Tese de

Doutorado

Uma Nova Classe de Teorias do Campo Gravitacional

Vitorio A. De Lorenci

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, 17 de dezembro de 1997

Dedicatória

À minha mulher, Eliane.

Agradecimentos

- Ao orientador e amigo Mário Novello, aquele que me ensinou muito mais que apenas um método, mas o verdadeiro sentimento de participar do processo da descoberta científica. Pela maestria, perseverança e jovialidade com que descortina os horizontes do desconhecido novo mundo;
- Aos meus familiares, cuja expectativa de minha vitória sempre me valeu de grande incentivo. Em especial ao meu irmão Ivan Carlos De Lorenci;
- Aos meus professores e amigos: Bartolomeu Donatila, Ívano Damião Soares, José Martins Salim, Luciane R. de Freitas, Luiz A. R. de Oliveira, Nami Fux Svaiter e Nelson Pinto-Neto, por todos os agradáveis momentos que dividimos;
- Aos José Arnaldo Redinz, Marcelo Costa de Lima e Renato Klippert, pelo companheirismo e amizade dedicados ao longo destes anos que convivemos sob o telhado do CBPF;
- Ao Julinho Bil, pelos seus ideais de compreensão;
- Aos companheiros da sala 509B: Alexandre Velasco, Guilherme Peixoto, Martha C. Motta da Silva, Paulo I. Trasjtenberg, Ricardo Martins, Ronaldo Rodrigues e Sérgio Místico, pelas valiosas discussões;
- À Myriam S. Coutinho por toda a compreensão e apoio junto à CFC;
- À CFC/CBPF e ao CNPq.

Resumo

Uma Nova Classe de Teorias do Campo Gravitacional

Apresentamos um método de construção de teorias alternativas para a descrição dos efeitos gravitacionais, preservando o princípio de equivalência no que se refere a todos os tipos de interações, exceto aquelas de origem gravitacional. Seguindo um formalismo de teoria de campos, mostramos ser possível obter uma classe de teorias que incorporam grande parte da teoria da relatividade geral e podem ser interpretadas equivalentemente, de maneira geométrica. A distinção mais importante destas teorias para a gravitação, consiste no tipo de acoplamento admitido entre os efeitos gravitacionais. Por fim, apresentamos um particular modelo condizente com os requerimentos que fundamentamos e mostramos sua aplicabilidade no que tange os testes de campo solar, bem como as predições quanto a propagação das ondas gravitacionais.

Abstract

A New Class of Gravitational Field Theories

We discuss a method of construct alternative theories for the gravitational phenomena preserving the equivalence principle in what concerns all kind of interactions, but the gravitatinal one. Following a field theoretical formalism we show that it is possible to obtain a class of theories that incorporates a great part of general relativity and can also be interpreted in the equivalente geometrical way. The most important distinction of these kind of gravity theories concern the gravity to gravity coupling. We exhibit a particular model that satisfies all the classical tests of gravity and lead to new predictions on the propagation of gravitational waves.

Índice

Notação

- Índices:

  1. gregos minúsculos ($\alpha,\ \beta, \cdots = 0,\ 1,\ 2,\ 3$) representam componentes de tensores em base de coordenadas;
  2. latinos minúsculos ($i,\ j, \cdots = 1,\ 2,\ 3$) representam componentes espaciais de tensores em base de coordenadas.

- Representamos por $\gamma_{\mu\nu}$, a métrica do espaço tempo de fundo, Minkowskiano, escrita em um sistema arbitrário de coordenadas. A redução para um sistema de coordenadas cartesiano é denotado por $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$.

- A operação de derivação ordinária de um objeto qualquer, Q_α, pode ser apresentada pelos seguintes símbolos:

  $$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu Q_\alpha \equiv Q_{\alpha,\mu}.$$

  Enquanto a derivação covariante deste mesmo objeto, é definida por

  $$Q_{\mu;\nu} \equiv Q_{\mu,\nu} - \Delta^{\alpha}_{\mu\nu} Q_\alpha,$$

  onde,

  $$\Delta^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(\gamma_{\beta\mu,\nu} + \gamma_{\beta\nu,\mu} - \gamma_{\mu\nu,\beta}),$$

  e pode ser apresentada também sob as formas abaixo:

  $$Q_{\alpha;\mu} \equiv \frac{DQ_\alpha}{Dx^\mu} \equiv D_\mu Q_\alpha.$$

- O operador D'Alambertiano é representado pelo símbolo $\Box$, não importando qual sistema de coordenadas esteja sendo considerado. Assim, para o sistema cartesiano,

$$\Box = \partial^\alpha \partial_\alpha .$$

Enquanto, para um sistema arbitrário,

$$\Box = D^\alpha D_\alpha .$$

- Os símbolos de simetrização e antissimetrização são definidos, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}(A, B) &\equiv AB + BA \\ [A, B] &\equiv AB - BA.\end{aligned}$$

- Definimos a operação [ ] sobre uma quantidade qualquer, X, para indicar a dimensão física desta quantidade. Representamos as seguintes letras para cada dimensão:

$$\begin{aligned}L &\longrightarrow \text{comprimento}, \\ T &\longrightarrow \text{tempo}, \\ M &\longrightarrow \text{massa}.\end{aligned}$$

Assim, por exemplo, a velocidade, v, tem dimensão de espaço sobre tempo. Logo,

$$[v] = \frac{L}{T}.$$

- Definimos a soma cíclica, com respeito aos índices de um tensor qualquer, $X_{\alpha\beta\gamma}$, da seguinte forma:

$$X_{\{\alpha\beta\gamma\}} \equiv X_{\alpha\beta\gamma} + X_{\beta\gamma\alpha} + X_{\gamma\alpha\beta} .$$

- Usualmente, por conveniência de notação, escreveremos o traço de um tensor qualquer, $X_{\alpha\beta}$, como:

$$X^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} \equiv X^{\alpha}{}_{\alpha} \equiv X.$$

Valendo a mesma regra para qualquer ordem tensorial, por exemplo, para um tensor de ordem 3, $X_{\alpha\beta\gamma}$:

$$X^{\alpha\beta\lambda}\gamma_{\beta\lambda} \equiv X^{\alpha\beta}{}_{\beta} \equiv X^{\alpha}.$$

- O símbolo de simetria ($\sim$) relacionando duas quantidades quaisquer, P e Q,

$$P \sim Q,$$

indica que P é identificado com Q a menos de um fator numérico multiplicativo.

- O símbolo de aproximação ($\approx$) relacionando duas quantidades quaisquer, P e Q,

$$P \approx Q,$$

indica que P é identificado com Q a menos de termos desprezados devido a ordem de grandeza considerada.

- Definimos a operação de descontinuidade de uma função arbitrária $f(x^{\mu})$ através de uma superfície, S, pelo símbolo:

$$[f(x^{\mu})]_S \, .$$

Capítulo 1

Introdução

Desde o surgimento da teoria da gravitação universal, fundamentada por I. Newton no ano de 1686 [New 686], os efeitos relacionados a este fenômeno vêm sendo testados experimentalmente nas mais distintas situações, e com regularidade crescente.

A interação gravitacional é reconhecidamente muito fraca quando comparada às demais interações da natureza e em consequência é muito difícil a realização de experimentos para tal fenômeno em laboratórios terrestres. O cosmos, há muito tempo vem exercendo o papel de nosso melhor campo de medições dos efeitos gravitacionais e de fato, a sua observação ao longo de tantos anos foi fator preponderante no encaminhamento das formulações teóricas para a descrição deste processo.

Já no início deste século a comunidade científica se encontrava ciente da falha da teoria Newtoniana na previsão de alguns fenômenos naturais, como por exemplo a precessão do periélio das órbitas planetárias, o que levou diversos pesquisadores a proporem novas teorias a fim de completar o quadro experimental até então determinado. A introdução de outras teorias, na maior parte das vezes, levou à predição de novos efeitos, que puderam ser submetidos à examinação a fim de se resolver pela consistência da teoria em seus resultados. Neste sentido, a ciência teórica e experimental, no que diz respeito à interação gravitacional, tem caminhado em contínua dependência.

Das teorias que surgiram no intervalo de tempo que vai de 1686 até os dias atuais, uma única tem se mostrado, pela excelência de seus resultados postos à experimentação, como a boa teoria da gravitação. Esta, a bem conhecida teoria da relatividade geral, desenvolvida por A. Einstein [Eins 16] na primeira metade deste século, tem sido amplamente testada e comprovada em todas as suas predições[1].

Vamos fazer um breve histórico de algumas das possibilidades que são de particular interesse ao nosso trabalho, no que diz respeito a teorias para o campo gravitacional, antes de voltarmos a examinar algumas das características da relatividade geral.

Uma primeira condição fundamental que qualquer teoria da gravitação deve satisfazer é o princípio de covariância de Lorentz. O que significa que, na situação em que o campo gravitacional for nulo, a teoria da relatividade restrita [Eins 05] deve emergir naturalmente do arcabouço da teoria gravitacional. Esta condição deve ser imposta sobre a teoria para que a mesma seja compatível com a experimentação, que já é largamente verificada para este princípio. Uma segunda condição consiste na obtenção da formulação clássica Newtoniana como uma situação limite em uma aproximação de campo gravitacional fraco e regime de baixas velocidades. Como é bem conhecido, nesta situação limite, a teoria clássica se ajusta perfeitamente aos dados experimentais. Uma vez obtida uma formulação que respeite a estas condições assimptóticas, devemos passar aos testes padrões da gravitação, quais sejam: (*i*) desvio gravitacional para o vermelho; (*ii*) a deflexão dos raios luminosos em um dado campo gravitacional; (*iii*) o atraso temporal dos pulsos de radar emitidos (e refletidos) ao encontro de uma região de campo gravitacional apreciável, como por exemplo na direção dos planetas interiores (mais próximos do Sol); e por fim, (*iv*) a precessão do periélio das órbitas planetárias. Para uma revisão sobre os testes padrões da gravitação, veja as referências [Ohan 76, Wein 72, Adle 75]. Estes testes são conhecidos como testes de campo solar, e foram os primeiros realizados no intuito de

[1] É bem verdade que existem certos efeitos relacionados à precessão do periélio das órbitas de sistemas estelares duplos, onde a configuração de campo é extremamente forte, que ainda não se pode dizer que sejam adequadamente previstos pelas soluções da teoria da relatividade geral. Os mais famosos destes sistemas são o DI Herculis e AS Camelopardalis. No entanto, existem muitos fatores extras, relacionados a estrutura interior das estrelas e da vizinhança, que devem resultar em grandes perturbações em seu movimento. Com a melhoria da tecnologia dos rádio-telescópios nos últimos anos, tais problemas poderão ser avaliados com maior precisão brevemente e uma resposta mais conclusiva poderá ser aferida.

se testar a teoria da relatividade geral. Sendo a interação gravitacional extremamente fraca, estes testes são considerados, na mesma medida, testes fracos para este processo. Estes requerimentos são, como ponto de partida, indispensáveis a qualquer boa teoria da gravitação.

Ao passarmos à formulação da teoria, surge a questão da escolha dos objetos matemáticos que devem ser usados na sua construção. Podemos escolher, de forma geral, entre uma formulação escalar, vetorial ou tensorial, o que esta intimamente relacionada com o spin da partícula que carregará a interação gravitacional. Para os casos acima citados o spin será sempre inteiro[2].

Uma boa maneira de se resolver qual quantidade matemática é mais adequada à descrição da gravitação consiste em estabelecermos qual deve ser a fonte material para este fenômeno. Para isto, devemos impor que exista uma lei de conservação envolvida, que será manifestada pela divergência nula do objeto representando a fonte para a interação em questão. De início, já podemos descartar a formulação vetorial, uma vez que o único objeto vetorial que conhecemos que tem associado a ele uma lei de conservação é o 4-vetor corrente, assim uma teoria construída com este objeto em nada diferiria do eletromagnetismo. Além disto, uma teoria construída com campos de spin 1 — vetorial — leva a dois tipos de potencial, um atrativo e outro repulsivo. E, uma vez que a gravitação somente se manifesta atrativamente, não podemos usar tais objetos na sua descrição matemática. Um histórico sobre as possibilidades de se formular tais teorias foi realizado por Gupta, especialmente na referência [Gupt 57]. A menos do 4-vetor corrente, existe o tensor de momentum energia da matéria, $T_{\mu\nu}$, que é um objeto Lorentz-covariante e tem dimensão de densidade de energia, assim como esperaríamos de um bom candidato à fonte material da gravitação. Com este tensor, à primeira vista, podemos dar prosseguimento tanto à formulação escalar, tomando o traço de $T_{\mu\nu}$ para representar a fonte material, quanto a formulação tensorial, assumindo o tensor de momentum energia completo como fonte

[2] Spin semi inteiro leva a problemas com respeito a obtenção de configurações de campo gravitacional estático, que está em contradição imediata com os resultados da teoria Newtoniana. Para um breve estudo sobre este assunto, veja o prefácio da referência [Feyn 95].

material da teoria. O primeiro caso é particularmente problemático, pois como é bem conhecido, o traço do tensor de momentum energia associado ao campo de Maxwell (teoria do campo eletromagnético) é identicamente nulo, logo, não contribuiria como fonte material da gravitação caso a teoria que a representasse fosse escalar. Fato este que está em contra-ponto com o princípio de equivalência Newtoniano[3], que estabelece que a massa de repouso total de um sistema interage com o campo gravitacional. Poderíamos ainda, construir objetos escalares com o tensor de momentum energia utilizando contrações com 4-vetores, como por exemplo com o 4-vetor velocidade. No entanto, de forma geral teorias escalares à gravitação não são compatíveis com os resultados experimentais. Para fins de revisão, umas das mais bem sucedidas teorias escalares foi formulada por Otto Bergmann, em 1955, e prescreve um valor para a precessão do periélio das órbitas planetárias que é 1/6 do valor correto e em sentido de precessão contrário ao observado [Berg 55]. Resta-nos assim, o caso tensorial. Nesta formulação, a fonte dos efeitos gravitacionais é representada pelo tensor de momentum energia da matéria, e em princípio, não apresenta problemas, contrariamente ao que acontece para as teorias escalar e vetorial. Ora, se admitirmos a fonte material do campo gravitacional sendo um tensor de segunda ordem, é natural que façamos a escolha de um objeto tensorial também de segunda ordem para representar o próprio campo gravitacional.

Vamos começar examinando a situação mais simples possível, em que as equações resultem ser lineares. O único critério que temos para nos orientar na derivação das equações de campo consiste na imposição de uma lei de conservação associada ao tensor de momentum energia da matéria. A teoria que emerge deste procedimento é a bem conhecida teoria de Fierz-Pauli [FiPa 39] para campos de spin-2. Uma vez obtida a equação de movimento, a construção desta teoria através de um princípio variacional é elementar, ou seja, pode-se facilmente obter a Lagrangeana que resulta nestas equações. Entretanto, um grave problema ocorre quando procuramos ajustar tal teoria à descrição dos efeitos gravitacionais, qual seja, o limite de campo fraco e baixas velocidades não resulta na teoria

[3]Consequentemente com a observação, onde se pode medir efeitos gravitacionais relacionados com a energia do campo eletromagnético.

clássica Newtoniana. Este problema tem origem na lei de conservação envolvida para a teoria linear onde encontramos que o tensor de momentum energia se conserva separadamente. Este processo gera uma inconsistência física, pois o próprio campo gravitacional tem uma energia associada, e como qualquer tipo de energia interage gravitacionalmente, esta energia deve também ser fonte do próprio campo, logo, *o tensor de momentum energia da matéria não pode se conservar separadamente.* Eis a razão da teoria estritamente linear não corresponder ao limite clássico. Uma maneira de se contornar este problema é somando às equações de campo a energia do campo gravitacional. Podemos realizar isto facilmente se observarmos que a Lagrangeana da teoria linear tem associado a ela um tensor de momentum energia (que é de ordem 2 do campo), assim, podemos derivá-lo e acrescentá-lo às equações. Agora, as equações que resultam, possuem uma lei de conservação e o limite Newtoniano é recuperado. Entretanto, surge aqui uma interessante questão: como somamos às equações de campo um novo termo, que chamamos de tensor de momentum energia do campo gravitacional, as mesmas foram modificadas, assim, a Lagrangeana que as resulta não é mais a da teoria linear. Então, se derivarmos a nova Lagrangeana para esta teoria, associada a ela haverá um novo tensor de momentum energia, agora em ordem maior de não linearidade no tensor que representa o campo gravitacional. E, se somarmos este objeto nas equações de movimento, as modificaremos novamente, gerando um processo que se repete a cada ordem de correção na energia, apontando finalmente para uma inconsistência nesta formulação. A única forma de tornarmos esta teoria completa é somando todos os infinitos termos de energia que surgem da Lagrangeana do campo corrigida em cada ordem. Uma excelente abordagem deste procedimento é apresentada no livro [Feyn 95]. Alguns autores demonstraram que a teoria que emerge desta série infinita é exatamente a relatividade geral de Einstein [Dese 70, Gris 84].

Um procedimento alternativo de tornar consistente uma teoria a partir da formulação linear que exploramos acima, foi proposto por S. Deser e B. E. Laurent [DeLa 68] e também por C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e J. Tiomno [BGT 70]. Nesta proposta eles introduzem um objeto com divergência indenticamente nula construído com as projeções não locais do tensor de momentum energia da matéria para ser fonte do campo gravitacional, resultando assim em uma teoria consistente para a gravitação. Este tipo de teoria é chamada de "quase linear". Podemos dizer que a não localidade faz o papel da não linearidade. Tal construção é capaz de prescrever a estrutura de campo esférico, se ajustando perfeitamente bem aos dados observacionais. Entretanto, falha em algumas predições que estão fundamentalmente relacionadas aos efeitos da não-localidade introduzida nas equações de campo. Estes problemas foram apontados por C. M. Will, no trabalho [Will 73]. Veja também as referências [DeLo 94, NoLo 95, NoLo 96], onde uma alternativa ao modelo de Deser e Laurent é apresentada, introduzindo não linearidade na teoria.

Existem ainda diversas teorias alternativas propostas ao longo dos últimos anos, mas a maioria apresenta pequenos problemas que as tornam não viáveis. Vamos nos restringir agora em alguns aspectos da teoria da relatividade geral, que vêm resistindo muito bem a todos os testes a ela impostos.

O ponto fundamental que separa a teoria clássica Newtoniana da teoria da relatividade geral tem origem na introdução do princípio de equivalência Einsteiniano[4]. Uma formulação deste princípio diz que todos os corpos caem, em um dado campo gravitacional externo, com a mesma aceleração, implicando que para um observador em um laboratório que cai livremente no mesmo campo gravitacional, os corpos deverão ser observados como se estivessem livres de aceleração. Assim, a medida que seus movimentos mecânicos são considerados, os corpos se comportam como se o campo gravitacional estivesse ausente. Ainda mais, Einstein postulou que, não somente as leis da mecânica, mas todas as leis da física, deveriam se comportar em tal laboratório como se a gravitação estivesse ausente. De forma mais rigorosa, este princípio determina que uma teoria da gravitação é uma teoria métrica, ou seja, deve satisfazer aos postulados de metricidade, que são: (*i*) o espaço tempo é deformado pela presença de um dado campo gravitacional, podendo assim ser representado por uma estrutura métrica efetiva, distinta da Minkowskiana; (*ii*) as partículas teste tem seus movimentos determinados pelas geodésicas desta geometria;

[4]Uma boa revisão sobre o princípio de equivalência e suas consequências experimentais pode ser encontrada no livro do C. M. Will [Will 93].

e ainda, (*iii*) se escolhermos um referencial local de Lorentz[5], quaisquer leis naturais de origem não gravitacional, devem ser aquelas da relatividade especial, isto é, que satisfazem aos princípios da relatividade especial.

Como podemos perceber, este princípio de equivalência determina que a estrutura de propagação das partítulas[6] testes (não importando a sua constituição material) é universal. Entretanto, em seu conteúdo, este princípio não estabelece que a estrutura de propagação da própria interação gravitacional deva ser, necessariamente, a mesma das partículas materiais. Assim, para estarmos consistentes com o princípio de equivalência basta impormos que a geometria do espaço tempo, determinada pelo campo gravitacional, é universalmente sentida pelas partículas materiais. Remarcamos ainda que não há um único experimento já realizado que determine que o princípio de equivalência deva ser extrapolado no que diz respeito à interação gravitacional.

Existe uma grande expectativa com respeito a possibilidade de detectarmos ondas gravitacionais nos próximos anos. Nunca se construiu tamanho número de aparatus para tal fim como a partir dos anos 70, quando descobriram que a perda de energia em um sistema estelar duplo colapsante — pulsar binário — estava fortemente relacionada com a emissão de ondas gravitacionais. Tal observação garantiu o prêmio Nobel de Física ao pesquisador J. H. Taylor (veja as referências [Tayl 75, Tayl 79, Tayl 94]). Com isto a comunidade científica entendeu que a existência destas ondas gravitacionais estivessem indiretamente sendo comprovada por tal efeito, como de fato acontece, uma vez que todas outras formas de interação puderam ser calculadas e despresadas para tal situação. No entanto, até os dias de hoje, nenhum laboratório de gravitação experimental obteve qualquer resposta conclusiva a respeito da observação direta destas ondas. E ainda mais, a sua existência comprovada indiretamente através deste experimento nos diz muito fracamente a respeito da sua forma de propagação, uma vez que o efeito que resultaria de

[5] A escolha de um referencial local de Lorentz quer dizer que podemos sempre anular localmente o campo gravitacional.

[6] Estamos denotando por partículas, àquelas que podem ser descritas pelo tensor de momentum energia da matéria. Assim, partículas podem ser massivas, como planetas ou elétrons, ou não massivas, como fótons.

um pequeno desvio na velocidade destas ondas seria certamente não detectável e talvez, até mesmo, confundido com perturbações da galáxia próxima. Por isso, uma pergunta natural a se fazer é a seguinte: a velocidade de propagação das ondas gravitacionais é a mesma encontrada para os raios luminosos? Ou seria melhor perguntar: O princípio de equivalência pode ser estendido para abarcar a própria interação gravitacional?

Desta feita, uma vez que a experimentação ainda não foi capaz de esclarecer esta questão com respeito ao princípio de equivalência, encontramos um situação em que podemos dividir as teorias da gravitação em dois grupos fundamentais de teorias, que podem ser distinguidos em suas características da seguinte maneira: (i) aquelas para as quais a interação gravitação-gravitação se processa da mesma maneira como qualquer outro tipo de interação; e (ii) aquelas para as quais a interação gravitação-gravitação ocorre de modo diferente da interação matéria-gravitação.

No primeiro caso, uma modificação universal da geometria do espaço tempo causado pelo campo gravitacional é verificada para todos os tipos de energia, e a relatividade geral aparece para ser a escolha natural da teoria da gravitação. No entanto, o segundo caso nos leva a admitir **uma nova classe de teorias do campo gravitacional**, onde a principal característica se dá na predição da estrutura de propagação das interações gravitacionais, por exemplo sob a forma de ondas gravitacionais.

A completa ausência de observações experimentais com respeito a este assunto deixa em aberto qual tipo de acoplamento deve ser escolhido de modo a prescrever as interações de origem gravitacionais.

Neste trabalho, examinamos um novo caminho para se construir teorias alternativas da gravitação que mantém válido o princípio de equivalência no que diz respeito a toda forma de interação, exceto a de origem gravitacional.

Começamos, no capítulo 2, por fazer uma breve retrospectiva da construção de uma teoria relativista para a gravitação a partir da formulação linear. Apresentamos os problemas envolvidos provenientes da linearidade das equações de campo, essencialmente a incompatibilidade com o limite Newtoniano. Procuramos corrigir este defeito introduzindo correções da energia do campo, derivadas da Lagrangeana da teoria linear. No entanto, este procedimento gera uma série infinita de termos de correção, que resulta na teoria da relatividade geral como o limite superior. Apresentamos também como a primeira correção nas equações de campo recuperam perfeitamente o limite clássico para uma situação de campo fraco e regime de baixas velocidades.

No capítulo 3, introduzimos um novo objeto tensorial, de ordem 3, construído por meio das derivadas do tensor potencial (usado na teoria linear), e apresentamos suas características algébricas. Após isto feito, introduzimos este novo objeto na formulação linear apresentada no capítulo anterior e recuperamos os seus resultados mais importantes.

No capítulo 4, apresentamos uma formulação geral para teorias do campo gravitacional construídas com o tensor campo, de ordem 3. Estudamos quais limites tais teorias devem satisfazer para serem compatíveis com a teoria linear e fixamos a forma funcional da Lagrangeana geral do campo. Examinamos o princípio de equivalência Newtoniano e Einsteiniano e fixamos o tipo de acoplamento entre as interações materiais e gravitacionais. Neste ponto, o tensor de momentum energia é introduzido, de maneira usual, e construímos a ação total para o campo. A partir desta ação derivamos as equações de movimento em termos da Lagrangeana geral, compatível com o limite linear e apresentamos algumas características interessantes envolvidas. Derivamos também a expressão para o tensor de momentum energia do campo gravitacional, associado a Lagrangeana deste mesmo campo, de duas maneiras distintas, e exibimos a lei de balanço de energia entre o campo gravitacional e a matéria. Finalmente, introduzimos o método de propagação das discontinuidades do campo e estudamos a estrutura de propagação das ondas de choque do campo gravitacional. Mostramos que aparece naturalmente uma geometria efetiva para estas ondas, distinta daquela verificada para todas as outras interações que provêm do acoplamento entre a matéria e a gravitação. Este interessante resultado é oriundo da não aceitação do princípio de equivalência no que diz respeito ao acoplamento gravitação-gravitação, como já citamos nesta introdução.

Como próximo passo, no capítulo 5, singularizamos nossas atenções num particular modelo para a descrição dos efeitos gravitacionais e aplicamos a ele os resultados desenvolvidos no capítulo anterior. Mostramos a compatibilidade da teoria com o limite clássico Newtoniano, reduzindo as equações de movimento em aproximação de campo fraco e regime de baixas velocidades. Após isto realizado, passamos para uma configuração de campo solar e resolvemos as equações de campo para uma situação de campo estático com simetria esférica. Mostramos que as soluções deste problema se ajustam perfeitamente bem com os dados experimentais encontrados na estrutura de campo solar e exibimos as equações de movimento que implicam em alguns dos mais importantes fenômenos para esta interação, a saber, os testes padrões da gravitação. Apresentamos um estudo breve sobre a propagação das ondas de choque gravitacionais na configuração de campo estático, desenvolvida anteriormente, e comparamos as velocidades associadas às ondas eletromagnéticas e gravitacionais, mostrando haver uma diferença na velocidade de propagação destas ondas.

Finalmente, concluímos o trabalho apresentando um pequeno resumo do que foi apresentado e traçamos algumas perspectivas de trabalhos futuros seguindo esta mesma linha de pesquisa.

Capítulo 2

Teoria Linear da Gravitação

2.1 Construindo as Equações de Campo

Como ponto de partida para a construção de uma teoria da gravitação, devemos decidir a respeito da fonte de tais efeitos. Sabemos que, do "princípio de equivalência" Newtoniano [Ohan 76, Dick 62], a massa inercial total de um sistema sofre interação gravitacional, ou seja, toda forma de energia contribui para este tipo de interação. Desta maneira, a fonte para a gravitação deve ser a densidade de energia do sistema físico em questão. Entretanto, apenas com a densidade de energia do sistema, não podemos construir uma teoria que seja Lorentz-covariante (invariante), desde que poderíamos, por uma simples mudança de sistema de referência, passar a observar uma densidade de energia e um fluxo de energia, ou fluxo de momentum. Assim, devemos procurar por um objeto que possa representar todas estas formas de "energia", da mesma maneira, em todos os referenciais Lorentzianos. Um bom objeto que é conforme a estas características e pode ser usado como fonte da gravitação é o tensor de momentum energia da matéria, que denotamos por $T_{\mu\nu}$ [Adle 75, Wein 72]. Por este objeto, entendemos que encerra a informação de qualquer tipo de matéria e energia de origem não gravitacional. Note que, quando falamos energia, entendemos energia de interação. Neste caso, $T_{\mu\nu}$ carrega a contribuição da energia de interação entre a matéria com ela própria e com o campo gravitacional, mas não a do campo gravitacional consigo próprio.

