

TESE DE  
MESTRADO

Um Estudo de Ambigüidades  
na  
Eletrodinâmica Bidimensional

Marcello Barbosa da Silva Neto

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, MARÇO DE 1996

# Dedicatória

*Às duas grandes mulheres  
da minha vida:  
Lais e Anna*

# Agradecimentos

- Ao meu guru-orientador e grande amigo, Sebastião Alves Dias, pela paciência e crédito no incrível.
- Ao meu almozanfitrião e, durante longo tempo, senhorio-tutor Cláudio Anael Gomes Sasaki, pela amizade e solicitude.
- Aos meus pais (on-shell) Neto e Laís, pois sem eles eu seguramente não estaria aqui.
- Aos meus pais (off-shell) Juarez e Denise, pelo carinho e infra-estrutura.
- À minha querida esposa Anna, que tanto amo, pelo amor, dedicação e carinho tão verdadeiros quanto eternos.
- A toda a minha família que sempre me deu força, mesmo sem ter a menor idéia do que eu fazia.
- A todos os amigos de departamento (se eu tivesse defendido há um ano eu até listaria o nome de todos), pelo apoio e assistência .
- Aos meus irmãos e companheiros Flávio, Cambraia e Zé Luiz.
- A todos os amigos, professores e funcionários do CBPF.
- À Myriam, pelo sorriso, paciência e soluções sempre providenciais.
- Ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro.

# Resumo

Nesta tese, discutimos problemas relacionados com a existência de ambigüidades na eletrodinâmica quântica em duas dimensões. Do nosso ponto de vista, tais ambigüidades, provenientes da utilização de uma determinada classe de procedimentos de regularização, devem ser eliminadas ou, ao menos, entendidas e controladas para que tenhamos uma teoria consistente e com poder de previsão. Deste modo, o cálculo de contribuições de setores topológicos não triviais à determinadas funções de correlação nos dá uma prescrição que permite fixar um valor para o parâmetro de Jackiw. No caso de topologias triviais, vimos que, apesar de poder assumir valores arbitrários, este parâmetro é limitado por condições físicas.

# Abstract

In this thesis, we discuss problems related with the existence of ambiguities in two dimensional quantum electrodynamics. From our point of view, those ambiguities, generated by the use of some class of regularization procedures, must be fixed or, at least, understood and controlled so that we can have a consistent and predictable theory. In this way, the computation of non trivial contribution to some correlation functions gives us a mechanism to fix the Jackiw parameter. In the case of trivial topologies, we see that, even being able to assume arbitrary values, that parameter is limited by physical conditions.

# Índice

Dedicatória . . . . .	i
Agradecimentos . . . . .	ii
Resumo . . . . .	iii
Abstract . . . . .	iv
Índice . . . . .	v
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 A Eletrodinâmica Bidimensional</b>	<b>4</b>
1.1 O Modelo de Schwinger . . . . .	4
1.2 Anomalias e Ambigüidades de Regularização . . . . .	8
1.3 O Funcional Gerador . . . . .	14
<b>2 Determinantes Funcionais em <math>1+1</math></b>	<b>18</b>
2.1 Identidades de Ward-Takahashi anômalas . . . . .	18
2.2 O determinante fermiônico na ausência de modos zero . . . . .	21
2.3 O determinante fermiônico na presença de modos zero . . . . .	24
<b>3 A <math>QED_2</math> em Topologias não Triviais</b>	<b>30</b>
3.1 Instantons . . . . .	30
3.2 Topologia e modos zero . . . . .	33
3.3 O Funcional Gerador . . . . .	36
3.4 Contribuições não triviais às funções de correlação . . . . .	41

<b>4 A <math>QED_2</math> em Topologias Triviais</b>	<b>51</b>
4.1 O funcional gerador . . . . .	52
4.2 A auto-energia do fóton . . . . .	53
4.3 Função de dois pontos fermiônica . . . . .	58
4.4 Função de quatro pontos mista . . . . .	63
<b>Conclusão</b>	<b>68</b>
<b>A Cálculo da Função de Green para o Modelo de Schwinger</b>	<b>71</b>
<b>B Grupos de Homotopia</b>	<b>75</b>
B.1 Idéias básicas . . . . .	75
B.2 Grupos fundamentais . . . . .	76
B.3 Exemplos de grupos fundamentais . . . . .	77
<b>Bibliografia</b>	<b>79</b>

# Introdução

A teoria quântica de campos relativística [1], complementada com o procedimento da renormalização [2][3][4][5], é a candidata natural na descrição da física de partículas elementares desde que se descobriram os primeiros indícios de que estas podiam ser criadas ou aniquiladas. Apesar de, ao mesmo tempo, ser considerada problemática, devido ao aparecimento constante de quantidades que divergem, ela nos tem apresentado com resultados notáveis e de grande precisão como o cálculo do momento magnético anômalo do elétron. Com ela, conseguimos ainda a unificação das interações eletromagnética e fraca e pôde-se propor a Cromodinâmica Quântica, para a descrição das interações fortes.

A busca de uma teoria que unificasse as quatro interações nos apresentou vários modelos que ainda não tiveram verificação experimental, como por exemplo, as teorias supersimétricas ou as teorias de cordas. Tais teorias, frequentemente baseadas em dimensões que não as quatro em que aparentemente vivemos, tornaram corriqueiro o estudo de modelos em um número arbitrário de dimensões.

Paralelamente, desenvolveu-se, desde a década de 60, o estudo de modelos não necessariamente físicos [6] em duas dimensões. O estudo destes modelos pode ser justificado como uma tentativa de esclarecer alguns pontos obscuros das teorias de campos em quatro dimensões. Muitas vezes, o fato de estarmos em um espaço diferente torna a teoria exatamente solúvel. Em duas dimensões, por exemplo, o caráter abeliano do grupo de Lorentz nos permite estabelecer um mapeamento entre campos bosônicos e fermiônicos [7]. Este fenômeno, conhecido como *bosonização*, dá uma expressão gaussiana para a integral funcional o que, por sua vez, nos permite obter, para muitos modelos [6][8], uma



solução exata sem que haja a necessidade de se utilizar técnicas perturbativas. Estes laboratórios teóricos são muito bem vindos no sentido de se poder verificar a amplitude de validade do método perturbativo, ou de qualquer outro dispositivo matemático, nos dando maior segurança quanto à sua utilização. Além disso, fenômenos ansiosamente aguardados em quatro dimensões, como o confinamento ou a geração dinâmica de massa, são rigorosamente provados em duas dimensões. Deste modo, esperamos poder extrair *insights* para os fenômenos análogos em quatro dimensões.

Em teoria de campos, sabe-se que, devido a um problema de definição das expansões perturbativas, somos inevitavelmente levados a empregar a teoria de renormalização. Esta técnica supõe que os parâmetros externos de uma determinada teoria, como massas e constantes de acoplamento, possam ser dotados de uma parte infinita, usada para cancelar suas divergências, sem que isto altere seus valores observáveis. Este cancelamento, característico apenas das teorias renormalizáveis, é ambíguo, uma vez que deixa uma parte finita arbitrária que, portanto, deve ser fixada. Isto é feito através da imposição de certas condições de renormalização, onde usamos as massas e constantes de acoplamento fisicamente mensuráveis relativas ao problema. Apesar da escolha de como estas condições devem ser impostas também não ser única, isto não representa um problema uma vez que elas estão relacionadas entre si por intermédio de um grupo de equações conhecidas como equações do grupo de renormalização. Com estas equações pode-se mostrar [9] que o cálculo de quantidades físicas é independente do tipo de condição utilizada, bastando apenas que se conheça os valores experimentais de todos os parâmetros físicos do modelo. Assim, existem diversas possibilidades para definir os parâmetros que comparecem na lagrangeana do modelo, mas todos conduzem ao mesmo resultado.

Neste ponto, podemos começar a apresentar o conteúdo desta tese. Sabemos que o número de condições de renormalização a serem impostas é, em geral, igual ao número de parâmetros externos da teoria, os quais podem ser facilmente identificados na lagrangeana inicial. No entanto, ao estudarmos o modelo de Schwinger [10], que descreve a interação de férmions não massivos com o campo eletromagnético, acontece algo curioso. Este mod-

elo, proposto como um protótipo de estudo para o problema de confinamento de quarks [11], é especialmente interessante pois, durante sua renormalização, a regularização de produtos de campos mal definidos causa o aparecimento de uma nova constante arbitrária explicitamente no seu espectro. A idéia de que, para cada valor desta constante, temos espectros diferentes caracterizando diferentes teorias, não nos parece confortável. Ela não está presente na definição do modelo original e, portanto, não tem interpretação física que permita fixá-la ou medi-la experimentalmente.

Com isto em mente, principiamos um estudo desta ambigüidade. A motivação deste estudo foi a verificação da sua real possibilidade de eliminação no modelo de Schwinger Quiral [12] em topologias não triviais. Assim, no primeiro capítulo desta tese fazemos uma breve apresentação do modelo de Schwinger apontando alguns aspectos que consideramos importantes para os capítulos subseqüentes. No segundo capítulo, descrevemos o método da bosonização para o cálculo de determinantes funcionais de operadores diferenciais quando estes possuem ou não autovalores nulos. Já no terceiro capítulo, após uma breve introdução ao problema de topologia e modos zero, passamos ao cálculo explícito das contribuições de setores com topologia não trivial às funções de correlação fermiônicas, com a intenção de obter uma prescrição que nos permita fixar um valor para a ambigüidade neste caso. Finalmente, fazemos, no quarto e último capítulo, os cálculos correspondentes à topologia trivial e analisamos as divergências da teoria a partir de regularizações não invariantes de *gauge*. Esta análise, levando em consideração aspectos físicos, nos conduz a algumas conclusões sobre a ambigüidade.

# Capítulo 1

## A Eletrodinâmica Bidimensional

O estudo das teorias de *gauge* bi-dimensionais deu um passo muito importante, por volta do início da década de 60, com a apresentação de uma solução para a eletrodinâmica quântica de férmions não massivos por J. Schwinger [10]. Neste capítulo, iremos abordar alguns aspectos gerais deste modelo, caracterizar o aparecimento da ambigüidade de regularização durante o cálculo da anomalia e discutir o conceito de determinante funcional de operadores diferenciais para o cálculo do funcional gerador.

### 1.1 O Modelo de Schwinger

Classicamente, o estudo da eletrodinâmica de férmions não massivos num espaço-tempo bi-dimensional com métrica euclideana é caracterizado pela densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L}(A_\mu, \bar{\psi}, \psi) = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} D\psi, \quad (1.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$\bar{\psi}(x)$  e  $\psi(x)$  são os campos grassmannianos que descrevem o férmion,  $D$  é o *operador de Dirac* definido por

$$D \equiv \gamma^\mu (i\partial_\mu + eA_\mu) \quad (1.2)$$

e  $e$  é a carga elétrica. A aplicação das equações de Euler-Lagrange à densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}$  nos fornece uma equação de movimento para o campo de *gauge*

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.3)$$

onde a corrente

$$J^\nu \equiv \bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (1.4)$$

é claramente conservada. O teorema de Noether nos garante que à conservação desta corrente está necessariamente relacionada uma simetria clássica.

Ao mesmo tempo, a densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}$  permanece invariante sob a ação do grupo de *gauge*  $U(1)$  local, visto que o setor de interação está escrito em termos da derivada covariante  $D$ . Sob a ação deste grupo, os campos de nossa teoria se transformam segundo

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\Lambda, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp(i\alpha\Lambda), \\ \psi' &= \exp(-i\alpha\Lambda)\psi, \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde  $\alpha = c\hbar/e$  e  $\Lambda = \Lambda(x)$ .

Esta não é, entretanto, a única transformação de simetria que deixa (1.1) invariante. Não é difícil ver que a densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}$  também permanece invariante por transformações globais quirais, isto é, sob a ação do grupo  $\tilde{U}(1)$

$$\begin{aligned}
A'_\mu &= A_\mu, \\
\bar{\psi}' &= \bar{\psi} \exp(\alpha \gamma_5), \\
\psi' &= \exp(\alpha \gamma_5) \psi,
\end{aligned}
\tag{1.6}$$

onde  $\alpha$  é uma constante. À estas transformações está associada, como sabemos, a corrente de Noether

$$J_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, \tag{1.7}$$

que também se conserva classicamente e recebe o nome de corrente *axial*. Devido ao fato de estarmos num espaço-tempo bidimensional, as matrizes  $\gamma^\mu$  satisfazem à relação

$$\gamma^\mu \gamma_5 = \varepsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu, \tag{1.8}$$

onde  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o tensor completamente anti-simétrico ( $\varepsilon^{01} = -\varepsilon^{10} = 1$ ). Deste modo, pode-se verificar que as duas correntes, de *gauge* e *axial*, são duais, isto é

$$J_5^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} J_\nu \equiv J_\nu^*.$$

Nosso próximo passo nesta introdução ao estudo do eletromagnetismo de Schwinger seria averiguar se estas simetrias clássicas podem ser ou não unitariamente implementadas, a nível quântico, no espaço de Hilbert. Antes de prosseguirmos, no entanto, vamos fazer uma pequena análise sobre a dimensionalidade dos campos e parâmetros da teoria. Isto nos permitirá antecipar algumas características relacionadas à renormalizabilidade da teoria quântica associada, a *QED*<sub>2</sub>.

A integral da densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}$  sobre todo o espaço-tempo,

$$S = \int d^2x \mathcal{L}, \tag{1.9}$$

é um escalar de Lorentz que chamamos de ação. Em unidades de dimensão de massa, ( $[m] = 1$ )  $S$  deve ser adimensional. O requerimento desta adimensionalidade nos permite,

por sua vez, determinar as dimensões dos campos e parâmetros. Lembrando ainda que  $[d^2x] = -2$  e  $[\partial_\mu] = 1$ , concluímos que

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}] &= [\psi] = \frac{1}{2}, \\ [A_\mu] &= 0, \\ [e] &= 1. \end{aligned}$$

Podemos notar a existência de uma dimensão de massa para a carga elétrica. Esta é a primeira característica interessante do modelo. Ela nos indica a possibilidade de geração de massa na teoria e, no que diz respeito à divergência dos diagramas de Feynman da análise perturbativa, que se trata de uma teoria *super-renormalizável*.

Passando ao estudo dos aspectos quânticos da  $QED_2$ , vamos nos concentrar em dois objetivos:

- a obtenção das simetrias preservadas a nível quântico;
- o cálculo do *funcional gerador* das funções de correlação.

Quânticamente, o objeto principal de interesse é este funcional gerador. É em termos das funções de correlação que ele fornece, que todos os observáveis físicos podem ser obtidos. Para o modelo de Schwinger, este funcional é dado por

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int dA_\mu d\bar{\psi} d\psi \exp\left(-S + \langle J^\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta}\psi \rangle + \langle \bar{\psi}\eta \rangle\right), \quad (1.10)$$

onde  $\langle \rangle$  representa uma integração em todo o espaço,  $J^\mu$ ,  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  são as fontes externas associadas aos campos  $A_\mu$ ,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , respectivamente, e  $S$  dada por (1.9). A medida na integral funcional acima tem um papel fundamental. Ela indica que a integração é feita sobre todas as configurações possíveis dos campos do modelo. Na verdade, é a medida funcional que dá o caráter quântico de uma teoria de campos. Isto ficará ainda mais evidente no capítulo 2.

## 1.2 Anomalias e Ambigüidades de Regularização

Anomalias aparecem quando algumas simetrias, presentes na lagrangeana clássica, não podem ser mantidas simultaneamente a nível quântico. Originalmente, as anomalias foram descobertas no contexto da teoria de perturbações como a impossibilidade de se adicionar contratermos adequados que mantivessem, após a quantização do modelo, todas as simetrias clássicas[13][14]. Sob este ponto de vista, só há anomalias se existirem, a nível clássico, pelo menos duas simetrias que, a nível quântico, não possam ser preservadas simultaneamente por uma escolha adequada destes contratermos. Em geral, esta quebra da simetria se traduz na não conservação de uma corrente de Noether. Um exemplo claro da existência de anomalias em teorias de *gauge* será mostrado, a seguir, considerando o modelo de Schwinger.

Seguindo as idéias do parágrafo anterior, vamos estudar a conservação das correntes de *gauge* e axial da  $QED_2$  para ver se é possível obter

$$\begin{aligned}\langle 0 | \partial_\mu J^\mu | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \partial_\mu J_5^\mu | 0 \rangle &= 0\end{aligned}\tag{1.11}$$

simultaneamente. Antes de mais nada, devemos verificar que, como operadores num subespaço do espaço de Hilbert,  $J^\mu$  e  $J_5^\mu$  são compostos por um produto de duas distribuições temperadas, o que, em geral, não é bem definido. Portanto, para que qualquer cálculo que as envolva faça sentido, devemos regularizar suas expressões. Seguindo o método usado por S. Adler [13], em (1969), onde a regularização utilizada preserva a invariância de *gauge*, chega-se, após alguns cálculos [15], a

$$\begin{aligned}\langle 0 | \partial_\mu J^\mu | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \partial_\mu J_5^\mu | 0 \rangle &= -\frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Não há o cancelamento simultâneo desejado, o que causa o aparecimento de uma

anomalia conhecida como *anomalia de Adler-Bell-Jackiw*. Surge a pergunta: que resultado, no cálculo destes valores esperados, teria sido obtido se, ao invés de usarmos uma regularização invariante de *gauge*, tivéssemos usado uma regularização qualquer? Se este cálculo comprovar a impossibilidade da obtenção de (1.11), poderemos finalmente afirmar que este modelo é anômalo.

A resposta à pergunta anterior será obtida considerando-se um método de regularização conhecido por separação de pontos (*point-splitting*) [10]. Este método de regularização consiste em separar os pontos do espaço-tempo nas expressões que contenham produtos de distribuições. Isto dá sentido a expressões divergentes e indefinidas. Este método torna uma divergência vinda do produto de duas funções  $\delta$  no mesmo ponto do espaço em uma singularidade do tipo  $1/\varepsilon$  que, posteriormente, será fundamental para isolar a contribuição regular ao cálculo da anomalia.

