

TESE DE
MESTRADO

Renormalização e
Ambigüidades na QED₂

RODOLFO ALVÁN CASANA SIFUENTES

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS-CBPF

RIO DE JANEIRO, FEVEREIRO DE 1997

RENORMALIZAÇÃO E AMBIGUIDADES NA
QED2



1997/11

C335
020277

*A mis padres Ambrocio y Graciela,
a mis hermanos Carlos, Eduardo, Nancy y Jesús.
A Gliseida.*

Agradecimentos

À CAPES e ao CNPQ pela bolsa concedida.

Ao meu orientador Sebastião Alves Dias pelas discussões e ajuda na conclusão desta tese.

Ao Marcelo B. Silva Neto com quem trabalhei em parte desta tese.

À Myriam Simões Coutinho.

A meus amigos Marco Flores Rivera, Guillermo Cuba Castillo, Angel Bustamante Dominguez, Dalber Sánchez Candela, Roger Metzger Alvan, Gino Janampa Añaños, German Gomero Ferrer, Luis Peché Puertas, Onofre Rojas Santo.

Aos companheiros do DCP, Claudio Gomes Sasaki, Oswaldo Monteiro del Cima, Ricardo Renam L. Carvalho, Marcelo Ferreira Lima, Humberto Belich Junior.

Ao pessoal da Biblioteca do CBPF e ao pessoal da CFC.

Resumo

Estudamos a renormalização da eletrodinâmica quântica bidimensional com férmions sem massa, a QED_2 , quantizada com prescrições não-invariantes de calibre, caracterizadas por um valor diferente de 1 para o parâmetro a de Jackiw-Rajaraman. Propomos prescrições perturbativas que geram diversos valores de $a \neq 1$. Mostramos que as divergências ultravioletas, presentes nas funções de Green fermiônicas neste regime, têm origem não-perturbativa. Regularizamos e renormalizamos estas divergências e encontramos uma relação entre a e a escala μ^2 onde devem ser efetuadas as subtrações. Ao trabalharmos no formalismo invariante de calibre e no não-invariante de calibre mostramos a equivalência entre os dois.

Abstract

We study the renormalization of massless QED_2 , quantized by using non-gauge invariant prescriptions, characterized by a value other than 1 for the Jackiw-Rajaraman parameter a . We propose perturbative prescriptions which generate several values for $a \neq 1$. We show that ultraviolet divergencies, present in fermionic Green's functions in this regime, have non-perturbative origin. We regularize and renormalize these divergencies and find a relationship between a and the scale μ^2 , where subtractions are to be made. By working both in the gauge invariant formalism and in the gauge non-invariant one, we show the equivalence between them.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Índice	v
Introdução	1
1 Origem da Ambigüidade	5
1.1 Determinante Fermiônico	6
1.1.1 Cálculo do Determinante: Método da Separação de Pontos	6
1.1.2 Cálculo Perturbativo do Determinante: Regularização de Pauli-Villars	9
1.2 Funções de Green	11
1.2.1 Propagador Exato do Fóton	12
1.2.2 Propagador Exato do Férmion	13
1.2.3 Função de 3 Pontos $(\psi\bar{\psi}A_\mu)$ Exata	17
1.3 Identidades de Ward	18
2 Análise Perturbativa	22
2.1 Modelo de Schwinger no Formalismo Invariante de Calibre	23

2.1.1	Análise Perturbativa	27
2.2	Modelo de Schwinger no Formalismo Não Invariante de Calibre	32
2.2.1	Análise Perturbativa	34
3	Renormalização do Modelo de Schwinger	39
3.1	Regularização da Teoria	39
3.2	Funções de Green Regularizadas	42
3.2.1	Propagador Regularizado do Fóton	43
3.2.2	Propagador Fermiônico Regularizado	44
3.2.3	Função de 3 Pontos	45
3.3	Renormalização	46
3.3.1	Análise Semi-Perturbativa	49
3.3.2	Resultados a 1-loop	53
4	Conclusões	59
A	Convenções e Identidades Úteis	61
A.1	$d = 1 + 1$	61
A.2	Representação α	62
A.3	Algumas integrais úteis	63
B	Comparação entre os Formalismos Invariante e Não Invariante de Calibre	64
B.1	Cálculo das Funções de Green Exatas no Formalismo Invariante de Calibre	64
B.2	Cálculo das Funções de Green Exatas no Formalismo Não Invariante de Calibre	65
C	Regularização do Modelo de Schwinger no Formalismo Não Invariante	

de Calibre	68
C.1 Identidades de Ward para a Teoria Regularizada	70
D Expansão do Propagador Fermiônico em Termos do Propagador Fotônico Completo	73
E Análise do Propagador do Férmion sem Fontes	76
E.1 Quantização Não Invariante de Calibre	78
E.2 Quantização Invariante de Calibre	80
F Outras Alternativas para Regularizar a Teoria: <i>Cut-off</i>	82
Bibliografia	85

Introdução

A Eletrodinâmica Quântica em duas dimensões (QED_2) com um campo fermiônico sem massa (conhecida como modelo de Schwinger), tem sido amplamente estudada desde os anos 60, quando foi proposta [1]. Devido ao fato de ser exatamente solúvel, a QED_2 constituiu-se num laboratório para testar características gerais das teorias de calibre [2] e obter informação possivelmente relevante para o modelo padrão [3, 4]. Sendo uma teoria de calibre para férmions de Dirac, como é fato conhecido, ela tem a possibilidade de ser quantizada de maneira invariante de calibre, o que constitui a sua abordagem convencional na literatura [5, 6, 7]. A quantização usando um esquema de renormalização que não preserva automaticamente a simetria de calibre foi proposta por Jackiw e Johnson em 1966 [8]. Como em diversas outras abordagens na literatura, os autores preocupam-se com questões relativas a anomalias nas correntes quiral e de calibre, deixando em segundo plano a quantização do setor bosônico da teoria. Em particular, o cálculo completo de funções de correlação fermiônicas (com o campo A_μ quântico) foi deixado de lado, desde então.

Naquele trabalho e em outros, notou-se que o objeto fundamental a ser considerado era o determinante fermiônico [9, 10], obtido após serem considerados os efeitos dinâmicos dos férmions.

Na regularização deste determinante aparece um parâmetro a que controla ambigüidades na regularização de uma divergência de curta distância (UV). Este parâmetro manifesta-

se, posteriormente, no pólo do propagador bosônico (massa do fóton gerada dinamicamente) e também nas demais funções de Green da teoria [11]. No caso $a \neq 1$ as funções de Green fermiônicas apresentam divergências ultravioleta [12], enquanto o caso $a = 1$ implica em simetria de calibre quântica e finitude da teoria [13].

Numa teoria de campos genérica, renormalizável, o procedimento de renormalização, ao eliminar divergências através de contratermos adequados, leva a arbitrariedades sobre a parte finita dos mesmos [14]. Usualmente, a parte finita dos contratermos pode ser absorvida em uma redefinição (ou renormalização finita) dos parâmetros originais da teoria. Há total arbitrariedade na escolha do esquema usado para definir (regularizar) as funções de Green, sendo este, usualmente, escolhido por conveniência. Independentemente do esquema utilizado, as quantidades físicas da teoria não são afetadas por esta arbitrariedade, sendo independentes da maneira particular pela qual se faz a renormalização [15].

O modelo de Schwinger possui a característica de geração quântica de contratermos do tipo massa ($A_\mu A^\mu$ e $A_\mu \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} A_\nu$) que não estão presentes na ação original da teoria. Além disso, o coeficiente do termo $A_\mu A^\mu$ é dependente de a (e, portanto, do tipo de regularização empregado) caracterizando uma renormalização finita não multiplicativa [14] (pois a massa do fóton é nula no nível clássico).

O objetivo desta tese é iniciar um estudo que permita entender qual é o papel desempenhado pelo parâmetro a na quantização do modelo de Schwinger, na tentativa de responder à questão: a quantização da QED_2 é ambígua ou não? Para isso procuraremos fazer análises detalhadas das condições que definem a teoria para valores de a genéricos, estudando a sua renormalização e a parametrização das ambigüidades oriundas do procedimento em questão. O caso de interesse é aquele em que a simetria de calibre é violada no nível quântico ($a \neq 1$), situação na qual aparecem singularidades UV.

Cabe ressaltar que, no caso da QED_2 , um ponto de vista frequentemente usado é o de

que, sendo a invariância de calibre um princípio “fundamental”, não existiria ambigüidade na sua quantização ($a = 1$). Mesmo que aceitássemos este ponto de vista, ainda seria interessante o estudo da teoria no caso genérico, no mínimo como preparação para o tratamento do caso envolvendo férmions quirais (o chamado *modelo de Schwinger quiral* [16]), onde não existe nenhum valor de a que preserve a simetria de calibre no nível quântico. Desde um ponto de vista menos apriorístico, podemos dizer que o modelo de Schwinger e o modelo de Schwinger quiral são dois exemplos de situações onde uma ambigüidade se faz presente nos resultados posteriores à quantização das teorias. A única diferença entre as duas situações é o fato de, no caso do modelo de Schwinger, um certo valor de a coincidir com a preservação da simetria de calibre.

A regularização da teoria será feita não perturbativamente, e procuraremos entender de que maneira devemos impor condições de renormalização para fixar as partes finitas dos contratermos.

A tese está organizada da seguinte maneira: No capítulo 1, estabelecemos a origem da ambigüidade, fato tanto não perturbativo como perturbativo, e, após o cálculo de algumas funções de Green relevantes, observamos a sua dependência em a . Em seguida derivamos as identidades de Ward para as funções de correlação da teoria.

No capítulo 2, investigamos a origem das divergências achadas, fazemos a análise perturbativa da teoria desde o ponto de vista do Formalismo Invariante de Calibre (FIC) e do Formalismo Não Invariante de Calibre (FNIC) [17, 18, 19, 20] e estabelecemos conexões entre eles.

No capítulo 3, estudamos a regularização e a renormalização da teoria, estabelecendo condições de renormalização para parametrizar as partes finitas dos contratermos que permanecem ambíguas.

Os apêndices estão distribuídos assim: No apêndice A, estabelecemos as nossas con-

venções e identidades úteis.

No apêndice B, fazemos os cálculos exatos das funções de Green da teoria desde o FIC e o FNIC.

No apêndice C, estudamos a regularização da teoria no FNIC e vemos a equivalência com o FIC. Estabelecemos identidades de Ward para a teoria regularizada.

No apêndice D, mostramos a expansão semiperturbativa do propagador completo do fóton.

No apêndice E, analisamos a integral funcional que gera o propagador fermiônico sem fontes, mostrando que as divergências encontradas não têm origem nas fontes usadas para definir o funcional gerador $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$.

No apêndice F, mostra-se uma outra regularização que fixa o valor do parâmetro a , sem deixar liberdade de escolha, e sem preservar a simetria de calibre.

Capítulo 1

Origem da Ambigüidade

O modelo de Schwinger, é amplamente tratado na literatura como um modelo cuja quantização pode dar-se de maneira invariante de calibre. Nessa formulação a teoria quântica que emerge mostra-se exatamente solúvel e finita. Entretanto, o sucesso da prescrição invariante de calibre mascara a existência de uma ambigüidade no espectro exato da teoria, um dos resultados do cálculo, e nas funções de Green, o que implica no seu aparecimento potencial em amplitudes de espalhamento. Neste capítulo iremos esclarecer a origem dessa ambigüidade e estudar o seu efeito sobre as funções de Green mais relevantes.

Ao calcularmos o determinante fermiônico (ação efetiva) precisamos de uma prescrição para regularizá-la; na escolha de uma prescrição (regularização) generalizada não necessariamente invariante de calibre para o cálculo, surge a ambigüidade mencionada anteriormente. Também deduzimos as identidades de Ward generalizadas satisfeitas pelas funções irreduzíveis a uma partícula (IIP), ressaltando as suas diferenças em relação ao cálculo invariante de calibre.

1.1 Determinante Fermiônico

1.1.1 Cálculo do Determinante: Método da Separação de Pontos

O modelo de Schwinger é descrito pela densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + e\mathcal{A})\psi. \quad (1.1)$$

A ação efetiva é definida pelo seguinte funcional do campo abeliano A_μ ¹

$$\begin{aligned} e^{iW[A_\mu]} &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ + e\mathcal{A}) \psi \right] \\ &= \det iD, \quad D = i\partial\!\!\!/ + e\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

O determinante que aparece em (1.2) é indefinido, pois trata-se de um espaço de dimensão infinita [21, 22, 23], o que torna necessária a escolha de uma prescrição para o seu cálculo. Supondo que D possua um conjunto completo de autofunções ortonormais pode-se mostrar, formalmente, que usando

$$\det iD = e^{\text{tr} \ln iD},$$

obtemos

$$\frac{d}{de} \ln \det iD = \text{tr} \left(\frac{1}{D} \frac{dD}{de} \right). \quad (1.3)$$

onde $D^{-1} \rightarrow G(x, y; A)$ é a função de Green da equação

$$(i\partial\!\!\!/ + e\mathcal{A})G(x, y; A) = \delta(x - y). \quad (1.4)$$

A equação (1.4) é resolvida com o ansatz [24]

$$G(x, y; A) = e^{i\phi(x) - i\phi(y)} G_F(x - y), \quad (1.5)$$

¹Para simplificar escrevemos $d^2x = dx$. Nossas demais convenções são explicadas no apêndice A.

onde $G_F(x - y)$ é a função de Green da equação de Dirac livre

$$i\partial G_F(x - y) = \delta(x - y),$$

e considerando a função ϕ como sendo

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) \quad . \quad [\gamma^\mu, \phi_1(x)] = 0 \quad . \quad \{\gamma^\mu, \phi_2(x)\} = 0.$$

Substituindo (1.5) em (1.4) obtemos para a função ϕ

$$\begin{aligned} \square\phi(x) &= e\bar{\phi}A(x), \\ \phi(x) &= e \int dz D_F(x - z)(\partial_z^\mu + \gamma_5 \bar{\partial}_z^\mu)A_\mu(z), \end{aligned} \quad (1.6)$$

sendo $D_F(x - y)$ a função de Green da equação de Klein-Gordon sem massa:

$$\square D_F(x - y) = \delta(x - y).$$

Então, usando o valor de ϕ (1.6) na eq.(1.5), obtemos a função de Green da eq.(1.4)

$$\begin{aligned} G(x, y; A) &= \exp \left[-ie \int dz A_\mu(z) j_-^\mu(z, x, y) \right] P_- G_F(x - y) + \\ &+ \exp \left[-ie \int dz A_\mu(z) j_+^\mu(z, x, y) \right] P_- G_F(x - y). \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde utilizamos a identidade

$$e^{\gamma_5 f} = e^{-f} P_- + e^f P_+,$$

e $j_\pm^\mu(z, x, y)$ é

$$j_\pm^\mu(z, x, y) = (\partial_z^\mu \pm \bar{\partial}_z^\mu)[D_F(z - x) - D_F(z - y)].$$

Regressamos à equação (1.3) e a reescrevemos como

$$\frac{d}{de} \ln \det iD = \int dx \operatorname{tr}[G(x, x; A)\gamma^\mu]A_\mu(x). \quad (1.8)$$

Para regularizá-la usamos o método da separação de pontos

$$\frac{d}{de} \ln \det iD = \lim_{y \rightarrow x} \int dx \operatorname{tr}[G(x, y; A)\gamma^\mu] \exp \left\{ i e a \int_x^y dz^\nu A_\nu(z) \right\} A_\mu(x), \quad (1.9)$$

onde a parametriza uma ambigüidade na regularização da singularidade de curta distância $x \rightarrow y$ [25, 26, 8]. No caso $a = 1$ preserva-se a invariância de calibre. Esta ambigüidade aparece também em outros métodos de regularização, como será exemplificado mais tarde neste capítulo, no contexto da regularização de Pauli-Villars.

Antes de fazer a expansão em $\epsilon = x - y$, com $\epsilon \rightarrow 0$, no lado direito da eq.(1.9) fazemos os seguintes cálculos úteis

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[P_\pm G_F(x - y)\gamma^\mu] &= -i(\partial_x^\mu \pm \tilde{\partial}_x^\mu)D_F(x - y). \\ \partial_x^\mu D_F(x - y) &= -\frac{i}{2\pi} \frac{\epsilon^\mu}{\epsilon^2}, \\ D_F(x - z) - D_F(y - z) &= -\epsilon_\alpha \tilde{\partial}_z^\alpha D_F(x - z). \end{aligned}$$

Agora, expandindo até ordem ϵ^2 no lado direito da eq.(1.9) temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln \det iD &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx \frac{1}{2\pi\epsilon^2} \left[-2\epsilon^\mu + 2ieaA^3(x)\epsilon_j\epsilon^\mu + \right. \\ &\quad - ie(\epsilon_\alpha\epsilon^\mu - \epsilon_\alpha\tilde{\epsilon}^\mu) \int dz A_\nu(z) [\partial_z^\nu - \tilde{\partial}_z^\nu] \partial_z^\alpha D_F(x - z) + \\ &\quad \left. - ie(\epsilon_\alpha\epsilon^\mu + \epsilon_\alpha\tilde{\epsilon}^\mu) \int dz A_\nu(z) [\partial_z^\nu + \tilde{\partial}_z^\nu] \partial_z^\alpha D_F(x - z) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] A_\mu(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Tomando, agora, o limite simétrico, ou seja, fazendo a média sobre as direções ϵ

$$\overline{\epsilon^\mu} = 0, \quad \overline{\epsilon^\mu\epsilon^\nu} = \frac{\epsilon^2}{2} g^{\mu\nu} \quad (1.11)$$

e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ em (1.10), obtemos

$$\frac{d}{de} \ln \det iD = \frac{ie}{2\pi} \int dx \left[aA_\mu(x)A^\mu(x) - A_\mu(x) \int dz (\partial_z^\mu \partial_z^\nu + \tilde{\partial}_z^\mu \tilde{\partial}_z^\nu) D_F(x - z) A_\nu(z) \right].$$

O limite simétrico nos permite eliminar a divergência de ordem ϵ^{-1} que aparece em (1.10), que é a manifestação da singularidade de curta distância à qual nos referimos na eq.(1.9).

