L_k em (1.12), fazendo $\lambda = i/2$ e somando para n sítios, o Hamiltoniano assume a seguinte forma:

$$H \equiv \sum_{k=1}^n J U^{-1} \text{tr}(P_N \dots A_k \dots P_1), \quad (2.32)$$

onde $A_k = (\cos \gamma/2)^2 I \otimes I_k - (\sin \gamma/2)^2 \sigma^3 \otimes \sigma_k^3$.

A expressão resultante, para a soma de n sítios, é:

$$H = J \sum_{n=1}^N (S_n^1 S_{n+1}^1 + S_n^2 S_{n+1}^2 + \cos \gamma S_n^3 S_{n+1}^3). \quad (2.33)$$

Portanto,

$$\Delta = \cos \gamma \quad (2.34)$$

e

$$J^3 = J \cos \gamma. \quad (2.35)$$

Vemos que a anisotropia Δ é função do parâmetro de deformação $q = e^{i\gamma}$.

2.3.1 O *ansatz* de Bethe Algébrico

Vamos aplicar ao modelo XXZ a mesma construção usada no caso XXX para encontrar os autovalores do conjunto de cargas conservadas $F_N(\lambda)$.

O vetor $w_n \in \eta_n$,

$$\omega_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_n \in \eta_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

representa um estado com spin para cima e é aniquilado por σ_n^+ ,

$$\sigma^+ \omega_n = 0. \quad (2.37)$$

Consideramos como estado inicial da rede de N sítios a configuração em que todos os spins estão orientados para cima, ou seja,

$$\Omega_N = \prod_{n=1}^N \omega_n, \quad \Omega_N \in \mu_N, \quad (2.38)$$

onde $\mu_N = \prod_{n=1}^N \eta_n$.

Aplicando o operador $L_n(\lambda)$ no estado de um sítio temos:

$$L_n(\lambda)\omega_n = \begin{pmatrix} \sinh[\lambda + \frac{i}{2}] & * \\ 0 & \sinh[\lambda - \frac{i}{2}] \end{pmatrix} \omega_n; \quad (2.39)$$

como no parágrafo 1.2, a forma do elemento $*$ em (2.39) não é relevante para o que se segue.

Aplicando a matriz de monodromia a Ω_N , temos

$$\begin{aligned} T_N(\lambda)\Omega_N &= L_N(\lambda)\dots L_1(\lambda) \prod_{n=1}^N \omega_n \\ &= L_N(\lambda)\omega_N \dots L_1(\lambda)\omega_1. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Usando a expressão matricial (1.35), obtemos:

$$T_N(\lambda)\Omega_N = \begin{pmatrix} (\sinh \gamma[\lambda + \frac{i}{2}])^N & * \\ 0 & (\sinh \gamma[\lambda - \frac{i}{2}])^N \end{pmatrix} \Omega_N. \quad (2.41)$$

Da definição (1.36) de $F_N(\lambda)$,

$$F_N(\lambda)\Omega_N = \text{tr}(T_N(\lambda)\Omega_N) = A(\lambda)\Omega_N + D(\lambda)\Omega_N, \quad (2.42)$$

onde

$$\begin{aligned} A(\lambda)\Omega_N &= (sh\gamma(\lambda + \frac{i}{2}))^N \Omega_N \\ D(\lambda)\Omega_N &= (sh\gamma(\lambda - \frac{i}{2}))^N \Omega_N; \end{aligned} \quad (2.43)$$

e os autovalores de $F_N(\lambda)$ para o estado inicial do sistema Ω_N são:

$$F_N(\lambda)\Omega_N = \left[(\sinh \gamma(\lambda + \frac{i}{2}))^N + (\sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2}))^N \right] \Omega_N. \quad (2.44)$$

A relação (1.31) contém todas as possíveis relações de comutação dos elementos de matriz de $T_N(\lambda)$. Em particular, usaremos:

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu - \lambda)}{c(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu), \quad (2.45)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda - \mu)}{c(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu), \quad (2.46)$$

e

$$[B(\lambda), B(\mu)] = 0, \quad (2.47)$$

onde a, b e c são os elementos da matriz R (2.25) do modelo XXZ, a saber:

$$\begin{aligned} a &= \sinh \gamma(\lambda + i) \\ b &= i \sin \gamma \\ c &= \sinh \gamma\lambda. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Repetindo o procedimento empregado no parágrafo 1.2, segue-se de (2.45-2.47) e (1.31) que os vetores

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \equiv \phi(\{\lambda\}) \equiv B(\lambda_1) \dots B(\lambda_l) \Omega_N \quad (2.49)$$

são autovetores da família de operadores $F_N(\lambda)$ se os números $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ estiverem relacionados pelas equações do *ansatz* de Bethe para o modelo XXZ, a saber:

$$\left(\frac{\sinh \gamma[\lambda_k + \frac{i}{2}]}{\sinh \gamma[\lambda_k - \frac{i}{2}]} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{a(\lambda_k - \lambda_j)c(\lambda_j - \lambda_k)}{c(\lambda_k - \lambda_j)a(\lambda_j - \lambda_k)}. \quad (2.50)$$

É importante notar que as equações do *ansatz* de Bethe têm a mesma forma que no modelo anterior. Substituindo em (2.50), $a(\lambda)$ e $b(\lambda)$ por seus valores (2.48), temos:

$$\left(\frac{\sinh \gamma[\lambda_k + \frac{i}{2}]}{\sinh \gamma[\lambda_k - \frac{i}{2}]} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_k - \lambda_j + i)}{\sinh \gamma(\lambda_k - \lambda_j - i)}. \quad (2.51)$$

Os auto valores de $F_N(\lambda)$,

$$F_N(\lambda)\phi(\{\lambda\}) = \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l)\phi(\{\lambda\}), \quad (2.52)$$

são:

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\sinh \gamma[\lambda + \frac{i}{2}])^N \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{c(\lambda_j - \lambda)} + (\sinh \gamma[\lambda - \frac{i}{2}])^N \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda - \lambda_j)}{c(\lambda - \lambda_j)}. \quad (2.53)$$

Finalmente, substituindo os valores de $a(\lambda)$ e $b(\lambda)$ em (2.53), temos os autovalores para o modelo XXZ:

$$\Lambda(\lambda; \{\lambda\}) = (\sinh \gamma[\lambda + \frac{i}{2}])^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda + i)}{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda)} + (\sinh \gamma[\lambda - \frac{i}{2}])^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda - \lambda_j + i)}{\sinh \gamma(\lambda - \lambda_j)}. \quad (2.54)$$

O fato das matrizes $R(\lambda)$ e, por conseguinte, $L(\lambda)$ serem funções trigonométricas de λ , introduz uma anisotropia na terceira componente, isto é, $J^1 = J^2 = J \neq J^3$, onde $J^3 = J \cos \gamma$. No limite $\gamma \rightarrow 0$ recaímos no modelo XXX, desaparecendo a anisotropia.

2.3.2 Estruturas Algébricas do Modelo XXZ

O objetivo desta seção é obtermos as estruturas algébricas do modelo XXZ, discutidas nas seções (2.1) e (2.2), comparando-as com a álgebra discutida no Capítulo I. Foi visto que os operadores L e R do modelo XXZ obedecem à Relação de Comutação Fundamental (FCR) e à equação de Yang-Baxter respectivamente. Por conveniência, usaremos a seguinte notação :

$$R(\lambda - \mu)L^1(\lambda)L^2(\mu) = L^2(\mu)L^1(\lambda)R(\lambda - \mu), \quad (2.55)$$

$$L^1 = L \otimes I, \quad L^2 = I \otimes L. \quad (2.56)$$

No entanto precisamos de matrizes R e L independentes do parâmetro espectral que sejam soluções da equação de Yang-Baxter e das Relações de Comutação Fundamentais; para isso vamos escrever estas matrizes da seguinte forma:

$$L(\lambda, \gamma) = \frac{1}{2}(e^{\lambda\gamma}L_+ - e^{-\lambda\gamma}L_-), \quad (2.57)$$

$$R(\lambda, \gamma) = e^{\gamma\lambda}R_+ - e^{-\gamma\lambda}R_-. \quad (2.58)$$

Para escrevê-las desta forma é necessário se fazer uma transformação de similaridade [17] Q ,

$$L(\lambda) \rightarrow Q(\lambda)L(\lambda)Q^{-1}(\lambda) \quad (2.59)$$

$$R(\lambda - \mu) \rightarrow Q^1(\lambda)Q^2(\mu)R(\lambda - \mu)Q^2(\lambda)^{-1}Q^1(\mu)^{-1}, \quad (2.60)$$

onde Q é a matriz unitária

$$Q = \begin{pmatrix} q^{-i\lambda/2} & 0 \\ 0 & q^{i\lambda/2} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

e $q = e^{i\gamma}$.