Tomando a corrente axial como exemplo, faz-se

$$\begin{aligned} J_5^\mu(x, \varepsilon, a) &\equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \exp\left(iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z)\right) + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.13)$$

É fácil ver que sob a transformação de *gauge* (1.5),  $J_5^\mu$  é levada em

$$J_5^\mu = J_5^\mu \exp\left(-i\left(\Lambda\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \Lambda\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right) \exp\left(ia\left(\Lambda\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \Lambda\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right),$$

onde a simetria de *gauge* é explicitamente quebrada, exceto para o valor  $a = 1$ . Considerando, então, esta regularização e a possibilidade de valores genéricos para  $a$ , passamos ao cálculo explícito da anomalia.

A divergência de  $J_5^\mu$ , neste caso, é

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_5^\mu &= i\left(\partial_\mu \bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right) \exp\left(iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z)\right) + \\ &\quad i\bar{\psi}\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \gamma^\mu \gamma_5 \left(\partial_\mu \psi\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \exp\left(iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z)\right) + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& i\bar{\psi}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu\gamma_5\psi\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)ea\partial_\mu\left(iea\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}}dz^\alpha A_\alpha(z)\right)\times \\
& \exp\left(iea\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}}dz^\alpha A_\alpha(z)\right)+ \\
& (\varepsilon\longleftrightarrow-\varepsilon)
\end{aligned}$$

Podemos escrever as derivadas em relação a  $x^\mu$ , de  $\bar{\psi}$  e  $\psi$ , em função do campo de *gauge*  $A_\mu$ . Para isto, utilizamos as equações de Heisenberg para os campos fermiônicos

$$\begin{aligned}
i\gamma^\mu\partial_\mu\psi &= -e\gamma^\mu A_\mu\psi, \\
i\bar{\psi}\overleftarrow{\gamma}^\mu\partial_\mu &= e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu J_5^\mu &= ie\bar{\psi}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu\gamma_5\psi\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[A_\mu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-A_\mu\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\right. \\
& \left.a\partial_\mu\int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}}dz^\alpha A_\alpha(z)\right] \\
&\cong ie\bar{\psi}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\gamma^\mu\gamma_5\psi\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left[\varepsilon^\alpha\partial_\alpha A_\mu-a\partial_\mu A_\alpha\varepsilon^\alpha\right]+(\varepsilon\longleftrightarrow-\varepsilon),
\end{aligned}$$

onde foram considerados apenas os termos lineares em  $\varepsilon$  das expansões em Taylor do campo  $A_\mu$ . Da expressão acima, concluímos que: devido à sua direta proporcionalidade a  $\varepsilon$ , os termos regulares de  $J_5^\mu$  não contribuirão para o cálculo da anomalia, já que tomaremos o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . No entanto, se  $J_5^\mu$  possuir termos singulares do tipo  $1/\varepsilon$ , estes contribuirão.

O valor esperado da divergência da corrente axial é

$$\langle i\partial_\mu J_5^\mu \rangle = e\langle J_5^\mu \rangle \varepsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu - a\partial_\mu A_\alpha] + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon),$$

onde

$$\begin{aligned} \langle J_5^\mu \rangle &\equiv \left\langle \bar{\psi} \left( x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \gamma^\mu \gamma_5 \psi \left( x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\rangle \exp \left( iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z) \right) \\ &= -Tr \left( \gamma_5 \gamma^\mu G_+(x, \varepsilon) \right) \exp \left( iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z) \right). \end{aligned}$$

Esta é uma expressão geral para o valor esperado do operador  $J_5^\mu$  em termos do propagador de Feynman  $G_+$  [16]. A necessidade do uso da teoria de perturbações para a obtenção de uma expressão para  $G_+$ , dificultaria bastante a continuação deste cálculo. No entanto, o fato da nossa teoria ser a eletrodinâmica quântica em  $(1+1)$  nos permite fazer uso de uma expressão exata para  $G_+$ , obtida através da bosonização dos férmions (ver apêndice A). Esta é dada por

$$G_+(x, \varepsilon) = \exp \left( -ie \left[ \phi \left( x + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \phi \left( x - \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \right) G_F(\varepsilon), \quad (1.15)$$

onde

$$G_F(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma^\mu \varepsilon_\mu}{\varepsilon^2}$$

é a função de Green de férmions livres e  $\phi$  um campo escalar. Para que  $G_+$  seja realmente a função de Green dos férmions interagentes precisamos ter a seguinte equação satisfeita:

$$DG_+(x, \varepsilon) = \delta^{(2)}(\varepsilon),$$

onde  $D$  é definido por 1.2. Esta é, na verdade, uma equação para os campos não locais  $\phi$ ,

$$\gamma^\mu \partial_\mu \phi = -\gamma^\mu A_\mu,$$

ou (ver apêndice A)

$$\phi = -\frac{1}{\square} \left( \partial^\mu A_\mu + \frac{i}{2} \gamma_5 \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu \right). \quad (1.16)$$

Assim, campos escalares não locais como acima, nos dão funções de Green interagentes.

De posse de (1.15) e considerando apenas termos lineares em  $\varepsilon$  da sua expansão em série de Taylor escrevemos

$$\begin{aligned} \langle i\partial_\mu J_5^\mu \rangle &= -eTr \left\{ \gamma^5 \gamma^\mu \exp \left( -ie \left( \frac{1}{\square} \varepsilon^\nu \partial_\mu \partial_\nu A^\mu \right) \right) G_F(\varepsilon) \times \right. \\ &\quad \left. \exp \left( iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z) \right) \varepsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu - a\partial_\mu A_\alpha] \right\} + \\ &\quad + (\varepsilon \longleftrightarrow -\varepsilon). \end{aligned}$$

Podemos obter uma simplificação desta equação lembrando que, em  $(1+1)$  dimensões, as matrizes  $\gamma$  satisfazem às relações (1.8). Daí concluímos que

$$Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\beta) = 2\varepsilon^{\mu\beta},$$

e, como só estamos interessados em termos lineares em  $\varepsilon$  pois são eles que darão a anomalia, expandimos as exponenciais em série de Taylor e chegamos à equação

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = -\frac{e}{2\pi} \varepsilon^{\mu\beta} \frac{\varepsilon^\beta}{\varepsilon^2} \left( 1 + i \frac{e}{\square} \varepsilon^\rho \partial_\sigma \partial_\rho A^\sigma \right) \left( 1 + iea A_k \varepsilon^k \right) \varepsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu - a\partial_\mu A_\alpha],$$

onde efetuamos uma simetrização pela troca  $\varepsilon$  por  $-\varepsilon$  seguida da soma e divisão por dois entre os termos simetrizados o que nos dá a contribuição simétrica e regular desejada. Lembrando ainda que, no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  [16],

$$\langle \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \delta^{\alpha\beta},$$

obtemos, finalmente,

$$\langle \partial_\mu J_5^\mu \rangle = -\frac{e}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\mu} F_{\alpha\mu} (1+a). \quad (1.17)$$

Comparando (1.17) com (1.12), verificamos que os resultados coincidem via imposição  $a=1$ , o que está de pleno acordo com os resultados de Adler. Na verdade, este valor para a ambigüidade garante a invariância de *gauge* pela regularização escolhida. Portanto, é de se esperar que a repetição de todo este cálculo para a corrente de *gauge* nos dê um

resultado do tipo

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle \propto (1 - a).$$

E realmente é o que encontramos! Para a corrente de *gauge*, a repetição destes cálculos nos dá

$$\langle \partial_\mu J^\mu \rangle = \frac{e}{2\pi} \partial_\mu A^\mu (1 - a). \quad (1.18)$$

Podemos concluir, a partir destes resultados, que a  $QED_2$  é realmente anômala. De fato,  $\exists a$  tal que (1.17) e (1.18) se anulem simultaneamente. Através de escolhas adequadas para o valor que o parâmetro arbitrário  $a$  deve assumir podemos obter comportamentos completamente distintos como:

- a conservação da corrente axial e presença da anomalia de *gauge*;
- a conservação da corrente de *gauge* e presença da anomalia axial;
- a presença de ambas as anomalias: de *gauge* e axial.

A possibilidade da introdução de tais parâmetros, não é exclusividade da regularização por separação de pontos. Ela existe em vários outros métodos de regularização. Para outros modelos bi-dimensionais, como o modelo de Thirring, o modelo Axial e o modelo de Schwinger Quiral, o problema é ainda mais sério. Não só há o aparecimento desta arbitrariedade como não há a possibilidade da escolha de um valor para  $a$  que cancele qualquer anomalia. Na verdade, é comum dizer que estes modelos clássicos correspondem a uma infinidade de modelos quânticos, um para cada valor do parâmetro arbitrário. O conteúdo físico de cada um destes modelos dependeria, nessa visão, de qual simetria se queira preservar.

Na nossa opinião, o aparecimento de um parâmetro regulando a preservação ou não de uma dada simetria está refletindo a possibilidade de renormalizar a teoria usando contratermos que a preservem ou não. É nossa esperança obter ligações mais concretas entre este parâmetro e os diferentes esquemas de renormalização. Se esta ligação existir, poderemos tentar ligar as teorias obtidas para os diversos valores de  $a$  através do

grupo de renormalização, o que eliminaria este tipo de ambigüidade do procedimento de quantização.

### 1.3 O Funcional Gerador

A idéia de que a partir de uma integral funcional se pudesse obter as funções de correlação de uma teoria de campos é uma extensão do conceito de integrais de caminho em mecânica quântica [17]. Por exemplo, uma representação integral funcional para o operador de evolução temporal  $U(t_2, t_1)$  entre dois estados  $|\phi(x_1)\rangle$  e  $|\phi(x_2)\rangle$  de uma teoria de campos escalares, é dada por

$$\langle \phi_2 | U(t_2, t_1) | \phi_1 \rangle = \int [d\phi] \exp(-S(\phi)),$$

com condições de contorno  $\phi(x, t_1) = \phi_1(x)$  e  $\phi(x, t_2) = \phi_2(x)$ . A quantidade  $S(\phi)$  é a ação euclideana clássica do modelo, obtida através da continuação analítica, para tempos imaginários, da ação no espaço de Minkowski. O integrando desta integral funcional define uma medida positiva, a partir da qual pode-se calcular, por exemplo, as funções de correlação do campo  $\phi$ ,

$$\langle \mathbf{T}(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) \rangle = \int d\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(-S(\phi)),$$

( $\mathbf{T}$  representando o produto temporalmente ordenado) como uma seqüência de derivadas funcionais, em relação às fontes  $J$ , de uma quantidade definida por

$$Z(J) = \int [d\phi] \exp[-S(\phi) + \langle J\phi \rangle],$$

a qual chamamos *funcional gerador*. Isto é,

$$\langle \mathbf{T}(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) \rangle = Z^{-1}(J=0) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z(J) \Big|_{J=0}.$$

Em geral, deve-se dar uma prescrição para a definição desta medida funcional. Isto pode ser feito se considerarmos os campos escritos em termos de um conjunto completo de autofunções  $\{\varphi_n\}$  de um determinado operador. No caso dos férmions em teorias de *gauge* fazemos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_n a_n \varphi_n(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \bar{a}_n \varphi_n^\dagger(x),\end{aligned}$$

onde  $n$  rotula o conjunto completo infinito mas enumerável  $\{\varphi_n\}$  e os coeficientes  $a_n, \bar{a}_n$  são variáveis de Grassmann definindo

$$\begin{aligned}\int da &= 0, \\ \int ada &= 1.\end{aligned}\tag{1.19}$$

Como este conjunto de autofunções é fixo, a integração sobre todas as configurações de campo possíveis para os férmions se resume à integração sobre todos os valores possíveis destes coeficientes anticomutantes

$$d\bar{\psi}d\psi = \prod_n d\bar{a}_n da_n.$$

Antes de prosseguirmos, no entanto, devemos justificar a utilização desta prescrição. Este conjunto de autofunções, em termos das quais os campos fermiônicos foram escritos como combinação linear, foi, na verdade, convenientemente escolhido como conjunto completo ortonormal das autofunções do operador de Dirac (1.2). O fato destas autofunções serem discretamente rotuladas vem da imposição de o sistema existir sobre uma variedade compacta. Esta imposição se faz necessária devido à dificuldade de manipulação de operadores diferenciais em volume infinito no espaço de Hilbert. Fisicamente, já nos deparamos diversas vezes com restrições deste tipo. Em mecânica quântica, por exemplo, éramos freqüentemente levados a considerar sistemas confinados a volumes finitos e

suas funções de onda caindo a zero nas extremidades deste volume. Esta imposição nos dava um espectro discreto dos autovalores para o observável. O equivalente em teoria de campos seria, por exemplo, a compactificação do espaço euclidiano. No nosso caso, isto pode ser feito através da projeção estereográfica sobre a esfera  $S^2$  [18], onde o infinito é mapeado em um de seus pólos e a origem no outro. Pode-se mostrar, ainda, que os autovalores do operador de Dirac não dependem do raio de compactificação [19]. Uma outra maneira de obter a discretização dos autovalores é impor condições de contorno periódicas. Por exemplo, vincular o sistema à superfície de um toro. De qualquer modo, o resultado obtido é que a variedade em que o sistema físico existe é compacta e o espaço de Hilbert, onde as autofunções são definidas, é restrito ao espaço das funções que caem a zero mais rápido que  $1/x$ , funções de quadrado integrável. Podemos construir agora um espaço de Fock cujas excitações são rotuladas por índices discretos.

A atuação do operador de Dirac (1.2) nas autofunções  $\varphi_n$  e  $\varphi_n^\dagger$  é dada por

$$\begin{aligned} D(A_\mu) \varphi_n(x) &= \lambda_n \varphi_n(x), \\ D^\dagger(A_\mu) \varphi_n^\dagger(x) &= \lambda_n \varphi_n^\dagger(x), \end{aligned} \tag{1.20}$$

o que é obtido com o uso das relações 1.14. O termo de interação da densidade de lagrangeana  $\mathcal{L}$ , fica

$$\begin{aligned} \bar{\psi} D(A_\mu) \psi &= \sum_{n,m} \bar{a}_n \varphi_n^\dagger D(A_\mu) a_m \varphi_m \\ &= \sum_{n,m} \bar{a}_n \varphi_n^\dagger a_m \lambda_m \varphi_m, \end{aligned}$$

e a ação fermiônica se reduz a

$$\begin{aligned} S_F &= \int d^2x \sum_{n,m} (\bar{a}_n a_m \lambda_m \varphi_n^\dagger \varphi_m) \\ &= \sum_n \bar{a}_n a_n \lambda_n, \end{aligned}$$

onde fizemos uso da ortonormalidade das autofunções. Portanto, a parte fermiônica de (1.10) pode ser escrita como

$$Z_F [0] = \int \prod_n d\bar{a}_n da_n \exp(-\bar{a}_n a_n \lambda_n).$$

Expandindo a exponencial do integrando em Taylor e considerando (1.19) percebemos que apenas os dois primeiros termos da expansão serão não nulos.  $Z_F$  pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} Z_F &= \int \prod_n d\bar{a}_n da_n (1 - \bar{a}_n a_n \lambda_n) & (1.21) \\ &= - \prod_n \lambda_n \int d\bar{a}_n da_n \bar{a}_n a_n \\ &= \prod_n \lambda_n \int d\bar{a}_n \bar{a}_n \int da_n a_n \\ &= \prod_n \lambda_n \\ &= \det D(A). \end{aligned}$$

A integração sobre os férmions no funcional gerador, considerando momentaneamente o campo de *gauge* como um campo externo, é equivalente ao cálculo do determinante funcional do operador diferencial de Dirac. Este cálculo será o objeto principal de estudo do próximo capítulo, onde será considerada a questão da existência ou não de modos zero degenerados deste operador. A possibilidade de se obter uma expressão exata para o determinante fermiônico nas teorias de *gauge* bi-dimensionais é um dos aspectos que tornam este tipo de teoria bastante interessante. Isto possibilita, por exemplo, uma comparação com os resultados da teoria de perturbações.



# Capítulo 2

## Determinantes Funcionais em $1+1$

*Determinante funcional* é, em geral, o termo associado ao determinante de um operador diferencial  $D$  definido no espaço euclidiano cujo valor depende da escolha de uma configuração de campo  $A_\mu(x)$ . Estes aparecerão, em teoria de campos, sempre que estivermos trabalhando com integrações funcionais gaussianas. Isto pode ser tanto uma característica exata da lagrangeana (ação fermiônica da *QED*, *QCD*) como pode ser o resultado de uma aproximação (semi-clássica, potencial efetivo na expansão  $\frac{1}{N}$ , etc.). Por outro lado, pode-se representar o determinante de um operador em termos de uma integral gaussiana sobre campos *grassmannianos*. Esta é uma técnica muito útil no cálculo do determinante de Faddeev-Popov, que surge durante o processo de fixação de *gauge*.

Neste capítulo, mostraremos como o determinante fermiônico está relacionado à existência de anomalias em uma teoria de *gauge* (isto será feito através do cálculo das identidades de Ward-Takahashi) e apresentaremos um método para o seu cálculo explícito na presença e na ausência de modos zero do operador diferencial.

### 2.1 Identidades de Ward-Takahashi anômalas

A obtenção das identidades de Ward-Takahashi anômalas através de métodos funcionais é consideravelmente recente. Foi somente 14 anos após a descoberta destas anomalias

[13][14] no cálculo teórico das amplitudes de decaimento da aniquilação de píons  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , que Fujikawa [20] demonstrou a impossibilidade da definição da medida funcional fermiônica respeitando todas as simetrias clássicas. Esta seria, nesta formulação, a origem das anomalias.

Este atraso foi devido, basicamente, ao fato de muitas pessoas assumirem incorretamente que a medida fermiônica era invariante sob as transformações de quiralidade. Após a observação de Fujikawa, a utilização de métodos funcionais revelou-se muito útil na análise das identidades de Ward anômalas. Estes não somente possibilitam a obtenção das anomalias de uma maneira não perturbativa, como se mostram ferramentas muito poderosas na solução completa de modelos muito interessantes, como a  $QED_2$ , modelo de Thirring, etc.