Integrando em e , e fazendo uso da identidade

$$\partial_z^\mu \partial_z^\nu - \tilde{\partial}_z^\mu \tilde{\partial}_z^\nu = g^{\mu\nu} \square,$$

obtemos finalmente o determinante fermiônico [9]

$$\ln \det iD = \int dx \frac{1}{2} A_\mu(x) \left[m^2(a) g^{\mu\nu} - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x) \quad (1.12)$$

com $m^2(a)$ sendo dado por

$$m^2(a) = \frac{e^2}{2\pi}(a+1). \quad (1.13)$$

Da eq.(1.12) identificamos o funcional $W[A_\mu]$ diretamente,

$$W[A_\mu] = \int dx \frac{1}{2} A_\mu(x) \left[m^2(a) g^{\mu\nu} - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu(x), \quad (1.14)$$

Podemos verificar explicitamente que, para $a = 1$, a expressão (1.14) é invariante de calibre (ver eq.(2.16)).

1.1.2 Cálculo Perturbativo do Determinante: Regularização de Pauli-Villars

Vamos mostrar que podemos encontrar resultados equivalentes usando outras regularizações conhecidas, como Pauli-Villars. Encontraremos a ambigüidade que aparece no método da separação de pontos de maneira perturbativa, calculando o loop fermiônico relevante na expansão do determinante fermiônico em termos de gráficos de Feynman.

Partimos da ação efetiva

$$\begin{aligned} e^{iW[A_\mu]} &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ + e\mathcal{A}) \psi \right] \\ iW[A_\mu] &= \ln \left[\frac{\det iD}{\det i(i\partial\!\!\!/)} \right] \\ &= \text{tr} \ln [\delta(x-y) + e(i\partial\!\!\!/)^{-1} \mathcal{A}(x) \delta(x-y)] \\ &= \text{tr} \ln [\delta(x-y) + eG_F(x-y) \mathcal{A}(y)] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Expandindo esta expressão para iW , obtemos apenas contribuições a 1-loop,

$$iW[A_\mu] = e \int dx \operatorname{tr}[G_F(x-x)A(x)] - \frac{e^2}{2} \int dx dy \operatorname{tr}[G_F(x-y)A(y)G_F(y-x)A(x)] + \frac{e^3}{3} \int dx dy dz \operatorname{tr}[G_F(x-y)A(y)G_F(y-z)A(z)G_F(z-x)A(x)] + \dots \quad (1.16)$$

$W[A_\mu]$ pode ser expresso em termos de gráficos de Feynman como

$$iW[A_\mu] = \text{diagram 1} + \frac{1}{2} \text{diagram 2} + \frac{1}{3} \text{diagram 3} + \dots \quad (1.17)$$

The diagrams are:
 1. A circle with two wavy lines attached to its left and right sides.
 2. A circle with two wavy lines attached to its left and right sides, and a third wavy line attached to its bottom.
 3. A circle with two wavy lines attached to its left and right sides, and a third wavy line attached to its bottom.

O único gráfico que contribui à ação efetiva é o segundo, sendo todos os outros nulos em $d = 2$ [4].

Fazemos aparecer a ambigüidade utilizando 2 campos de Pauli-Villars [14] para regularizar o loop fermiônico que aparece em $W[A_\mu]$,

$$\frac{1}{2} \text{diagram 2} = -\frac{e^2}{2} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \operatorname{tr} \left(\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \right). \quad (1.18)$$

Com a regularização que estamos fazendo, o propagador fermiônico melhora o seu comportamento ultravioleta, e muda para

$$\frac{i}{\not{p}} \rightarrow \frac{i}{\not{p}} - \frac{ic_1}{\not{p} - M_1} - \frac{ic_2}{\not{p} - M_2}, \quad (1.19)$$

onde as quantidades c_1, c_2, M_1, M_2 satisfazem

$$c_1, c_2 > 0, \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Depois da integração nos férmions, o funcional gerador fica dado por

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2} A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu + J:A \right) \right] \times \quad (1.23)$$

$$\times \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right].$$

onde $G(x, y; A)$ é dado por (1.7) e usamos a eq.(1.12) do $\det iD$, para escrever

$$D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\square + m^2(a)) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}. \quad (1.24)$$

1.2.1 Propagador Exato do Fóton

Da eq.(1.23), fazendo $\eta = \bar{\eta} = 0$, integrando em A_μ e usando a escolha que fizemos de \mathcal{N} , obtemos

$$Z[J] = \exp \left[i \int dx dy J^\mu(x) G_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \right]. \quad (1.25)$$

onde $G_{\mu\nu}(x-y)$ é a inversa do operador $-D^{\mu\nu}$,

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \tilde{G}_{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)}$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (1.26)$$

O propagador exato do fóton é obtido da eq.(1.25).

$$\begin{aligned} \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= - \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^\nu(y) \delta J^\mu(x)} \Big|_{J=0} \\ &= -i G_{\mu\nu}(x-y). \end{aligned} \quad (1.27)$$

A expressão (1.26) para $G_{\mu\nu}(x-y)$ não tem divergências, e mostra que o fóton adquire uma massa $m^2(a)$ dada pela eq.(1.13). Vemos, portanto, que a ambigüidade manifesta-se no espectro da teoria, deixando indefinida a massa das excitações bosônicas.

Podemos reescrever $\tilde{G}_{\mu\nu}(k)$ como

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2(a)} + f(k) k_\mu k_\nu \quad (1.28)$$

onde $f(k)$ é

$$f(k) = -\frac{2\pi}{e^2(a-1)k^2} - \frac{1}{k^2(k^2 - m^2(a))} \quad (1.29)$$

A função $f(k)$, também aparecerá na expressão para o propagador fermiônico. O primeiro termo da soma (proporcional a k^{-2}) irá gerar as divergências que aparecem no propagador fermiônico.

Podemos também calcular o funcional gerador das funções IIP com $\psi = \bar{\psi} = 0$. A ação efetiva para o fóton é, então, dada por

$$\Gamma[A_\mu] = \int dx \frac{1}{2} A_\mu \left[g^{\mu\nu}(\square + m^2(a)) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu. \quad (1.30)$$

de onde a função IIP de dois pontos bosônica é obtida derivando $\Gamma[A_\mu]$ funcionalmente duas vezes em relação a A_μ ,

$$\Gamma_{\mu\nu}(x-y) = \left[g^{\mu\nu}(\square_x + m^2(a)) - \partial_x^\mu \partial_x^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial_x^\mu \partial_x^\nu}{\square} \right] \delta(x-y). \quad (1.31)$$

Esta função IIP bosônica, não tem divergência nenhuma.

1.2.2 Propagador Exato do Férmiion

Desde a eq.(1.23), fazendo $J^\mu = 0$, e derivando com respeito às fontes fermiônicas $\bar{\eta}(x)$ e $\eta(y)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= -\frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = G(x-y) \\ &= i \int dA_\mu \exp\left(i \int dz \frac{1}{2} A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu\right) G(x,y;A). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Depois de integrar no campo A_μ na eq.(1.32), obtemos o propagador exato do férmiion

$$G(x-y) = i \exp\left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F(x-y) \quad (1.33)$$

onde $f(k)$ é dado pela eq.(1.29),

Na exponencial que aparece na equação (1.33), o termo

$$-\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \quad (1.34)$$

é divergente ultravioleta (ver eq.(1.38)), e não tem divergências infravermelhas: o segundo termo na mesma exponencial

$$-i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2(k^2 - m^2(a))} \quad (1.35)$$

é livre de divergências. Então, o propagador fermiônico exato (1.33) tem uma fase indefinida, o que indica a necessidade de uma renormalização de função de onda fermiônica, como veremos logo nesta seção.

A divergência UV acima (1.34) manifesta-se de maneira mais contundente quando vista no espaço euclidiano. Neste espaço o propagador fermiônico é [12]

$$G(x-y) = i \exp \left\{ e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f^E(k) [1 - e^{ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F^E(x-y) \quad (1.36)$$

onde

$$f^E(k) = -\frac{2\pi}{e^2(a-1)k^2} + \frac{1}{k^2(k^2 + m^2(a))}. \quad (1.37)$$

Na exponencial em (1.36) o termo

$$\begin{aligned} -\frac{2\pi}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{ik \cdot (x-y)}}{k^2} &= \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \frac{1}{e^2(a-1)} \ln \left(\frac{|\alpha|}{|x-y|} \right) \\ &= \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.38)$$

sendo o parâmetro α um regulador ultravioleta, e o ponto $x = y$, ponto singular do propagador. Portanto, para $a > 1$ o propagador é nulo, o que conduz a uma teoria física e matematicamente inconsistente; para $a < 1$ o propagador é infinito, o que nos levaria

a renormalizar o campo fermiônico. A dependência em a é, portanto, crucial para a definição da teoria no setor fermiônico.

O requerimento adicional de que a massa do fóton seja positiva e real implica em $-1 \leq a \leq 1$.

Lembramos ainda que para $a = 1$, a conta deve ser refeita desde o início, e fornece um resultado finito, em concordância com a literatura.

Agora calculamos a função IIP de dois pontos fermiônica $\Gamma(x_1, x_2)$. A função $G(x-y)$ satisfaz à seguinte equação

$$\left[\not{\partial}_x + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \not{k} e^{-ik \cdot (x-y)} \right] G(x-y) = \delta(x-y). \quad (1.39)$$

A determinação de $\Gamma(x_1, x_2)$ é mais simples no espaço de momenta, pois sabemos que $\tilde{\Gamma}(p) \tilde{G}(p) = i$, sendo $\Gamma(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \tilde{\Gamma}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}$ e $G(x-y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \tilde{G}(p) e^{-ip \cdot (x-y)}$. Passando à representação de Fourier, temos

$$-i\not{p} \tilde{G}(p) + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \not{k} \tilde{G}(p-k) = 1, \quad (1.40)$$

de onde obtemos uma equação integral para o propagador fermiônico $\tilde{G}(p)$ no espaço de momenta

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{\not{p}} - ie^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \tilde{G}(p-k), \quad (1.41)$$

os primeiros termos são

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) = & \frac{i}{\not{p}} + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p}-\not{k}} + \\ & - ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f(k) f(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p}-\not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p}-\not{k}-\not{s}} + \dots \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde já vemos uma divergência (UV) logarítmica fazendo o power-counting nos termos da expansão acima para o propagador fermiônico $\tilde{G}(p)$ (temos que usar a forma explícita

de $f(k)$). Isto nos faz ver melhor que precisamos de uma renormalização de função de onda fermiônica.

A expansão (1.42) pode ser reescrita como

$$\tilde{G}(p) = \tilde{G}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(p) \quad (1.43)$$

onde

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{i}{\not{p}} \quad (1.44)$$

$$\tilde{G}_1(p) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \quad (1.45)$$

$$\tilde{G}_2(p) = -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f(k)f(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} \quad (1.46)$$

Mostraremos que esta expansão é equivalente a uma expansão em loops usando o propagador completo do fóton (como veremos no capítulo 3). Podemos identificar então, que o comportamento ultravioleta do propagador completo do fóton é determinado pelo termo (presente em $f(k)$)

$$\frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

que tem comportamento ultravioleta tipo Proca. É este termo o que gera a divergência logaritmica (UV) que aparece na expansão (1.42)

Da eq.(1.41), encontramos a função $\tilde{\Gamma}(p)$:

$$\tilde{\Gamma}(p) = \frac{1}{1 - e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \not{k} \tilde{G}(p-k)} \not{p}. \quad (1.47)$$

ou

$$\tilde{\Gamma}(p) = \not{p} \left[1 + ie^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f(k) \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \mathcal{O}(e^4) \right] \quad (1.48)$$

Como já observamos, o denominador de (1.47) ou mais claramente na expansão (1.48) se tem divergência (UV) logarítmica. Isso mostra a necessidade de fazer uma renormalização da função IIP $\tilde{\Gamma}(p)$.

1.2.3 Função de 3 Pontos $(\psi\bar{\psi}A_\mu)$ Exata

Da eq.(1.23), fazendo primeiro as derivadas com respeito às fontes fermiônicas, igualando $\eta = \bar{\eta} = 0$, integrando no campo A_μ e fazendo uma derivada com respeito à fonte J^μ , pondo em seguida $J = 0$, obtemos

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)A_\mu(z)|0\rangle = i \frac{\delta^3 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta J^\mu(z)\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} = G_\mu(x, y, z),$$

$$G_\mu(x, y, z) = i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} h_\mu(k) [e^{-ik\cdot(z-x)} - e^{-ik\cdot(z-y)}] G(x-y), \quad (1.49)$$

onde

$$h_\mu(k) = \frac{2\pi k_\mu}{e^2(a-1)k^2} - \frac{\gamma_5 \bar{k}_\mu}{k^2(k^2 - m^2(a))}, \quad (1.50)$$

A função de 3 pontos (1.49) tem as mesmas divergências que o propagador fermiônico, o que significa que não precisamos renormalizar a constante de acoplamento da teoria. Podemos mostrar também que esta pode ser expandida em loops, usando o propagador exato do fóton.

Agora calculamos a função 1P de 3 pontos Γ_μ . Partimos da seguinte equação

$$\int dz' \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(z')\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z')} = -\delta(x-y). \quad (1.51)$$

Derivando esta equação com respeito a $A^\mu(z)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int dz' \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta A^\mu(z)\delta\psi(z')\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z')} + \\ & + \int dz' dz'' \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\psi(z')\delta\bar{\psi}(x)} \frac{\delta^3 W}{\delta J_\nu(z'')\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(z')} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A^\mu(z)\delta A^\nu(z'')} = 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & i \int dz' \Gamma_\mu(x, z', z) G(z' - y) + \\ & + \int dz' dz'' \Gamma(x - z') G^\nu(z', y, z'') \Gamma_{\nu\mu}(z'' - z) = 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

A função $G_\mu(x, y, z)$ pode ser expressa como

$$G_\mu(x, y, z) = ie \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{dq}{(2\pi)^2} h_\mu(q) \left[\tilde{G}(p+q) - \tilde{G}(p) \right] e^{-ip \cdot (x-y) - iq \cdot (z-y)}.$$

Tomando a transformada de Fourier da eq.(1.53), e substituindo a expressão para $\Gamma_{\nu\mu}$, tem-se

$$\Gamma_\mu(p, k, q) \tilde{G}(-k) = -e(2\pi)^2 \delta(p+k+q) \tilde{\Gamma}(p) \frac{\not{q} \gamma_\mu}{q^2} \left[\tilde{G}(p+q) - \tilde{G}(p) \right].$$

Então

$$\Gamma_\mu(p, k, q) = ie(2\pi)^2 \delta(p+k+q) \tilde{\Gamma}(p) \frac{\not{q} \gamma_\mu}{q^2} \left[\tilde{G}(p+q) - \tilde{G}(p) \right] \Gamma^{(2)}(-k),$$

de onde temos

$$\Gamma_\mu(x, y, z) = \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{dq}{(2\pi)^2} \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) e^{-ip \cdot (x-y) - iq \cdot (z-y)}, \quad (1.54)$$

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, q) = e \frac{\gamma_\mu \not{q}}{q^2} \left[\tilde{\Gamma}(p+q) - \tilde{\Gamma}(p) \right]. \quad (1.55)$$

Da expressão anterior vemos que não precisamos renormalizar $\tilde{\Gamma}_\mu(p, q)$, bastando renormalizar a função $\tilde{\Gamma}(p)$.

Podemos adiantar que a possibilidade de expandir as funções de Green em termos do propagador exato do fóton terá um papel importante na análise semi-perturbativa que faremos quando chegar o momento de impor as condições de renormalização.

1.3 Identidades de Ward

Seguimos aqui o método padrão para obter as identidades de Ward [27, 28]. Para isto, partimos do funcional gerador $Z[\bar{\eta}, \eta, J]$

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left\{ i \int dx (\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta) \right\}. \quad (1.56)$$

Fazemos a seguinte transformação de calibre no funcional gerador

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\lambda, \\ \psi &\rightarrow \psi + i\lambda\psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} - i\lambda\bar{\psi}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

com parâmetro λ infinitesimal. A medida fermiônica não é invariante de calibre (como veremos no capítulo seguinte, eqs.(2.5),(2.9)), e muda da seguinte maneira

$$d\psi d\bar{\psi} \rightarrow e^{-\frac{i(a-1)}{2\pi} \int dx (\frac{1}{2}\lambda\Box\lambda + e\lambda\partial\cdot A)} d\psi d\bar{\psi}. \quad (1.58)$$

onde iremos tomar apenas os termos lineares em λ (infinitesimal) que contribuem para a fase do Jacobiano. O funcional gerador (1.56) fica

$$\begin{aligned} Z[\bar{\eta}, \eta, J] &= \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left\{ i \int dx (\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + J\cdot A + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ i \int dx \lambda(x) \left(i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \frac{1}{e}\partial\cdot J - \frac{e}{2\pi}(a-1)\partial\cdot A \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Sabemos que, dentro da integral funcional com fontes,

$$A_\mu = -i\frac{\delta}{\delta J^\mu}, \quad \psi = -i\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} = i\frac{\delta}{\delta \eta}. \quad (1.60)$$

Podemos, então, reescrever (1.59) como

$$Z[\bar{\eta}, \eta, J] = \exp \left\{ i \int dx \lambda(x) \left(\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta \eta} - \frac{1}{e}\partial\cdot J + \frac{ie}{2\pi}(a-1)\partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) \right\} Z[\bar{\eta}, \eta, J].$$

Expandindo a exponencial até ordem λ , obtemos a identidade de Ward satisfeita pelo funcional gerador $Z[\bar{\eta}, \eta, J]$

$$\left[\bar{\eta}\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta\frac{\delta}{\delta \eta} - \frac{1}{e}\partial_x^\mu J_\mu + \frac{ie}{2\pi}(a-1)\partial_x^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right] Z[\bar{\eta}, \eta, J] = 0. \quad (1.61)$$

Pondo $Z[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{iX[\bar{\eta}, \eta, J]}$, onde $X[\bar{\eta}, \eta, J]$ é o funcional gerador das funções de Green conexas, temos

$$i\bar{\eta}\frac{\delta X}{\delta \bar{\eta}} - i\eta\frac{\delta X}{\delta \eta} - \frac{1}{e}\partial_x^\mu J_\mu - \frac{e}{2\pi}(a-1)\partial_x^\mu \frac{\delta X}{\delta J^\mu} = 0. \quad (1.62)$$

Consideramos agora o funcional gerador das funções IIP $\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$

$$\Gamma[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = X[\bar{\eta}, \eta, J] - \int dx (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + A_\mu J^\mu), \quad (1.63)$$

onde

$$\frac{\delta X}{\delta \bar{\eta}} = \psi, \quad \frac{\delta X}{\delta \eta} = -\bar{\psi}, \quad \frac{\delta X}{\delta J^\mu} = A_\mu, \quad (1.64)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = -\eta, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = \bar{\eta}, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} = -J^\mu. \quad (1.65)$$

A identidade de Ward para o funcional gerador das funções IIP é

$$i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} \psi(x) - i \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} \bar{\psi}(x) + \frac{1}{e} \partial_x^\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A^\mu(x)} - \frac{e}{2\pi} (a-1) \partial_x^\mu A_\mu(x) = 0. \quad (1.66)$$

Então, derivando (1.66) com respeito a $A^\nu(y)$ e fazendo $\psi = \bar{\psi} = A_\mu = 0$, temos

$$\partial_x^\mu \Gamma_{\mu\nu}(x-y) - \frac{e^2}{2\pi} (a-1) \partial_x^\nu \delta(x-y) = 0, \quad (1.67)$$

e, substituindo a expressão calculada para $\Gamma_{\mu\nu}(x-y)$, mostramos que a eq.(1.67) é satisfeita para todo valor do parâmetro $a \neq 1$. A equação (1.67) expressa a não transversalidade do propagador do fóton, na teoria regularizada com $a \neq 1$.