As $L(\lambda, \gamma)$ e $R(\lambda, \gamma)$ transformadas são:

$$L(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} \sinh \gamma(\lambda I + iS^3) & iS^- \sin \gamma e^{\lambda\gamma} \\ iS^+ \sin \gamma e^{-\lambda\gamma} & \sinh \gamma(\lambda I - iS^3) \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$R(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} \sinh \gamma(\lambda + i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sinh \gamma\lambda & i \sin \gamma e^{\lambda\gamma} & 0 \\ 0 & i \sin \gamma e^{-\lambda\gamma} & \sinh \gamma\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sinh \gamma(\lambda + i) \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Agrupando L e R na forma das equações (2.57) e (2.58) podemos escrever L_+ e L_- em termos da deformação q do seguinte modo:

$$L_+ = \begin{pmatrix} q^{S^3} & \Omega S^- \\ 0 & q^{-S^3} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

$$L_- = \begin{pmatrix} q^{S^3} & 0 \\ -\Omega S_+ & q^{-S^3} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

$$R_+(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

$$R_-(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

$$R_- = PR_+^{-1}P, \quad (2.68)$$

onde $\Omega = q - q^{-1}$.

As Relações de Comutação do Modelo XXZ

Substituindo as matrizes (2.57) e (2.58) na RFC (2.55) obtém-se outras:

$$R_{\pm} L_{\pm}^1 L_{\pm}^2 - = L_{\pm}^2 L_{\pm}^1 R_{\pm} \quad (2.69)$$

$$R_+ L_+^1 L_-^2 = L_-^2 L_+^1 R_+ \quad (2.70)$$

onde L_\pm^1 e L_\pm^2 satisfazem às relações (2.56).

Do mesmo modo, substituímos (2.58) na equação de Yang-Baxter (1.18) e obtemos equações similares a (2.12), isto é, equações de Yang-Baxter independentes do parâmetro espectral, ou seja,

$$R_{12}^\pm R_{13}^\pm R_{23}^\pm = R_{23}^\pm R_{13}^\pm R_{12}^\pm, \quad (2.71)$$

onde as R_{ij}^\pm são dadas por:

$$\mathcal{R}^\pm = \sum_i a'_i \otimes b'_i \quad (2.72.a)$$

$$\mathcal{R}_{13}^\pm = \sum_i a'_i \otimes I \otimes b'_i \quad (2.72.b)$$

$$\mathcal{R}_{23}^\pm = \sum_i I \otimes a'_i \otimes b'_i \quad (2.72.c)$$

$$\mathcal{R}_{12}^\pm = \sum_i a'_i \otimes b'_i \otimes I. \quad (2.72.d)$$

Igualando os elementos das matrizes em (2.70), encontra-se as seguintes relações de comutação :

$$[S^+, S^-] = \frac{q^{2S^3} - q^{-2S^3}}{q - q^{-1}} \quad (2.73.a)$$

$$[S^3, S^\pm] = \pm S^\pm. \quad (2.73.b)$$

Cálculo do Coproduto do Modelo XXZ

De acordo com a definição (1.113), o coproduto de L_\pm é dado por:

$$\Delta(L_{ik}^\pm) = \sum_{i=1}^n L_{ik}^\pm \otimes L_{ik}^\pm \quad (2.74)$$

onde L_{ik} são os elementos de matriz de L^\pm . Assim:

$$\Delta L_+ = \begin{pmatrix} q^{S^3} & \Omega S^- \\ 0 & q^{-S^3} \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} q^{S^3} & \Omega S^- \\ 0 & q^{-S^3} \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

e

$$\Delta L_- = \begin{pmatrix} q^{-S^3} & 0 \\ -\Omega S_+ & q^{S^3} \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} q^{-S^3} & 0 \\ -\Omega S_+ & q^{S^3} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

de onde obtemos que

$$\Delta S^3 = S^3 \otimes I + I \otimes S^3 \quad (2.77.a)$$

$$\Delta S^\pm = q^{S^3} \otimes S^\pm + S^\pm \otimes q^{-S^3}. \quad (2.77.b)$$

Podemos mostrar que qualquer modelo no qual as matrizes L_\pm possam ser escritas na forma triangular superior,

$$L^+ = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.78)$$

ou inferior,

$$L^- = \begin{pmatrix} D & 0 \\ E & F \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

onde A, B, C, D, E e F são quaisquer matrizes 2×2 , satisfaz às propriedades de coálgebra descritas na seção (1.4). A estrutura fundamental para satisfazer a estas propriedades é o coproduto Δ . Usando as matrizes (2.78) e a definição de coproduto temos:

$$\Delta L^+ = \begin{pmatrix} \Delta A & \Delta B \\ 0 & \Delta C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

e as relações :

$$\Delta A = A \otimes A \quad (2.81.a)$$

$$\Delta B = A \otimes B + B \otimes C \quad (2.81.b)$$

$$\Delta C = C \otimes C. \quad (2.81.c)$$

Vamos demonstrar que o coproduto (2.80) é coassociativo, $(\Delta \otimes I) \circ \Delta = (I \otimes \Delta) \circ \Delta$; esta propriedade é obviamente satisfeita por (2.81.a e c). Para (2.81.b), temos

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I) \circ \Delta B &= (\Delta \otimes I) \circ (A \otimes B + B \otimes C) \\ &= \Delta A \otimes B + \Delta B \otimes C. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Usando (2.81.a) e novamente (2.81.b), temos:

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta B = A \otimes A \otimes B + A \otimes B \otimes C + B \otimes C \otimes C. \quad (2.83)$$

Mas,

$$\begin{aligned} (I \otimes \Delta) \circ \Delta B &= (I \otimes \Delta) \circ (A \otimes B + B \otimes A) \\ &= A \otimes \Delta B + B \otimes \Delta C. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Usando (2.81.c) e novamente (2.81.b)), temos:

$$(I \otimes \Delta) \circ \Delta B = A \otimes A \otimes B + A \otimes B \otimes C + B \otimes C \otimes C. \quad (2.85)$$

Deste modo, vemos que a propriedade de coassociatividade é válida para o coproduto (2.80). A demonstração para L^- é idêntica.

Vamos encontrar a counidade usando a propriedade (1.99),

$$(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(a) = (I \otimes \epsilon) \circ \Delta(a) = a.$$

De (2.81.a) temos:

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(A) &= (\epsilon \otimes I)(A \otimes A) \\
&= (\epsilon(A))A = A;
\end{aligned} \tag{2.86}$$

de (2.81.c),

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes I) \circ \Delta(C) &= (\epsilon \otimes I)(C \otimes C) \\
&= \epsilon(C)C = C
\end{aligned} \tag{2.87}$$

e, de (2.81.b):

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes I) \circ \Delta B &= (\epsilon \otimes I)(A \otimes B + B \otimes C) \\
&= \epsilon(A)B + \epsilon(B)C = B.
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Deste modo, obtemos:

$$\epsilon(A) = \epsilon(D) = 1 \tag{2.89.a}$$

$$\epsilon(C) = \epsilon(F) = 1 \tag{2.89.b}$$

$$\epsilon(B) = \epsilon(E) = 0. \tag{2.89.c}$$

É ainda possível verificar que os modelos descritos por matrizes L_{\pm} da forma (2.78) e (2.79) têm a estrutura de biálgebras, ou seja, que o coproduto e a counidade satisfazem às propriedades (1.102.a-d). Para tal, usaremos (2.81.a-c) e que, de ΔL_{-} ,

$$\Delta D = D \otimes D \tag{2.90.a}$$

$$\Delta E = E \otimes D + F \otimes E \tag{2.90.b}$$

$$\Delta F = F \otimes F. \tag{2.90.c}$$

Vamos mostrar que os coprodutos junto com a propriedade (1.102.a) preservam a estrutura algébrica dos modelos, quando a matriz R associada tem a forma

$$R_+ = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

Da relação (2.70) para as matrizes (2.78) e (2.79) com R_+ dada por (2.91), temos as seguintes relações de comutação :

$$AD = DA \quad (2.92.a)$$

$$AF = FA \quad (2.92.b)$$

$$CD = DC \quad (2.92.c)$$

$$CF = FC \quad (2.92.d)$$

$$bAE = aEA \quad (2.92.e)$$

$$aBD = dDB \quad (2.92.f)$$

$$eCE = dEC \quad (2.92.g)$$

$$bBF = eFB \quad (2.92.h)$$

$$bBE - dEB = cFA - eCB. \quad (2.92.i)$$

Para os modelos que analisamos neste trabalho, todas as relações de comutação acima, com exceção da última, são idênticas às obtidas nos modelos XXZ com condições de contorno periódicas ou periódicas torcidas, que constituem biálgebras. Por outro lado, usando, as relações de comutação (2.92.a-i) e a propriedade (1.102.a) é fácil mostrar a compatibilidade entre (2.92.a-i) e o coproduto dado por (2.81.a-c) e (2.90.a-c), ou seja, que

$$\Delta[bBE - dEB] = c\Delta(FA) - e\Delta(CB). \quad (2.93)$$

Usando a propriedade (1.99), mostra-se imediatamente que a counidade dada

por (2.89.a-c) satisfaz às propriedades (1.102.c e d). Deste modo, os modelos (2.78) e (2.79) possuem a estrutura de biálgebras.