Seja a lagrangeana euclideana fermiônica

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} D \psi.$$

Consideremos uma transformação global infinitesimal dependente de um parâmetro  $\alpha$  constante dada por

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \psi + \delta_\alpha \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \bar{\psi} \delta_\alpha, \end{aligned} \tag{2.1}$$

que seja, classicamente, uma simetria interna da ação fermiônica correspondente. Passemos agora a considerar esta simetria global de forma local. Isto é feito fazendo o parâmetro  $\alpha$  ter dependência explícita nas coordenadas do espaço-tempo. Neste caso, as transformações locais

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = \psi + \delta_{\alpha(x)} \psi, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \bar{\psi} \delta_{\alpha(x)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

nos levam a uma ação fermiônica, em geral, não invariante

$$S_F \rightarrow S'_F = S_F + \int dx \Lambda_\alpha(x). \tag{2.3}$$

Agora, como a transformação (2.1) é uma simetria do modelo, poderemos escrever  $\Lambda_\alpha(x)$  como a divergência de alguma corrente. Por exemplo: se estivermos considerando as transformações de quiralidade (3.10), teremos [21]

$$\Lambda_\alpha(x) = -\alpha(x) \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi). \quad (2.4)$$

Para estudar sua possível conservação quântica, basta considerarmos (2.2) como uma mudança de variáveis a ser feita na parte fermiônica do funcional gerador. Desta forma, seguindo a idéia de Fujikawa, esperamos que uma mudança deste tipo em (1.10) nos dê um jacobiano não trivial

$$\det D = \mathfrak{S}(\delta_\alpha) \det D_\alpha, \quad (2.5)$$

com  $D_\alpha$  definido a partir de (2.3) como

$$S'_F = \int d^2x \bar{\psi}' D_\alpha \psi'.$$

Após esta transformação, obtém-se o funcional gerador fermiônico

$$Z = \mathfrak{S}(\delta_\alpha) \int d\bar{\psi} d\psi \exp \left\{ -S'(A_\mu, \bar{\psi}', \psi') - \int dx \Lambda_\alpha(x) \right\}.$$

Esta expressão é, a princípio, dependente do parâmetro  $\alpha$ . No entanto, sabemos que, por definição,  $Z$  é função apenas das fontes dos campos, não podendo, portanto, depender de  $\alpha$ . Portanto, impondo uma condição para eliminar esta dependência, chegamos a uma equação envolvendo  $\mathfrak{S}(\delta_\alpha)$

$$\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \alpha(x)} \Big|_{\alpha=0} = 0 = \left\langle \frac{\delta}{\delta \alpha} \int dy \Lambda_\alpha(y) \right\rangle \Big|_{\alpha=0} - \frac{\delta \ln \mathfrak{S}(\delta_\alpha)}{\delta \alpha(x)} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.6)$$

Novamente, no caso da simetria quiral, esta equação, com  $\Lambda_\alpha(x)$  dado por (2.4), nos fornece

$$\frac{\delta \ln \mathfrak{S}(\delta_\alpha)}{\delta \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Este resultado confirma a observação de Fujikawa de que a existência de anomalias está diretamente relacionada ao surgimento de um jacobiano para a medida fermiônica funcional. Deve-se ressaltar aqui que para obter 2.7 a partir de 2.6 foi necessária a utilização de um método de regularização. Esplicitamente, utilizou-se o *point-splitting* invariante de *gauge*.

Na seção seguinte, introduziremos um método para o cálculo explícito do  $\det D_\alpha$  que nos permitirá, posteriormente, calcular  $\mathfrak{S}(\delta_\alpha)$ . Uma vez que os determinantes que aparecem em ambos os lados de (2.5) devem ser regularizados, podemos prever o aparecimento de ambigüidades nesta regularização, em face do que obtivemos no cálculo das anomalias. Neste cálculo consideraremos, separadamente, os casos onde o operador de Dirac contenha ou não autovalores nulos.

## 2.2 O determinante fermiônico na ausência de modos zero

No caso de o operador de Dirac (1.2) ter um espectro discreto de autovalores não nulos, o cálculo funcional de seu determinante será feito com a utilização da relação formal

$$\det D = \exp \text{Tr} \ln D. \quad (2.8)$$

Vamos calcular a derivada em relação à constante de acoplamento da expressão acima

$$\frac{d}{de} \ln \det D = \text{Tr} \left[ D^{-1} \frac{dD}{de} \right], \quad (2.9)$$

( $\text{Tr}$  representando um traço, tanto funcional como sobre os índices de Lorentz) e, uma vez obtido um resultado exato, integrar novamente em  $e$ . O primeiro termo dentro do traço da expressão acima é a função de Green interagente dada por

$$D^{-1} = G_+(x, y),$$

e o segundo, devido à definição de  $D$ , é simplesmente o campo de gauge

$$\frac{dD(A_\mu)}{de} = \gamma^\mu A_\mu.$$

Portanto, a expressão que devemos calcular é

$$\frac{d}{de} \ln \det D = \int dx \text{Tr} [G_+(x, x) \gamma^\mu A_\mu]. \quad (2.10)$$

Novamente temos o problema do cálculo de uma quantidade singular; o traço de  $G_+$ . Devemos então, exatamente como foi feito para o cálculo das anomalias, regularizar esta quantidade. Já conhecemos um método de regularização eficiente, a separação de pontos, introduzida em (1.13). A utilização deste método nos dá, para o cálculo de (2.10), a expressão

$$\begin{aligned} \frac{d}{de} \ln \det D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \text{Tr} \left[ \exp \left( -ie \left( \phi \left( x - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \phi \left( x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right) G_F(\varepsilon) \right. \\ &\quad \left. \exp \left( -iea \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} dz^\alpha A_\alpha(z) \right) \gamma^\mu A_\mu \right] + \\ &\quad (\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.11)$$

O símbolo  $(\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon)$  tem o papel de simetrizar a expressão regularizada. O cálculo desta quantidade é bastante simples e já sabemos como fazer. Após uma expansão em Taylor das exponenciais, toma-se os traços funcionais e de Lorentz, lembrando que, no espaço euclidiano bi-dimensional, as matrizes  $\gamma$  satisfazem a

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) &= -2\delta^{\mu\nu}, \\ \text{Tr} (\gamma_5 \gamma^\nu \gamma^\mu) &= -2i\varepsilon^{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Usando ainda a expressão (1.16) obtemos

$$\frac{d}{de} \ln \det D = -\frac{e}{\pi} \int d^2x A_\mu \left\{ \frac{(a+1)}{2} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right\} A_\nu, \quad (2.12)$$

onde já percebemos o aparecimento da ambigüidade de regularização como um termo massivo para o campo de *gauge*. Porém, a conta ainda não está terminada. Devemos efetuar uma última integração na constante de acoplamento de modo a obter  $\det D$ , que é a quantidade principal de interesse. Após esta integração chega-se a

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\det D}{\det i\gamma^\mu \partial_\mu} &= \int_0^c d \ln \det D & (2.13) \\
&= -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x A_\mu \left\{ \frac{(a+1)}{2} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right\} A_\nu \\
&= -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x A_\mu \left\{ a_s \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right\} A_\nu,
\end{aligned}$$

onde definimos

$$a_s = \frac{a+1}{2},$$

conhecido na literatura [12] como *parâmetro de Jackiw-Rajaraman*.

A expressão (2.13) nos estimula, após uma comparação com (2.5), a interpretá-la como o jacobiano de uma transformação onde uma medida fermiônica não permaneceu invariante. Mais ainda, esta transformação levaria o operador de Dirac, associado a uma dada configuração de campo de *gauge*, num operador livre. Haveria o desacoplamento dos férmions. Isto pode ser facilmente verificado se lembrarmos que, em duas dimensões, qualquer vetor pode ser escrito em termos de suas componentes longitudinal e transversal, de uma maneira simples. Assim, o campo de *gauge* seria dado por

$$eA_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi,$$

onde  $\tilde{\partial}_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu} \partial_\nu$  e com  $\rho$  e  $\phi$  sendo campos escalares. A presença da constante de acoplamento nesta definição cumpre o papel de garantir a adimensionalidade de  $A_\mu$ . Com esta definição, uma transformação do tipo (2.2) com

$$\delta_\alpha = i\rho(x) + \phi(x) \gamma_5,$$

leva o operador  $D$  em  $i\gamma^\mu\partial_\mu$  e nos dá um jacobiano idêntico ao que acabamos de obter. Esta simples observação será de grande utilidade na interpretação do resultado que iremos obter na próxima seção.

## 2.3 O determinante fermiônico na presença de modos zero

Vamos considerar agora, operadores de Dirac que contenham, em seu espectro, um número  $N$ , diferente de zero, de autovalores nulos. Isto quer dizer que existem configurações do campo de *gauge* onde a equação

$$D\varphi_{0i}(x) = 0, i = 1 \dots N, \quad (2.14)$$

é satisfeita. Nesta equação, as funções  $\varphi_{0i}$  são as autofunções associadas aos modos zero do operador de Dirac. A existência destes autovalores nulos tem implicações muito importantes. De fato, a conseqüente anulação do determinante fermiônico para estes operadores impossibilitaria um cálculo análogo ao efetuado na seção anterior. O artifício utilizado na obtenção de  $\det D$ , o cálculo de  $\frac{d}{de} \ln \det D$  e uma posterior integração em  $e$ , introduziria novas singularidades no cálculo, uma vez que teríamos a interpolação entre determinantes nulos associados a números diferentes de modos zero [22]. Qual a solução para este problema? Por uma questão de continuidade, vamos fazer algumas considerações para que a conta introduzida na seção anterior esteja bem definida. Vamos considerar que, ao invés de flutuar em torno da sua configuração nula, o campo de *gauge* flutue em torno de configurações fixas  $A_\mu^{(N)}$  em função das quais o operador de Dirac com modos zero é escrito. Isto é, um  $A_\mu$  genérico deve ser escrito na forma

$$A_\mu = A_\mu^{(N)} + \alpha a_\mu,$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária. Fazendo uma analogia com o que foi feito anteriormente, vamos sugerir que o parâmetro  $\alpha$  desempenhe o mesmo papel (somente para fins de cálculo) que a carga elétrica. Agora, o determinante fermiônico do novo operador

$$D_\alpha \equiv \gamma^\mu \left( i\partial_\mu + e \left( A_\mu^{(N)} + \alpha a_\mu \right) \right),$$

será obtido a partir da derivação em relação a  $\alpha$  da relação formal (2.8), onde, no lugar de  $\det D$ , usaremos

$$\det' D_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det (D_\alpha + \varepsilon \mathbf{1})}{\varepsilon^{|N|}}.$$

É imediato ver que, para matrizes de dimensão finita, a definição acima coincide com o produto dos autovalores não nulos de  $D$ . Pode-se mostrar [23] que esta é uma boa definição para a quantidade correspondente em espaços de dimensão infinita. Deste modo,

$$\frac{d}{d\alpha} \det' D_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\det (D_\alpha + \varepsilon \mathbf{1})}{\varepsilon^{|N|}} \text{Tr} \left[ (D_\alpha + \varepsilon \mathbf{1})^{-1} \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \quad (2.15)$$

será o nosso principal objeto de estudo nesta seção.

O operador  $(D_\alpha + \varepsilon \mathbf{1})$  é não singular. Sua inversa existe e possui decomposição espectral em termos das autofunções e dos modos zero de  $D_\alpha$  :

$$\begin{aligned} (D_\alpha + \varepsilon \mathbf{1})^{-1} (x, y) &= \sum_{\lambda_n^\alpha \neq 0} \frac{\varphi_n^\alpha(x) \varphi_n^{\alpha\dagger}(y)}{\lambda_n^\alpha + \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0i}^\alpha(x) \varphi_{0i}^{\alpha\dagger}(y) \\ &= S_\varepsilon^\alpha(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}_0^\alpha(x, y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nesta expressão,  $P_0^\alpha(x, y)$  é o projetor dos modos zero de  $D^\alpha$ , definido como

$$\mathbf{P}_0^\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0i}^\alpha(x) \varphi_{0i}^{\alpha\dagger}(y). \quad (2.17)$$



No limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $S_\varepsilon^\alpha$  é regular e tende para a "quase inversa" de  $D_\alpha$ ,  $S^\alpha$ , dada por [24]

$$S^\alpha(x, y) = G^\alpha(x, y) - \int d^2z G^\alpha(x, z) \mathbf{P}_0^\alpha(z, y) - \int d^2z \mathbf{P}_0^\alpha(x, z) G^\alpha(z, y), \quad (2.18)$$

onde  $G^\alpha(x, y)$  é a função de Green fermiônica para o operador de Dirac  $D_\alpha$ . Além disso, é imediato ver que  $S^\alpha$  satisfaz a

$$D_\alpha S^\alpha(x, y) = \delta(x - y) - \mathbf{P}_0^\alpha(x, y) = S^\alpha(x, y) D_\alpha. \quad (2.19)$$

Deste modo,

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det' D_\alpha = \text{Tr} \left[ S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right].$$

Definindo  $D = D_{\alpha=1}$  e  $D^{(N)} = D_{\alpha=0}$ , podemos, enfim, efetuar a integração em  $\alpha$  para obter

$$\ln \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} = \int_0^1 d\alpha \text{Tr} \left[ S^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right]. \quad (2.20)$$

Reconhecemos aqui a constante de integração como sendo  $\det' D^{(N)}$ . O lado esquerdo da equação acima está definido para qualquer configuração de campo de *gauge* flutuando em torno da configuração fixa  $A_\mu^{(N)}$ . Fazendo, novamente, uma analogia entre a relação que acabamos de obter com a expressão (2.5) somos levados a interpretar o resultado acima como o jacobiano de uma transformação quiral nas coordenadas fermiônicas cujo efeito na dinâmica da teoria é levar o operador diferencial funcional das configurações flutuantes  $A_\mu$  no operador diferencial funcional das configurações fixas  $A_\mu^{(N)}$ . De fato, uma vez que, em geral, podemos escrever

$$\begin{aligned} eA_\mu^{(N)} &= -\tilde{\partial}_\mu f, \\ ea_\mu &= \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde  $\tilde{\partial}_\mu \equiv \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu$ , identificamos (2.20) como o jacobiano de uma transformação do tipo

(2.2) onde

$$\delta_\alpha = i\rho(x) + \phi(x) \gamma_5.$$

Passemos finalmente ao cálculo explícito de (2.20). A quantidade que se deseja calcular é

$$\frac{d}{d\alpha} \ln \det' D_\alpha = \text{Tr} \left[ G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] - \text{Tr} \left[ \mathbf{P}_0^\alpha G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] - \text{Tr} \left[ G^\alpha \mathbf{P}_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right]. \quad (2.22)$$

O primeiro termo do lado direito coincide algebricamente com o que seria obtido na ausência de modos zero. A única diferença é que, para a regularização de  $G^\alpha$ , usamos o método da separação de pontos envolvendo a configuração de campo de *gauge* completa, enquanto que dentro do traço aparece apenas a sua flutuação em torno da configuração fixa. Isto é proposital e é devido ao fato de estarmos tomando a derivada em relação à constante  $\alpha$ , em vez de em relação à carga elétrica  $e$ . Assim, a expressão regular encontrada no cálculo deste primeiro termo, análoga à que foi obtida para o cálculo do determinante fermiônico na ausência de modos zero (2.12), é dada por

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] &= -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x \left\{ \alpha a_\mu \left( a\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) a_\nu + a_\mu \left( a\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) A_\nu^{(N)} \right\} \\ &= -2\alpha \Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu], \end{aligned}$$

onde, para uma melhor visualização, definimos

$$\begin{aligned} \Gamma[a_\mu] &= \frac{e^2}{4\pi} \int d^2x a_\mu \left( a\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) a_\nu, \\ \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] &= \frac{e^2}{2\pi} \int d^2x a_\mu \left( a\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) A_\nu^{(N)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Deste modo, após a integração sobre  $\alpha$  chegamos a

$$\int_0^1 \text{Tr} \left[ G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] d\alpha = -\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu].$$

Vamos considerar agora os termos envolvendo  $P_0^\alpha$  em (2.22). Para isso, observaremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^\alpha(x, y) &= \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{0i}^\alpha(x) \varphi_{0i}^{\alpha\dagger}(y) \\ &= \mathbf{P}_\pm \sum_{i=1}^{|N|} \varphi_{\alpha i}^\pm(x) \varphi_{\alpha i}^{\pm*}(y), \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{P}_\pm \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2},$$

e com  $\varphi_{0i}^\alpha \equiv \varphi_{\alpha i}^+(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix})$ , para  $N > 0$ , e  $\varphi_{0i}^\alpha \equiv \varphi_{\alpha i}^-(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix})$ , para  $N < 0$ , sendo o conjunto ortonormal de modos zero de  $D_\alpha$ . Daí, obtemos

$$Tr \left[ G^\alpha \mathbf{P}_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = e \int d^2x d^2y \operatorname{tr} [G^\alpha(x, y) \mathbf{P}_\pm \gamma_\mu] a_\mu(x) \sum_i \varphi_{\alpha i}^\pm(x) \varphi_{\alpha i}^{\pm*}(y),$$

onde  $\operatorname{tr}$  é o traço tomado, apenas, sobre os índices de Lorentz. Usando as decomposições (2.21) podemos escrever, como sabemos, a função de Green interagente na forma

$$G^\alpha(x, y) = \{ \exp(h_+(x) - h_+(y)) \mathbf{P}_+ + \exp(-(h_-(x) - h_-(y))) \mathbf{P}_- \} G_F(x, y),$$

onde

$$h_\pm(x) = f(x) + \alpha(\phi(x) \pm i\rho(x))$$

também deve satisfazer a uma equação semelhante a (1.16) para que  $G^\alpha$  seja realmente uma função de Green. Assim, após uma integração por partes, obtemos [22]

$$Tr \left[ G^\alpha \mathbf{P}_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = \sum_i \langle \varphi_{0i}^{\alpha\dagger} (i\rho - \phi\gamma_5) \varphi_{0i}^\alpha \rangle.$$

Observando ainda a propriedade

$$Tr \left[ G^\alpha \mathbf{P}_0^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] = \left\{ Tr \left[ \mathbf{P}_0^\alpha G^\alpha \frac{dD_\alpha}{d\alpha} \right] \right\}^*,$$

podemos escrever

$$\ln \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} = \int_0^1 d(\ln \det' D_\alpha) = -\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + \sum_i \int_0^1 d\alpha \langle \varphi_{0i}^{\alpha\dagger} 2\phi\gamma_5 \varphi_{0i}^\alpha \rangle,$$

e, expressando os modos zero de  $D_\alpha$  em termos dos de  $D^{(N)}$

$$\varphi_{0i}^\alpha = \exp(\alpha(i\rho + \phi\gamma_5)) \sum_{j=1}^N D_{ij} \varphi_{0j}^{(N)},$$

onde os  $D_{ij}$  são introduzidos para garantir a ortogonalidade dos  $\varphi_{0i}^\alpha$  quando expressos em termos dos  $\varphi_{0i}^{(N)}$ , chegamos, finalmente, a

$$\ln \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}} = -\Gamma[a_\mu] - \bar{\Gamma}[A_\mu^{(N)}, a_\mu] + \ln \det \left| \left\langle \varphi_{0i}^{(N)\dagger} \exp(2\phi\gamma_5) \varphi_{0j}^{(N)} \right\rangle \right|. \quad (2.24)$$

Nas duas últimas seções, nós estivemos ocupados com a obtenção de uma maneira consistente de calcular determinantes funcionais para operadores diferenciais que contenham ou não autovalores nulos degenerados. Estivemos apresentando as ferramentas que serão necessárias para o trabalho que foi proposto na introdução desta tese. O que veremos nos próximos dois capítulos, é como somos naturalmente levados a considerar o problema do cálculo do determinante fermiônico no estudo das teorias de *gauge* em setores com topologia trivial e não trivial. Veremos como características topológicas podem estar relacionadas a propriedades analíticas e algébricas de uma teoria.