Em seguida, derivando (1.66) com respeito a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$, depois de fazer $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$ temos

$$i\Gamma(z-x) \delta(x-y) - i\Gamma(x-y) \delta(x-z) = \frac{1}{e} \partial_x^\mu \Gamma_\mu(z, y, x), \quad (1.68)$$

que, no espaço de momentum, se expressa assim

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) = \tilde{\Gamma}(p+q) - \tilde{\Gamma}(p). \quad (1.69)$$

Esta última identidade será importante no estudo da renormalizabilidade da teoria, a ser feito mais adiante. Observamos que esta identidade é igualmente obtida no caso

invariante de calibre ($a = 1$) e que ela é satisfeita pela expressão calculada exatamente para $\tilde{\Gamma}_\mu(p, q)$ na equação (1.55). A equação (1.69) tem caráter formal, pois envolve quantidades divergentes. Para que ela assuma um papel relevante é preciso mostrar que ela é satisfeita pelas funções de Green na teoria regularizada, e observar suas possíveis modificações após a renormalização. Isto será estudado posteriormente, no capítulo 3 e no apêndice C.

Capítulo 2

Análise Perturbativa

Neste capítulo, iremos considerar o modelo de Schwinger do ponto de vista perturbativo, visando tanto a aplicação posterior do procedimento de renormalização quanto o esclarecimento de uma eventual origem perturbativa (no sentido de que os gráficos de Feynman que constituem a expansão perturbativa sejam divergentes UV) para as divergências encontradas no capítulo anterior. Partiremos da teoria definida anteriormente na equação (1.1),

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\cancel{A})\psi. \quad (2.1)$$

O funcional $W[A]$ é explicitamente calculado como vimos na eq.(1.14). Contudo, se $a \neq 1$, a ação efetiva não é invariante de calibre. Isto nos traz o seguinte problema: Observando a equação acima, vemos que, para poder definir um propagador livre para o campo A_μ precisamos introduzir uma condição de fixação de calibre. Entretanto, como a teoria após a integração dos férmions não é invariante de calibre, o resultado da sua quantização depende, em potencial, da condição utilizada. A ausência de um propagador livre para o fóton, por sua vez, inviabiliza a análise perturbativa da teoria tal qual aparece em (2.1). Precisamos, portanto, de técnicas que nos permitam analisar a teoria

perturbativamente, no caso em que há anomalias na simetria de calibre.

Neste capítulo descrevemos duas dessas técnicas, aplicando-as ao modelo de Schwinger e mostrando a sua equivalência (em oposição a certos resultados na literatura) [29]: o formalismo chamado “invariante de calibre” (devido ao fato de, após a introdução de um campo novo, o campo de Wess-Zumino, a teoria efetiva ser invariante de calibre) e a abordagem “não invariante de calibre”, onde tal campo não é considerado.

2.1 Modelo de Schwinger no Formalismo Invariante de Calibre

O funcional gerador da teoria (2.1) é dado pela eq.(1.22)

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx (\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J A) \right]. \quad (2.2)$$

Consideramos, por agora, apenas a integração fermiônica,

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= \int d\psi d\bar{\psi} e^{i \int dx (\bar{\psi} D[A_\mu] \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \\ &= \int d\psi d\bar{\psi} e^{i \int dx \bar{\psi} D[A_\mu] \psi} \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Façamos a seguinte mudança de variáveis fermiônicas

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi = e^{i\theta} \psi^g \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}^g e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Em geral, pode-se esperar que a medida fermiônica não seja invariante sob essa transformação, a menos que utilizemos explicitamente uma prescrição invariante de calibre para defini-la (o que é possível, no modelo de Schwinger). Podemos esperar, portanto, que

$$d\psi d\bar{\psi} = J[\theta, A_\mu] d\psi^g d\bar{\psi}^g, \quad (2.5)$$

onde $J[\theta, A_\mu]$ é o Jacobiano da transformação, a ser calculado. A integral fermiônica fica então

$$I[A_\mu] = J[\theta, A_\mu] \int d\psi^g d\bar{\psi}^g e^{i \int dx \bar{\psi}^g e^{-i\theta} D[A_\mu] e^{i\theta} \psi^g} \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right].$$

Usando agora que

$$e^{-i\theta} D[A_\mu] e^{i\theta} = D[A_\mu^g], \quad (2.6)$$

onde

$$A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta, \quad (2.7)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} I[A_\mu] &= J[\theta, A_\mu] \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right] \det iD[A_\mu^g] \\ &= \exp \left[-i \int dx dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right] \det iD[A_\mu]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dessa equação calculamos o Jacobiano,

$$J[\theta, A_\mu] = \frac{\det iD[A_\mu]}{\det iD[A_\mu^g]} = e^{i(W[A_\mu] - W[A_\mu^g])}. \quad (2.9)$$

Podemos observar que, se usamos alguma prescrição que preserve a invariância de calibre de $W[A_\mu]$, obtemos $J[\theta, A_\mu] = 1$, em concordância com as nossas expectativas.

Voltando ao problema de definir, em (2.2), um propagador livre para o campo A_μ . notamos que, usualmente, utiliza-se a técnica de Faddeev-Popov [14] para se obter uma integração funcional bem definida. Isso é necessário, no caso em que a ação efetiva é invariante de calibre, porque a integração original é redundante, sendo o produto de infinitas integrais iguais. Harada e Tsutsui [18], por um lado, e Babelon, Schaposnik e Viallet [19], por outro, observaram que isso não é mais obrigatório quando a teoria é anômala de calibre, pois neste caso, diferentes órbitas de calibre de A_μ dão contribuições

diferentes. Contudo, a técnica de Faddeev-Popov ainda é passível de ser aplicada, pois não passa da multiplicação por 1, expresso como

$$1 = \Delta_f[A_\mu] \int d\theta \delta(f[A_\mu^g]), \quad (2.10)$$

onde $d\theta$ representa a medida invariante sobre o grupo $U(1)$. $g = e^{-i\theta} \in U(1)$ e $f[A_\mu]$ é a condição de fixação de calibre. Assim, inserindo (2.10) na eq.(2.2) temos

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu^g]) \times \quad (2.11)$$

$$\times \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu \right) \right].$$

Fazemos uma mudança de variáveis de integração $A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}}$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^{g^{-1}} = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta, \quad (2.12)$$

sendo dA_μ e $\Delta_f[A_\mu]$, invariantes por construção. Assim

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \times \quad (2.13)$$

$$\times \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A^{g^{-1}}] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu^{g^{-1}} \right) \right].$$

Se redefinimos os campos fermiônicos segundo a regra

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi = e^{i\theta} \psi^g, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}^g e^{-i\theta}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

a Lagrangeana retorna à forma original. Porém, se a medida fermiônica não é invariante pela transformação (2.14), ela gera a ação de Wess-Zumino, $\alpha(A_\mu, g^{-1})$,

$$d\psi d\bar{\psi} = d\psi^g d\bar{\psi}^g e^{i\alpha(A_\mu, g^{-1})}, \quad (2.15)$$

onde $\alpha(A_\mu, g^{-1}) = W[A_\mu^{g^{-1}}] - W[A_\mu]$. Usando a expressão (1.14) para $W[A_\mu]$, obtemos

$$\alpha(A_\mu, g^{-1}) = \frac{(a-1)}{2\pi} \int dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - e\theta \partial_\mu A^\mu \right). \quad (2.16)$$

sendo o campo θ chamado de *campo de Wess-Zumino*. Assim,

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi^g d\bar{\psi}^g d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) e^{i\alpha(A_\mu, g^{-1})} \times \quad (2.17)$$

$$\times \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi^g, \bar{\psi}^g, A] + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi^g + \bar{\psi}^g e^{-i\theta} \eta + J \cdot A + \frac{1}{e} J \cdot \partial\theta \right) \right].$$

Mudando a notação, regressamos às antigas variáveis ψ e $\bar{\psi}$.

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) e^{i\alpha(A_\mu, g^{-1})} \times \quad (2.18)$$

$$\times \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi + \bar{\psi} e^{-i\theta} \eta + J \cdot A + \frac{1}{e} J \cdot \partial\theta \right) \right].$$

Como vemos, agora podemos definir um propagador livre para o campo A_μ . A quantização da teoria é, assim, independente da escolha de $f[A_\mu]$, como na formulação usual de Faddeev-Popov.

Usamos a condição de Lorentz

$$f[A_\mu] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial \cdot A. \quad (2.19)$$

exponenciamos a função δ e absorvemos $\Delta_f[A]$ na constante de normalização (pois a teoria é abeliana e os fantasmas de Faddeev-Popov se desacoplam). Dessa forma,

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N' \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta e^{i\alpha(A_\mu, g^{-1})} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + \right. \right. \quad (2.20)$$

$$\left. \left. + \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ + e\mathbf{A}) \psi + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi + \bar{\psi} e^{-i\theta} \eta + J \cdot A + \frac{1}{e} J \cdot \partial\theta \right) \right].$$

A eq.(2.20) será o ponto de partida para a análise perturbativa da teoria definida pela eq.(2.1). Como estamos em uma teoria não invariante de calibre a fonte J^μ terá sua divergência $\partial_\mu J^\mu \neq 0$, em geral. Outra coisa que deve ser assinalada é que, no processo de definir o propagador livre do campo A_μ , a teoria adquire um grau de liberdade adicional, dado pelo campo de Wess-Zumino [17], o campo θ . O campo θ , na versão final (2.20) do funcional gerador, ganha interação com os férmions e as fontes fermiônicas. Esta interação

é muito complicada, e impede o cálculo exato de $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$. Contudo, é possível o cálculo exato de funções de correlação arbitrárias, como se viu no capítulo anterior (vide apêndice B).

Lembremos que a possibilidade de definir corretamente um propagador livre para o campo A_μ é essencial para fazer a análise perturbativa da teoria, e assim, poder ver se as divergências ultravioletas que aparecem nas funções de Green envolvendo férmions são ou não de origem perturbativa.

2.1.1 Análise Perturbativa

a.– Propagador do Fóton

Da eq.(2.20)

$$\begin{aligned} \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle &= - \left. \frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta J^\nu(y) \delta J^\mu(x)} \right|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \\ \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle &= N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \left[A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) \right] \times \\ &\quad \times \left[A_\nu(y) + \frac{1}{e} \partial_\nu \theta(y) \right] \exp(i S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta]). \end{aligned} \quad (2.21)$$

ação efetiva $S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta]$ é definida por

$$\begin{aligned} S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta] &= \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\not{A}) \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{(a-1)}{2\pi} e\theta \partial_\mu A^\mu \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Notamos que o propagador do fóton original (2.1) é a soma de propagadores que se referem a uma teoria efetiva $S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta]$ envolvendo o campo θ . Vamos denotar os valores esperados nessa teoria por $|\cdot\rangle_\theta$. Temos assim em (2.21) que

$$\begin{aligned} \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle &\equiv \theta \langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle_\theta + \frac{1}{e} \theta \langle 0|T A_\mu(x) \partial_\nu^y \theta(y)|0\rangle_\theta + \\ &\quad + \frac{1}{e} \theta \langle 0|T \partial_\mu^x \theta(x) A_\nu(y)|0\rangle_\theta + \frac{1}{e^2} \theta \langle 0|T \partial_\mu^x \theta(x) \partial_\nu^y \theta(y)|0\rangle_\theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Somando as contribuições, obtemos a polarização do vácuo em ordem e^2 ,

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{\mu\nu}(p) &= -i\Pi_{\mu\nu}(p) - \frac{ie^2}{2\pi}(a-1)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \\ &= im^2(a) \left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.25) é uma série geométrica com n -ésimo termo ($n \geq 1$)

$$\frac{-i}{p^2} \left(\frac{m^2(a)}{p^2} \right)^n \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right).$$

Somando a série (2.25) temos

$$\text{Diagrama} = \frac{-i}{p^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) - \frac{i\xi p_\mu p_\nu}{p^4}, \quad (2.27)$$

$$\theta \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle_\theta = -i \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{p^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \frac{\xi p_\mu p_\nu}{p^4} \right] e^{-ip \cdot (x-y)}.$$

a.2.- Propagador do Campo θ . $\theta \langle 0 | T \theta(x) \theta(y) | 0 \rangle_\theta$:

$$\begin{aligned} \text{Diagrama} &= \text{Diagrama} + \text{Diagrama} \\ &= \frac{2\pi}{a-1} \frac{i}{p^2} - \frac{i\xi e^2}{p^4}, \\ \theta \langle 0 | T \theta(x) \theta(y) | 0 \rangle_\theta &= i \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \left[\frac{2\pi}{a-1} \frac{1}{p^2} - \frac{\xi e^2}{p^4} \right] e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

a.3.- Termos Mistos $\theta - A_\mu$, ${}_\theta\langle 0|T\theta(x)A_\mu(y)|0\rangle_\theta$ e ${}_\theta\langle 0|TA_\mu(x)\theta(y)|0\rangle_\theta$:

i)  = $-\frac{\xi e p_\mu}{p^4}$,

$${}_\theta\langle 0|T\theta(x)A_\mu(y)|0\rangle_\theta = -\int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{\xi e p_\mu}{p^4} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (2.29)$$

ii)  = $\frac{\xi e p_\mu}{p^4}$,

$${}_\theta\langle 0|TA_\mu(x)\theta(y)|0\rangle_\theta = \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{\xi e p_\mu}{p^4} e^{-ip\cdot(x-y)}. \quad (2.30)$$

De (2.23) obtemos o propagador do fóton para a teoria (2.1) somando todas as contribuições,

$$\langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = -i \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{p^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] e^{-ip\cdot(x-y)},$$

cujo resultado é igual ao obtido na eq.(1.27).

b.- Propagador do Férmion

Considerando o funcional gerador (2.20), obtemos o propagador do férmion

$$\begin{aligned} G(x-y) &= \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = -\left. \frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \right|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} = \\ &= N' \int dA_\mu d\theta d\psi d\bar{\psi} \psi(x)\bar{\psi}(y) \exp \left(i S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \theta] + \int dz \theta(z) j(z, x, y) \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

com $j(z, x, y) = \delta(z-x) - \delta(z-y)$. Este termo é gerado pela derivação do funcional gerador (2.20) com respeito às fontes fermiônicas $\bar{\eta}(x)$ e $\eta(y)$.

Integrando no campo θ ,

$$G(x-y) = \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2} \right\} G_p(x-y) \quad (2.32)$$

onde a exponencial contém a divergência encontrada em (1.34) ou (B.2), (no cálculo exato do propagador fermiônico), e é gerada após a integração no campo θ . Esta divergência não é cancelada pelo fator de normalização N'' . $G_p(x-y)$ é definido a partir da integração funcional restante em termos dos campos A_μ , ψ e $\bar{\psi}$.

$$G_p(x-y) = N'' \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi}(y) \exp \left\{ i \int dz \left(\frac{1}{2} A_\mu H_\xi^{\mu\nu} A_\nu + \bar{\psi}(i\partial + eA)\psi + eA_\mu l^\mu(z, x, y) \right) \right\} \quad (2.33)$$

Em (2.33) temos

$$l^\mu(z, x, y) = \partial_z^\mu [D_F(z-x) - D_F(z-y)]$$

e $H_\xi^{\mu\nu}$ é dado por

$$H_\xi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \square + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{2\pi} (a-1) \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square},$$

que dará o novo propagador livre $h_{\mu\nu}^\xi$ do campo A_μ

$$h_{\mu\nu}^\xi = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{i\xi k_\mu k_\nu}{k^2 [k^2 + \frac{\xi e^2}{2\pi} (a-1)]},$$

sendo o seu comportamento ultravioleta da forma k^{-2} .

Calculamos agora $G_p^{(2)}(x-y)$ e extraímos dele a contribuição para a auto-energia do férmion a 1-loop,

$$\begin{aligned} -i\Sigma_p(p) &= -e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma^\nu h_{\mu\nu}^\xi \\ &= i\not{p} \left[\frac{e^2}{4\pi p^2} - \frac{1}{2(a-1)} \ln \left(1 + \frac{\xi e^2}{2\pi p^2} (a-1) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

que é finito, assim como são os demais gráficos, ou seja, não detectamos divergências UV no nível perturbativo. As regras de Feynman para calcular (2.34) são agora dadas pela ação aparecendo na integração funcional (2.33).

Então, a análise perturbativa feita no formalismo invariante de calibre nos mostra que as divergências que aparecem nas funções de Green envolvendo férmions não tem origem na expansão perturbativa, isto é, os gráficos de Feynman são finitos em todas as ordens.

2.2 Modelo de Schwinger no Formalismo Não Invariante de Calibre

Temos ainda uma outra maneira de abordar o problema perturbativamente, a qual é comumente chamada de “formalismo não invariante de calibre” [20, 30]. Nesta abordagem usamos o fato de que o desacoplamento da parte longitudinal de A_μ (que classicamente pode ser conseguido com uma transformação de calibre sobre os férmions) não mantém, em geral, a medida fermiônica invariante na integral funcional. Este fato pode ser explorado para definir a teoria perturbativamente, como veremos a seguir.

