

Tese de Mestrado

# Cordas Magnéticas Quânticas a Temperatura Finita

Daniel Guilherme Gomes Sasaki

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
Rio de Janeiro, Agosto de 1996

Tese de Mestrado

# Cordas Magnéticas Quânticas a Temperatura Finita

Daniel Guilherme Gomes Sasaki

Tese submetida ao Departamento de Campos e Partículas  
como requisito para obtenção do grau  
de Mestre em Física.

Orientador  
Eduardo Cantera Marino

*A todos aqueles que  
morrem lutando por  
um pedaço de terra*

## Agradecimentos

A Eduardo Cantera Marino, pela cordial orientação e pelo aprendizado de como se faz um trabalho.

A Sebastião Alves Dias (Tião) pela inesgotável boa vontade e a sempre solícita ajuda, na saúde ou na doença, em todo mestrado e em qualquer problema.

A Jorge Stephany Ruiz, pela capacidade de, em todas as discussões, apresentar mais perguntas do que respostas.

Ao meu amigo Paulo José Senna dos Santos, por carregar a mala em uma disciplina, no difícil período de concomitância de final de graduação e início de mestrado.

A Ricardo Renan Landim de Carvalho (Chumbinho), pela criação do formato de tese do CBPF, da qual tive o mérito de servir de cobaia. A versão final do estilo está disponível para aqueles que optarem pelo Scientific Word 2.0.

À minha noiva e eterno Amor Luciana Gomes Cerqueira, pelos desenhos e por todo incentivo, imprescindíveis para a conclusão da tese.

À minha família, por compreender todos os aniversários que esqueci ou não pude ir, por estar ocupado demais escrevendo a tese. É terrível quando, quase todo mundo, faz anos em um pequeno período de tempo.

Aos muitos amigos e colegas do CBPF (por falta de espaço não citarei os nomes, mas tenho certeza da importância de cada um deles).

A Míriam Simões Coutinho, pelas sempre rápidas e prestativas soluções.

A CAPES e CNPq pelo suporte financeiro.

## Resumo

No presente trabalho, aplicamos o *método de quantização dual* de excitações topológicas, para cordas magnéticas do Modelo de Higgs Abeliiano em  $(3 + 1)$ -dimensões. Na aproximação onde o valor absoluto do campo de Higgs é constante, calculamos a função de correlação de uma corda magnética fechada e circular, tanto a temperatura finita como no limite de temperatura zero. Mostramos que a temperatura zero, somente cordas infinitas existem como excitações genuínas. Contudo, a introdução de temperatura desestabiliza o sistema, e, mesmo as cordas infinitas, desaparecem do espectro físico.

## Abstract

In this work we apply the *method of dual quantization* of topological excitations to magnetic strings in the Abelian Higgs Model in  $(3 + 1)$ -dimensions. In the approximation of constant absolute value of the Higgs field, we evaluate the correlation function of a closed and circular magnetic string, both at finite and in the zero temperature limit. We show that in zero temperature, only infinite strings exist as genuine excitations. However, the introduction of temperature makes the system unstable and even infinite strings disappear from physical spectrum.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
Índice . . . . .	iv
Lista de Figuras . . . . .	vi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sólitons Clássicos e o método de quantização dual</b>	<b>5</b>
1.1 Sólitons clássicos . . . . .	5
1.1.1 <i>Kinks</i> . . . . .	6
1.1.2 Estabilidade Topológica . . . . .	7
1.1.3 Vórtices . . . . .	8
1.1.4 Cordas magnéticas . . . . .	11
1.2 Dualidade no Modelo de Ising Bidimensional . . . . .	11
1.2.1 Variáveis de ordem-desordem . . . . .	16
1.2.2 Operadores de criação de <i>kinks</i> . . . . .	19
1.3 Generalização do método para TQC em $(1 + 1)$ -d . . . . .	24
1.3.1 Modelo genérico de campos escalares com simetria $Z(n)$ . . . . .	25
<b>2 Quantização Dual de vórtices e cordas</b>	<b>33</b>
2.1 A modificação da álgebra . . . . .	33
2.2 O modelo de Maxwell . . . . .	35
2.2.1 O modelo de Maxwell em três dimensões . . . . .	35

2.2.2	O modelo de Maxwell em quatro dimensões . . . . .	40
2.3	O Modelo de Higgs Abeliano . . . . .	44
2.3.1	Vórtices quânticos . . . . .	46
2.3.2	Cordas quânticas . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Quantização dual de cordas a temperatura finita</b>	<b>48</b>
3.1	Introdução de Temperatura em Teoria Quântica de Campos . . . . .	48
3.1.1	A função de correlação da corda quântica a temperatura finita . .	52
3.1.2	Cálculo da função de correlação de duas cordas circulares com si- metria cilíndrica . . . . .	58
	<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Cálculos diversos</b>	<b>69</b>
A.1	Cálculo das integrais em $k$ . . . . .	69
A.2	Cálculo das séries . . . . .	70
A.3	Cálculo das integrais em $\alpha$ . . . . .	71
A.4	Cálculo dos limites de $H$ e $R$ . . . . .	72
A.5	Cálculo do limite de baixas temperaturas . . . . .	73
A.6	Cálculo do limite de altas temperaturas . . . . .	74
	<b>Bibliografia</b>	<b>76</b>



# Lista de Figuras

1-1	12
1-2	13
1-3	14
1-4	19
1-5	20
1-6	21
1-7	21
1-8	22
1-9	23
1-10	26
2-1	35
2-2	41
3-1	58

# Introdução

Sólitons são soluções clássicas estáveis de equações de campo não-lineares, às quais corresponde uma densidade de energia localizada e sem dispersão, movendo-se a velocidade constante. Partículas elementares são também pacotes de energia estáveis e podem ser descritos por teorias de campo relativísticas. Tamanha semelhança nos sugere que possa existir realmente uma conexão entre sólitons e partículas elementares. Entretanto, partículas são descritas por uma teoria de campos quântica, ao passo que os sólitons são soluções de equações de campos clássicos. Para estabelecer alguma correspondência entre eles é necessário, antes de tudo, o desenvolvimento de um formalismo sistemático de quantização destes objetos clássicos, o que não é um problema trivial, e a posterior análise dos estados oriundos desta quantização.

Os mais conhecidos exemplos de sólitons são os *kinks* dos modelos de campos escalares  $\lambda\phi^4$  [1][2][3] e sine-Gordon [4], em duas dimensões; os vórtices do Modelo de Higgs Abeliano (MHA) com simetria axial [5][6] e os skyrmions do modelo  $\sigma$  não-linear  $O(3)$  [7][8], em três dimensões; e o monopolo magnético de t'Hooft-Polyakov [3][9], em teorias de Yang-Mills a quatro dimensões.

O interesse físico nos sólitons em modelos em  $(2 + 1)$ -dimensões, encontra-se relacionado, sobretudo, à aplicação da teoria de campos à matéria condensada. De fato, algumas propriedades da supercondutividade no plano são descritas pelo modelo de Landau-Ginzburg [10], que nada mais é do que o limite não-relativístico do MHA. O modelo  $\sigma$  não linear descreve o antiferromagneto de Heisenberg, no limite contínuo [11].

Contudo, é em quatro dimensões que os modelos de sólitons encontram maior realização, cobrindo uma vasta gama de fenômenos em diversas áreas da física. Em matéria condensada temos as bem conhecidas linhas de vórtices em supercondutores tipo II [12]

e, mais recentemente, a formação de defeitos, tipo corda, em transições de fase de cristais líquidos [13][14]. Em física de partículas elementares, nos modelos de grande unificação, descobriu-se que a presença de monopolos pode catalizar o processo de decaimento do próton (efeito Callan-Rubakov) [15][16][17]. Em cosmologia e astrofísica as chamadas cordas cósmicas poderiam ter sido formadas em transições de fase eletrofracas, no cenário da bariogênese [18][19][20][21][22], onde desempenhariam um papel central na explicação da assimetria do número bariônico.

Em 1976, Fröhlich [23] mostrou rigorosamente que em modelos de sólitons bidimensionais podem existir excitações no espaço de Hilbert que não são criadas pela aplicação de polinômios dos campos sobre o vácuo. Os estados quânticos associados aos sólitons se apresentariam como novos setores do espaço de Hilbert, selecionados pelo valor da sua carga topológica. Isto quer dizer que os sólitons quânticos são partículas novas, diferentes daquelas obtidas através da expansão perturbativa dos termos de interação envolvendo os campos fundamentais da Lagrangeana.

Durante a década de 70, foram desenvolvidas várias técnicas de quantização de sólitons, que em sua maioria residiam em generalizações do método de aproximação semi-clássico WKB [24]. Através delas, obtiveram-se resultados importantes em duas dimensões. No entanto, para uma parcela apreciável dos modelos em três ou mais dimensões, os cálculos tornaram-se extremamente complicados.

Diferentemente dos procedimentos acima mencionados, usaremos o *método de quantização dual*, que é uma generalização dos conceitos de dualidade ordem-desordem da Mecânica Estatística. De forma sucinta, o método consiste em caracterizar os operadores de criação de sólitons (ou operadores de desordem, ou duais) através de uma álgebra, dita dual, entre eles e os campos fundamentais da teoria. Esta álgebra, leva em conta as propriedades topológicas dos sólitons. Então, a partir de uma prescrição que preserva a localidade da função de correlação destes operadores de desordem, constrói-se, via integral funcional, uma representação explícita dos mesmos.

Tais idéias foram introduzidas com êxito, inicialmente, em teorias de campos bidimensionais para o modelo de Thirring, dentro do contexto da bosonização [26]. Como o modelo de Thirring massivo permite um mapeamento no modelo de sine-Gordon [25],

mostrou-se [26] que o campo fermiônico do primeiro pode ser escrito como um produto dos operadores de ordem e desordem do segundo. O método foi aplicado, ainda em duas dimensões, a modelos de campos escalares complexos com simetria  $Z(n)$  [27][28] e  $Z(4) \times O(n)$  [29] e depois estendido para sistemas bem conhecidos em dimensões superiores, como os vórtices do MHA em  $(2+1)$ -dimensões [30][31][32] e o monopolo de t'Hooft-Polyakov em  $(3+1)$ -dimensões [33].

Como na grande maioria das abordagens as cordas consideradas eram clássicas, buscou-se explorar os possíveis resultados provenientes da sua quantização. Em [34], foi construída a primeira expressão para um operador de criação de cordas, em termos dos campos do Lagrangeano da teoria. Um estudo subsequente destes operadores foi feito em [35]. Trabalhos relacionados apareceram formulados na rede [36][37] e no contínuo [38][39].

Visando a descrição de transições de fase é necessário introduzir temperatura. Em mecânica quântica, Feynman [40] se encarregou de apresentar uma maneira de levar em conta a temperatura em seu formalismo de quantização por integral de caminho, para uma partícula não-relativística em uma dimensão, desencadeando uma série de trabalhos posteriores. Somente mais tarde, a técnica foi aplicada no contexto de teoria quântica de campos relativística para modelos de campos escalares e teorias de gauge [41].

O objetivo central desta dissertação é determinar a influência da temperatura no comportamento de cordas quânticas. Para tal fim, juntamos estas duas técnicas independentes, a saber, a quantização dual de sólitons e a introdução de temperatura em teoria de campos, no tratamento do Modelo de Higgs Abeliano em  $(3+1)$ -dimensões. Este modelo foi escolhido porque é o mais simples daqueles que admitem cordas magnéticas como soluções clássicas estáveis, além de estar relacionado a várias situações físicas.

Especificamente, o trabalho resume-se na construção de um operador de criação de cordas fechadas e circulares que carregam fluxo magnético e o cálculo da função de correlação destes operadores à temperatura finita, na aproximação onde o valor absoluto do campo de Higgs é constante. Em seguida, efetuamos o limite a longas distâncias da função de correlação e obtemos a densidade de energia por unidade de comprimento da corda. Comparando este resultado com aquele obtido tomando-se o limite de temperatura zero, verificamos que a introdução de temperatura altera o sistema de forma fundamental,

impedindo a formação de cordas magnéticas.