# Capítulo 3

## A $QED_2$ em Topologias não Triviais

Neste capítulo, daremos início ao estudo da ambigüidade de regularização introduzida pelo método de separação de pontos durante o cálculo dos determinantes funcionais. Isto será feito, primeiramente, na presença de configurações de campos de *gauge* topologicamente carregadas, isto é, classificadas segundo um invariante topológico, o índice de Pontryagin. Após definir estes conceitos, veremos como carga topológica e número de modos zero se relacionam. Esta relação nos permitirá fazer uso dos resultados obtidos no capítulo anterior durante o cálculo do funcional gerador.

### 3.1 Instantons

De acordo com o que estivemos estudando nos capítulos anteriores podemos lembrar que, para o cálculo de determinantes funcionais, exigimos que o operador diferencial estivesse definido sobre uma variedade compacta. Esta exigência impõe, por sua vez, uma condição necessária sobre as configurações de campos de *gauge*. Estes também devem estar definidos sobre a esfera estereográfica, por exemplo. Além disso, faz-se o requerimento de seu bom comportamento assintótico, tendendo a um *gauge* puro no infinito

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A_\mu(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} -\frac{i}{e} U^{-1} \partial_\mu U = \partial_\mu \Lambda. \quad (3.1)$$

Aqui,  $U = \exp(i e \Lambda(x))$  é um elemento do grupo de *gauge*  $U(1)$  parametrizado por  $\Lambda = \Lambda(\theta)$ , onde  $\theta$ , por sua vez, parametriza o círculo  $S^1$ , considerado como a fronteira do espaço-tempo euclidiano bidimensional. Esta condição, suficiente, nos fornece, naturalmente, uma ação euclidiana finita

$$S = \int d^2x \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} D \psi \right), \quad (3.2)$$

já que, neste caso,  $F_{\mu\nu}$  vai a zero no infinito, assim como os campos de matéria  $\bar{\psi}$  e  $\psi$ . No entanto, um campo  $A_\mu$  genérico pode possuir, em coordenadas polares, uma componente radial não nula, o que tornaria inviável a associação de um elemento do grupo a cada configuração de ação finita. Para resolver este problema devemos lembrar que a ação é invariante de *gauge*. Deste modo, através de uma transformação com o elemento do grupo [25]

$$U'(x) = \exp \left( -ie \int_0^r dr' A_r(r', \theta) \right),$$

chegamos à configuração de *gauge* puro desejada.

Podemos pensar este elemento  $U$  como um mapeamento contínuo entre duas circunferências:  $S^1$ , parametrizada por  $\theta$ , e  $S^1'$ , parametrizada por  $\Lambda$ . A classificação destes mapeamentos em termos das suas classes de equivalência é o que conhecemos como *grupos de homotopia* (ver apêndice B). Um tipo análogo de classificação pode ser feito para os mapeamentos entre duas variedades quaisquer  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ .

As classes de homotopia dos mapeamentos de  $S^1$  em  $S^1$  são caracterizadas por um número inteiro

$$Q \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\Lambda,$$

conhecido como *índice de Pontryagin*. Este número é, simplesmente, o número  $N$  de voltas que dá, sobre  $S^1$ , o mapeamento  $\Lambda$ , sendo, portanto, um inteiro. É fácil ver que  $Q$  é invariante por variações locais  $\Lambda(\theta) = \Lambda(\theta) + \delta\Lambda(\theta)$ , o que explicita seu caráter topológico. Tomando  $\Lambda$  como parâmetro angular característico de  $S^1$  e fazendo uso de

(3.1) podemos calcular  $Q$  explicitamente em termos de  $A_\mu$  :

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{i}{e} U^{-1} \frac{d}{d\theta} U \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} A_\mu dx^\mu \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d^2x \partial_\mu (\varepsilon_{\mu\nu} A_\nu) = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int d^2x {}^*F.
\end{aligned}$$

O resultado acima está escrito em termos de uma quantidade com a qual já nos deparamos. É exatamente a integral da anomalia de Adler-Bell-Jackiw (1.12). Estamos diante de uma situação onde uma propriedade física do modelo (a anomalia) está relacionada a propriedades topológicas dos campos.

A impossibilidade de deformar um elemento  $U$  pertencente a uma determinada classe de homotopia em outro elemento  $U'$  pertencente a uma outra classe, reflete o fato de não podermos deformar os campos de *gauge* associados a estes elementos sem passar por configurações que produzam uma ação euclideana infinita. Como a expressão para  $Q$  está inteiramente escrita em termos de  $A_\mu$ , diremos que este possui carga topológica  $N$ , se  $Q = N$ . As configurações específicas para setores topológicos de carga  $N$  [26], usualmente chamadas de *instantons*, podem ser dadas por

$$eA_\mu^{(N)} = -\tilde{\partial}_\mu f, \quad (3.3)$$

onde  $f$  é um campo escalar [27] com comportamento assintótico

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \sim -N \ln |x|. \quad (3.4)$$

É fácil ver que, neste caso, o *instanton*  $A_\mu^{(N)}$  é um *gauge* puro no contorno  $S^1$  do espaço euclideano e que  $\Lambda(\theta) = N\theta$ . Deste modo, o cálculo do índice de Pontryagin para esta configuração nos dá

$$Q = N,$$

o que nos leva a concluir que esta configuração é um representativo da classe de homotopia. De fato, isso está de acordo com o fato de  $\pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  sendo o conjunto dos inteiros, ser o grupo de homotopia que caracteriza os mapeamentos de  $S^1$  em  $S^1$  (ver apêndice B).

A partir desta verificação, diremos que configurações homotopicamente equivalentes pertencem a um mesmo setor topológico de carga  $N$ . Tomando os representativos de cada um destes setores como configurações fixas escreveremos todo e qualquer elemento pertencente à mesma classe de homotopia como flutuações em torno destas. Um  $A_\mu$  genérico será escrito como

$$A_\mu = A_\mu^{(N)} + a_\mu,$$

onde  $a_\mu$  tem carga topológica nula. Isto somente é possível em duas dimensões, onde temos

$$Q(A_\mu^{(N)} + A_\mu^{(M)}) = Q(A_\mu^{(N)}) + Q(A_\mu^{(M)}),$$

o que permitirá, como veremos posteriormente, escrever uma integração funcional sobre as configurações dos campos de *gauge* como uma soma de integrações funcionais apenas sobre flutuações de carga topológica nula.

Antes disso, porém, vamos investigar como um número  $N$ , que caracteriza estes setores topológicos, pode estar ligado ao número de modos zero de um operador de Dirac. Esta relação direta, a princípio não intuitiva, será fundamental nos cálculos que se seguem, uma vez que, como visto no capítulo 2, determinantes fermiônicos para operadores com modos zero só são obtidos a partir de uma transformação quiral que leva configurações flutuantes em configurações fixas. Este é exatamente o caso que acabamos de descrever.

### 3.2 Topologia e modos zero

Estamos interessados em obter as autofunções do operador de Dirac que contém  $N$  modos zero quando as configurações dos campos de *gauge* são dadas por (3.3). Queremos





encontrar as soluções da equação (2.14), que com o uso da representação das matrizes  $\gamma$ , onde

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pode ser escrita como

$$D\Phi_{0i}^{(N)} = 0, \quad (3.5)$$

ou em forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} 0 & -\partial_z - \partial_z f \\ \partial_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{0R}^{(N)} \\ \Phi_{0L}^{(N)} \end{pmatrix} = 0,$$

onde usamos  $\Phi_0^{(N)} = \begin{pmatrix} \Phi_{0R}^{(N)} \\ \Phi_{0L}^{(N)} \end{pmatrix}$  e as coordenadas holomórficas

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_0, \\ \bar{z} &= x_1 - ix_0. \end{aligned}$$

A solução é, então,

$$\begin{aligned} \Phi_{0R}^{(N)}(z, \bar{z}) &= C_R(z) \exp(f(z, \bar{z})), \\ \Phi_{0L}^{(N)}(z, \bar{z}) &= C_L(\bar{z}) \exp(-f(z, \bar{z})), \end{aligned}$$

sendo  $C_R(z)$  e  $C_L(\bar{z})$  funções arbitrárias de  $z$  e  $\bar{z}$ .

A condição de ação euclideana finita, no entanto, impõe, por sua vez, a estas soluções o seguinte comportamento

$$\int d^2z \left| \Phi_{0L}^{(N)} \right|^2 < \infty.$$

Considerando o comportamento assintótico de  $f$ , a imposição acima sobre as soluções

$\Phi_{0_R}^{(N)}$  para  $N > 0$ ,

$$\int dzd\bar{z} |C(z) \exp f(z, \bar{z})|^2 \simeq \int dzd\bar{z} |C(z) \exp(-N \ln |z|)|^2 = \int dzd\bar{z} \left| C(z) \frac{1}{|z|^N} \right|^2 < \infty,$$

nos diz que estas devem decrescer mais rápido que qualquer potência de  $1/z$ . Deste modo  $C(z)$  será um polinômio de grau máximo  $N - 1$ ! Pode-se ver por uma análise semelhante que, para  $N > 0$ , somente as soluções  $\Phi_{0_R}^{(N)}$  tem este comportamento, assim como, para  $N < 0$ , somente as soluções  $\Phi_{0_L}^{(N)}$  nos interessam. Portanto, as soluções de (3.5) linearmente independentes, são

$$\Phi_{0_i}^{(N)} = z^{i-1} \exp f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

para  $N > 0$ , e

$$\Phi_{0_i}^{(N)} = \bar{z}^{i-1} \exp(-f) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i = 1, \dots, -N, \quad (3.7)$$

para  $N < 0$ .

Mostramos a existência de  $|N|$  modos zero independentes não ortonormais, porém normalizáveis, para o operador de Dirac correspondente às configurações do campo  $A_\mu^{(N)}$  representativas dos setores topológicos com carga  $N$ . Este é o chamado *vanishing theorem* [24]. A escolha de outras configurações equivalentes como representativas dentro de um mesmo setor topológico não altera o resultado obtido. Isto pode ser facilmente verificado pela repetição dos cálculos anteriores no caso de uma configuração  $A_\mu + \delta a_\mu$ , em que  $\delta a_\mu$  possui carga topológica nula. Esta observação é, na verdade, uma conseqüência do *teorema do índice* de Atiyah-Singer [28], que relaciona o índice topológico (Pontryagin) ao chamado índice analítico. Vale a pena reafirmar que este teorema prevê uma conexão entre aspectos topológicos e analíticos da teoria. Ele garante que a um número fixo de modos zero está necessariamente associado um setor com carga topológica definida (quando a teoria permite esta classificação homotópica). Deste modo, ao abordar os setores com topologia não trivial (com carga topológica não nula) devemos levar em

consideração os modos zero do operador de Dirac correspondente.

### 3.3 O Funcional Gerador

O funcional gerador para o modelo de Schwinger é

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int dA_\mu d\bar{\psi} d\psi \exp\left(-S + (J^\mu A_\mu) + (\bar{\eta}\psi) + \langle \bar{\psi}\eta \rangle\right). \quad (3.8)$$

Nesta expressão,  $S$ , dada por (3.2), é definida em função do operador diferencial  $D$  que contém um número  $N$ , diferente de zero, de autovalores nulos. Uma vez que estamos considerando configurações  $A_\mu$  que flutuam em torno de  $A_\mu^{(N)}$ , podemos escrever a integração funcional sobre os campos de *gauge* como

$$\int dA_\mu = \sum_N \int da_\mu,$$

onde  $\sum_N$  leva em conta os diferentes setores topológicos. Devemos lembrar a necessidade de se considerar a presença das fontes dos campos fermiônicos antes de se iniciar qualquer cálculo. Sem estas, uma integração sobre os férmions não seria capaz de nos fornecer informações consistentes, já que o determinante a ser obtido se anularia [29]. A função dos termos de fonte é a de separar, no determinante do operador  $D$ , o produto dos seus autovalores não nulos. Esta sim, será uma quantidade passível de manipulações funcionais.

Uma vez introduzidas as fontes externas, somos naturalmente levados a considerar uma translação nos campos  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  a fim de que o cálculo de  $Z$  seja simplesmente uma integral gaussiana. A mudança

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) - \int d^2y \mathbf{S}(x, y) \eta(y), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) - \int d^2y \bar{\eta}(y) \mathbf{S}(y, x), \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{S}(x, y)$  é a inversa do operador  $D$ , já definida em (2.18) e satisfazendo à (2.19), nos leva a

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \exp \langle \bar{\eta} \mathbf{S} \eta \rangle \int dA_\mu d\bar{\psi} d\psi \exp \left( -S + (J^\mu A_\mu) + \langle \bar{\eta} P_0 \psi \rangle + \langle \bar{\psi} P_0 \eta \rangle \right).$$

Apesar desta expressão não estar na sua forma diagonal, o aparecimento dos projetores dos modos zero do operador de Dirac,  $P_0$ , não introduz quaisquer dificuldades adicionais.

É conveniente escrever  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  como combinação linear de autofunções ortonormais e linearmente independentes do operador  $D$ . Portanto, vamos considerar as expansões

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_n a_n \varphi_n + \sum_i a_{0i} \varphi_{0i}, \\ \bar{\psi} &= \sum_n \bar{a}_n \varphi_n^\dagger + \sum_i \bar{a}_{0i} \varphi_{0i}^\dagger, \end{aligned}$$

com

$$D\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad (3.9)$$

$$D\varphi_{0i} = 0.$$

Agora, a medida funcional fermiônica fica

$$d\bar{\psi} d\psi = \prod_n d\bar{a}_n da_n \prod_i d\bar{a}_{0i} da_{0i},$$

Deste modo, a expressão da parte fermiônica  $Z_F$  do funcional gerador  $Z$  passa a ser escrita em termos do determinante funcional de  $D$ . Com o auxílio das equações (3.9) escrevemos

$$\begin{aligned} Z_F[\bar{\eta}, \eta] &= \exp \langle \bar{\eta} \mathbf{S} \eta \rangle \int \prod_n d\bar{a}_n da_n \prod_i d\bar{a}_{0i} da_{0i} \exp \left( - \sum_{n,m} \langle \varphi_n^\dagger D \varphi_n \rangle \bar{a}_n a_m \right) \times \\ &\exp \left\{ \sum_{i,j} \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle \langle \varphi_{0i}^\dagger \varphi_{0j} \rangle a_{0j} + \sum_{i,j} \langle \varphi_{0j}^\dagger \varphi_{0i} \rangle \bar{a}_{0j} \langle \varphi_{0i}^\dagger \eta \rangle \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \int \prod_n d\bar{a}_n da_n \exp \left( - \sum_n \lambda_n \bar{a}_n a_n \right) \times \\
&\quad \int \prod_i d\bar{a}_{0i} da_{0i} \exp \left( \sum_i \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle a_{0i} + \sum_i \bar{a}_{0i} \langle \varphi_{0i}^\dagger \eta \rangle \right) \\
&= \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \prod_n \int d\bar{a}_n da_n (1 + \lambda_n a_n \bar{a}_n) \times \\
&\quad \prod_i \int d\bar{a}_{0i} (1 + \bar{a}_{0i} \langle \varphi_{0i}^\dagger \eta \rangle) \prod_i \int da_{0i} (1 - a_{0i} \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle) \\
&= \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \prod_n \lambda_n \prod_i \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle \langle \varphi_{0i}^\dagger \eta \rangle \\
&= \exp \langle \bar{\eta} S \eta \rangle \det' D \prod_i \langle \bar{\eta} \varphi_{0i} \rangle \langle \varphi_{0i}^\dagger \eta \rangle,
\end{aligned}$$

onde  $\det' D$  é o produto dos autovalores não nulos de  $D$ .

O estudo de determinantes funcionais na presença de modos zero nos fornece uma maneira prática de calcular a razão entre dois determinantes de operadores diferenciais, definidos a partir de duas configurações de campos de *gauge* distintas. A única condição imposta sobre estas configurações é a de que possam ser escritas como flutuações de configurações fixas. Sabendo que a razão entre estes dois determinantes associa-se o jacobiano de uma transformação quirial, percebemos a importância do estudo desenvolvido no capítulo 2 sobre determinantes funcionais. De fato, vimos nas duas primeiras seções do capítulo atual que as configurações de campos de *gauge* homotopicamente equivalentes ao representativo de uma determinada classe de homotopia, poderiam ser escritas como flutuações deste. Vimos, ainda, que a um setor topológico com carga  $N$  está *associado* um operador de Dirac com  $N$  modos zero. Portanto, uma escolha conveniente para o representativo deste setor nos permite fazer uma transformação quirial

$$\begin{aligned}
\psi &\rightarrow \exp(-i\rho(x) + \phi(x) \gamma_5) \psi, \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp(i\rho(x) + \phi(x) \gamma_5),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

que leve as configurações flutuantes  $A_\mu$  nas fixas  $A_\mu^{(N)}$ , e conseqüentemente  $D \rightarrow D^{(N)}$ . Este procedimento é bastante conveniente para o cálculo do funcional gerador e, feito

antes da integração sobre os férmions, nos dá

$$Z[J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \sum_N \int da_\mu \mathfrak{S}(a_\mu, A_\mu^{(N)}) \exp \left( \left\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle + \langle J^\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle \right) \det' D^{(N)} \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \varphi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle,$$

onde

$$\mathfrak{S}(a_\mu, A_\mu^{(N)}) \equiv \frac{\det' D}{\det' D^{(N)}}$$

é o jacobiano desta transformação. Agora  $\det' D^{(N)}$  é o produtório de autovalores não nulos do operador  $D^{(N)}$ ,  $S^{(N)}$  sua inversa e  $\varphi_{0i}^{(N)}$  suas autofunções ortonormalizadas. O adorno ' que aparece nas fontes  $\bar{\eta}, \eta$  serve para indicar que uma transformação lhes foi induzida por (3.10).