Para o modelo XXZ, a counidade é então:

$$\epsilon(q^{\pm S^3}) = 1 \quad (2.94.a)$$

$$\epsilon(S^3) = 0 \quad (2.94.b)$$

$$\epsilon(S^{\pm}) = 0. \quad (2.94.c)$$

Portanto, as estruturas algébricas de todos os modelos descritos neste trabalho são biálgebras. Poderemos então definir uma antípoda \mathcal{S} , satisfazendo à propriedade (1.112),

$$m(\mathcal{S} \otimes I) \circ \Delta(h) = m(I \otimes \mathcal{S}) \circ \Delta(h) = \epsilon(h).$$

Substituindo o coproduto para A, B, C, D, E e F obtemos,

$$\mathcal{S}(A) = A^{-1} \quad (2.95.a)$$

$$\mathcal{S}(D) = D^{-1} \quad (2.95.b)$$

$$\mathcal{S}(B) = -A^{-1}BC^{-1} \quad (2.95.c)$$

$$\mathcal{S}(E) = -D^{-1}EF^{-1} \quad (2.95.d)$$

$$\mathcal{S}(C) = C^{-1} \quad (2.95.e)$$

$$\mathcal{S}(F) = F^{-1}. \quad (2.95.f)$$

Portanto, aos modelos descritos por (2.78), (2.79) e (2.95.a-f) corresponde uma estrutura de álgebra de Hopf.

No caso do modelo XXZ, vimos na seção (2.2) que seus geradores (σ^3, σ^{\pm}) satisfazem às propriedades de biálgebra. Para este modelo XXZ a antípoda é

$$\mathcal{S}(q^{\pm S^3}) = q^{\mp S^3} \quad (2.96.a)$$

$$\mathcal{S}(S^{\pm}) = -q^{\mp S^3}(S^{\pm})q^{\pm S^3}. \quad (2.96.b)$$

A partir da relação de comutação (2.73.b) para o modelo XXZ, obtemos

$$\mathcal{S}(S^{\pm}) = -q^{\pm}(S^{\pm}). \quad (2.97)$$

Portanto, o modelo XXZ tem a estrutura de uma álgebra de Hopf. Pode-se verificar que essa álgebra é não co-comutativa. A partir da propriedade,

$$\tau o(h_1 \otimes h_2) = (h_2 \otimes h_1), \quad (2.98)$$

vemos que para o coproduto (2.81.b), $\tau o\Delta = \Delta'$, $\Delta \neq \Delta'$:

$$\tau o\Delta(B) = B \otimes A + C \otimes B = \Delta'(B) \quad (2.99.a)$$

$$\tau o\Delta(E) = E \otimes D + F \otimes E = \Delta'(E). \quad (2.99.b)$$

O coproduto (2.81.b) é não co-comutativo, e da mesma maneira, o coproduto (2.77.b) do modelo XXZ. Como a matriz R (2.63) satisfaz à eq de Yang-Baxter, a álgebra, associada ao modelo XXZ (álgebra envelope universal deformada $U_q(sl(2))$) tem a estrutura de uma álgebra de Hopf quase-triangular e é portanto um grupo quântico.

Capítulo 3

Modelos de Spin Multiparamétricos

Neste Capítulo, vamos tratar de forma unificada os modelos XXZ e XY com condições de contorno periódicas e periódicas torcidas.

Os modelos em rede unidimensional tratados neste trabalho descrevem uma cadeia de átomos, a cada sítio n da cadeia estando associado um operador de spin $1/2, (S_n^\alpha)$, dado por (1.4), que comuta em diferentes sítios. Escreveremos, primeiramente, um operador R multiparamétrico que satisfaça à equação de Yang-Baxter (1.18), condição necessária para a integrabilidade do sistema, conforme demonstrado no apêndice A, a saber,

$$R(\lambda, \gamma) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & b & 0 \\ 0 & b & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) \\
b &= i \sin \gamma \\
c' &= G_{12} \sinh \gamma\lambda \\
c'' &= G_{21} \sinh \gamma\lambda \\
d &= \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \pm 1 \\
\epsilon_2 &= \pm 1;
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ϵ_1 e ϵ_2 podem ser iguais ou diferentes.

A matriz $R(\lambda)$ (3.1) e (3.2) satisfaz à equação de Yang-Baxter,

$$R_{12}(\lambda_{12})R_{13}(\lambda_{13})R_{23}(\lambda_{23}) = R_{23}(\lambda_{23})R_{13}(\lambda_{13})R_{12}(\lambda_{12}), \tag{3.4}$$

com os $R_{ij}(\lambda_{ij})$ dados por (1.19.a-d), se

$$G_{12}^{-1} = G_{21}. \tag{3.5}$$

Esta condição corresponde a condições de contorno periódicas com torção [25, 26], no caso em que $G_{12} \neq 1$. Quando $G_{12} = 1$, os modelos não apresentam torção e (3.5) é uma identidade.

Determinaremos os coeficientes $W_{\alpha\beta}$ em (1.25), para a matriz R (3.1). Vemos que os únicos termos que diferem de zero são:

$$\begin{aligned}
R = & W_{00}I \otimes I_n + W_{11}\sigma^1 \otimes \sigma_n^1 + W_{22}\sigma^2 \otimes \sigma_n^2 + \\
& + W_{33}\sigma^3 \otimes \sigma_n^3 + W_{30}\sigma^3 \otimes I_n + W_{03}I \otimes \sigma_n^3,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

com estes coeficientes obedecendo às relações :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{00} + W_{33} + W_{03} + W_{30} = a \\ W_{00} - W_{33} - W_{03} + W_{30} = c' \\ W_{00} - W_{33} + W_{03} - W_{30} = c'' \\ W_{00} + W_{33} - W_{03} - W_{30} = d \\ W_{11} - W_{22} = 0 \\ W_{11} + W_{22} = b. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.2) em (3.7) e resolvendo o sistema acima, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{00} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) + (G_{12} + G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{11} = W_{22} = \frac{1}{2}i \sin \gamma \\ W_{33} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) - (G_{12} + G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{30} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) + (G_{12} - G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{03} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) - (G_{12} - G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Se compararmos (3.8) com (1.26) e (2.26), notamos que se $\epsilon_1 = \epsilon_2$ e $G_{12} = G_{21}$, os termos W_{03} e W_{30} desaparecem. Além disto, de (3.5), vemos que neste caso, $G_{12} = G_{21} = 1$ e a matriz R (3.1) é idêntica a (2.25), ou seja, temos o modelo XXZ. Assim, os termos W_{03} e W_{30} resultam da inclusão de $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$ e/ou de $G_{21} \neq G_{12}$. Veremos adiante a que modelos corresponde a presença desses termos.

Como vimos no Capítulo I, podemos relacionar R com L através de

$$L_n(\lambda) = R_n(\lambda - \frac{i}{2}). \quad (3.9)$$

Usando a Eq(3.9), encontramos a matriz $L_n(\lambda)$ para os modelos descritos pela matriz $R(\lambda)$, (3.1) e (3.2). De acordo com (3.5), vamos chamar $G_{12} = t$ e $G_{21} = t^{-1}$. A matriz $L_n(\lambda)$ é então:

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} t^{(Z_n - S_n^3)} A_1 & i \sin \gamma S_n^- \\ i \sin \gamma S_n^+ & t^{(-Z_n - S_n^3)} A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

com

$$\begin{aligned}
A_1 &= \epsilon_1^{(Z_n + S_n^3)} \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1(Z_n + S_n^3) - iZ_n) \\
A_2 &= \epsilon_2^{(Z_n - S_n^3)} \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2(Z_n - S_n^3) - iZ_n),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde Z é um elemento central da álgebra [27]. Na representação fundamental, $Z = \frac{I}{2}$. Em (3.10),

$$t^{(Z_n - S_n^3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}; \quad t^{(-Z_n - S_n^3)} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

As matrizes (3.1), (3.2) e (3.10) obedecem às Relações de Comutação Fundamentais (RCF):

$$R_{12}(\lambda_{12})L_n^1(\lambda_1)L_n^2(\lambda_2) = L_n^2(\lambda_2)L_n^1(\lambda_1)R_{12}(\lambda_{12}). \tag{3.13}$$

A matriz $L_n(\lambda)$ (3.10) e (3.2) pode ainda ser escrita na forma (1.12):

$$L_n(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 V_{\alpha\beta} \sigma^\alpha \otimes \sigma_n^\beta, \tag{1.12}$$

onde agora

$$\begin{aligned}
V_{00} &= \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_2) + (t + t^{-1}) \sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2})] \\
V_{11} &= W_{22} = \frac{1}{2}i \sin \gamma \\
V_{33} &= \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_2) - (t + t^{-1}) \sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2})] \\
V_{30} &= \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_2) + (t - t^{-1}) \sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2})] \\
V_{03} &= \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma((\lambda - \frac{i}{2}) + i\epsilon_2) - (t - t^{-1}) \sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2})].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