Poderíamos ser levados a pensar na possibilidade de considerar como fonte da gravitação, o traço do tensor de momentum energia, $T^{\alpha}{}_{\alpha}$, que certamente é uma quantidade Lorentz-invariante e representa uma densidade de energia. No entanto, se analisarmos o caso do campo eletromagnético, vê-se que o traço do tensor de momentum energia correspondente é identicamente nulo, de onde resulta que uma teoria construída com este objeto determinaria que energia de origem eletromagnética não atuaria como fonte de interação gravitacional. Fato este que entra em direta contradição com a experimentação. Este problema aparece aqui, em consequência da teoria eletromagnética de Maxwell ser linear. Em verdade, é possível pensar na viabilização de uma formulação não linear para o eletromagnetismo que resulte em um tensor de momentum energia com traço não nulo, contribuindo finalmente para uma teoria construída de tal maneira a admitir este escalar, $T^{\alpha}{}_{\alpha}$, como fonte material do campo. Entretanto, tal construção nos levaria por outros caminhos, contrariamente ao que estamos propondo discutir neste trabalho. Algum esforço nesta direção tem sido realizado nos trabalhos [NDE 97a, NDE 97b]. Uma completa revisão sobre este assunto pode ser encontrada no livro sobre eletrodinâmica não linear, escrito por J. Plebanski (veja ref.: [Pleb 70]). Admitiremos a teoria de Maxwell como a boa teoria do eletromagnetismo, o nos leva a realizarmos o tensor de momentum energia representando a fonte material do campo gravitacional, a fim de que a energia associada a este campo contribua para os efeitos gravitacionais.

Desde que o termo de fonte é um tensor de ordem 2, vamos escolher o tensor potencial gravitacional que denotaremos por $\phi_{\mu\nu}$, para representar esta interação. Acrescentamos ainda que $\phi_{\mu\nu}$ seja simétrico,

$$\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu},$$

e impomos que este tensor seja adimensional, isto é[1],

$$[\phi_{\mu\nu}] = 1.$$

[1] Veja a notação fixada para este trabalho.

A maneira mais geral de se escrever as equações de campo, de tal forma que: (i) respeitem ao critério de linearidade; (ii) sejam construídas com derivadas de no máximo ordem 2, e ainda; (iii) que contenham $T_{\mu\nu}$ como fonte material, resulta na combinação que segue:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi^{\mu\nu} + a\, \partial_\alpha \partial^{(\mu} \phi^{\nu)\alpha} + b\, \partial^\mu \partial^\nu \phi^\alpha{}_\alpha + c\, \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha \phi^\beta{}_\beta + d\, \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta \phi^{\alpha\beta} = -\kappa\, T^{\mu\nu}, \qquad (2.1)$$

onde a, b, c, d e κ são constantes que trataremos de fixá-las a seguir. Obviamente, poderíamos escrever a equação (2.1) acrescentando ainda os termos $\phi^{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}\phi^\alpha{}_\alpha$, desde que estamos chamando a expressão acima de a mais geral. No entanto, é notório que a adição de tais termos implicaria em uma configuração de campo — no caso estático — que decresce exponencialmente com a distância, e como admitimos que a interação gravitacional seja de longo alcance, desprezamos de uma vez estes termos indesejados. Poderíamos também ter somado um termo de traço do tensor de momentum energia, porém, esta feita corresponderia a uma simples redefinição das constantes já existentes, não trazendo assim nada de novo.

Para procurar o valor das contantes envolvidas, vamos estabelecer o princípio de conservação da energia, ou seja, imporemos que o tensor de momentum energia, escolhido para atuar como fonte do campo, tenha divergência nula, ou seja:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \qquad (2.2)$$

Assim, as equações de campo se reduzem à,

$$(1 + a)\, \partial^\alpha \partial_\alpha \partial_\nu \phi^{\mu\nu} + (a + d)\, \partial^\mu \partial_\alpha \partial_\beta \phi^{\alpha\beta} + (b + c)\, \partial^\mu \partial^\alpha \partial_\alpha \phi^\beta{}_\beta = 0, \qquad (2.3)$$

mostrando assim, que as constantes devem obdecer às seguintes condições:

$$a = -1, \qquad (2.4)$$

$$d = +1, \qquad (2.5)$$

$$b = -c. \tag{2.6}$$

Os valores que podem tomar as constantes b e c (b ou c), conduzem a diferentes equações de campo, embora consequentes de uma mesma construção teórica. Alguns valores são, realmente, não permitidos. Vamos fixar o valor da constante b para,

$$b = 1,$$

sem entrar em outros detalhes que esta escolha sugere. Assim, temos as seguintes equações de campo, lineares, para a descrição do campo gravitacional,

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \phi^{\mu\nu} - \partial_\alpha \partial^{(\mu} \phi^{\nu)\alpha} + \partial^\mu \partial^\nu \phi^\alpha{}_\alpha - \eta^{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \partial^\alpha \phi^\beta{}_\beta - \partial_\alpha \partial_\beta \phi^{\alpha\beta} \right) = -\kappa T^{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Reconhecemos a constante que resta, κ, como uma constante de acoplamento, e seu valor pode ser fixado facilmente quando procurarmos pelo limite assimptótico da teoria, qual seja, confrontando-a com resultados experimentais verificados na teoria Newtoniana.

Apesar de termos escrito as equações acima utilizando um sistema de coordenadas cartesiano, as mesmas podem, sempre que necessário, ou conveniente, passar para uma forma mais geral, válida em um sistema arbitrário de coordenadas no espaço tempo plano. A justificativa é fundamentada no fato de que as equações obedecem ao princípio de covariância, portanto, são válidas em qualquer sistema de coordenadas. Logo, para procedermos a tal generalização, devemos substituir as derivadas simples por derivadas covariantes, com respeito a métrica geral $\gamma_{\alpha\beta}$, e substituir a métrica constante $\eta_{\alpha\beta}$ por $\gamma_{\alpha\beta}$. Desta forma, a equação tensorial (2.7) pode ser reescrita como:

$$\phi_{\mu\nu;\alpha}{}^{\alpha} - \phi_{\alpha(\mu;\nu)}{}^{\alpha} + \phi^\alpha{}_{\alpha;\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} \left(\phi^\beta{}_\beta{}^{;\alpha}{}_\alpha - \eta^{\mu\nu} \phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} \right) = -\kappa T^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

onde (;) simboliza a derivada covariante com respeito a métrica geral para o espaço tempo plano, $\gamma_{\mu\nu}$. Desde que nada perdemos em generalidade, usaremos sempre o sistema de coordenadas que torna mais simples as operações matemáticas. Só escreveremos as expressões de maneira geral em sua forma final, quando for conveniente.

As equações lineares para campos de spin-2, foram primeiramente apresentadas por M. Fierz e W. Pauli no trabalho [FiPa 39], onde derivaram as equações de onda para partículas com spin arbitrário em um dado campo eletromagnético.

2.2 Equações de Campo como Consequência de um Princípio Variacional

De maneira alternativa a que realizamos para chegar à equação (2.8), podemos pensar em construir a teoria linear da gravitação a partir de um princípio variacional, escrevendo primeiramente uma Lagrangeana para representar o campo de spin-2, o que denominamos de campo gravitacional, e dela derivar as equações de movimento seguindo o procedimento usual que o princípio da mínima ação estabelece. Na literatura existem vários trabalhos usando o formalismo Lagrangeano na derivação das equações lineares para a gravitação. Uma boa revisão deste assunto pode ser encontrada no trabalho de W. E. Thirring, indicada na referência [Thir 61]. Vamos usar a mesma motivação da seção 2.1 e aceitar que a fonte do campo seja completamente determinada pelo tensor de momentum energia da matéria, $T_{\mu\nu}$. Vamos, então, procurar pela expressão mais geral possível que possa ser escrita em termos do potencial tensor, $\phi_{\mu\nu}$, e derivadas de, no máximo, ordem 2. Note que para resultar em equações de campo lineares, diferenciais de segunda ordem em $\phi_{\mu\nu}$, a Lagrangeana deve ser de ordem 2 nas primeiras derivadas do potencial tensor. Com estas características, a quantidade mais geral pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{\kappa}\left(C_1 \phi^{\alpha\beta,\gamma}\phi_{\alpha\beta,\gamma} + C_2 \phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\phi^{\gamma}{}_{\alpha,\gamma} + C_3 \phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\phi^{\gamma}{}_{\gamma,\alpha} + C_4 \phi^{\alpha}{}_{\alpha,\gamma}\phi_{\beta}{}^{\beta,\gamma}\right). \tag{2.9}$$

Em verdade, $\mathcal{L}_\phi$ é a densidade de Lagrangeana do campo gravitacional, como fixaremos a seguir quando avaliarmos a dimensão da constante de acoplamento. Esta expressão é a mais geral no sentido em que qualquer outro termo que possamos construir desta forma, pode ser convertido em um dos quatro já presentes em (2.9), a menos de termos de superfície, que não contribuiriam para a derivação das equações de campo.

Antes de prosseguir com o cálculo das variações, vamos examinar as dimensões físicas das quantidades que introduzimos. Da forma como escrevemos, a expressão (2.9) é uma densidade de Lagrangeana, e como a Lagrangeana de um sistema físico deve ter dimensão de energia, implica que $\mathcal{L}_\phi$ deva ter dimensão de densidade de energia. Assim, como o tensor potencial, $\phi_{\alpha\beta}$, foi escolhido para ser adimensional, podemos escrever as dimensões de (2.9) na forma:

$$[\mathcal{L}_\phi] = \frac{1}{[\kappa]}\frac{1}{L^2}, \tag{2.10}$$

onde utilizamos

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu}] = \frac{1}{L}.$$

Mas, impondo que

$$[\mathcal{L}_\phi] = \frac{M\,L^2}{T^2}\frac{1}{L^3} \equiv \left\{\frac{\text{energia}}{\text{volume}}\right\},$$

encontramos, comparando as expressões acima,

$$\frac{M\,L^2}{T^2}\frac{1}{L^3} = \frac{1}{[\kappa]}\frac{1}{L^2}.$$

De onde resulta que a dimensão da constante de acoplamento deve ser dada por

$$[\kappa] = \frac{T^2}{ML} = \left\{\frac{1}{\text{força}}\right\}. \tag{2.11}$$

Vemos assim, que a constante κ que aparece em (2.9) e também em (2.7), tem dimensão de inverso de força. Então, visto que κ é uma constante dimensional e, como as únicas constantes naturais que dispomos é a constante de Newton (G) e a velocidade da luz (c), podemos encontrar uma relação de proporcionalidade entre elas. Vejamos, as dimensões de G e c são, respectivamente,

$$[G] = \frac{L^3}{MT^2} \tag{2.12}$$

$$[c] = \frac{L}{T}. \tag{2.13}$$

Desta feita, as equações (2.11), (2.12) e (2.13) podem ser combinadas de tal forma que encontramos a seguinte relação:

$$[\kappa] = \left[\frac{G}{c^4}\right]. \tag{2.14}$$

Ou seja, a menos de um fator numérico, multiplicativo, a constante de acoplamento, κ, pode ser escrita em termos das contantes naturais c e G, na forma:

$$\kappa \sim \frac{G}{c^4}. \tag{2.15}$$

Só poderemos escrever a expressão exata realizando algum teste observacional com a teoria, ou mais diretamente, exigindo que a mesma se reduza, no limite de campo fraco e baixas velocidades, ao caso Newtoniano.

A ação do campo gravitacional, S_ϕ, é construída como,

$$S_\phi = -\frac{1}{c}\int d^4x\mathcal{L}_\phi. \tag{2.16}$$

Do princípio da mínima ação, se tomarmos a variação de S_ϕ igual a zero, estaremos implicitamente derivando as equações de movimento do campo gravitacional para o vazio. De modo a completar a teoria, além da ação para o campo, devemos somar a ação da matéria, S_M. Assim, a ação total será dada por

$$S = S_\phi + S_M, \tag{2.17}$$

e as equações de campo resultam do princípio da mínima ação:

$$\delta S = 0. \tag{2.18}$$

Por enquanto, deixaremos em aberto a descrição da matéria por meio de uma Lagrangeana específica e escreveremos somente que

$$S_M = \frac{1}{c}\int d^4x \mathcal{L}_M, \tag{2.19}$$

onde L_M obdece à variação

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\delta\phi_{\alpha\beta}. \tag{2.20}$$

Vamos considerar, então, a variação da ação total definida pela equação (2.17),

$$\delta S = \delta S_\phi + \delta S_M = 0.$$

De posse das relações acima definidas, a variação efetuada[2] fornece,

$$\frac{1}{c}\int d^4x \left[\frac{1}{\kappa}\left(2\,C_1\,\phi^{\alpha\beta,\gamma}{}_{\gamma} + 2\,C_2\,\phi^{\alpha\rho,\beta}{}_{\rho} + C_3\phi^{,\alpha\beta} + 2\,C_4\,\eta^{\alpha\beta}\phi^{,\tau}{}_{\tau} + C_3\,\eta^{\alpha\beta}\phi^{\tau\sigma}{}_{,\tau\sigma}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\right]\delta\phi_{\alpha\beta} = 0, \tag{2.21}$$

de onde, usando a propriedade de simetria do tensor potencial, resulta as seguintes equações de movimento:

$$4\,C_1\,\phi^{\alpha\beta,\gamma}{}_{\gamma} + 2\,C_2\,\phi^{\rho(\alpha,\beta)}{}_{\rho} + 2\,C_3\phi^{,\alpha\beta} + 4\,C_4\,\eta^{\alpha\beta}\phi^{,\tau}{}_{\tau} + 2\,C_3\,\eta^{\alpha\beta}\phi^{\tau\sigma}{}_{,\tau\sigma} = -\kappa T^{\alpha\beta}. \tag{2.22}$$

Logo, em vista de se obter uma lei de conservação, ou mais diretamente, comparando estas equações obtidas do princípio variacional com as equivalentes, derivadas em (2.7),

[2] Devemos notar que abandonamos integrais de superfície, admitindo que o tensor potencial gravitacional tenha suporte compacto.

estabelecemos os seguintes valores para as constantes:

$$C_1 = +\frac{1}{4} \tag{2.23}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \tag{2.24}$$

$$C_3 = +\frac{1}{2} \tag{2.25}$$

$$C_4 = -\frac{1}{4}. \tag{2.26}$$

Assim sendo, as equações de movimento tomam a forma já esperada, apresentada na equação (2.7). Substituindo finalmente os valores das contantes na Lagrangeana (2.9), resulta:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{4\,\kappa}\left(\phi^{\alpha\beta,\gamma}\phi_{\alpha\beta,\gamma} - 2\,\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\phi^{\gamma}{}_{\alpha,\gamma} + 2\,\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\phi^{\gamma}{}_{\gamma,\alpha} - \phi^{\alpha}{}_{\alpha,\gamma}\phi_{\beta}{}^{\beta,\gamma}\right). \tag{2.27}$$

Por conveniência de notação, vamos definir o tensor simétrico de ordem 2, $G^{(L)}_{\mu\nu}$, como

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = \Box\phi_{\mu\nu} - \phi^{\alpha}{}_{(\mu,\nu),\alpha} + \phi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(\Box\phi^{\alpha}{}_{\alpha} - \phi^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}). \tag{2.28}$$

A letra (L) indica que este objeto é linear na sua dependência no potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$. Em termos deste objeto, as equações de campo podem ser apresentadas compactamente como,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\kappa\,T_{\mu\nu}, \tag{2.29}$$

e a Lagrangeana $\mathcal{L}_\phi$ pode ser convenientemente reescrita, a menos de termos de superfície, na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{4\kappa}G^{(L)}_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}. \tag{2.30}$$

Vemos então, que a teoria linear para campos de spin 2 pode ser facialmente derivada de um formalismo Lagrangeano, como apresentamos nesta seção.

2.3 Transformação de "Gauge"

Como podemos notar, das equações de campo, uma dada solução de $\phi_{\mu\nu}$ continua a ser solução se somarmos o objeto simétrico $\Lambda_{\mu,\nu}$. Em outras palavras, as equações de campo, (2.29), são invariantes sob a seguinte transformação:

$$\phi_{\alpha\beta} \rightarrow \phi_{\alpha\beta} + \Lambda_{(\alpha,\beta)}. \tag{2.31}$$

Isto significa que estas equações não determinam as soluções univocamente, mas a menos de uma transformação, indicada pela expressão (2.31), gerando assim uma ambiguidade na determinação das mesmas. Uma maneira de se tentar eliminar esta ambiguidade seria pela introdução de certas condições. Vamos definir a seguinte condição sobre o tensor potencial("Gauge" de Lorentz):

$$\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} = 0, \tag{2.32}$$

ou ainda, se introduzirmos a mudança de variável,

$$h_{\mu\nu} \equiv \phi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}, \tag{2.33}$$

obteremos,

$$h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \tag{2.34}$$

Em termos desta nova variável e usando as condições acima, as equações de campo se reduzem à

$$\Box h_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.35}$$

Esta é uma forma simples e muito conveniente de expressar as equações que resultam desta construção linear. Nos capítulos que seguem, as usaremos para derivar algumas das soluções necessárias para a verificação do limite Newtoniano. Mais detalhes a respeito de introdução de condições sobre equações de campo, podem ser encontrados em vários livros textos de gravitação, como por exemplo nas referências [Fock 64, Wein 72, Adle 75] dentre muitas outras.

2.4 Problemas com a Lei de Conservação da Energia

Na construção da teoria linear para a gravitação, tomamos o cuidado de escolher as constantes multiplicativas de tal forma a resultar em uma lei de conservação da energia. Desta maneira, obtivemos um objeto, $G^{(L)}_{\mu\nu}$, com divergência identicamente nula, implicando em

$$G^{\mu\nu}_{(L),\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \tag{2.36}$$

Entretanto, o tensor de momentum energia da matéria carrega informação a respeito de qualquer tipo de energia e da sua interação com o campo gravitacional — quando considerado o acoplamento com o mesmo —, exceto aquela energia que é proveniente do próprio campo gravitacional. Assim sendo, não contém os termos de auto interação do campo, e, desde que energia deve sofrer interação com a gravitação, não importando a sua origem, resulta que a lei de conservação apresentada pela teoria linear, imposta pela divergência do tensor $G^{(L)}_{\mu\nu}$, deve ser inconsistente — ou pelos menos incompleta —, uma vez que o tensor de momentum energia não pode se conservar separadamente, mas somente quando considerada também a energia do campo gravitacional. Desta feita, devemos alterar as equações de movimento e somar ao tensor de momentum energia da matéria, o tensor de momentum energia do campo gravitacional, que chamaremos de $t_{\mu\nu}$.

Desta feita, as equações de movimento devem ser alteradas para a forma,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\kappa\left(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right), \tag{2.37}$$

e a identidade (2.36) leva à seguinte lei de conservação:

$$\left(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = 0, \tag{2.38}$$

que representa uma lei de conservação adequada, deixando as equações de campo representadas pela expressão (2.37), livre de inconsistências.

O próximo passo consiste, necessariamente, em encontrar a forma explícita do novo objeto, $t_{\mu\nu}$. Aqui surge um interessante problema. É bem conhecido que existe um procedimento canônico de se obter o tensor de momentum energia, associado a um campo, a partir da Lagrangeana deste dado campo. No entanto, a Lagrangeana que construímos é tal que resulta, juntamente com a matéria, nas equações de movimento (2.29), que, como já vimos, não são completas. Assim, o tensor de momentum energia que poderemos encontrar a partir desta Lagrangeana, não poderá ser o tensor de momentum energia completo para a gravitação, mas apenas uma primeira aproximação deste. Entretanto, quando escrevermos este objeto — **primeira aproximação** — deveremos somá-lo às equações (2.29) no intuito de as aproximar para a forma fechada (2.37), e esta operação, modificando as equações de campo, modifica como consequência a Lagrangeana que as resulta de um princípio variacional. Então, a fim de corrigir esta Lagrangeana de modo a acertar a teoria nesta ordem, devemos acrescentar a ela o complemento adequado. Ora, uma vez que a Lagrangeana agora está modificada, um novo tensor de momentum energia do campo poderá ser derivado, resultando ser este — **segunda aproximação** — mais completo. É evidente que este procedimento se extende indefinidamente, e em cada estágio, estaremos com a teoria mais completa para descrever o campo gravitacional. A teoria final surge quando realizarmos infinitas interações deste tipo.

A teoria que emerge deste procedimento é identificada com a relatividade geral por alguns autores. Os primeiros esforços nesta direção, foram realizados por R. H. Kraichnan [Krai 47, Krai 55] e, na mesma época, por S. N. Gupta [Gupt 54]. No entanto, um excelente exame a respeito destas questões foi feito, independentemente, por R. P. Feynman em um curso de gravitação que ministrou durante os anos de 1962-63 na Califórnia-EUA, e cujas notas de aula foram recentemente publicadas por dois de seus alunos (veja ref.: [Feyn 95]). Veja também a referência [Dese 70], onde o assunto é apresentado em sua versão mais completa.

2.5 O Tensor de Momentum Energia do Campo Gravitacional — Primeira Aproximação

Associada a uma Lagrangeana qualquer, escrita na forma

$$L = L(\xi, \xi_{,\mu}), \tag{2.39}$$

o princípio da mínima ação fornece uma quantidade conservada, dada pela expressão,

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \xi_{,\mu} \frac{\partial L}{\partial \xi_{,\nu}} - \delta_\mu{}^\nu L, \tag{2.40}$$

que chamamos de tensor de momentum energia[3] do campo ξ.

Assim, o tensor de momentum energia associado ao campo gravitacional pode ser obtido por meio da expressão:

$$t_\mu{}^\nu = \phi_{\alpha\beta,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_\phi}{\partial \phi_{\alpha\beta,\nu}} - \delta_\mu{}^\nu \mathcal{L}_\phi, \tag{2.41}$$

onde $\mathcal{L}_\phi$ é a densidade de Lagrangeana do campo, dada em (2.27). Vamos introduzir a seguinte relação de derivação das derivadas do tensor potencial,

$$\frac{\partial \phi_{\sigma\tau,\omega}}{\partial \phi_{\mu\nu,\rho}} = \frac{1}{2} \delta^\mu{}_{(\sigma} \delta^\nu{}_{\tau)} \delta^\rho{}_\omega . \tag{2.42}$$

Finalmente, usando esta relação, o tensor de momentum energia, $t^{(1)\nu}_\mu$, pode ser encontrado, e resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} t^{(1)\nu}_\mu = \; & \frac{1}{2\kappa} \Big[\phi_{\alpha\beta,\mu} \phi^{\alpha\beta,\nu} - 2\, \phi_\beta{}^\nu{}_{,\mu} \phi^{\beta\rho}{}_{,\rho} + \phi_\alpha{}^\nu{}_{,\mu} \phi^{,\alpha} + \phi_{,\mu} \phi^{\nu\rho}{}_{,\rho} - \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} \\ & - \frac{\delta_\mu{}^\nu}{2} \left(\phi_{\alpha\beta,\gamma} \phi^{\alpha\beta,\gamma} - 2\, \phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \phi^\gamma{}_{\alpha,\gamma} + 2\, \phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} \phi_{,\alpha} - \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) \Big] . \end{aligned} \tag{2.43}$$

[3] Uma boa discussão deste objeto é apresentada no livro do L. D. Landau e E. M. Lifshitz, na referência [Land 80].

Como já comentamos anteriormente, este tensor consiste apenas na primeira aproximação do tensor completo, por este motivo escrevemos o indice "(1)" na expressão acima. Desta feita, as equações de movimento são reescritas, nesta ordem, na forma:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\kappa \left[T_{\mu\nu} + t^{(1)}_{\mu\nu}\right]. \tag{2.44}$$

No caso de fixarmos condições sobre o tensor potencial, $\phi_{\alpha\beta}$, definidas pela relação (2.34),

$$\phi^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}, \tag{2.45}$$

o tensor $t^{(1)}_{\mu\nu}$ se reduz à forma,

$$t^{(1)\nu}_{\mu} = \frac{1}{2\kappa}\left[\phi_{\alpha\beta,\mu}\phi^{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi^{,\nu} - \frac{\delta_{\mu}{}^{\nu}}{2}\left(\phi_{\alpha\beta,\gamma}\phi^{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)\right]. \tag{2.46}$$

Note que, para reescrevermos esta última expressão em termos da variável $h_{\alpha\beta}$, é necessário, simplesmente, substituir a letra ϕ pela letra h.

O tensor de momentum energia do campo gravitacional associado à Lagrangeana da teoria linear, para uma escolha de coordenadas hamônicas, foi primeiramente apresentado por S. N. Gupta, quando examinava um método de quantização da teoria da relatividade geral, em aproximação linear — veja ref.: [Gupt 52a].

2.6 Balanço de Momentum Energia entre a Matéria e o Campo Gravitacional

Vamos seguir, procurando entender quais consequências traz a lei de conservação imposta pela equação (2.38). Adotando as condições (2.34), as equações de campo se reduzem em primeira aproximação no tensor de momentum energia do campo, à:

$$\Box h_{\mu\nu} = -\kappa \left[T_{\mu\nu} + t^{(1)}_{\mu\nu}\right] \tag{2.47}$$

e a lei de conservação que segue é dada por,

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + t^{\mu\nu}_{(1),\nu} = 0. \tag{2.48}$$

Mas, da equação (2.46), reescrita em termos da variável $h_{\alpha\beta}$, e tomada a sua divergência, encontramos:

$$t^{\alpha\beta}_{(1),\beta} = \frac{1}{2\kappa}\left(\Box h_{\mu\nu} h^{\mu\nu,\alpha} - \frac{1}{2}\Box h h^{,\alpha}\right). \tag{2.49}$$

Entretanto, se introduzirmos aqui as equações de campo, (2.47), e desprezando quaisquer contribuições de ordem superior a que estamos tratando[4], ou seja, desprezando termos de ordem $O(\phi^3)$, a expressão acima se reduz à interessante forma,

$$t^{\alpha\beta}_{(1),\beta} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu,\alpha}, \tag{2.50}$$

donde a lei de conservação expressa pela relação (2.48), pode ser reescrita mais convenientemente como,

$$T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} - \frac{1}{2}\phi_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu} = 0. \tag{2.51}$$

Esta é a equação que representa o balanço de momentum energia entre a matéria e o campo gravitacional. A partir desta relação, podemos derivar a equação que governa o movimento das partículas materiais imersas em um dado campo gravitacional. Para isto, começamos por integrar a equação (2.51) num volume V, fornecendo a relação integral:

$$\int_V d^3x T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} = \frac{1}{2}\int_V d^3x \phi_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu}. \tag{2.52}$$

[4] A razão para desprezarmos termos de ordem superior a 2, no campo, é muita clara, uma vez que se considerassemos estes termos, estaríamos perdendo toda a ordem 3 que viria do próximo termo do tensor de momentum energia do campo gravitacional, e assim por diante. De qualquer forma, o objetivo que almejamos nesta seção é procurar pelo limite Newtoniano, que corresponde à estrutura de campo fraco, donde a aproximação é plenamente justificada.