A tese é organizada da seguinte forma:

No capítulo 1 fazemos uma revisão dos sólitons clássicos, começando pelo *kink* em duas dimensões. Discutimos as propriedades topológicas que são responsáveis pela estabilidade clássica dos sólitons. Introduzimos os vórtices em três dimensões e ampliamos a definição de sólitons para englobar as cordas, que são objetos estendidos em quatro dimensões. Por fim, expomos as idéias de dualidade em física estatística e depois as generalizamos para teoria quântica de campos em duas dimensões.

No capítulo 2 aplicamos o *método de quantização dual* na teoria de Maxwell livre em três e quatro dimensões. Então, extraímos um procedimento que pode ser generalizado para o MHA, obtendo-se os operadores de criação de vórtices e cordas. Caracterizamos o operador de desordem para cada caso, obtendo as suas regras de comutação com o fluxo magnético e o campo de gauge.

No capítulo 3 descrevemos a técnica de introdução de temperatura em teoria quântica de campos e discutimos os efeitos da temperatura sobre os sistemas físicos. Calculamos a função de correlação dos operadores de criação de cordas magnéticas circulares, à temperatura finita e no limite de temperatura zero.

O trabalho contém um apêndice onde abrimos diversos cálculos do capítulo 3.

# Capítulo 1

## Sólitons Clássicos e o método de quantização dual

Na primeira seção deste capítulo, definimos sólitons clássicos e discutimos a sua relação com topologia. Em subseções distintas, apresentamos os tipos e as características dos sólitons aos quais aplicaremos o método de quantização dual. Na segunda seção faremos inicialmente uma exposição sobre a origem do conceito de variáveis duais na Mecânica Estatística, a sua interpretação como variáveis de desordem e a sua associação com operadores de criação de sólitons. Na terceira seção, iremos generalizar este formalismo para Teoria Quântica de Campos em  $(1 + 1)$ -dimensões.

### 1.1 Sólitons clássicos

Equações diferenciais não lineares aparecem em quase todos modelos em Teoria Quântica de Campos (TQC) relativística. Embora, de um modo geral, elas sejam tratadas por teoria de perturbação, podem existir estados quânticos que não são obtidos por esses métodos. Neste sentido, nos últimos anos, procurou-se desenvolver técnicas para encontrar soluções clássicas não perturbativas destas equações. Para que as estas soluções estejam relacionadas com estados de partícula é necessário que tenham uma energia finita. Assim, as suas densidades de energia também devem ser finitas e cair a zero suficientemente rápido para serem integráveis. As soluções de equações de campo não-lineares que

satisfazem esta condição são denominadas de soluções localizadas ou sólitons.

Decorre imediatamente da definição que, quando  $x \rightarrow \pm\infty$  (infinito espaço-temporal) os campos devem assumir os valores de mínimo do potencial, para que as soluções sejam localizadas. Este fato se traduz em termos de condições de contorno impostas as equações de movimento. É óbvio que, se existe um único mínimo, o campo só pode convergir para ele. Caso contrário, ele poderá tender para mínimos diferentes e deve permanecer estacionário, isto é, não pode passar de um mínimo para o outro, pois para isto, precisaria de uma quantidade infinita de energia.

Então, dividimos o espaço de soluções em setores topologicamente isolados. Os campos de um setor são estáveis e não podem ser distorcidos continuamente nos campos de outro setor, sem violar o requerimento de energia finita. Ressaltamos que a divisão do espaço de soluções em setores topológicos desconectados, é em virtude destas soluções obedecerem a condições de contorno diferentes.

Naturalmente, a existência de soluções topologicamente estáveis está condicionada à degenerescência do vácuo, sendo comum relacionar sólitons com quebra espontânea de simetria.

A consequência mais importante dos modelos de sólitons é a conservação de uma carga, devido à topologia do espaço. Veremos nas seções seguintes, que pode-se construir à mão uma corrente, da qual origina-se uma carga topologicamente conservada. Cada setor distinto de soluções será caracterizado por um valor específico de carga topológica.

Diferentemente da carga topológica, as quantidades conservadas, tanto em Mecânica Clássica quanto em Teoria de Campos, são provenientes de simetrias do Lagrangeano sob a ação de grupos contínuos.

### 1.1.1 *Kinks*

Um dos sólitons mais conhecidos aparece no modelo de campos escalares reais  $\lambda\phi^4$  em  $(1+1)$ -dimensões. O seu Lagrangeano é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi),$$

sendo

$$V(\phi) = -\frac{1}{4}\lambda \left( \phi^2 - \frac{m^2}{\lambda} \right)^2,$$

onde  $\lambda$  e  $m$  são constantes com dimensão de massa.

O sistema é invariante frente a mudança  $\phi \rightarrow -\phi$  e o potencial tem dois mínimos degenerados em:

$$\phi = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}}.$$

Pode-se mostrar [24] que este modelo possui soluções clássicas localizadas, chamadas de *kinks*.

Podemos construir a seguinte corrente, identicamente conservada:

$$j^\mu = \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \right) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi,$$

onde  $\mu, \nu = 0, 1$  e  $\epsilon^{\mu\nu}$  é o tensor de Levi-Civita. Logo, a sua carga topológica é:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx = \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \right) [\phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)].$$

Se o campo tender para o mesmo mínimo, a solução é dita trivial, ou seja, a sua carga topológica é nula. Por outro lado, se os mínimos forem diferentes, o modelo terá dois setores de soluções com condições de contorno distintas, cujos valores da carga topológica são  $Q = 1$  e  $Q = -1$ .

### 1.1.2 Estabilidade Topológica

Matematicamente, a existência dos sólitons deve-se às condições de contorno. Estas condições são mapeamentos definidos como:

$$\Lambda : S^{físico} \rightarrow S^{interno},$$

onde  $S^{físico}$  é a fronteira do espaço físico e  $S^{interno}$  é o espaço interno dos campos do teoria.

Os mapeamentos se dividem em setores ou classes que não são continuamente de-



formáveis nas outras, mas mapeamentos de uma mesma classe são deformáveis entre si. Logo, as soluções que pertencem a classes distintas são topologicamente estáveis, visto que não podem evoluir umas nas outras. Estas classes são ditas classes de homotopia e formam o chamado grupo de homotopia. Para mapeamentos de  $S_n \rightarrow S_m$ , o grupo de homotopia é representado por  $\Pi_n(S_m)$ .

O mapeamento entre duas circunferências é do tipo  $S_1 \rightarrow S_1$ . Neste caso, se uma curva dá uma volta completa em  $S_1$ , ela não é continuamente deformável em uma curva que faz uma volta incompleta e estas duas curvas, por sua vez, também não são continuamente deformáveis em uma terceira que dê duas voltas, e assim por diante.

O número de voltas que cada curva realiza corresponde ao número inteiro que caracteriza a sua classe. Por causa deste fato, o grupo  $\Pi_1(S_1)$  é isomorfo ao conjunto dos inteiros. De um modo geral, todos os grupos da forma  $\Pi_n(S_n)$  são isomorfos aos inteiros. Quando o grupo de homotopia for nulo, só haverá uma classe de homotopia e nenhuma solução será estável, do ponto de vista da topologia.

Aparentemente, o conceito de classe de homotopia em Física pode significar apenas um capricho matemático. No entanto, ele permite determinar *a priori* se um dado sistema em  $(D + 1)$ -dimensões possuirá soluções estáveis. De fato, sabe-se que:

$$\begin{aligned} \Pi_n(S_n) &\equiv Z, \\ \Pi_n(S_m) &\equiv 0 \quad \text{para } n < m, \\ \Pi_n(S_1) &\equiv 0 \quad \text{para } n > 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde  $Z \equiv$  conjunto dos inteiros.

Então, através da verificação do grupo de homotopia, podemos determinar se um modelo possuirá sólitons, antes de calcular as suas soluções.

### 1.1.3 Vórtices

O Modelo de Higgs Abelian (MHA) em  $D$  dimensões espaciais e 1 temporal, é obtido efetuando-se o acoplamento mínimo do campo de gauge em um modelo de campos

escalares complexos. O seu Lagrangeano é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* + V(\phi^*,\phi),$$

com

$$V(\phi^*,\phi) = -\frac{\lambda}{4}\left[\phi\phi^* - \frac{2m^2}{\lambda}\right]^2,$$

onde  $\lambda$  e  $m$  são parâmetros do modelo. Note que o potencial é infinitamente degenerado.

Para terem energia finita, as soluções do tipo sólitons devem satisfazer no infinito as condições de contorno:

$$|\phi| \rightarrow \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}}, \quad (1.2)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ie\mathbf{A}_\mu\phi \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

A fase do campo complexo não é fixada por estas condições. A fase do campo  $\phi \equiv |\phi|e^{i\arg(x)}$  forma pontos sobre uma circunferência no infinito espacial  $S_1$ . Num espaço de  $D$  dimensões espaciais, a sua fronteira será uma esfera de dimensão  $(D-1)$ . Assim, as condições de contorno acima mapeiam essa esfera  $(D-1)$  em  $S_1$ . Da relação (1.1) da seção anterior, concluímos que para o MHA o grupo de homotopia só será não nulo quando  $D = 2$ .

De (1.2), (1.3) e (1.4), temos:

$$\phi \rightarrow \sqrt{\frac{2m^2}{\lambda}}e^{i\arg(x)}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \frac{i}{e}\frac{\partial_\mu\phi}{\phi}. \quad (1.6)$$

Inserindo (1.5) em (1.6), achamos:

$$A_0, A_r \rightarrow 0 \text{ e } A_\theta \rightarrow \frac{1}{er}\frac{d\arg(x)}{d\theta} \text{ para } r \rightarrow \infty.$$

Isto é,  $\mathbf{A}_\mu \rightarrow \partial_\mu\chi$  (gauge puro), no infinito.

O MHA é o análogo relativístico do modelo de Landau-Ginzburg, que descreve o comportamento de um supercondutor do tipo II, colocado sob ação de um campo magnético [5][10]. Ao contrário do supercondutor normal, são formadas no interior do material, linhas de fluxo magnético conhecidas como linhas de Abrikosov [12].

Assim, o MHA poderia simular uma configuração do tipo cordas em física de partículas. Motivados por esta idéia, em 1973, Nielsen e Olesen [6] estudaram o MHA em  $(3 + 1)$ -dimensões, com simetria axial, reduzindo o problema essencialmente, a um em duas dimensões espaciais. Experimentalmente, isto é equivalente a colocar o supercondutor entre os pólos de um ímã, cujo campo magnético esteja orientado ao longo do eixo  $z$ . As soluções clássicas encontradas por eles ficaram conhecidas como vórtices, e a sua corrente conservada topologicamente é facilmente construída:

$$j^\alpha = \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\alpha\mu\nu} \partial_\mu A_\nu.$$

A carga topológica é:

$$Q = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2x j^0 = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2x \epsilon^{0ij} \partial_i A_j.$$

Pelo teorema de Green,

$$Q = \Phi = \frac{e}{2\pi} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d \arg(x)}{d\theta} d\theta.$$

onde  $\Phi$  significa o fluxo magnético através do plano  $xy$ .

A fase  $\arg(x)$  representa o mapeamento do espaço físico  $S_1$  no espaço interno também  $S_1$ . O número de voltas que a fase dá em volta da circunferência no infinito espacial, divide as soluções em setores de fluxo magnético quantizado com valores:

$$\Phi = \frac{2\pi n}{e}.$$

### 1.1.4 Cordas magnéticas

Existem sistemas [42] que apresentam como soluções clássicas objetos estendidos, semelhantes a cordas. Estas cordas são defeitos provenientes de transições de fase, onde o parâmetro de ordem não assume o valor de equilíbrio em todos os locais [43]. Em muitos casos tais defeitos são estáveis por alguma razão topológica ou ainda outros motivos.

A formação de defeitos ocorre nas mais variadas áreas da física. Em matéria condensada, eles aparecem como linhas de fluxo magnético em materiais supercondutores do tipo II e como filamentos de vórtices em transições de fase no hélio líquido. Em cosmologia, uma série de fenômenos pode estar relacionada às denominadas cordas cósmicas. De acordo com a teoria do *Big Bang*, na primeira fração de segundo depois do seu nascimento, o universo sofreu várias transições de fase. As cordas cósmicas podem ter sido formadas nestas transições e sobrevivido até os dias de hoje, constituindo a única conexão direta com os eventos altamente energéticos do universo primitivo. Recentemente, após a descoberta de soluções de corda na teoria das interações eletrofracas [18][19], as cordas cósmicas têm ajudado na descrição da assimetria do número bariônico, no cenário da transição de fase eletrofraca [20][21][22].