É conveniente expressar o funcional gerador diretamente em termos do conjunto original (não-ortonormal) de autofunções do operador  $D^{(N)}$ , obtido em (3.6) e (3.7). Para isto, introduzimos uma matriz de rotação entre os dois conjuntos de autofunções

$$\varphi_{0i}^{(N)} = \sum_j b_{ij} \Phi_{0j}^{(N)},$$

que nos dá

$$\prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \varphi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \varphi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle = |\det b|^2 \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle.$$

A condição de ortonormalidade para as autofunções  $\varphi_{0i}^{(N)}$ ,  $\langle \varphi_{0i}^{(N)\dagger} \varphi_{0j}^{(N)} \rangle = \delta_{ij}$ , implica

$$|\det b|^2 = \left[ \det \left( \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \Phi_{0j}^{(N)} \rangle \right) \right]^{-1}.$$

Para chegarmos à forma final do funcional gerador, a partir da qual as funções de correlação poderão ser obtidas, devemos, ainda, dar uma prescrição para calcular  $\det' D^{(N)}$ . Usando o método apresentado em [22], podemos encontrar uma expressão para a derivada

funcional de  $\det' D^{(N)}$

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det' D^{(N)} = \det' D^{(N)} \left[ \frac{a_s}{2\pi} \square f(x) + 2tr \left( \mathbf{P}_0^{(N)}(x, x) \gamma_5 \right) \right].$$

Sabendo ainda que

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \det \mathbf{A} = 2 \det \mathbf{A} \times tr \left( \mathbf{P}_0^{(N)}(x, x) \gamma_5 \right),$$

com  $\mathbf{A} = \left\langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \Phi_{0j}^{(N)} \right\rangle$  obtemos, após a integração funcional em  $f(x)$ , que

$$\det' D^{(N)} = \exp(-\Gamma') \times \det \left( \left\langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \Phi_{0j}^{(N)} \right\rangle \right), \quad (3.11)$$

onde, por uma questão de praticidade, definimos

$$\Gamma' [A_\mu^{(N)}] = \frac{e^2 a_s}{4\pi} \int d^2x f(x) \square f(x).$$

O jacobiano da transformação quiral nos fornece um termo efetivo que pode ser somado à ação  $S$  pela exponenciação da expressão (2.24). O mesmo acontece para o termo exponencial em (3.11). Portanto, a forma final do funcional gerador para o modelo de Schwinger é

$$Z [J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \sum_N \int da_\mu \exp \left( -\bar{S} + \langle J^\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle \right) \times \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle, \quad (3.12)$$

onde

$$\bar{S} = \left\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle + \Gamma [a_\mu] + \bar{\Gamma} [a_\mu, A_\mu^{(N)}] + \Gamma' [A_\mu^{(N)}],$$

com  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  dados por (2.23).

### 3.4 Contribuições não triviais às funções de correlação

Dando seqüência ao que foi proposto no início do capítulo vamos considerar as contribuições dos setores topológicos não triviais no cálculo das funções de correlação em processos envolvendo os férmions. Estas serão importantes na medida em que através de considerações acerca de seu comportamento assintótico poderemos obter uma prescrição que nos permitirá estudar a ambigüidade  $a_s$ .

Como o funcional gerador é diretamente proporcional às fontes fermiônicas, é imediato ver que não haverá contribuição às funções de correlação puramente bosônicas. As funções de correlação puramente fermiônicas serão obtidas, como dissemos no capítulo 1, por intermédio de derivações funcionais em relação às fontes  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  do funcional gerador. Considerando  $J^\mu = 0$ , teremos

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_m \beta_1 \dots \beta_n}(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_m}(x_m)} \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_n}(y_n)} Z[0, \bar{\eta}, \eta]_{\bar{\eta}=\eta=0}, \quad (3.13)$$

com  $m$  e  $n$  inteiros positivos e podendo assumir valores arbitrários iguais ou diferentes.

O que parece ser um cálculo longo e cansativo pode ser substancialmente reduzido através de considerações e observações a respeito da sua dependência funcional nas fontes fermiônicas externas. De fato, não é difícil notar que todas as funções de correlação do tipo  $m \neq 0, n = 0$  ou  $n \neq 0, m = 0$  se anulam ao tomarmos o limite de fontes nulas. Por outro lado, se  $m \neq 0$  e  $n \neq 0$ , simultaneamente, devemos analisar duas situações diferentes:  $m \neq n$  e  $m = n = k$ . Analisemos estes casos separadamente.

- No caso  $m \neq n$ ,

os únicos setores que poderiam ser considerados no cálculo de (3.13) seriam os setores com carga topológica  $N$  tais que

$$N \leq \min \{m, n\}. \quad (3.14)$$



Esta imposição se faz necessária pois, caso contrário, as amplitudes se anulariam devido à presença de fontes fermiônicas remanescentes no produtório com as autofunções  $\Phi_{0i}^{(N)}$ . No entantanto, o não pareamento das derivadas em  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  faz com que, mesmo tendo (3.14) satisfeita, outras fontes, oriundas da derivação da exponencial quadrática em (3.12), provoquem seu anulamento.

- No caso  $m = n = k$ ,

temos, finalmente, que a função de correlação

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_k}(x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_k) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_k}(x_k)} \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_1}(y_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_k}(y_k)} Z[0, \bar{\eta}, \eta]_{\bar{\eta}=\eta=0} \quad (3.15)$$

é não nula para quaisquer valores de  $N \leq k$ .

Podemos observar que, analogamente a (2.18), pode-se escrever

$$S^{(N)}(x, y) = G^{(N)}(x, y) - \int d^2 z G^{(N)}(x, z) \mathbf{P}_0^{(N)}(z, y) - \int d^2 z \mathbf{P}_0^{(N)}(x, z) G^{(N)}(z, y),$$

onde

$$G^{(N)}(x, y) = \{ \exp(f(x) - f(y)) \mathbf{P}_+ + \exp(-f(x) - f(y)) \mathbf{P}_- \} G_F(x, y),$$

e, devido à natureza anticomutante das variáveis  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  temos como resultado a simplificação

$$\begin{aligned} \exp \langle \bar{\eta}' S^{(N)} \eta' \rangle \times \mathbf{A}_i &= \exp \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \eta' \rangle \exp \left( - \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \mathbf{P}_0^{(N)} \eta' \rangle \right) \exp \left( - \langle \bar{\eta}' \mathbf{P}_0^{(N)} G^{(N)} \eta' \rangle \right) \mathbf{A}_i \\ &= \exp \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \eta' \rangle \prod_{i=1}^N \left( 1 - \langle \bar{\eta}' \varphi_0 \rangle \langle \varphi_0 G^{(N)} \eta' \rangle \right) \times \\ &\quad \prod_{i=1}^N \left( 1 - \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \varphi_0 \rangle \langle \varphi_0 \eta \rangle \right) \mathbf{A}_i \\ &= \exp \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \eta' \rangle \mathbf{A}_i, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{A}_i \equiv \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle$  e

$$\bar{\eta}' \equiv \bar{\eta} \exp(i\rho + \phi\gamma_5),$$

$$\eta \equiv \exp(i\rho + \phi\gamma_5)\eta.$$

Deste modo, o cálculo de (3.15) se resume a uma seqüência de derivações funcionais grassmanianas da expressão acima.

Pode-se facilmente mostrar, por indução, que

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{\alpha_1}(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta \eta_{\beta_k}(y_k)} \left( \exp \langle \bar{\eta}' G^{(N)} \eta' \rangle \prod_{i=1}^{|N|} \langle \bar{\eta}' \Phi_{0i}^{(N)} \rangle \langle \Phi_{0i}^{(N)\dagger} \eta' \rangle \right)_{\bar{\eta}=\eta=0} = \det \begin{vmatrix} \Phi'^{(N)\dagger} & \emptyset \\ \mathbf{G}'^{(N)} & \Phi'^{(N)} \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

onde  $\Phi'^{(N)\dagger}$  é uma matriz  $N \times k$  dada por

$$\Phi'^{(N)\dagger} = \begin{pmatrix} \Phi'_{01}{}^{(N)\dagger}(y_1) \cdots \Phi'_{01}{}^{(N)\dagger}(y_k) \\ \vdots \\ \Phi'_{0N}{}^{(N)\dagger}(y_1) \cdots \Phi'_{0N}{}^{(N)\dagger}(y_k) \end{pmatrix},$$

$\Phi'^{(N)}$  é uma matriz  $k \times N$  dada por

$$\Phi'^{(N)} = \begin{pmatrix} \Phi'_{01}{}^{(N)}(x_1) \cdots \Phi'_{0N}{}^{(N)}(x_1) \\ \vdots \\ \Phi'_{01}{}^{(N)}(x_k) \cdots \Phi'_{0N}{}^{(N)}(x_k) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{G}'^{(N)}$  é uma matriz  $k \times k$  dada por

$$\mathbf{G}'^{(N)} = \begin{pmatrix} G'^{(N)}(x_1, y_1) \cdots G'^{(N)}(x_1, y_k) \\ \vdots \\ G'^{(N)}(x_k, y_1) \cdots G'^{(N)}(x_k, y_k) \end{pmatrix}$$

é  $\emptyset$  é uma matriz  $N \times N$  identicamente nula. Temos ainda, para as entradas destas

matrizes, as redefinições

$$\begin{aligned} G'^{(N)}(x_i, y_j) &= \exp(-i\rho + \phi\gamma_5) G^{(N)}(x_i, y_j) (i\rho + \phi\gamma_5), \\ \Phi'_{0i}{}^{(N)}(x_j) &= \exp(-i\rho + \phi\gamma_5) \Phi_{0i}^{(N)}(x_j), \\ \Phi'_{0i}{}^{(N)\dagger}(y_j) &= \Phi_{0i}^{(N)\dagger}(y_j) \exp(i\rho + \phi\gamma_5). \end{aligned}$$

Usando, a partir de (3.6) e (3.7), a notação simbólica

$$\chi_{ij} \equiv \begin{cases} (z_j)^{i-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & N > 0 \\ (\bar{z}_j)^{i-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & N < 0 \end{cases},$$

não é difícil ver que

$$\begin{aligned} \det(\Phi'^{(N)}) &= \exp\left(\sum_{i=1}^{|N|} i\rho(y_i)\right) \exp\left(\pm \sum_{i=1}^{|N|} f(y_i) + \phi(y_i)\right) \det(\chi), \\ \det(\Phi'^{(N)\dagger}) &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{|N|} i\rho(x_i)\right) \exp\left(\pm \sum_{i=1}^{|N|} f(x_i) + \phi(x_i)\right) \det(\chi^\dagger) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}'^{(N)}) &= \exp\left(\sum_{i=|N|+1}^k i(\rho(y_i) - \rho(x_i))\right) \times \\ &\quad \exp\left(\pm \sum_{i=|N|+1}^k f(y_i) - f(x_i) + \phi(y_i) - \phi(x_i)\right) \det(\mathbf{G}_F), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \det(\chi) &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} |z_i - z_j| \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N > 0 \\ \det(\chi^\dagger) &= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} |\bar{z}_i - \bar{z}_j| \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, N > 0 \end{aligned}$$

$$\det(\chi) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} |z_i - z_j| \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, N < 0$$

$$\det(\chi^\dagger) = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{|N|} |\bar{z}_i - \bar{z}_j| \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, N < 0.$$

Reunindo estes resultados, chegamos a uma forma fechada para (3.15) dada por

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_k}(x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_k) = \sum_{k=-N}^N \int da_\mu \exp(-\bar{S}_{fontes}) \det \begin{vmatrix} \chi^\dagger & \emptyset \\ \mathbf{G}_F & \chi \end{vmatrix} \quad (3.17)$$

onde

$$\bar{S}_{fontes} = \bar{S} - \langle i(j_\rho + j'_\rho) \rho \rangle \mp \langle (j_\phi + j'_\phi)(f + \phi) \rangle$$

e definimos

$$j_\rho = \sum_{i=1}^{|N|} \delta(y_i - z) - \delta(x_i - z),$$

$$j'_\rho = \sum_{i=|N|+1}^k \delta(y_i - z) - \delta(x_i - z),$$

$$j_\phi = \sum_{i=1}^{|N|} \delta(y_i - z) + \delta(x_i - z),$$

$$j'_\phi = \sum_{i=|N|+1}^k \delta(y_i - z) - \delta(x_i - z),$$

com  $\langle \rangle$  representando uma integração sobre a variável  $z$ .

Há, ainda, uma última integração a ser feita, mais especificamente, uma integração sobre as configurações com carga topológica nula  $a_\mu$  do campo de *gauge*. Isto significa fazer uma integração funcional sobre os campos escalares  $\rho$  e  $\phi$ . Deste modo, vamos escrever a ação efetiva  $\bar{S}$  também em termos destes e completar os quadrados com os termos de fonte envolvendo  $j_\rho, j'_\rho, j_\phi, j'_\phi$  para que, ao final, tenhamos uma integral gaussiana.

O primeiro termo que aparece em  $\bar{S}$  é  $\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle$ . Em termos dos campos  $\rho$  e  $\phi$ ,  $F_{\mu\nu}$

é escrito como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu (A_\nu^{(N)} + a_\nu) - \partial_\nu (A_\mu^{(N)} + a_\mu) = F_{\mu\nu}^{(N)} + f_{\mu\nu},$$

onde definimos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(N)} &\equiv \partial_\mu A_\nu^{(N)} - \partial_\nu A_\mu^{(N)}, \\ f_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu. \end{aligned}$$

Usando as definições (2.21) chegamos a

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{(N)} &= \frac{1}{e} (\square f) \varepsilon_{\mu\nu}, \\ f_{\mu\nu} &= \frac{1}{e} (\square \phi) \varepsilon_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde concluimos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{4} \left\{ (F_{\mu\nu}^{(N)} + f_{\mu\nu}) (F^{\mu\nu(N)} + f^{\mu\nu}) \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4e^2} \left\{ ((\square f) \varepsilon_{\mu\nu} + (\square \phi) \varepsilon_{\mu\nu}) ((\square f) \varepsilon^{\mu\nu} + (\square \phi) \varepsilon^{\mu\nu}) \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4e^2} \left\{ (\square f) (\square f) \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu} + 2 (\square f) (\square \phi) \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu} + (\square \phi) (\square \phi) \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu} \right\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2e^2} \langle (f + \phi) \square \square (f + \phi) \rangle. \end{aligned}$$

O segundo e terceiro termos de  $\bar{S}$ ,  $\Gamma[a_\mu]$  e  $\Gamma[a_\mu, A_\mu^{(N)}]$ , podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \Gamma[a_\mu] + \Gamma[a_\mu, A_\mu^{(N)}] &= \frac{e^2}{4\pi} \int d^2x \left\{ a_\mu \left( a(N) \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) (2A_\nu^{(N)} + a_\nu) \right\} \\ &= \frac{e^2}{4\pi} \int d^2x \left\{ \frac{1}{e} (\partial_{\mu\rho} - \tilde{\partial}_\mu \phi) \left( a(N) \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) \frac{1}{e} (-2\tilde{\partial}_\nu f + \partial_\nu \rho - \tilde{\partial}_\nu \phi) \right\} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left\{ (1 + a(N)) (f + \phi) \square (f + \phi) - \frac{(a(N) - 1)}{2} \rho \square \rho \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left\langle a_s(N) (f + \phi) \square (f + \phi) + \frac{(1 - a_s(N))}{2} \rho \square \rho \right\rangle,$$

enquanto que o quarto e último termo,  $\Gamma [A_\mu^{(N)}]$ , já está escrito em termos de  $f(x)$ . Desta forma, a ação efetiva  $\bar{S}$ , composta pela soma dos resultados acima, pode finalmente ser escrita como

$$\bar{S} = \frac{1}{2e^2} \left\langle (f + \phi) \square \left( \square - \frac{e^2 a_s(N)}{\pi} \right) (f + \phi) \right\rangle + \frac{(1 - a_s(N))}{2\pi} \langle \rho \square \rho \rangle.$$

Queremos obter uma expressão quadrática nos campos  $\rho$  e  $(f + \phi)$  para a integração. Isto é feito através das mudanças de variáveis em  $\rho$

$$\sigma = \rho - \frac{1}{\lambda} \left\langle \Delta_F (j_\rho + j'_\rho) \right\rangle, \quad (3.18)$$

onde  $\lambda \equiv (1 - a_s(N)) / 2\pi$  e

$$\Delta_F(x - y) \equiv \square^{-1}(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x - y|,$$

e em  $(f + \phi)$

$$\varphi = f + \phi \mp e^2 \left\langle \Delta(\mu; x - y) (j_\phi + j'_\phi) \right\rangle, \quad (3.19)$$

com  $\mu^2 = e^2 a_s(N) / \pi$  e

$$\Delta(\mu; x - y) \equiv \left[ \square (\square - \mu^2) \right]^{-1} (x - y) = -\frac{1}{2\pi\mu^2} \{ K_0[\mu|x - y|] + \ln|x - y| \}.$$

Aqui,  $K_0$  é a função de Bessel modificada de ordem zero. Com estas mudanças teremos as diagonalizações

$$-\frac{(1 - a_s)}{2\pi} \langle \rho \square \rho \rangle + \left\langle i (j_\rho + j'_\rho) \rho \right\rangle \rightarrow -\frac{(1 - a_s)}{2\pi} \langle \sigma \square \sigma \rangle + \frac{1}{2\lambda} \left\langle (j_\rho + j'_\rho) \Delta_F (j_\rho + j'_\rho) \right\rangle,$$

e

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2e^2} \left\langle (f + \phi) \square \left( \square - \frac{e^2 a_s}{\pi} \right) (f + \phi) \right\rangle \pm \left\langle (j_\phi + j'_\phi) (f + \phi) \right\rangle \\
\rightarrow & -\frac{1}{2e^2} \left\langle \varphi \square \left( \square - \frac{e^2 a_s}{\pi} \right) \varphi \right\rangle - \frac{e^2}{2} \left\langle (j_\phi + j'_\phi) \Delta(\mu) (j_\phi + j'_\phi) \right\rangle,
\end{aligned}$$

nos dando, para o integrando (3.17), uma expressão quadrática que está pronta para ser integrada.