O termo do lado esquerdo pode se expandido na forma

$$\int_V d^3x T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} = \frac{1}{c}\int_V d^3x T_\alpha{}^0{}_{,0} + \int_V d^3x T_\alpha{}^k{}_{,k}. \tag{2.53}$$

Mas, transformando a última integração de volume para superfície — teorema de Gauss — segue,

$$\int_V d^3x T_\alpha{}^k{}_{,k} = \int_S dS_k T_\alpha{}^k \tag{2.54}$$

e, como podemos estender a superfície de integração para fora da região onde existe conteúdo material, esta integração se anula, resultando assim:

$$\int_V d^3x\, T_\alpha{}^\beta{}_{,\beta} = \frac{1}{c}\int_V d^3x T_\alpha{}^0{}_{,0}. \tag{2.55}$$

Vamos definir o 4-vetor momentum[5], P_α, da partícula,

$$P_\alpha \equiv \frac{1}{c}\int_V d^3x T_\alpha{}^0. \tag{2.56}$$

Assim, de (2.52),

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_V d^3x \phi_{\mu\nu,\alpha} T^{\mu\nu}. \tag{2.57}$$

Para calcular a integração que aparece no lado direito da equação (2.57), vamos usar dois argumentos. Primeiramente, façamos a hipótese de que o potencial tensor tenha variação desprezível sobre o volume da partícula, ou seja, pode ser considerado constante nesta região. Desta forma, $\phi_{\alpha\beta,\mu}$ pode sair da integração acima, restando,

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\phi_{\mu\nu,\alpha}\int_V d^3x T^{\mu\nu}. \tag{2.58}$$

[5] É conveniente chamar esta quantidade de momentum devido à sua dimensão física:

$$[P_\mu] = \frac{ML}{T} = \{\text{momentum linear}\}.$$

E por último, usaremos uma aproximação para a expressão do tensor de momentum energia da matéria,

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + O(\phi) \tag{2.59}$$

onde ρ_0 é a densidade própria de energia da partícula

$$\rho_0 = \rho\, c^2 \sqrt{1 - u^k u_k} \tag{2.60}$$

com

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{2.61}$$

e u^α o 4-vetor velocidade, ou mais simplesmente, a 4-velocidade:

$$u^\alpha = \frac{1}{c}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}. \tag{2.62}$$

Na expressão (2.61), m representa a massa da partícula e V o seu volume, enquanto na expressão (2.62), τ é o tempo próprio. É conveniente definir as componentes espaciais da 4-velocidade como

$$u^k = \frac{v^k}{c} \tag{2.63}$$

onde v^k é o 3-vetor velocidade, usual da mecânica clássica para uma configuração de baixas velocidades. Vamos definir o produto escalar,

$$v^k v_k \equiv v^2. \tag{2.64}$$

Assim, segue que

$$u^k u_k \equiv \frac{v^2}{c^2}. \tag{2.65}$$

e a expressão (2.60) pode ser apresentada na sua forma mais conhecida,

$$\rho_0 = \rho\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.66}$$

Consideraremos a aproximação (2.59) em (2.58). Esta aproximação é aceitável devido a presença do potencial $\phi_{\mu\nu,\alpha}$ multiplicativo. Desta maneira, o termo que desprezamos contribuiria somente em ordem $O(\phi^2)$ para as equações de movimento das partículas. Obviamente, não conhecemos a forma explícita do tensor de momentum energia da matéria, e também, esta expansão não pode ser utilizada para o cálculo de P_α, em (2.58), uma vez que os termos da ordem desprezada contribuiriam na ordem de aproximação considerada. Então, introduzindo a expressão (2.59) em (2.58), resulta

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} = \frac{1}{2}\phi_{\mu\nu,\alpha}\int_V d^3x\,\rho_0 u^\mu u^\nu + O(\phi^2). \tag{2.67}$$

Se explicitarmos os termos nesta equação de acordo com as definições (2.60) e (2.61), poderemos realizar a integração facilmente, resultando por fim,

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial \tau} - \frac{m\,c^2}{2}\phi_{\mu\nu,\alpha}u^\mu u^\nu = 0, \tag{2.68}$$

onde utilizamos adicionalmente, a relação:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.69}$$

A equação (2.68) é a equação de movimento de uma partícula de massa m imersa em um campo gravitacional, em uma primeira aproximação. É bem verdade que ainda devemos prosseguir e procurar escrever a expressão para o 4-momentum da partícula, assim como o fizemos com o lado direito das equações (2.58). Até este ponto, podemos apenas inferir que sua forma seja dada por termos do tipo

$$P_\alpha \;\sim\; \{m\,c\,u_\alpha\,;\; m\,c\,\phi_{\alpha\beta}u^\beta\},$$

desde que qualquer outro termo necessitaria de uma nova constante dimensional. De qualquer modo, uma maneira particularmente interessante de se obter a expressão procurada, formalmente, é por meio de comparação com as equações de Euler-Lagrange, que são, equivalentemente, as equações de movimento da partícula.

Para uma dada Lagrangeana, que seja função das coordenadas $\{x^\mu\}$ e da 4-velocidade u^α, o princípio de Hamilton fornece as seguintes equações de movimento:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{2.70}$$

Se compararmos estas equações com (2.68), poderemos identificar os seguintes termos:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} = P_\mu \tag{2.71}$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{m\,c^2}{2}\phi_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta. \tag{2.72}$$

A equação (2.72) pode ser integrada imediatamente, fornecendo a expressão para a Lagrangeana, $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \frac{m\,c^2}{2}\phi_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + \mathcal{L}_0(u), \tag{2.73}$$

onde $\mathcal{L}_0(u)$ é a constante proveniente da integração com respeito a x^μ, logo, uma função arbitrária da 4-velocidade. Podemos encontrar a forma desta função $\mathcal{L}_0(u)$ impondo que o limite assimptótico seja válido, i.e., para uma situação de campo nulo ($\phi_{\mu\nu} = 0$), a Lagrangeana deve se reduzir ao caso de uma partícula livre, para o qual,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m\,c^2}{2}u^\alpha u_\alpha. \tag{2.74}$$

Assim, retornando à equação (2.73), escrevemos

$$\mathcal{L} = \frac{m\,c^2}{2}\phi_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta + \frac{m\,c^2}{2}u^\alpha u_\alpha. \tag{2.75}$$

Finalmente, de posse deste resultado, podemos derivar a expressão para o 4-momentum,

P_μ, através da relação apresentada em (2.71), fornecendo então:

$$P_\mu = m\,c\,u_\mu + m\,c\,\phi_{\alpha\mu}u^\alpha. \tag{2.76}$$

e a equação diferencial que governa o movimento de uma partícula imersa em um campo gravitacional, é reescrita na forma[6]:

$$\frac{d}{d\tau}(u_\mu + \phi_{\alpha\mu}u^\alpha) - \frac{c}{2}\phi_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta = 0. \tag{2.77}$$

A derivada da 4-velocidade com respeito ao tempo próprio é chamada de 4-aceleração, e é da ordem do próprio campo, implicando que a derivação do segundo termo entre parênteses pode ser simplificada, resultando assim em:

$$\frac{du_\mu}{d\tau} + c\,\phi_{\mu\alpha,\beta}u^\alpha u^\beta - \frac{c}{2}\phi_{\alpha\beta,\mu}u^\alpha u^\beta = 0. \tag{2.78}$$

Lembramos que a única aproximação que utilizamos para derivar esta equação de movimento, foi a aproximação para campo fraco. No entanto, não impomos limite para baixas velocidades. Assim, se quizermos verificar o limite Newtoniano, deveremos impor uma condição adicional, uma vez que a teoria é relativista. É o que realizaremos na próxima seção.

2.7 As Equações de Campo para o Limite Newtoniano

Das equações de campo, utilizando o "gauge" de Lorentz, obtivemos a expressão (2.47). Como já sabemos, estas equações possuem termos de ordem $O(\phi)$ e $O(\phi^2)$. Naturalmente,

[6]Note que esta equação é independente da massa da partícula, já mostrando ser válido o princípio de Galileu, ou seja, o movimento de uma partícula teste submetida a um campo de forças de origem gravitacional é tal que independe da massa da partícula. Com isso, partículas de massas diferentes sentem a mesma aceleração proveniente da interação com este campo.

qualquer teoria que seja construída para descrever o campo gravitacional, deve ser capaz de exibir os resultados da teoria Newtoniana em uma aproximação de campo fraco e regime de baixa velocidade. Assim, para procurar por este limite, devemos impor as seguintes condições sobre as equações de campo:

(i) estrutura de campo fraco:

$$\phi_{\alpha\beta} \ll 1; \tag{2.79}$$

(ii) regime de baixas velocidades:

$$v \ll c. \tag{2.80}$$

Vamos, adicionalmente, procurar resolver a situação de campo estático. Neste limite, as componentes espaciais da 4-velocidade serão condicionadas pela relação:

$$u^k = \frac{1}{c}\frac{dx^k}{d\tau} \approx \frac{v^k}{c} \ll 1. \tag{2.81}$$

Das condições (2.79) e (2.80), vemos que termos de ordem v^2 e $v\,\phi$ poderão ser desprezados nas equações que seguem, uma vez que são de ordem $O(2)$ na aproximação considerada. As equações de movimento se reduzem, para este caso, à forma:

$$\frac{dv^k}{dt} + c^2 {\phi^k}_{0,0} - \frac{c^2}{2}{\phi_{00}}^{,k} = 0. \tag{2.82}$$

Desde que estamos interessados em examinar o caso estático, o segundo termo em (2.82) se anula, restando

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{c^2}{2}{\phi_{00}}^{,k}. \tag{2.83}$$

No entanto a equação equivalente na teoria Newtoniana é dada por:

$$\frac{dv^k}{dt} = \Psi^{,k}, \tag{2.84}$$

onde Ψ representa o potencial Newtoniano. Assim, comparando estes resultados, encontramos:

$$\Psi = \frac{c^2}{2}\phi_{00}. \tag{2.85}$$

Agora que já identificamos o potencial gravitacional para esta situação assimptótica, vamos operar diretamente com as equações de movimento (2.47). Primeiramente, vamos analisar as componentes do tensor de momentum energia, $T^{\mu\nu}$, cujas componentes se reduzem à:

$$T^{00} \approx \rho_0 \approx \rho\, c^2 \tag{2.86}$$

$$T^{k\mu} \approx \rho\, u^k u^\mu \approx 0. \tag{2.87}$$

O tensor de momentum energia do campo gravitacional, que aparece no segundo termo do lado esquerdo nas equações (2.47), já é desprezado inteiramente por ser de ordem superior — $O(\phi^2)$. Assim, as componentes das equações de campo, se reduzem à:

$$\nabla^2 h^{00} \approx \kappa\, \rho\, c^2 \tag{2.88}$$

$$\nabla^2 h^{k\mu} \approx 0. \tag{2.89}$$

Desta feita, das relações acima, concluímos que

$$\nabla^2\, h \approx \kappa\, \rho\, c^2, \tag{2.90}$$

e podemos escrever finalmente a expressão para o Laplaciano do campo ϕ_{00}, que já relacionamos previamente com o potencial Newtoniano. Assim operando, encontramos

$$\nabla^2\, \phi^{00} = \frac{1}{2}\kappa\, \rho\, c^2. \tag{2.91}$$

Introduzindo nesta última, a relação (2.85), poderemos fixar o valor da constante κ. Vejamos:

$$\nabla^2 \phi^{00} = \nabla^2 \left(\frac{2\Psi}{c^2} \right) = \frac{1}{2} \kappa \, \rho \, c^2, \tag{2.92}$$

ou ainda,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\kappa \, \rho \, c^4}{4}. \tag{2.93}$$

Porém, da teoria Newtoniana,

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi \, G \, \rho. \tag{2.94}$$

Logo, comparando estas expressões, encontramos que a constante de acoplamento tem o valor de modo a ajustar a teoria ao limite Newtoniano, resultando:

$$\kappa = \frac{16 \, \pi \, G}{c^4}. \tag{2.95}$$

As equações (2.83) e (2.91) mostram que a teoria construída é perfeitamente redutível a teoria de Newton da gravitação. Com isto, fixamos também o valor da constante de acoplamento, antes aproximada pela relação (2.15).

Note que a teoria que apresenta o limite Newtoniano não é a teoria linear desenvolvida nas primeiras seções deste capítulo, mas a teoria corrigida pela adição do tensor de momentum energia do campo em primeira aproximação, que é de segunda ordem no tensor potencial gravitacional. Assim, devido à característica essencialmente não linear do campo gravitacional, não há maneiras de se construir uma teoria fechada para este fenômeno usando este procedimento, a não ser pela soma de uma série infinita de correções na energia, que resulta em uma formulação equivalente da teoria da relatividade geral.

Capítulo 3

O Tensor Campo Gravitacional

Neste capítulo, vamos nos dedicar ao exame das principais características da formulação linear da teoria da gravitação mediante o uso de um novo objeto, que chamaremos de tensor campo gravitacional. Quantidade esta que nos permitirá enorme compactificação dos cálculos já realizados, bem como na construção geral para teorias do campo gravitacional que iremos desenvolver nos capítulos posteriores.

3.1 Construindo o Tensor Campo Gravitacional

Da maneira como vimos tratando, o tensor simétrico de segunda ordem, $\phi_{\mu\nu}$, representa o tensor potencial gravitacional, a menos de unidades de velocidade. Isto pode ser claramente entendido das equações (2.83) a (2.85) — limite Newtoniano — onde obtivemos que a componente ϕ_{00} se relacionava com o potencial clássico, através da expressão:

$$\Psi = \frac{c^2}{2}\phi_{00}. \tag{3.1}$$

Desta forma, um bom candidato ao título de tensor campo gravitacional seria um objeto construído com as primeiras derivadas do tensor potencial gravitacional[1], como sugere as

[1]Da teoria Newtoniana,

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = mg.$$

equações (2.83) e (2.84).

É claro que os nomes campo e potencial, para este caso, servem apenas como notação. Poderíamos denotar por campo o objeto $\phi_{\alpha\beta}$, e a partir deste construir outras quantidades que fossem necessárias. No entanto, consideramos mais conveniente o tratamento de potencial para $\phi_{\mu\nu}$. Note ainda que a nossa definição de potencial Newtoniano, em (2.84), carece de uma dimensão de massa para que tenha o sentido usual empregado na mecânica clássica, qual seja, dimensão de energia.

Desta maneira, para construir um objeto tensorial que contenha as primeiras derivadas do tensor $\phi_{\mu\nu}$, e que seja de primeira ordem neste objeto, este novo objeto deve ser um tensor de terceira ordem, no caso mais geral. Vamos, então, definir o tensor campo gravitacional, $F_{\alpha\beta\gamma}$, através da relação,

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\phi_{\gamma\alpha;\beta} - \phi_{\gamma\beta;\alpha} + \phi_{,\alpha}\gamma_{\beta\gamma} - \phi_{,\beta}\gamma_{\alpha\gamma} + \phi_{\alpha}{}^{\epsilon}{}_{;\epsilon}\gamma_{\beta\gamma} - \phi_{\beta}{}^{\epsilon}{}_{;\epsilon}\gamma_{\alpha\gamma}\right). \tag{3.2}$$

Notoriamente, poderíamos construir um objeto com a mesma dimensão física de muitas maneiras distintas. A particular escolha para $F_{\alpha\beta\gamma}$ ficará evidente quando estudarmos as suas propriedades.

Da definição (3.2), vemos que $F_{\alpha\beta\gamma}$ é um tensor de ordem 3, antissimétrico no primeiro par de índices,

$$F_{\alpha\beta\mu} = -F_{\beta\alpha\mu}. \tag{3.3}$$

Então, desde que $F_{\alpha\beta\mu}$ obdece a relação acima, e ainda é construído com objetos simétricos

---

Assim, teríamos

$$g = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r}$$

ou seja, em termos de variação com respeito a distância, o campo gravitacional (aceleração) é da ordem da primeira derivada do potencial:

$$g \sim \frac{\partial V}{\partial r}$$

em dois índices, segue a seguinte identidade cíclica:

$$F_{\{\alpha\beta\gamma\}} = 0. \tag{3.4}$$

Podemos demonstrar esta relação mais facilmente sem levar em consideração a expressão (3.2). Para isto, vamos definir o tensor de ordem 3, $T_{\alpha\beta\mu}$, antissimétrico no primeiro par de índices, e construído como segue

$$T_{\alpha\beta\mu} = S_{\alpha\beta\mu} - S_{\beta\alpha\mu},$$

onde $S_{\alpha\beta\mu}$ é, a princípio, um tensor arbitrário. Se efetuarmos a soma cíclica,

$$T_{\{\alpha\beta\mu\}} = S_{\alpha\beta\mu} - S_{\beta\alpha\mu} + S_{\beta\mu\alpha} - S_{\mu\beta\alpha} + S_{\mu\alpha\beta} - S_{\alpha\mu\beta}.$$

Como vemos, se $S_{\alpha\beta\mu}$ for um tensor simétrico em dois índices, quaisquer que sejam, segue

$$T_{\{\alpha\beta\mu\}} = 0,$$

de onde justificamos a relação (3.4).

Como $F_{\alpha\beta\mu}$ é antissimétrico no primeiro par de índices, só poderemos construir um único novo objeto por contração com a métrica $\gamma_{\mu\nu}$. Vamos definir o traço nos dois últimos índices, F_α, como,

$$F_\alpha \equiv F_{\alpha\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = F_{\alpha\mu}{}^{\mu}. \tag{3.5}$$

Assim, usando a definição (3.2), podemos expressar este novo objeto em termos das derivadas do tensor potencial, resultando:

$$F_\alpha = \phi_{,\alpha} - \phi_\alpha{}^{\epsilon}{}_{;\epsilon}. \tag{3.6}$$

Se introduzirmos este traço em (3.2), poderemos reescrever $F_{\alpha\beta\mu}$ na forma mais compacta,

$$F_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\left(\phi_{\mu[\alpha;\beta]} + F_{[\alpha}\gamma_{\beta]\mu}\right). \tag{3.7}$$

Vamos passar ao estudo das primeiras derivadas do tensor campo gravitacional. Primeiramente, procuremos pela expressão de sua divergência. Tomando a derivada com respeito ao último índice, encontramos:

$$F^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} = \frac{1}{2}\left(\phi^{\mu[\alpha;\beta]}{}_{;\mu} + F^{[\alpha;\beta]}\right), \tag{3.8}$$

mas, da definição do traço do tensor campo em termos do tensor potencial,

$$F^{[\alpha;\beta]} = -\phi^{\rho[\alpha;\beta]}{}_{;\rho}, \tag{3.9}$$

encontramos que a divergência com respeito ao último índice de $F^{\alpha\beta\mu}$ é identicamente nula, isto é,

$$F_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{;\mu} = 0. \tag{3.10}$$

Resta-nos tomar a divergência com respeito a um dos dois primeiros índices, o que resulta em,

$$F^{\alpha\mu\nu}{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2}\left[\Box\phi_{\mu\nu} - \phi^{\alpha}{}_{(\mu;\nu)\alpha} + \phi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\left(\Box\phi^{\alpha}{}_{\alpha} - \phi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Porém, como podemos notar comparando com a definição (2.28), a divergência (3.11) pode ser escrita em termos do tensor $G^{(L)}_{\mu\nu}$, na forma,

$$F^{\alpha\mu\nu}{}_{;\alpha} = -\frac{1}{2}G^{\mu\nu}_{(L)}. \tag{3.12}$$

Ou ainda, se tomarmos a simetrização nos dois últimos índices do tensor campo, resulta

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu);\alpha} = -G^{(L)}_{\mu\nu}. \tag{3.13}$$

Daqui, vemos que as equações de movimento (2.29) podem ser reescritas em termos do tensor campo gravitacional na forma,

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu);\alpha} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.14}$$

enquanto a condição sobre a divergência nula do tensor $G^{(L)}_{\mu\nu}$, se verifica diretamente da propriedade de antissimetria nos dois primeiros índices do tensor campo gravitacional, de onde[2],

$$F^{\alpha\beta\mu}{}_{;\alpha\beta} = 0, \tag{3.15}$$

implicando assim, na lei de conservação apresentada pela equação (2.36). Uma outra propriedade que poderá ser útil, é a relação das derivadas primeiras deste objeto com o seu traço. Para encontramos esta relação, vamos primeiramente escrever a soma cíclica das primeiras derivadas de $F_{\alpha\beta\gamma}$ como segue:

$$F_{\{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{;\gamma\}} = F_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{;\gamma} + F_{\beta\gamma}{}^{\lambda}{}_{;\alpha} + F_{\gamma\alpha}{}^{\lambda}{}_{;\beta}. \tag{3.16}$$

Se introduzirmos aqui a definição de $F_{\alpha\beta\gamma}$, assim como apresentada pela equação (3.7), e notando que o potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$, obdece à identidade:

$$\phi^{\lambda}{}_{[\alpha;\beta]\gamma} + \phi^{\lambda}{}_{[\beta;\gamma]\alpha} + \phi^{\lambda}{}_{[\gamma;\alpha]\beta} = 0, \tag{3.17}$$

resulta que a soma cíclica (3.16) pode ser reapresentada na interessante forma:

$$F_{\{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{;\gamma\}} = \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\alpha}F_{\gamma];\beta} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\beta}F_{\alpha];\gamma} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\gamma}F_{\beta];\alpha}. \tag{3.18}$$

Esta identidade será de grande valia quando tratarmos do estudo da propagação das ondas de choque associadas ao campo gravitacional.

[2] Note que esta relação é verdadeira devido à métrica do espaç tempo de fundo ser plana.

3.2 Os Invariantes do Campo Gravitacional

Desde que conseguimos derivar as equações de movimento simplesmente da divergência do tensor campo gravitacional, seria interessante construir uma teoria com Lagrangeana também construída com este objeto, a fim de podermos reformular a teoria linear para a gravitação. Para isto, devemos construir os invariantes do campo em questão, e após, procurar pela Lagrangeana que seja função destes invariantes e que se reduza à Lagrangeana do campo linear, apresentada na equação (2.27).

Como já mostramos, só há uma maneira de se construir um novo objeto a partir do tensor campo gravitacional, qual seja, tomando o traço deste tensor. Assim, só poderemos construir invariantes com o próprio campo $F_{\alpha\mu\nu}$ e com o seu traço, F_α. Vamos primeiramente examinar o resultado da contração do campo consigo mesmo. Chamaremos este primeiro invariante de A,

$$A \equiv F^{\alpha\beta\mu} F_{\alpha\beta\mu}. \tag{3.19}$$

Da definição de $F_{\alpha\beta\mu}$, resulta

$$A = \frac{1}{2}\left(\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\alpha;\beta} - \phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\beta;\alpha} + \phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\beta} - 2\,\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi_{,\alpha} + \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right). \tag{3.20}$$

O próximo invariante que podemos construir é a contração do traço consigo mesmo. Chamaremos a esta operação de invariante B,

$$B \equiv F^{\alpha} F_{\alpha}, \tag{3.21}$$

e sua expressão em termos do potencial segue diretamente da definição (3.6), resultando em

$$B = \phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\beta} - 2\,\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi_{,\alpha} + \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}. \tag{3.22}$$

Podemos ainda reescrever A de forma mais compacta, introduzindo (3.22) em (3.20), de onde encontramos,

$$A = \frac{1}{2}\left(\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\alpha;\beta} - \phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\beta;\alpha} + F^{\alpha}F_{\alpha}\right). \tag{3.23}$$

Os invariantes A e B são os únicos que podem ser construídos a partir do tensor campo gravitacional e que contenham quadrados do potencial — em verdade, das derivadas primeiras do potencial tensor. Qualquer outra combinação de contrações do campo $F_{\alpha\beta\mu}$ leva, necessariamente, aos invariantes A e/ou B. Note que, por invariante, entendemos aqueles objetos que se mantenham inalterados inclusive sob transformação de inversão espacial. Se aliviarmos esta condição, poderemos operar também com os objetos duais ao campo, afim de se obter pseudo escalares. Claro que o quadrado destes pseudo escalares constituem verdadeiros invariantes, no entanto, ao se formular a teoria linear, necessitamos apenas dos termos que contenham quadrados do tensor potencial na Lagrangeana, qualquer contribuição de ordem mais elevada não justificaria ser introduzida, nesta ordem.

Por completeza, vamos estudar um pouco os objetos duais ao campo $F_{\alpha\beta\mu}$ e procurar pelos pseudo invariantes que deles possam ser construídos. Primeiramente, definimos a operação dual sobre um objeto qualquer, $Q_{\alpha\beta}$, como segue:

$$Q^{*}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\tau\rho}Q_{\tau\rho}, \tag{3.24}$$

onde $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita para um espaço tempo 4-dimensional, e é construído de tal forma a obdecer as seguintes relações:

$$\eta^{0123} = +1 \tag{3.25}$$

$$\eta_{0123} = -1. \tag{3.26}$$

Como podemos notar, $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ está definido para um sistema de coordenadas cartesiano. Para passarmos para um sistema curvilíneo, devemos realizar uma transformação que leva do sistema cartesiano de coordenadas, que denotamos por $\{x^{\mu}\}$, para um sistema curvilíneo de coordenadas, que denotamos por $\{\tilde{x}^\mu\}$:

$$\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\rho}\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\tau}\frac{\partial\tilde{x}^\nu}{\partial x^\omega}\eta^{\sigma\rho\tau\omega} \tag{3.27}$$

onde definimos por $\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$, o símbolo de Levi Civita válido em um sistema arbitrário de coordenadas. Como $\eta^{\sigma\rho\tau\omega}$ é totalmente antissimétrico, podemos reescrever a expressão acima na forma mais conveniente:

$$\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} = \mathcal{J}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}, \tag{3.28}$$

onde $\mathcal{J}$ é o determinante

$$\mathcal{J} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^0} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^0} & \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^0} \\ \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^2} & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial\tilde{x}^0}{\partial x^3} & \frac{\partial\tilde{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial\tilde{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial\tilde{x}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

ou seja, $\mathcal{J}$ é o Jacobiano da transformação de um sistema cartesiano para uma sistema curvilíneo. Vamos definir a operação acima de forma mais compacta:

$$\mathcal{J} = det\left(\frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\right). \tag{3.30}$$

No entanto, a métrica do espaço tempo em coordenadas curvilíneas, $\gamma_{\alpha\beta}$, pode ser escrita em termos da métrica constante $\eta_{\alpha\beta}$ através da lei de transformação:

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{\partial\tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}\eta^{\mu\nu}. \tag{3.31}$$

E, se tomarmos o determinante desta expressão, encontraremos

$$\frac{1}{\gamma} = -\mathcal{J}^2. \tag{3.32}$$

Lembramos que γ representa o determinante da métrica $\gamma_{\mu\nu}$. Desta maneira resulta a interessante relação entre o Jacobiano da transformação e o determinante da métrica do espaço tempo de fundo em coordenadas curvilíneas:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}. \tag{3.33}$$

Assim, o símbolo de Levi Civita para um sistema arbitrário de coordenadas, com métrica $\gamma_{\alpha\beta}$, é dado por

$$\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\eta^{\alpha\beta\mu\nu}. \tag{3.34}$$

É possível assim, sempre que necessário for, passar de um sistema de coordenadas para outro qualquer, e expressar a operação dual sobre um dado objeto tensorial em qualquer sistema de coordenadas.

Podemos construir dois objetos distintos a partir do tensor campo gravitacional, um por operação dual sobre os dois primeiros índices e o outro operando sobre os dois últimos índices, ou seja, respectivamente,

$$\overset{*}{F}_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\tau\rho}F_{\tau\rho\mu} \tag{3.35}$$

$$\overset{*}{F}_{\mu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\tau\rho}F_{\mu\tau\rho}. \tag{3.36}$$

O objeto construído tomando a operação dual sobre o primeiro e último índices, claramente se reduz a um dos casos anteriores.