3.1 Cálculo do Hamiltoniano.

Como os modelos descritos por (3.1), (3.2) e (3.10) satisfazem a condições de integrabilidade (3.13), existe um conjunto de cargas conservadas, $F_N(\lambda)$, que satisfaz à:

$$[F_N(\lambda), F_N(\mu)] = 0. \quad (3.15)$$

Do mesmo modo que os modelos XXX e XXZ tratados nos Capítulos I e II, o Hamiltoniano dos modelos (3.1) e (3.2) pode ser escrito como a derivada logarítmica de $F_N(\lambda)$:

$$H = (F(\frac{i}{2}))^{-1} \frac{iJ \sin \gamma}{2\gamma} \frac{d}{d\lambda} F_N(\lambda)|_{\lambda=\frac{i}{2}} - \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \Delta I_n I_{n+1} = \sum_{n=1}^N H_{n,n+1}. \quad (3.16)$$

Para os modelos tratados neste capítulo, o Hamiltoniano (3.16) assume a forma:

$$H = \sum_{k=1}^N U_N^{-1} \text{tr}(P_{0N} \dots A_{0k} \dots P_{01}), \quad (3.17)$$

com

$$\begin{aligned} A_{0k} = & \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \cos \gamma + t + t^{-1} \right] I_0 \otimes I_k \quad + \\ & + \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \cos \gamma - (t + t^{-1}) \right] \sigma_0^3 \otimes \sigma_k^3 \quad + \\ & + \frac{(t - t^{-1})}{4} (\sigma_0^3 \otimes I_k - I_0 \otimes \sigma_k^3). \end{aligned} \quad (3.18)$$

No Capítulo I, calculamos U^{-1} . Vamos agora calcular $\text{tr}(P_{0N} \dots A_{0k} \dots P_{01})$. Lembrando a propriedade $P_{0i} A_{0j} = A_{ij} P_{0i}$, (1.49), obtemos:

$$\text{tr}(P_{0N} \dots P_{0,n+1} A_{0n} \dots P_{01}) = A_{n+1,n} \text{tr}(P_{0N} \dots P_{0,n+1} P_{0,n-1} \dots P_{01}) \quad (3.19)$$

com

$$\begin{aligned} A_{n+1,n} = & \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \cos \gamma + t + t^{-1} \right] I_{n+1} \otimes I_n \quad + \\ & + \left[\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4} \cos \gamma - (t + t^{-1}) \right] \sigma_{n+1}^3 \otimes \sigma_n^3 \quad + \\ & + \frac{(t - t^{-1})}{4} (\sigma_{n+1}^3 \otimes I_n - I_{n+1} \otimes \sigma_n^3). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Multiplicando (3.19) por $U = P_{N,N-1} \dots P_{n+1,n} \dots P_{2,1}$ temos que o Hamiltoniano (3.17) é então

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{J}{4} [(t + t^{-1})(\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2) + i(t - t^{-1})(\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^1) + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} \Delta \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \Delta (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1})] \quad (3.21)$$

ou, na base σ_n^+, σ_n^- ,

$$H = \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N [2t^{-1} \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + 2t \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} \Delta \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \Delta (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1})]. \quad (3.22)$$

O Hamiltoniano acima apresenta condições de contorno periódicas com torção para cada par de sítios $(i, i + 1)$, ou seja, o sítio $(i + 1)$ está girado de um ângulo α , onde $t = e^{i\alpha}$, no plano 1-2, em relação ao sítio i , conforme se vê nos dois primeiros termos de (3.22). Para explicitar estas condições de contorno torcidas, realizamos a transformação de similaridade gerada por $\exp(-i\frac{\alpha}{2} \sum_{l=1}^N (l - 1) \sigma_l^3)$, levando o Hamiltoniano (3.22) a

$$H = \frac{J}{4} \sum_{n=1}^{N-1} \left(2t^{-1} \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + 2t \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} \Delta \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3 + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \Delta (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1}) \right) + \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2} \Delta \sigma_N^3 \sigma_1^3 + 2t^{-N} \sigma_N^+ \sigma_1^- + 2t^N \sigma_N^- \sigma_1^+ + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \Delta (I_N \sigma_1^3 + \sigma_N^3 I_1). \quad (3.23)$$

Vemos que para $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ e $t = 1$ temos o modelo XXZ com condições de contorno periódicas, analisado no Capítulo II.

3.2 O Método do *ansatz* de Bethe

Passaremos à obtenção dos autovalores da matriz transferência $F_N(\lambda)$ para os modelos descritos por (3.1), (3.2) e (3.10). Novamente consideramos como estado inicial Ω_N , a configuração em que todos os spins estão orientados para cima, dada por (1.76) e (1.73).

Aplicando o operador $L_n(\lambda)$ (3.10) no estado de um sítio, temos:

$$L_n(\lambda)\omega_n = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}) & * \\ 0 & t^{-1} \sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2}) \end{pmatrix} \omega_n, \quad (3.24)$$

onde para os autovetores ω_n ,

$$\begin{aligned} t^{(Z-S^3)}\omega_n &= \omega_n \\ t^{(-Z-S^3)}\omega_n &= t^{-1}\omega_n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A forma do elemento denotado * não é relevante para o método e ϵ_2 desaparece do autovalor (3.24) de $L_n(\lambda)$ devido à escolha (1.76) e (1.73) para o estado inicial.

A matriz de monodromia é, neste caso:

$$T_N(\lambda)\Omega_N = \begin{pmatrix} (\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}))^N & * \\ 0 & (t^{-1})^N (\sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2}))^N \end{pmatrix} \Omega_N. \quad (3.26)$$

Da expressão (1.35) para a matriz de monodromia $T_N(\lambda)$ e lembrando que $F_N(\lambda) = \text{tr}T_N(\lambda)$, obtemos os autovalores da configuração inicial do sistema

$$F_N(\lambda)\Omega_N = \left[(\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}))^N + (t^{-1})^N (\sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2}))^N \right] \Omega_N. \quad (3.27)$$

O *ansatz* de Bethe Algébrico consiste, como já vimos nos capítulos I e II, em construir autovetores de $F_N(\lambda)$ da forma:

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \equiv \phi(\{\lambda\}) \equiv B(\lambda_1) \dots B(\lambda_l)\Omega_N. \quad (3.28)$$

Vamos encontrar as eqs. do *ansatz* de Bethe, soluções da eq. de autovalor

$$\begin{aligned} F_N(\lambda)\phi(\{\lambda\}) &= (A(\lambda) + D(\lambda))\phi(\{\lambda\}) \\ &= \Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j)\Omega_N. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para comutarmos os operadores $A(\lambda)$ e $D(\lambda)$ com os operadores $B(\lambda_j)$ do autoestado $\phi(\{\lambda\})$ precisamos de algumas das relações de comutação (1.31) para os presentes modelos, a saber,

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{a(\mu-\lambda)}{c''(\mu-\lambda)}B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu-\lambda)}{c''(\mu-\lambda)}B(\lambda)A(\mu) \quad (3.30.a)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{d(\lambda-\mu)}{c''(\lambda-\mu)}B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda-\mu)}{c''(\lambda-\mu)}B(\lambda)D(\mu) \quad (3.30.b)$$

$$aB(\lambda)B(\mu) - dB(\mu)B(\lambda) = 0 \quad (3.30.c)$$

$$aC(\mu)C(\lambda) - dC(\lambda)C(\mu) = 0, \quad (3.30.d)$$

onde agora

$$\begin{aligned} a &= \epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) \\ b &= i \sin \gamma \\ c' &= t \sinh \gamma \lambda \\ c'' &= t^{-1} \sinh \gamma \lambda \\ d &= \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Usando as relações de comutação (3.30.a-d) em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} F_N(\lambda)\phi\{\lambda\} &= \{(\epsilon_1 \sinh(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}))^N \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{c''(\lambda_j - \lambda)} + \\ &+ (t^{-1})^N (\sinh[\gamma(\lambda - \frac{i}{2})]^N \prod_{j=1}^l \frac{d(\lambda - \lambda_j)}{c''(\lambda - \lambda_j)}\} \prod_{j=1}^l B(\lambda_j)\Omega_N + \\ &+ \{M^1 - (t^{-1})^N M^2\} \prod_{j=1}^l B(\lambda)B(\lambda_j)\Omega_N, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde

$$\begin{aligned} M^1 &= \frac{b(\lambda - \lambda_k)}{c''(\lambda - \lambda_k)} \left(\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}) \right)^N \prod_{j \neq k=1}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda_k)}{c''(\lambda_j - \lambda_k)} \\ M^2 &= \frac{b(\lambda - \lambda_k)}{c''(\lambda - \lambda_k)} \left(\sinh[\gamma(\lambda - \frac{i}{2})] \right)^N \prod_{j \neq k=1}^l \frac{d(\lambda_k - \lambda_j)}{c''(\lambda_k - \lambda_j)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

O procedimento é o mesmo que o empregado para resolver os modelos XXX e XXZ e, finalmente:

$$F_N(\lambda) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) = \Lambda(\lambda; \lambda_1 \dots \lambda_l) \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \Omega_N + \Lambda_k(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) \prod_{j=1, j \neq k}^l B(\lambda_j) B(\lambda) \Omega_N. \quad (3.33)$$