Um modelo simples que apresenta cordas é o MHA em  $(3 + 1)$ -dimensões. Muito embora tenhamos visto, na seção anterior, que nesta dimensão o seu grupo de homotopia é trivial, aquele tratamento não se aplica aqui; já que a corda não precisa satisfazer as exigências de localidade e energia finita.

## 1.2 Dualidade no Modelo de Ising Bidimensional

O conceito estatístico de variáveis de ordem e desordem teve origem no modelo de Ising [44]. Foi também com base nas propriedades deste modelo, que foi desenvolvido o *método de quantização dual*.

O modelo de Ising em duas dimensões é um sistema de *spins* clássicos  $\sigma(n)$ , que podem assumir os valores  $\pm 1$ , colocados nos sítios (vértices) de uma rede quadrada (1-1). Os espaçamentos entre as malhas da rede são  $a_1$  e  $a_2$ , nas direções 1 e 2, respectivamente. Supomos que o sistema encontra-se em equilíbrio térmico e consideramos apenas

a interação entre os primeiros vizinhos.

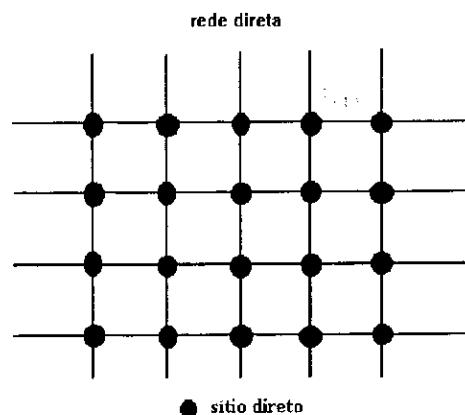


Figura 1-1:

A Ação<sup>1</sup> do sistema é [45]:

$$S = - \sum_{\vec{r}} [\beta_1 \sigma(\vec{r}) \sigma(\vec{r} + \hat{n}_1) + \beta_2 \sigma(\vec{r}) \sigma(\vec{r} + \hat{n}_2)].$$

onde  $\vec{r}$  denota os sítios,  $\hat{n}_1$  e  $\hat{n}_2$  são vetores unitários nas duas direções da rede e  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são suas respectivas constantes de acoplamento. O modelo é anisotrópico, pois  $\beta_1$  e  $\beta_2$  não são necessariamente iguais.

A função partição do sistema é [45]:

$$Z = \sum_{config.} e^{-S[\sigma(n)]}.$$

Este modelo apresenta uma transição de fase magnética. No espaço dos parâmetros  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  existe uma curva crítica que separa a fase ordenada (ferromagnética) da fase desordenada (paramagnética), dada por:

$$\sinh 2\beta_1 \sinh 2\beta_2 = 1. \tag{1.7}$$

---

<sup>1</sup>O que chamamos de Ação é na verdade a função energia da Mecânica Estatística Clássica

Graficamente (1-2),

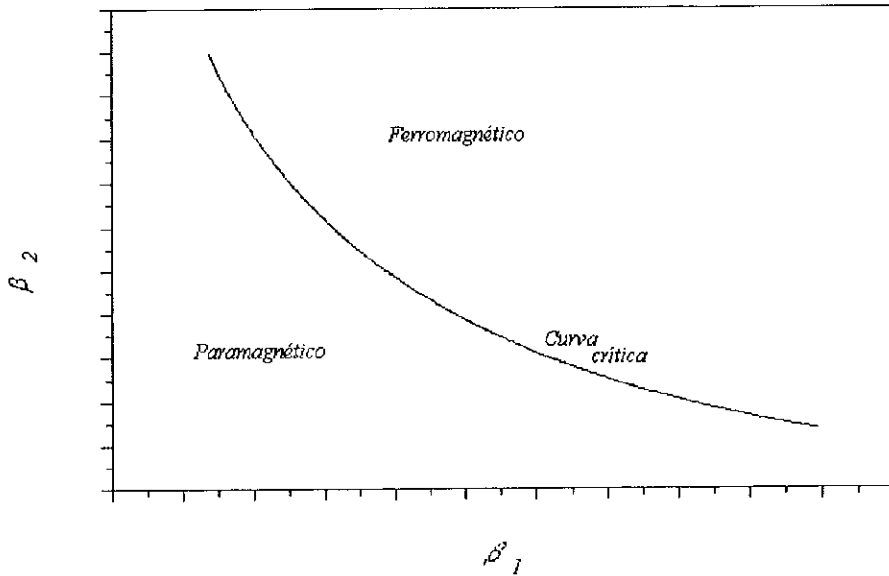


Figura 1-2:

Em 1941, Kramers e Wannier [44] construíram a hoje denominada transformação de dualidade, que consiste em reescrever um novo modelo de Ising, onde as novas variáveis estão ligadas a uma rede dual. A rede dual é definida como uma rede cujos sítios estão localizados nos centros dos quadrados da rede original (1-3).

A transformação de dualidade não se restringe ao modelo de Ising, podendo ser generalizada para praticamente qualquer sistema com simetrias Abelianas em dimensão arbitrária [46].

Identificando a direção do vetor unitário  $\hat{n}_1$  com o eixo  $z$  e de  $\hat{n}_2$  com o eixo do tempo Euclideano, vamos tomar o limite no qual a última direção é considerada contínua, enquanto a primeira permanece discreta. Neste limite, o modelo de Ising torna-se formalmente equivalente a um sistema quântico com um Hamiltoniano bem definido, que descreve a evolução temporal de uma cadeia unidimensional de *spins* interagindo. Esta passagem é mais facilmente efetuada usando o formalismo da matriz de transferência, que é definida como um operador no qual, atuando sobre os estados localizados ao longo de uma das linhas puramente espacial, produz estados ao longo de outra linha adjacente,

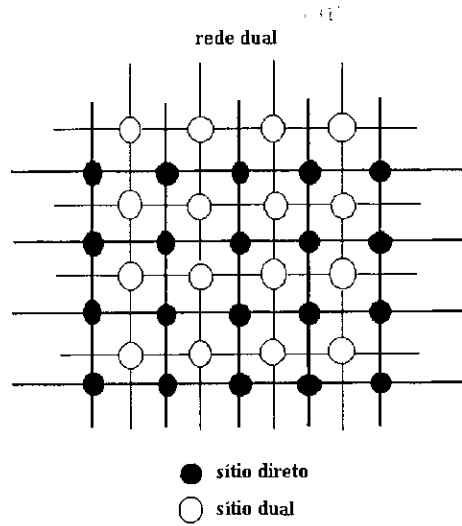


Figura 1-3:

ambas ortogonais ao eixo do tempo [45].

No entanto, para realizarmos este limite deve-se tomar cuidado para não alterar as propriedades do sistema. Vamos considerar o caso em que  $\beta_1 = \beta_2$  e  $a_1 = a_2$ . Tornar o eixo do tempo contínuo, significa fazer  $a_2 < a_1$  progressivamente. Porém, se for mantida a igualdade das constantes de acoplamento, a isotropia da rede será perdida. Assim, para obter um modelo invariante frente a contrações do eixo do tempo (invariância de escala), é preciso compensar  $a_2 < a_1$ , simultaneamente, com  $\beta_2 > \beta_1$ , de modo a restituir a simetria.

Em [45] mostra-se que, para tomar o tempo contínuo, mantendo-se a invariância de escala, a escolha adequada dos parâmetros é:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= e^{-2\beta_2}, \\
 \beta_2 &\rightarrow \infty, \\
 \beta_1 &= \lambda e^{-2\beta_2} = \lambda a_2,
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

onde  $\lambda$  irá desempenhar o papel de constante de acoplamento na direção  $\hat{z}$ .

Colocando-se a matriz de transferência na forma infinitesimal, o Hamiltoniano obtido

é [45]:

$$H = -\lambda \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1) - \sum_n \sigma_1(n), \quad (1.9)$$

onde  $\sigma_1(n)$  e  $\sigma_3(n)$  são as matrizes de Pauli. Este Hamiltoniano tem simetria  $\sigma_3 \rightarrow -\sigma_3$ , para qualquer  $n$ .

As variáveis  $\sigma$  tornam-se agora operadores que satisfazem as relações de comutação das matrizes de Pauli:

$$\begin{aligned} [\sigma_i(n), \sigma_j(m)] &= 0, \text{ para } n \neq m \\ \sigma_1^2 &= \mathbf{I} \text{ e } \sigma_3^2 = \mathbf{I}, \\ \sigma_3(n) \sigma_1(n) \sigma_3(n) &= -\sigma_1(n). \end{aligned}$$

A função partição é:

$$Z = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr } T^N,$$

onde  $N$  é o total de sítios na direção temporal.

O espaço de Hilbert deste modelo será tal que, em cada sítio  $n$ , possam existir dois autoestados de *spin* (*up* e *down*) do operador  $\sigma_3(n)$ .  $\sigma_1(n)$  funciona como um operador que troca o *spin* no sítio  $n$ .

Por argumentos de universalidade, tanto o modelo clássico quanto o quântico, têm os mesmos comportamento crítico e diagrama de fases. Então, fazendo  $\beta_2 \rightarrow \infty$  em (1.7), a curva crítica torna-se  $\beta_1 = e^{-2\beta_2}$ . Comparando com (1.8), vemos que o comportamento crítico da versão quântica é obtido para  $\lambda = 1$ . Temos, para  $\lambda > 1$ , a fase ordenada (ferromagnética) e  $\lambda < 1$  a fase desordenada (paramagnética). Este fato, justifica a identificação da constante de acoplamento  $\lambda$  com o inverso da temperatura.

A transformação de dualidade é um isomorfismo das variáveis originais nas variáveis duais que, em sua versão de operadores, correspondem a [45]:

$$\mu_1(n^*) = \sigma_3(n) \sigma_3(n+1),$$



$$\mu_3(n^*) = \prod_{m < n} \sigma_1(m).$$

onde representamos por  $n^*$  o sítio dual que fica entre os sítios  $n$  e  $n + 1$ .

O operador  $\mu_1(n^*)$  mede se os *spins* de dois vizinhos estão ou não alinhados e  $\mu_3(n^*)$  troca todos os *spins* à esquerda do sítio  $n$ . Naturalmente, os operadores  $\mu$  satisfazem as mesmas relações de comutação acima.

Em termos dos  $\mu$ 's, (3.5) torna-se:

$$\begin{aligned} H &= - \sum_n \mu_3(n^*) \mu_3(n^* + 1) - \lambda \sum_n \mu_1(n^*) \\ &= \lambda \left[ - \sum_n \mu_1(n^*) - \frac{1}{\lambda} \sum_n \mu_3(n^*) \mu_3(n^* + 1) \right]. \end{aligned}$$

A forma funcional do Hamiltoniano, tanto em termos dos  $\sigma$ 's quanto dos  $\mu$ 's, é igual. A única diferença é a substituição de  $\lambda \rightarrow 1/\lambda$  dentro dos colchetes, isto é:

$$H(\sigma, \lambda) = \lambda H(\mu, \lambda^{-1}).$$

Esta propriedade, chamada de *auto-dualidade*, é um resultado muito importante pois permite, entre os respectivos autovalores dos Hamiltonianos, o seguinte mapeamento:

$$E(\lambda) = \lambda E(\lambda^{-1}).$$

### 1.2.1 Variáveis de ordem-desordem

Através do estudo das duas fases do modelo de Ising, obtém-se uma interpretação física interessante de suas variáveis diretas e duais.

#### Fase com $\lambda > 1$ (baixa temperatura)

No caso particular de  $\lambda \gg 1$ , o Hamiltoniano reduz-se a:

$$H = -\lambda \sum_n \sigma_3(n) \sigma_3(n+1).$$

O vácuo corresponde a um estado com todos *spins up* ou *down*, sendo portanto, duplamente degenerado. O sistema possui uma magnetização espontânea e está totalmente ordenado. Vamos escolher como condição de contorno as extremidades com *spin up*. Automaticamente selecionamos um dos vácuos, provocando quebra espontânea de simetria.