Vamos, finalmente, passar à construção dos pseudo invariantes do campo. Em verdade, é facil mostrar que só existe um pseudo invariante possível de se construir para este caso, considerado o espaco tempo de 4 dimensões. O denotaremos por $\overset{*}{Q}$, e é definido por,

$$\overset{*}{Q} \equiv \overset{*}{F}_{\alpha\beta\mu}F^{\alpha\beta\mu}, \tag{3.37}$$

o qual, usando as definições do dual e do tensor campo, pode ser reescrito em termos do potencial tensor, na forma

$$\dot{Q} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}{}^{\tau\rho}\phi_{\mu\tau,\rho}\phi^{\mu\alpha,\beta}. \tag{3.38}$$

3.3 Formulação Lagrangeana para o Campo Gravitacional

Como já vimos na seção anterior, só existem dois invariantes que podem ser construídos com o tensor $F_{\alpha\beta\mu}$, em ordem 2 nestes objetos, além, é claro, do pseudo invariante $\dot{Q}$. No entanto, se quizermos implementar uma formulação Lagrangeana para o campo gravitacional, seguindo os propósitos da teoria linear, não se faz conveniente escrever uma Lagrangeana que seja função de um objeto que muda de sinal sob transformação de inversão espacial, ao não ser que consideremos o seu quadrado, o que estaria fora de questão, uma vez que queremos impor a linearidade das equações que resultem do princípio variacional. Assim, escolheremos trabalhar com os invariantes do campo, A e B, somente.

Definimos a densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}$ para ser função destes objetos. De maneira geral, podemos escrever

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B). \tag{3.39}$$

Desde que $\mathcal{L}$, para o caso em que estamos examinando, é uma função linear nestes invariantes, podemos reduzir a forma geral (3.39) da seguinte maneira,

$$\mathcal{L} = \alpha\, A + \beta\, B, \tag{3.40}$$

onde α e β são constantes. Note que, como a dimensão dos invariantes A e B é de inverso de quadrado de comprimento, estas constantes devem ter dimensão de força, a fim de que $\mathcal{L}$ tenha dimensão de energia por volume. A ação do campo, como usual, é definida pela expressão:

$$S_F = -\frac{1}{c}\int d^4x\, \sqrt{-\gamma}\, \mathcal{L}, \tag{3.41}$$

onde $d^4x\,\sqrt{-\gamma}$ é o elemento invariante de volume. Note que chamamos $\mathcal{L}$ de "densidade de Lagrangeana" no sentido clássico, uma vez ter a dimensão de energia por unidade de volume.

Podemos continuar, procedendo de duas maneiras distintas: ou (i) efetuamos a variação da ação (3.41), utilizando o princípio de Hamilton, a fim de descobrir qual valor assume cada uma das constantes em (3.40), por comparação com as equações de campo da teoria linear construída no capítulo anterior, representadas na equação tensorial (2.7); ou (ii) partimos diretamente das definições dos invariantes A e B e impomos que $\mathcal{L}(A,B)$, na forma (3.40), se reduza à Lagrangeana do campo linear, já derivada na expressão (2.27). Como qualquer dos caminhos são equivalentes em seus resultados, vamos escolher o que parece ser mais direto, (ii), operando diretamente com os invariantes. Das equações (3.40), (3.20) e (3.22), resulta:

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha}{2}\left[\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\alpha;\beta} - \phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\beta;\alpha}\right] + \left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\left[\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\beta} - 2\,\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi_{,\alpha} + \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right]. \quad (3.42)$$

Neste ponto, devemos observar que podemos sempre que necessário, ou conveniente, reescrever a Lagrangeana desprezando termos de superfície, uma vez que não contribuem para as equações de movimento. Ainda mais, vemos de (3.42), que o primeiro termo no lado direito, entre colchetes, bem como o último termo, no segundo par de colchetes, não podem ser transformados usando integração por partes, uma vez que retornam para a mesma forma. Assim, podemos inicialmente usar estes termos para comparar esta expressão, (3.42), com a equivalente, já apresentada em (2.27), e fixar os valores das constantes α e β. Desta feita, encontramos os seguintes valores:

$$\alpha = +\frac{1}{2\kappa} \quad (3.43)$$

$$\beta = -\frac{1}{2\kappa}. \quad (3.44)$$

Consequentemente, de (3.39) resulta que a Lagrangeana deve ser escrita em termos dos invariantes do campo na combinação que segue:

$$\mathcal{L}(A, B) = \mathcal{L}(A - B) \tag{3.45}$$

ou, para ser exato, neste caso linear,

$$\mathcal{L}(A, B) = \frac{1}{2\kappa}(A - B). \tag{3.46}$$

Vamos expandir esta última em termos do potencial tensor e verificar se realmente tal Lagrangeana condiz com a formulação linear. Com a introdução dos resultados acima, podemos reescrever (3.42) na forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa}\left(\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\alpha;\beta} - \phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\beta;\alpha} - \phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\beta} + 2\,\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi_{,\alpha} - \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right). \tag{3.47}$$

Resta-nos mostrar que esta Lagrangeana se reduz à forma apresentada em (2.27). Vamos procurar reexpressá-la a menos de termos de superfície. De fato, se notarmos que,

$$\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\beta} = \phi^{\alpha\rho}{}_{;\beta}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\rho} + TS, \tag{3.48}$$

onde TS significa "termos de superfície"; e, da mesma forma,

$$\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\beta;\alpha} = \phi^{\alpha\rho}{}_{;\beta}\phi^{\beta}{}_{\alpha;\rho} + TS, \tag{3.49}$$

resulta, introduzindo-os na densidade de Lagrangeana (3.47),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\kappa}\left(\phi_{\mu\alpha;\beta}\phi^{\mu\alpha;\beta} - 2\phi^{\alpha\beta}{}_{;\beta}\phi^{\rho}{}_{\alpha;\rho} + 2\,\phi^{\alpha\rho}{}_{;\rho}\phi_{,\alpha} - \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right) \tag{3.50}$$

que é, exatamente, a expressão derivada em (2.27), como já esperavamos. Concluímos assim, que (3.45) e (3.46) devem ser formas equivalentes para a densidade de Lagrangeana de uma teoria linear para a gravitação que use a formulação do tensor campo gravitacional,

$F_{\alpha\beta\mu}$.

Desta feita, para completar a descrição, apresentamos a ação total, S, como a soma da ação do campo e da matéria,

$$S = S_F + S_M \tag{3.51}$$

onde a ação do campo, S_F, é dada por

$$S_F = -\frac{1}{2c\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-\gamma}\,(A - B) \tag{3.52}$$

e a ação da matéria, S_M, dada pela relação (2.19) e (2.20). Do princípio de Hamilton, e usando os resultados que já obtivemos anteriormente, teremos, para um sistema de coordenadas cartesiano,

$$\int d^4x\left[-\frac{1}{4\kappa}(\delta A - \delta B) + \frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\delta\phi_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{3.53}$$

Mas, da definição do invariante A, de (3.23), resulta:

$$\delta A = 2\,F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha,\beta} + \delta B. \tag{3.54}$$

Logo,

$$\delta A - \delta B = 2\,F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha,\beta}. \tag{3.55}$$

Então, introduzindo estes resultados em (3.53), encontramos:

$$\int d^4x\left(F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha,\beta} - \frac{\kappa}{2}T^{\alpha\beta}\delta\phi_{\alpha\beta}\right) = 0, \tag{3.56}$$

na qual, podemos ainda transformar o primeiro termo,

$$F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha,\beta} = -F^{\alpha\beta\mu}{}_{,\beta}\delta\phi_{\mu\alpha} + TS. \tag{3.57}$$

Assim, desprezando-se termos de superfície, a integração (3.56) resulta em

$$\int d^4x \left(-F^{\alpha\beta\mu}{}_{,\beta} - \frac{\kappa}{2} T^{\mu\alpha} \right) \delta\phi_{\alpha\mu} = 0. \tag{3.58}$$

Desde que $\delta\phi_{\alpha\beta}$ é uma quantidade arbitrária, e considerando ainda que o potencial tensor é simétrico, concluímos que a parte simétrica do integrando, em (3.58), deve ser nula, fornecendo assim as seguintes equações de campo:

$$F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{,\alpha} = \kappa\, T^{\mu\nu} \tag{3.59}$$

ou ainda, usando a relação (3.13),

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\kappa\, T_{\mu\nu}, \tag{3.60}$$

que são as equações de campo lineares em $\phi_{\alpha\beta}$, derivadas no capítulo anterior.

Capítulo 4

Teoria do Campo Gravitacional

Uma teoria linear da gravitação, construída com o tensor campo gravitacional, deve ser tal que respeite a relação obtida na equação (3.45), dos invariantes A e B. Embora naquele momento estivessemos apenas interessados em estudar a construção linear, a densidade de Lagrangeana (3.45) poderia ser pensada como representante de uma teoria geral para o fenômeno gravitacional, e que contenha, em sua primeira ordem de aproximação, a Lagrangeana (3.46), que corresponde à teoria linear. As razões pelas quais devemos operacionalizar uma teoria geral, não linear, para o campo gravitacional, já foram explicadas no primeiro capítulo, quando estudamos o problema da conservação da energia. Basicamente, estes problemas se reportam à peculiaridade do campo gravitacional ser auto interativo, portanto, deve ser tratado por meio de uma formulação não linear. Neste capítulo, vamos procurar construir um formalismo geral, que possa atender a teorias para o campo gravitacional. A única restrição que faremos será quanto à escolha dos invariantes do campo, no sentido de que, para uma teoria não linear, qualquer alteração nos objetos que resultam na densidade de Lagrangeana (2.27), podem gerar resultados completamente diferentes. Mais especificamente, podemos citar os termos de superfície que descartamos em várias situações que encontramos anteriormente. Para uma teoria não linear estes termos podem não representar divergências totais, por exemplo se forem argumentos de alguma função, como logarítmica, exponencial ou uma simples raiz quadrada. Importante também notar que a construção mais geral deveria incluir o pseudo invariante, desde que, neste momento, estaremos interessados em tratar do caso não linear, e sendo assim poderíamos considerar o seu quadrado ou qualquer potência de ordem par. No entanto, vamos continuar excluindo este objeto em nossa formulação, apenas por comodidade. Pensamos em "atacar" primeiro os problemas mais simples, e caso não consigamos atingir o devido sucesso na formulação livre destes pseudo invariantes, passaremos ao estudo do caso mais complexo, incluindo-os então.

4.1 A Ação para o Campo

Definimos a Lagrangeana como uma função arbitrária dos invariantes, na combinação em que mostramos ser necessária para resultar, no limite para campo fraco, a teoria linear correta (veja seção 3.3),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(U) \tag{4.1}$$

onde definimos a combinação dos invariantes, U,

$$U \equiv A - B. \tag{4.2}$$

Similarmente à expressão (3.41), a ação para o campo pode ser escrita como,

$$S[\mathcal{L}] = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\mathcal{L} \tag{4.3}$$

onde $\mathcal{L}$ tem dimensão de densidade de energia e é uma função arbitrária de U. Em princípio, a densidade de Lagrangeana, $\mathcal{L}$, deve ser redutível ao caso linear em sua primeira aproximação. Assim, esperamos que

$$\mathcal{L}(U) \approx -\frac{U}{2\kappa} + O\left(U^2\right). \tag{4.4}$$

O sinal negativo que escrevemos nesta expressão, diferentemente do que tínhamos em (3.46), não altera em nada os resultados do que iremos tratar, e escolhemos este sinal negativo, por mera conveniência de notação, assim como na ação do campo. O sinal só fará diferença quando singularizarmos o formalismo para algum modelo particular, como será devidamente apreciado no próximo capítulo.

4.2 O Princípio de Equivalência

Antes de avançarmos na construção da teoria do campo e efetuarmos o acoplamento da mesma com a matéria, é necessário que estudemos um pouco o princípio de equivalência e suas consequências.

Primeiramente, vamos definir o que chamaremos, neste capítulo, de partícula teste e experimento local não gravitacional. Por *partícula teste*, entenderemos uma partícula eletricamente neutra, cuja auto-energia gravitacional seja desprezível e com dimensões suficientemente pequenas, a fim de não sentir as inomogeneidades de campos externos. E, por *experimento local não gravitacional*, entenderemos qualquer experimento realizado em laboratório caindo livremente sob a ação de um dado campo gravitacional, sendo o laboratório blindado, i.e., com paredes fechadas, suficientemente pequeno, a fim de não ser perturbado por inomogeneidades de campos externos, e ainda, cujos efeitos de auto interação gravitacional possam ser desprezados.

Como sabemos, o princípio de equivalência desempenha um importante papel na física dos efeitos gravitacionais, e vem sendo a cada dia mais comprovado mediante várias construções experimentais, sob vários aspectos (veja refs.:[Dick 64, Brag 74], dentre outras.). Vamos considerar o ponto de vista histórico e procurar estudá-lo, bem brevemente, em duas versões: o princípio de equivalência Newtoniano [New 686, Bond 57] e o princípio de equivalência Einsteiniano. Para uma revisão definitiva a respeito do princípio de equivalência Einsteiniano e suas consequências experimentais, veja o livro [Will 93] e as referências nele contidas.

A versão Newtoniana estabelece que a massa inercial de qualquer corpo material é igual a sua massa (*carga*) gravitacional,

$$m_I = m_G. \tag{4.5}$$

Em outras palavras, podemos dizer que este princípio estabelece que todos os corpos caem, em um dado campo gravitacional, com a mesma aceleração, independentemente de suas massas ou composição material. De maneira mais rigorosa, definiremos o princípio de equivalência Newtoniano (PEN) da seguinte forma:
" Se uma partícula teste estiver situada em um dado ponto do espaço tempo, e lhe for inferida uma dada velocidade inicial, sua trajetória será independente de sua estrutura interna e composição material. "

A partir deste princípio, Einstein foi capaz de desvendar os caminhos que o levaram à teoria da relatividade geral. O novo ingrediente acrescentado ao PEN foi observar que, se todos os corpos caem, em um dado campo gravitacional externo, com a mesma aceleração, então, para um observador em um laboratório que cai livremente no mesmo campo gravitacional, os corpos deverão ser observados como que livres de aceleração. Assim, a medida que seus movimentos mecânicos são considerados, os corpos se comportam como se o campo gravitacional estivesse ausente. Obviamente, existem efeitos devido a não homogeneidade do campo gravitacional, mas os mesmos podem ser considerados desprezíveis a medida que utilizarmos um laboratório de dimensões muito pequenas. Einstein foi ainda além e estabeleceu que, não somente as leis da mecânica, mas todas as leis da física, deveriam se comportar em tal laboratório como se a gravitação estivesse ausente. Similarmente ao caso Newtoniano, vamos definir mais rigorosamente o princípio de equivalência Einsteiniano (PEE) como segue:
" i) O princípio de equivalência Newtoniano é válido;
ii) O resultado de qualquer experimento local não gravitacional, é independente da velocidade, de queda livre, do aparatus, bem como independente de onde e quando no universo ele for realizado. "

Em verdade, a verificação do princípio de equivalência Einsteiniano para uma dada teoria, candidata à gravitação, implica para a mesma na verificação dos postulados de uma teoria métrica[1] para este fenômeno. Estes postulados estabelecem que o espaço tempo, preenchido pelo campo gravitacional, deve ser deformado pelo mesmo, podendo, assim, ser representado por uma estrutura métrica, que definiremos pelo tensor $g_{\mu\nu}$; as partículas teste seguem geodésicas nesta geometria; e ainda, se escolhermos um referencial local de Lorentz, quaisquer leis naturais de origem não gravitacional, devem ser aquelas da relatividade especial — que satisfazem aos princípios da relatividade especial.

4.3 Acoplamento Matéria-Gravitação

A variação da ação do campo com respeito ao potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$, resulta nas equações de movimento na ausência de fonte material. Uma vez que estamos tratando do estudo do campo gravitacional, a fonte para tal interação deve ser o tensor de momentum energia da matéria, bem como, a própria auto-interação gravitacional, que já se manifesta como fonte através da não linearidade das equações de campo. Desta maneira, para termos completado a teoria, devemos construir a ação total (S_T), como a soma da ação do campo com a ação da matéria. De forma geral, em termos das equações, podemos escrever que,

$$\delta_\phi S[\mathcal{L}] = 0 \quad \Rightarrow \quad Eq_{\alpha\beta} = 0, \tag{4.6}$$

onde ($Eq_{\alpha\beta} = 0$), são as equações de campo para o vazio. Estas equações devem ser não lineares e portanto, agem como fonte do próprio campo. No entanto, o campo gravitacional é também gerado por conteúdo material, desta forma, as equações de movimento para o caso mais geral, devem ser escritas como,

$$Eq_{\alpha\beta} \sim T_{\alpha\beta}, \tag{4.7}$$

[1] Os exemplos mais conhecidos na literatura de teorias métricas, além da teoria da relatividade geral de A. Einstein, são a teoria de Brans-Dicke [BrDi 61] e a teoria bimétrica de Rosen [Rose 73].

onde $T_{\alpha\beta}$ representa o tensor de momentum energia da matéria, incluindo, assim, toda forma de energia, exceto aquela de origem gravitacional. Aqui, o símbolo de simetria $(\sim)$ indica que não fixamos o tipo de acoplamento. Ora, o tensor de momentum energia da matéria, provém da variação da ação da matéria com respeito a estrutura métrica, $\gamma_{\mu\nu}$, do espaço tempo de fundo, assim,

$$\delta_\gamma S_M \sim T^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}. \tag{4.8}$$

Entretanto, do princípio de Hamilton, as equações de movimento (4.7), são derivadas do processo de variação da acão total com respeito ao potencial tensor $\phi_{\mu\nu}$, ou seja, a variação da ação da matéria dever ser tal que também satisfaça a este requerimento, i.e.,

$$\delta_\phi S_M \sim T^{\alpha\beta}\delta\phi_{\alpha\beta}. \tag{4.9}$$

Assim, de (4.8) e (4.9), concluímos que a ação de matéria deve ser um funcional dos campos de matéria e da combinação:

$$\gamma_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}. \tag{4.10}$$

Ou seja, de maneira geral S_M deve ser escrita de forma a apresentar a seguinte dependência funcional:

$$S_M = S_M[\psi^\rho;\ \gamma_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}]. \tag{4.11}$$

Desta feita, vamos definir a estrutura métrica (4.10) como a métrica deformada devido à presença do campo gravitacional, e a denotaremos por $g_{\alpha\beta}$,

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \phi_{\alpha\beta}, \tag{4.12}$$

com inversa definida pela operação,

$$g^{\mu\alpha} g_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{4.13}$$

ou ainda,

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - \phi^{\mu\nu} + \phi^{\mu\alpha}\phi_{\alpha\nu} + ..., \tag{4.14}$$

onde pontinhos, (...), indicam que a série continua indefinidamente, embora seja somável, conforme mostraram alguns colegas do CBPF [KlRo 97].

A decomposição do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ em uma soma da métrica do espaço tempo de fundo e um campo tensorial $h_{\alpha\beta}$, ambos não observáveis, sempre pode ser efetuada para teorias que satisfaçam ao princípio de equivalência no que se refere à interação da matéria com a gravitação. A demonstração rigorosa deste procedimento foi realizada por L.P.Grischuck, A.N.Petrov e A.D.Popova [Gris 84] para a teoria da relatividade geral.

Então, com os resultados acima, construímos a ação da matéria de tal forma que

$$S_M = \frac{1}{c}\int d^4x \sqrt{-g}\,\mathcal{L}, \tag{4.15}$$

onde g representa o determinante da métrica $g_{\mu\nu}$,

$$g \equiv \det\left[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}\right] \tag{4.16}$$

e o tensor de momentum energia da matéria, considerado o acoplamento com o campo (potencial), associado a esta ação, é dado por

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\partial g_{\alpha\beta}}. \tag{4.17}$$

Em resumo, o que esta estrutura que acabamos de fundamentar nos diz, é que o espaço tempo prenchido pelo campo gravitacional é deformado pelo mesmo, e quaisquer partículas materiais teste, que nele estejam presentes, sentem uma estrutura métrica efetiva, dada pela relação (4.12), seguindo geodésicas nesta geometria. Ainda mais, na ausência do campo gravitacional, é fácil verificar que a estrutura que emerge é a da relatividade especial. Vemos entãoque esta estrutura satisfaz aos postulados de uma teoria métrica e, consequentemente, assegura a validade do princípio de equivalência – PEE.

Para melhor compreender o que acabamos de realizar, vamos tomar um caso particular de campos de matéria e efetuar o acoplamento com a gravitação de modo a satisfazer ao princípio de equivalência. Consideremos o campo escalar ψ. A ação da matéria para este campo, na ausência de gravitação, é dada por

$$S_{(\psi)} = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\,\psi^{,\alpha}\psi^{,\beta}\gamma_{\alpha\beta}. \tag{4.18}$$

Como já é bem conhecido, para qualquer ação escrita na forma,

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\mathcal{L}, \tag{4.19}$$

podemos definir o tensor de momentum energia associado, $T^{\alpha\beta}$,

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L})}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}. \tag{4.20}$$

Então, de (4.18) e (4.20), o tensor de momentum energia para o campo escalar, $T^{\alpha\beta}_{(\psi)}$, é dado por

$$T^{\alpha\beta}_{(\psi)} = -\frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\left[\frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}\gamma^{\mu\nu} + \sqrt{-\gamma}\,\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}\frac{\partial\gamma^{\mu\nu}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\right]. \tag{4.21}$$

Da relação para a derivada do determinante da métrica, temos:

$$\partial\gamma = \gamma\gamma^{\alpha\beta}\partial\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma\gamma_{\alpha\beta}\partial\gamma^{\alpha\beta}, \tag{4.22}$$

de onde resulta,

$$\partial\sqrt{-\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial\gamma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\gamma_{\alpha\beta}\partial\gamma^{\alpha\beta}. \tag{4.23}$$

E da identidade que segue,

$$\partial\left(\gamma^{\alpha\mu}\gamma_{\mu\beta}\right)=0, \tag{4.24}$$

encontramos:

$$\frac{\partial\gamma^{\mu\nu}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}=-\gamma^{\mu\tau}\gamma^{\nu\sigma}\frac{\partial\gamma_{\tau\sigma}}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}. \tag{4.25}$$

Assim, retornando estes resultados na expressão para o tensor de momentum energia do campo ψ, escrevemos por fim,

$$T^{\alpha\beta}_{(\psi)}=2\psi^{,\alpha}\psi^{,\beta}-\psi^{,\mu}\psi_{,\mu}\gamma^{\alpha\beta}. \tag{4.26}$$

Note que, da mesma forma que em (4.20), poderíamos ter definido o tensor de momentum energia covariante,

$$T_{\alpha\beta}=\frac{2}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\partial\left(\sqrt{-\gamma}\mathcal{L}\right)}{\partial\gamma^{\alpha\beta}}. \tag{4.27}$$

É importante frisar que as variáveis independentes na derivação são as derivadas do campo, $\psi_{,\alpha}$ — com o índice covariante — e a métrica de fundo, $\gamma^{\mu\nu}$ ou $\gamma_{\mu\nu}$.

Voltando à ação (4.18), do princípio de mínima ação, podemos efetuar a variação de $S_{(\psi)}$ com respeito ao campo escalar, ψ, a fim de obtermos a correspondente equação de movimento. Assim trabalhando, resulta

$$\Box\psi=0, \tag{4.28}$$

ou de forma explícita

$$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\left(\sqrt{-\gamma}\,\gamma^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\right)_{,\beta}=0. \tag{4.29}$$

No entanto, no caso do espaço tempo embebido por um campo gravitacional, a métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ se modifica para uma métrica efetiva, $g_{\alpha\beta}$, que corresponde a geometria do espaço tempo deformado pela presença do campo. Assim, no intuito de verificar o princípio de equivalência, os campos de matéria sentem este espaço tempo deformado pela gravitação presente, e as equações de movimento (4.29) devem ser modificadas para a forma:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\psi_{,\alpha}\right)_{,\beta} = 0 \tag{4.30}$$

onde $g \equiv \det[g_{\mu\nu}]$.

Da mesma maneira, o correspondente tensor de momentum energia deve ser dado por

$$T^{(\psi)}_{\alpha\beta} = 2\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta} - \psi^{,\mu}\psi_{,\mu}g_{\alpha\beta}. \tag{4.31}$$

Ou seja, a operação de acoplamento com a gravitação equivale a substituir a métrica do espaço tempo de fundo, que é aquele válido na ausência de campos gravitacionais, pela métrica efetiva do espaço tempo deformado pela presença do campo gravitacional. E esta operação corresponde a efetuarmos a substituição:

$$\gamma_{\alpha\beta} \xrightarrow{grav} g_{\alpha\beta} \tag{4.32}$$

na ação (4.18). Assim, considerando o acoplamento do campo escalar com a gravitação, teremos

$$S_{(\psi)} = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\,\psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{4.33}$$

Vemos que esta expressão para a ação do campo escalar é um caso particular da expressão geral apresentada em (4.15).

Devemos nos deter um pouco na forma da expressão (4.12). A maneira como construímos o acoplamento modifica a teoria em seus resultados. A fim de continuar com uma formulação consistente e que satisfaça ao princípio de equivalência, outras definições poderiam ser operacionalizadas em (4.11). No entanto, escolhemos esta particular estrutura por nos servir mais convenientemente nas aplicações da teoria que estamos nos preparando para formular.

4.4 A Ação Total e as Equações de Movimento

Estamos finalmente preparados para escrever a ação total, S_T, para esta formulação teórica. Como já sabemos, a ação total é escrita como a soma da ação do campo e da matéria. Assim, das definições (4.3) e (4.15) teremos,

$$S_T = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\mathcal{L}(U) + \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_M, \tag{4.34}$$

ou ainda,

$$S_T = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\left[\mathcal{L}(U) + \omega\mathcal{L}_M\right], \tag{4.35}$$

onde definimos,

$$\omega \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-\gamma}}. \tag{4.36}$$

As equações de campo podem ser obtidas utilizando o princípio de Hamilton. Então, tomando a variação de S_T com respeito ao tensor potencial, $\phi_{\mu\nu}$, resulta:

$$\delta_\phi S_T = 0, \tag{4.37}$$

ou, usando a expressão (4.35),

$$\frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\left[\delta\mathcal{L}(U) + \delta\left(\omega\mathcal{L}_M\right)\right] = 0. \tag{4.38}$$

Como $\mathcal{L}(U)$ é função apenas do invariante U, podemos reescrever as variações na forma,

$$\delta\mathcal{L}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U}\delta U. \tag{4.39}$$

Mas, desde que $U = A - B$, introduzindo a expressão (4.6), escrevemos,

$$\delta\mathcal{L}(U) = 2\mathcal{L}_U F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha;\beta}, \tag{4.40}$$

onde $\mathcal{L}_U$ representa a derivada de $\mathcal{L}(U)$ com respeito ao invariante U, ou seja,

$$\mathcal{L}_U = \frac{\partial \mathcal{L}_U}{\partial U}. \tag{4.41}$$

Por outro lado, como a variação está sendo considerada com respeito ao tensor potencial, $\phi_{\alpha\beta}$, resulta:

$$\delta\left(\omega \mathcal{L}_M\right) = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right). \tag{4.42}$$

Mas, como já definimos anteriormente, podemos reescrever (4.42) com ajuda da definição (4.17) como segue:

$$\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.43}$$

Logo,

$$\delta\left(\omega \mathcal{L}_M\right) = -\frac{\omega}{2}T^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \tag{4.44}$$

Ainda mais, segue do acoplamento definido em (4.12) que

$$\delta g_{\alpha\beta} = \delta\phi_{\alpha\beta}. \tag{4.45}$$

Desta maneira, reunindo os resultados encontrados em (4.38), obteremos

$$\frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\left[2\mathcal{L}_U F^{\alpha\beta\mu}\delta\phi_{\mu\alpha;\beta} - \frac{\omega}{2}T^{\alpha\beta}\delta\phi_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{4.46}$$

O primeiro termo, sendo composto por derivadas do potencial, pode ser reescrito, a menos de termos de superfície[2], e resulta ser

$$\frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-\gamma}\left[-2\left(\mathcal{L}_U F^{\alpha\beta\mu}\right)_{;\beta} - \frac{\omega}{2}T^{\alpha\mu}\right]\delta\phi_{\alpha\mu} = 0. \tag{4.47}$$

Como a variação do potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$, é uma quantidade arbitrária, e ainda, considerando que o mesmo é um objeto simétrico, concluímos que o termo entre colchetes deve

[2] Entendemos por termos de superfície, divergências totais, que não contribuem para as equações de movimento.

ser nulo, assim

$$\left[\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}\right]_{;\alpha} = \frac{\omega}{2} T^{\mu\nu}. \tag{4.48}$$

Estas equações constituem as equações de movimento para uma teoria geral construída com o invariante U, de forma tal a obedecer ao princípio de equivalência. Da maneira como construímos, quaisquer partículas teste, desde que de origem não gravitacional, sentem uma estrutura métrica única, deformada pela presença do campo gravitacional. No entanto, a própria interação gravitacional não necessariamente interage consigo própria da mesma maneira como qualquer outra forma de energia o faz. A expressão deste fato se verifica na presença do fator ω nas equações de campo. Voltaremos a este assunto quando for oportuno.