A prescrição para a fixação do valor da ambigüidade  $a_s$  pode ser, finalmente, introduzida pela seguinte consideração. Como o campo de *gauge*  $a_\mu$  tem carga nula, os campos escalares, em função dos quais é escrito, devem cair a zero no limite  $x \rightarrow \infty$ , condição necessária para que não carreguem carga topológica. Deste modo, os novos campos introduzidos pelas mudanças (3.18) e (3.19) devem ter o mesmo comportamento assintótico que os anteriores. De outra forma, estaríamos mudando de setor topológico. Assim, para o campo  $\sigma$  temos

$$\begin{aligned}
\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sigma(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) - \frac{1}{\lambda} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle \Delta_F(x-z) (j_\rho + j'_\rho) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\lambda} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int dz \ln|x-z| \left\{ \left( \sum_{i=1}^{|N|} \delta(z-x_i) - \delta(z-y_i) \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( \sum_{i=|N|+1}^k \delta(z-x_i) - \delta(z-y_i) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi\lambda} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\ln|x-x_i| - \ln|x-y_i|),
\end{aligned}$$

uma vez que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = 0$ . Portanto,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\ln|x-x_i| - \ln|x-y_i|) = 0,$$

o que nos dá o resultado

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sigma(x) = 0,$$

de acordo com a condição que impusemos.

Para o campo  $\varphi$ , temos

$$\begin{aligned}
\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) \mp \lim_{|x| \rightarrow \infty} e^2 \langle \Delta(\mu; x-z) (j_\phi + j'_\phi) \rangle \\
&= -N \ln|x| \mp e^2 \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\langle -\frac{1}{2\pi\mu^2} (\mathbf{K}_0[\mu|x-z|] + \ln|x-z|) (j_\phi + j'_\phi) \right\rangle \\
&= -N \ln|x| \pm \frac{1}{2a_s(N)} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int dz \ln|x-z| \left\{ \left( \sum_{i=1}^{|N|} \delta(z-x_i) + \delta(z-y_i) \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( \sum_{i=|N|+1}^k \delta(z-x_i) - \delta(z-y_i) \right) \right\} \\
&= -N \ln|x| \pm \frac{1}{2a_s(N)} \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^{|N|} (\ln|x-x_i| + \ln|x-y_i|) + \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=|N|+1}^k (\ln|x-x_i| - \ln|x-y_i|) \right\} \\
&= -N \ln|x| \pm \frac{1}{2a_s(N)} 2|N| \ln|x| \\
&= - \left( N \mp \frac{|N|}{a_s(N)} \right) \ln|x|,
\end{aligned}$$

uma vez que  $K_0$  tem comportamento regular no limite considerado e  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$ . Aqui, o sinal  $\mp$  corresponde aos setores com carga topológica  $N$  e  $-N$ , respectivamente, fazendo com que a expressão acima se divida em duas outras compondo o sistema

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \begin{cases} - \left( N - \frac{N}{a_s(N)} \right) \ln|x|, & N > 0, \\ - \left( N - \frac{N}{a_s(N)} \right) \ln|x|, & N < 0. \end{cases}$$

Em ambos os casos pode-se notar que o comportamento assintótico de  $\varphi$  seria singular a menos que

$$a_s(N) = 1, \forall N \neq 0.$$

Como o campo  $\varphi$  deve ter o mesmo comportamento assintótico que  $\phi$ , precisamos, nec-



essariamente, impor a condição acima, que implica

$$a(N) = 2a_s(N) - 1 = 1,$$

fixando, de uma vez por todas, o valor da ambigüidade em setores com carga topológica diferente de zero.

Para o setor de carga nula, a análise deste capítulo não nos permite tirar quaisquer conclusões. Isto será feito no próximo capítulo onde teremos que computar novamente essas funções de correlação, bem como outras que forem necessárias, e observar o seu comportamento objetivando a obtenção de dados adicionais que nos permitam estudar a ambigüidade neste setor.

# Capítulo 4

## A $QED_2$ em Topologias Triviais

As funções de correlação são os objetos em função dos quais podemos exprimir grandezas fisicamente mensuráveis. É perfeitamente razoável supor que as expressões finais destas grandezas não tenham dependência explícita de quantidades artificialmente introduzidas na teoria para quaisquer fins. Este é o caso, por exemplo, do termo de fixação de *gauge* que, introduzido na expressão do propagador do fóton a fim de garantir-lhe um grau de liberdade longitudinal, não aparece nos elementos da matriz  $S$  ou pólos dos propagadores.

A utilização de uma regularização não invariante de *gauge*, no entanto, causa, como veremos, o aparecimento de uma ambigüidade exatamente no pólo do propagador do fóton. Este é, do nosso ponto de vista, um problema adicional que, na tentativa de resolvê-lo, pode nos indicar uma maneira de como fixar um valor para a ambigüidade.

Do mesmo modo que no caso das topologias não triviais, estaremos, portanto, interessados no cálculo do funcional gerador e funções de correlação do modelo de Schwinger quando as configurações de *gauge* possuírem carga topológica nula. Calcularemos não somente as funções puramente fermiônicas mas também as puramente bosônicas e mistas, esperando obter informações sobre a ambigüidade a partir da análise do comportamento das mesmas.

## 4.1 O funcional gerador

Voltemos ao ponto onde o funcional gerador do modelo de Schwinger era simplesmente escrito como

$$Z [J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int dA_\mu d\bar{\psi} d\psi \exp \left( -S + \langle J^\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta} \psi \rangle + \langle \bar{\psi} \eta \rangle \right).$$

Como agora o campo de *gauge* tem carga topológica nula, isto é, pode ser escrito simplesmente como

$$eA_\mu = \partial_\mu \rho - \tilde{\partial}_\mu \phi,$$

um procedimento análogo ao utilizado no início do capítulo anterior, rotação quirial

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \bar{\psi}' \exp(i\rho + \gamma_5 \phi), \\ \psi &= \exp(-i\rho + \gamma_5 \phi) \psi', \end{aligned}$$

seguido de translação nos férmions

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(x) - \int d^2 y \mathbf{S}(x, y) \eta(y), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x) - \int d^2 y \bar{\eta}(y) \mathbf{S}(y, x), \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{S}$  é a inversa do operador  $D$ , nos dá, após uma integração destes, a expressão

$$Z [J^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int dA_\mu \mathfrak{S}(A_\mu) \exp \left( - \left\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle + \langle J^\mu A_\mu \rangle + \langle \bar{\eta}' (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \eta' \rangle \right), \quad (4.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\eta}' &= \bar{\eta} \exp(i\rho + \gamma_5 \phi), \\ \eta' &= \exp(-i\rho + \gamma_5 \phi) \eta. \end{aligned}$$

O jacobiano não trivial de Fujikawa que surge em (4.1) é, novamente, a razão de dois determinantes funcionais relacionados a operadores diferenciais

$$\mathfrak{S}(A_\mu) = \frac{\det D}{\det i\gamma^\mu \partial_\mu}$$

que, de acordo com o que fizemos no capítulo 2, pode ser escrito como um termo exponencial efetivo no funcional gerador. Neste sentido, a ação euclideana pode ser escrita como

$$\bar{S} = \left\langle \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\rangle + \Gamma[A_\mu],$$

onde  $\Gamma$  é dado por

$$\Gamma[A_\mu] = -\frac{e^2}{2\pi} \int d^2x A_\mu \left\{ a_s \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right\} A_\nu.$$

A expressão (4.1), apesar de não ser exatamente calculável, está pronta para sofrer derivações funcionais e nos dar todas as funções de correlação, estas sim exatamente calculáveis, de que precisaremos durante os cálculos subseqüentes.

## 4.2 A auto-energia do fóton

Perturbativamente, o cálculo da auto-energia do fóton [30] se resume à soma explícita da série perturbativa completa de gráficos de Feynman vista como uma progressão geométrica cuja razão é a função de dois pontos bosônica a 1 *loop*. Este cálculo pode, no entanto, ser feito diretamente a partir de derivações funcionais atuantes no funcional gerador, já devidamente calculado. Assim, considerando ausentes as fontes fermiônicas  $\bar{\eta} = \eta = 0$ , podemos escrever o termo de fonte bosônico como

$$\begin{aligned} \langle J_\mu A^\mu \rangle &= \langle J_\mu (\partial^\mu \rho + \tilde{\partial}^\mu \phi) \rangle \\ &= -\langle (\partial_\mu J^\mu) \rho + (\tilde{\partial}_\mu J^\mu) \phi \rangle \end{aligned}$$

$$= -\langle J_L \rho + J_T \phi \rangle,$$

onde  $J_L$  e  $J_T$  representam as fontes para os termos longitudinal e transversal, respectivamente. Agora, o termo a ser integrado em (4.1) é composto da exponencial de

$$\bar{S} - \langle J_\mu A^\mu \rangle = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2\epsilon^2} \phi \square (\square - m^2) \phi - \frac{\lambda}{2} \rho \square \rho + J_L \rho + J_T \phi \right\}, \quad (4.2)$$

onde  $m^2 = e^2 a_s / \pi$  e  $\lambda = (a_s - 1) / \pi$ . Esta expressão precisa ser diagonalizada para que a integral resultante seja uma gaussiana. Isto pode ser feito através da mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + e^2 \int d^2z \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T, \\ \rho' &= \rho - \frac{1}{\lambda} \int d^2z \square^{-1} J_L. \end{aligned}$$

Neste caso, (4.2) é levada em

$$\begin{aligned} \bar{S} - \langle J_\mu A^\mu \rangle &= \int d^2x \left\{ \frac{1}{2\epsilon^2} \phi' \square (\square - m^2) \phi' - \frac{\lambda}{2} \rho' \square \rho' - \right. \\ &\quad \left. \frac{e^2}{2} J_T \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T + \frac{1}{2\lambda} J_L \square^{-1} J_L \right\}, \end{aligned}$$

nos dando para o funcional gerador a forma

$$\begin{aligned} Z[J_\mu] &= \exp \left\langle \frac{e^2}{2} J_T \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T \right\rangle \exp \left\langle -\frac{1}{2\lambda} J_L \square^{-1} J_L \right\rangle \times \\ &\quad \int d\phi' d\rho' \exp \left\langle -\frac{1}{2\epsilon^2} \phi' \square (\square - m^2) \phi' + \frac{\lambda}{2} \rho' \square \rho' \right\rangle. \end{aligned}$$

Vamos escrever as exponenciais fora da integração em  $\rho'$  e  $\phi'$  em termos das fontes originais  $J_\mu$ , isto é

$$\left\langle \frac{e^2}{2} J_T \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T \right\rangle = \int d^2z d^2z' \frac{e^2}{2} \left\{ \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu J_\mu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta J_\alpha \right\} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2}{2} \int d^2 z d^2 z' \left\{ (\delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}) \partial_\nu J_\mu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \partial_\beta J_\alpha \right\} \\
&= \frac{e^2}{2} \int d^2 z d^2 z' \left\{ J_\mu(z) \left[ \partial_\nu \partial'_\nu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \right] J_\mu(z') - \right. \\
&\quad \left. J_\mu(z) \left[ \partial_\nu \partial'_\mu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \right] J_\nu(z') \right\},
\end{aligned}$$

onde  $\partial'_\mu$  nos diz que a derivada está sendo tomada em relação à coordenada  $z'$ . Do mesmo modo

$$\begin{aligned}
\left\langle -\frac{1}{2\lambda} J_L \square^{-1} J_L \right\rangle &= \int d^2 z d^2 z' \left\{ -\frac{1}{2\lambda} \partial_\mu J^\mu(z) \square^{-1} \partial_\nu J^\nu(z') \right\} \quad (4.4) \\
&= -\frac{1}{2\lambda} \int d^2 z d^2 z' J^\mu(z) \left[ \partial_\mu \partial'_\nu \square^{-1} \right] J^\nu(z').
\end{aligned}$$

Vamos ainda escrever estes resultados acima no espaço dos momentos usando as decomposições de Fourier

$$\begin{aligned}
J_\mu(z) &= \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \exp(ipz) \tilde{J}_\mu(p), \\
\square^{-1}(x-y) &= -\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\exp(ip(x-y))}{p^2 + i\varepsilon}, \\
\left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1}(x-y) &= -\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\exp(ip(x-y))}{p^2 (p^2 + m^2)}.
\end{aligned}$$

Com isto, o expoente de (4.3) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\int d^2 z d^2 z' \left\{ J_\mu(z) \left[ \partial_\nu \partial'_\nu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \right] J_\mu(z') \right\} &= \int d^2 z d^2 z' \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{d^2 p'}{(2\pi)^2} \\
&\quad \exp ipz \exp ik(x-y) \exp ip'z' \\
&\quad \left\{ \tilde{J}_\mu(p) \left( \frac{k_\mu k^\nu}{k^2 (k^2 + m^2)} \right) \tilde{J}_\mu(p') \right\}.
\end{aligned}$$

Usando ainda que

$$\begin{aligned}
\int d^2 z \exp(i(p+k)z) &= (2\pi)^2 \delta^2(p+k), \\
\int d^2 z \exp(i(p'-k)z) &= (2\pi)^2 \delta^2(p'-k),
\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \int d^2 z d^2 z' \left\{ J_\mu(z) \left[ \partial_\nu \partial_\nu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \right] J_\mu(z') \right\} &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{J}_\mu(-k) \frac{k^2}{k^2 (k^2 + m^2)} \tilde{J}^\mu(k) \\ &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{J}_\mu(-k) \tilde{J}^\mu(k)}{k^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int d^2 z d^2 z' \left\{ J_\mu(z) \left[ \partial_\nu \partial_\mu \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} \right] J_\nu(z') \right\} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{J}_\mu(-k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 (k^2 + m^2)} \tilde{J}_\nu(k).$$

Para o expoente de (4.4) temos, por sua vez, a expressão

$$-\frac{1}{2\lambda} \int d^2 z d^2 z' J^\mu(z) \left[ \partial_\mu \partial_\nu \square^{-1} \right] J^\nu(z') = -\frac{1}{2\lambda} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{J}^\mu(-k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tilde{J}^\nu(k).$$

De posse de todos estes resultados, podemos finalmente escrever a expressão final para o funcional gerador

$$Z[J_\mu] = \exp \left\{ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \tilde{J}_\mu(-k) \left[ \frac{e^2 k^2 \delta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu}{2 k^2 (k^2 + m^2)} - \frac{1}{2\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \tilde{J}_\nu(k) \right\},$$

onde estamos considerando ausentes os termos de fonte para os férmions e jogamos a integral sobre os campos  $\rho'$  e  $\phi'$  no fator de normalização.

Nosso objetivo nesta seção é o cálculo da auto-energia do fóton. Portanto, temos ainda que tomar as derivadas funcionais da expressão acima em relação às fontes  $J_\mu$ . Como os nossos resultados estão convenientemente escritos em termos das fontes no espaço dos momentos, os  $\tilde{J}_\mu$ , devemos usar a regra da cadeia na diferenciação. Assim,

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} = \int d^2 p \frac{\delta \tilde{J}_\nu(p)}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_\nu(p)},$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\delta \tilde{J}_\nu(p)}{\delta J_\mu(x)} &= \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \int d^2x' J_\nu(x') \exp(-ipx') = \int d^2x' \delta(x-x') \exp(-ipx') \\ &= \exp(-ipx).\end{aligned}$$

Agora podemos tomar as duas derivadas em relação às fontes bosônicas do funcional gerador

$$\begin{aligned}\left. \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \right|_{J=0} &= \int d^2p d^2p' \exp(-ipx) \exp(-ip'y) \frac{\delta^2 Z}{\delta \tilde{J}_\mu(p) \delta \tilde{J}_\nu(p')} \Big|_{J=0} \\ &= \int \frac{d^2p d^2p'}{(2\pi)^2} \exp(-ipx) \exp(-ip'y) \delta(p+p') \left[ \frac{e^2 p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu}{2 p^2 (p^2 + m^2)} - \frac{1}{2\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \\ &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \exp(-ip(x-y)) \left[ \frac{e^2 p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu}{2 p^2 (p^2 + m^2)} - \frac{1}{2\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \\ &\equiv G^{\mu\nu}(x-y),\end{aligned}$$

o que nos dá a auto-energia do fóton.

De acordo com o que foi salientado no início do capítulo, o método de regularização que utilizamos para efetuar o cálculo de determinantes funcionais, usados para a obtenção do funcional gerador, fez surgir uma quantidade física mal definida. De fato, podemos perceber que, sendo  $m^2 = \frac{e^2 a_s}{\pi}$ , o pólo do propagador que acabamos de calcular contém a ambigüidade de maneira explícita, o que significa que ela se manifestaria no cálculo de qualquer quantidade física.

Pondo a expressão para  $G^{\mu\nu}$  em outra forma, vemos que

$$\begin{aligned}G^{\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \exp(-ip(x-y)) \left[ \frac{e^2 p^2 \delta^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu}{2 p^2 (p^2 + m^2)} - \frac{1}{2\lambda} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \\ &= -e^2 (\square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) \left[ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-ip(x-y))}{p^2 (p^2 + m^2)} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\lambda} \partial^\mu \partial^\nu \left[ \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-ip(x-y))}{p^2} \right] \\ &= -e^2 (\square \delta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) [2\pi \mathbf{K}_0(m|x-y|)] + \frac{1}{\lambda} \partial^\mu \partial^\nu \left[ -\frac{1}{2\pi} \ln(m|x-y|) \right]\end{aligned}$$



não tem singularidades ultravioleta.