Para que (3.33) seja uma equação de autovalor na forma (3.29), a condição

$$\Lambda_k(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_j) = 0, \quad (3.34)$$

deve ser satisfeita, o que leva às equações do *ansatz* de Bethe:

$$\left(\frac{\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2})}{\sinh \gamma(\lambda_k - \frac{i}{2})} \right)^N = (t^{-1})^N \prod_{j=1, j \neq k}^l \frac{\epsilon_2 \operatorname{sh} \gamma[\lambda_k - \lambda_j + i\epsilon_2]}{\epsilon_1 \operatorname{sh} \gamma[\lambda_k - \lambda_j - i\epsilon_1]}. \quad (3.35)$$

Comparando (3.29) com (3.31), obtemos os autovalores $\phi(\{\lambda\})$:

$$\Lambda(\lambda; \{\lambda\}) = \left\{ \left(\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1 - \frac{i}{2}) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{a(\lambda_j - \lambda)}{c''(\lambda_j - \lambda)} + (t^{-1})^N \left(\sinh \gamma(\lambda - \frac{i}{2}) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{d(\lambda - \lambda_j)}{c''(\lambda - \lambda_j)} \right\}. \quad (3.36)$$

3.3 As Estruturas Algébricas

Para determinar as estruturas algébricas associadas aos modelos (3.1) e (3.2), precisamos de matrizes R e L independentes do parâmetro espectral, que sejam soluções da equação de Yang-Baxter (3.4) e da Relação de Comutação Fundamental (3.13). Para isso, vamos escrever estas matrizes na forma:

$$\bar{L}(\lambda, \gamma) = \frac{1}{2}(e^{\lambda\gamma} L_+ - e^{-\lambda\gamma} L_-), \quad (3.37)$$

$$\bar{R}(\lambda, \gamma) = e^{\gamma\lambda} R_+ - e^{-\gamma\lambda} R_-, \quad (3.38)$$

realizando a transformação de similaridade (2.61) [17], em (3.1-2) e (3.10-11), de modo que

$$L_n(\lambda) \rightarrow Q(\lambda)L_n(\lambda)Q^{-1}(\lambda) = \bar{L}_n(\lambda), \quad (3.39)$$

$$\bar{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} t^{(Z_n - S_n^3)} A_1 & i \sin \gamma S_n^- e^{\gamma \lambda} \\ i \sin \gamma S_n^+ e^{-\gamma \lambda} & t^{(-Z_n - S_n^3)} A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

e

$$R(\lambda) \rightarrow Q^1(\lambda)Q^2(\lambda)R(\lambda - \mu)Q^2(\lambda)^{-1}Q^1(\lambda)^{-1} = \bar{R}(\lambda), \quad (3.41)$$

$$\bar{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & b & 0 \\ 0 & b' & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

com

$$\begin{aligned} a &= \epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) \\ c' &= t \sinh \gamma \lambda \\ b &= i \sin \gamma e^{\gamma \lambda} \\ b' &= i \sin \gamma e^{-\gamma \lambda} \\ c'' &= t^{-1} \sinh \gamma \lambda \\ d &= \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Comparando (3.40) e (3.42), de acordo com (3.37) e (3.38), temos L_+ e L_- em termos da deformação $q = e^{i\gamma}$,

$$L_+ = \begin{pmatrix} t^{(Z-S^3)} (\epsilon_1 q^{\epsilon_1})^{(Z+S^3)} q^{-Z} & S^- \Omega \\ 0 & t^{(-Z-S^3)} (\epsilon_2 q^{\epsilon_2})^{(Z-S^3)} q^{-Z} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$L_- = \begin{pmatrix} t^{(Z-S^3)} (\epsilon_1 q^{-\epsilon_1})^{(Z+S^3)} q^Z & 0 \\ -S^+ \Omega & t^{(-Z-S^3)} (\epsilon_2 q^{-\epsilon_2})^{(Z-S^3)} q^Z \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} \epsilon_1 q^{\epsilon_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 q^{\epsilon_2} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

$$R_- = \begin{pmatrix} \epsilon_1 q^{-\epsilon_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_2 q^{-\epsilon_2} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

$$R_- = PR_+^{-1}P \quad (3.48)$$

onde P é o operador permutação (1.48) e $\Omega = q - q^{-1}$. De acordo com a demonstração feita na seção 2.3.2, todos os modelos descritos por nossa matriz R multiparamétrica possuem a estrutura de uma álgebra de Hopf.

Ao substituir (2.57) e (2.58) na RCF (3.13), obtemos as relações de comutação,

$$R_+ L_+^1 L_+^2 = L_+^2 L_+^1 R_+ \quad (3.49)$$

$$R_+ L_+^1 L_-^2 = L_-^2 L_+^1 R_+, \quad (3.50)$$

onde L_+^1 e L_+^2 são definidas em (2.56).

Substituindo (3.46), (3.47), (3.44) e (3.45) em (3.50), encontramos:

$$t^{-1} S^+ S^- - t S^- S^+ = \frac{t(-2S^3)}{\Omega} \{ (\epsilon_2 q^{-\epsilon_2})^{(Z-S^3)} (\epsilon_1 q^{\epsilon_1})^{(Z+S^3)} + (\epsilon_2 q^{\epsilon_2})^{(Z-S^3)} (\epsilon_1 q^{-\epsilon_1})^{(Z+S^3)} \}, \quad (3.51.a)$$

$$[S^3, S^\pm] = \pm S^\pm, \quad (3.51.b)$$

$$[S^\pm, Z] = [S^3, Z] = 0. \quad (3.51.c)$$

Usando a definição (2.74) de coproduto Δ , calculamos:

$$\begin{aligned} \Delta S^+ &= S^+ \otimes t^{[Z-S^3]} (\epsilon_1 q^{-\epsilon_1})^{(Z+S^3)} q^Z + \\ &+ t^{[-Z-S^3]} (\epsilon_2 q^{-\epsilon_2})^{(Z-S^3)} q^Z \otimes S^+ \end{aligned} \quad (3.52.a)$$

$$\begin{aligned} \Delta S^- &= S^- \otimes t^{[-Z-S^3]} (\epsilon_2 q^{\epsilon_2})^{(Z-S^3)} q^{-Z} + \\ &+ t^{[Z-S^3]} (\epsilon_1 q^{\epsilon_1})^{(Z+S^3)} q^{-Z} \otimes S^- \end{aligned} \quad (3.52.b)$$

$$\Delta(Z) = Z \otimes I + I \otimes Z \quad (3.52.c)$$

$$\Delta(S^3) = S^3 \otimes I + I \otimes S^3. \quad (3.52.d)$$

Vamos analisar alguns aspectos relevantes do Hamiltoniano (3.23). No caso em que $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, se $t = 1$, temos a cadeia de Heisenberg anisotrópica, o modelo XXZ; se $t \neq 1$, o modelo apresenta condições de contorno periódicas torcidas [25, 26, 27]. Vê-se ainda que $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ leva ao aparecimento de um termo de interação, na direção da anisotropia, entre o spin em cada sítio i com um campo externo $H_j^{ext} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2} \Delta I_j$, nos sítios vizinhos $j = i + 1$ e $j = i - 1$. H^{ext} é portanto proporcional à deformação, pois $\Delta = \frac{q+q^{-1}}{2}$. Além disto, para $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = -1$ ou $\epsilon_1 = -1$ e $\epsilon_2 = 1$, o termo de acoplamento spin-spin entre os sítios vizinhos na direção da anisotropia desaparece e o Hamiltoniano (3.23) recai no modelo XY, bem conhecido na literatura [28, 29, 30]. Neste trabalho, apresentaremos sua solução através do MEIQ e exibiremos sua estrutura algébrica. Analisando nosso Hamiltoniano na forma (3.21), vemos que a existência de torção, ou seja, $t \neq 1$, é responsável pelo surgimento do termo $(t - t^{-1})(\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^1)$, que é completamente independente do parâmetro de deformação q . As expressões do coproduto (3.52.a-d) e as relações de comutação (3.51.a-c) também mostram que o parâmetro t altera a estrutura algébrica dos modelos de maneira independente de q . t é então um outro parâmetro de deformação. No entanto, foi demonstrado recentemente que a introdução do parâmetro t só leva a modificações no Hamiltoniano, relativamente ao modelo XXZ, quando a estrutura

algébrica é alargada pela introdução de um elemento central Z [31]. Análise semelhante não foi feita para os modelos XY; no entanto, como para o caso XXZ com condições de contorno periódicas torcidas, o termo central é imprescindível para obter-se coprodutos consistentes, pois caso contrário aparecem potências espúrias dos parâmetros q e t quando a operação coproduto é aplicada à matriz L .

O Hamiltoniano (3.23) contém como caso particular o modelo XY com torção, cujo Hamiltoniano é, para $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = -1$,

$$H_{XY} = \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N \left(2t^{-1} \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + 2t \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \Delta (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1}) + 2t^{-N} \sigma_N^+ \sigma_1^- + 2t^N \sigma_N^- \sigma_1^+ \Delta (I_N \sigma_1^3 + \sigma_N^3 I_1) \right) \quad (3.53)$$

ou, para $\epsilon_1 = -1$ e $\epsilon_2 = 1$,

$$H_{XY} = \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N \left(2t^{-1} \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + 2t \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ - \Delta (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1}) + 2t^{-N} \sigma_N^+ \sigma_1^- + 2t^N \sigma_N^- \sigma_1^+ - \Delta (I_N \sigma_1^3 + \sigma_N^3 I_1) \right). \quad (3.54)$$

No capítulo IV, trataremos o modelo XY pelo MEIQ e apresentaremos sua solução empregando o método do *ansatz* de Bethe algébrico.