O tensor de momentum energia que aparece em (4.48), foi definido anteriormente, na expressão (4.17). Devemos esclarecer o seguinte fato: construímos este objeto com os índices contravariantes devido a nossa definição do acoplamento, conforme a relação (4.12). Se houvéssemos construído com os índices covariantes, teríamos nos envolvido em problemas matemáticos no que se refere a variação da ação da matéria em termos de $T_{\alpha\beta}$, desde que $g^{\alpha\beta}$ consiste em uma série infinita no potencial tensor. Assim, uma vez admitida a definição (4.17), e desta maneira derivadas as equações de campo, usaremos convenientemente a forma covariante do tensor de momentum energia e a forma mista, com o auxílio da métrica do espaço tempo de fundo, ou seja,

$$T_{\alpha\beta} \equiv T^{\mu\nu}\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta} \tag{4.49}$$

e

$$T_{\alpha}{}^{\beta} \equiv T^{\mu\beta}\gamma_{\mu\alpha}. \tag{4.50}$$

Note que o uso da mesma notação se faz bastante conveniente, uma vez que o objeto que levanta e abaixa os índices é a métrica $\gamma_{\alpha\beta}$. Assim, quando escrevermos as equações de campo na forma covariante — com respeito ao andar dos índices — ou mista, estaremos sempre usando a definição do tensor $T^{\alpha\beta}$, dada em (4.17), e mudando os índices de andar segundo as regras (4.49) e (4.50).

As equações podem ser expressas em termos do objeto linear $G^{(L)}_{\mu\nu}$, introduzido em (2.28). Para isto, vamos operar com a derivada em (4.48), segundo a regra da cadeia,

$$\mathcal{L}_{U,\alpha}F^{\alpha(\mu\nu)} + \mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{;\alpha} = \frac{\omega}{2}T^{\mu\nu}. \tag{4.51}$$

Mas,

$$\mathcal{L}_{U,\alpha} = \mathcal{L}_{UU}U_{,\alpha}, \tag{4.52}$$

onde definimos,

$$\mathcal{L}_{UU} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial U^2}, \tag{4.53}$$

e, finalmente, da expressão (3.13),

$$F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{;\alpha} = -G^{\mu\nu}_{(L)}.$$

Então, reunindo estes resultados em (4.51), resulta:

$$\mathcal{L}_{UU}U_{,\alpha}F^{\alpha(\mu\nu)} - \mathcal{L}_U G^{\mu\nu}_{(L)} = \frac{\omega}{2}T^{\mu\nu}. \tag{4.54}$$

Vamos escolher separar o termo linear no potencial tensor em um lado das equações e manter todos os termos não lineares juntos com o tensor de matéria. Assim procedendo, encontramos,

$$G^{\mu\nu}_{(L)} = \frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}U_{,\alpha}F^{\alpha(\mu\nu)} - \frac{\omega}{2\mathcal{L}_U}T^{\mu\nu}. \tag{4.55}$$

Nesta forma, fica evidente que o caso linear[3] desta teoria geral cai perfeitamente nas

[3]Para o caso linear, i.e., aproximação linear, encontramos:

$$\mathcal{L}_U = const;$$
$$\mathcal{L}_{UU} = 0;$$
$$\omega = 1 + O(\phi),$$

e, desde que $T_{\alpha\beta} \sim \Box\phi_{\alpha\beta}$, teremos:

$$\omega T_{\alpha\beta} \sim T_{\alpha\beta}.$$

equações de Fierz-Pauli, que são também as equações linearizadas da relatividade geral.

4.5 O Tensor de Momentum Energia do Campo Gravitacional

Já vimos em (4.20), associado a uma ação qualquer, escrita na forma (4.19), como podemos definir o tensor de momentum energia associado. Desta maneira, o tensor de momentum energia do campo gravitacional, que denotaremos por $t_{\mu\nu}$, pode ser construído com o auxílio das equações (4.3) e (4.1), de onde definimos,

$$t_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial [\sqrt{-\gamma}\mathcal{L}(U)]}{\partial \gamma^{\mu\nu}}. \tag{4.56}$$

Assim, expandindo a derivação pela regra de Leibnitz,

$$t_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \mathcal{L}(U) + 2\frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial \gamma^{\mu\nu}}. \tag{4.57}$$

Usando a relação (4.23), encontramos que a derivação aparecendo no primeiro termo da expressão acima pode ser reescrita, resultando em:

$$\frac{\partial\sqrt{-\gamma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\gamma}\,\gamma_{\mu\nu}, \tag{4.58}$$

onde utilizamos,

$$\frac{\partial \gamma^{\alpha\beta}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\delta^{(\alpha}{}_{\mu}\delta^{\beta)}{}_{\nu}. \tag{4.59}$$

Assim, as equações para o caso linear são dadas por:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} + O(\phi^2).$$

Segue então que o tensor de momentum energia da gravitação, com a ajuda destes resultados, é dado por

$$t_{\mu\nu} = -\mathcal{L}(U)\gamma_{\mu\nu} + 2\frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial \gamma^{\mu\nu}}. \tag{4.60}$$

No entanto, desde que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U)$, podemos expandir a derivada que aparece no último termo de (4.60),

$$\frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = \mathcal{L}_U \frac{\partial U}{\partial \gamma^{\mu\nu}} \tag{4.61}$$

ou ainda, das definições de U e do tensor campo gravitacional, encontramos:

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = 2\left(F^{\sigma\tau\rho}\frac{\partial F_{\sigma\tau\rho}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} - F^{\sigma}\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}}\right) + 2F_{\mu}{}^{\rho\sigma}F_{\nu\rho\sigma} + F_{\tau\sigma\mu}F^{\tau\sigma}{}_{\nu} - F_{\mu}F_{\nu}. \tag{4.62}$$

No primeiro termo entre parênteses, se usarmos a definição de $F_{\alpha\beta\gamma}$ e notando que o objeto $\phi_{\alpha\beta;\gamma}$ é independente de $\gamma^{\mu\nu}$, no que se refere a derivação, podemos reescrevê-lo mais convenientemente na forma,

$$F^{\sigma\tau\rho}\frac{\partial F_{\sigma\tau\rho}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = F^{\sigma}\frac{\partial F_{\sigma}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} + F^{\sigma\tau\rho}F_{\sigma}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial \gamma^{\mu\nu}}. \tag{4.63}$$

Assim, se substituirmos (4.63) em (4.62),

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = 2F^{\sigma\tau\rho}F_{\sigma}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial \gamma^{\mu\nu}} + 2F_{\mu}{}^{\rho\sigma}F_{\nu\rho\sigma} + F_{\tau\sigma\mu}F^{\tau\sigma}{}_{\nu} - F_{\mu}F_{\nu}. \tag{4.64}$$

Resta-nos resolver o primeiro termo do lado direito da expressão acima. Para tanto, usando a relação derivada em (4.25), poderemos escrever

$$\partial \gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}\partial \gamma^{\alpha\beta}. \tag{4.65}$$

Desta feita, retornando este resultado em (4.64) e usando (4.59), resulta finalmente

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma^{\mu\nu}} = -F^{\sigma}{}_{(\mu\nu)}F_{\sigma} + 2F_{\mu}{}^{\rho\sigma}F_{\nu\rho\sigma} + F_{\rho\sigma\mu}F^{\rho\sigma}{}_{\nu} - F_{\mu}F_{\nu}. \tag{4.66}$$

Então, se introduzirmos (4.66) e (4.61) em (4.60), encontramos a seguinte expressão para o tensor de momentum energia do campo gravitacional,

$$t_{\mu\nu} = -\mathcal{L}(U)\gamma_{\mu\nu} + 2\mathcal{L}_U \left[2F_\mu{}^{\rho\sigma} F_{\nu\rho\sigma} + F_{\rho\sigma\mu} F^{\rho\sigma}{}_\nu - F^\sigma{}_{(\mu\nu)} F_\sigma - F_\mu F_\nu\right]. \tag{4.67}$$

Note que (4.67) se trata de uma expressão exata para a descrição da energia do campo, no que tange uma teoria construída desta maneira. Além desta forma, poderíamos derivar, equivalentemente, o tensor de momentum energia diretamente do princípio variacional. Como pode-se facilmente verificar, associado a uma dada Lagrangeana, existe uma quantidade conservada, ou seja, que tem divergência nula, e é dada pela seguinte expressão:

$$\mathcal{T}^\alpha{}_\beta = \phi_{\mu\nu;\beta} \frac{\partial \mathcal{L}(U)}{\partial \phi_{\mu\nu;\alpha}} - \delta^\alpha{}_\beta \mathcal{L}(U). \tag{4.68}$$

Obviamente que as duas definições para o tensor de momentum energia devem equivaler, quando no cálculo da energia do campo. Vamos procurar derivar a expressão para $\mathcal{T}^\alpha{}_\beta$ e estudar o balanço de momentum energia entre o campo gravitacional e a matéria. Usando os resultados que já apresentamos em nossa dissertação, é direto obter-se a forma explícita de (4.68), que apresentamos a seguir:

$$\mathcal{T}^\alpha{}_\beta = -\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)} \phi_{\mu\nu;\beta} - \delta^\alpha{}_\beta \mathcal{L}(U). \tag{4.69}$$

Este tensor, como afirmamos anteriormente, consiste em uma quantidade conservada, referente ao campo gravitacional. No entanto, quando na presença de fontes materiais, haverá um fluxo de energia entre o campo e a matéria. Vamos então, procurar pela expressão que traduz esta idéia. Se tomarmos a divergência de (4.69), encontraremos

$$\mathcal{T}^\alpha{}_{\beta;\alpha} = -\left[\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}\right]_{;\alpha} \phi_{\mu\nu;\beta} - \mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)} \phi_{\mu\nu;\alpha\beta} - \mathcal{L}(U)_{,\beta}. \tag{4.70}$$

Mas, a derivada da Lagrangeana pode ser reescrita em termos de seu argumento, na forma,

$$\mathcal{L}_{,\beta} = \mathcal{L}_U U_{,\beta} = -\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)} \phi_{\mu\nu;\alpha\beta} \tag{4.71}$$

de onde, retornando a (4.70),

$$\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = -\left[\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}\right]_{;\alpha} \phi_{\mu\nu;\beta}. \tag{4.72}$$

Podemos notar que o lado direito de (4.72) contém as equações de movimento (4.48). Desta maneira introduzindo estas equações em (4.72), encontramos que o balanço de energia é governado pela equação:

$$\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\beta;\alpha} = -\frac{\omega}{2} T^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu;\beta}. \tag{4.73}$$

Para o caso de não haver fontes materiais, o tensor de momentum energia do campo gravitacional se conserva, como já esperávamos.

4.6 Propagação das Descontinuidades do Campo Gravitacional

A fim de melhor compreender do que trataremos a seguir, vamos investigar qualitativamente um exemplo bastante comum ao nosso conhecimento a respeito de propagação de ondas. Consideremos uma carga elétrica acelerada a partir do repouso, em um dado tempo $t = t_0$. O campo eletromagnético produzido por esta carga será inicialmente estático (para $t < t_0$), passando mais tarde para uma configuração variável (para $t > t_0$). Desta forma, haverão duas regiões distintas do espaço tempo onde o campo será estático ou variável. A fronteira entre estas regiões, nós denotaremos pela hipersuperfície Σ, a qual é entendida como o cone de luz futuro ao ponto do espaço tempo representando a posição da partícula para o tempo $t = t_0$. Como já sabemos, carga acelerada emite radiação sob forma de ondas eletromagnéticas, então, a hipersuperfície Σ, representa a frente de onda da radiação emitida pela partícula acelerada.

Para ser mais preciso, a hipersuperfície Σ é caracterizada pelas descontinuidades das derivadas do vetor potencial eletromagnético através dela (Σ). Este fato é facilmente entendido se lembrarmos que no caso estático, para o qual $t < t_0$, todas as derivadas do vetor potencial (A_μ) são nulas, enquanto na configuração de campo variável isto não se verifica. As descontinuidades das derivadas do vetor potencial através de Σ são determinadas pelas equações de movimento, que para este caso são as equações de Maxwell. Ainda mais, como estas descontinuidades são levadas pela superfície Σ, e representam a frente de onda da radiação emitida, nós a denotaremos por *ondas de choque* sobre tal superfície.

O problema das ondas de choque são tratadas detalhadamente dos trabalhos de: (i) J. Hadamard [Hada 52], onde é formalizado o problema matemático da evolução das características e o problema de Cauchy; (ii) J. Plebanski [Pleb 70], no caso da propagação de descontinuidades em teorias não lineares para o eletromagnetismo; e (iii) A. Papapetrou [Papa 74] para o caso das ondas de choque gravitacionais na teoria da relatividade geral. Uma apresentação alternativa e bastante didática deste problema pode ser encontrada na tese de doutorado de L. R. Freitas [Frei 91]. Veja também as referências [NDL 97, NDE 97a].

4.6.1 Ondas de Choque Gravitacionais

Como já vimos em seções anteriores, mesmo que para o caso geral, a teoria do campo gravitacional foi construída de tal maneira que as equações de campo possuem no máximo derivadas primeiras do tensor campo gravitacional, $F_{\alpha\beta\mu}$. Para o caso livre de fontes materiais, as equações de movimento são dadas por,

$$\left[\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}\right]_{;\alpha} = 0. \tag{4.74}$$

Desta maneira, as ondas de choque associadas à propagação imposta por esta equação tensorial será de ordem $n = 1$. No entanto, $F_{\alpha\beta\mu}$ é composto pelas derivadas primeiras do tensor potencial, $\phi_{\alpha\beta}$. Assim, com respeito a este segundo objeto, as ondas de choque devem ser de ordem $n = 2$. A fim de determinar a propagação do campo gravitacional, podemos trabalhar equivalentemente com qualquer dos objetos tensoriais. Então, vamos escolher o tensor potencial gravitacional para construir o método e fixar a notação, após isto feito, vamos retornar ao formalismo com o tensor campo gravitacional para determinar a propagação das ondas, uma vez que compactificará enormemente os cálculos necessários para tal fim.

Seja a hipersuperfície Σ, definida pela equação

$$z(x^\alpha) = 0. \tag{4.75}$$

O espaço tempo é dividido por Σ em duas regiões distintas:

$$U^-(z < 0) \tag{4.76}$$

$$U^+(z > 0). \tag{4.77}$$

Dada uma função arbitrária das coordenadas, $f(x^\alpha)$, a sua descontinuidade através de Σ é definida pela operação:

$$[f]_\Sigma = \lim_{\{P^+;P^-\}\to P}\{f(P^+) - f(P^-)\} \tag{4.78}$$

onde denotamos os pontos P^+, P^- e P como pertencentes a U^+, U^- e Σ, respectivamente. Uma vez fixada esta notação, as relações que devem caracterizar as ondas de choque gravitacionais de ordem $n = 2$, serão:

$$[\phi_{\alpha\beta}]_\Sigma = 0, \tag{4.79}$$

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu}]_\Sigma = 0, \tag{4.80}$$

e

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu\nu}]_\Sigma \neq 0, \tag{4.81}$$

para ao menos algum $\phi_{\alpha\beta,\mu\nu}$. Vamos escolher um conjunto auxiliar de variáveis $\{\tilde{x}^\alpha\}$ definidas na visinhança da hipersuperfície Σ, de tal forma que denotaremos

$$\tilde{x}^0 = z(x^\alpha), \tag{4.82}$$

$$\tilde{x}^i = f^i(x^\alpha). \tag{4.83}$$

Lembramos que índices latinos indicam as componentes espaciais, somente. Vamos impor que as funções $z(x^\alpha)$ e $f^i(x^\alpha)$ tenham derivadas continuas até ordem 2, e também que a transformação do conjunto $\{x^\alpha\}$ para o conjunto $\{\tilde{x}^\alpha\}$ seja não singular, ou seja,

$$\det\left[\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right] \neq 0. \tag{4.84}$$

Desde que $\tilde{x}^i$ representam coordenadas sobre Σ, teremos como consequência o seguinte fato: seja F uma função das coordenadas $\tilde{x}^\lambda$: $F = F(\tilde{x}^\lambda)$. Se F for uma função contínua sobre Σ e tiver derivadas espaciais,

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{x}^k}\, , \;\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{x}^k \tilde{x}^l}\, , \;\cdots \tag{4.85}$$

então, estas derivadas serão contínuas sobre Σ, ou seja,

$$\left[F_{,\tilde{k}}\right]_\Sigma = 0\ ,\ \left[F_{,\tilde{k}\tilde{l}}\right]_\Sigma = 0\ ,\ \cdots \tag{4.86}$$

Esquematicamente teremos: se $F = F(\tilde{x}^\lambda)$, então,

$$[F]_\Sigma = 0 \;\Rightarrow\; \left[F_{,\tilde{k}}\right]_\Sigma = 0\ ,\ \left[F_{,\tilde{k}\tilde{l}}\right]_\Sigma = 0\ ,\ \cdots \tag{4.87}$$

Desta maneira, das condições (4.79) a (4.81), podemos escrever que:

i) de (4.79):

$$[\phi_{\alpha\beta}]_\Sigma = 0 \;\Rightarrow\; \left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{k}}\right]_\Sigma = 0\;,\;\left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{k}\tilde{l}}\right]_\Sigma = 0\;,\;\cdots \tag{4.88}$$

ii) de (4.80):

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu}]_\Sigma = 0 \;\Rightarrow\; \left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{0}}\right]_\Sigma = 0\;,\;\left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{0}\tilde{k}}\right]_\Sigma = 0\;,\;\cdots \tag{4.89}$$

Finalmente, de (4.81), encontramos que, usando (4.88) e (4.89), só nos restará uma componente das derivadas que não anulará a relação (4.81), qual seja:

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu\nu}]_\Sigma \neq 0 \;\Rightarrow\; \left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{0}\tilde{0}}\right]_\Sigma \neq 0, \tag{4.90}$$

que pode ser reescrita mais convenientemente como,

$$\left[\phi_{\alpha\beta,\tilde{0}\tilde{0}}\right]_\Sigma = \left[\frac{\partial^2\phi_{\alpha\beta}}{\partial z^2}\right]_\Sigma \equiv \varphi_{\alpha\beta} \neq 0, \tag{4.91}$$

onde $\varphi_{\alpha\beta}$ são certos coeficientes que chamaremos de tensor das descontinuidades. Vamos procurar encontrar a partir de (4.91), uma maneira de explicitar a descontinuidade (4.81) fazendo uso dos resultados acima obtidos.

Primeiramente, vamos escrever (4.81) de maneira a relacionar as coordenadas $\{x^\alpha\}$ com o conjunto auxiliar $\{\tilde{x}^\alpha\}$. Do cálculo diferencial elementar, encontramos a seguinte regra,

$$\phi_{\alpha\beta,\mu} = \frac{\partial\phi_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial\phi_{\alpha\beta}}{\partial\tilde{x}^\rho}\frac{\partial\tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu}. \tag{4.92}$$

Então, tomando a derivada segunda, segue:

$$\phi_{\alpha\beta,\mu\nu} = \phi_{\alpha\beta,\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\frac{\partial\tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial\tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} + \phi_{\alpha\beta,\tilde{\rho}}\frac{\partial^2\tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu\partial x^\nu}. \tag{4.93}$$

Se considerarmos a descontinuidade desta relação diferencial através da hipersuperfície Σ, e usarmos os resultados (4.88), (4.89) e (4.91), resulta

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu\nu}]_\Sigma = \varphi_{\alpha\beta}\frac{\partial z}{\partial x^\mu}\frac{\partial z}{\partial x^\nu}. \tag{4.94}$$

Entretanto, as derivadas $\partial z/\partial x^\lambda$ representam gradientes sobre a hipersuperfície Σ, e são vetores normais a esta hipersuperfície. Estes objetos serão chamados de vetores de propagação, e denotá-los-emos pela expressão:

$$k_\alpha \equiv \frac{\partial z}{\partial x^\alpha}. \tag{4.95}$$

Assim, de (4.94):

$$[\phi_{\alpha\beta,\mu\nu}]_\Sigma = \varphi_{\alpha\beta} k_\mu k_\nu. \tag{4.96}$$

Como dissemos anteriormente, a propagação das ondas de choque para cada caso particular é determinada pelas equações de campo. Para o campo gravitacional, dentro do quadro que vimos montando neste trabalho, as equações que determinam a propagação das ondas de choque da radiação gravitacional são dadas por (4.74). Podemos proceder a este cálculo tomando a descontinuidade das equações de campo e usando diretamente a relação (4.96). Neste caso, precisaríamos expandir estas equações em termos do potencial tensor $\phi_{\alpha\beta}$, e resultaria em um complicado sistema a resolver. Contudo, podemos fazer uso do próprio tensor campo gravitacional, $F_{\alpha\beta\gamma}$, que compactificará enormemente as equações, permitindo-nos passar ao largo de alguma confusão algébrica. Desta feita, precisamos derivar as relações de descontinuidade deste objeto.

Do que estudamos anteriormente, vemos que, como $F_{\alpha\beta\mu}$ é função das derivadas primeiras de $\phi_{\alpha\beta}$, sua descontinuidade através de Σ é nula, ou seja,

$$[F_{\alpha\beta\mu}]_\Sigma = 0. \tag{4.97}$$

No entanto, sua primeira derivada é função das segundas derivadas do potencial tensor, logo, podemos escrever de forma compacta:

$$[F_{\alpha\beta\mu,\nu}]_\Sigma = f_{\alpha\beta\mu} k_\nu, \tag{4.98}$$

onde $f_{\alpha\beta\mu}$ é o tensor das descontinuidades do campo gravitacional e k_μ, como antes definido, é o vetor de propagação do campo — normal a hipersuperfície de descontinuidade, Σ.

Antes de operar com as equações de campo, vamos obter algumas relações úteis ao nosso proceder. Da identidade (3.10), obtemos

$$[F_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{,\mu}]_{\Sigma} = 0, \tag{4.99}$$

logo,

$$f_{\alpha\beta\mu}k^{\mu} = 0. \tag{4.100}$$

Note que o objeto $f_{\alpha\beta\mu}$ possue as mesmas simetrias do campo $F_{\alpha\beta\mu}$. Vamos definir o traço,

$$f_{\alpha\beta}{}^{\beta} \equiv f_{\alpha}, \tag{4.101}$$

então a descontinuidade da derivada do traço do tensor campo será dada por,

$$[F_{\alpha,\mu}]_{\Sigma} = f_{\alpha}k_{\mu}. \tag{4.102}$$

Da mesma forma como operamos com (3.10), se tomarmos a descontinuidade da identidade (3.18), encontramos,

$$f_{\alpha\beta}{}^{\lambda}k_{\gamma} + f_{\beta\gamma}{}^{\lambda}k_{\alpha} + f_{\gamma\alpha}{}^{\lambda}k_{\beta} = \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\alpha}f_{\gamma]}k_{\beta} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\beta}f_{\alpha]}k_{\gamma} + \frac{1}{2}\delta^{\lambda}{}_{[\gamma}f_{\beta]}k_{\alpha}. \tag{4.103}$$

A fim de obtermos uma equação escalar, vamos contrair esta expressão com o produto $F^{\alpha\beta\lambda}k^{\gamma}$, o que resulta em:

$$(\eta - \zeta)\,k^2 + 2\,F^{\alpha\beta\lambda}f_{\beta\gamma\lambda}k_{\alpha}k^{\gamma} + F^{\alpha\beta\lambda}f_{\alpha}k_{\beta}k_{\lambda} + F^{\beta}f^{\gamma}k_{\beta}k_{\gamma} = 0, \tag{4.104}$$

onde definimos,

$$\eta \;\equiv\; F^{\alpha\beta\lambda}f_{\alpha\beta\lambda} \tag{4.105}$$

$$\zeta \equiv F^{\alpha} f_{\alpha} \tag{4.106}$$

e por k^2, entendemos,

$$k^2 \equiv k^{\alpha} k_{\alpha}. \tag{4.107}$$

Uma vez obtidas estas relações, passemos ao estudo da propagação das descontinuidades do campo gravitacional. Primeiramente, vamos reescrever as equações de campo para o vazio, mais convenientemente para os nossos fins, na forma

$$2\mathcal{L}_{UU}\left(F^{\sigma\tau\rho} F_{\sigma\tau\rho,\alpha} - F^{\sigma} F_{\sigma,\alpha}\right) F^{\alpha(\mu\nu)} + \mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}{}_{,\alpha} = 0. \tag{4.108}$$

Então, tomando a descontinuidade desta equação através de Σ, e usando as definições (4.105) e (4.106), resulta:

$$2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left(\eta - \zeta\right) F^{\alpha(\mu\nu)} k_{\alpha} + f^{\alpha(\mu\nu)} k_{\alpha} = 0, \tag{4.109}$$

e daqui, se tomarmos o traço desta equação com respeito aos índices simetrizados, obteremos,

$$-2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left(\eta - \zeta\right) F^{\alpha} k_{\alpha} = f^{\alpha} k_{\alpha}. \tag{4.110}$$

Vamos procurar eliminar a dependência nos coeficientes $f_{\alpha\beta\mu}$ e f_{α} nas equações (4.104) e (4.109), no intuito de obtermos uma relação que descreva a propagação do vetor de onda, k_{μ}, em termos dos campos conhecidos. Podemos operar diretamente com as equações de campo ou, mais facilmente, com a identidade (4.104), de qualquer modo, necessitaremos trabalhar com estas duas relações.

O último termo que aparece em (4.104), já pode ser diretamente resolvido por intermédio da equação (4.110),

$$F^{\beta} f^{\gamma} k_{\beta} k_{\gamma} = -2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left(\eta - \zeta\right) F^{\alpha} F^{\beta} k_{\alpha} k_{\beta}, \tag{4.111}$$

restando assim, os termos segundo e terceiro desta mesma equação. Vamos resolvê-los separadamente.

Primeiramente, o segundo termo em (4.104), pode ser facilmente reescrito: usando a propriedade cíclica de $f_{\alpha\beta\gamma}$,

$$f_{\{\alpha\beta\gamma\}} = 0, \tag{4.112}$$

e da relação apresentada em (4.100), encontramos,

$$2\, F^{\alpha\beta\lambda} f_{\beta\gamma\lambda} k_\alpha k^\gamma = -F^{\alpha\beta\lambda} f_{\gamma(\beta\lambda)} k_\alpha k^\gamma. \tag{4.113}$$

Como vemos, o termo no lado direito desta relação, pode ser comparado com as equações de campo, derivadas na forma (4.109), fornecendo assim,

$$2\, F^{\alpha\beta\lambda} f_{\beta\gamma\lambda} k_\alpha k^\gamma = 2 \frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U} (\eta - \zeta)\, F^{\alpha\beta\lambda} F_{\gamma(\beta\lambda)} k_\alpha k^\gamma. \tag{4.114}$$

Por fim, vamos procurar transformar convenientemente o termo que resta em (4.104).