Definimos a magnetização como o valor esperado no vácuo do operador  $\sigma_3(n)$ :

$$\langle \sigma_3(n) \rangle_\lambda = \langle 0 | \sigma_3(n) | 0 \rangle_\lambda,$$

onde  $|0\rangle_\lambda$  é o estado fundamental para um determinado  $\lambda$ .

Já que  $|0\rangle_\infty$  é um autoestado de  $\sigma_3(n)$ , então  $\langle \sigma_3(n) \rangle_\infty = 1$ . Usando teoria de perturbação, podemos calcular a magnetização para um  $\lambda > 1$  genérico, obtendo [45]:

$$0 < \langle \sigma_3(n) \rangle_\lambda \leq 1.$$

Consideremos, agora, o valor esperado no vácuo do operador dual  $\mu_3(n^*)$ :

$$\langle \mu_3(n^*) \rangle_\lambda = \left\langle \prod_{m < n} \sigma_1(m) \right\rangle_\lambda.$$

O operador  $\mu_3(n^*)$  gira todos os *spins* à esquerda do sítio  $n$ , logo aplicando-o sobre qualquer estado magnetizado, ele cria um estado não magnetizado, pois a rede é infinita. Este estado é, obviamente, ortogonal ao anterior, de modo que a baixas temperaturas  $\langle \mu_3(n^*) \rangle_\lambda = 0$ .

### Fase com $\lambda < 1$ (alta temperatura)

No caso particular de  $\lambda \ll 1$ , o Hamiltoniano torna-se:

$$H = - \sum_n \sigma_1(n).$$

O vácuo é, agora, o estado onde todos os autovalores de  $\sigma_1(n)$  são iguais a 1, ou seja:

$$\sigma_1(n) |0\rangle_0 = |0\rangle_0,$$

onde  $|0\rangle_0$  é o autoestado de  $\sigma_1(n)$ .

Devido à álgebra das matrizes de Pauli,  $\langle\sigma_3(n)\rangle = 0$ . Como nesta fase o vácuo não é degenerado, para qualquer  $\lambda < 1$ , a magnetização é nula, isto é,  $\langle\sigma_3(n)\rangle_\lambda = 0$ . Ao contrário, como  $|0\rangle_0$  é autoestado de  $\sigma_1(n)$ ,  $\langle 0|\mu_3(n^*)|0\rangle_0 = 1$ .

Finalmente, para  $\lambda < 1$ , consegue-se, através de teoria de perturbação, que [45]:

$$0 < \langle\mu_3(n^*)\rangle_\lambda \leq 1.$$

Na situação específica de  $\lambda = 0$  (temperatura infinita), mostra-se que o sistema fica completamente desordenado.

Sintetizando os resultados descritos acima, encontramos que:

Altas temperaturas ( $\lambda \ll 1$ )

$$\langle\sigma_3(n)\rangle = 0,$$

$$\langle\mu_3(n^*)\rangle = 1.$$

Baixas temperaturas ( $\lambda \gg 1$ )

$$\langle\sigma_3(n)\rangle = 1,$$

$$\langle\mu_3(n^*)\rangle = 0.$$

Observe que, quando  $\lambda \rightarrow \infty$  (temperatura zero), situação na qual o sistema está completamente ordenado,  $\langle\sigma(n)\rangle$  é um e  $\langle\mu(n^*)\rangle$  é nulo. A partir daí, ao aumentarmos progressivamente a temperatura (o que significa que o sistema vai se desorganizando cada vez mais) a magnetização  $\langle\sigma(n)\rangle$  vai diminuindo até se anular. Simultaneamente o valor de  $\langle\mu(n^*)\rangle$  vai aumentando até chegar ao seu valor máximo igual a um. Este comportamento nos induz a interpretar  $\sigma$ 's como variáveis de ordem e os  $\mu$ 's como variáveis de

desordem do sistema.

### 1.2.2 Operadores de criação de *kinks*

Uma reinterpretação muito interessante pode ser dada para a variável de desordem: Consideremos o estado fundamental do modelo na fase de baixa temperatura ( $\lambda > 1$ ), com as condições de contorno já apresentadas. O operador  $\mu(n^*)$  agindo sobre o estado de vácuo, cria uma configuração com um número (semi)-infinito de *spins* invertidos à esquerda do sítio  $n + 1$ , da rede direta (1-4). Chamemos esta configuração de *kink*. O *kink* é estável, isto é, não decai no estado de vácuo, pois para trocar o *spin* de uma cadeia (semi)-infinita é preciso uma quantidade de energia também (semi)-infinita. Matematicamente, a estabilidade é oriunda do fato de as condições de contorno espaciais do *kink* e do vácuo serem diferentes, por este motivo o *kink* constitui uma excitação topológica. Assim,  $\mu(n^*)$  pode ser interpretado como um operador de criação de sólitons no modelo de Ising.

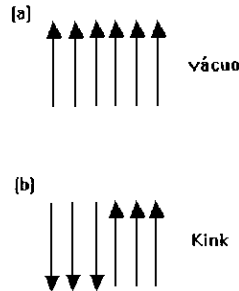


Figura 1-4:

Como estes sólitons se comportarão ao variarmos a temperatura? Quando  $\lambda \rightarrow \infty$  (temperatura zero), o sistema encontra-se totalmente ordenado e não existe nenhum *kink*. Se diminuirmos o valor de  $\lambda$  (aumentarmos a temperatura), mas ainda mantendo  $\lambda$  grande, um pequeno número de *spins* serão invertidos. Contudo, um único *spin* invertido é equivalente a um par de *kink-antikink* em dois sítios duais vizinhos (1-5). Então, podemos dizer, que dentro da fase ordenada, ao aumentarmos a temperatura, criamos

pares *kink-antikink*. Observe que *kinks* isolados não podem existir na fase ordenada pois violariam as condições de contorno de termos nos extremos *spins up*.

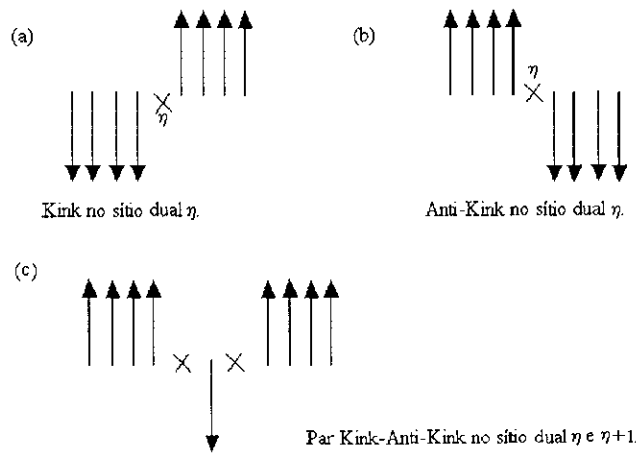


Figura 1-5:

Para valores de  $\lambda$  baixos, mas ainda maiores que 1, existirão blocos de *spins* invertidos que são equivalentes a pares *kink-antikink* com um determinado tamanho. Note que ao diminuirmos  $\lambda$ , a distância entre os pares será cada vez menor do que o tamanho do par, de modo que quando  $\lambda$  aproxima-se do valor crítico 1, a distância intra-pares torna-se comparável ao tamanho do par (1-6) e (1-7). Assim, a transição de uma fase ordenada para outra desordenada pode ser entendida como um processo de condensação de *kinks*.

Em 1971 Kadanoff e Ceva [47] criaram uma prescrição para obter a função de correlação ou função de Green de dois pontos dos operadores de desordem e identificaram a álgebra entre os operadores de ordem e de desordem.

No modelo de Ising bidimensional clássico, eles definiram a ação da variável de desordem, no ponto  $n^*$  da rede dual, como o tendo o efeito de trocar o sinal da constante de acoplamento na direção transversa ao caminho que liga dois sítios duais. Na situação específica do caminho ser uma linha reta indo do ponto  $n^*$  ao infinito, no sentido contrário ao do vetor unitário  $\hat{n}_1$ , troca-se o sinal da constante de acoplamento  $\beta_2$ . Na versão quântica do modelo, este procedimento é análogo a inversão dos *spins* à esquerda de  $n^*$ .

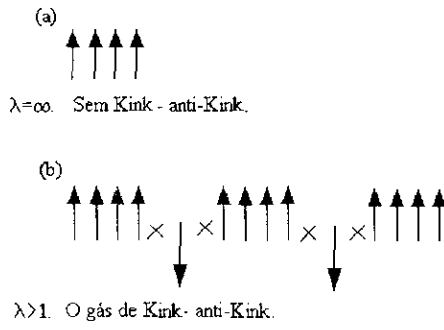


Figura 1-6:

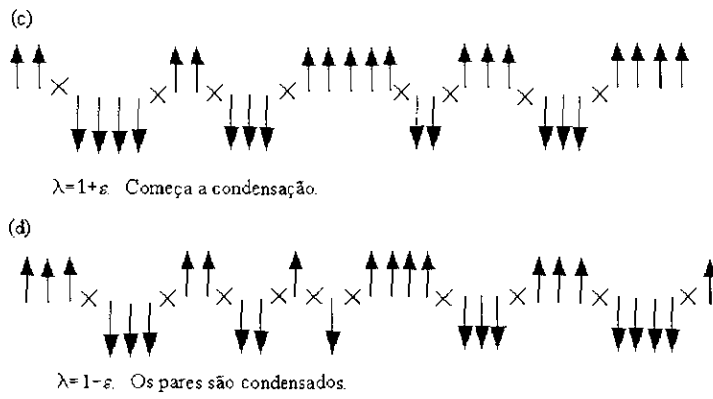


Figura 1-7:

A função de correlação entre as variáveis de desordem foi definida pela razão [47]:

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle = \frac{Z^-}{Z}$$

onde  $Z^-$  é a função partição modificada, trocando o sinal da constante de acoplamento  $\beta_2$  ao longo das curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , que vão, respectivamente, dos sítios  $n_1^*$  e  $n_2^*$  até infinito negativo (1-8).

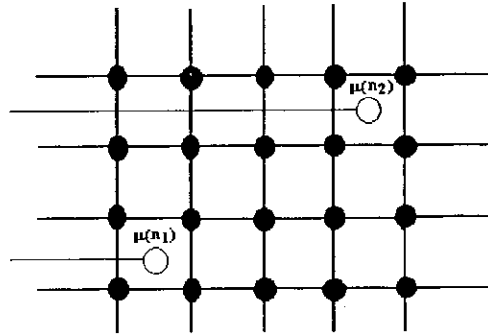


Figura 1-8:

Agora, ligamos  $n_1^*$  e  $n_2^*$  por um caminho  $C$  e efetuamos a operação de simetria  $\sigma \rightarrow -\sigma$  dentro da região  $R$  delimitada por  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $C$ . Visto que as constantes de acoplamento aparecem no somatório na forma  $\beta\sigma(n)\sigma(n+1)$ , o efeito da troca de sinal destas variáveis dentro do somatório é trocar o sinal das constantes de acoplamento dos sítios que conectam a região contornada com o restante da rede. Portanto, nos sítios ao longo de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , tudo volta ao normal e o resultado total é que as constantes de acoplamento têm o sinal trocado ao longo da curva  $C$ . Logo,

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle_C = \frac{1}{Z} \sum_{config} e^{-S_C|\sigma(n)|}, \quad (1.10)$$

onde  $S_C$  é a ação modificada, trocando os sinais das constantes de acoplamento nas direções transversais ao longo da curva  $C$  (1-9). Se ligarmos os sítios  $n_1^*$  e  $n_2^*$  por uma outra curva  $C'$  e aplicarmos a simetria dentro da região  $S$  fechada por  $C$  e  $C'$ , concluiremos pelo

mesmo raciocínio, que a função de correlação será independente do caminho escolhido.