### 4.3 Função de dois pontos fermiônica

De maneira semelhante ao que foi feito para a auto-energia do fóton, vamos considerar ausentes, a priori, as fontes bosônicas,  $J_\mu = 0$ , e tomar as derivadas em relação a  $\bar{\eta}$  e  $\eta$  da quantidade (4.1). Portanto, a função de dois pontos fermiônica é simplesmente

$$\begin{aligned}
 S_{\alpha\beta}(x-y) &= - \frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x) \delta\eta_\beta(y)} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
 &= - \int dA_\mu \exp(-\bar{S}) \frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x) \delta\eta_\beta(y)} \exp \langle \bar{\eta}' (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \eta' \rangle_{\bar{\eta}=\eta=0} \\
 &= \int dA_\mu \exp(-\bar{S}) \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)} \left\{ \int d^2z (\bar{\eta} \exp(i\rho + \gamma_5\phi))_\gamma \times \right. \\
 &\quad \left. (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1}_{\gamma\delta} (\exp(-i\rho + \gamma_5\phi))_{\delta\beta}(y) \right\} \\
 &= \int dA_\mu \exp(-\bar{S}) (\exp(i\rho + \gamma_5\phi))_{\alpha\gamma}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1}_{\gamma\delta} (\exp(-i\rho + \gamma_5\phi))_{\delta\beta}(y).
 \end{aligned}$$

Podemos novamente simplificar este cálculo se fizermos uso da relação, muito útil no capítulo 3,

$$\exp(f(x)\gamma_5) = \mathbf{P}_+ \exp(f(x)) + \mathbf{P}_- \exp(-f(x)).$$

Com esta ajuda escrevemos

$$\begin{aligned}
 \exp(\gamma_5\phi(x)) (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \exp(\gamma_5\phi(y)) &= (\mathbf{P}_+ \exp(\phi(x)) + \mathbf{P}_- \exp(-\phi(x))) (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \times \\
 &\quad (\mathbf{P}_+ \exp(\phi(x)) + \mathbf{P}_- \exp(-\phi(x))) \\
 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} (\mathbf{P}_- \exp(\phi(x)) + \mathbf{P}_+ \exp(-\phi(x))) \times \\
 &\quad (\mathbf{P}_+ \exp(\phi(x)) + \mathbf{P}_- \exp(-\phi(x))) \\
 &= (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} (\mathbf{P}_+ \exp(-\phi(x) + \phi(y)) + \\
 &\quad \mathbf{P}_- \exp(\phi(x) - \phi(y))),
 \end{aligned}$$

de modo que

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = S_{\alpha\beta}^+(x-y) + S_{\alpha\beta}^-(x-y),$$

onde

$$S_{\alpha\beta}^{\pm}(x-y) = \left( (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu})^{-1} \mathbf{P}_{\pm} \right)_{\alpha\beta} \int dA_{\mu} \exp(-\bar{S}) \exp(i(\rho(x) - \rho(y)) \mp (\phi(x) - \phi(y))).$$

Escrevendo o argumento da segunda exponencial no integrando como

$$i(\rho(x) - \rho(y)) \mp (\phi(x) - \phi(y)) = \int d^2z (i\rho(z) \mp \phi(z)) j(z),$$

onde

$$j(z) = \delta(x-z) - \delta(y-z),$$

teremos então

$$S_{\alpha\beta}^{\pm}(x-y) = \left( (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu})^{-1} \mathbf{P}_{\pm} \right)_{\alpha\beta} \int dA_{\mu} \exp(-\bar{S} + \langle (i\rho \mp \phi) j \rangle).$$

Temos que diagonalizar este integrando de modo a obter uma expressão gaussiana. O trabalho é idêntico ao que foi feito para a auto-energia do fóton e nos leva de

$$\bar{S} - \langle (i\rho \mp \phi) j \rangle = \int d^2z \left\{ \frac{1}{2e^2} \phi \square (\square - m^2) \phi - \frac{\lambda}{2} \rho \square \rho + ij\rho \pm j\phi \right\},$$

com a ajuda da mudança

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + e^2 \int d^2z [\square (\square - m^2)]^{-1} (\pm j), \\ \rho' &= \rho - \frac{1}{\lambda} \int d^2z \square^{-1} (ij), \end{aligned}$$

à expressão diagonal

$$-\bar{S} + \langle (i\rho \mp \phi) j \rangle = \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2e^2} \phi' \square (\square - m^2) \phi' + \frac{\lambda}{2} \rho' \square \rho' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^2}{2} (\pm j) \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} (\pm j) - \frac{1}{2\lambda} (ij) \square^{-1} (ij) \Big\} \\
= & \int d^2x \left\{ -\frac{1}{2e^2} \phi' \square (\square - m^2) \phi' + \frac{\lambda}{2} \rho' \square \rho' + \right. \\
& \left. \frac{e^2}{2} j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j + \frac{1}{2\lambda} j \square^{-1} j \right\}.
\end{aligned}$$

Agora podemos escrever

$$S_{\alpha\beta}^{\pm}(x-y) = \left( (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \mathbf{P}_{\pm} \right)_{\alpha\beta} \exp \left\langle \frac{e^2}{2} j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j + \frac{1}{2\lambda} j \square^{-1} j \right\rangle,$$

onde, novamente, consideramos as quantidades provenientes das integrações em  $\phi'$  e  $\rho'$  incluídas no fator de normalização. Sabendo ainda que  $\mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathbf{1}$ , concluímos que

$$\begin{aligned}
S_{\alpha\beta}(x-y) &= S_{\alpha\beta}^+(x-y) + S_{\alpha\beta}^-(x-y) \\
&= \exp \left\langle \frac{e^2}{2} j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j + \frac{1}{2\lambda} j \square^{-1} j \right\rangle \left( (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \right)_{\alpha\beta} \\
&= \exp \left\langle \frac{e^2}{2} j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j + \frac{1}{2\lambda} j \square^{-1} j \right\rangle S_{\alpha\beta}^F(x-y),
\end{aligned}$$

onde  $S_{\alpha\beta}^F(x-y)$  é a função de dois pontos de férmions livres.

A análise de divergências do resultado acima se resume, uma vez que  $S_{\alpha\beta}^F$  é finita, ao estudo do comportamento dos dois termos exponenciais que nele aparecem. O primeiro termo

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{e^2}{2} j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j \right\rangle &= e^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1 - \exp(ik(x-y))}{k^2(k^2 + m^2)} \\
&= e^2 (2\pi\Delta(\mu; 0)) - e^2 (2\pi\Delta(\mu; x-y)),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

é livre de singularidades, enquanto que o segundo

$$\left\langle \frac{1}{2\lambda} j \square^{-1} j \right\rangle = -\frac{1}{\lambda} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1 - \exp(ik(x-y))}{k^2} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{\lambda} \int d^2k \frac{\exp(ik\alpha) - \exp(ik(x-y))}{k^2} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi\lambda} [\ln(m\alpha) - \ln(m|x-y|)] \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi\lambda} \ln\left(\frac{\alpha}{|x-y|}\right),
\end{aligned}$$

é divergente no ultravioleta. A divergência, no entanto, depende explicitamente da ambigüidade, nos dando a primeira oportunidade para tentar encontrar um meio de fixá-la. De fato, vemos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi\lambda} \ln\left(\frac{\alpha}{|x-y|}\right) = \begin{cases} -\infty, & \text{se } \lambda > 0 \\ +\infty, & \text{se } \lambda < 0 \end{cases},$$

o que implica em

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}.$$

Este resultado restringe o domínio de valores possíveis para a ambigüidade a uma bem determinada faixa, uma vez que a solução  $S_{\alpha\beta}(x-y) = 0$  não é uma solução consistente da teoria. Esta inconsistência se torna evidente ao percebermos que com ela estaríamos dizendo que os férmions não poderiam se propagar, o que é fisicamente sem sentido. É preciso dizermos aqui que para  $\lambda = 0$ , regularização invariante de *gauge*, a teoria não apresenta nenhuma divergência ou inconsistência.

A outra solução precisa ser renormalizada para que seja considerada consistente. A busca de uma teoria finita nos levou a propor uma renormalização de função de onda

$$\begin{aligned}
\psi &= \mathbf{Z}_{\psi}^{\frac{1}{2}} \psi', \\
\bar{\psi} &= \mathbf{Z}_{\psi}^{\frac{1}{2}} \bar{\psi}',
\end{aligned} \tag{4.7}$$

que deixa o jacobiano das rotações quirais inalterado. De fato, usando a prescrição

$$\frac{d}{de} \det D = \text{Tr} \left( D^{-1} \frac{dD}{de} \right),$$

é fácil ver que, na substituição  $D \rightarrow \lambda D$ , teremos

$$\frac{d}{de} \det \lambda D = \text{Tr} \left( \lambda^{-1} D^{-1} \frac{d(\lambda D)}{de} \right) = \text{Tr} \left( D^{-1} \frac{dD}{de} \right) = \frac{d}{de} \det D.$$

Isto mostra que a ação efetiva não dependerá de  $\mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}}$  ou  $\mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}}$  e que a renormalização (4.7) não afetará o resultado obtido para as funções de correlação bosônicas. O efeito desta renormalização, no entanto, é sentido nas funções envolvendo derivadas das fontes fermiônicas, pois agora

$$\frac{\delta}{\delta \eta} Z_R = \mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\delta}{\delta \eta} Z$$

e

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} Z_R = \mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} Z,$$

ao tomarmos o limite  $J_\mu = \bar{\eta} = \eta = 0$ . Deste modo, o propagador obtido a partir destes férmions renormalizados irá se relacionar com o anteriormente obtido através da relação conhecida

$$S_{\alpha\beta}^R(x-y) = \mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} \mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} S_{\alpha\beta}(x-y).$$

Podemos agora fazer a seguinte escolha: vamos considerar  $\mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Z}_\psi^{\frac{1}{2}} = \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$ . Isto vai requerer uma condição de renormalização apenas para fixar  $\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$ . Por exemplo, usando o mesmo método de regularização que utilizamos para o cálculo de (4.5) e (4.6) chegamos à expressão

$$\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \alpha + \beta \right\}, \quad (4.8)$$

onde  $\beta$  é uma ambigüidade adicional sobre a parte finita de  $\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}$  a ser fixada através da imposição de determinadas condições de renormalização. Portanto, vemos que a expressão regularizadora (4.8) nos fornece a teoria finita e consistente que procurávamos,

o que nos leva à conclusão de que nossa ambigüidade deve satisfazer

$$\lambda < 0 \implies \frac{a_s - 1}{\pi} < 0,$$

ou melhor

$$a_s < 1.$$

Por outro lado, ao admitirmos que  $a_s$  possa ser menor que 0, estaremos considerando a possibilidade de aparecimento de táquions no modelo. Deste modo, impondo também esta restrição conseguimos diminuir ainda mais a possibilidade de valores para a ambigüidade. Agora temos

$$0 \leq a_s \leq 1,$$

ou, em função do parâmetro original que foi introduzido durante a regularização,

$$-1 \leq a \leq 1.$$

Podemos perceber, na expressão acima, que a restrição para a arbitrariedade em  $a$  está limitada pelos valores que fazem a teoria preservar as simetria quiral e de *gauge*, respectivamente. Fora deste intervalo ficam proibidos os valores para  $a$ . Dentro, no entanto, permanece a ambigüidade.

## 4.4 Função de quatro pontos mista

Na seção precedente obtivemos não um valor fixo mas uma restrição para a ambigüidade. Esta poderá assumir valores somente na faixa  $0 \leq a_s \leq 1$ . Vejamos se, a partir da análise de divergência de outros processos, podemos restringir ainda mais esta faixa ou, melhor ainda, eliminar quaisquer valores para  $a_s$  diferentes de 1.

A ausência de funções de correlação com um número ímpar de campos externos fermiônicos ou bosônicos, nos leva imediatamente ao cálculo da função de quatro pontos

mista  $G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x, y, z, w)$  definida por

$$G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \frac{\delta^4}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y) \delta \bar{\eta}_\alpha(z) \delta \eta_\beta(w)} Z [J_\mu, \bar{\eta}, \eta]_{J_\mu = \bar{\eta} = \eta = 0}.$$

De acordo com o resultado obtido para a função de dois pontos fermiônica podemos escrever, para a quantidade acima, a expressão

$$G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \frac{\delta^4}{\delta J_\mu(x) \delta J_\nu(y)} \left\{ \left( (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \mathbf{P}_+ \right)_{\alpha\beta}(z, w) \times \int dA_\mu \exp \left( -\bar{S} + \langle J_\mu A^\mu \rangle + \langle (i\rho - \phi) j \rangle \right) + \left( (i\gamma^\mu \partial_\mu)^{-1} \mathbf{P}_- \right)_{\alpha\beta}(z, w) \int dA_\mu \exp \left( -\bar{S} + \langle J_\mu A^\mu \rangle + \langle (i\rho + \phi) j \rangle \right) \right\},$$

o que reduz seu cálculo ao problema da diagonalização das ações efetivas, isto é, transformar

$$\begin{aligned} S^\pm &= \bar{S} - \langle J_\mu A^\mu \rangle - \langle (i\rho \mp \phi) j \rangle \\ &= \bar{S} + \langle J_L \rho + J_T \phi - i j \rho \pm j \phi \rangle \\ &= \bar{S} + \langle (J_L - i j) \rho + (J_T \pm j) \phi \rangle \\ &= \bar{S} + \langle J'_L \rho + J'_T \phi \rangle \end{aligned}$$

numa expressão quadrática que nos dê uma integral gaussiana. Este tipo de cálculo já foi feito para as fontes  $J_L, J_T$  na seção anterior. Deste modo, é fácil ver que a mudança

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + e^2 \int d^2 z \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J'_T, \\ \rho' &= \rho - \frac{1}{\lambda} \int d^2 z \square^{-1} J'_L, \end{aligned}$$

nos leva a

$$S^\pm = \bar{S} - \frac{e^2}{2} \left\langle j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j \right\rangle \mp \frac{e^2}{2} \left\langle J_T \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j \right\rangle$$

$$\mp \frac{e^2}{2} \left\langle j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T \right\rangle - \frac{1}{2\lambda} \left\langle j^{\square^{-1}} j \right\rangle - \frac{i}{2\lambda} \left\langle J_L \square^{-1} j \right\rangle - \frac{i}{2\lambda} \left\langle j^{\square^{-1}} J_L \right\rangle.$$

Nos resta ainda calcular duas derivadas funcionais, em relação a  $J_\mu$ , da expressão acima que é do tipo  $\exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle)$ . Deste modo,

$$\frac{\delta}{\delta J_x} \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle) = (-2 \langle KL \rangle_x - L_x) \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J_x \delta J_y} \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle) &= -2K_{xy} \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle) + \\ &(-2 \langle KJ \rangle_x - L_x) (-2 \langle KJ \rangle_y - L_y) \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle). \end{aligned}$$

Ao tomarmos o limite  $J = 0$ , a expressão se reduz a

$$\frac{\delta}{\delta J_x \delta J_y} \exp(-\langle JKJ \rangle - \langle JL \rangle)_{J_x=J_y=0} = -2K_{xy} + L_x L_y,$$

onde  $K_{xy}$  representa a função de dois pontos bosônica, previamente calculada. Para identificarmos  $L$  basta notarmos que

$$\begin{aligned} \left\langle J_T \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j \right\rangle &= \left\langle j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} J_T \right\rangle \\ &= - \int d^2 z d^2 z' J_\mu(z) \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu^z \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1}(z, z') j \langle z' \rangle \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} \left\langle J_L \square^{-1} j \right\rangle &= \left\langle j^{\square^{-1}} J_L \right\rangle \\ &= - \int d^2 z d^2 z' J_\mu(z) \partial_z^\mu \square^{-1}(z, z') j \langle z' \rangle. \end{aligned}$$



Isto nos dá para  $L$  a expressão

$$L_{\pm}^{\mu}(z) = \int d^2 z' \left( \pm \frac{e^2}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu}^z \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} (z, z') j(z') + \frac{i}{2\lambda} \partial_z^{\mu} \square^{-1} (z, z') j(z') \right).$$

Finalmente temos como resultado final para a função de quatro pontos mista a expressão

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x, y, z, w) &= \left( (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu})^{-1} \mathbf{P}_{+} \right)_{\alpha\beta} (z, w) \left[ G^{\mu\nu}(x, y) + L_{+}^{\mu}(x) L_{-}^{\nu}(y) \right] \times \\ &\quad \exp \left( \frac{e^2}{2} \langle j \left[ \square (\square - m^2) \right]^{-1} j \rangle + \frac{1}{2\lambda} \langle j \square^{-1} j \rangle \right) + \\ &\quad (+ \leftrightarrow -), \end{aligned}$$

ou

$$G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(x, y, z, w) = S_{\alpha\beta}(z, w) G^{\mu\nu}(x, y) + S_{\alpha\beta}^{+}(z, w) L_{+}^{\mu}(x) L_{+}^{\nu}(y) + S_{\alpha\beta}^{-}(z, w) L_{-}^{\mu}(x) L_{-}^{\nu}(y),$$

onde  $S_{\alpha\beta}$  e  $G^{\mu\nu}$  são as funções de dois pontos fermiônica e bosônica e  $L_{\pm}^{\mu}(x) \equiv L_{\pm}^{\mu}(x, z, w)$ .

Do mesmo modo que para o cálculo da função de dois pontos fermiônica, estaremos interessados na análise de divergência desta quantidade. Assim, visto que  $S_{\alpha\beta}^{\pm}$  tem o mesmo problema de divergências que  $S_{\alpha\beta}$  passemos à análise de  $L_{\pm}^{\mu}$ .

Escrito no espaço dos momenta, lembrando que

$$(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu})^{-1}(x - y) = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\exp(ik(x - z))}{k^2},$$

$L_{\mu}^{\pm}$  assume a forma

$$\begin{aligned} L_{\mu}^{\pm}(x, z, w) &= \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} (\exp(ik(x - z)) + \exp(ik(x - w))) \left\{ \pm \frac{e^2}{2} \frac{i\varepsilon_{\mu\nu} k^{\nu}}{k^2 (k^2 + m^2)} + \frac{1}{2\lambda} \frac{k_{\mu}}{k^2} \right\} \\ &= \mp \frac{e^2}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} \left[ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\exp(ik(x - z)) + \exp(ik(x - w))}{k^2 (k^2 + m^2)} \right] + \\ &\quad \frac{i}{2\lambda} \partial^{\nu} \left[ \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{\exp(ik(x - z)) + \exp(ik(x - w))}{k^2} \right] \\ &= \mp \pi e^2 \varepsilon_{\mu\nu} \partial^{\nu} [\mathbf{K}_0(m|x - z|) + \mathbf{K}_0(m|x - w|)] - \end{aligned}$$

$$\frac{i}{4\pi\lambda} \partial_\mu [\ln(m|x-z|) + \ln(m|x-w|)],$$

que não contém singularidades. Isso mostra que a função de quatro pontos será finita e diferente de zero, se a função de dois pontos fermiônica o for. O procedimento acima deixa claro que o único problema de divergência é com a função de dois pontos fermiônica. Se ela for tratada, todas as funções de correlação da teoria serão finitas para qualquer valor do parâmetro de Jackiw  $a_s$  entre 0 e 1.