Se contrairmos as equações de campo, (4.109), com k_ν:

$$2 \frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U} (\eta - \zeta)\, F^{\alpha(\mu\nu)} k_\alpha k_\nu + f^{\alpha(\mu\nu)} k_\alpha k_\nu = 0, \tag{4.115}$$

ou explicitando a simetria em $f_{\alpha\beta\gamma}$,

$$2 \frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U} (\eta - \zeta)\, F^{\alpha(\mu\nu)} k_\alpha k_\nu = -f^{\alpha\mu\nu} k_\alpha k_\nu - f^{\alpha\nu\mu} k_\alpha k_\nu. \tag{4.116}$$

Porém, de (4.100) e da propriedade de antissimetria de $f_{\alpha\beta\mu}$, vemos que o lado direito desta relação se anula identicamente, fornecendo a solução:

$$F^{\alpha(\mu\nu)} k_\alpha k_\nu = 0, \tag{4.117}$$

ou ainda, desde que $F^{\alpha\mu\nu}$ é antissimétrico no primeiro par de índices:

$$F^{\mu\alpha\nu} k_\alpha k_\nu = 0, \tag{4.118}$$

donde resulta,

$$F^{\alpha\beta\lambda} f_\alpha k_\beta k_\lambda = 0. \tag{4.119}$$

Desta feita, retornando os resultados, (4.111), (4.114) e (4.119) na equação (4.104), encontramos:

$$(\eta - \zeta)\, k^2 + 2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}(\eta - \zeta)\, F^{\alpha\beta\lambda} F_{\gamma(\beta\lambda)} k_\alpha k^\gamma - 2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}(\eta - \zeta)\, F^\alpha F^\beta k_\alpha k_\beta = 0, \tag{4.120}$$

que pode ser apresenta na interessante forma[4]:

$$\left\{\gamma^{\mu\nu} + 2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left[F^{\mu\alpha\beta} F^\nu{}_{(\alpha\beta)} - F^\mu F^\nu\right]\right\} k_\mu k_\nu = 0. \tag{4.121}$$

Esta é a equação que governa a propagação das descontinuidades do campo gravitacional.

Podemos interpretá-la da seguinte maneira. O vetor de propagação, k_μ, é um vetor nulo em uma geometria efetiva, distinta da Minkowskiana, que depende da distribuição do campo e da dinâmica em questão — consequentemente, da Lagrangeana. Assim, vamos definir esta geometria efetiva, $\tilde{g}^{\mu\nu}$:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + 2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left[F^{\mu\alpha\beta} F^\nu{}_{(\alpha\beta)} - F^\mu F^\nu\right] \tag{4.122}$$

com inversa $\tilde{g}_{\mu\nu}$ definida pela operação:

$$\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \tag{4.123}$$

Usando esta nomenclatura, podemos reescrever a equação de propagação na forma,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0. \tag{4.124}$$

[4]Note que retornamos à forma geral, válida em qualquer sistema de coordenadas, com métrica $\gamma_{\mu\nu}$

Por conveniência de notação, definiremos a quantidade $\Lambda^{\mu\nu}$,

$$\Lambda^{\mu\nu} \equiv 2\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U}\left[F^{\mu\alpha\beta}F^{\nu}{}_{(\alpha\beta)} - F^{\mu}F^{\nu}\right], \tag{4.125}$$

e a expressão para a geometria efetiva toma a forma final,

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu}. \tag{4.126}$$

Como mostramos acima, k_μ é um vetor nulo na geometria efetiva $\tilde{g}^{\mu\nu}$. A equação (4.124) pode ser reescrita como:

$$\tilde{k}^{\mu}k_{\mu} = 0 \tag{4.127}$$

onde usamos a métrica $\tilde{g}^{\mu\nu}$ para levantar e abaixar índices:

$$\tilde{k}^{\mu} = \tilde{g}^{\mu\nu}k_{\nu}. \tag{4.128}$$

Se tomarmos a derivada covariante, na métrica efetiva $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ — denotaremos pelo símbolo ; ; —, da relação (4.127), obteremos

$$\tilde{k}^{\mu}k_{\mu;;\nu} = 0. \tag{4.129}$$

Mas, desde que o vetor k_μ é um vetor gradiente, resulta:

$$\tilde{k}^{\mu}k_{\nu;;\mu} = 0, \tag{4.130}$$

ou seja, as trajetórias das ondas associadas ao vetor k_μ são geodésicas nulas da geometria efetiva $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

O que aprendemos nesta seção é que as ondas gravitacionais, para a classe de teorias compatíveis com o formalismo que vimos desenvolvendo, se propagam em um espaço tempo deformado pela presença do campo gravitacional, com estrutura geométrica dada pela relação (4.126). Note que, do princípio de equivalência, estabelecemos que toda partícula material (de origem não gravitacional) se propaga em um espaço tempo determinado pela métrica $g_{\mu\nu}$, definida por (4.12). Assim, ondas gravitacionais enxergam uma estrutura de espaço tempo distinta da estrutura de propagação de qualquer outra partícula ou interação.

Capítulo 5

Um Modelo para a Descrição do Campo

Nas seções anteriores tratamos da construção de um cenário geral que enquadrasse teorias para a descrição do campo gravitacional. Neste cenário, grande parte da teoria da relatividade geral foi incorporada ao formalismo, naturalmente, pela aceitação da universalidade da interação gravitacional com outros tipos de interações — que não a própria gravitação. Assim sendo, acreditamos ter incluído naquela formulação o princípio de equivalência Einsteiniano bem como suas consequências observacionais. No entanto, não extrapolamos a aplicabilidade deste princípio no que diz respeito a interação gravitação-gravitação. Como consequência primeira desta escolha, obtemos que a estrutura geométrica percebida pela própria interação gravitacional, por exemplo sob forma de ondas gravitacionais, difere daquela sentida por qualquer outra partícula ou interação, como ondas eletromagnéticas por exemplo.

Neste capítulo vamos especificar um exemplo particular para a descrição do campo gravitacional e examinar suas propriedades no que diz respeito às predições observacionais para este processo. A intenção em se propor um modelo consiste no estudo de suas propriedades gerais, apresentando sua aplicabilidade aos fenômenos já catalogados e apontando quais predições diferem daquelas já realizadas por outras teorias da gravitação, em especial pela teoria da relatividade geral. A menos dos testes que envolvem tão somente o acoplamento do campo gravitacional com a matéria, podemos apontar desde já que uma teoria qualquer fundamentada nos preceitos gerais que estabelecemos neste trabalho, apresentará uma estrutura de propagação distinta daquela apresentada pela relatividade geral, no que se refere a propagação das ondas gravitacionais.

5.1 O Modelo

Nosso critério de escolha será a procura de um modelo que satisfaça aos requerimentos gerais construídos no capítulo 4, e que satisfaça aos testes observacionais clássicos do campo gravitacional. Vamos convergir nossas atenções para o seguinte modelo para a densidade de Lagrangeana do campo,

$$\mathcal{L} = \frac{b^2}{k_o}\left\{\sqrt{1 - \frac{U}{b^2}} - 1\right\}. \tag{5.1}$$

Como podemos facilmente notar, a inspiração para tal escolha provém da teoria não linear para o eletromagnetismo, proposta por Born e Infeld no começo do século (Veja as referências [Born 33, Born 34, BoIn 34]). Em verdade esta construção, para ser conforme com o modelo de Born-Infeld, deveria incluir o quadrado do pseudo invariante do campo gravitacional. No entanto, prosseguiremos sem a inclusão deste objeto, apenas por critério de simplicidade, como já discutimos no capítulo anterior. Caso tenhamos algum problema com as predições observacionais realizadas pelo mesmo e se estes eventuais problemas se reportarem à ausência do pseudo invariante, então, acharemos este um bom motivo para reformular a teoria, incluindo este objeto.

O parâmetro b que aparece em (5.1) é arbitrário e tem dimensão de inverso de comprimento, isto é,

$$[b] = \frac{1}{L}, \tag{5.2}$$

como pode ser entendido facilmente se lembrarmos que estamos assumindo o potencial tensor adimensional. Em outras palavras, o invariante U tem dimensão de inverso de quadrado de comprimento:

$$[U] = \frac{1}{L^2}. \tag{5.3}$$

A constante, κ_0, que aparece no denominador do fator multiplicativo, deve ter dimensão tal que a dimensão da densidade de Lagrangeana, $\mathcal{L}$, seja de densidade de energia, como é usual. Assim, concluímos que κ_0 deve ter dimensão de inverso de força:

$$[\kappa_0] = \frac{T^2}{ML} = \left\{\frac{1}{\text{força}}\right\}, \tag{5.4}$$

da mesma forma como encontramos em (2.11), para a constante de acoplamento, κ, da teoria linear.

O valor da constante b é arbitrário, mas devemos assumir que seja tal que obdeça à condição:

$$b >> 1,$$

a fim de que tenhamos o bom limite linear para este modelo. Então, se expandirmos a densidade de Lagrangeana em termos deste parâmetro, encontraremos,

$$\mathcal{L} \approx -\frac{U}{2\kappa_0} + O(U^2). \tag{5.5}$$

Assim como esperávamos de (4.4), para que o limite seja a teoria de Fierz-Pauli para campos de spin 2. A determinação do valor exato desta constante, b, poderá ser efetuada quando confrontarmos esta teoria com a observação, claro que com algum teste específico, como por exemplo problemas de estrutura interior, similarmente à solução de Tolman para o caso de simetria esférica realizado para a relatividade geral. De qualquer forma, não fixaremos o valor de b neste trabalho, deixando-o em aberto para futuras investigações. Será suficiente para nós, admitir a validade do limite acima.

Antes de prosseguir na análise desta teoria, vamos derivar algumas relações úteis a cálculos futuros.

A derivada de $\mathcal{L}$ com respeito ao invariante U é dada por:

$$\mathcal{L}_U = -\frac{1}{2\kappa_0}\left(1 - \frac{U}{b^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.6}$$

E a derivada segunda é dada por:

$$\mathcal{L}_{UU} = -\frac{1}{4\kappa_0 b^2}\left(1 - \frac{U}{b^2}\right)^{-3/2}. \tag{5.7}$$

Destes resultados, podemos cálcular a razão entre as derivadas, $\mathcal{L}_{UU}/\mathcal{L}_U$, que é expressa por

$$\frac{\mathcal{L}_{UU}}{\mathcal{L}_U} = -\frac{1}{2b^2}\left(1 - \frac{U}{b^2}\right)^{-1}. \tag{5.8}$$

Devemos passar à análise da consistência deste modelo com os efeitos observacionais, ou seja, proceder a comparação das predições teóricas com os dados experimentais dos testes já realizados para este tipo de interação. Primeiramente, qualquer teoria que se proponha à descrição do campo gravitacional deve apresentar, em seu contexto, a teoria Newtoniana como primeira aproximação. Passemos então ao estudo desta aproximação para o nosso modelo.

5.2 O Limite Newtoniano

A teoria clássica Newtoniana para o efeito gravitacional, consiste em um modelo com validade restrita para uma estrutura de campo fraco e para um regime de baixas velocidades. Assim, devemos proceder a este limite derivando as equações de movimento das partículas materiais satisfazendo a estas duas condições. Primeiramente, vamos obter a expressão para estas equações considerando o caso de campo fraco, mas mantendo a forma relativista das mesmas. A seguir, efetuaremos o limite de baixas velocidades e compararemos os resultados com os equivalentes na teoria de Newton.

5.2.1 Equações de Movimento para Partículas Materiais

As equações de movimento, assim como estão escritas em (4.55), podem ser expandidas em ordens do potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$, como segue:

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\frac{\omega}{2}\left[-2\kappa_0 + O(\phi^2)\right] T_{\mu\nu} + O(\phi^3), \tag{5.9}$$

onde o termo entre colchetes representa a expansão de $1/\mathcal{L}_U$,

$$\mathcal{L}_U^{-1} \approx -2\kappa_0 + O(\phi^2).$$

O último termo das equações (4.55) começam a contribuir para as equações de movimento a partir da ordem $O(\phi^3)$, e está representado desta mesma maneira em (5.9). Devemos notar ainda que o tensor de momentum energia da matéria é de ordem $O(\phi)$. Por este motivo que na expansão do fator multiplicativo, $1/\mathcal{L}_U$, nós desprezamos o termo da ordem de $O(\phi^2)$, uma vez que multiplicado por $T_{\mu\nu}$ resultaria em ordem maior. Falta ainda explicitar a forma da função ω, para isto, vamos escrevê-la de forma explícita, conforme sua definição apresentada no capítulo anterior, isto é:

$$\omega = \frac{\sqrt{-\det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}]}}{\sqrt{-\det[\gamma_{\mu\nu}]}}, \tag{5.10}$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$, como usual, representa a métrica de Minkowski em coordenadas curvilíneas arbitrárias. Para uma configuração de campo fraco, podemos estabelecer que

$$\phi_{\mu\nu} \ll 1, \tag{5.11}$$

assim, o determinante da soma pode ser desenvolvido em séries na seguinte forma,

$$\det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}] = \det[\gamma_{\mu\nu}] + \phi_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\left(\det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}]\right) + O(\phi^2). \tag{5.12}$$

Mas, de (4.22), podemos escrever a diferencial do determinante acima como:

$$\partial \det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}] = \det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}]\,(\gamma^{\sigma\tau} - \phi^{\sigma\tau})\,\partial\,(\gamma_{\sigma\tau} + \phi_{\sigma\tau}) + O(\phi^2). \tag{5.13}$$

Então, considerando a derivação com respeito a métrica de fundo, $\gamma_{\mu\nu}$, e mantendo apenas os termos que, multiplicados por $\phi_{\alpha\beta}$, conforme mostra a equação (5.12), contribuirão na ordem de grandeza desejada, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{\alpha\beta}}\left(\det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}]\right) = \det[\gamma_{\mu\nu}]\gamma^{\alpha\beta} + O(\phi). \tag{5.14}$$

Retornando este resultado à expressão (5.12),

$$\det[\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}] = \det[\gamma_{\mu\nu}] + \det[\gamma_{\mu\nu}]\gamma^{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} + O(\phi^2). \tag{5.15}$$

A função ω pode ser reescrita, nesta aproximação, na seguinte forma:

$$\omega = \frac{\sqrt{-\det[\gamma_{\mu\nu}]\,(1+\phi)}}{\sqrt{-\det[\gamma_{\mu\nu}]}} + O(\phi^2), \tag{5.16}$$

ou ainda, fatorando convenientemente o termo $\sqrt{-\det[\gamma_{\mu\nu}]}$, obtemos:

$$\omega = \sqrt{1+\phi} + O(\phi^2), \tag{5.17}$$

que, mediante uma expansão em séries, fornece a seguinte expressão para ω:

$$\omega = 1 + \frac{\phi}{2} + O(\phi^2). \tag{5.18}$$

Vamos fixar o sistema de coordenadas cartesiano, que iremos utilizar a partir daqui, em todos os cálculos desta seção. Lembramos que $\phi \equiv \phi^{\mu}{}_{\mu}$ (traço de $\phi_{\mu\nu}$). Desta feita, as equações de movimento em ordem mais baixa em $\phi_{\alpha\beta}$ coincidem com as equações de

Fierz-Pauli, isto é,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = -\kappa_0 T_{\mu\nu} + O(\phi^2). \tag{5.19}$$

O termo de ordem $O(\phi^2)$ que deixamos de escrever em (5.19) é dado pelo segundo termo da série (5.18), que resultaria ser:

$$\frac{\kappa_0}{2}\phi\, T_{\mu\nu} \sim O(\phi^2). \tag{5.20}$$

Isto porque o tensor de momentum energia é da ordem das derivadas do potencial tensor, $\phi_{\alpha\beta}$, como pode ser entendido das equações lineares. Vamos manter este termo de segunda ordem nas equações aproximadas e reescrever (5.19) na forma,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = \kappa_0 \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) T_{\mu\nu} + O(\phi^3). \tag{5.21}$$

Justificamos manter o termo de ordem $O(\phi^2)$ nas equações (5.21) pelos motivos já expostos quando analisamos o mesmo problema na teoria linear. Naquele caso, tivemos necessidade de derivar a expressão para o tensor de momentum energia do campo, em ordem $O(\phi^2)$, e somá-lo às equações de movimento a fim de satisfazer ao limite correto das equações Newtonianas para o movimento de partículas materiais — para ser mais claro, a equação para a força, derivada pela expressão do potencial gravitacional. Para a teoria que estamos tratando, devemos manter as equações até a mesma ordem de grandeza no potencial tensor, o que consiste em manter o segundo termo na expansão da função ω, em (5.18). Assim, de (5.21) e da propriedade da divergência ordinária nula de $G^{(L)}_{\mu\nu}$ — conforme equação (2.36) — obtemos:

$$\kappa_0 \left[\left(1 + \frac{\phi}{2}\right) T^{\mu\nu}\right]_{,\nu} + O(\phi^3) = 0, \tag{5.22}$$

que pode ser reescrita de forma expandida como

$$\frac{\phi_{,\nu}}{2} T^{\mu\nu} + \left(1 + \frac{\phi}{2}\right) T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = O(\phi^3). \tag{5.23}$$

Vamos separar o termo com a divergência do tensor de momentum energia antes de integrarmos a equação no volume que contém a partícula. Assim,

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \frac{\phi_{,\nu}}{2\left(1+\frac{\phi}{2}\right)} T^{\mu\nu} = O(\phi^3), \tag{5.24}$$

ou ainda, desde que $\phi \ll 1$,

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \frac{\phi_{,\nu}}{2} T^{\mu\nu} = O(\phi^3). \tag{5.25}$$

Para alívio de notação omitiremos o termo representando a ordem de grandeza desprezada a partir de agora até o final desta seção. Voltaremos a falar de aproximação apenas quando for necessário.

Finalmente, passemos a integração das equações de movimento. Considerando a integração de (5.25) sobre um volume espacial, $\mathcal{V}$, que contenha a partícula, encontramos:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_\alpha{}^\mu{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} d^3x \, \phi_{,\mu} T_\alpha{}^\mu = O. \tag{5.26}$$

No primeiro termo, podemos expandir a soma da seguinte maneira,

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_\alpha{}^\mu{}_{,\mu} = \int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_\alpha{}^0{}_{,0} + \int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_\alpha{}^k{}_{,k}. \tag{5.27}$$

Porém, como o segundo termo do lado direito é uma divergência espacial, podemos reescrevê-lo em termos de uma integral de superfície. Desta feita, se estendermos a superfície de integração para a região exterior ao conteúdo material, teremos o anulamento da integração, uma vez que o tensor de momentum energia da matéria se anula nesta região [ver discussão da integração (2.54)]. Assim, a expressão acima se reduz à:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_\alpha{}^\mu{}_{,\mu} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} d^3x \, T_{\alpha 0}. \tag{5.28}$$

É conveniente definir o 4-vetor momentum, ou mais simplesmente 4-momentum, assim como o fizemos em (2.56), através da definição:

$$P_\alpha \equiv \frac{1}{c}\int_{\mathcal{V}} d^3x T_{\alpha 0}. \tag{5.29}$$

Introduzindo o resultado (5.28) e a definição do 4-momentum na equação (5.26), obtemos

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} d^3x\, \phi_{,\mu} T_\alpha{}^\mu = O. \tag{5.30}$$

Vamos admitir como uma boa hipótese que a variação do campo (relacionado ao potencial tensor, $\phi_{\mu\nu}$) sobre o volume da partícula seja desprezível, ou mesmo nula. Assim o segundo termo em (5.30) pode ser reexpresso como segue:

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\int_{\mathcal{V}} d^3x\, T_\alpha{}^\mu = O. \tag{5.31}$$

O tensor de momentum energia da matéria, em uma primeira aproximação pode ser apresentado em termos da densidade de massa e da 4-velocidade,

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + O(\phi), \tag{5.32}$$

onde ρ_0 e u^μ foram definidas em (2.60) e (2.62), respectivamente. Esta aproximação para o tensor de momentum energia é verdadeira uma vez que este tensor deve representar a energia de interação matéria-matéria e matéria-gravitação. Assim, $T^{\mu\nu}$ pode ter termos que representem este acoplamento (matéria-gravitação), e devem ser, por exemplo, do tipo:

$$u^\mu u^\nu \phi.$$

Só não admitiremos presença de termos não lineares em $\phi_{\alpha\beta}$, desde que representariam energia de interação gravitação-gravitação. Desta maneira, podemos introduzir a expressão (5.32) em (5.31), mas somente no segundo termo, pois como a integral esta multiplicada por $\phi_{,\mu}$, a contribuição extra proveniente do tensor de momentum energia pode ser desprezada, pois resultaria em termos de ordem superior a que estamos considerando nas equações de movimento. O mesmo não é verdade com respeito ao 4-momentum P_α. Neste objeto os outros termos oriundos do tensor de momentum energia da matéria contribuiriam para a expressão na ordem requerida. Assim, desde que, neste momento, não conhecemos a forma explícita de $T^{\mu\nu}$, não podemos substituir a mesma em P_α.

Então, introduzindo (5.32) em (5.31), encontramos:

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\int_V d^3x\, \rho_0\, u_\alpha u^\mu = O, \tag{5.33}$$

ou ainda, desde que u^μ é constante para esta integração, e usando também as definições (2.60) e (2.61), obtemos:

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + \frac{mc^2}{2}\phi_{,\beta}u^\alpha u^\beta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = O. \tag{5.34}$$

Relembramos que m representa a massa da partícula e $v^2 = v^k v_k$, onde v^k é a componente espacial da 4-velocidade multiplicada pela velocidade da luz c:

$$v^k \equiv c\,u^k.$$

Desde que a diferencial do tempo próprio, $d\tau$ se relaciona com dt através da expressão:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \tag{5.35}$$

a equação (5.34) se transforma em

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial \tau} + \frac{mc^2}{2}\phi_{,\beta}u^\alpha u^\beta = O. \tag{5.36}$$

Esta é a equação de movimento de partículas materiais, para uma situação de campo fraco, para a teoria a que vimos desenvolvendo. No entanto, podemos ainda, a partir de (5.36), procurar pela equação diferencial para o movimento em termos das 4-velocidades

— diferencial nas 4-velocidades. Para assim proceder, precisamos derivar a expressão do 4-momentum P_μ em termos das quantidades conhecidas. De modo análogo ao que fizemos para o caso linear, podemos comparar as equações (5.36) com as equações de Euler-Lagrange, uma vez que devem ser as mesmas equações de movimento. Assim, das equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{1}{c}\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{5.37}$$

impomos que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\frac{m\,c^2}{2}\phi_{,\beta}u_\alpha u^\beta = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}, \tag{5.38}$$

e

$$P_\alpha = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha}. \tag{5.39}$$

Primeiramente, vamos integrar a equação (5.38), a fim de obter a densidade de Lagrangeana, que resolverá o nosso problema de determinar o 4-momentum, P_α, através da relação (5.39). Integrando (5.38) em dx^α, resulta:

$$\mathcal{L} = -\frac{m\,c^2}{2}\int dx^\alpha \phi_{,\beta}u_\alpha u^\beta + f(u^\mu), \tag{5.40}$$

onde $f(u^\mu)$ é a constante da integração em x^α, portanto deve ser uma função das 4-velocidades da partícula. A densidade de Lagrangeana que estamos examinando representa uma partícula de massa m, submetida a uma dada configuração de campo gravitacional. Assim, para o caso do campo ser nulo, $\mathcal{L}$ se reduz à densidade de Lagrangeana de uma partícula livre. Impomos então que

$$\lim_{\phi=0}\mathcal{L} = \frac{mc^2}{2}u^\mu u_\mu, \tag{5.41}$$

de onde obtemos a seguinte forma da função $f(u^\mu)$:

$$f(u^\mu) = \frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu. \tag{5.42}$$

Desta feita, retornando este resultado em (5.40), encontramos:

$$\mathcal{L} = -\frac{m\,c^2}{2} \int dx^\alpha \phi_{,\beta} u_\alpha u^\beta + \frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu. \tag{5.43}$$

Como a integração acima esta sendo efetuada em x^α, e desde que

$$x^\alpha = x^\alpha(\tau),$$

podemos usar a transformação

$$dx^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} d\tau = c\, u^\alpha d\tau, \tag{5.44}$$

para transformar a integração em dx^α para $d\tau$. Logo, utilizando (5.44) na integral que aparece em (5.43), resulta:

$$\int dx^\alpha \phi_{,\beta} u_\alpha u^\beta = c \int d\tau\; u^\alpha u_\alpha u^\beta \phi_{,\beta}. \tag{5.45}$$

Assim, podemos reapresentar $\mathcal{L}$ na conveniente forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{m\,c^2}{2} \int d\tau\; u^\alpha u_\alpha u^\beta \phi_{,\beta} + \frac{mc^2}{2} u^\mu u_\mu. \tag{5.46}$$

Finalmente, estamos prontos para derivar a expressão para o 4-momentum, P_α. Introduzindo a densidade de Langrangeana (5.46) na relação (5.39), teremos

$$P_\mu = -\frac{m\,c^2}{2} \int d\tau \left(2u_\mu u^\beta \phi_{,\beta} + u^\alpha u_\alpha \phi_{,\mu}\right) + m\,c\,u_\mu. \tag{5.47}$$

Desta maneira, uma vez obtida a expressão para P_μ, retornamos às equações de movimento

(5.36), de onde obtemos,

$$-\frac{1}{2}\left(2u_\mu u^\beta\phi_{,\beta}+u^\alpha u_\alpha\phi_{,\mu}\right)+\frac{1}{c}\frac{du_\mu}{d\tau}+\frac{1}{2}u^\beta u_\mu\phi_{,\beta}=0. \qquad (5.48)$$

Como vemos, esta expressão é independente da massa da partícula, já mostrando concordância com o princípio de Galileu. Se reagruparmos os termos e usando a transformação que segue,

$$u^\beta\phi_{,\beta}=\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}, \qquad (5.49)$$

obteremos a seguinte equação de movimento das partículas materiais numa configuração de campo gravitacional fraco,

$$\frac{1}{c}\frac{du_\mu}{d\tau}=\frac{u^\alpha u_\alpha}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}+\frac{u_\mu}{2c}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}. \qquad (5.50)$$

Já adiantamos que o limite Newtoniano consiste não somente na redução para campo fraco mas também em tomar o limite para baixas velocidades. Passemos então ao estudo desde caso.

5.2.2 Limite para Baixas Velocidades

Vamos assumir, além da condição de campo fraco, dada pela equação (5.11), o limite para baixas velocidades, ou seja, vamos impor sobre as equações de movimento a condição adicional,

$$v \ll c. \qquad (5.51)$$

As equações que devem emergir destas duas condições serão as representantes do limite Newtoniano para esta teoria de campo. Primeiramente vamos procurar pela equação que rege a força sentida pela partícula quando na presença de um dado campo gravitacional.