Capítulo 4

Estrutura Algébrica e Solução dos Modelos

O objetivo deste capítulo é analisarmos os distintos modelos contidos na matriz (3.1) e (3.2). Vimos que para:

$$G_{12} = G_{21}^{-1} \quad (4.1.a)$$

$$\epsilon_\rho = \pm 1 \quad (4.1.b)$$

com $\rho = 1, 2$, os modelos são integráveis, isto é, satisfazem à Equação de Yang-Baxter. De acordo com os valores de ϵ_1 , ϵ_2 , G_{12} e G_{21} , distinguimos os seguintes modelos possíveis:

$$\epsilon_1 = 1 \quad \epsilon_2 = 1 \quad G_{12} = G_{21}^{-1} = 1 \quad \text{Modelo XXZ} \quad (4.2.a)$$

$$\epsilon_1 = 1 \quad \epsilon_2 = 1 \quad G_{12} = G_{21}^{-1} \neq 1 \quad \text{Modelo XXZ com torção} \quad (4.2.b)$$

$$\epsilon_1 = \pm 1 \quad \epsilon_2 = \mp 1 \quad G_{12} = G_{21}^{-1} = 1 \quad \text{Modelo XY} \quad (4.2.c)$$

$$\epsilon_1 = \pm 1 \quad \epsilon_2 = \mp 1 \quad G_{12} = G_{21}^{-1} \neq 1 \quad \text{Modelo XY com torção} \quad (4.2.d)$$

No capítulo II, revisamos a resolução do modelo XXZ pelo MEIQ; o caso com torção foi tratado na literatura em [25, 26, 28, 29]. O modelo XY, solucionado pelo método de Pfaffian [32], será analisado aqui pelo método do MEIQ e determinaremos sua estrutura algébrica.

As cadeias XY com condições de contorno periódicas torcidas constituem modelos integráveis que apresentaremos neste trabalho, determinando suas estruturas algébricas e resolvendo-os através do método do *ansatz* de Bethe.

Uma vez que todos os modelos mencionados acima estão contidos como casos particulares do Capítulo III, de acordo com a tabela (4.2.a-d), no que se segue não repetiremos os cálculos e nos restringiremos a listar os resultados relevantes.

4.1 O Modelo XY

Neste capítulo estudaremos o modelo XY quântico unidimensional e sua estrutura algébrica. No caso clássico a duas dimensões, este modelo tem um grande interesse pois está relacionado a sistemas físicos tais como o gás de Coulomb clássico ou filmes superfluidos. Na presente abordagem, o Hamiltoniano dos modelos XY é dado por (1.3) com $J_1 = J_2$ e $J_3 = 0$. Sua matriz R é solução da equação de Yang-Baxter (1.18) e é obtida de (3.1) e (3.2), com as condições (4.2.c). Neste trabalho foi possível apresentar a estrutura de grupo quântico desse modelo, uma vez que a introdução de um termo central em conexão com a existência de $\epsilon_2 \neq \epsilon_1$, permitiu encontrar um coproduto não co-comutativo.

Quando $\epsilon_1 = 1$ e $\epsilon_2 = -1$, temos

$$R(\lambda\gamma) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{cases} a = \sinh \gamma(\lambda + i) \\ b = \sinh \gamma\lambda \\ c = i \sin \gamma \\ d = -\sinh \gamma(\lambda - i). \end{cases} \quad (4.4)$$

A matriz de transferência local $L_n(\lambda)$ é

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \sinh \gamma(\lambda I_n + iS_n^3) & S_n^- \sin \gamma \\ S_n^+ \sin \gamma & (-1)^{Z_n - S_n^3} \sinh \gamma[\lambda - i(2Z_n - S_n^3)] \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Neste caso particular, o Hamiltoniano (3.22) tem a forma:

$$H \equiv \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N (\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 + (\sigma_n^3 I_{n+1} + I_n \sigma_{n+1}^3) \cos \gamma). \quad (4.6)$$

De (3.30.a-d), vemos que para o modelo XY,

$$F_N(\lambda) \Omega_N = \left[\left(\sinh \gamma \left(\lambda + \frac{i}{2} \right) \right)^N + \left(\sinh \gamma \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) \right)^N \right] \Omega_N. \quad (4.7)$$

No presente caso, as equações do *ansatz* de Bethe são

$$\left(\frac{\sinh \gamma(\lambda_k + i/2)}{\sinh \gamma(\lambda_k - i/2)} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq k}^l (-1), \quad (4.8)$$

e as relações de comutação (3.30.a-c)

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{\sinh \gamma(\mu - \lambda + i)}{\sinh \gamma(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{i \sin \gamma}{\sinh(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu) \quad (4.9.a)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{\sinh \gamma(\mu - \lambda + i)}{\sinh \gamma(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{i \sin \gamma}{\sinh \gamma(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu) \quad (4.9.b)$$

$$B(\lambda)B(\mu) + B(\mu)B(\lambda) = 0 \quad (4.9.c)$$

$$C(\mu)C(\lambda) + C(\lambda)C(\mu) = 0. \quad (4.9.d)$$

Os autovalores dos autovetores $\phi(\{\lambda\}) = B(\lambda_1)\dots B(\lambda_l)\Omega_N$ são

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\sinh \gamma(\lambda + \frac{i}{2}))^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda + i)}{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda)} + (\sinh \gamma(\lambda + \frac{i}{2}))^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda + i)}{\sinh \gamma(\lambda - \lambda_j)}. \quad (4.10)$$

As matrizes L_{\pm} e R_{\pm} que satisfazem a (3.50) são:

$$L_+ = \begin{pmatrix} q^{S^3} & S^- \Omega \\ 0 & (-q^{-1})^{(Z-S^3)} q^{-Z} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$L_- = \begin{pmatrix} q^{-S^3} & 0 \\ -S^+ \Omega & (-q)^{(Z-S^3)} q^Z \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$R_- = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

As relações de comutação (3.30.a-c) se reduzem a:

$$[S^+, S^-] = \frac{1}{\Omega} \{ (-q)^{(Z-S^3)} (q)^{(Z+S^3)} - (-q^{-1})^{(Z-S^3)} (q^{-1})^{(Z+S^3)} \} \quad (4.15.a)$$

$$[S^3, S^{\pm}] = \pm S^{\pm} \quad (4.15.b)$$

$$[S^3, Z] = [S^{\pm}, Z] = 0, \quad (4.15.c)$$

e o coproduto Δ a

$$\Delta S^+ = S^+ \otimes q^{-S^3} + (-q)^{(Z-S^3)} q^Z \otimes S^+ \quad (4.16.a)$$

$$\Delta S^- = S^- \otimes (-q)^{(Z-S^3)} q^{-Z} + q^{S^3} \otimes S^- \quad (4.16.b)$$

$$\Delta S^3 = S^3 \otimes I + I \otimes S^3 \quad (4.16.c)$$

$$\Delta Z = Z \otimes I + I \otimes Z. \quad (4.16.d)$$

No caso em que $\epsilon_1 = -1$ e $\epsilon_2 = 1$, temos:

$$H \equiv \frac{J}{4} \sum_{n=1}^N (\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 - (\sigma_n^3 I_{n+1} + I_n \sigma_{n+1}^3) \cos \gamma), \quad (4.17)$$

$$F_N(\lambda) \Omega_N = \left[\left(-\sinh \gamma \left(\lambda - i \frac{3}{2} \right) \right)^N + \left(\sinh \gamma \left(\lambda - \frac{i}{2} \right) \right)^N \right] \Omega_N, \quad (4.18)$$

$$\left(\frac{-\sinh \gamma \left(\lambda_k - i \frac{3}{2} \right)}{\sinh \gamma \left(\lambda_k - \frac{i}{2} \right)} \right)^N = \prod_{j=1, j \neq k}^l (-1) \quad (4.19)$$

e

$$\Lambda(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_l) = \left(-\sinh \gamma \left(\lambda - i \frac{3}{2} \right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma (\lambda_j - \lambda + i)}{\sinh \gamma (\lambda_j - \lambda)} + \left(\sinh \gamma \left(\lambda + \frac{i}{2} \right) \right)^N \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma (\lambda_j - \lambda + i)}{\sinh \gamma (\lambda - \lambda_j)}. \quad (4.20)$$

As relações de comutação entre os geradores S^+ e S^- e S^3 são

$$[S^+, S^-] = \frac{1}{\Omega} \{ (q^{-1})^{(Z-S^3)} (-q^{-1})^{(Z+S^3)} - q^{(Z-S^3)} (-q)^{(Z+S^3)} \} \quad (4.21.a)$$

$$[S^3, S^\pm] = \pm S^\pm \quad (4.21.b)$$

$$[S^3, Z] = [S^\pm, Z] = 0, \quad (4.21.c)$$

e o coproduto Δ é dado por:

$$\Delta S^+ = S^+ \otimes (-q)^{Z+S^3} q^Z + q^{S^3} \otimes S^+ \quad (4.22.a)$$

$$\Delta S^- = S^- \otimes q^{-S^3} + (-q)^{-Z-S^3} q^{-Z} \otimes S^- \quad (4.22.b)$$

$$\Delta S^3 = S^3 \otimes I + I \otimes S^3 \quad (4.22.c)$$

$$\Delta Z = Z \otimes I + I \otimes Z. \quad (4.22.d)$$

Na seção 2.3.2 vimos que todos os modelos cujas matrizes L_{\pm} e R podem ser escritas, respectivamente, na forma (2.78), (2.79), e (2.91) possuem a estrutura algébrica de uma álgebra de Hopf. Os coprodutos (4.16.a-d) e (4.22.a-d) são claramente não co-comutativos. Por outro lado, as matrizes R associadas aos modelos XY obedecem à equação de Yang- Baxter, o que garante que as estruturas algébricas subjacentes são grupos quânticos.