Partimos novamente da densidade de Lagrangeana

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\cancel{A})\psi. \quad (2.35)$$

O funcional gerador da teoria é

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx (\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J\cdot A) \right]. \quad (2.36)$$

Desmembramos o campo de calibre em suas partes longitudinal e transversal

$$eA_\mu = \partial_\mu\rho - \tilde{\partial}_\mu\phi, \quad (2.37)$$

e, então, no funcional gerador (2.36)

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(\bar{\psi}(i\cancel{\partial} + \cancel{\partial}\rho - \tilde{\partial}\phi)\psi + \right. \right. \quad (2.38) \\ \left. \left. + \frac{1}{2e^2}\phi\Box^2\phi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + \frac{1}{e}J_\mu\partial^\mu\rho - \frac{1}{e}J_\mu\tilde{\partial}^\mu\phi \right) \right],$$

vemos que, a parte longitudinal do campo A_μ (o campo ρ) não tem termo cinético, o que nos impede de fazer uma análise perturbativa. Então, para lhe dar dinâmica aproveitamos a não invariância da medida fermiônica. Fazemos uma mudança de variáveis nos férmions

visando desacoplá-los da parte longitudinal de A_μ

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi = e^{i\rho}\psi' \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{i\rho}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

A medida fermiônica não é invariante pela transformação (2.39),

$$d\psi d\bar{\psi} = J_{ac} d\psi' d\bar{\psi}'.\tag{2.40}$$

J_{ac} dará o termo cinético para o campo ρ ,

$$\ln J_{ac} = \frac{i}{4\pi}(a-1) \int dx \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho.$$

O funcional gerador (2.38) então assume a forma

$$\begin{aligned}Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int d\rho d\phi d\nu d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\partial}) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} J_\mu \partial^\mu \rho - \frac{1}{e} J_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi \right) \right].\end{aligned}\tag{2.41}$$

A mudança de variáveis fermiônica foi feita para gerar o termo cinético para o campo ρ , mas ela também o desacoplou minimamente dos férmions; o custo é uma interação mais complicada ainda com os férmions e as fontes fermiônicas externas. Entretanto, a teoria dada em (2.41) admite uma análise perturbativa.

A partir de (2.41) faremos a análise perturbativa da teoria no formalismo não invariante de calibre na próxima seção. Para o cálculo das funções de Green exatas, ver o apêndice B.

2.2.1 Análise Perturbativa

a. – Propagador do Fóton

Da eq.(2.41) temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T.A_\mu(x).A_\nu(y)|0\rangle &= - \frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta J^\nu(y)\delta J^\mu(x)} \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \\ \langle 0|T.A_\mu(x).A_\nu(y)|0\rangle &= N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \frac{1}{e^2} \left[\partial_\mu \rho(x) - \tilde{\partial}_\mu \phi(x) \right] \times \\ &\quad \times \left[\partial_\nu \rho(y) - \tilde{\partial}_\nu \phi(y) \right] \exp(i S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi]) \end{aligned} \quad (2.42)$$

O propagador do fóton novamente se decompõe numa soma de quatro propagadores envolvendo ρ e ϕ , cuja dinâmica é governada por uma teoria descrita pela ação efetiva dada abaixo

$$S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi] = \int dx \left[\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \bar{\psi} (i\tilde{\not{D}} - \tilde{\not{D}}\phi) \psi \right]. \quad (2.43)$$

Temos, assim, desde (2.42)

$$\begin{aligned} \langle 0|T.A_\mu(x).A_\nu(y)|0\rangle &= \frac{1}{e^2} \left({}_o\langle 0|T\partial_\mu^x \rho(x)\partial_\nu^y \rho(y)|0\rangle_o - {}_o\langle 0|T\partial_\mu^x \rho(x)\tilde{\partial}_\nu^y \phi(y)|0\rangle_o + \right. \\ &\quad \left. - {}_o\langle 0|T\tilde{\partial}_\mu^x \phi(x)\partial_\nu^y \rho(y)|0\rangle_o + {}_o\langle 0|T\tilde{\partial}_\mu^x \phi(x)\tilde{\partial}_\nu^y \phi(y)|0\rangle_o \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde $|\rangle_o$ refere-se a valores esperados calculados supondo que a dinâmica é gerada por $S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi]$, dada acima.

Vemos de $S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi]$ que ρ é um campo livre, o que implica que os propagadores mistos se anulam,

$${}_o\langle 0|T\partial_\mu^x \rho(x)\tilde{\partial}_\nu^y \phi(y)|0\rangle_o = {}_o\langle 0|T\tilde{\partial}_\mu^x \phi(x)\partial_\nu^y \rho(y)|0\rangle_o = 0. \quad (2.45)$$

As regras de Feynman geradas pela ação efetiva $S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi]$ são

$$\begin{aligned}
 \text{.....} \xrightarrow{p} \text{.....} &= \frac{2\pi}{(a-1)p^2} i, \quad \text{campo } \rho \\
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= \frac{ie^2}{p^4}, \quad \text{campo } \phi \\
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= \frac{i}{\not{p}} \\
 \text{---} \xrightarrow{p} \begin{array}{l} \nearrow \mu \\ \searrow \mu \end{array} &= -\tilde{p}_\mu \gamma^\mu \\
 \begin{array}{l} \nearrow \mu \\ \searrow \mu \end{array} \rightarrow \text{---} \xrightarrow{p} &= \tilde{p}_\mu \gamma^\mu
 \end{aligned}$$

a.1.- Propagador do Campo ϕ , ${}_o\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle_o$:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} + \\
 &+ \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{p+k} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

O loop fermiônico dá (como já foi calculado)

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_\phi(p) &= -\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{1}{\not{k}} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \right) \\
 &= -\frac{i(a+1)}{2\pi} p^2.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Somando a série (2.46), obtemos o propagador do campo ϕ exato

$$\begin{aligned}
 \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \xrightarrow{p} &= \frac{ie^2}{p^2(p^2 - m^2(a))} \\
 {}_o\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle_o &= ie^2 \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2(p^2 - m^2(a))} \quad (2.48)
 \end{aligned}$$

a.2. – Propagador do Campo ρ , ${}_o\langle 0|T\rho(x)\rho(y)|0\rangle_o$:

Na lagrangeana dada na eq.(2.42) o campo ρ não interage. Portanto o propagador é facilmente calculado,

$${}_o\langle 0|T\rho(x)\rho(y)|0\rangle_o = \frac{2\pi i}{(a-1)} \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2} \quad (2.49)$$

O propagador do fóton é obtido da eq.(2.44), com as seguintes contribuições

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = \frac{1}{e^2} {}_o\langle 0|T \partial_\mu^x \rho(x) \partial_\nu^y \rho(y)|0\rangle_o + \frac{1}{e^2} {}_o\langle 0|T \tilde{\partial}_\mu^x \phi(x) \tilde{\partial}_\nu^y \phi(y)|0\rangle_o \quad (2.50)$$

que somadas fornecem

$$-i G_{\mu\nu}(x-y) = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot (x-y)},$$

que é igual à eq.(1.26). Observamos que o termo $\frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ é obtido da contribuição do propagador livre do campo ρ , isto é, num regime não-perturbativo.

b. – Propagador do Férmion

Da eq.(2.41), obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= - \left. \frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta\eta(y)\delta\bar{\eta}(x)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=J=0} \\
 G(x-y) &= N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \psi(x)\bar{\psi}(y) \times \quad (2.51) \\
 &\times \exp \left(i \int dz \left[\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi}) \psi + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \rho j(z, x, y) \right] \right)
 \end{aligned}$$

onde $j(z, x, y) = \delta(z - x) - \delta(z - y)$ é gerado ao fazermos as derivadas funcionais de $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$ com respeito às fontes fermiônicas $\bar{\eta}(x)$ e $\eta(y)$. Vemos, no entanto, que o campo ρ não interage com os férmions nem com o campo ϕ . O termo ρj , presente em (2.51), impede, no entanto, a sua absorção no fator N .

Para ver melhor isto, na eq. (2.51), fazemos uma mudança de variáveis $\rho \rightarrow \rho + \bar{\rho}$ tal que

$$\square \bar{\rho}(z) = \frac{2\pi}{(a-1)} j(z, x, y). \quad (2.52)$$

Então (2.51) torna-se

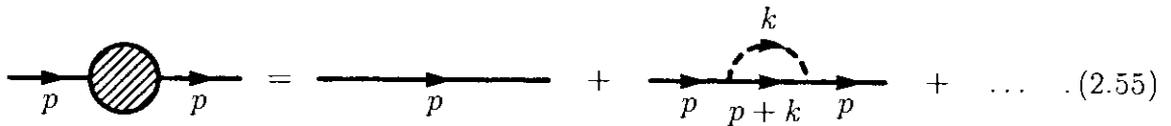
$$G(x-y) = \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \right\} G_p(x-y). \quad (2.53)$$

Mais uma vez, neste ponto, observamos que temos um infinito que não pode ser cancelado pelo fator de normalização N , não tem origem perturbativa e coincide com o calculado anteriormente na formulação invariante de calibre (eq. (2.32)). O infinito é gerado pela integração do campo ρ em (2.51).

A integração funcional restante $G_p(z-y)$, é finita, ou seja, os gráficos de Feynman gerados a partir dela não têm divergências UV (como veremos logo), assim

$$G_p(x-y) = N \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi}(y) \exp(i S_{ef}[\psi, \bar{\psi}, \rho, \phi]). \quad (2.54)$$

Agora calculamos o propagador do férmion perturbativamente, sem levar em conta a integral em ρ , que se fatoriza.



$$\text{Diagrammatic equation (2.55): } \text{Feynman diagram with a shaded circle} = \text{Feynman diagram with a straight line} + \text{Feynman diagram with a loop} + \dots \quad (2.55)$$

A auto-energia do férmion na ordem de 1-loop é

$$-i\Sigma_\psi(p) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \bar{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{k} \frac{1}{k^4}$$

$$-i\Sigma_\psi(p) = \frac{ie^2\not{p}}{4\pi p^2}. \quad (2.56)$$

Dado que (2.56) é finita, não obtemos perturbativamente as divergências que aparecem na eq.(B.7). Além disso, os demais gráficos que contribuem à auto-energia do férmion também são finitos.

Então, concluímos que as divergências que aparecem nas funções de Green envolvendo férmions não têm origem perturbativa. Esta conclusão é igual em ambos formalismos (FIC e FNIC) com os quais analisamos a teoria.

Podemos também estabelecer uma relação entre o FIC e FNIC das equações (2.34) e (2.56): a 1-loop o resultado do propagador fermiônico no FIC é dependente do parâmetro de calibre ξ , mas este resultado é igual ao encontrado na mesma ordem para o FNIC se trabalhamos com $\xi = 0$ (calibre unitário). O resultado é independente de ξ se todas as ordens são somadas.

No contexto do modelo de Schwinger quiral Z. Jian-Ge. *et.al.* [31] identificam uma divergência logarítmica nos gráficos que contribuem a 1-loop ou mais para a auto-energia do férmion. Isto se dá pelo fato dos autores usarem um propagador “completo” para A_μ que não depende do cut-off. Isso deve-se ao fato de que eles não regularizaram a teoria, o que tem que ser feito de maneira não perturbativa (como nós mostraremos no capítulo 3). Depois de fazer a regularização não perturbativa, mostramos que podemos expandir o propagador fermiônico em termos do propagador completo regularizado para o fóton.

Tudo indica que a divergência que ocorre também no modelo de Schwinger quiral tem origem não-perturbativa, de modo inteiramente análogo ao que ocorre no modelo que estamos estudando.

Capítulo 3

Renormalização do Modelo de Schwinger

Sabemos agora que o modelo de Schwinger com $a \neq 1$ tem divergências UV que não são geradas perturbativamente. Tais divergências são geradas pelo campo de Wess-Zumino (FIC) ou pela parte longitudinal do fóton (FNIC) e aparecem no propagador fermiônico ou em funções de Green envolvendo férmions. Neste capítulo pretendemos regularizar estas divergências e fazer a renormalização da teoria. Abordaremos a regularização usando tanto o FIC quanto o FNIC, com os resultados obtidos no FNIC expostos no apêndice C.

3.1 Regularização da Teoria

Vamos utilizar o funcional gerador expresso no FIC na seguinte forma (anterior à exponenciação da função $\delta(f[A_\mu])$), eq. (2.18)

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \frac{1}{e} J \cdot \partial \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{e(a-1)}{2\pi} \theta \partial \cdot A + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi + \bar{\psi} e^{-i\theta} \eta + J \cdot A \right) \right]. \quad (3.1)$$

Como vimos no capítulo anterior, na eq.(2.32), a integração exata do campo θ conduz a divergências no cálculo de funções de correlação envolvendo férmions. Vamos mostrar que podemos regularizar essas divergências usando o método de Pauli-Villars. O método consiste na introdução de um campo β de massa Λ^2 muito grande interagindo com o restante da teoria da seguinte maneira: onde houver um termo de interação para θ , este é substituído por $\theta + \beta$ [14]. Através de manipulações na integral funcional é fácil ver que isso implica numa substituição do propagador original de θ por um propagador mais convergente. Assim, definimos o funcional gerador regularizado $Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J]$,

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta d\beta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + J \cdot A + \frac{1}{e} J \cdot \partial(\theta + \beta) + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{(a-1)}{2\pi} e(\theta + \beta) \partial \cdot A + \right. \right. \quad (3.2)$$

$$\left. \left. - \frac{(a-1)}{4\pi} (\partial_\mu \beta \partial^\mu \beta - \Lambda^2 \beta^2) + \bar{\eta} e^{i(\theta+\beta)} \psi + \bar{\psi} e^{-i(\theta+\beta)} \eta \right) \right].$$

Logo, fazendo outra translação no campo θ : $\theta \rightarrow \theta - \beta$, temos

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta d\beta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \frac{1}{e} J \cdot \partial\theta - \right. \right. \quad (3.3)$$

$$\left. \left. + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta - \frac{(a-1)}{2\pi} e\theta \partial \cdot A - \frac{(a-1)}{2\pi} \partial_\mu \beta \partial^\mu \theta + \frac{(a-1)}{4\pi} \Lambda^2 \beta^2 + J \cdot A + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi + \bar{\psi} e^{-i\theta} \eta \right) \right].$$

e, integrando no campo β , temos finalmente o funcional gerador regularizado

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] + \frac{1}{e} J \cdot \partial\theta + \right. \right. \quad (3.4)$$

$$\left. \left. + J \cdot A - \frac{(a-1)}{4\pi\Lambda^2} \theta \square (\square + \Lambda^2) \theta - \frac{(a-1)}{2\pi} e\theta \partial \cdot A + \bar{\eta} e^{i\theta} \psi + \bar{\psi} e^{-i\theta} \eta \right) \right].$$

Com esta regularização podemos fazer as mudanças de variáveis inversas (às já feitas em (2.12) e (2.14)) nos campos envolvidos na teoria para ver como foi modificada a ação original da eq.(2.1),

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta,$$

$$\begin{aligned}
\psi &\rightarrow \psi = e^{-i\theta} \psi', \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{i\theta}, \\
d\psi d\bar{\psi} &= J d\psi' d\bar{\psi}',
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde J é o jacobiano de transformação da medida fermiônica.

$$\ln J = \frac{i(a-1)}{2\pi} \int dx \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \theta \partial^\mu \theta + e\theta \partial_\mu A^\mu \right). \tag{3.6}$$

Com isso obtemos

$$\begin{aligned}
Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] &= N \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta \left(f[A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta] \right) \times \\
&\times \exp \left[i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] - \frac{(a-1)}{4\pi\Lambda^2} \theta \square^2 \theta + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Lembremos que a fixação de calibre que estamos usando é $f[A_\mu] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial \cdot A$. Fazendo a integral em θ obtemos o seguinte resultado para o funcional gerador regularizado em função dos campos originais da teoria

$$\begin{aligned}
Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] &= N' \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\not{A}) \psi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde ξ_Λ é

$$\xi_\Lambda = \xi + \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a-1)} \tag{3.9}$$

Vemos, a partir do funcional gerador (3.8), que a regularização da teoria é equivalente a agregar à Lagrangeana original um termo de fixação de calibre (de Lorentz) com novo parâmetro de calibre ξ_Λ , dependente do cut-off. O termo tipo Lorentz no funcional gerador (3.8) deixa a teoria finita, quando a massa de Pauli-Villars Λ permanece finita, como veremos ao calcular as funções de Green exatas mais adiante.

A análise da regularização do modelo de Schwinger no formalismo não invariante de calibre é feita no apêndice C. O resultado é equivalente ao obtido na equação (3.8).

Os resultados, tanto no FNIC como no FIC, são exatamente iguais se fixamos o parâmetro de calibre em $\xi = 0$.

3.2 Funções de Green Regularizadas

Podemos partir tanto do funcional gerador (3.8) como de (C.6) para calcular as funções de Green da teoria

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N' \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{\partial} + e\not{A}) \psi + \right. \right. \quad (3.10) \\ \left. \left. -\frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right].$$

Utilizaremos, nas contas a seguir, ξ_Λ e M^2 , definidos como

$$\xi_\Lambda = \begin{cases} \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a-1)} & \text{no FNIC,} \\ \xi + \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a-1)} & \text{no FIC.} \end{cases} \quad (3.11)$$

$$M^2 = \begin{cases} \Lambda^2 & \text{no FNIC,} \\ \Lambda^2 + \frac{\xi e^2}{2\pi}(a-1) & \text{no FIC.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Integrando nos férmions temos

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = N'' \int dA_\mu \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} A_\mu D_\Lambda^{\mu\nu} A_\nu + J \cdot A \right] \right\} \times \quad (3.13) \\ \times \exp \left\{ -i \int dy \bar{\eta}(x) G(x, y; A) \eta(y) \right\},$$

onde

$$D_\Lambda^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\square + m^2(a)) + \left(\frac{1}{\xi_\Lambda} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \quad (3.14)$$

3.2.1 Propagador Regularizado do Fóton

Obtemos diretamente

$$G_{\mu\nu}(x-y; \Lambda) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \tilde{G}_{\mu\nu}(k; \Lambda) e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (3.15)$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k; \Lambda) = \frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \frac{2\pi M^2}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2(k^2 - M^2)} \quad (3.16)$$

A regularização melhora o comportamento ultravioleta do propagador fotônico (k^{-2} quando $k \rightarrow \infty$). No limite $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$: $G_{\mu\nu}(x-y; \Lambda) \rightarrow G_{\mu\nu}(x-y)$, o propagador original do fóton

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot (x-y)},$$

Observamos que o propagador do fóton regularizado pode ser expresso como

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k; \Lambda) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2(a)} + k_\mu k_\nu f_\Lambda(k), \quad (3.17)$$

onde $f_\Lambda(k)$ é

$$f_\Lambda(k) = \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{M^2}{k^2(k^2 - M^2)} - \frac{1}{k^2(k^2 - m^2(a))} \quad (3.18)$$

Também podemos calcular a ação efetiva do fóton

$$\Gamma[A_\mu] = \int dx \frac{1}{2} A_\mu \left[g^{\mu\nu} (\square + m^2(a)) + \left(\frac{1}{\xi_\Lambda} - 1 \right) \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu \quad (3.19)$$

de onde a função IIP de dois pontos bosônica regularizada é calculada

$$\Gamma_{\mu\nu}(x-y; \Lambda) = \left[g^{\mu\nu} (\square_x + m^2(a)) + \left(\frac{1}{\xi_\Lambda} - 1 \right) \partial_x^\mu \partial_x^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial_x^\mu \partial_x^\nu}{\square} \right] \delta(x-y) \quad (3.20)$$

esta função permanece finita quando $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$, como esperado.