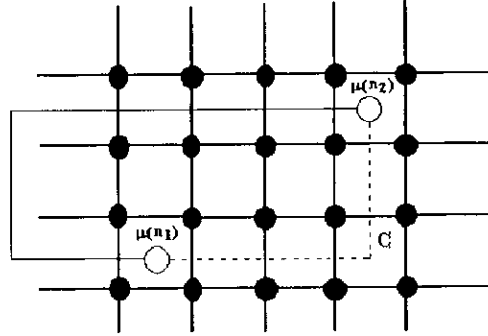


Figura 1-9:

No caso particular de uma rede isotrópica  $\beta = \beta_1 = \beta_2$ , podemos escrever (1.10) de outra forma:

$$\langle \mu(n_1^*) \mu(n_2^*) \rangle_C = \frac{1}{Z} \sum_{config} e^{-S(\sigma(n))} e^{2S_C(\sigma(n))} \quad (1.11)$$

Traduzindo em palavras, numa rede isotrópica, a função de correlação das variáveis de desordem são calculadas multiplicando a função partição por um termo exponencial, cujo argumento é a ação deformada ao longo do caminho  $\mathcal{C}$ .

Do mesmo modo podemos escrever uma expressão para a função de correlação mista, envolvendo produtos das variáveis de ordem e de desordem [47]:

$$\langle \sigma(n_1) \mu(m_1^*) \sigma(n_2) \mu(m_2^*) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{config} e^{-S_C(\sigma(n))} \sigma(n_1) \sigma(n_2),$$

onde  $\mathcal{C}$  é uma curva conectando os pontos  $m_1^*$  e  $m_2^*$  da rede dual.

A função de correlação mista é independente do caminho, a menos de um sinal. Cada vez que a curva passa sobre os pontos  $n_1$  e  $n_2$ , esta função de correlação troca de sinal, pois  $\sigma(n_1)$  e  $\sigma(n_2)$  não são variáveis mudas.

Enquanto operadores, as variáveis de ordem e desordem devem obedecer uma álgebra,



dita dual. No caso do modelo de Ising, temos que [47]:

$$\mu_3(n^*) \sigma_3(m) = \begin{cases} -\sigma_3(m) \mu_3(n^*) & \text{para } n^* > m \\ \sigma_3(m) \mu_3(n^*) & \text{para } n^* < m \end{cases}. \quad (1.12)$$

Esta álgebra se manifesta na função de correlação mista fazendo com que a invariância de caminho só exista a menos de um sinal.

### 1.3 Generalização do método para TQC em $(1 + 1)$ -d

Deve-se a Swieca e Marino [27], a extensão do método para TQC bidimensional. A sua posterior generalização para teorias em dimensões superiores, foi realizada por Marino em inúmeros trabalhos, cujas referências serão encontradas, dentro de seus contextos, no decorrer de toda tese.

Uma técnica usada em teorias de campo consiste na discretização do espaço-tempo. Isto apresenta a vantagem de transformar o problema em um com graus de liberdade enumeráveis, além de dispensar a necessidade de renormalização dos parâmetros físicos, pois a rede fornece um corte natural que elimina as divergências.

A formulação na rede de um modelo de campos escalares complexos com simetria  $Z(2)$  em duas dimensões é equivalente ao modelo de Ising clássico. Logo, seguindo o raciocínio inverso, é natural especular que as propriedades e resultados obtidos no modelo de Ising possam ser reproduzidos a nível de teoria de campos. Sabemos que ambos os modelos possuem soluções clássicas estáveis e, para o modelo de Ising, conhecemos a expressão do operador de criação de *kinks*, mas como obter um operador de criação dos *kinks* do outro modelo?

Dos resultados de Kadanoff e Ceva [47] obtemos a resposta para esta pergunta. De acordo com (1.12), a álgebra dual depende apenas da simetria do sistema. A identificação desta álgebra é fundamental para caracterizar os operadores de desordem, pois através dela tiramos as suas relações de comutação a tempos iguais. Se supusermos, além disso, que a estrutura e a invariância de caminho da função de correlação das variáveis de desordem são propriedades gerais, generalizamos o formalismo de ordem-desordem para teoria

de campos impondo que os operadores de criação de excitações topológicas obedeam a seguinte prescrição:

1. Satisfazer a álgebra dual, ditada pela simetria do sistema.
2. A função de correlação manter a mesma estrutura.
3. A função de correlação ser independente de caminho.

Através da exigência deste três itens, ao final, conseguimos a expressão de um operador que verificamos *post hoc* tratar-se do operador de criação de *kinks*. Este novo procedimento de quantização de sólitons em teoria de campos é denominado *método da quantização dual* [48].

### 1.3.1 Modelo genérico de campos escalares com simetria $Z(n)$

Vamos começar aplicando o formalismo de ordem-desordem na descrição de *kinks* quânticos, em um espaço-tempo bidimensional com métrica de Minkowski, para teorias de campos escalares complexos, com Lagrangeanos do tipo:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - M^2 \phi^* \phi + V(\phi, \phi^*),$$

onde  $V(\phi, \phi^*)$  é um potencial genérico de interação com mais de um mínimo (vácuo degenerado).

Assumiremos que este modelo tem simetria discreta global  $Z(n)$ :  $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$ , com  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  e que possui sólitons como soluções clássicas.

Primeiramente introduziremos uma generalização da álgebra dual dos operadores de desordem do modelo de Ising [27]:

$$\mu(x) \phi(y) = \begin{cases} e^{i\alpha} \phi(y) \mu(x) & \text{para } y^0 > x^0 \\ \phi(y) \mu(x) & \text{para } y^0 < x^0 \end{cases} \quad (x-y)^2 < 0,$$

onde  $\mu(x)$  é o operador de criação de *kinks* no ponto espaço-temporal  $x$  e o campo  $\phi(y)$  é interpretado como o operador de ordem, análogo ao  $\sigma(n)$ .

Observe que, assim como no modelo de Ising, o operador de desordem aplica a operação de simetria na regra de comutação a todos os pontos  $y$  à direita de  $x$  e mantém os pontos à sua esquerda inalterados.

Por sua vez, pelo item 2, a expressão para a função de correlação para os operadores de criação de *kinks* deve ser uma generalização da 1.11. Então [27]:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c = \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \exp - \int d^2z \left\{ \mathcal{L} + \Psi^\mu \int_{x,C}^y \delta^2(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu + \mathcal{L}_C \right\}. \quad (1.13)$$

onde  $\epsilon_{\mu\nu}$  é o símbolo de Levi-Civita.

Nesta expressão,  $Z$  é o funcional gerador Euclideano, que é o análogo em teoria de campos da função partição. A integral no argumento da exponencial, se anula para os pontos fora da curva  $C$  e é unitário nos pontos sobre ela, representando uma extensão da delta de Dirac. Multiplicando esta integral,  $\Psi^\mu$  é um funcional dos campos que corresponde à deformação ao longo da curva  $C$  e  $\mathcal{L}_C$  é um contra-termo de renormalização.

O último passo é exigir a invariância de caminho. Para isto, escolhemos uma outra curva  $C'$  ligando os pontos  $x$  e  $y$  (1-10).

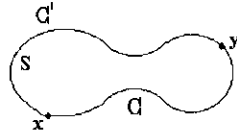


Figura 1-10:

Sabemos que:

$$\int_{x,C}^y \delta^2(x - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu = \int_{x,C'}^y \delta^2(x - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu + \oint_{\Gamma} \delta^2(x - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu,$$

onde  $\Gamma = C - C'$ .

Aplicando sobre função de correlação a operação de simetria dentro da região  $S$

delimitada pelas curvas  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$ , isto é:

$$\phi(z) \rightarrow e^{i\frac{2\pi}{n}\theta(S)}\phi(z), \quad (1.14)$$

onde  $\theta(S)$  é a generalização da função degrau em duas dimensões, os termos se transformam como:

$$\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* \rightarrow \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + i\frac{2\pi}{n}(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)\partial^\mu\theta(S) + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\phi^*\phi\partial_\mu\theta(S)\partial^\mu\theta(S), \quad (1.15)$$

$$\Psi^\mu \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu \rightarrow \Psi^\mu \left[ \int_{C'} + \oint_\Gamma \right] \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu + \delta\Psi^\mu \int_C \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu, \quad (1.16)$$

onde  $\delta\Psi^\mu$  é a variação funcional de  $\Psi^\mu$  em relação a transformação (1.14). Assumimos que  $V(\phi, \phi^*)$  e  $\mathcal{L}_C$  são invariantes frente a esta transformação.

O gradiente desta função degrau é:

$$\partial_\mu\theta(S) = \oint_{\Gamma=C-C'} \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu. \quad (1.17)$$

Substituindo (1.15), (1.16) e (1.17) em (1.13) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x)\mu^\dagger(y) \rangle_C &= \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \exp \left\{ - \int d^2z \left[ \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + M^2\phi^*\phi + V(\phi, \phi^*) \right. \right. \\ &\quad + \Psi^\mu \int_{x,C'}^y \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu + \Psi^\mu \oint_\Gamma \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu \\ &\quad + \delta\Psi^\mu \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\phi\phi^* \oint_\Gamma \oint_\Gamma \delta^2(z-\xi)\delta^2(z-\eta)d\xi^\mu d\eta_\mu \\ &\quad \left. \left. + i\frac{2\pi}{n}(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi) \oint_\Gamma \delta^2(z-\xi)\epsilon_{\mu\nu}d\xi^\nu + \mathcal{L}_C(\phi, \phi^*) \right] \right\}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Eliminando os termos que envolvem uma integral fechada, temos:

$$\Psi^\mu = -i\frac{2\pi}{n}(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi). \quad (1.19)$$

Substituindo (1.14), (1.17) em (1.19), encontramos:

$$\delta\Psi^\mu = -2 \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \phi\phi^* \oint_\Gamma \delta^2(z-\xi) \epsilon^{\mu\beta} d\xi_\beta. \quad (1.20)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \oint_\Gamma \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu &= \int_{x,C}^y \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu \\ &+ \int_{x,C'}^y \int_{x,C'}^y \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu, \end{aligned} \quad (1.21)$$

pois

$$\int_{x,C}^y \int_{x,C'}^y \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu = 0. \quad (1.22)$$

Colocando (1.19), (1.20), (1.21) e (1.22) em (1.18), concluímos que para a função de correlação ser independente de caminho, devemos escolher:

$$\mathcal{L}_C(\phi, \phi^*) = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \phi\phi^* \int_{x,C}^y \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu.$$

Portanto, a função de correlação Euclideana dos operadores de desordem é:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_C &= \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \exp - \left\{ \int d^2z \left[ \mathcal{L} - i \frac{2\pi}{n} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu \right. \right. \\ &\left. \left. + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \phi\phi^* \int_{x,C}^y \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi) \delta^2(z-\eta) d\xi^\mu d\eta_\mu \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

A expressão acima pode ser escrita de forma mais elegante se introduzirmos um campo vetorial externo do tipo Bohm-Aharonov, com suporte sobre a curva  $\mathcal{C}$

$$A_\mu(z, \mathcal{C}) = \int_{x,C}^y \delta^2(z-\xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu$$

e realizarmos uma espécie de acoplamento mínimo definindo a *derivada covariante*:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\alpha A_\mu.$$

Em termos de  $A_\mu$ , a função de correlação torna-se:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c = \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \exp \left\{ - \int d^2z \left[ (D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - M^2 \phi \phi^* + V(\phi, \phi^*) \right] \right\}.$$

Deste modo, a independência de caminho é uma conseqüência imediata da invariância de gauge sobre as transformações:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\alpha\theta(S)} \phi, \\ A_\mu(z, C) &\rightarrow A'_\mu(z, C') = A_\mu(z, C) + \partial_\mu \theta(S). \end{aligned}$$

Podemos conseguir uma representação explícita do operador de criação de *kinks* no espaço Euclideano. De (1.23):

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c = \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \exp \left\{ - \int d^2z \left[ \mathcal{L}_R - i \frac{2\pi}{n} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \times \right. \right. \\ \left. \left. \int_{x,C}^y \delta^2(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde  $\mathcal{L}_R \equiv$  Lagrangeano renormalizado.