4.2 O Modelo XY com torção

Analisaremos agora o caso (4.2.d), para o qual o Hamiltoniano (3.23) é

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{J}{4} [2t^{-1} \sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + 2t \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \cos \gamma (I_n \sigma_{n+1}^3 + \sigma_n^3 I_{n+1})] + H_N \quad (4.23)$$

$$H_N = \frac{J}{4} [2t^{-N} \sigma_N^+ \sigma_1^- + 2t^N \sigma_N^- \sigma_1^+ + \cos \gamma (I_N \sigma_1^3 + \sigma_N^3 I_1)]. \quad (4.24)$$

Para este caso particular a matriz R é

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

com

$$\begin{cases} a = \sinh \gamma(\lambda + i) \\ b = t \sinh \gamma\lambda \\ b' = t^{-1} \sinh \gamma\lambda \\ c = i \sin \gamma \\ d = -\sinh \gamma(\lambda - i) \end{cases} \quad (4.26)$$

e a matriz L_n ,

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} t^{(Z_n - S_n^3)} \sinh \gamma(\lambda I_n + i S_n^3) & S_n^- \sin \gamma \\ S_n^+ \sin \gamma & t^{-(Z_n + S_n^3)} (-1)^{Z_n - S_n^3} \sinh \gamma[\lambda I_n - i(2Z_n - S_n^3)] \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Através do *ansatz* de Bethe algébrico construímos autovetores do tipo

$$\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \equiv \phi(\{\lambda\}) \equiv B(\lambda_1) \dots B(\lambda_l) \Omega_N \quad (4.28)$$

e as equações do *ansatz* de Bethe são

$$\left(\frac{sh\gamma(\lambda_k + i/2)}{sh\gamma(\lambda_k - i/2)} \right)^N = t^{-N} \prod_{j=1, j \neq k}^l (-1). \quad (4.29)$$

As relações de comutação (3.30.a-d) se reduzem a

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{\sinh \gamma(\mu - \lambda + i)}{t^{-1} \sinh \gamma(\mu - \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{i \sin \gamma}{t^{-1} \sinh \gamma(\mu - \lambda)} B(\lambda)A(\mu) \quad (4.30.a)$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{\sinh \gamma(\mu - \lambda + i)}{t^{-1} \sinh \gamma(\lambda - \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{i \sin \gamma}{t^{-1} \sinh \gamma(\lambda - \mu)} B(\lambda)D(\mu) \quad (4.30.b)$$

$$B(\lambda)B(\mu) + B(\mu)B(\lambda) = 0 \quad (4.30.c)$$

$$C(\mu)C(\lambda) + C(\lambda)C(\mu) = 0, \quad (4.30.d)$$

e o autovalor de $F_N(\lambda)$ a

$$\Lambda(\lambda, (\{\lambda\})) = \left\{ Y\left(\lambda + \frac{i}{2}\right) \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda + i)}{t^{-1} \sinh \gamma(\lambda_j - \lambda)} + \right. \\ \left. (t^{-N} Y\left(\lambda - \frac{i}{2}\right) \prod_{j=1}^l \frac{\sinh \gamma(\lambda_j - \lambda + i)}{t^{-1} \sinh \gamma(\lambda - \lambda_j)} \right\} \prod_{j=1}^l B(\lambda_j) \quad (4.31)$$

onde

$$Y\left(\lambda \pm \frac{i}{2}\right) = \left(\sinh \gamma\left(\lambda \pm \frac{i}{2}\right) \right)^N$$

As matrizes L_{\pm} , R_{\pm} que satisfazem a (3.50) são, no presente caso:

$$L_+ = \begin{pmatrix} t^{(Z_n - S_n^3)} q^{S^3} & S^- \Omega \\ 0 & t^{-(Z+S^3)} (-q^{-1})^{(Z-S^3)} q^{-Z} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

$$L_- = \begin{pmatrix} t^{(Z-S^3)} q^{-S^3} & 0 \\ -S^+ \Omega & t^{-(Z+S^3)} (-q)^{(Z-S^3)} q^Z \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

$$R_- = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega & t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

As relações de comutação entre os geradores S^+ e S^- e S^3 obtidas são:

$$t^{-1} S^+ S^- - t S^- S^+ = \frac{t^{-2S^3}}{\Omega} \{ (-q)^{(Z-S^3)} (q)^{(Z+S^3)} + \\ - (-q^{-1})^{(Z-S^3)} (q^{-1})^{(Z+S^3)} \} \quad (4.36.a)$$

$$[S^3, S^{\pm}] = \pm S^{\pm} \quad (4.36.b)$$

$$[S^3, Z] = [S^{\pm}, Z] = 0. \quad (4.36.c)$$

O coproduto Δ é dado por:

$$\Delta S^+ = S^+ \otimes t^{Z-S^3} q^{-S^3} + t^{Z-S^3} (-q)^{Z-S^3} q^Z \otimes S^+ \quad (4.37.a)$$

$$\Delta S^- = S^- \otimes t^{-Z-S^3} (-q)^{-Z+S^3} q^{-Z} + t^{Z-S^3} q^{S^3} \otimes S^- \quad (4.37.b)$$

$$\Delta S^3 = S^3 \otimes I + I \otimes S^3 \quad (4.37.c)$$

$$\Delta Z = Z \otimes I + I \otimes Z. \quad (4.37.d)$$

Do mesmo modo que no caso dos modelos XY sem torção, o coproduto (4.37.a-d) é claramente não co-comutativo e a matriz R (4.25) obedece à equação de Yang-Baxter. Temos portanto, uma estrutura algébrica de grupo quântico subjacente ao modelo XY com condições de contorno periódicas torcidas.

Conclusão

Neste trabalho, tratamos alguns modelos de spin $\frac{1}{2}$ descritos, no método do espalhamento inverso quântico, por uma matriz R multiparamétrica, resolvendo-os pelo *ansatz* de Bethe algébrico. Estes modelos são as cadeias XXZ e XY, com condições de contorno periódicas e periódicas torcidas. Devido à introdução de um elemento central associado ao caráter multiparamétrico de R , foi possível encontrar coprodutos não co-comutativos consistentes para estes modelos. Mostramos que para uma determinada forma das matrizes L e R , a estrutura algébrica subjacente dos modelos associados é sempre uma álgebra de Hopf. Nos casos aqui discutidos, a matriz R satisfaz à equação de Yang-Baxter e é portanto possível dotar estes modelos da estrutura de um grupo quântico.

Dentre os modelos contidos na matriz R em questão, nos interessaram em particular as cadeias XY com condições de contorno periódicas e periódicas torcidas. Tais modelos foram resolvidos anteriormente pelo *ansatz* de Bethe, porém sua estrutura algébrica não havia sido abordada. No presente trabalho, foram dadas explicitamente as relações de comutação dos operadores e a ação do coproduto.

Pelo fato de termos investigado modelos com condições periódicas e periódicas torcidas, estes não apresentam invariância frente a suas álgebras. Para tal, são necessárias cadeias com condições de contorno abertas, o que implica em modificações nas matrizes R e na equação de Yang-Baxter. Tal programa constitui uma continuação natural do presente trabalho e será abordado no futuro.