3.2.2 Propagador Fermiônico Regularizado

Do mesmo modo calculamos o propagador regularizado do férmion

$$G(x-y; \Lambda) = i \exp \left\{ \frac{i2\pi M^2}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 (k^2 - M^2)} \right\} \times \quad (3.21)$$

$$\times \exp \left\{ -i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 (k^2 - m^2(a))} \right\} G_F(x-y).$$

Conseguimos, portanto, regularizar a divergência UV que aparecia no propagador fermiônico (1.34), sendo controlada pelo parâmetro Λ quando ele fica finito. Não aparecem divergências IR. O propagador fermiônico regularizado é expresso como

$$G(x-y; \Lambda) = i \exp \left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F(x-y), \quad (3.22)$$

com $f_\Lambda(k)$ dada pela eq.(3.18).

O propagador fermiônico regularizado, satisfaz uma equação integral no espaço de momenta, similar à (1.41),

$$\tilde{G}(p; \Lambda) = \frac{i}{\not{p}} - i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} G(p-k; \Lambda). \quad (3.23)$$

os primeiros termos são

$$\tilde{G}(p; \Lambda) = \frac{i}{\not{p}} + e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} + \quad (3.24)$$

$$- i e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} + \dots$$

onde vemos que as divergências (UV) logarítmicas já estão regularizadas na expansão (3.24).

A expansão (3.24) pode ser reescrita como

$$\tilde{G}(p; \Lambda) = \tilde{G}_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(p; \Lambda) \quad (3.25)$$

onde

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{i}{\not{p}} \quad (3.26)$$

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \quad (3.27)$$

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -i e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} \quad (3.28)$$

A expansão (3.24) pode ser expressa em termos do propagador exato regularizado do fóton, eq. (3.15), como veremos mais adiante.

A função IIP de dois pontos fermiônica regularizada é obtida da eq.(3.23)

$$\tilde{\Gamma}(p; \Lambda) = \frac{1}{1 - e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \not{k} \tilde{G}^{(2)}(p - k; \Lambda)} \not{p} \quad (3.29)$$

e, como vimos em (3.24), as divergências já foram regularizadas.

3.2.3 Função de 3 Pontos

Similarmente, a função de três pontos ($\psi \bar{\psi} A_\mu$) regularizada é

$$G_\mu(x, y, z; \Lambda) = -i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[\frac{2\pi M^2 k_\mu}{e^2(a-1)k^2(k^2 - M^2)} + \frac{\gamma_5 \tilde{k}_\mu}{k^2(k^2 - m^2(a))} \right] \times \\ \times [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] G(x-y; \Lambda). \quad (3.30)$$

Ela pode ser reescrita como

$$G_\mu(x, y, z; \Lambda) = i e \int \frac{dk}{(2\pi)^2} h_\mu(k; \Lambda) [e^{-ik \cdot (z-x)} - e^{-ik \cdot (z-y)}] G(x-y; \Lambda) \quad (3.31)$$

onde $h_\mu(k; \Lambda)$ é

$$h_\mu(k; \Lambda) = -\frac{2\pi M^2 k_\mu}{e^2(a-1)k^2(k^2 - M^2)} - \frac{\gamma_5 \tilde{k}_\mu}{k^2(k^2 - m^2(a))}. \quad (3.32)$$

Vemos que, regularizando o propagador fermiônico, regularizamos a função de 3 pontos.

A função IIP de 3 pontos é (seguimos um procedimento análogo ao empregado na subseção (1.2.3))

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, q; \Lambda) = e^{\frac{\gamma_\mu \not{q}}{q^2}} [\tilde{\Gamma}(p+q; \Lambda) - \tilde{\Gamma}(p; \Lambda)]. \quad (3.33)$$

Vemos que, para regularizar a função $\tilde{\Gamma}_\mu(p, q)$, basta regularizar a função $\tilde{\Gamma}(p)$. pois nela estão contidas as divergências quando $\Lambda \rightarrow \infty$. Isto nos indica que apenas uma renormalização de função de onda fermiônica torna a teoria finita.

Com isto, regularizamos a teoria não-perturbativamente para qualquer valor da ambigüidade $a \neq 1$.

3.3 Renormalização

Como é usual vamos partir do Lagrangeano expresso em termos de quantidades renormalizadas ou *vestidas* e suas respectivas constantes de renormalização,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_A F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + Z_e e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (3.34)$$

Em (3.34), Z_A é a constante de renormalização de função de onda fotônica. Z_ψ é a constante de renormalização de função de onda fermiônica e Z_e é a constante de renormalização da carga. A_μ e ψ são os campos renormalizados e e , a constante de acoplamento renormalizada. Permitimos que as quantidades Z_e , Z_ψ e Z_A possam divergir quando $\Lambda \rightarrow +\infty$. Definimos os campos não renormalizados (ou *nus*) A_μ^o e ψ_o como

$$A_\mu^o = \sqrt{Z_A} A_\mu, \quad (3.35)$$

$$\psi_o = \sqrt{Z_\psi} \psi, \quad (3.36)$$

e, também, a constante de acoplamento não renormalizada e_o

$$e_o = \frac{Z_e}{Z_\psi Z_A^{1/2}} e. \quad (3.37)$$

Com as transformações acima, a lagrangeana (3.34) fica expressa, em termos das quantidades não renormalizadas, como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^o F_o^{\mu\nu} + \bar{\psi}_o i \not{\partial} \psi_o + e_o A_\mu^o \bar{\psi}_o \gamma^\mu \psi_o. \quad (3.38)$$

Reescrevemos o lagrangeano (3.34) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}i\rlap{\not{\partial}}\psi + eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ & -\frac{1}{4}(Z_A - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (Z_\psi - 1)\bar{\psi}i\rlap{\not{\partial}}\psi + (Z_e - 1)eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde vemos os contratermos que devemos incluir para renormalizar a teoria. O objetivo do procedimento de renormalização é determinar que escolha de Z_ψ , Z_A e Z_e deve ser feita de modo a tornar todas as funções de Green da teoria finitas. Possíveis ambigüidades na escolha destas constantes serão parametrizadas através de condições de renormalização .

Uma observação que ajuda nesta determinação é a de que as funções de Green puramente bosônicas não possuem divergências. Isso implica na não necessidade de contratermos divergentes para renormalizá-las e permite fixar Z_A em

$$Z_A = 1. \quad (3.40)$$

A discussão para as demais constantes de renormalização será feita mais detalhadamente, a seguir.

Lembremos a identidade de Ward (1.69) satisfeita pela funções IIP de dois pontos fermiônica e a de 3 pontos

$$\frac{1}{e}q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) = \tilde{\Gamma}(p + q) - \tilde{\Gamma}(p). \quad (3.41)$$

Esta equação também é satisfeita pelas funções IIP regularizadas, como vemos em (C.22)

$$\frac{1}{e_o}q^\mu \tilde{\Gamma}_{o\mu}(p, q; \Lambda) = \tilde{\Gamma}_o(p + q; \Lambda) - \tilde{\Gamma}_o(p; \Lambda). \quad (3.42)$$

Ambas as equações são satisfeitas sem restrição alguma pelas funções $\tilde{\Gamma}_{o\mu}$ e $\tilde{\Gamma}_o$.

Substituindo na equação acima as relações entre quantidades nuas e vestidas

$$\tilde{\Gamma}_R(p) = Z_\psi \tilde{\Gamma}_o(p; \Lambda) \quad (3.43)$$

$$\tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) = Z_\psi \tilde{\Gamma}_{o\mu}(p, q; \Lambda). \quad (3.44)$$

Temos então, desde (3.33),

$$\frac{Z_\psi}{Z_e} \frac{1}{e} \frac{1}{Z_\psi} \tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) = \frac{1}{Z_\psi} \frac{\gamma_\mu \not{q}}{q^2} \left[\tilde{\Gamma}_R(p+q) - \tilde{\Gamma}_R(p) \right], \quad (3.45)$$

da equação acima, obtemos

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) = Z_e Z_\psi^{-1} \left[\tilde{\Gamma}_R(p+q) - \tilde{\Gamma}_R(p) \right]. \quad (3.46)$$

Por outro lado, se supusermos que as funções renormalizadas também satisfazem

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) = \tilde{\Gamma}_R(p+q) - \tilde{\Gamma}_R(p), \quad (3.47)$$

comparando (3.46) e (3.47), obteremos

$$Z_e = Z_\psi. \quad (3.48)$$

Voltando à equação (3.37), e lembrando que $Z_A = 1$ (eq. (3.40)), obtemos

$$e_o = e, \quad (3.49)$$

que nos diz que a constante de acoplamento da teoria não é renormalizada, mesmo sendo a teoria não invariante de calibre. Isso mostra que a universalidade da interação eletromagnética, usualmente expressa pelo fato de que $e A_\mu = e_o A_{\mu o}$, pode ser preservada em um esquema de renormalização não invariante de calibre. Em particular, vemos também que a constante de acoplamento não dependerá da escala de energia escolhida para impor as condições de renormalização, fornecendo, portanto, uma função β de Callan-Symanzik nula, isto é

$$\beta = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} e(\mu) \Rightarrow \beta = 0 \quad (3.50)$$

onde μ é a escala de energia escolhida para impor as condições de renormalização.

Por inspeção direta das expressões (3.33) e (3.29) para $\tilde{\Gamma}_\mu^{(3)}$ e $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ podemos ver que a mesma constante de renormalização é suficiente para renormalizar as duas funções.

sem necessidade de renormalização da constante de acoplamento. Com isso provamos que as funções renormalizadas satisfazem as identidades de Ward e, portanto, todo o procedimento é consistente.

3.3.1 Análise Semi-Perturbativa

Suponha que iniciássemos a partir da equação (3.10)

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} + e\cancel{A})\psi + \right. \right. \quad (3.51) \\ \left. \left. -\frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) \right],$$

com ξ_Λ dado pela eq.(3.11). Com a finalidade de fazer cálculos perturbativos, lemos da fórmula acima o propagador livre do fóton como

$$-i\tilde{G}_{\mu\nu}^o(k) = -\frac{i g_{\mu\nu}}{k^2} - i(\xi_\Lambda - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (3.52)$$

O propagador livre do fóton é quadraticamente divergente, no limite $\Lambda \rightarrow +\infty$. Se inseríssemos o propagador calculado ao *tree level* nas funções de correlação pioraríamos sensivelmente o comportamento ultravioleta dos gráficos individuais, fazendo com que a teoria tivesse divergências piores a cada ordem perturbativa, implicando numa aparente não-renormalizabilidade. Contudo, o propagador completo não exibe essa divergência, cancelada na soma dos termos da série geométrica que o define, sendo finito no limite $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$ e não induzindo divergências perturbativas, como foi visto no capítulo anterior. Isso mostra que, na teoria anômala, o que faz sentido é o propagador completo, sendo o *tree level* indefinido para o setor bosônico.

Contudo, podemos fazer uma análise que chamaremos *semi-perturbativa*. O propagador completo regularizado do fóton pode ser expresso, como vimos em (3.17), assim

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(k; \Lambda) = \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2(a)} + k_\mu k_\nu f_\Lambda(k)$$

onde $f_\Lambda(k)$ é dada pela eq.(3.18). O propagador fermiônico completo regularizado é

$$G(x-y; \Lambda) = i \exp \left\{ i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) [1 - e^{-ik \cdot (x-y)}] \right\} G_F(x-y). \quad (3.53)$$

Para calcular a transformada de Fourier do propagador fermiônico, expandimos a exponencial na eq.(3.53)

$$\hat{G}(p, q; \Lambda) = \int dx dy e^{ip \cdot x + iq \cdot y} G(x-y; \Lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{G}_n(p, q; \Lambda), \quad (3.54)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{G}_n(p, q; \Lambda) &= i \int dx dy \int \frac{dk}{(2\pi)^2} e^{ix \cdot (p-k) + iy \cdot (q+k)} \frac{1}{\not{k}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n e^{2n}}{n!} \left(\int \frac{dk'}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k') [1 - e^{-ik' \cdot (x-y)}] \right)^n. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Reescrevemos $\hat{G}_n(p, q; \Lambda)$

$$\hat{G}_n(p, q; \Lambda) = (2\pi)^2 \delta(p+q) \tilde{G}_n(p; \Lambda). \quad (3.56)$$

Podemos escrever agora a expansão (3.54), como

$$\tilde{G}(p) = G_0(p) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(p; \Lambda) \quad (3.57)$$

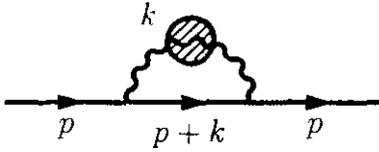
Então, observando os primeiros termos da expansão, vemos que

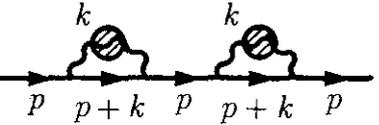
$$\tilde{G}_0(p) = \frac{i}{\not{p}}, \quad (3.58)$$

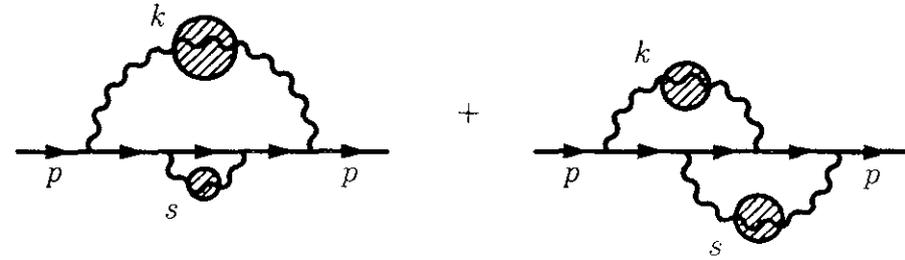
$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = -e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \right), \quad (3.59)$$

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -\frac{i}{2} e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \int \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{2}{\not{p} - \not{k}} + \frac{1}{\not{p} - \not{k} - \not{s}} \right). \quad (3.60)$$

A expansão (3.57) é a mesma (3.24), que também é a expansão da equação integral (3.23). Mostramos (ver apêndice D) que a expansão (3.57) é equivalente a uma expansão em loops usando o propagador completo regularizado do fóton [6], ou seja

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = \text{diagram} \quad , \quad (3.61)$$


$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = \text{diagram} + \text{diagram} \quad (3.62)$$


$$+ \text{diagram} + \text{diagram} \quad ,$$


Para ver se a expansão em loops bosônicos corresponde a uma expansão semiclassica convencional, pasamos a sistema de unidades onde $c = 1$, onde

$$L = T = \hbar M^{-1}$$

Partimos da análise dimensional da ação regularizada

$$S = \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\hbar e^2 (a-1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + e\cancel{A}) \psi \right] \quad (3.63)$$

Assim:

$$[S] = \hbar \quad , \quad [A_\mu] = \hbar^{1/2} \quad , \quad [\psi] = M^{1/2} \quad , \quad [e] = \hbar^{-3/2} M \quad , \quad [\Lambda^2] = \hbar^{-2} M^2$$

Redefinimos os parametyros que aparecem na ação (3.63)

$$e = \hbar^{-3/2} \hat{e} \quad \rightarrow \quad [\hat{e}] = M$$

$$\Lambda^2 = \hbar^{-2} \hat{\Lambda}^2 \quad \rightarrow \quad [\hat{\Lambda}^2] = M^2$$

A ação (3.63) é escrita como

$$S = \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\hat{e}^2(a-1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \bar{\psi} (i\hat{\not{D}} + \hbar^{-3/2} \hat{e} \cdot A) \psi \right] \quad (3.64)$$

Pode-se calcular a ação efetiva

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} W[A_\mu]} &= \int d\psi d\bar{\psi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int \bar{\psi} (i\hat{\not{D}} + \hbar^{-3/2} \hat{e} \cdot A) \psi \right] \\ \frac{i}{\hbar} W[A_\mu] &= \hbar^{-3} \int dx \frac{1}{2} A_\mu \left[\frac{\hat{e}^2}{2\pi} (a+1) g^{\mu\nu} - \frac{\hat{e}^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] \end{aligned}$$

Ação boônica será

$$S_{bos} = \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\hat{e}^2(a-1)}{4\pi\Lambda^2} (\partial \cdot A)^2 + \frac{1}{2} \hbar^{-2} A_\mu \left(\frac{\hat{e}^2}{2\pi} (a+1) g^{\mu\nu} - \frac{\hat{e}^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right) \right]$$

Considerando a representação integral da função Delta de Dirac

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot x \right) \quad [k] = M$$

Tomando a inversa do integrando aparecendo na ação S_{bos} , obtemos o propagador bosônico exato regularizado

$$G(k; \Lambda) = \hbar^2 \left[\frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) + \frac{2\pi \hat{\Lambda}^2}{\hat{e}^2(a-1)} \frac{1}{k^2(k^2 - \hat{\Lambda}^2)} - \frac{1}{k^2(k^2 - m^2(a))} \right]$$

onde $m^2(a) = \frac{\hat{e}^2}{2\pi} (a+1)$ é a massa gerada dinamicamente para o fóton. Temos encontrado que o propagador bosônico exato se comporta como \hbar^2 .

Podemos fazer a contagem de potências de \hbar nos loops que aparecem na expansão do propagador fermiônico em termos do propagador bosônico exato,

$$\text{propagador fermiônico} \rightarrow \hbar$$

$$\text{propagador bosônico} \rightarrow \hbar^2$$

$$\text{vertice} \rightarrow \hbar^{-3/2}$$

O resultado que se obtém é : $L \text{ loops} \Rightarrow \hbar^L$, com isto, temos garantido a nossa expansão semiperturbativa, pois temos em \hbar nosso parâmetro de expansão.

3.3.2 Resultados a 1-loop

Podemos agora calcular as funções IIP a 1-loop (no sentido semiperturbativo descrito acima) e impor condições de renormalização sobre elas de modo que possamos determinar as constantes de renormalização.