Isto quer dizer que o valor esperado no vácuo da multiplicação de dois operadores de desordem é obtido acrescentando-se ao Lagrangeano, já com o contra-termo de renormalização, uma deformação. A análise da forma da deformação sugere-nos para o operador de desordem:

$$\mu(x; C_x) = \exp \left[ -i \frac{2\pi}{n} \int_{x,C_x}^\infty \epsilon_{\mu\nu} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) d\xi^\nu \right]. \quad (1.25)$$

De fato, utilizando a expressão acima, a função de correlação com a ação deformada fica:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x; C_x) \mu^\dagger(y; C_y) \rangle = \left\langle \exp \left[ -i \frac{2\pi}{n} \int_{x,C_x}^\infty \epsilon_{\mu\nu} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) d\xi^\nu \right] \times \right. \\ \left. \exp \left[ i \frac{2\pi}{n} \int_{y,C_y}^\infty \epsilon_{\mu\nu} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) d\xi^\nu \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Escolhemos as curvas  $C_x$  de maneira que comece no ponto  $x$ , passe pelo ponto  $y$  e

a partir daí coincida com  $C_y$  e chamamos de  $C$  o segmento de  $C_x$  que une os pontos  $x$  e  $y$ . Como os operadores têm sinais opostos, nos pontos onde  $C_x$  e  $C_y$  se superpõe, a deformação irá se anular e a única contribuição virá dos pontos que pertencem a curva  $C$ . Assim obtemos:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_L = \left\langle \exp \left[ -i \frac{2\pi}{n} \int_{x,C}^y \epsilon_{\mu\nu} (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) d\xi^\nu \right] \right\rangle,$$

que é exatamente a expressão (1.24).

A função de correlação mista é dada por:

$$\langle \mu(x_1) \phi(y_1) \mu^\dagger(x_2) \phi^\dagger(y_2) \rangle_C = \frac{1}{Z[0]} \int D\phi D\phi^* \phi(y_1) \phi^*(y_2) \left\{ \exp - \int d^2z [(D_\mu \phi) (D^\mu \phi)^* - M^2 \phi \phi^* + V(\phi, \phi^*)] \right\}.$$

Novamente, a independência de caminho existe, exceto por uma ambigüidade  $\exp \pm i\alpha$ , que é reflexo da manifestação da álgebra.

### Modelo de campo escalar com simetria $Z(4)$

A título de ilustração, vamos comentar a aplicação do *método de quantização dual* no caso particular de um modelo de  $N$  campos escalares complexos com termos de auto-interação quárticos, possuindo simetria  $Z(4)$  [29]. Este sistema é uma generalização do modelo  $\lambda\phi^4$  e as equações de campo possuem *kinks* como soluções clássicas estáveis. Mostra-se que este sistema apresenta três fases, cada uma delas associadas com diferentes comportamentos das funções de correlação dos operadores de criação de *kinks*:

- Fase simétrica: Os parâmetros são escolhidos de modo que o sistema tenha um único mínimo e portanto não exista quebra espontânea de simetria. Nesta fase,

$$\begin{cases} \langle \phi \rangle = 0 \\ \langle \mu \rangle \neq 0 \end{cases} \quad \langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} const.$$

O que significa que  $\mu$  não é um verdadeiro operador de criação de *kink*.

- Fase parcialmente quebrada: Os parâmetros são tais que a simetria  $Z(4)$  é quebrada em uma simetria  $Z(2)$ , mas o sistema continua com um mínimo apenas. Então,

$$\begin{cases} \langle \phi \rangle = 0 \\ \langle \mu \rangle = 0 \end{cases} \quad \langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{1}{|x-y|^\alpha}.$$

Nesta fase  $\mu$  cria *kinks* sem massa.

- Fase totalmente quebrada: Os parâmetros são relacionados de modo que existam infinitos mínimos degenerados discretos e a simetria  $Z(4)$  é espontaneamente quebrada. Neste caso,

$$\begin{cases} \langle \phi \rangle \neq 0 \\ \langle \mu \rangle = 0 \end{cases} \quad \langle \mu(x) \mu^*(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|^\alpha}.$$

Isto quer dizer que  $\mu$  cria *kinks* massivos.

Para este modelo, posteriormente foram calculadas as correções à temperatura finita do operador de desordem na fase quebrada [49].

A possibilidade de existência das três fases acima, apesar delas terem sido obtidas para um modelo particular, constitui um resultado mais geral. No caso de modelos bidimensionais com Lagrangeano de campos escalares do tipo  $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ , pode-se mostrar, baseado somente na álgebra dual, o seguinte resultado [50]:

**Teorema 1** *Seja  $\phi$  a variável de ordem e  $\mu$  a de desordem, então  $\langle \phi \rangle \langle \mu \rangle = 0$  e  $\langle \phi \mu \rangle = 0$ . Se  $\langle \phi \rangle = 0$  e  $\langle \mu \rangle = 0$  simultaneamente, então o gap de massa é nulo.*

Este teorema estabelece uma relação direta entre quebra espontânea de simetria e excitações topológicas. Realmente, se  $\langle \phi \rangle \neq 0$ , o que significa quebra espontânea de simetria, logo  $\langle \mu \rangle = 0$ , implicando que  $\mu$  agindo sobre o estado de vácuo cria um estado ortogonal ao mesmo, isto é,  $\mu$  é um verdadeiro operador de criação de estados topológicos. Por outro lado, se  $\langle \mu \rangle \neq 0$ , isto quer dizer que  $\mu |0\rangle \propto |0\rangle$ , ou seja,  $\mu$  agindo sobre o vácuo não cria um estado de partícula, então  $\langle \phi \rangle = 0$  e a simetria não pode ser quebrada.



Observe que, mesmo não existindo quebra espontânea de simetria ( $\langle\phi\rangle$  nulo), ainda assim podem existir sólitons ( $\langle\mu\rangle = 0$ ), mas eles terão massa nula.

## Capítulo 2

# Quantização Dual de vórtices e cordas

Com o intuito de generalizar do *método de quantização dual* para sistemas de dimensões superiores escolhemos o Modelo de Higgs Abelian (MHA), pois, como sabemos, este mesmo modelo apresenta vórtices e cordas como soluções clássicas estáveis em três e quatro dimensões, respectivamente. Na primeira seção deste capítulo, discutiremos mudanças que devem ser introduzidas na definição da álgebra dual quando aumentamos a dimensão do espaço. Na segunda seção, obteremos a função de correlação dos operadores de desordem para o modelo de Maxwell puro em três e quatro dimensões. Através das relações de comutação do fluxo magnético e o campo de gauge com o operador de desordem, iremos caracterizá-lo como um operador de criação de excitações topológicas. É claro que o eletromagnetismo livre não apresenta soluções topológicas, mas veremos que o procedimento empregado neste caso pode ser generalizado para o MHA. Na última seção, obteremos as expressões para as funções de correlação e mostraremos os resultados dos seus cálculos, para os casos de vórtices [32] e de cordas [35].

### 2.1 A modificação da álgebra

Nosso objetivo é construir os possíveis operadores de criação e aniquilação de vórtices e cordas quânticos, através da prescrição dos três itens citados no capítulo anterior. No

entanto, quando aumentamos o número de dimensões aparece, já de início, uma diferença fundamental em relação ao que acontece em duas dimensões: a álgebra dual é baseada na idéia de direita e esquerda de um ponto, o que em mais dimensões não tem sentido. Para contornar este problema, construímos uma álgebra independente das posições espaciais dos operadores.

Tendo em mente esta alteração, definimos a álgebra dual para o MHA:

$$\mu(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t) = e^{i \arg(\vec{y} - \vec{x})} \phi(\vec{y}, t) \mu(\vec{x}, t) \text{ para } (x - y)^2 < 0,$$

e

$$\mu(\vec{x}, t) \mathbf{A}_i(\vec{y}, t) = \left[ \mathbf{A}_i(\vec{y}, t) - \frac{1}{e} \partial_i^{(y)} \arg(\vec{y} - \vec{x}) \right] \mu(\vec{x}, t) \text{ para } (x - y)^2 < 0. \quad (2.1)$$

O ponto  $\vec{x}$  é o ponto em relação ao qual o ângulo  $\arg(\vec{y} - \vec{x})$  é definido. Ele determina o centro do vórtice no plano  $xy$  ou a posição em que a corda corta um plano transversal à ela. Este ângulo é medido com respeito a uma direção arbitrária  $\hat{r}_0$  (2-1), que podemos escolher como a direção  $x^1$ , sem perda de generalidade. Como a distância entre os pontos  $(\vec{y}, t)$  e  $(\vec{x}, t)$  e entre  $(\vec{y}, t)$  são tipo espaço, as relações de comutação acima podem ser estendidas para tempos diferentes do seguinte modo: para  $t' > t$ , simplesmente mudamos  $(\vec{y}, t)$  por  $(\vec{y}', t')$  e para  $t' < t$ , impomos que os operadores, por motivos de causalidade, devem comutar, isto é,

$$\begin{aligned} [\mu(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}', t')] &= 0, \\ [\mu(\vec{x}, t), \mathbf{A}_i(\vec{y}', t')] &= 0. \end{aligned}$$

O campo magnético  $\partial_i^{(y)} \arg(\vec{y} - \vec{x})$  é o potencial da corda de Dirac e a escolha destas regras de comutação implica que a corda de Dirac vai do ponto  $(\vec{x}, x^3 = t)$  até  $(\vec{x}, +\infty)$ , ao longo do eixo temporal, o que expressa o fato de que a corda de Dirac não pode existir antes do vórtice ser criado.

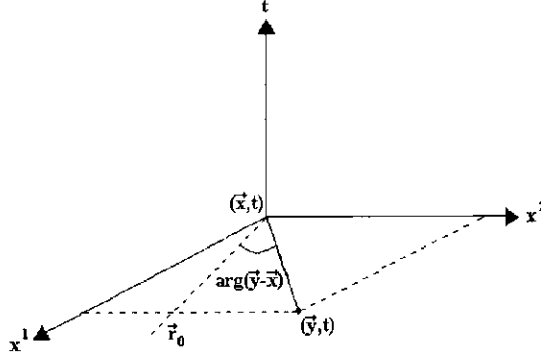


Figura 2-1:

## 2.2 O modelo de Maxwell

Nesta seção, aplicamos o *método de quantização dual* ao modelo de Maxwell livre em três e quatro dimensões. Primeiramente iremos obter a expressão para a função de correlação dos operadores de desordem para estes modelos e depois apresentaremos o cálculo dos comutadores que serve para caracterizar o operador de desordem como criador de estados topológicos. Naturalmente, ao final iremos verificar que os estados criados a partir do operador de desordem são proporcionais ao vácuo, logo não representam excitações topológicas genuínas. A validade deste procedimento reside no fato de que podemos estendê-lo para outras teorias de gauge, dentre as quais o MHA.

### 2.2.1 O modelo de Maxwell em três dimensões

A generalização da função de correlação dos operadores de desordem é:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c = \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp - \left\{ \int d^3z \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \Psi_\mu \int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu + \mathcal{L}_C \right] \right\}, \quad (2.2)$$

onde  $Z[0]$  é o funcional gerador no vácuo e  $\mathcal{C}$  é uma curva arbitrária conectando  $x$  e  $y$ . A deformação  $\Psi_\mu$  é um funcional do campo e  $\mathcal{L}_C$  é o contra termo de renormalização, ambos a serem determinados.

A última etapa da prescrição é obter  $\Psi_\mu$  e  $\mathcal{L}_C$  impondo a invariância de caminho em

(2.2). Novamente escolhemos uma outra curva  $C'$ , conectando os pontos  $x$  e  $y$ , tal que:

$$\int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu = \int_{x,C'}^y \delta^3(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu + \oint_{\Gamma} \delta^3(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu} d\xi^\nu.$$

onde  $\Gamma = C - C'$ .

Então, vamos efetuar sobre a função de correlação a seguinte mudança de variável na região  $S(C, C')$  delimitada pela curva  $\Gamma$  [32]:

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}_\mu + \Omega_\mu, \quad (2.3)$$

com

$$\Omega_\mu = \frac{2\pi}{e} \int_{S(C,C')} \delta^3(z - \xi) d^2\xi_\mu.$$

onde  $e$  é a constante de acoplamento do eletromagnetismo.

Sob esta mudança de variável,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu \Omega_\nu - \partial_\nu \Omega_\mu,$$

ou

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{e} \int_{S(C,C')} [\partial_\mu \delta^3(z - \xi) d^2\xi_\nu - \partial_\nu \delta^3(z - \xi) d^2\xi_\mu]. \quad (2.4)$$

e

$$\Psi_\mu \int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu \rightarrow \Psi_\mu \left[ \int_{C'} + \oint_{\Gamma} \right] \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu + \delta\Psi_\mu \int_C \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu, \quad (2.5)$$

onde  $\delta\Psi_\mu$  é a variação funcional de  $\Psi_\mu$  com respeito a mudança de variáveis (2.3). Assumimos que  $\mathcal{L}_C$  é invariante frente a esta mudança.