Apêndice A

Integrabilidade dos Modelos

Neste apêndice vamos indicar como mostrar que as matrizes $R(\lambda)$ dos modelos descritos nos Capítulos III e Capítulos IV satisfazem à equação de Yang-Baxter (1.18). Vamos usar a equação de Yang-Baxter com R escrita na forma (1.19.a-d), onde R_{12} , R_{13} e R_{23} são dados por:

$$\begin{aligned} R_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) = & W_{00}(\lambda_1 - \lambda_2)I \otimes I \otimes I + W_{11}(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma^1 \otimes \sigma^1 \otimes I + \\ & + W_{22}(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma^2 \otimes \sigma^2 \otimes I + W_{33}(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma^3 \otimes \sigma^3 \otimes I + \\ & + W_{03}(\lambda_1 - \lambda_2)I \otimes \sigma^3 \otimes I + W_{30}(\lambda_1 - \lambda_2)\sigma^3 \otimes I \otimes I \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} R_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = & W_{00}(\lambda_2 - \lambda_3)I \otimes I \otimes I + W_{11}(\lambda_2 - \lambda_3)I \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^1 + \\ & + W_{22}(\lambda_2 - \lambda_3)\sigma^2 \otimes \sigma^2 \otimes I + W_{33}(\lambda_2 - \lambda_3)I \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^3 + \\ & + W_{03}(\lambda_2 - \lambda_3)I \otimes I \otimes \sigma^3 + W_{30}(\lambda_2 - \lambda_3)I \otimes \sigma^3 \otimes I \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} R_{13}(\lambda_1 - \lambda_3) = & W_{00}(\lambda_1 - \lambda_3)I \otimes I \otimes I + W_{11}(\lambda_1 - \lambda_3)\sigma^1 \otimes I \otimes \sigma^1 + \\ & + W_{22}(\lambda_1 - \lambda_3)\sigma^2 \otimes I \otimes \sigma^2 + W_{33}(\lambda_1 - \lambda_3)\sigma^3 \otimes I \otimes \sigma^3 + \\ & + W_{03}(\lambda_1 - \lambda_3)I \otimes I \otimes \sigma^3 + W_{30}(\lambda_1 - \lambda_3)\sigma^3 \otimes I \otimes I \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Por conveniência faremos a mudança de variáveis $\lambda_{12} = X$, $\lambda_{23} = Y$ e $\lambda_{13} = X + Y$. Na forma matricial as matrizes R_{ij} serão dados por:

$$R_{12}(X) = \begin{pmatrix} A(X) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B(X) & 0 \\ 0 & A(X) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B(X) \\ 0 & 0 & C(X) & 0 & D(X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(X) & 0 & D(X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D(X) & 0 & E(X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(X) & 0 & E(X) & 0 & 0 \\ B(X) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F(X) & 0 \\ 0 & B(X) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F(X) \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$R_{23}(Y) = \begin{pmatrix} A(Y) & 0 & 0 & B(Y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C(Y) & D(Y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D(Y) & E(Y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B(Y) & 0 & 0 & F(Y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A(Y) & 0 & 0 & B(Y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(Y) & D(Y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D(Y) & E(Y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B(Y) & 0 & 0 & F(Y) \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$R_{13}(Z) = \begin{pmatrix} A(Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & B(Z) & 0 & 0 \\ 0 & C(Z) & 0 & 0 & D(Z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A(Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & B(Z) \\ 0 & 0 & 0 & C(Z) & 0 & 0 & D(Z) & 0 \\ 0 & D(Z) & 0 & 0 & E(Z) & 0 & 0 & 0 \\ B(Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & F(Z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D(Z) & 0 & 0 & E(Z) & 0 \\ 0 & 0 & B(Z) & 0 & 0 & 0 & 0 & F(Z) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

onde $Z = X + Y$. Os elementos de matriz têm a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(X_i) = W_{00}(X_i) + W_{33}(X_i) + W_{03}(X_i) + W_{30}(X_i) \\ C(X_i) = W_{00}(X_i) - W_{33}(X_i) - W_{03}(X_i) + W_{30}(X_i) \\ E(X_i) = W_{00}(X_i) - W_{33}(X_i) + W_{03}(X_i) - W_{30}(X_i) \\ F(X_i) = W_{00}(X_i) + W_{33}(X_i) - W_{03}(X_i) - W_{30}(X_i) \\ B(X_i) = W_{11}(X_i) - W_{22}(X_i) \\ D(X_i) = W_{11}(X_i) + W_{22}(X_i). \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo $R_{12}(X)$, $R_{13}(Z)$ e $R_{23}(Y)$ na equação de Yang-Baxter

$$R_{12}(X)R_{13}(Z)R_{23}(Y) = R_{23}(Y)R_{13}(Z)R_{12}(X),$$

chega-se a um sistema de equações, e é possível verificar que para

$$\begin{aligned} W_{00} &= \lambda + \frac{i}{2} \\ W_{11} &= W_{22} = \frac{i}{2} \\ W_{33} &= \frac{i}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

a equação é satisfeita e portanto a matriz R do modelo XXX satisfaz a equação de Yang-Baxter.

Para os demais modelos,

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{00} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) + (G_{12} + G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{11} = W_{22} = \frac{1}{2}i \sin \gamma \\ W_{33} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) + \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) - (G_{12} + G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{30} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) + (G_{12} - G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \\ W_{03} = \frac{1}{4}[\epsilon_1 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_1) - \epsilon_2 \sinh \gamma(\lambda + i\epsilon_2) - (G_{12} - G_{21}) \sinh \gamma\lambda] \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

Para os valores de ϵ_1 , ϵ_2 , G_{12} e G_{21} discutidos no capítulo III, correspondendo aos modelos XY e XY com torção do Capítulo IV, XXZ (Capítulo II) e XXZ com torção [27], (A.9) satisfaz à equação de Yang-Baxter.

Bibliografia

- \ [1] H.Bethe, Z.Phys. **71**(1931) 205
- \ [2] R.J.Baxter, Phys.Rev.Lett. **26** (1971) 834; Ann.Phys. **70**(1972) 323
- \ [3] L.A.Takhtadzhyan e L.D.Faddeev, Russ.Math.Surv. **34** (1979) 11
- \ [4] E.K. Sklyanin, L.A. Takhtadzhyan e L.D. Faddeev, Teor.Mat.Fiz.**40** (1979) 194
- \ [5] V.G.Drinfel'd, Sov.Math.Dokl.**32**(1985) 254
- \ [6] M.Jimbo, Lett.Math.Phys. **10** (1985) 63 ; **11** (1986) 247
- \ [7] R.J.Baxter, "Exactly Solved Models in Statistical Mechanics", London-New York, Academic Press (1982)
- \ [8] C.N.Yang e C.P.Yang; Phys.Rev. **50** (1966) 321; **151** (1966) 258
- [9] C.Kassel, "Quantum Groups", Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1995)
- [10] S.Majid, "Foundations of Quantum Groups Theory ", Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [11] L.D. Faddeev, "Lectures on the Quantum Inverse Scattering Method", em "New problems, Methods and Techniques in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics", Series on Advances in Statistical Mechanics, Vol 6

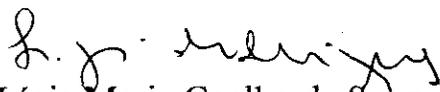
- [12] V.I.Arnold, "Methodos Matemáticos da Mecânica Clássica", Mir, Moscou, (1970)
- [13] J.B.Marion, "Classical Dynamics Of Particles And Systems ", Academic Press, New York, San Francisco, London (1970)
- [14] E.K.Sklyanin, "Nankai Lectures in Mathematical Physics", Mo-Linge, Singapore, World Scientific (1992)
- [15] L.D.Faddeev e L.A.Takhtajan, Sov.Sci.Rev.Math. **C1** (1980) 107
- [16] L.A.Takhtajan, Sov.Sci.Rev.Math. **23** (1983)440
- X[17] L.D Faddeev, "Algebraic Aspects of the Bethe Ansatz", Int.J.Mod.phys **A10** (1995) 1845
- [18] V.V.Bazhanov, Comm.Math.Phys **113** (1987) 471
- [19] G.G.A.Bäuerle e E.A.de Kerf, "Lie Algebras", Studies in Mathematical Physics Vol I, North-Holland
- X[20] M.R.Monteiro, "Introduction to Quantum Groups", Proceedings da XIV ENPC, Caxambú, (1993)
- [21] P.P.Kulish e E.K.Sklyanin, Phys.Lett. **A70** (1979)461
- [22] A.J.Macfarlane, J.Phys. **A22** (1989)4581
- [23] L.C.Biederharn, J.Phys. **A22** (1989) L873
- [24] M.Chaichian e P.Kulish, Phys.Lett. **B234** (1990) 72
- [25] F.Alcaraz, U.Grimm and V.Rittenberg, Nucl. Phys. **B316** (1989) 735
- [26] V.Pasquier e H.Saleur, Nucl.Phys. **B330** (1990) 523
- [27] M.R.Monteiro, I.Roditi e L.M.C.S.Rodrigues, Mod. Phys. Lett. **A10**, (1995), 419

- [28] S.Katsura, Phys.Rev. **127**(1962)1508
- [29] E.H.Lieb, T.D.Schultz e D.C.Mattis, Ann.Phys. **16** (1961) 407
- [30] K.Sogo, M.Uchinami, Y.Akutsu e M.Wadati, Prog.Theor.Phys. **68** (1966) 508
- [31] M.R.Monteiro, I.Roditi, L.M.C.S.Rodrigues and S.Sciuto, Phys. Lett. **B354**
(1995) 389
- [32] Fan.C and Wu,F.Y,Phys.Rev. **B2** (1970) 723

**“ESTRUTURA ALGÉBRICA DE ALGUNS MODELOS DE
SPIN INTEGRÁVEIS MULTIPARAMÉTRICOS”**

Cristine Nunes Ferreira

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Lígia Maria Coelho de Souza Rodrigues - Presidente



Itzhak Roditi - Presidente



Silvio Paolo Sorella



Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

Rio de Janeiro, 31 de julho de 1997