A 1-loop (3.61), a contribuição para a auto-energia do férmion é

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma(p; \Lambda) &= -\hbar e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{\not{k}(\not{p} + \not{k})\not{k}}{(p+k)^2} f_\Lambda(k) \\
 &= i\hbar \not{p} \left[\frac{1}{2(a-1)} \ln \left(\frac{M^2}{p^2} - 1 \right) - \frac{1}{2(a+1)} \ln \left| 1 - \frac{m^2(a)}{p^2} \right| \right].
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

E, portanto, a função IIP fermiônica de dois pontos é a 1-loop,

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}(p; \Lambda) &= \not{p} - \Sigma(p; \Lambda) \\
 &= \not{p} \left[1 + \frac{\hbar}{2(a-1)} \ln \left(\frac{M^2}{p^2} - 1 \right) - \frac{\hbar}{2(a+1)} \ln \left| 1 - \frac{m^2(a)}{p^2} \right| + \mathcal{O}(\hbar^2) \right].
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

A função de dois pontos renormalizada $\tilde{\Gamma}_R(p)$ é

$$\tilde{\Gamma}_R(p) = Z_\psi \tilde{\Gamma}(p; \Lambda). \tag{3.67}$$

onde Z_ψ é a constante de renormalização de função de onda fermiônica. O próximo passo é a imposição de condições de renormalização que possam parametrizar ou fixar a parte finita (ambígua) das constantes de renormalização.

Neste ponto devemos responder com clareza à questão: quantas condições de renormalização são necessárias? O objetivo da imposição de tais condições é parametrizar a parte finita das constantes de renormalização (em função de μ , um parâmetro massivo que será introduzido durante a renormalização), como foi dito no parágrafo anterior. As ambigüidades na parte finita das funções de correlação manifestam-se em duas circunstâncias no modelo de Schwinger. Uma delas é na determinação da constante Z_ψ . A outra é na presença de um contratermo do tipo massa $\delta m^2(a) A_\mu A^\mu$, gerado dinamicamente e finito.

A diferença entre as duas situações é que a segunda não representa o resíduo finito de nenhuma constante de renormalização de massa, pois o contratermo não representa uma renormalização multiplicativa (a massa do fóton é zero classicamente). Isso não implica, contudo, que o coeficiente desse contratermo não tenha que ser fixado com o auxílio de condições de renormalização, como acontece com qualquer função de correlação. Chegamos, pois, à conclusão de que precisamos de *duas* condições de renormalização sobre a teoria, uma para parametrizar Z_ψ e a outra para fazer o mesmo por a (que está obviamente relacionado ao contratermo mencionado acima).

A condição que fixará Z_ψ (em função de μ) é facilmente escolhida

$$\tilde{\Gamma}_R(p) \Big|_{\not{p}=\mu} = \not{p}. \quad (3.68)$$

A tarefa é menos óbvia quando tratamos de a . Notamos que, devido a (3.52), no esquema no qual estamos trabalhando não há *tree level* para funções de Green puramente bosônicas, pois o propagador livre é divergente, como já dissemos anteriormente. Reparamos, contudo, que Z_ψ envolve a (ver eq. (3.70)). Podemos, então, resolver o problema impondo outra condição de renormalização sobre $\tilde{\Gamma}_R^{(2)}(p)$, a qual deve relacionar a com μ . A condição mais natural, compatível com o *tree level* é

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}} \tilde{\Gamma}_R(p) \Big|_{\not{p}=\mu} = 1. \quad (3.69)$$

De (3.68) obtemos Z_ψ

$$1 = Z_\psi \left(1 + \frac{\hbar}{2(a-1)} \ln \left| 1 - \frac{M^2}{\mu^2} \right| - \frac{\hbar}{2(a+1)} \ln \left| 1 - \frac{m^2(a)}{\mu^2} \right| + \mathcal{O}(\hbar^2) \right)$$

$$Z_\psi = 1 - \hbar \left(\frac{1}{2(a-1)} \ln \left| 1 - \frac{M^2}{\mu^2} \right| - \frac{1}{2(a+1)} \ln \left| 1 - \frac{m^2(a)}{\mu^2} \right| \right) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (3.70)$$

Podemos obter $\tilde{\Gamma}_R$ na ordem de 1-loop como

$$\tilde{\Gamma}_R(p) = \not{p} + \not{p} \hbar \left(\frac{1}{2(a-1)} \ln \left| \frac{1 - \Lambda^2/p^2}{1 - \Lambda^2/\mu^2} \right| - \frac{1}{2(a+1)} \ln \left| \frac{1 - m^2(a)/p^2}{1 - m^2(a)/\mu^2} \right| \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (3.71)$$

como podemos ver é finito quando $\Lambda^2 \rightarrow \infty$.

E, de (3.69), usando (3.71), obtemos a 1-loop

$$\hbar \left(\frac{1}{a-1} \frac{M^2}{\mu^2 - M^2} - \frac{e^2/2\pi}{\mu^2 - \frac{e^2}{2\pi}(a+1)} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) = 0. \quad (3.72)$$

Para resolver esta equação, devemos considerar as seguintes restrições sobre os parâmetros a e μ

- i) $a \neq 1$, resultado do esquema de regularização não invariante de calibre que estamos considerando.
- ii) $\mu^2 \neq M^2$ e $\mu^2 \neq \frac{e^2}{2\pi}(a+1)$, pontos onde a função IIP $\tilde{\Gamma}(p; \Lambda)$ (3.66) é singular.

Sendo assim, podemos isolar a na equação (3.72)

$$a = 1 - 2M^2 \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{m_{ic}^2} \right). \quad (3.73)$$

onde

$$m_{ic}^2 = \frac{e^2}{\pi} \quad (3.74)$$

é a massa que seria gerada dinamicamente se tivéssemos feito a quantização de maneira invariante de calibre, ou seja, com $a = 1$. A equação acima pode ser resolvida de duas maneiras:

i) Para μ^2 fixo, (3.73) define a como uma função divergente de M^2 , o que implicaria na necessidade de uma renormalização de massa do campo A_μ . Isso não corresponde aos cálculos explícitos realizados para a função de dois pontos bosônica. Vide seção (1.1.2) e apêndice F, onde obtivemos resultados finitos para o parâmetro a . Isto elimina esta solução .

ii) Vamos parametrizar μ^2 como

$$\mu^2 = \frac{e^2}{\pi\lambda} = \frac{m_{ic}^2}{\lambda} \quad (3.75)$$

Assim,

$$\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{m_{ic}^2} = \frac{\lambda - 1}{m_{ic}^2}$$

Escolhemos agora λ (e implicitamente μ^2) como função de M^2 de modo que a equação (3.73) produza um limite finito quando M^2 vai para infinito

$$\lambda - 1 = \frac{\delta_1 m_{ic}^2}{2 M^2} + \delta_2 \frac{m_{ic}^4}{M^4} + \delta_3 \frac{m_{ic}^6}{M^6} + \delta_4 \frac{m_{ic}^8}{M^8} + \dots \quad (3.76)$$

com os δ_i independentes de M^2 e finitos. Assim

$$a = 1 - \delta_1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_{ic}^2}{M^2}\right) \quad (3.77)$$

o que deixa a arbitrário, mas relacionado a μ^2 através de δ_1 . μ^2 , por sua vez, torna-se uma função de M^2 ,

$$\mu^2 = m_{ic}^2 \left(1 + \frac{\delta_1 m_{ic}^2}{2 M^2} + \delta_2 \frac{m_{ic}^4}{M^4} + \delta_3 \frac{m_{ic}^6}{M^6} + \delta_4 \frac{m_{ic}^8}{M^8} + \dots\right)^{-1} \quad (3.78)$$

a qual fornece, no limite $M^2 \rightarrow +\infty$ (que deve ser tomado obrigatoriamente no final dos cálculos),

$$\mu^2 = m_{ic}^2. \quad (3.79)$$

Então, a mantém-se arbitrário e fixamos a escala de energia onde temos impor as condições de renormalização. Além disso, essa escala é exatamente o valor da massa gerada dinamicamente quando a teoria é quantizada de maneira invariante de calibre. isto é, com $a = 1$.

Podemos ainda nos perguntar se a imposição de uma outra condição de renormalização levaria a resultados contraditórios com os encontrados acima. Para isso, consideramos a função de 3 pontos $\tilde{\Gamma}_\mu(p, q; \Lambda)$, que tem a seguinte forma

$$\tilde{\Gamma}_\mu(p, q; \Lambda) = e \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p, q; \Lambda). \quad (3.80)$$

A relação entre $\tilde{\Gamma}_{R\mu}$ e $\tilde{\Gamma}_\mu$ é

$$\tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) = Z_\psi \tilde{\Gamma}_\mu(p, q; \Lambda). \quad (3.81)$$

Calculando $\Lambda_\mu(p, q; \Lambda)$ na ordem de 1-loop, temos

$$\Lambda_\mu(p, q; \Lambda) = \frac{e^3 \gamma_\mu}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[-\frac{1}{m^2(a)} F(x, y; m^2(a)) + \frac{2\pi}{\epsilon^2(a-1)} F(x, y; M^2) \right],$$

onde

$$F(x, y; M^2) = 2 \ln \left| \frac{g(x, y) - (1-x-y)M^2}{g(x, y)} \right| + \frac{h(x, y)}{g^2(x, y)} - \frac{l(x, y)}{g(x, y)} + \frac{h(x, y)}{[g(x, y) - (1-x-y)M^2]^2} + \frac{l(x, y)}{g(x, y) - (1-x-y)M^2}. \quad (3.82)$$

com as funções $g(x, y)$, $h(x, y)$ e $l(x, y)$ definidas por

$$g(x, y) = x(1-x)p^2 - 2xyp \cdot s + y(1-y)s^2. \quad (3.83)$$

$$h(x, y) = 2(\not{p} + \not{\beta})(x\not{p} + y\not{\beta}) - 4(xp + ys)^2, \quad (3.84)$$

$$l(x, y) = \not{p}(x\not{p} + y\not{\beta})\not{\beta}(x\not{p} + y\not{\beta}) + (\not{p} + \not{\beta})(x\not{p} + y\not{\beta})(xp + ys)^2 + (xp + ys)^4, \quad (3.85)$$

e $s = p + q$.

A condição de renormalização que impomos sobre a função $\tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q)$ é escolhida de modo a evitar divergências infravermelhas,

$$\tilde{\Gamma}_{R\mu}(p, q) \Big|_{-\not{p}=\not{p}^2=q^2=\mu^2} = e_f \gamma_\mu. \quad (3.86)$$

onde e_f é o valor físico da carga elétrica medida no ponto mencionado acima.

Sob esta condição obtemos

$$e_f = e Z_\psi \left[1 + \frac{1}{2(a-1)} \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} - 1 \right) - \frac{1}{2(a+1)} \ln \left| 1 - \frac{m^2(a)}{\mu^2} \right| \right], \quad (3.87)$$

e, usando (3.70), temos

$$e_f = e, \tag{3.88}$$

o que confirma a interpretação do parâmetro e como a carga física, introduzida na Lagrangeana desde o início, e a consistência do nosso conjunto de condições de renormalização.

Capítulo 4

Conclusões

Estudamos, neste trabalho, diversos aspectos relacionados à Eletrodinâmica com férmions sem massa em 2 dimensões, quantizada de maneira não invariante de calibre. Podemos dividir nossas conclusões em três grupos principais:

i) Estabelecemos uma origem perturbativa para a ambigüidade de regularização quando até então eram conhecidas apenas abordagens não perturbativas para a obtenção da mesma. Deduzimos, também, identidades de Ward para as funções IIP e mostramos que tanto as funções nuas (regularizadas) quanto as renormalizadas obedecem um mesmo conjunto de identidades, que diferem do caso $a = 1$ apenas pela não-transversalidade do propagador fotônico;

ii) Constatamos a origem essencialmente não perturbativa para as divergências que aparecem nas funções de correlação fermiônicas. A estrutura dessas divergências mostrou-se idêntica, tanto no FIC quanto no FNIC. Num caso ela pode ser debitada à integração sobre o campo de Wess-Zumino (FIC) e no outro, à integração sobre a parte longitudinal de A_μ . Em ambos os casos, fica clara a razão de ser a teoria finita para $a = 1$: no FIC não existe termo de Wess-Zumino enquanto, no FNIC, a parte longitudinal se desacopla. No contexto do modelo de Schwinger quiral [16], afirma-se que tais divergências existem

num formalismo (FNIC) e não existem no outro [29]. Dadas as similaridades dos cálculos envolvidos pensamos que não há porque isso ser verdadeiro. A análise do problema neste outro contexto é uma das possibilidades de continuação do trabalho.

iii) Regularizamos e renormalizamos a divergência UV, encontrada para $a \neq 1$, impondo duas condições de renormalização para parametrizar as ambigüidades da teoria. Notamos que o parâmetro a permanece arbitrário (eq.(3.77)) e implicitamente dependente da escala de energia μ^2 , que é função do cut-off Λ^2 .

No final, quando o limite $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ é tomado, a ainda é arbitrário, mas a escala de energia é fixada em $\mu^2 = e^2/(\pi)$, exatamente no valor da massa gerada dinamicamente quando a teoria é quantizada de maneira invariante de calibre ($a = 1$). Isto implica na violação potencial das duas simetrias, mas numa única possibilidade de estabelecer uma escala de massas para a teoria.

Toda a arbitrariedade da escala de energia μ^2 que aparece quando impomos as condições de renormalização, esta contida no parâmetro a introduzido ao quantizarmos a teoria de maneira não invariante de calibre. Isto nos leva a pensar na possibilidade de estudar o comportamento da teoria sob o Grupo de Renormalização usando a . Esse comportamento pode ser não-trivial pois, embora tenhamos função β nula, o mesmo não deve ocorrer com a dimensão anômala.

Além disso, precisamos saber se a teoria definida em $\mu^2 = \frac{e^2}{\pi}$ (a arbitrário) é ou não equivalente à definida por $a = 1$. As implicações das condições de renormalização são ainda desconhecidas na ordem de 2-loops. Pretendemos estudar estas questões em trabalhos posteriores.

Apêndice A

Convenções e Identidades Úteis

A.1 $d = 1 + 1$

A métrica $g_{\mu\nu}$ e o tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu}$ são

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} \quad , \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

As matrizes γ satisfazem

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0 \quad , \quad \gamma_1^\dagger = -\gamma_1. \quad (\text{A.2})$$

Usaremos um conjunto específico de matrizes γ

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Também definimos a matriz γ_5 tal que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad , \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 \quad , \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5. \quad (\text{A.4})$$

Os projetores P_+ e P_- são

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad , \quad P_- = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (\text{A.5})$$

O comutador das matrizes γ é (apenas em $d = 2$)

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2\epsilon^{\mu\nu}\gamma_5 \quad (\text{A.6})$$

e, portanto,

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu. \quad (\text{A.7})$$

Definimos

$$\tilde{\partial}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{k}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} k_\nu \quad (\text{A.9})$$

Os traços úteis e produtos de matrizes γ são

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.10})$$

$$\text{tr } \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^3 = 2g^{\mu\alpha} g^{\nu 3} - 2g^{\mu\nu} g^{\alpha 3} + 2g^{\mu 3} g^{\alpha\nu} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5 = -2\epsilon^{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \epsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (\text{A.15})$$

$$\not\phi \not\beta \not\phi = \not\beta \not\phi. \quad (\text{A.16})$$

A.2 Representação α

$$\frac{i}{k^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\epsilon\alpha + i\alpha k^2} \quad (\text{A.17})$$

para $n > 0$, temos

$$\frac{n! i^{n+1}}{(k^2 + i\epsilon)^{n+1}} = \int_0^\infty d\alpha \alpha^n e^{-\epsilon\alpha + i\alpha k^2} \quad (\text{A.18})$$

A.3 Algumas integrais úteis

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-\epsilon x}}{x} (e^{ixp^2} - e^{ixq^2}) = \ln \left| \frac{q^2 + i\epsilon}{p^2 + i\epsilon} \right| \quad (\text{A.19})$$

$$\int dk e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.20})$$

$$\int dk k_{\mu} e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = -\frac{\pi}{\alpha^2} p_{\mu} e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.21})$$

$$\int dk k_{\mu} k_{\nu} e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{2\alpha^2} \left[ig_{\mu\nu} + \frac{2}{\alpha} p_{\mu} p_{\nu} \right] e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.22})$$

$$\int dk k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^2} \left[i + \frac{1}{\alpha} p^2 \right] e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.23})$$

$$\int dk k_{\mu} k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[-2i - \frac{1}{\alpha} p^2 \right] p_{\mu} e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.24})$$

$$\int dk k^4 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[-2 + \frac{4i}{\alpha} p^2 + \frac{1}{\alpha^2} p^4 \right] e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.25})$$

$$\int dk k_{\mu} k_{\nu} k^2 e^{i\alpha k^2 + 2ip \cdot k} = \frac{\pi}{\alpha^3} \left[-g_{\mu\nu} \left(1 - \frac{i}{2\alpha} p^2 \right) + p_{\mu} p_{\nu} \left(\frac{1}{\alpha^2} p^2 + \frac{3i}{\alpha} \right) \right] e^{-ip^2/\alpha} \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B

Comparação entre os Formalismos Invariante e Não Invariante de Calibre

Pretendemos, neste apêndice, mostrar que os dois formalismos mencionados no título dão resultados completamente equivalentes para as funções de correlação do modelo de Schwinger. Trataremos, por simplicidade, apenas o caso das funções de dois pontos fermiônica e bosônica.

B.1 Cálculo das Funções de Green Exatas no Formalismo Invariante de Calibre

A partir do funcional gerador (2.20) o cálculo do propagador exato do fóton é direto e fornece

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = - \frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}, J]}{\delta J^\nu(y) \delta J^\mu(x)} \Big|_{J=\eta=\bar{\eta}=0} \quad (\text{B.1})$$

$$-iG_{\mu\nu}(x-y) = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot (x-y)},$$

que é o mesmo resultado da eq.(1.26). O termo $\frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ é obtido na integração dos campos θ , que também gera um termo de interação entre o campo A_μ e sua fonte J^μ . A integração dos campos fermiônicos vai gerar a massa do fóton e após a integração em A_μ a dependência do parâmetro de calibre ξ vai ser eliminada, obtendo-se a contribuição da parte transversal ao propagador do fóton.