Usando o teorema de Gauss em (2.4):

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{e} \oint_{\Gamma} [\delta^3(z - \xi) \epsilon_{\mu\nu\alpha} d\xi^\alpha]. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.5) e (2.6) em (2.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c &= \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^3z \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \Psi_\mu \int_{x,C'}^y \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu \right. \right. \\
&\quad + \Psi_\mu \oint_\Gamma \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu + \delta\Psi_\mu \int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) d\xi^\mu \\
&\quad + \frac{\pi^2}{c^2} \oint_\Gamma \oint_\Gamma \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\mu\nu\beta} d\xi^\alpha d\eta^\beta \\
&\quad \left. \left. + \frac{\pi}{c} \oint_\Gamma \delta^3(z - \xi) F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha} d\xi^\alpha + \mathcal{L}_C \right] \right\}. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Eliminando os termos que envolvem uma integral fechada, temos:

$$\Psi_\mu = -\frac{\pi}{e} \epsilon_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta}. \tag{2.8}$$

Introduzindo (2.6) em (2.8), encontramos:

$$\delta\Psi_\mu = -\frac{2\pi^2}{e^2} \oint_\Gamma \delta^3(z - \xi) \epsilon_{\alpha\beta\mu} \epsilon_{\alpha\beta\nu} d\xi^\nu. \tag{2.9}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \oint_\Gamma \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) d\xi^\mu d\eta_\mu &= \int_{x,C}^y \int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) d\xi^\mu d\eta_\mu \\
&\quad + \int_{x,C'}^y \int_{x,C'}^y \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) d\xi^\mu d\eta_\mu, \tag{2.10}
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{x,C}^y \int_{x,C'}^y \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) d\xi^\mu d\eta_\mu = 0. \tag{2.11}$$

Colocando (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11) em (2.7), concluímos que para a função de correlação ser independente de caminho, devemos escolher:

$$\mathcal{L}_C = \frac{\pi^2}{e^2} \int_{x,C}^y \int_{x,C}^y \delta^3(z - \xi) \delta^3(z - \eta) \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\mu\nu\beta} d\xi^\alpha d\eta^\beta.$$

Portanto, a função de correlação Euclideana dos operadores de desordem é:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_{\mathcal{C}} = & \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp - \left\{ \int d^3z \left[ \mathcal{L} + \frac{\pi}{e} \int_{x,\mathcal{C}}^y \delta^2(z-\xi) \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\xi^\mu \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi^2}{e^2} \int_{x,\mathcal{C}}^y \int_{x,\mathcal{C}}^y \delta^3(z-\xi) \delta^3(z-\eta) \epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon_{\mu\nu\beta} d\xi^\alpha d\eta^\beta \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sejam duas curvas  $\mathcal{C}_x$  e  $\mathcal{C}_y$  de orientações contrárias, indo, respectivamente, do ponto  $x$  ao infinito e de infinito ao ponto  $y$ . Elas são escolhidas de modo a coincidirem, entre os pontos  $x$  e  $y$ , na curva  $\mathcal{C}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_{\mathcal{C}} = & \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp - \left\{ \int d^3z \left[ \mathcal{L}_R + \frac{\pi}{e} \int_{x,\mathcal{C}_x}^\infty \delta^2(z-\xi) \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\xi^\mu \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\pi}{e} \int_{y,\mathcal{C}_y}^\infty \delta^2(z-\xi) \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} d\xi^\mu \right] \right\}. \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{L}_R \equiv$  Lagrangeano renormalizado.

Identificamos a primeira integral com o operador de criação de vórtice no ponto  $x$  e a segunda integral com o operador de criação do anti-vórtice em  $y$ . Logo, no espaço de Minkowski,

$$\mu(x) = \exp \left\{ -\frac{\pi i}{e} \int_{x,\mathcal{C}_x}^\infty d\xi^\mu \epsilon_{\mu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right\}. \quad (2.13)$$

Da mesma maneira que em duas dimensões, a função de correlação pode ser escrita de forma mais compacta, se a deformação e o contra-termo de renormalização forem absorvidos definindo o campo externo:

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\mathcal{C}) = \tilde{B}_{\mu\nu}(\mathcal{C}_x) - \tilde{B}_{\mu\nu}(\mathcal{C}_y),$$

com

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(\mathcal{C}_\lambda) = \frac{2\pi}{e} \int_{\lambda,\mathcal{C}_\lambda}^\infty \delta^3(z-\xi) \epsilon_{\mu\nu\alpha} d\xi^\alpha, \quad (2.14)$$

onde  $\lambda = x, y$ . O sinal de  $\tilde{B}_{\alpha\beta}(\mathcal{C}_y)$  é trocado pois a orientação das curvas é contrária.

Assim, (2.12) torna-se-ia:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_c = \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^3z \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(C)) (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(C)) \right] \right\}. \quad (2.15)$$

A equação (2.6) é equivalente a:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(C') - \tilde{B}_{\mu\nu}(C).$$

Logo, em termos do campo externo  $\tilde{B}_{\mu\nu}(C)$ , a independência de caminho de  $\langle \mu\mu^\dagger \rangle$  é uma consequência trivial da invariância sob a transformação (2.3).

Em [32] foi calculada explicitamente a função de correlação (2.15), obtendo-se:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi e^2} \frac{1}{|x-y|} \right\}.$$

No limite a grandes distâncias,

$$\langle \mu\mu^\dagger \rangle = \langle 0 | \mu | \mu^\dagger 0 \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} 1.$$

A relação acima mostra claramente que  $\langle 0 | \mu \rangle = 1$ , logo os estados quânticos criados pelo operador de desordem são estados de vácuo, indicando que não existem excitações topológicas verdadeiras na teoria de Maxwell pura, como era de se esperar.

## Regras de comutação

Observe que podemos escrever o operador de criação de vórtices (2.13) como:

$$\mu \equiv e^A,$$

sendo

$$A = -\frac{2\pi i}{e} \int_{\vec{x}, C} d\xi^i \epsilon_{ij} \Pi^j(\xi, x^0), \quad (2.16)$$

onde  $\Pi^i$  é o momentum conjugado ao campo de gauge  $A_i$ .

Primeiramente, iremos calcular o comutador a tempos iguais do operador  $\mu(x)$  com



a carga topologicamente conservada.

Como sabemos no MHA em  $(2 + 1)$  dimensões (simetria axial) a carga topológica conservada, corresponde ao fluxo magnético ao longo do plano  $xy$ , sendo dada por:

$$Q \equiv \Phi = \int d^2z J^0 = \int d^2z \epsilon^{ij} \partial_i A_j.$$

Assim,

$$[\Phi, \mu(x)] = -\mu(x) \int d^2z [A(x), \epsilon^{ij} \partial_i A_j].$$

Em [32], mostra-se que:

$$[\Phi, \mu(x)] = \mu(x) \int d^2z \frac{2\pi}{e} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{2\pi}{e} \mu(x). \quad (2.17)$$

Logo, vemos que  $\mu$  cria estados carregando  $\frac{2\pi}{e}$  unidades de fluxo magnético (carga topológica).

A outra relação de comutação é aquela entre  $\mu$  e o campo de gauge. O seu resultado é [32]:

$$[\mu(\vec{x}, t), \mathbf{A}_i(\vec{y}, t)] = \frac{1}{e} \mu(x) \partial_i^{(y)} \arg(\vec{y} - \vec{x}). \quad (2.18)$$

Comparando (2.18) com (2.1), verificamos que são idênticas.

As relações (2.17) e (2.18) caracterizam  $\mu$  como um operador que cria configurações de vórtices.

## 2.2.2 O modelo de Maxwell em quatro dimensões

Quando partimos para o modelo de Maxwell em quatro dimensões, procuramos por sólitons do tipo cordas magnéticas. Ao contrário dos vórtices quânticos que são pontuais, as cordas são objetos estendidos. Por conseguinte, na prescrição para a sua função de correlação, a deformação só tem sentido se a supusermos sobre uma superfície arbitrária conectando as cordas.

Pela nossa experiência com o modelo de Maxwell em três dimensões, para obter a

expressão da função de correlação dos operadores de desordem, devemos simplesmente acoplar ao tensor  $F_{\mu\nu}$  um campo externo com a deformação apropriada. Então, generalizando (2.12) e (2.14), temos [35]:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_S = \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^4z \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(S)) (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(S)) \right] \right\}, \quad (2.19)$$

tal que

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(S) = \frac{2\pi}{e} \int_S d^2\xi_{\mu\nu} \delta^4(z - \xi), \quad (2.20)$$

onde  $S$  é uma superfície genérica cujos contornos são as cordas  $L_x$  e  $L_y$ , que cortam os pontos  $x$  e  $y$ , de um plano perpendicular ao seu caminho (2-2).

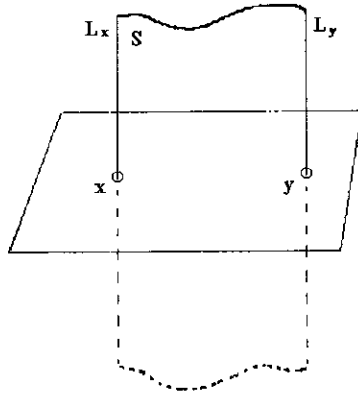


Figura 2-2:

Observe de (2.19), que os termos cruzados  $F_{\mu\nu} \tilde{B}_{\mu\nu}(S)$  correspondem a deformação da ação causada pelo operador de criação de cordas e o termo  $\tilde{B}_{\mu\nu}(S) \tilde{B}_{\mu\nu}(S)$  representa o contratermo de renormalização.

Para mostrar que a função de correlação não depende da superfície  $S(L)$ , vamos considerar uma outra superfície genérica  $S'(L)$ , também ligando as cordas  $L_x$  e  $L_y$ .

Então, vamos efetuar a seguinte transformação no campo de gauge:

$$\mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}_\mu + \Omega_\mu,$$

com

$$\Omega_\mu = \frac{2\pi}{e} \int_{V(S,S')} d^3\xi_\mu \delta^4(z - \xi),$$

onde  $V(S, S')$  é o volume limitado pelas superfícies  $S$  e  $S'$ . Sob esta mudança de variável,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu \Omega_\nu - \partial_\nu \Omega_\mu,$$

ou

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{e} \int_{V(S,S')} \left[ d^3\xi_\nu \partial_\mu \delta^4(z - \xi) - d^3\xi_\mu \partial_\nu \delta^4(z - \xi) \right].$$

Pelo teorema de Gauss,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \frac{2\pi}{e} \oint_{S'-S} d^2\xi_{\mu\nu} \delta^4(z - \xi),$$

isto é

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(S') - \tilde{B}_{\mu\nu}(S). \quad (2.21)$$

Colocando (2.21) em (2.19), estabelecemos a invariância de superfície de  $\langle \mu\mu^\dagger \rangle$ .

Considere agora, duas superfícies  $S_x$  e  $S_y$ , com orientações opostas e presas nas respectivas cordas  $L_x$  e  $L_y$ , como bandeiras em um mastro. Escolhendo-as, de modo a se superporem, entre as cordas  $L_x$  e  $L_y$ , formando a superfície  $S$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_S = \frac{1}{Z[0]} \int D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^4z \left[ \mathcal{L}_R + \frac{\pi}{e} \int_{S_x} \delta^4(z - \xi) F^{\mu\nu} d^2\xi_{\mu\nu} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi}{e} \int_{S_y} \delta^4(z - \xi) F^{\mu\nu} d^2\xi_{\mu\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\mathcal{L}_R \equiv$  Lagrangeano renormalizado.

Em (2.22), podemos identificar a primeira deformação como referente ao operador  $\mu$  de criação da corda no ponto  $x$  e a segunda deformação como o operador  $\mu^\dagger$  de criação

da anti-corda no ponto  $y$ . Assim, no espaço de Minkowski, temos:

$$\mu(x) = \exp -\frac{\pi i}{e} \int_{S_x} F^{\mu\nu} d^2 \xi_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

A expressão (2.22) é equivalente a (2.19), com um campo externo definido sobre a superfície  $S = S_x \cup S_y$ , onde  $S_y$  possui orientação contrária a  $S_x$ .