# Conclusão

De acordo com o que havíamos delineado na introdução, começamos o estudo da ambigüidade de regularização no modelo de Schwinger, através do cálculo das contribuições dos setores com topologia não trivial às funções de correlação fermiônicas. Vimos como a exigência de que setores com cargas topológicas diferentes não possam contribuir entre si no cálculo destas funções nos levou naturalmente a uma equação que permitiu fixar o valor da ambigüidade. Este resultado, válido para qualquer setor com carga topológica diferente de zero, nos motivou na direção de uma solução mais geral.

O segundo passo dado foi o estudo do modelo de Schwinger em topologias triviais. Vimos, logo no primeiro cálculo, o aparecimento explícito da ambigüidade no pólo do propagador do fóton. Já o cálculo da função de dois pontos fermiônica forneceu resultados que dependem explicitamente da ambigüidade. Verificamos que valores de  $a_s > 1$  implicariam na impossibilidade dos férmions de se propagar, enquanto que  $a_s < 0$  faria com que o bóson vetorial fosse taquiônico. Com estas considerações obtivemos a restrição  $0 \leq a_s \leq 1$  (de origem física) ao parâmetro de Jackiw-Rajaraman. Para  $a_s < 1$ , a função de dois pontos fermiônica é divergente, mas ainda pode ser considerada desde que se faça uma renormalização de função de onda. O cálculo de outras funções de correlação, como a função de quatro pontos mista, nos informou que o tipo de divergência que aparece é do mesmo tipo que a da função de dois pontos fermiônica. O cálculo de outras funções de correlação tampouco alteraria o resultado que já alcançamos pois, novamente, as possíveis divergências se resumiriam à da auto-energia do férmion.

Uma maneira com a qual poderíamos abordar o problema daqui em diante seria

através de um estudo sobre a renormalização da teoria no espaço de configuração. De fato, observamos que a solução da teoria no espaço dos momentos é bastante complicada, envolvendo mudanças de variáveis não locais e jacobianos conseqüentemente mais elaborados. A tentativa mais válida seria a de fazer tudo o que fizemos no setor trivial diretamente no espaço de configurações. Deparamo-nos, no entanto, com a existência de poucos resultados na literatura que nos indiquem como fazer, diretamente, a renormalização neste espaço.

Uma vez feito isto, seria necessário um estudo do grupo de renormalização para o modelo de Schwinger. Sabemos que o aparecimento de ambigüidades de renormalização não é exatamente uma novidade. Lembramos, no entanto, que quantidades fisicamente mensuráveis, os observáveis, não podem depender dessas ambigüidades. Isto é, não podem depender de como as condições de renormalização são impostas sobre as funções de correlação. Como já foi dito antes, é responsabilidade do grupo de renormalização relacionar estas condições. Matematicamente falando, observáveis físicos devem satisfazer a uma equação, chamada equação do grupo de renormalização, da forma

$$\frac{d}{d\mu}R = 0,$$

onde  $R$  representa algum observável e  $\mu$  é o parâmetro massivo arbitrário introduzido pelo procedimento de renormalização. Portanto, podemos conjecturar que, mesmo podendo assumir valores arbitrários, apesar de limitados, a ambigüidade, juntamente com a carga elétrica, satisfaz à equação

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{e^2 a_s}{\pi} \right) = 0,$$

uma vez que esta quantidade entre parênteses (o pólo do propagador) é um observável. Se pudermos comprovar a suposição acima teremos encontrado um significado para a existência desta ambigüidade. Ela representaria uma interpolação entre os diversos tipos de regularização possíveis num processo de renormalização e seria, portanto, expressa em termos da constante de acoplamento renormalizada  $e_R$  e de  $\mu$ . A análise deste ponto e o

estudo do problema para as teorias quirais é a continuação natural deste trabalho.

# Apêndice A

## Cálculo da Função de Green para o Modelo de Schwinger

Queremos encontrar uma solução para a equação diferencial

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu) G_+(x, y) = \delta(x - y)$$

que possa ser escrita na forma

$$G_+(x - y) = \exp(i(\alpha(x) - \alpha(y))) G_F(x - y),$$

onde  $\alpha(x)$  é um campo escalar e  $G_F(x - y)$  é a solução da equação livre

$$i\gamma^\mu \partial_\mu G_F(x - y) = \delta(x - y). \tag{A.1}$$

Esta imposição sobre  $G_+$  nos dá, por sua vez, para  $\alpha(x)$  a seguinte equação

$$\gamma^\mu \partial_\mu \alpha(x) = e\gamma^\mu A_\mu(x),$$

ou ainda

$$\square\alpha(x) = -e\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu A_\nu.$$

O problema de encontrar uma solução para  $\alpha(x)$  se resume, então, ao problema de encontrar a inversa  $\Delta_F$  do operador diferencial  $\square$ . De fato, podemos verificar que escrevendo

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Delta_F(x,y) = G_F(x,y),$$

somos levados, via (A.1), a

$$\square\Delta_F(x,y) = \delta(x-y). \quad (\text{A.2})$$

Deste modo, podemos escrever, como solução para  $\alpha(x)$ , a expressão

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= -e \int d^2z \Delta_F(x,z) \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu A_\nu \\ &= e \int d^2z \Delta_F(x,z) \left\{ -\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} - \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right\} \partial_\mu A_\nu \\ &= -e \int d^2z \Delta_F(x,z) \{ \mathbf{1}\delta^{\mu\nu} + i\gamma_5\varepsilon^{\mu\nu} \} \partial_\mu A_\nu, \end{aligned}$$

que, se usarmos

$$\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\varepsilon^{\mu\nu} = F^*,$$

pode finalmente ser escrita como

$$\alpha(x) = e \int d^2z \Delta_F(x,z) \{ \mathbf{1}\partial_\mu A^\mu + i\gamma_5 F^* \}.$$

Para finalizar, precisamos encontrar uma expressão para o propagador livre  $G_F(x,y)$ . A solução da equação (A.2) é obtida por

$$\Delta_F(x,y) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{\exp(ik(x-y))}{k^2 + i\varepsilon}.$$

No entanto, podemos escrever

$$\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = -i \int_0^\infty dt \exp(it(k^2 + i\varepsilon)),$$

donde

$$\Delta_F(x, y) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dt \exp(-t\varepsilon) \int d^2k \exp(itk^2 + ikx).$$

Para que a expressão acima seja uma integral gaussiana precisamos completar quadrados no expoente da integração em  $d^2k$ . Assim,

$$\begin{aligned} kx + tk^2 &= t \left( k^2 + \frac{kx}{t} \right) = t \left( k^2 + \frac{kx}{t} - \frac{x^2}{4t^2} \right) - \frac{x^2}{4t} \\ &= t \left( k + \frac{x}{2t} \right)^2 - \frac{x^2}{4t} = tk'^2 - \frac{x^2}{4t}, \end{aligned}$$

onde  $k' = k + \frac{x}{2t}$ . Sabendo ainda que

$$\int_{-\infty}^\infty dk'_0 \exp(ik'_0 t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\frac{\pi}{-i}},$$

concluimos que

$$\Delta_F = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp\left(-t\varepsilon - \frac{ix^2}{4t}\right) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp\left(-\frac{ix^2}{4t}\right),$$

logo,

$$G_F = -i\gamma^\mu \partial_\mu \Delta_F$$

é não singular. De fato,

$$\begin{aligned} \Delta_F &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp\left(-\frac{ix^2}{4t}\right) = -\frac{1}{4\pi} \int_\infty^0 -\frac{1}{s^2} ds \times s \times \exp\left(-\frac{ix^2 s}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp\left(-\frac{ix^2 s}{4}\right), \end{aligned}$$



o que nos dá

$$\begin{aligned}
 i\gamma^\mu \partial_\mu \Delta_F &= -\frac{i\gamma^\mu}{4\pi} \int_0^\infty ds \left(-i\frac{x_\mu}{2}\right) \exp\left(-\frac{ix^2 s}{4}\right) \\
 &= -\frac{\gamma^\mu x_\mu}{8\pi} \int_0^\infty ds \exp\left(-\frac{ix^2 s}{4}\right) \\
 &= -\frac{\gamma^\mu x_\mu}{2\pi x^2} \int_0^\infty ds \exp(-is - \varepsilon s) \\
 &= \frac{i\gamma^\mu x_\mu}{2\pi x^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto, existe

$$G_+(x, y) = \exp(i(\alpha(x) - \alpha(y))) G_F(x - y),$$

tal que

$$\alpha(x) = e \int d^2 z \Delta_F(x, z) \{ \mathbf{1} \partial_\mu A^\mu + i\gamma_5 F^* \}$$

e

$$G_F = \frac{i\gamma^\mu (x_\mu - y_\mu)}{2\pi (x - y)^2}.$$

# Apêndice B

## Grupos de Homotopia

A idéia dos grupos de homotopia é associar uma estrutura de grupo a deformações contínuas entre mapeamentos. Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $\mathbf{F}$  o conjunto de mapeamentos de  $X$  em  $Y$ . Introduce-se uma relação de equivalência, chamada "homotópico a", em  $\mathbf{F}$  tal que dois mapeamentos  $f, g \in \mathbf{F}$  são identificados se a imagem de  $f(X)$  puder ser continuamente deformada na de  $g(X)$  em  $Y$ .

### B.1 Idéias básicas

- **Definição 1** *Seja  $X$  um espaço topológico e seja  $I = [0, 1]$ . Um mapeamento contínuo  $\alpha : I \rightarrow X$  é chamado caminho com um ponto inicial  $x_0$  e um ponto final  $x_1$  se  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ . Se ainda  $\alpha(0) = \alpha(1)$  este caminho é chamado de loop.*

Dizemos que um loop  $\alpha$  é homotópico a outro loop  $\beta$  se  $\alpha$  puder ser obtido a partir de  $\beta$  por uma deformação contínua.

- **Definição 2** Seja  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  caminhos tais que  $\alpha(1) = \beta(0)$ . O produto entre  $\alpha$  e  $\beta$ , denotado como  $\alpha * \beta$ , é um caminho definido por

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}.$$

Como  $\alpha(1) = \beta(0)$ ,  $\alpha * \beta$  é um mapeamento contínuo de  $I$  em  $X$ .

- **Definição 3** Seja  $\alpha : I \rightarrow X$  um caminho de  $x_0$  a  $x_1$ . O caminho inverso  $\alpha^{-1}$  de  $\alpha$  é definido por

$$\alpha^{-1}(s) \equiv \alpha(1 - s).$$

- **Definição 4** Seja  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  loops em  $x_0$ . Estes são ditos homotópicos,  $\alpha \sim \beta$ , se existir um mapeamento contínuo  $\mathbf{F} : I \times I \rightarrow X$  tal que

$$\mathbf{F}(s, 0) = \alpha(s), \mathbf{F}(s, 1) = \beta(s), \forall s \in I$$

$$\mathbf{F}(0, t) = \mathbf{F}(1, t) = x_0, \forall t \in I.$$

O mapeamento  $\mathbf{F}$  é então chamado de homotopia entre  $\alpha$  e  $\beta$ . A relação de homotopia é uma relação de equivalência.

## B.2 Grupos fundamentais

A classe de equivalência de loops é denotada por  $[\alpha]$  e é chamada de **classe de homotopia**. O produto entre os loops define naturalmente o produto no conjunto das classes de homotopia.

- **Definição 5** Seja  $X$  um espaço topológico. O conjunto de classes de homotopia de loops em  $x_0 \in X$  é denotado por  $\pi_1(X, x_0)$  e é chamado de grupo fundamental. O produto de classes de homotopia é definido por  $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$ .

- **Teorema 1** *O grupo fundamental é um grupo. Isto é, se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são loops em  $x \in X$ , valem as seguintes propriedades*

$$([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$$

$$[\alpha] * [c_x] = [\alpha],$$

$$[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x],$$

onde  $c_x$  é o mapeamento constante definido como  $c_x : I \rightarrow X$  tal que  $c_x(s) = x$ . A demonstração deste teorema é simples e direta, de modo que vamos assumi-lo como verdade.

A equivalência homotópica entre caminhos e *loops* é facilmente generalizada para mapeamentos arbitrários. Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  mapeamentos contínuos. Se existir um mapeamento contínuo  $\mathbf{F} : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $\mathbf{F}(x, 0) = f(x)$  e  $\mathbf{F}(x, 1) = g(x)$ ,  $f$  é dito ser **homotópico** a  $g$ , denotando-se  $f \sim g$ . O mapeamento  $\mathbf{F}$  é chamado a homotopia entre  $f$  e  $g$ . Assim como para caminhos e *loops* mostra-se que esta é uma relação de equivalência. Mostra-se ainda que o conjunto das classes de equivalência tem propriedades de grupo sob a operação de composição destes mapeamentos.

### B.3 Exemplos de grupos fundamentais

- **Teorema 2** *O grupo fundamental de  $S^1$  é isomorfo a  $\mathbf{Z}$ .*

Apesar da prova deste teorema não ser óbvia, pode ser intuitivamente entendida. Suponhamos que envolvemos um cilindro com um elástico. Um elástico que dá  $m$  voltas no cilindro não pode obviamente ser deformado em um que dá  $n$  voltas. Além disto, um elástico que dá  $m$  voltas no cilindro e depois mais  $n$  voltas envolve-o num total de  $n + m$  voltas.

- **Teorema 3** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por arcos. Então  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  é isomorfo a  $\pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$ .*

Por exemplo: seja o toro  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Então

$$\pi_1(T^2) \cong \pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

De maneira similar para o toro  $n$ -dimensional

$$T^n \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ vezes}},$$

temos

$$\pi_1(T^n) \cong \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}}_{n \text{ vezes}}.$$

# Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **117** (1928) 610; **118** (1928) 351;
- [2] F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1736; **85** (1952) 631; A. Salam, *Phys. Rev.* **82** (1951) 217; J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 182; *Proc. Phys. Soc.* **A64** (1951) 54.
- [3] N. N. Bogoliubov e O. S. Parasiuk, *Acta Math.* **97** (1957) 227; K. Hepp, *Commun. Math. Phys.* **2** (1966) 301.
- [4] W. Zimmermann, em *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, vol. 1, 1970, Brandeis Univ. Summer Institut.
- [5] G. 't Hooft e M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189; G. Cicuta e E. Montaldi, *Nuovo Cimento Letters* **4** (1972) 329; T. Gustafson, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **34A** (1947) 1; E. Speer, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1404; C. G. Bollini, J. J. Giambiagi e A. G. Dominguez, *Nuovo Cimento* **31** (1964) 550.
- [6] W. Thirring, *Ann. of Phys.* **3** (1958) 91.
- [7] J. Lowenstein e J. Swieca, *Ann. Phys. (N.Y.)* **68** (1971) 172.
- [8] D. Gross e A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 3235.
- [9] D. J. Gross, em *Applications of the Renormalization Group to High Energy Physics*, Les Houches, seção XXVIII 1975.
- [10] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2425.

- [11] A. Casher, J. Kogout e L. Susskind, *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 792.
- [12] R. Jackiw e R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1219.
- [13] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426; em *Lectures on Elementary Particle Physics and Quantum Field Theory*, ed. S. Deser et al., vol. I, MIT Press (1970).
- [14] J. S. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **A60** (1969) 47.
- [15] C. Farina, em *Utilização de Diferentes Técnicas de Regularização em Modelos Bidimensionais*, Tese de Doutorado, U.F.R.J. (1989).
- [16] R. Jackiw e K. Johnson, *Phys. Rev.* **182** (1969) 1459.
- [17] J. Zinn-Justin, em *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Science Publications, segunda edição (1993).
- [18] M. Nakahara, em *Geometry Particles and Fields*, ed. Douglas F. Brewer, Graduate Student Series in Physics (1990).
- [19] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla e K. D. Rothe, em *Non-perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pt. Lt. (1991).
- [20] K. Fujikawa, *Phys. Rev. Lett.* **42** (1979) 1195; *Phys. Rev.* **D21** (1980) 2848; *Nucl. Phys.* **B226** (1983) 437.
- [21] F. A. Schaposnik, em *Chiral Symmetry in the Path Integral Approach*, notas de aula dadas no C.B.P.F. (1986).
- [22] S. A. Dias, em *Aspectos de Topologia não Trivial em Teorias de Gauge*, Tese de Doutorado, C.B.P.F. (1992).
- [23] R. E. Gamboa-Saravi, M. A. Muschietti e J. E. Solomin, *Comm. Math. Phys.* **93** (1984) 407.

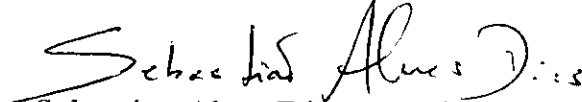
- [24] K. D. Rothe e B. Schroer, "Green Functions, Determinants and Induced Actions in Gauge Theories", em *Field Theoretical Methods in Particle Physics*, ed. por W. Rühl, Nova Iorque (Plenum Press, 1980).
- [25] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, Holanda (North-Holland, 1987).
- [26] K. Bardakci e M. Crescimano, *Nucl. Phys.* **B313** (1989) 269.
- [27] M. V. Manias, C. M. Naón e M. L. Trobo, *Phys. Rev.* **D41** (1990) 3174.
- [28] M. Atiyah e E. Singer, *Ann. Math.* **87** (1968) 484.
- [29] S. A. Dias, M. T. Thomaz, *Phys. Rev.* **D44** ( 1991) 1811.
- [30] Y. Frishman, em *Particles, Quantum Fields and Statistical Mechanics*, anais do Instituto de Verão em Física Teórica, Cidade do México, ed. M. Alexanian e A. Zapeda (Lecture Notes in Physics, vol. 32) (Springer, Berlim, 1975) p. 118.

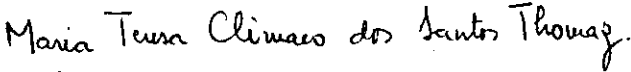


**“UM ESTUDO DE AMBIGÜIDADES NA  
ELETRODINÂMICA BIDIMENSIONAL”**

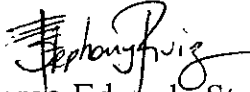
*Marcello Barbosa da Silva Neto*

Tese de Mestrado apresentada no Cen-  
Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Con-  
selho Nacional de Desenvolvimento Ci-  
entífico e Tecnológico, fazendo parte da  
Banca Examinadora os seguintes profes-  
sores:

  
Sebastião Alves Dias - Presidente

  
Maria Teresa Clímaco dos Santos Thomaz

  
Itzhak Roditi

  
Jorge Eduardo Stephany Ruiz - Convidado Especial

Rio de Janeiro, 08 de março de 1996