Também obtemos o propagador exato do férmion

$$(0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0) = i \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \right\} \times \quad (B.2)$$

$$\times \exp \left\{ -i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2(k^2 - m^2(a))} \right\} G_F(x-y).$$

igual à eq.(1.33). O cálculo é feito da seguinte maneira: depois da integração dos férmions na eq.(2.20), que vai gerar a massa do campo A_μ , calculamos as derivadas funcionais de $Z[\eta, \bar{\eta}, J]$ com relação às fontes fermiônicas. Isto vai gerar um termo de fonte para o campo θ , $\int dz \theta(z) j(z, x, y)$ com $j(z, x, y) = \delta(z-x) - \delta(z-y)$. É a presença deste termo que vai gerar a divergência que aparece no primeiro fator da eq.(B.2), quando integramos no campo θ . Comprovamos novamente que a divergência tem um caráter não-perturbativo.

B.2 Cálculo das Funções de Green Exatas no Formalismo Não Invariante de Calibre

Integrando nos férmions o funcional gerador (2.41), pode ser escrito assim

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int d\rho d\phi \exp \left[-i \int dz dz' \bar{\eta}(z) e^{i\rho(z)} G(z, z'; \phi) e^{-i\rho(z')} \eta(z') \right] \times \quad (B.3)$$

$$\times \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2e^2} \phi \square (\square + m^2(a)) \phi + \frac{1}{e} \phi \bar{\partial}_\mu J^\mu - \frac{(a-1)}{4\pi} \rho \square \rho - \frac{1}{e} \rho \partial_\mu J^\mu \right) \right].$$

O campo ϕ adquire uma massa $m^2(a)$, dada pela eq.(1.13). Também $G(x, y; \phi)$ é a função de Green da seguinte equação

$$(i\cancel{\partial} - \bar{\cancel{\partial}}\phi)G(x, y; \phi) = \delta(x - y),$$

$$G(x, y; \phi) = \exp \left[i \int dz o(z)j(z, x, y) \right] P_+ G_F(x - y) + \quad (\text{B.4})$$

$$+ \exp \left[-i \int dz \phi(z)j(z, x, y) \right] P_- G_F(x - y),$$

com $j(z, x, y) = \delta(z - x) - \delta(z - y)$.

O propagador do fóton é obtido da eq.(B.3), fazendo $\eta = \bar{\eta} = 0$. Integrando nos campos ρ e ϕ temos

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int dx dy J^\mu(x) \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[-\frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} e^{-ik \cdot (x-y)} + \right. \quad (\text{B.5})$$

$$\left. -\frac{\bar{k}_\mu \bar{k}_\nu}{k^2(k^2 - m^2(a))} e^{-ik \cdot (x-y)} \right] J^\nu(y) \right\}.$$

onde o primeiro termo da soma é gerado pela integração do campo ρ e o outro, do campo ϕ . Então, da eq.(B.5), obtemos o propagador do fóton

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = -\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J^\nu(y) \delta J^\mu(x)} \Big|_{J=0}$$

$$-i G_{\mu\nu}(x - y) = -i \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{k^2 - m^2(a)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) - \frac{2\pi}{e^2(a-1)} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] e^{-ik \cdot (x-y)}.$$

Novamente, obtemos o propagador exato do férmion, a partir da eq.(B.3): fazemos $J^\mu = 0$, tomamos as derivadas funcionais de $Z[\eta, \bar{\eta}]$ com respeito às fontes fermiônicas $\bar{\eta}(x)$ e $\eta(y)$ e temos, então,

$$\langle 0|T \psi(x) \bar{\psi}(y)|0\rangle = -\frac{\delta^2 Z[\eta, \bar{\eta}]}{\delta \eta(y) \delta \bar{\eta}(x)} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$G^{(2)}(x - y) = iN \int d\rho d\phi \exp \left(i \int dz \left[\frac{1}{2e^2} \phi \square (\square + m^2(a)) \phi \right] \right) G(x, y; \phi) \times \quad (\text{B.6})$$

$$\times \exp \left(i \int dz \left[-\frac{(a-1)}{4\pi} \rho \square \rho + \rho j(z, x, y) \right] \right).$$

Depois de integrar em ρ e ϕ , a eq.(B.6) fornece o propagador fermiônico.

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= i \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1 - e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2(k^2 - m^2(a))} \right\} G_F(x-y). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

O primeiro fator é gerado pela integração do campo ρ , e coincide com o termo divergente da eq.(1.33).

Apêndice C

Regularização do Modelo de Schwinger no Formalismo Não Invariante de Calibre

Pretendemos, neste apêndice, mostrar que a regularização da teoria pode ser efetuada também no formalismo não invariante de calibre, com resultados idênticos aos obtidos com a formulação invariante de calibre (seção 3.1). Também mostramos as identidades de Ward para a teoria regularizada

Da eq.(2.41)

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\partial - \tilde{\phi}) \psi + \right. \right. \quad (C.1) \\ \left. \left. + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} J_\mu \partial^\mu \rho - \frac{1}{e} J_\mu \tilde{\partial}^\mu \phi \right) \right].$$

Como vimos, as divergências vêm da integração sobre o campo ρ , devido ao mau comportamento ultravioleta do seu propagador livre (k^{-2} , quando $|k| \rightarrow +\infty$). Regularizamos, então, o propagador deste campo, adicionando um campo β de Pauli-Villars, com massa $\Lambda^2 \rightarrow +\infty$, ao Lagrangeano que aparece no funcional gerador (C.1), definindo

assim o funcional gerador regularizado $Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J]$,

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} d\beta \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \tilde{\phi}) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{e} J \cdot \tilde{\partial} \phi + \frac{(a-1)}{4\pi} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \bar{\eta} e^{i(\rho+\beta)} \psi + \bar{\psi} e^{-i(\rho+\beta)} \eta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{e} J \cdot \partial(\rho + \beta) - \frac{(a-1)}{4\pi} [\partial_\mu \beta \partial^\mu \beta - \Lambda^2 \beta^2] \right) \right]. \quad (\text{C.2})$$

Fazendo $\rho \rightarrow \rho - \beta$ e integrando no campo β , obtemos o funcional gerador regularizado

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int d\rho d\phi d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(\frac{1}{2e^2} \phi \square^2 \phi + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \tilde{\phi}) \psi - \frac{1}{e} J \cdot \tilde{\partial} \phi + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(a-1)}{4\pi \Lambda^2} \rho \square (\square + \Lambda^2) \rho + \bar{\eta} e^{i\rho} \psi + \bar{\psi} e^{-i\rho} \eta + \frac{1}{e} J \cdot \partial \rho \right) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Da equação acima, observamos o comportamento ultravioleta do propagador do campo ρ como sendo agora k^{-4} , quando $|k| \rightarrow +\infty$ (mantendo a massa Λ^2 finita).

Como no caso do FIC, nós estamos interessados na forma como a ação original muda com a regularização feita no funcional gerador. Para isto, fazemos as seguintes mudanças de variáveis fermiônicas inversas (às já feitas anteriormente na eq.(2.39)).

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi = e^{-i\rho} \psi', \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} = \bar{\psi}' e^{i\rho}, \\ d\psi d\bar{\psi} &= J d\psi' d\bar{\psi}', \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde J é o jacobiano de transformação da medida fermiônica

$$\ln J = -\frac{i(a-1)}{4\pi} \int dx \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho, \quad (\text{C.5})$$

e, considerando que $eA_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi$, encontramos a seguinte expressão para o funcional gerador regularizado (C.3) em função dos campos originais da teoria (com as variáveis reindexadas $\psi', \bar{\psi}' \rightarrow \psi, \bar{\psi}$):

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} + e\cancel{A}) \psi + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right]. \quad (\text{C.6})$$

onde ξ_Λ é

$$\xi_\Lambda = \frac{2\pi\Lambda^2}{e^2(a-1)}. \quad (\text{C.7})$$

Como no caso do FIC, regularizar a teoria equivale a colocar um termo de fixação de calibre no lagrangiano original, com o parâmetro de calibre ξ_Λ dependente do cut-off. Este termo é suficiente para deixar toda a teoria finita quando o cut-off Λ permanece finito.

Vamos mostrar agora que as identidades de Ward se mantêm para a teoria regularizada.

C.1 Identidades de Ward para a Teoria Regularizada

Partimos do funcional gerador regularizado (C.6) $Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]$

$$Z_\Lambda[\eta, \bar{\eta}, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left[i \int dx \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\partial + eA) \psi + \right. \right. \quad (\text{C.8}) \\ \left. \left. -\frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right) \right].$$

Fazemos a seguinte transformação de calibre no funcional gerador

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \lambda, \\ \psi &\rightarrow \psi + i\lambda \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} - i\lambda \bar{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

com parâmetro λ infinitesimal. A medida fermiônica não é invariante de calibre (como vimos em (2.5) e (2.9)), e muda da seguinte maneira

$$d\psi d\bar{\psi} \rightarrow e^{\frac{-i(a-1)}{2\pi} \int dx (\frac{1}{2} \lambda \square \lambda + e\lambda \partial \cdot A)} d\psi d\bar{\psi}, \quad (\text{C.10})$$

onde iremos tomar apenas os termos lineares em λ (infinitesimal) que contribuem para a fase do Jacobiano e para a variação da densidade de Lagrangeana. Então o funcional

gerador (C.8) fica

$$Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp \left\{ i \int dx \left(\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] - \frac{1}{2\xi_\Lambda} (\partial \cdot A)^2 + J \cdot A + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right) \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \int dx \lambda(x) \left(i\bar{\eta}\psi - i\bar{\psi}\eta - \frac{1}{e} \partial \cdot J - \frac{e}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial \cdot A \right) \right\}. \quad (\text{C.11})$$

onde M^2 é dada pela eq.(3.12).

Sabemos que, dentro da integral funcional com fontes,

$$A_\mu = -i \frac{\delta}{\delta J^\mu}, \quad \psi = -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \quad \bar{\psi} = i \frac{\delta}{\delta \eta}. \quad (\text{C.12})$$

Podemos, então, reescrever (C.11) como

$$Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J] = \exp \left\{ i \int dx \lambda(x) \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} - \frac{1}{e} \partial \cdot J + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{ie}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right) \right\} Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]. \quad (\text{C.13})$$

Expandindo a exponencial até ordem λ , obtemos a identidade de Ward satisfeita pelo funcional gerador $Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]$

$$\left[\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta} - \frac{1}{e} \partial_x^\mu J_\mu + \frac{ie}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial_x^\mu \frac{\delta}{\delta J^\mu} \right] Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J] = 0. \quad (\text{C.14})$$

Definimos o funcional gerador das funções de Green conexas regularizadas $X_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]$ através de $Z_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J] = e^{iX_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]}$. Usamos a eq.(C.12) para obter a identidade de Ward para as funções de Green conexas regularizadas $X_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J]$,

$$i\bar{\eta} \frac{\delta X_\Lambda}{\delta \bar{\eta}} - i\eta \frac{\delta X_\Lambda}{\delta \eta} - \frac{1}{e} \partial_x^\mu J_\mu - \frac{e}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial_x^\mu \frac{\delta X_\Lambda}{\delta J^\mu} = 0. \quad (\text{C.15})$$

Também temos o funcional gerador das funções IIP regularizadas $\Gamma_\Lambda[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]$

$$\Gamma_\Lambda[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] = X_\Lambda[\bar{\eta}, \eta, J] - \int dx (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + A_\mu J^\mu), \quad (\text{C.16})$$

onde

$$\frac{\delta X_\Lambda}{\delta \bar{\eta}} = \psi \quad , \quad \frac{\delta X_\Lambda}{\delta \eta} = -\bar{\psi} \quad , \quad \frac{\delta X_\Lambda}{\delta J^\mu} = A_\mu, \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi}} = -\eta \quad , \quad \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \psi} = \bar{\eta} \quad , \quad \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta A_\mu} = -J^\mu. \quad (\text{C.18})$$

A identidade de Ward para o funcional gerador das funções IIP regularizadas é

$$i \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi}(x)} \psi(x) - i \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \psi(x)} \bar{\psi}(x) + \frac{1}{e} \partial_x^\mu \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta A^\mu(x)} - \frac{e}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial_x^\mu A_\mu(x) = 0. \quad (\text{C.19})$$

Derivando (C.19) com respeito a $A^\nu(y)$ e fazendo $\psi = \bar{\psi} = A_\mu = 0$, obtemos a identidade de Ward para a função IIP de dois pontos bosônica regularizada (3.20),

$$\partial_x^\mu \Gamma_{\mu\nu}(x-y; \Lambda) - \frac{e^2}{2\pi} (a-1) \left(1 + \frac{\square}{M^2} \right) \partial_\nu^\mu \delta(x-y) = 0, \quad (\text{C.20})$$

a qual é satisfeita pela função regularizada $\Gamma_{\mu\nu}(x-y; \Lambda)$ calculada no capítulo 3 para todo valor do parâmetro $a \neq 1$.

Derivando (C.19) com respeito a $\psi(y)$ e $\bar{\psi}(z)$, depois de fazer $\bar{\psi} = \psi = A_\mu = 0$, temos a identidade de Ward para as funções IIP de 2 pontos fermiônica e a de 3 pontos regularizadas

$$i\Gamma(z-x; \Lambda) \delta(x-y) - i\Gamma(x-y; \Lambda) \delta(x-z) = \frac{1}{e} \partial_x^\mu \Gamma_\mu(z, y, x; \Lambda). \quad (\text{C.21})$$

No espaço de momenta, a equação acima é escrita como

$$\frac{1}{e} q^\mu \tilde{\Gamma}_\mu(p, q; \Lambda) = \tilde{\Gamma}(p+q; \Lambda) - \tilde{\Gamma}(p; \Lambda). \quad (\text{C.22})$$

Como mostramos em (3.47) esta identidade prevalece para as funções renormalizadas.

Apêndice D

Expansão do Propagador Fermiônico em Termos do Propagador Fotônico Completo

Vamos mostrar que

$$\tilde{G}_1(p; \Lambda) = \text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \quad (D.1)$$

onde denota o propagador completo regularizado do fóton (3.53).

O gráfico em (D.1) é expresso no espaço de momenta como

$$\text{---} \overset{k}{\text{---}} \text{---} = e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1}{\not{p}} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \gamma^\nu \left(\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - m^2(a)} + f_\lambda(k) k_\mu k_\nu \right) \frac{1}{\not{p}} \quad (D.2)$$

O primeiro termo é cancelado devido à eq.(A.14), ficando

$$= e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\lambda(k) \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p}} \quad (D.3)$$

Fazendo uso da identidade

$$\frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}} = \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \quad (\text{D.4})$$

e, da eq.(A.16), temos

$$= e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \left(\frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \right). \quad (\text{D.5})$$

O primeiro termo da soma é cancelado por ser uma integral de uma função ímpar. Finalmente chegamos à seguinte expressão para o gráfico da eq.(D.2)

$$\begin{array}{c} k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p+k \quad p \end{array} = -e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \right), \quad (\text{D.6})$$

o que mostra, então, que a equação (D.1) é satisfeita.

Também mostraremos que

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(p; \Lambda) = & \begin{array}{c} k \quad k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p+k \quad p \quad p+k \quad p \end{array} + \\ & + \begin{array}{c} k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \end{array} + \begin{array}{c} k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \end{array} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

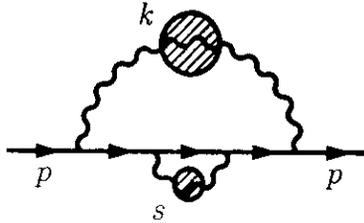
Calculamos o primeiro gráfico de (D.7),

$$\begin{array}{c} k \quad k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p+k \quad p \quad p+k \quad p \end{array} = -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \times \quad (\text{D.8})$$

$$\times \frac{1}{\not{p}\not{k}} \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p}\not{s}} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} \not{s} \frac{1}{\not{p}}$$

$$= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} - \frac{1}{\not{p}+\not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p}+\not{s}} \right), \quad (\text{D.9})$$

o segundo,

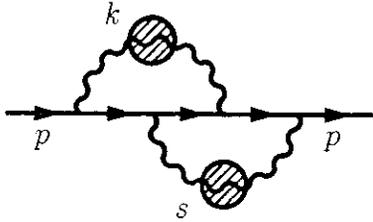


$$= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \times \quad (D.10)$$

$$\times \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \not{s} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p}}$$

$$= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p} + \not{k}} + \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \not{k} \frac{1}{\not{p}} \right), \quad (D.11)$$

e o terceiro,



$$= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \times \quad (D.12)$$

$$\times \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{s} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{s}} \not{s} \frac{1}{\not{p}}$$

$$= -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(-\frac{1}{\not{p}} + \frac{1}{\not{p} + \not{k}} + \right. \quad (D.13)$$

$$\left. - \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \not{k} \frac{1}{\not{p}} + \frac{1}{\not{p} + \not{k}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{s}} - \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \right).$$

Somando as equações (D.9),(D.11) e (D.13), obtemos

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -ie^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{1}{\not{p} + \not{k}} - \frac{1}{\not{p}} \not{k} \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \right)$$

Usando a simetria entre s e k , obtemos finalmente

$$\tilde{G}_2(p; \Lambda) = -\frac{i}{2} e^4 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{ds}{(2\pi)^2} f_\Lambda(k) f_\Lambda(s) \left(\frac{1}{\not{p}} - \frac{2}{\not{p} + \not{k}} + \frac{1}{\not{p} + \not{k} + \not{s}} \right). \quad (D.14)$$

Apêndice E

Análise do Propagador do Férmião sem Fontes

Vamos procurar obter os resultados para a função de dois pontos fermiônica sem a utilização das fontes fermiônicas. Isso mostrará alguns aspectos sutis da definição da teoria no caso em que se empregam regularizações invariantes de calibre.