Da definição do 4-vetor velocidade,

$$u^\alpha=\frac{1}{c}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tau}, \qquad (5.52)$$

encontramos que as componentes espaciais deste objeto obdecem à seguinte condição:

$$u^k = \frac{1}{c}\frac{\partial x^k}{\partial \tau} \approx \frac{1}{c}\frac{\partial x^k}{\partial t} = \frac{v^k}{c} \ll 1, \tag{5.53}$$

onde usamos

$$d\tau \approx dt. \tag{5.54}$$

Enquanto a componente temporal, u^0, se reduz à:

$$u^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial x^0}{\partial \tau} \approx \frac{1}{c}\frac{\partial ct}{\partial t} = 1. \tag{5.55}$$

Considerando os resultados acima e ainda a situação de campo gravitacional estático, as equações de movimento (5.50) serão dadas por:

$$\frac{1}{c}\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{1}{2}u^\mu u_\mu \phi^{,\alpha}. \tag{5.56}$$

Mas, de (5.52),

$$u^\mu u_\mu = 1 + \frac{v^2}{c^2} \approx 1. \tag{5.57}$$

Logo, substituindo em (5.56), encontramos:

$$\frac{1}{c}\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\phi^{,\alpha}. \tag{5.58}$$

Como estamos analizando a configuração de campo estático, as únicas componentes que sobrevivem são as espaciais, fornecendo a expressão diferencial:

$$\frac{1}{c^2}\frac{dv^k}{dt} = \frac{1}{2}\partial^k \phi, \tag{5.59}$$

ou ainda,

$$\frac{dv^k}{dt} = \partial^k\left(\frac{c^2\phi}{2}\right). \tag{5.60}$$

Da teoria Newtoniana, a expressão para a força aplicada sobre uma partícula devido a sua interação com o campo gravitacional é dada por:

$$\frac{dv^k}{dt} = \partial^k \Psi \tag{5.61}$$

onde Ψ representa o potencial Newtoniano[1]. Assim, se compararmos os dois resultados: (5.60) para o modelo que vimos desenvolvendo, com a equivalente expressão para o modelo de Newton, encontramos que o traço do potencial tensor se relaciona com o potencial Newtoniano, resultando:

$$\phi = \frac{2\Psi}{c^2}. \tag{5.62}$$

Vamos nos deter ainda um pouco mais no território da aproximação de campo fraco e baixas velocidades, e procurar pela equação que representa a equação de Poisson, relacionando o Laplaciano do potencial com a densidade de massa. Das condições acima estabelecidas, para estes limites, as componentes do tensor de momentum energia da matéria podem ser escritas na seguinte forma aproximada:

$$T^{00} \approx \rho c^2 \tag{5.63}$$

$$T^{\mu k} \approx 0. \tag{5.64}$$

E, adotando o "gauge" de Lorentz, as equações de campo (5.19) são apresentadas como:

$$\Box h_{\alpha\beta} = \kappa_0 T_{\alpha\beta}, \tag{5.65}$$

onde $h_{\alpha\beta}$ está definido em (2.33), e a escolha de coordenadas que usamos são determinadas pela relação (2.34). Então, tomando o traço desta equação, obtemos:

$$\Box h = \kappa_0 T = \kappa_0 c^2 \rho. \tag{5.66}$$

[1]Voltamos a chamar atenção para o fato de estarmos usando o nome potencial Newtoniano de maneira não usual no que se refere a dimensão física associada. Note que no nosso caso, esta quantidade carece de uma dimensão de massa.

E, desde que

$$h = -\phi$$

resulta,

$$\Box\phi = -\kappa_0 \, c^2 \rho. \tag{5.67}$$

Explicitando o operador D'Alambertiano em termos das derivadas com respeito às coordenadas temporais e espaciais, isto é,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{5.68}$$

onde ∇^2 representa o operador Laplaciano, e retornando às equações de campo, notando ainda que o potencial é estático, encontramos:

$$\nabla^2 \, \phi = \kappa_0 \, c^2 \rho. \tag{5.69}$$

Finalmente, introduzindo (5.62) nesta última equação, resulta:

$$\nabla^2 \, \Psi = \frac{\kappa_0 \, c^4 \rho}{2}. \tag{5.70}$$

No entanto, a expressão para a equação de Poisson que provém da teoria Newtoniana, é dada por

$$\nabla^2 \, \Psi = 4\pi G \rho. \tag{5.71}$$

Assim, comparando estas duas expressões, concluímos que a constante de acoplamento, κ_0, para o modelo que estamos tratando, pode ser convenientemente escolhida para resultar no correto limite Newtoniano, ou seja,

$$\kappa_0 = \frac{8\pi G}{c^4}. \tag{5.72}$$

Deste modo, vemos que o modelo proposto para a descrição do campo gravitacional se adequa perfeitamente bem ao limite de campo fraco e baixas velocidades, que é dado pela teoria de Newton para a gravitação. Em verdade, o uso que fizemos do modelo (5.1) consistiu apenas na sua primeira aproximação, que já exigíamos anteriormente quando construímos o caso geral. Concluímos assim, que o limite Newtoniano é facilmente recuperável, somente impondo que a teoria geral, não singularizando qualquer modelo, tenha em sua primeira aproximação a forma (4.4), a menos de uma constante multiplicativa. Note que o mesmo não acontece na teoria linear de Fierz-Pauli. Lá, foi necessário somar o tensor de momentum energia da gravitação e modificar a teoria a fim de se obter o limite Newtoniano correto, o que levava a uma inconsistência em cada ordem de correção que somávamos às equações de campo. Para o nosso caso, a presença do fator ω, oriundo do acoplamento que realizamos, se torna definitivo quanto a questão deste limite.

Agora que já mostramos a redução para este caso, vamos prosseguir examinando as predições da teoria no que diz respeito a soluções exatas. Por exemplo, a configuração de campo solar.

5.3 Solução Estática, Esfericamente Simétrica

Nesta seção, procuraremos resolver as equações de campo para a região exterior a uma distribuição de massa esfericamente simétrica, em regime de campo estático. Por campo estático entendemos uma situação em que as equações de movimento devem ser independentes do tempo (coordenada tempo) e também que sejam invariantes sob transformação de inversão temporal. Já que derivaremos soluções para uma configuração esférica, vamos escolher um sistema de coordenadas adequado, coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \varphi\}$, nas quais a métrica do espaço tempo de fundo tem a seguinte forma matricial:

$$[\gamma_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.73}$$

Passemos então, à procura das soluções para esta simetria.

5.3.1 Soluções das Equações de Campo

Vamos fixar as componentes não nulas do potencial tensor para serem funções apenas da coordenada radial, e as definiremos como:

$$\phi_{00} = \phi^{00} \equiv \mu(r) \tag{5.74}$$

$$\phi_{11} = \phi^{11} \equiv -\nu(r). \tag{5.75}$$

Para alívio de notação vamos denotar estas funções simplesmente por μ e ν, não esquecendo a sua dependência em r. Em termos das componentes do tensor campo gravitacional, $F_{\alpha\beta\gamma}$, encontramos:

$$F_{100} = -\frac{\nu}{r} \tag{5.76}$$

$$F_{122} = \frac{1}{2}\left(r\nu - r^2\frac{\partial\mu}{\partial r}\right) \tag{5.77}$$

$$F_{133} = F_{122}\sin^2\theta. \tag{5.78}$$

Note que estas componentes do tensor campo não são as únicas não nulas, mas todas as outras são escritas em termos destas — as outras componentes são obtidas das simetrias de $F_{\alpha\beta\mu}$.

Temos ainda o traço deste tensor, F_α, que apresenta a única componente não nula:

$$F_1 = \frac{\partial\mu}{\partial r} - \frac{2\nu}{r}. \tag{5.79}$$

Desta feita, podemos passar ao cálculo dos invariantes do campo, A e B, que resultam em:

$$A = \frac{1}{r^2}\left[2r\nu\frac{\partial\mu}{\partial r} - \left(r\frac{\partial\mu}{\partial r}\right)^2 - 3\nu^2\right] \tag{5.80}$$

$$B = -\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial\mu}{\partial r} - 2\nu\right). \tag{5.81}$$

Assim, podemos obter a expressão da diferença dos invariantes, que denotamos em (4.2) por U,

$$U = \frac{\nu^2}{r^2} - \frac{2\nu}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}. \tag{5.82}$$

As equações de movimento para a região exterior à distribuição de massa, onde o tensor de momentum energia da matéria é nulo, são dadas por (4.48), ou seja,

$$\left[\mathcal{L}_U F^{\alpha(\mu\nu)}\right]_{;\alpha} = 0. \tag{5.83}$$

Assim sendo, dos resultados obtidos anteriormente para este problema de simetria esférica, resulta as seguintes componentes não nulas das equações de campo:

(i) componente $\mu = \nu = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\nu\mathcal{L}_U\right) = 0; \tag{5.84}$$

(ii) componente $\mu = \nu = 1$:

$$\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{\nu}{r}; \tag{5.85}$$

(iii) componente $\mu = \nu = 2$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_U}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mu}{\partial r} - \nu\right) - \mathcal{L}_U\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mu}{\partial r} - \nu\right) = 0. \tag{5.86}$$

E finalmente, a última componente não nula, $\mu = \nu = 3$, é proporcional a equação (5.86), a omitiremos portanto.

Se substituirmos a equação (5.85) em (5.86), encontraremos que esta última já é identicamente satisfeita. Resulta então, em apenas duas equações diferenciais para as funções $\mu(r)$ e $\nu(r)$, mostrando ser o sistema, a princípio, determinado. Resta-nos assim, resolvê-lo.

Se introduzirmos a equação (5.85), resolvida para a derivada radial de μ, na expressão do invariante U, de (5.82), encontraremos:

$$U = -\frac{\nu^2}{r^2}. \tag{5.87}$$

Assim, a expressão para $\mathcal{L}_U$, dada em (5.6), se torna,

$$\mathcal{L}_U = -\frac{1}{2\kappa_0}\left(1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right)^{-1/2}. \tag{5.88}$$

Com isto, a solução para a função $\nu(r)$ pode ser facilmente derivada usando (5.88) e a equação diferencial (5.84). Primeiramente, como podemos facilmente perceber, a equação (5.84) pode ser diretamente integrada, resultando em:

$$r\nu\mathcal{L}_U = \lambda_0 \tag{5.89}$$

onde λ_0 é uma constante de integração. Introduzindo a expressão para $\mathcal{L}_U$, de (5.88), em (5.89), nos restará a seguinte equação algébrica para a determinação de $\nu(r)$:

$$r\nu\left(1 + \frac{\nu^2}{b^2 r^2}\right)^{-1/2} = -2\kappa_0\lambda_0 \equiv C_0. \tag{5.90}$$

O valor da constante C_0, que definimos acima, será fixo pelas condições assimptóticas da solução. Tomando o quadrado de (5.90) e resolvendo em termos da função incógnita $\nu(r)$, obtemos finalmente:

$$\nu(r) = \frac{C_0}{r}\left(1 - \frac{C_0^2}{b^2 r^4}\right)^{-1/2}. \tag{5.91}$$

Para uma região razoavelmente afastada da origem, esta solução deve fornecer como resultado o potencial Newtoniano para este mesmo tipo de simetria. Neste caso, expandindo a equação (5.91) em séries e mantendo apenas o primeiro termo, encontramos:

$$\nu(r) = \frac{C_0}{r} + O(r^5). \tag{5.92}$$

Desta forma, para que esta solução tenha o limite correto, fixaremos o valor da constante C_0 para ser,

$$C_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{5.93}$$

onde M é a massa total da partícula — fonte material do campo — localizada na origem. Devemos remarcar que a solução condizente com o limite Newtoniano, para este caso, consiste em resolver as equações de campo para o vazio — região exterior à distribuição de massa,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = 0, \tag{5.94}$$

para esta particular simetria. Daí a segurança em escolher o valor da constante C_0 na equação do potencial. Usando este resultado, a solução para $\nu(r)$ toma a forma final

$$\nu(r) = \frac{2GM}{c^2 r}\left[1 - \left(\frac{r_c}{r}\right)^4\right]^{-1/2}, \tag{5.95}$$

onde definimos a quantidade r_c em termos das outras constantes que aparecem,

$$r_c^2 = \frac{2GM}{bc^2}. \tag{5.96}$$

Agora que detemos a solução para $\nu(r)$, vamos procurar resolver a equação que resta para determinarmos completamente as soluções deste problema. Da equação (5.85), integrando-a para a função $\mu(r)$,

$$\mu(r) = \int dr \frac{\nu(r)}{r}, \tag{5.97}$$

e introduzindo $\nu(r)$, de (5.85), encontramos,

$$\mu(r) = \frac{2GM}{c^2}\int dr \frac{1}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r_c}{r}\right)^4\right]^{-1/2}. \tag{5.98}$$

Vamos trabalhar esta integração separadamente. Denotá-la-emos pelo símbolo I:

$$I \equiv \int dr \frac{1}{r^2\sqrt{1-(r_c/r)^4}}. \tag{5.99}$$

Podemos transformar I facilmente para a seguinte forma:

$$I = \int_{r_c}^{r} dy \frac{1}{\sqrt{y^4 - r_c^4}} = \int_{r_c}^{r} dy \frac{1}{\sqrt{(y^2 - r_c^2)(y^2 + r_c^2)}}. \tag{5.100}$$

Nesta última expressão, reconhecemos a forma de uma integral elíptica, que se apresenta no caso geral como,

$$F(\varpi, \alpha) = \sqrt{a^2 + d^2} \int_{d}^{x} dt \frac{1}{\sqrt{(y^2 - d^2)(y^2 + a^2)}} \tag{5.101}$$

com

$$\cot \alpha = \frac{d}{a} \tag{5.102}$$

e

$$\cos \varpi = \frac{d}{x}. \tag{5.103}$$

Desta maneira, se compararmos esta forma geral da integral elíptica com a nossa integração, em (5.100), resulta

$$a = d = r_c, \tag{5.104}$$

$$\cot \alpha = \frac{r_c}{r_c} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \tag{5.105}$$

e também

$$\cos \varpi = \frac{r_c}{r} \Rightarrow \varpi = \arccos \frac{r_c}{r}. \tag{5.106}$$

Assim, em (5.101)

$$F(\varpi, \pi/4) = r_c \int_{r_c}^{r} dy \frac{1}{\sqrt{(y^2 - r_c^2)(y^2 + r_c^2)}} \tag{5.107}$$

e, se compararmos com I, de (5.100), encontramos por fim

$$I = \frac{1}{r_c} F(\varpi, \pi/4). \tag{5.108}$$

Retornando para a expressão de $\mu(r)$, em (5.98), escrevemos sua solução em termos desta integral elíptica, resultando:

$$\mu(r) = \frac{2GM}{r_c c^2} F(\varpi, \pi/4) + \mu_0, \tag{5.109}$$

onde μ_0 é a constante de integração, e deve ser escolhida, similarmente como aconteceu na solução para $\nu(r)$, para garantir o bom limite assimptótico.

É notável que as soluções de $\mu(r)$ e $\nu(r)$ sejam válidas apenas para uma região exterior ao raio crítico,

$$r = r_c.$$

Como podemos ver, de (5.96), o valor numérico desta posição radial está inversamente relacionada com o parâmetro da teoria, b, na forma:

$$r_c = \sqrt{\frac{2GM}{bc^2}}. \tag{5.110}$$

O valor numérico deste parâmetro ainda não foi dado, mas como já vimos da construção deste modelo, este valor deve ser grande para que a teoria tenha o bom limite assimptótico. Desta feita, o valor deste raio crítico, em princípio, deve ser muito pequeno, mas finito. Um estudo detalhado desta situação ainda não foi desenvolvida mas faz parte do nosso projeto, a ser desenvolvido brevemente. O fato de haver um raio mínimo para as soluções que estamos tratando pode estar relacionado com um limite de compactificação da matéria e deve levar a resultados fundamentalmente distintos dos alcançados pela teoria da relatividade geral, no que diz respeito a evolução estelar e ao processo de colapso — formação de buracos negros.

5.3.2 A Geometria Efetiva — Partículas Materiais

Quando o espaço tempo está preenchido por campos de gravitação, ele é deformado de tal maneira que a estrutura métrica se modifica da Minkowskiana para uma outra, efetiva, que contém a informação da presença do campo gravitacional. Tal como realizamos o acoplamento com a matéria, definimos que a estrutura geométrica do espaço tempo fosse representada pela relação (4.12), ou seja,

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}, \tag{5.111}$$

implicando assim em uma universalidade da interação entre energia não gravitacional e energia gravitacional. Desta maneira, o elemento de linha de uma partícula no espaço tempo deformado devido à presença do campo é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{5.112}$$

ou, de (5.112),

$$ds^2 = (\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu. \tag{5.113}$$

Assim, para um campo com simetria esférica, cujas soluções apresentamos na seção anterior, encontramos,

$$ds^2 = (1 + \mu) c^2 dt^2 - (1 + \nu) dr^2 - r^2 d\Omega^2, \tag{5.114}$$

onde $d\Omega^2$ é o elemento de linha usual de uma 2-esfera,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{5.115}$$

De forma explícita, a expressão acima pode ser apresentada como

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{2GM}{c^2} \int \frac{dr}{\sqrt{r^4 - r_c^4}}\right\} c^2 dt^2 - \left\{1 + \frac{2GM}{c^2 r}\left[1 - \left(\frac{r_c}{r}\right)^4\right]^{-1/2}\right\} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \tag{5.116}$$

Apesar da forma complexa em que se encontra, veremos que apenas precisaremos de sua primeira aproximação para resolver os testes observacionais clássicos da gravitação[2].

5.3.3 A Trajetória das Partículas Teste - Estrutura de Campo Solar

As soluções que encontramos para uma configuração de campo estático com simetria esférica se aplica perfeitamente bem à estrutura de espaço tempo que experimentamos nas visinhanças do Sol, desprezando-se quaisquer correções devido ao desvio da esfericidade da distribuição de massa da estrela ou outras pequenas perturbações, que não consistem em alterações significativas para o que iremos examinar nesta seção. Assim sendo, vamos procurar pela descrição que a teoria fornece para os problemas já testados para esta configuração de campo — estrutura de campo solar. Vamos proceder de maneira análoga à relatividade geral, procurando pela equação que governa a órbita das partículas teste. Entendemos por partícula teste qualquer corpo material com massa muito pequena comparada com a massa central — fonte material do campo. Partículas teste podem ser planetas ou fótons (ondas eletromagnéticas), por exemplo. Primeiramente, se expandirmos as soluções do campo, $\mu(r)$ e $\nu(r)$, em ordens de grandeza da separação radial, obteremos, respectivamente:

$$\mu(r) = -\frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GMr_c^4}{5c^2r^5} - \frac{GMr_c^8}{12c^2r^9} + O(r^{-13}), \tag{5.117}$$

$$\nu(r) = \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GMr_c^4}{c^2r^5} + \frac{3GMr_c^8}{4c^2r^9} + O(r^{-13}). \tag{5.118}$$

Como podemos notar, o primeiro termo que contribui para o campo é da ordem de $O(1/r)$ enquanto o próximo termo, nas expansões das duas funções só contribuem na ordem $O(1/r^5)$. No entanto, no que tange os testes que iremos realizar, nas equações finais de movimento, os únicos termos que contribuem para os efeitos observáveis serão os de ordem

[2]Precessão do periélio, desvio dos raios luminosos em um campo gravitacional, atrazo temporal em pulsos de radar e o desvio gravitacional para o vermelho.

$O(1/r^2)$ no máximo. Vamos omitir nas equações que seguem a indicação dos termos que estaremos desprezando, só indicando quando necessário explicitá-los.

De posse destas prerrogativas, o elemento de linha apresentado em (5.114), juntamente com os resultados (5.117) e (5.118), se torna

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{5.119}$$

onde, para alívio da notação, definimos

$$\lambda \equiv \frac{2GM}{c^2}. \tag{5.120}$$

Para encontrar as equações de movimento de partículas testes presentes num espaço tempo embebido por um campo gravitacional, lembramos que este movimento deve seguir as linhas geodésicas na geometria que define este espaço tempo. Assim sendo, as órbitas destas partículas são derivadas das equações de Euler-Lagrange, que seguem do princípio variacional:

$$\delta \int ds = 0, \tag{5.121}$$

onde ds é dado por (5.119), de forma aproximada. Introduzindo o elemento de linha (5.119) em (5.121), reescrevemos esta última equação na forma[3]

$$\delta \int \left[\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2\right] ds = 0. \tag{5.122}$$

Onde aparece um ponto sobre uma coordenada qualquer, q, estamos representando a derivada da mesma com respeito ao parâmetro de linha s, ou seja:

$$\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial s}.$$

[3]Note que, em princípio, ao introduzirmos a expressão de ds em (5.121), resultaria em uma raiz quadrada do termo entre colchetes em (5.122). No entanto, como é bem conhecido para o caso em que estamos tratando, o problema variacional se apresenta o mesmo para os dois casos. E, desde que é muito mais simples tratar do problema sem a raiz quadrada, adotamos a forma apresentada em (5.122). Para detalhes a respeito, veja discussão na referência [Adle 75].

Vamos definir a função entre colchetes, na expressão (5.122), por F:

$$F = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c^2\dot{t}^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) \dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2. \tag{5.123}$$

As equações de movimento que seguem do princípio variacional, são identificadas com as seguintes equações de Euler-Lagrange para o problema,

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0. \tag{5.124}$$

Vamos trabalhar com cada componente das equações (5.124) separadamente.

(i) componente $\mu = 0$:

$$\frac{d}{ds}\left[2\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c\dot{t}\right] = 0 \tag{5.125}$$

de onde encontramos, por integração direta,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c\dot{t} = const \equiv h_0; \tag{5.126}$$

(ii) componente $\mu = 1$:

Esta componente corresponde à equação para a variável radial. Entretanto, é mais simples obter a mesma (equivalente) diretamente do elemento de linha (5.119), tomando a divisão por ds^2, de onde encontramos:

$$\beta = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c^2\dot{t}^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) \dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2, \tag{5.127}$$

onde β assume os valores:

$$\beta = \begin{cases} 1 & , \text{ partículas massivas} \\ 0 & , \text{ partículas não massivas;} \end{cases} \tag{5.128}$$

iii) componente $\mu = 2$:

$$\frac{d}{ds}(r^2\dot{\theta}) = r^2 \sin\theta \cos\theta\, \dot{\varphi}^2; \tag{5.129}$$

iv) componente $\mu = 3$:

$$\frac{d}{ds}\left(2r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}\right) = 0 \tag{5.130}$$

de onde resulta, mediante integração:

$$r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} = const \equiv l_0. \tag{5.131}$$

Estas quatro equações, (5.126), (5.127), (5.129) e (5.131), devem resolver o problema de se obter a órbita das partículas para este caso de simetria esférica em regime de campo estático. Primeiramente, na equação (5.129), se escolhermos para um dado tempo próprio[4] inicial a condição:

$$\dot{\theta} = 0, \tag{5.132}$$

e fixarmos o ângulo:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \tag{5.133}$$

encontraremos que esta equação resulta ser identicamente satisfeita. Contudo, uma vez que as condições iniciais determinam de maneira unívoca a solução de uma equação diferencial, concluímos que as condições acima devem ser respeitadas para qualquer tempo próprio. Como pode ser facilmente entendido, as condições impostas por (5.132) e (5.133) implicam na redução do movimento das partículas testes a uma órbita planar, assim como já esperávamos do conhecimento experimental para estes tipos de problemas, como no movimento planetário por exemplo.

Com estes resultados, se retornarmos às equações de movimento, encontraremos, de (5.127):

$$\beta = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2, \tag{5.134}$$

e, de (5.126) e (5.131), seguem:

$$h_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) c\dot{t} \tag{5.135}$$

[4]Por tempo próprio estamos chamando ds/c. Note que as equações foram derivadas com respeito ao parâmetro s que é relacionado com o tempo próprio a menos de uma constante — a velocidade da luz, c.

e

$$l_0 = r^2\dot{\varphi}. \tag{5.136}$$

Estas constantes que aparecem nas últimas duas relações, h_0 e l_0, são constantes de movimento, e devem se relacionar com a energia e momentum angular das partículas testes.

Da forma como se apresenta, a equação (5.135) é particularmente interessante. Ela descreve como varia a coordenada tempo a medida em que a partícula se move ao longo de sua trajetória. Com o valor de λ, dado em (5.120), esta equação implica na predição de um desvio gravitacional para o vermelho, tal qual é apresentado na teoria da relatividade geral, indo de encontro às verificações experimentais.

Vamos procurar escrever a equação diferencial que governa a órbita das partículas testes. Introduzindo as relações (5.135) e (5.136) na equação (5.134), resulta:

$$\dot{r}^2 = h_0^2\left(1-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)^{-1} - \frac{l_0^2}{r^2}\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1} - \beta\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}. \tag{5.137}$$

Vamos definir a derivada de um objeto qualquer, q, com respeito a coordenada angular φ, de acordo com a notação:

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} \equiv q'.$$

Assim, a derivada da coordenada radial com respeito a φ é dada por,

$$r' = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \tag{5.138}$$

e ainda, usando a equação (5.136) encontramos uma útil relação entre a derivada "ponto" (com respeito ao tempo próprio) e a derivada "linha" (com respeito à coordenada angular), qual seja:

$$\dot{r} = \frac{l_0}{r^2}r'. \tag{5.139}$$

Para tornar este um problema análogo ao Keppleriano vamos, antes de prosseguir, efetuar a seguinte mudança de variável:

$$u = \frac{1}{r}, \tag{5.140}$$

de onde, tomando a derivada com respeito à φ, resulta:

$$\dot{r} = -l_0 u'. \tag{5.141}$$

Nesta nova variável, a equação de movimento (5.137) é reescrita como,

$$u'^2 = \frac{h_0^2}{l_0^2}\left(1-\lambda^2 u^2\right)^{-1} - (1+\lambda u)^{-1} u^2 - \frac{\beta}{l_0^2}(1+\lambda u)^{-1}. \tag{5.142}$$

Esta equação, se integrada nas variáveis u e φ, implica na solucão completa para a órbita das partículas. De maneira geral podemos apresentá-la implicitamente na forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\sqrt{1+\lambda u}}{\sqrt{\frac{h_0^2}{l_0^2(1-\lambda u)} - u^2 - \frac{\beta}{l_0^2}}} du. \tag{5.143}$$

O nosso objetivo é encontrar as equações que prescrevem cada um dos fenômenos que procuramos resolver. Portanto, é conveniente que derivemos estas equações de modo similar ao que é realizado na teoria da relatividade geral e amplamente divulgado na literatura, pois neste caso, uma simples comparação das equações de movimento para cada caso encerra o problema. Para uma revisão a respeito do método empregado e resultados para os testes experimentais clássicos veja as referências [Wein 72, Adle 75, Will 93].

Vamos então, tomar a derivada da equação (5.142) com respeito à variável φ, a fim de transformá-la em uma equação diferencial de 2ª ordem. Assim procedendo, encontramos:

$$\begin{aligned} u'u'' &= \frac{\lambda^2 h_0^2}{l_0^2}\left(1-\lambda^2 u^2\right)^{-2} uu' - (1+\lambda u)^{-1} uu' \\ &+ \frac{\lambda}{2}(1+\lambda u)^{-2} u^2 u' + \frac{\beta\lambda}{2l_0^2}(1+\lambda u)^{-2} u'. \end{aligned} \tag{5.144}$$

Uma solução imediata desta equação consiste em tomar a primeira derivada da variável

u igual a zero, isto é,

$$u' = 0, \tag{5.145}$$

resultando na prescrição:

$$r = const, \tag{5.146}$$

que é a solução para uma órbita circular. Este resultado também é encontrado na teoria Newtoniana da gravitação.

Para o caso mais geral, quando $u' \neq 0$, podemos fatorar esta quantidade na equação (5.144), resultando em:

$$u'' = \frac{\lambda^2 h_o^2}{l_o^2}\frac{u}{(1-\lambda^2 u^2)^2} - \frac{u}{1+\lambda u} + \frac{\lambda}{2}\frac{u^2}{(1+\lambda u)^2} + \frac{\beta\lambda}{2l_o^2}\frac{1}{(1+\lambda u)^2}. \tag{5.147}$$

Neste estágio, já podemos expandir a equação em potências de u e manter apenas termos de no máximo ordem u^2, desde que qualquer ordem superior a esta, apresenta contribuições não detectáveis observacionalmente. Usando as expansões abaixo,

$$\begin{aligned}
\left(1-\lambda^2u^2\right)^{-2} &= \left\{1+\lambda^2u^2+\cdots\right\} \\
(1+\lambda u)^{-1} &= \left\{1-\lambda u+\lambda^2u^2\cdots\right\} \\
(1+\lambda u)^{-2} &= \left\{1-2\lambda u+3\lambda^2u^2\cdots\right\}
\end{aligned}$$

em (5.147), encontramos a seguinte equação para a órbita,

$$u'' = \frac{\beta\lambda}{2l_o^2} + \left(\frac{\lambda^2 h_o^2}{l_o^2} - \frac{\beta\lambda^2}{l_o^2} - 1\right)u + \left(\frac{3\lambda}{2} + \frac{3\beta\lambda^3}{2l_o^2}\right)u^2 + O(u^3). \tag{5.148}$$

Esta equação deve ter como casos particulares a prescrição para a precessão do periélio das órbitas das partículas assim como para a deflexão dos raios luminosos quando os mesmos trafegam em uma região de campo gravitacional apreciável, por exemplo, próximo a um corpo massivo como o Sol. Vamos procurar escrever a equação que rege cada fenômeno separadamente.

5.3.4 A Precessão do Periélio das Órbitas Planetárias

Antes de mais nada, desde que estamos lidando com partículas massivas nesta derivação, reduziremos o problema para o valor correspondente da constante β, ou seja,

$$\beta = 1,$$

como havíamos prescrito em (5.128).

Para um planeta qualquer do sistema solar, temos como boa aproximação que o lado direito da relação (5.135) é muito próximo da unidade — número 1 —, permitindo que escrevamos

$$h_0 \approx 1, \tag{5.149}$$

e como a variação de u com a posição do planeta (variação angular) é muito pequena[5], a equação (5.148) tem como primeira aproximação,

$$u \approx \frac{\lambda}{2l_0}. \tag{5.150}$$

Assim, concluímos que a constante de movimento l_0 apresenta a seguinte ordem de grandeza:

$$\frac{1}{l_0} \sim u. \tag{5.151}$$

Usando estes resultados em (5.148), e desprezando os termos superiores em ordens de u, encontramos

$$u'' + u = \frac{\lambda}{2l_0^2} + \frac{3\lambda u^2}{2}. \tag{5.152}$$

ou ainda, retornando o valor da constante λ, conforme definimos na equação (5.120), resulta:

$$u'' + u = \frac{GM}{c^2 l_0^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2. \tag{5.153}$$

[5] Esta variação só seria significativa caso houvesse uma órbita com grande excentricidade, o que certamente não corresponde aos exemplos que temos no sistema solar.

Esta equação difere da equivalente na teoria Newtoniana pelo termo,

$$\frac{3GM}{c^2}u^2, \tag{5.154}$$

que é o bem conhecido termo que resulta no efeito da precessão do periélio das órbitas planetárias, como é observado no sistema solar. Note que este resultado coincide exatamente com as predições da teoria da gravitação de Einstein para este mesmo fenômeno.

5.3.5 O Desvio dos Raios Luminosos

Para o caso de raios luminosos, devemos tomar o valor da constante β em (5.148), para ser:

$$\beta = 0.$$

O que resulta na seguinte equação de movimento para estas partículas (fotons):

$$u'' + u = \frac{\lambda^2 h_0^2}{l_0^2}u + \frac{3\lambda}{2}u^2. \tag{5.155}$$

Devemos avaliar o primeiro termo no lado direito desta expressão, pois no caso de partículas com massa de repouso nula, temos

$$ds = 0, \tag{5.156}$$

o que implica em

$$\frac{1}{l_0} = 0 \tag{5.157}$$

$$\frac{1}{h_0} = 0. \tag{5.158}$$

No entanto, se usarmos as relações (5.135) e (5.136), encontraremos,

$$\frac{h_0}{l_0} = c(1 - \lambda u)u^2\frac{\partial t}{\partial \varphi}. \tag{5.159}$$

Logo,

$$\left(\frac{h_0}{l_0}\right)^2 = c^2(1-\lambda u)^2 u^4 \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)^2, \tag{5.160}$$

razão esta, que para o caso de raios luminosos[6] é da ordem:

$$\left(\frac{h_0}{l_0}\right)^2 \sim u^2 + O(u^3). \tag{5.161}$$

Assim sendo, o primeiro termo no lado direito de (5.155) pode ser negligenciado quando comparado aos outros termos — não apresenta contribuição detectável. Então, a equação resultante para a órbita de um raio luminoso é dada por,

$$u'' + u = \frac{3GM}{c^2}u^2, \tag{5.162}$$

que novamente, corresponde exatamente à predição fornecida pela relatividade geral para este fenômeno. E, obviamente, leva ao valor observacional experimentado, como já é bem conhecido desde 1919.

Finalmente, o quarto teste clássico da gravitação, que é conhecido como o atrazo temporal dos pulsos de radar emitidos na direção dos planetas interiores (mais próximos do Sol), é automaticamente satisfeito pela equação (5.162). Com isto, vimos que as predições desta teoria, até a ordem em que se pode testar hoje em dia, no que tange ao acoplamento da matéria com a gravitação, em nada difere das predições efetuadas pela relatividade geral. Não podem então, estas duas teorias, serem confrontadas até este momento. Obviamente que existem outros testes a que devemos submeter este modelo, afim de procurar pelas discrepâncias observacionais que podem vir a aparecer, ou não. Destes testes, um dos mais importantes consiste no cálculo da emissão de energia gravitacional [PeMa 63, Eard 73] por um sistema estelar duplo colapsante, o pulsar binário [Tayl 79]. Em verdade, já realizamos este teste com o modelo apresentado neste trabalho, e até onde pudemos alcançar, os resultados continuam sendo equiparados aos da relatividade geral

[6] Para raios luminosos, a variação angular com o tempo é facilmente encontrada para ser da ordem de c/r, numa aproximação da mecânica clássica.

(Para detalhes, veja referência [NoDe 97]). Deixaremos a apresentação dos resultados deste experimento para uma outra ocasião, e passaremos a investigar agora, o problema da propagação das ondas de choque gravitacionais e ondas de choque eletromagnéticas. Como já vimos, devido a não extrapolação do princípio de equivalência no que se refere a interação gravitação-gravitação, encontramos que uma estrutura geométrica efetiva para a propagação das interações gravitacionais, emerge naturalmente desta teoria. Estrutura esta, distinta daquela sentida pelas outras interações que possam haver. Neste sentido, um resultado completamente novo deve surgir da análise deste problema, levando-nos assim a um cenário em que esta teoria possa ser testada e comparada com outras teorias da gravitação.

5.4 A Velocidade das Ondas Gravitacionais

Como já examinamos nas seções precendentes para esta teoria, os testes observacionais clássicos são satisfeitos tão bem quanto se pode esperar de uma teoria que se proponha a descrever o campo gravitacional. No entanto, a interação gravitação-gravitação se processa distintamente da interação matéria-gravitação, implicando assim, que a propagação de ondas eletromagnéticas se diferencie da propagação das ondas gravitacionais [NDFA 97]. Com isto, as velocidades associadas a estas modalidades de ondas, não necessariamente se idenficarão, apontando para uma nova categoria de testes observacionais possíveis de se realizar a fim de por em teste este modelo teórico, ao mesmo tempo confrontando a mesma com outras teorias da gravitação que fornecem a mesma velocidade para estas ondas.

5.4.1 Ondas Eletromagnéticas e Gravitacionais na Solução Esfericamente Simétrica

A estrutura métrica que define a propagação das ondas eletromagnéticas é dada pela expressão (4.12),

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}. \tag{5.163}$$

Vamos definir o 4-vetor nulo, l_μ, nesta geometria a fim de representar o vetor de onda associado às ondas luminosas. Assim, l_μ obdece à seguinte relação:

$$l_\mu l_\nu g^{\mu\nu} = 0, \tag{5.164}$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a inversa da métrica (5.163). Da mesma forma como estudamos no caso geral das ondas de choque gravitacionais, o 4-vetor l_μ é escrito como um gradiente sobre a superfície de descontinuidade do campo eletromagnético. De (5.164), definimos as componentes contravariantes deste 4-vetor,

$$l^\mu \equiv g^{\mu\nu} l_\nu = 0, \tag{5.165}$$

e reescrevemos (5.164) na forma

$$l^\mu l_\mu = 0. \tag{5.166}$$

Tomando a derivada covariante com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$, e usando o fato de l_μ ser um vetor gradiente, resulta,

$$l^\mu l_{\nu||\mu} = 0, \tag{5.167}$$

que é a equação que representa as geodésicas nulas para a geometria considerada. Note que definimos a dupla barra ($||$) como a derivada covariante com respeito a métrica efetiva $g_{\mu\nu}$.

Para a solução esfericamente simétrica, podemos expandir a soma (5.164) da seguinte maneira:

$$(l_0)^2 g^{00} + (l_1)^2 g^{11} + (l_2)^2 g^{22} + (l_3)^2 g^{33} = 0, \tag{5.168}$$

ou ainda, usando a prescrição do campo em termos das funções $\mu(r)$ e $\nu(r)$, encontramos

$$\frac{(l_0)^2}{1+\mu} - \frac{(l_1)^2}{1+\nu} - \frac{(l_2)^2}{r^2} - \frac{(l_3)^2}{r^2 \sin^2\theta} = 0 \tag{5.169}$$

onde as soluções destas funções, $\mu(r)$ e $\nu(r)$, são dadas pelas equações (5.109) e (5.95), respectivamente.

Diferentemente das ondas eletromagnéticas, as ondas gravitacionais se propagam através das geodésicas nulas determinadas pela estrutura métrica definida em (4.126),

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} + \Lambda^{\mu\nu}, \tag{5.170}$$

onde $\Lambda^{\mu\nu}$ é definido por (4.125) e apresenta, neste particular modelo, a seguinte forma,

$$\Lambda^{\mu\nu} = \frac{1}{b^2 - U}\left[F^{\mu\alpha\beta} F^{\nu}{}_{(\alpha\beta)} - F^{\mu} F^{\nu}\right]. \tag{5.171}$$

As componentes deste objeto podem ser encontradas facilmente introduzindo aqui os resultados da seção 5.3, e resultam ser:

$$\Lambda^{00} = -\frac{\nu^2}{r^2(b^2-U)} \tag{5.172}$$

$$\Lambda^{11} = \frac{\nu^2}{r^2(b^2-U)} \tag{5.173}$$

e todas as outras nulas. Usando a expressão de U, de (5.87), e a solução de $\nu(r)$, apresentada em (5.95), encontramos:

$$\Lambda^{00} = -\frac{4G^2M^2}{b^2c^4r^4} \tag{5.174}$$

$$\Lambda^{11} = -\Lambda^{00}. \tag{5.175}$$

A expressão que determina a propagação das ondas de choque gravitacionais esta definida em (4.124), e escrevemos na forma:

$$k_\mu k_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{5.176}$$

onde k_μ é o vetor de onda definido em (4.95). Assim, esta expressão fornece:

$$\left(1 - \frac{4G^2M^2}{b^2c^4r^4}\right)(k_0)^2 - \left(1 - \frac{4G^2M^2}{b^2c^4r^4}\right)(k_1)^2 - \frac{(k_2)^2}{r^2} - \frac{(k_3)^2}{r^2\sin^2\theta} = 0, \tag{5.177}$$

ou, se usarmos a definição (5.96),

$$r_c^2 = \frac{2GM}{bc^2} \tag{5.178}$$

podemos reescrever (5.179) mais compactadamente como segue:

$$\left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\right)\left[(k_0)^2 - (k_1)^2\right] - \frac{(k_2)^2}{r^2} - \frac{(k_3)^2}{r^2\sin^2\theta} = 0. \tag{5.179}$$

Desta forma, desde que as ondas gravitacionais e eletromagnéticas se propagam em estruturas geométricas distintas, uma interessante primeira questão surge: qual das ondas possue maior velocidade? Para responder esta questão é suficiente que examinemos a norma do 4-vetor l_μ na geometria $\tilde{g}^{\mu\nu}$, ou equivalentemente a norma do 4-vetor k_μ na geometria $g^{\mu\nu}$. Vamos definir a norma destes vetores nas diferentes geometrias,

$$\parallel l^2 \parallel_{\tilde{g}} \equiv l_\mu l_\nu \tilde{g}^{\mu\nu} \tag{5.180}$$

e

$$\parallel k^2 \parallel_g \equiv k_\mu k_\nu g^{\mu\nu}. \tag{5.181}$$

Assim, podemos resumir a situação como segue. Estabelecemos que as ondas eletromagnéticas se propagam no cone nulo da geometria $g_{\alpha\beta}$ enquanto as ondas gravitacionais são representadas pelo cone nulo da geometria $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Então, se o 4-vetor l_μ for tipo tempo, espaço ou nulo na geometria $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, a velocidade associada a uma onda eletromagnética será menor, maior ou igual a velocidade da onda gravitacional, respectivamente. Equivalentemente, se o 4-vetor k_μ for tipo tempo, espaço ou nulo na geometria $g_{\alpha\beta}$, a velocidade associada a uma onda gravitacional será menor, maior ou igual a velocidade da onda eletromagnética, respectivamente.

Vamos prosseguir com a norma (5.180). Para a solução esfericamente simétrica, a expressão para esta norma pode ser explicitada como,

$$\| l^2 \|_{\tilde{g}} = \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4}\right)\left[(l_0)^2 - (l_1)^2\right] - \frac{(l_2)^2}{r^2} - \frac{(l_3)^2}{r^2 \sin^2\theta}. \tag{5.182}$$

No entanto, se compararmos esta expressão com a apresentada em (5.169), vemos que os últimos dois termos podem ser identificados, implicando em

$$\| l^2 \|_{\tilde{g}} = \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4} - \frac{1}{1+\mu}\right)(l_0)^2 - \left(1 - \frac{r_c^4}{r^4} - \frac{1}{1+\nu}\right)(l_1)^2. \tag{5.183}$$

Vamos expandir as soluções das funções que aparecem na expressão acima e manter apenas os termos mais fortes na série que resulta. Estes termos é que determinam o sinal da norma que estamos calculando. Assim procedendo, resulta:

$$\| l^2 \|_{\tilde{g}} = -\frac{2GM}{c^2 r}(l_0)^2 - \frac{2GM}{c^2 r}(l_1)^2 + O(2), \tag{5.184}$$

ou seja,

$$\| l^2 \|_{\tilde{g}} < 0. \tag{5.185}$$

Donde concluímos que l_μ é um vetor tipo espaço na geometria determinada por $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, resultando assim que a velocidade das ondas eletromagnéticas é maior do que a velocidade das ondas gravitacionais, considerada a estrutura do campo gravitacional que tratamos.

Esta diferença de velocidades leva a importantes questões experimentais, como por exemplo a possibilidade de existir radiação Chêrenkov de origem gravitacional [Cave 80], ou seja, a emissão de radiação gravitacional quando uma partícula material excede a velocidade de propagação das ondas gravitacionais, similarmente ao que ocorre com a eletrodinâmica nos meios contínuos [Land 69].

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos um novo caminho para se construir teorias alternativas para a descrição do campo gravitacional, preservando o princípio de equivalência no que diz respeito a interação entre a matéria e a gravitação, mas deixando livre o acoplamento entre as interações gravitacionais consigo próprias. Construímos um cenário geral onde podemos formular tais teorias e apresentamos um particular modelo, bem como algumas de suas aplicações.

Até onde realizamos, o modelo escolhido, dentro do quadro geral que fundamentamos nos capítulos iniciais deste trabalho, é perfeitamente capaz de prescrever os fenômenos relacionados aos efeitos da gravitação tão bem quanto a teoria da relatividade o faz. É bem verdade que não apresentamos aqui todos os resultados que a relatividade geral apresenta, mas continuamos examinando as predições desta teoria para os demais fenômenos, e até o presente momento continuamos obtendo resultados compátiveis com a experimentação, como por exemplo no teste do pulsar binário (veja referência [NoDe 97]).

O ponto fundamental que deve ser comparado com outras teorias da gravitação consiste na prescrição da propagação das ondas gravitacionais, uma vez que admitimos estruturas efetivamente distintas para as interações gravitacionais e materiais. No entanto, a completa ausência de observações diretas a cerca destas interações impede que esta comparação seja realizada imediatamente. Existe uma grande expectativa na comunidade científica de que nos próximos anos seremos capazes de fazer medições de ondas gravitacionais. Já existem diversos projetos de detectores de interferometria (como mais importante exemplo o sistema LIGO/VIRGO) em andamento em muitos países. Acreditamos que o advento da detecção destas ondas possa resolver definitivamente dentre quais caminhos devemos trilhar para se formular uma boa teoria da gravitação. Esclarecemos que a nossa particular proposta não encerra, em absoluto, as possibilidades de se fundamentar teorias deste gênero, isto é, permitindo acoplamentos distintos entre matéria-gravitação e gravitação-gravitação. Gostaríamos sim, de fortalecer a proposta de se admitir que tais teorias possam perfeitamente bem serem formuladas sem contrariar aos resultados observacionais já catalogados para a gravitação.

Dentro do quadro apresentado neste trabalho, as perspectivas de exame deste cenário são muito amplas. Vamos listar abaixo algumas das mais importantes questões, que devemos dar continuidade imediata:

- O estudo rigoroso da solução esfericamente simétrica no que se refere aos efeitos de estrutura de campo forte. Como vimos, a primeira correção além da ordem necessária para se realizar os testes clássicos, aparece na ordem de $O(r^{-5})$, e nesta ordem o parâmetro b introduzido no modelo que designamos contribui para a solução. Neste caso devemos encontrar uma maneira de fixar o valor deste parâmetro e proceder ao estudo do limite das soluções de campo imposto pela dinâmica do sistema;
- A questão da existência ou não de estruturas tipo buraco negro;
- A formulação Hamiltoniana da teoria, bem como o processo de quantização canônica;
- O problema do colapso estelar;
- As soluções cosmológicas e a compatibilidade com os modelos mais aceitos para o universo;
- Soluções de radiação gravitacional;
- A energia do campo gravitacional;
- Questões relacionadas à diferença de velocidade de propagação das ondas gravitacionais e eletromagnéticas. Por exemplo as consequências do surgimento de um efeito Cherenkov gravitacional para o modelo apresentado.

Referências

[Adle 75] R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, em *Introduction to General Relativity.* (Mc. Graw-Hill, Inc., New York, 1975);

[ArDe 71] C. Aragone e S. Deser, *Constraints on Gravitationally Coupled Tensor Fields.* Il Nuovo Cimento, **3**, 709 (1971);

[Bapt 66] J. P. Baptista, em *Sur un Exemple de Theories Euclidennes et Non Lineaires de la Gravitation.* (These Docteur 3'eme Cycle, A La Faculte Des Sciences de L'Universite de Paris, Paris, 1966);

[Berg 55] O. Bergmann, *Scalar Field Theory as a Theory of Gravitation. I* (1955);

[Birk 43] G. D. Birkhoff, *Matter, Electricity and Gravitation in Flat Spacetime.* Proc. N. A. S. **29**, 2231 (1943);

[Bisw 88] T. Biswas, *Minimally Relativistic Newtonian Gravity.* Am. J. Phys. **56**, 1032 (1988);

[BGT 70] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e J. Tiomno, *A Linear Theory of Gravitation.* Lett. Nuovo Cimento **III**, 65 (1970);

[Bond 57] H. Bondi, *Negative Mass in general Relativity.* Rev. Mod. Phys. **29**, 423 (1957);

[BoIn 34] M. Born e L. Infeld, *Cosmic Rays and the New Field Theory.* Nature **133**, 63 (1934); ibid, *Foundations of the New theory of Gravity.* Proc. Roy. Soc. **A 144**, 425 (1934);

[Born 33] M. Born, *Modified Field Equations with a Finite Radius of the Electron.* Nature, **132**, 282 (1933);

[Born 34] M. Born, *On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field.* Proc. Roy. Soc. **A 143**, 410 (1934);

[Brag 74] V. B. Braginsky, *The Detection of Small Accelerations, Gravitational Antenae, Verification of the Principle of Equivalence.* Em *Experimental Gravitation.* Proceedings of course 56 of the International School of Physics "Enrico Fermi", ed. B. Bertolli, p. 235, Academic, New York, 1974.);

[BrDi 61] C. Brans e R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation.* Phys. Rev. **124**, 925 (1961);

[Cave 80] C. M. Caves, *Gravitational Radiation and the Ultimate Speed in Rosen's Bimetric Theory of Gravity.* Ann. Phys. **125**, 35 (1980);

[DeLa 68] S. Deser e B. E. Laurent, *Gravitation Without Self-Interaction.* Ann. Phys. **50**, 76 (1968);

[DeLo 94] V. A. De Lorenci, em *Teoria Não Local da Gravitação.* Tese de Mestrado, CBPF, dezembro de 1994;

[Dese 70] S. Deser, *Self-Interaction and Gauge Invariante.* J. Gen. Rel. Grav. **1**, 9, (1970);

[Dick 62] R. H. Dicke, *Mach's Principle and Equivalence.* Em *Evidence for Gravitational Theories.* (Proceedings of Course 20 of the International School of Physics "Enrico Fermi," ed. C. Moller. Academic, New York, 1962);

[Dick 64] R. H. Dicke, *Experimental Relativity.* em *Relativity, Groups and Topology.* (ed. C. De Witt e B. De Witt, p. 165, Gordon and Breach, New York, 1964);

[Eard 73] D. M. Eardley, D. L. Lee, A. P. Wagoner e C. M. Will, *Gravitational-wave Observations as a Tool for Testing Relativistic Gravity.* Phys. Rev. Lett. **30**, 884 (1973);

[Eins 16] A. Einstein, Annalen der Physik **49**, 769 (1916). Traduzido para o inglês em *The Principle of Relativity.* (Methuen, 1923. Reimpresso pela ed. Dover Publications);

[Eins 05] A. Einstein, em *Zur Elektrodynamik Bewegter Körper.* Annalen der Physik **17**, 891 (1905). Traduzido para o potuguês em *Textos Fundamentais da Física Moderna: H. A. Lorentz, A. Einstein and H. Minkowski.* (Volume I, "O Principio da Relatividade". Fund. Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1971);

[Feyn 95] R. P. Feynman, F. B. Morinigo e W. G. Wagner, in *Feynman Lectures On Gravitation.* (Addison-Wesley Pub. Company, Massachusetts, 1995);

[FiPa 39] M. Fierz e W. Pauli, *On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field.* Proc. Roy. Soc. **173A**, 211 (1939);

[Fock 57] V. Fock, *Three Lectures on Relativity Theory.* Rev. Mod. Phys. **29**, 325 (1957);

[Fock 64] V. Fock, em *The Theory of Space, Time and Gravitation.* (Pergamon Press, Oxford, 1964);

[Frei 91] L. R. Freitas, em *Campos de Spin-2, Variáveis Fundamentais: A Proposta de Fierz.* (Tese de doutorado, CBPF, Rio de Janeiro, RJ, abril de 1991);

[Gris 84] L. P. Grischuck, A. N. Petrov e A. D. Popova, *Exact Theory of the (Einstein) Gravitational Field in an Arbitrary Background Space-Time.* Commun. Math. Phys. **94**, 379 (1984);

[Gupt 52a] S. N. Gupta, *Quantization of Einstein's Gravitational Field: Linear Approximation.* Proc. Phys. Soc. **A 65**, 162 (1952);

[Gupt 52b] S. N. Gupta, *Quantization of Einstein's Gravitational Field: General Treatment.* Proc. Phys. Soc. **A 65**, 608 (1952);

[Gupt 54] S. N. Gupta, *Gravitation and Electromagnetism.* Phys. Rev. **96**, 1683 (1954);

[Gupt 57] S. N. Gupta, *Eintein's and Other Theories of Gravitation.* Phys. Rev. **96**, 1683 (1954);

[Hada 52] J. Hadamard, em *Lectures on Cauchy's Problem.* (Yale University Press 1923); Dover reprint (1952);

[KlRo 97] R. Klippert e R. Rodrigues, *Seminário proferido para o Grupo de Cosmologia e Gravitação / CBPF* (Não publicado, 1997). Neste seminário foi mostrado que usando o teorema de Cayley-Hamilton, a inversa de uma métrica do tipo $\gamma_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$ pode ser somada e apresenta forma tensorial fechada, para qualquer dimensão espacial;

[Krai 47] R. H. Kraichnan, em *Quantum Theory of the Linear Gravitational Field.* (Tese de doutorado não publicada, Massachusetts Inst. Tech., Mass., 1947);

[Krai 55] R. H. Kraichnan, *Special-Relativistic Derivation of Generally Covariant Gravitation Theory.* Phys. Rev. **98**, 1118 (1955);

[Land 69] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, em *Electrodynamique des Milieux Continus.* (Éditions Mir, Moscou, 1969);

[Land 80] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, em *Teoria do Campo.* (Editora Mir, Moscou, 1980);

[MTW 73] C. W. Misner, D. S. Thorne e J. A. Wheeler, em *Gravitation.* (Freeman, San Francisco, 1973);

[NDE 97a] M. Novello, V. A. De Lorenci e E. Elbaz, *A New Model of Gluon Confinement.* CBPF-NF-036/97;

[NDE 97b] M. Novello, V.A. De Lorenci e E. Elbaz, *Can Non Gravitational Black Holes Exist?* Report $n^o_.$ gr-qc/9702054;

[NDFA 97] M. Novello, V. A. De Lorenci, L. R. Freitas e O. Aguiar, *The Velocity of Gravitational Waves.* CBPF-NF-077/97;

[NDL 97] M. Novello, V. A. De Lorenci e L. R. de Freitas, *Do Gravitational Waves Travel at Light Velocity?* Ann. Phys. **254**, $n^o_.$ 1, 83 (1997);

[New 686] I. Newton, em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* (London, 1686);

[NoDe 97] M. Novello e V. A. De Lorenci, *The Binary Pulsar is not the Ultimate test for the Theory of Gravity.* CBPF-NF-025/97. Neste trabalho nos concentramos em apresentar as características principais que levam a fórmula de Peter-Mathews para a taxa de perda de energia devido emissão de radiação gravitacional. É bem conhecido que o sistema pulsar binário produz 15 testes para se testar uma teoria do campo gravitacional. Ainda não avaliamos para o modelo apresentado nesta tese, quais as consequências que trazem a diferença nas velocidades de propagação das ondas gravitacionais e eletromagnéticas.

[NoLo 95] M. Novello e V. A. De Lorenci, *Nonlinear Nonlocal Theory of Gravity.* Modern Physics Letters A, **10**, 807 (1995);

[NoLo 96] M. Novello e V. A. De Lorenci, *Nonlinear Nonlocal Theory of Gravity – II.* Gravitation & Cosmology, **2**, 49 (1996);

[Ohan 76] H. C. Ohanian, em *Gravitation and Spacetime.* (W. W. Norton & Company, New York, 1976);

[Papa 74] A. Papapetrou, em *Lectures on General Relativity.* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht - Holland, 1974);

[PeMa 63] P. C. Peters e J. Mathews, *Gravitation Radiation from Point Masses in a Kleperian Orbit.* Phys. Rev. **131**, 435 (1963);

[Pleb 70] J. Plebanski, em *Lectures on Non-Linear Electrodynamics.* (Nordita, Danmark, 1970);

[Rose 73] N. Rosen, *A Bimetric Theory of Gravitation.* J. Gen. Rel. and Grav. **4**, 435 (1973);

[Tayl 75] J. H. Taylor, *Discover of a Pulsar in a Binary System.* Ann. N. Y. Acad. Sci. **262**, 490 (1975);

[Tayl 79] J. H. Taylor, L. A. Fowler e M. McCulloch, *Measurements of General Relativistic Effects in the Binary PSR1913+16.* Nature **277**, 437 (1979);

[Tayl 94] J. H. Taylor, *Binary Pulsars and Relativistic Gravity.* Rev. Mod. Phys. **66**, 711 (1994);

[Thir 61] W. E. Thirring, *An Alternative Approach to the Theory of Gravitation.* Ann. Phys. **16**, 96 (1961);

[Tolm 34] R. C. Tolman, em *Relativity, Thermodynamics and Cosmology.* (Oxford University Press, Oxford, 1987);

[Wein 72] S. Weinberg, em *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* (John Wiley & Sons, New York, 1972);

[Will 73] C. M. Will, em *Relativistic Gravity in the Solar System III. Experimental Disproof of a Class of Linear Theories of Gravitation.* Astrophys. J. **185**, 31 (1973);

[Will 93] C. M. Will, em *Theory and Experiment in Gravitational Physics.* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993);

"UMA NOVA CLASSE DE TEORIAS DO CAMPO GRAVITACIONAL"

Vitório Alberto De Lorenci

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Mario Novello - Presidente

Luciane Rangel de Freitas

Marcos Duarte Maia

José Abdalla Helayël-Neto

José Martins Salim

Luiz Alberto Rezende de Oliveira - Suplelnte

Rio de Janeiro, 17 de dezembro de 1997