Partimos da teoria (1.1)

$$\mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} + e\mathcal{A})\psi, \quad (\text{E.1})$$

com a definição

$$Z[0] = \int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A]\right). \quad (\text{E.2})$$

O propagador do férmion é

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \frac{\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \psi(x)\bar{\psi}(y) \exp(i \int dx \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A])}{\int dA_\mu d\psi d\bar{\psi} \exp(i \int dx \mathcal{L}[\psi, \bar{\psi}, A])}. \quad (\text{E.3})$$

Sendo $D = i\cancel{D} + e\mathcal{A}$, fazemos uma mudança de variáveis fermiônicas $\psi, \bar{\psi} \rightarrow a_n, \bar{a}_n$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \varphi(x) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \varphi^\dagger(x) \bar{a}_n \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

onde escolhemos as funções $\varphi(x)$ como as autofunções do operador D

$$\begin{aligned} D\varphi_n(x) &= \lambda_n\varphi_n(x), \\ \det D &= \prod_k \lambda_k. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

A base $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormal. satisfaz

$$\begin{aligned} \int dx \varphi_m^\dagger(x)\varphi_n(x) &= \delta_{mn}, \\ \sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y) &= \delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Sendo agora a e \bar{a} as novas variáveis fermiônicas, a medida fermiônica passa a ser

$$d\psi d\bar{\psi} = \prod_n da_n d\bar{a}_n. \quad (\text{E.7})$$

Na eq.(E.3) obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= \frac{1}{Z[0]} \int dA_\mu \exp\left\{-i \int dx \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right\} \sum_{m,n} \varphi_m(x)\varphi_n^\dagger(y) \times \\ &\times \int \prod_k da_k d\bar{a}_k a_m \bar{a}_n \exp\left(i \sum_j \lambda_j \bar{a}_j a_j\right). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Considerando as identidades,

$$\begin{aligned} \int \prod_{k=1}^n da_k d\bar{a}_k \exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{a}_j a_j\right) &= \prod_{k=1}^n i\lambda_k, \\ \int \prod_{k=1}^n da_k d\bar{a}_k a_p \bar{a}_q \exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{a}_j a_j\right) &= -\delta_{pq} \prod_{\substack{k \neq p \\ k \neq q}}^n i\lambda_k, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

obtemos, para o propagador do férmion

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = -\frac{1}{Z[0]} \int dA_\mu \exp\left\{-i \int dx \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right\} \sum_n \varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y) \prod_{k \neq n} i\lambda_k.$$

Com ajuda da eq.(E.5) chegamos a

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \frac{i}{Z[0]} \int dA_\mu \exp\left\{-i \int dx \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right\} G(x,y;A) \det iD, \quad (\text{E.10})$$

onde $G(x, y; A)$ é a função de Green na eq.(1.4) e é dada por

$$G(x, y; A) = \sum_n \frac{\varphi_n(x)\varphi_n^\dagger(y)}{\lambda_n}. \quad (\text{E.11})$$

A equação (E.10) pode ser reescrita com ajuda da eq.(1.2) ainda como

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \frac{i}{Z[0]} \int dA_\mu \exp \left\{ iW[A_\mu] - i \int dx \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} G(x, y; A), \quad (\text{E.12})$$

com $Z[0]$ dado por

$$Z[0] = \int dA_\mu \exp \left\{ iW[A_\mu] - i \int dx \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}. \quad (\text{E.13})$$

Podemos agora analisar os casos nos quais a teoria é quantizada de modo invariante e não-invariante de calibre, escolhendo ou não uma prescrição invariante de calibre para calcular o determinante fermiônico.

E.1 Quantização Não Invariante de Calibre

Nesta quantização o determinante fermiônico foi calculado com uma prescrição não invariante de calibre. O funcional $W[A_\mu]$ é dado pela eq.(1.14) com o parâmetro $a \neq 1$.

$$W[A_\mu] = \frac{e^2}{2\pi} \int dx A_\mu \left[\frac{1}{2}(a+1)g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu. \quad (\text{E.14})$$

A expressão (E.13) para $Z[0]$ é bem definida, e podemos escrever-a assim

$$Z[0] = \int dA_\mu \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D^{\mu\nu} A_\nu \right\}, \quad (\text{E.15})$$

com o operador $D^{\mu\nu}$ dado pela eq.(1.24)

$$D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\square + m^2(a)) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square},$$

com $m^2(a)$ dado pela eq.(1.13). Voltamos à eq.(E.12), para fazer a integração no campo A_μ e obter

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle &= i \exp\left\{-\frac{2\pi i}{a-1} \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1-e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i e^2 \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{1-e^{-ik\cdot(x-y)}}{k^2(k^2-m^2(a))}\right\} G_F(x-y). \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Vemos novamente que aparece o infinito (primeira exponencial acima) encontrado quando fazemos o cálculo da teoria com fontes, eq.(1.34).

Alternativamente, se fazemos uso direto do método de Faddeev-Popov tanto no numerador como no denominador da eq.(E.12) e usamos a condição de fixação de calibre $f[A_\mu] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_\mu A^\mu$, obtemos

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \frac{\int dA_\mu d\theta \exp\left\{i\alpha(A, g^{-1}) + i \int dz \frac{1}{2} A_\mu D_\xi^{\mu\nu} A_\nu\right\} e^{i\theta(x)-i\theta(y)} G(x, y; A)}{\int dA_\mu d\theta \exp\left\{i\alpha(A, g^{-1}) + i \int dz \frac{1}{2} A_\mu D_\xi^{\mu\nu} A_\nu\right\}}. \quad (\text{E.17})$$

onde $D_\xi^{\mu\nu} = D^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu$, e $e^{i\theta(x)-i\theta(y)}$ pode ser escrito como um termo de fonte para o campo $\theta : i \int dz \theta(z) j(z, x, y)$, onde $j(z, x, y) = \delta(z-x) - \delta(z-y)$. Também temos o termo $\alpha(A, g^{-1})$, que é a ação de Wess-Zumino dada pela eq.(2.16). Desde a eq.(E.17) obtemos o mesmo resultado que na eq.(E.16), sendo a divergência gerada pela integração no campo θ .

Observamos que, quando temos uma teoria não invariante de calibre, $Z[0]$ não precisa ser redefinido, pois o volume do grupo de calibre não é fatorizado, e tampouco precisamos fixar um calibre para definir a inversa do operador $D^{\mu\nu}$.

E.2 Quantização Invariante de Calibre

O determinante fermiônico é calculado com uma prescrição invariante de calibre, e o funcional $W[A_\mu]$ é dado pela eq.(1.14) com o parâmetro $a = 1$,

$$W[A_\mu] = \frac{e^2}{2\pi} \int dx A_\mu \left[g^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square} \right] A_\nu. \quad (\text{E.18})$$

A quantidade (E.13), $Z[0]$, neste caso não é bem definida. Isto pode ser mostrado facilmente reescrevendo assim

$$Z[0] = \int dA_\mu \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\}, \quad (\text{E.19})$$

com o operador $D_1^{\mu\nu}$ dado por

$$D_1^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \left(\square + \frac{e^2}{\pi} \right) - \partial^\mu \partial^\nu - \frac{e^2}{\pi} \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\square}, \quad (\text{E.20})$$

o operador $D_1^{\mu\nu}$ não tem inversa. Portanto, não podemos dar sentido à expressão na eq.(E.12), tornando necessária a sua redefinição.

Como um primeiro passo para redefinir (E.12), poderíamos usar o método de Faddeev-Popov diretamente, chegando ao seguinte resultado

$$\langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{\int dA_\mu d\theta \exp \left\{ i \int dz \frac{1}{2} A_\mu D_{1\xi}^{\mu\nu} A_\nu \right\} e^{i\theta(x) - i\theta(y)} G(x, y; A)}{\int dA_\mu d\theta \exp \left\{ i \int dz \frac{1}{2} A_\mu D_{1\xi}^{\mu\nu} A_\nu \right\}}. \quad (\text{E.21})$$

onde a fixação de calibre usada foi $f[A_\mu] = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \partial_\mu A^\mu$ e o operador $D_{1\xi}^{\mu\nu} = D_1^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu$ tem inversa bem definida. Então, poderíamos fazer as contas na eq.(E.21), fatorizando a integração em θ tanto no numerador como no denominador. Contudo, estes fatores não cancelam entre si. Ao contrário, seu quociente é nulo

$$\frac{\int d\theta e^{i\theta(x) - i\theta(y)}}{\int d\theta} = 0 \quad (\text{E.22})$$

o que nos daria o propagador fermiônico (E.12) nulo.

Para evitar esta inconsistência, primeiramente definimos corretamente $Z[0]$ para a teoria invariante de calibre. Depois de fazer isto podemos calcular quantidades de interesse, como o propagador do férmion na eq.(E.12). Para isso observamos que a expressão (E.19) para $Z[0]$ é indefinida antes da aplicação do método de Faddeev-Popov e da remoção do volume do grupo de calibre (redundância na integração). Aplicamos, agora, o método de Faddeev-Popov em (E.19)

$$Z[0] = \int dA_\mu d\theta \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu^g]) \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\}, \quad (\text{E.23})$$

onde $A_\mu^g = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta$, sendo $g = e^{i\theta} \in U(1)$, e $f[A_\mu]$ a condição de fixação de calibre. Fazendo, agora a mudança $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta$; por definição, $\Delta_f[A_\mu]$ é invariante de calibre, e a expressão $A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu$ também é. Então, temos para (E.23),

$$Z[0] = \int d\theta \int dA_\mu \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\}, \quad (\text{E.24})$$

onde já vemos a fatorização do volume infinito do grupo, a qual faz $Z[0]$ ser indefinido.

Podemos, então, definir um novo $Z[0]$, o qual não levará em conta o volume do grupo.

$$Z[0] \equiv \int dA_\mu \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\}, \quad (\text{E.25})$$

sendo este novo $Z[0]$ bem definido.

Podemos calcular o propagador do férmion corretamente para a teoria em questão, definindo-o como sendo

$$\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \frac{\int dA_\mu \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\} G(x, y; A)}{\int dA_\mu \Delta_f[A_\mu] \delta(f[A_\mu]) \exp \left\{ i \int dx \frac{1}{2} A_\mu D_1^{\mu\nu} A_\nu \right\}}. \quad (\text{E.26})$$

O resultado não tem divergência nenhuma e a QED₂ com $a = 1$ é totalmente finita.

Apêndice F

Outras Alternativas para Regularizar a Teoria: *Cut-off*

Trabalhando com a regularização de Pauli-Villars para o loop fermiônico no nível lagrangiano, conseguimos dar conta da ambigüidade que aparece no cálculo do propagador do fóton. Tomaremos agora a opção de regularizar o loop fermiônico através de um *cut-off*. Procuramos investigar a possibilidade de introduzir por este caminho a ambigüidade que obtivemos na separação de pontos e no método de Pauli-Villars. O loop fermiônico é dado por

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -e^2 \int^{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^2} \text{tr} \left[\gamma_{\mu} \frac{1}{\not{k}} \gamma_{\nu} \frac{1}{\not{k} + \not{p}} \right]. \quad (\text{F.1})$$

Por conveniência, trabalhamos no espaço euclideo, com as convenções

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1, \quad [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}] = -i2\gamma_5\epsilon_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = -1. \quad (\text{F.2})$$

Assim,

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -2ie^2 \int^{\Lambda} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{2k_{\mu}k_{\nu} - \delta_{\mu\nu}k^2 + k_{\mu}p_{\nu} - \tilde{k}_{\mu}\tilde{p}_{\nu}}{k^2(k+p)^2}. \quad (\text{F.3})$$

Reescrevendo o denominador com ajuda da parametrização de Feynman, temos

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2 + k_\mu p_\nu - \tilde{k}_\mu \tilde{p}_\nu}{[(k+xp)^2 + x(1-x)p^2]^2}. \quad (\text{F.4})$$

Fazendo uma translação $k \rightarrow k + xp$ temos

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -2ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2 - x(1-x)(2p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2)}{[k^2 + x(1-x)p^2]^2}.$$

Passando a coordenadas polares e fazendo a integração angular temos

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = -\frac{ie^2}{\pi} \int_0^1 dx \int_0^\Lambda dk \frac{-kx(1-x)(2p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2)}{[k^2 + x(1-x)p^2]^2}. \quad (\text{F.5})$$

Fazendo a integral e depois tomando o limite $\Lambda \rightarrow \infty$ obtemos

$$-i\Pi_{\mu\nu}(p) = \frac{ie^2}{\pi} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \right) \quad (\text{F.6})$$

o que daria para o parâmetro a o valor $a = 0$.

Vale observar que neste passo estamos desprezando a contribuição dos termos lineares em k . Isso é consequência de supor que a integração no espaço bidimensional k é feita num círculo com centro na origem. Poderíamos, entretanto, supor maneiras diferentes de impor o *cut-off*, alterando o limite do domínio de integração para, por exemplo, uma elipse $\Lambda(\theta)$. Neste caso, os limites de integração não seriam simétricos e os termos lineares poderiam contribuir. Poderíamos, então, ter uma expressão mais geral para $\Pi_{\mu\nu}$. O tensor $\Pi_{\mu\nu}$ é simétrico em μ, ν , e assim, pode ser escrito como

$$-\Pi_{\mu\nu} = \frac{e^2}{2\pi^2} \left[B(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - A(p^2) \delta_{\mu\nu} \right]. \quad (\text{F.7})$$

Então

$$B(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - A(p^2) \delta_{\mu\nu} = - \int^{\Lambda(\theta)} dk \frac{2k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2 + k_\mu p_\nu - \tilde{k}_\mu \tilde{p}_\nu}{k^2(k+p)^2}. \quad (\text{F.8})$$

Tomado o traço na expressão (F.8) obtemos a primeira equação para $A(p^2)$ e $B(p^2)$

$$B(p^2) - 2A(p^2) = 0 \quad \rightarrow \quad B(p^2) = 2A(p^2) \quad (\text{F.9})$$

e, contraindo com $p_\mu p_\nu$, tem-se

$$B(p^2) - A(p^2) = \frac{-1}{p^2} \int^{\Lambda(\theta)} dk \frac{2(p \cdot k)^2 - p^2 k^2 + p^2(p \cdot k)}{k^2(p+k)^2}. \quad (\text{F.10})$$

Sendo θ o ângulo entre p e k , calculamos $A(p^2)$

$$A(p^2) = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\Lambda(\theta)} dk \frac{k \cos 2\theta + p \cos \theta}{k^2 + 2kp \cos \theta + p^2}. \quad (\text{F.11})$$

Exemplificamos o cálculo da integral (F.11) no caso $\Lambda(\theta) = \Lambda = \text{cte}$. Fazendo uso dos polinômios de Chebyshev de primeira classe $T_n(x)$

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n T_n(x), \quad (\text{F.12})$$

definidos nos intervalos $|x| < 1$, $|t| < 1$ e $T_0(x) = 1$. O conjunto de funções $\{T_n(x)\}$ é ortonormal

$$\int_{-1}^1 dx T_m(x) T_n(x) (1-x^2)^{-1/2} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

Depois de alguns cálculos obtemos o valor final de $A(p^2)$

$$A(p^2) = \pi. \quad (\text{F.14})$$

Portanto, em geral $\Pi_{\mu\nu}$ é

$$-i\Pi_{\mu\nu} = \frac{ie^2}{\pi} A(p^2) \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \right), \quad (\text{F.15})$$

o que nos dá uma equivalência com os cálculos anteriores apenas para $a = 0$.

Bibliografia

- [1] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425.
- [2] J. Lowenstein e J. Swieca *Ann. Phys.* **68** (1971) 172.
- [3] J. Dai, J. Hughes e J. Liu, *Phys. Rev* **D51** (1995) 5209.
- [4] Y. Frishman, em *Particles, Quantum Fields and Statistical Mechanics*, anais do Instituto de Verão em Física Teórica, Cidade do México, ed. M. Alexanian e A. Zapeda (*Lecture Notes in Physics*, vol. 32), Springer, Berlim, 1975, pag. 118.
- [5] C. Jayewardena. *Helv. Phys. Acta* **65** (1988) 636.
- [6] C. Adam, *Z. Phys* **C63** (1994) 169; preprint BUTP-95/25 (Institut für Theoretische Physik, Universität Bern)
- [7] I. Sachs e A. Wipf, *Helv. Phys. Acta* **65** (1992) 653.
- [8] R. Jackiw e K. Johnson *Phys. Rev.* **182** (1969) 1459.
- [9] R. Jackiw, in *Relativity, Groups and Topology II* (Les Houches 1983), eds. B.S. DeWitt e R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1984).
- [10] S. A. Dias e C. A. Linhares *Phys. Rev.* **D45**, (1992) 2162.
- [11] Marcello Barbosa Da Silva Neto, Tese de Mestrado, CBPF, 1996.

- [12] S. A. Dias e M. B. Silva Neto, *Notas de Física* CBPF NF-007/96; hep-th 9602092
- [13] R. J. Crewther, S.-S. Shei e T.-M. Yan, *Phys. Rev.* **D8**, (1973) 1730.
- [14] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, segunda edição. Oxford Science Pub., 1993.
- [15] D. J. Gross, *Applications of the Renormalization Group to High Energy Physics*, Les Houches, seção XXVIII, 1975.
- [16] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54**, (1985) 1219.
- [17] L. D. Faddeev e S. L. Shatashvili, *Phys. Lett.* **B167**, (1986) 225.
- [18] K. Harada and I. Tsutsui, *Phys. Lett.* **B183**, (1987) 311.
- [19] O. Babelon, F.A. Schaposnik e C.M. Viallet *Phys. Lett.* **B177** (1986) 385.
- [20] C. A. Linhares, K. D. Rothe e H. D. Rothe, *Phys. Rev.* **D35**. (1987) 2501.
- [21] K. Fujikawa. *Phys. Rev. Lett.* **42**, (1979) 1195.
- [22] R. E. Gamboa-Saraví, M. A. Muschietti, F. A. Schaposnik e J. E. Solomin. *Ann. Phys. (N.Y.)* **157** (1984) 360.
- [23] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific, 1991.
- [24] C. Farina de Souza, Tese de Doutorado, UFRJ, 1989.
- [25] C. R. Hagen, *Il Nuovo Cimento* **A51** (1967) 1033; **B51** (1967) 169.
- [26] K. Johnson, *Il Nuovo Cimento* **20** (1961) 773.
- [27] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.

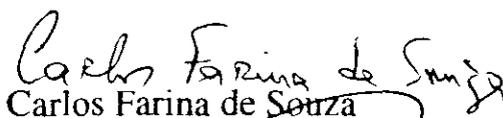
- [28] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley, 1992.
- [29] Z. Jian-Ge, D. Qing-Hai e L. Yao-Yang, *J. Phys.* **G18** (1992) L15.
- [30] K. Harada, *Nucl.Phys.* **B329** (1990) 723.
- [31] Z. Jian-Ge, D. Qing-Hai e L. Yao-Yang, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 613.

“RENORMALIZAÇÃO E AMBIGÜIDADES NA QED₂”

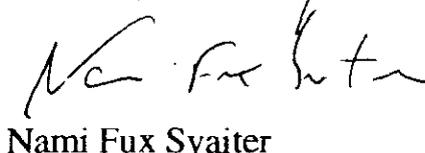
Rodolfo Alván Casana Sifuentes

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:


Sebastião Alves Dias - Presidente


Carlos Farina de Souza


Hugo Rolando Christensen


Nami Fux Svaiter

não compareceu
José Abdalla Helayël-Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 25 de fevereiro de 1997