Calculando-se a função de correlação, mostra-se que o operador  $\mu$  não gera estados topológicos reais [35].

### Regras de comutação

Do mesmo modo que os vórtices, o operador de criação de cordas (2.23) pode ser escrito por:

$$\mu \equiv e^A,$$

sendo

$$A = -\frac{2\pi i}{e} \int_{S_x} d\xi_{i0}^2 \Pi^i(\xi, x^0), \quad (2.24)$$

onde  $\Pi^i$  é o momentum conjugado ao campo  $A_i$ .

Agora, em  $(3 + 1)$  dimensões a carga topológica conservada do MHA, é interpretada como o fluxo magnético ao longo de um plano transversal à corda.

O comutador entre o operador  $\mu$  e o fluxo magnético, obtido em [35] é:

$$[\Phi, \mu(x)] = \mu(x) \int d^2 z \frac{2\pi}{e} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) = \frac{2\pi}{e} \mu(x), \quad (2.25)$$

demonstrando que  $\mu$  gera cordas formadas por  $\frac{2\pi}{e}$  unidades de fluxo magnético.

Em [35] calcula-se o resultado da relação de comutação do  $\mu$  com o campo de gauge:

$$[\mu(\vec{x}, t), \mathbf{A}_i(\vec{y}, t)] = \frac{1}{e} \mu(x) \partial_i^{(y)} \arg(\vec{y} - \vec{x}). \quad (2.26)$$

Mais uma vez, verificamos que (2.18) e (2.1), são iguais.

Estas relações caracterizam  $\mu$  como um operador que cria cordas magnéticas quânticas.

## 2.3 O Modelo de Higgs Abeliano

De acordo com o capítulo 1, o MHA é definido por:

$$\mathcal{L}_{HA} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\phi D^\mu\phi^* + V(\phi, \phi^*), \quad (2.27)$$

Antes de construirmos o operador de criação de vórtices, será mais conveniente trabalharmos com a representação polar do campo de Higgs:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho e^{i\theta}. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.27),

$$\mathcal{L}_{HA} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}e^2\rho^2\left(\mathbf{A}_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\left(\mathbf{A}^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta\right) + V(\phi, \phi^*). \quad (2.29)$$

Nesta forma é simples verificar que a teoria tem invariância sob as transformações de gauge:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu &\rightarrow \mathbf{A}_\mu + \partial_\mu\Lambda, \\ \theta &\rightarrow \theta - e\Lambda. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Seguindo o procedimento adotado em [32][35], definimos um campo escalar invariante de gauge:

$$\begin{aligned} \chi &= \theta - e\frac{\partial_\alpha\mathbf{A}^\alpha}{(-\square)}, \\ D\chi &= D\theta. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Inserindo (2.31) em (2.29), obtemos a seguinte ação Euclideana:

$$S_{HA} = \int d^Dz \left\{ \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}e^2\rho^2 \left[ \frac{\partial_\alpha F^{\mu\alpha}}{(-\square)} + \frac{1}{e}\partial^\mu\chi \right]^2 + V(\rho) \right\}. \quad (2.32)$$

Agora todos os campos na ação são invariantes de gauge e o campo eletromagnético

aparece contido no tensor de Maxwell. Em [35] mostra-se que a ação pode ser reescrita como:

$$S_{HA} = \int d^D z \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \left[ 1 + \frac{e^2 \rho^2}{(-\square)} \right] F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V(\rho) \right. \\ \left. - e \partial_\mu \rho^2 \left[ \frac{\partial_\alpha F^{\mu\alpha}}{(-\square)} \right] \chi - \frac{e^2}{2} \partial_\beta \rho^2 \left[ \frac{\partial^\alpha F_{\mu\alpha}}{(-\square)} \frac{F^{\mu\beta}}{(-\square)} \right] \right\}.$$

De acordo com o que vimos na seção anterior, as funções de correlação dos operadores de criação de excitações topológicas, no modelo de Maxwell livre são obtidas adicionando-se um campo externo ao tensor  $F^{\mu\nu}$ . Podemos generalizar este procedimento para o MHA, pois escrevemos todo setor de gauge do Lagrangeano em termos deste tensor. Então [32][35],

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int D\rho D\chi D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^D z \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}) \left[ 1 + \frac{e^2 \rho^2}{(-\square)} \right] (F^{\mu\nu} + \tilde{B}^{\mu\nu}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \rho^2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V(\rho) + \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho \right. \right. \\ \left. \left. + e \partial_\mu \rho^2 \left[ \frac{\partial_\alpha (F^{\mu\alpha} + \tilde{B}^{\mu\alpha})}{(-\square)} \right] \chi - \frac{e^2}{2} \partial_\beta \rho^2 \left[ \frac{\partial^\alpha (F_{\mu\alpha} + \tilde{B}_{\mu\alpha}) (F^{\mu\beta} + \tilde{B}^{\mu\beta})}{(-\square)} \right] \right] \right\}. \quad (2.33)$$

A (2.33) é uma expressão geral para o MHA. Portanto, se quisermos a função de correlação dos operadores de criação de vórtices ou cordas, basta escolhermos o campo externo  $\tilde{B}_{\mu\nu}$  do modelo de Maxwell em três ou quatro dimensões, respectivamente.

Se trabalharmos na aproximação onde o campo de Higgs  $\rho$  é constante, os três últimos termos em (2.33) se anulariam e a função de correlação geral para o MHA assumiria a forma mais simples:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int D\rho D\chi D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^D z \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}) \left[ 1 + \frac{e^2 \rho^2}{(-\square)} \right] (F^{\mu\nu} + \tilde{B}^{\mu\nu}) \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \rho^2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V(\rho) \right\}. \quad (2.34)$$

Nesta aproximação, constatamos que a estrutura do operador de desordem para o MHA é a mesma do modelo de Maxwell, isto é, a relação  $\mu = \exp A$  permanece válida, sendo  $A$  dado por (2.16), para operador de criação de vórtices e (2.24), para o operador de criação de cordas. Note que, a única diferença em relação ao modelo de Maxwell, é forma do operador de momentum, que fica modificada.

Portanto, as relações de comutação descritas na seção anterior e que caracterizam  $\mu$  enquanto operador de construção de sólitons quânticos, são mantidas tanto para o vórtice quanto para a corda.

### 2.3.1 Vórtices quânticos

Na fase com quebra espontânea de simetria,

$$\langle \rho \rangle \equiv \rho_0 = \frac{4\pi}{\lambda} |g|^2,$$

e o campo de gauge adquire uma massa  $M = e\rho_0$ , depois que a translação  $\rho \rightarrow \rho + \rho_0$  é executada.

A função de correlação dos operadores de criação de vórtices é obtida colocando (2.14) em (2.33). Na aproximação onde o campo de Higgs é constante, foi feito o cálculo explícito da função de correlação, até primeira ordem da expansão em *loops*, obtendo-se [32]:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle \exp \left\{ -\mathcal{M} |x - y| + \frac{1}{4\pi e^2} \frac{1}{|x - y|} \right\}, \quad (2.35)$$

onde

$$\mathcal{M} = \frac{M^2}{8\pi e^2} = \frac{\rho_0^2}{8\pi},$$

é a massa do vórtice quântico na ordem de expansão trabalhada.

De (2.35), extraímos o limite assintótico:

$$\langle \mu \mu^\dagger \rangle_{|x-y| \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Assim, concluímos que o operador  $\mu$  realmente cria estados de vórtices ortogonais ao vácuo.

Na fase simétrica,  $\rho_0 \rightarrow 0$  e a massa  $\mathcal{M}$  do vórtice se anula, restando somente o último termo em (2.35). Conseqüentemente, a função de correlação tem o mesmo comportamento à longas distâncias, do modelo de Maxwell livre. Isto indica que não ocorrem excitações topológicas legítimas nesta fase, o que já era esperado.

### 2.3.2 Cordas quânticas

Analogamente, a função de correlação dos operadores de criação de vórtices é obtida substituindo (2.20) em (2.33). Vamos considerar, inicialmente, a fase quebrada. Os parâmetros envolvidos serão os mesmos da seção anterior.

Em [35] realizou-se o cálculo da função de correlação de duas cordas retas de comprimento  $L$ , na aproximação  $\rho = \rho_0$ . O resultado encontrado foi:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle \exp \left\{ -\frac{\pi M^2 L}{2e^2} |x-y| + \frac{\pi L}{2e^2} \frac{1}{|x-y|} \right\}. \quad (2.36)$$

Do comportamento assintótico da função de correlação, inferimos que o operador produz estados quânticos de corda verdadeiros e obtemos a densidade de energia da corda por unidade de comprimento:

$$\mathcal{M} = \frac{\pi M^2}{2e^2} = \frac{\pi \rho_0^2}{2}.$$

Na fase simétrica,  $\rho_0 = 0$  implicando que  $\mathcal{M} = 0$ . Apenas o segundo termo contribui em (2.19) e novamente não se formam excitações genuínas.



# Capítulo 3

## Quantização dual de cordas a temperatura finita

Neste capítulo, encontra-se o trabalho de tese propriamente dito. Começamos na primeira seção, com uma sucinta descrição da técnica de introdução de temperatura em Teoria Quântica de Campos. Na segunda seção, aplicamos o *método de quantização dual* no cálculo da função de correlação dos operadores de criação de cordas magnéticas circulares à temperatura finita. De posse deste resultado, estudamos o limite de temperatura zero, bem como diversos limites relacionados com o tamanho da corda. Discutimos a influência dos parâmetros envolvidos no resultado, a saber, o raio da corda e a temperatura, na formação de estados de corda genuínos.

### 3.1 Introdução de Temperatura em Teoria Quântica de Campos

A dedução do formalismo funcional de temperatura finita é apresentado aqui de forma heurística, com ênfase apenas nos aspectos fundamentais. Apesar de não entrarmos em detalhes ou dificuldades das teorias com campo de gauge, cumpre-se a finalidade de ilustrar o método.

Sabemos da Mecânica Estatística, que o comportamento de um sistema de partículas

em equilíbrio térmico é descrito pela sua função partição, que é obtida através do Hamiltoniano do sistema. A introdução de temperatura em TQC consiste em efetuar uma mudança de variável na coordenada temporal da ação e substituir a densidade de Hamiltoniano dos campos na fórmula da função partição. Por fim, identifica-se a última com o funcional gerador das funções de Green de  $n$ -pontos.

Vamos exemplificar este procedimento para um sistema bosônico. Considere uma teoria quântica de campos descrita por uma densidade de Hamiltoniano  $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$ , onde  $\varphi(\vec{x}, t)$  é o operador de campo escalar na representação de Heisenberg e  $\pi(\vec{x}, t)$  é o seu momentum canonicamente conjugado. Logo,  $\varphi(\vec{x}, 0)$  é o operador de campo na representação de Schroedinger. Sejam  $|\varphi_0\rangle$  e  $|\varphi_1\rangle$  autoestados de  $\varphi(\vec{x}, 0)$  com autovalores  $\varphi_0(\vec{x})$  e  $\varphi_1(\vec{x})$ . Então,

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}, 0)|\varphi_0\rangle &= \varphi_0(\vec{x})|\varphi_0\rangle, \\ \varphi(\vec{x}, 0)|\varphi_1\rangle &= \varphi_1(\vec{x})|\varphi_1\rangle.\end{aligned}$$

Então, a amplitude de transição de  $|\varphi_0\rangle$  em  $t = 0$  para  $|\varphi_1\rangle$  em  $t = t_1$ , no formalismo de integral funcional, é:

$$\langle \varphi_1 | e^{-iHt_1} | \varphi_0 \rangle = N \int [d\varphi] [d\pi] \exp \left\{ i \int_0^{t_1} dt \int d^3x \left[ \pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right] \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $N$  é um fator de normalização e  $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . A integral sobre campos clássicos varre todas configurações possíveis com condições de contorno fixas em  $\varphi_0(\vec{x})$  para  $t = 0$  e  $\varphi_1(\vec{x})$  para  $t = t_1$ , ao passo que a integral sobre os momenta não tem restrição.

Neste estágio, podemos inserir a temperatura em (3.1), fazendo uma simples transformação [41]:

$$\begin{aligned}it &= \tau, \\ it_1 &= \beta,\end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $\beta$  é o inverso da temperatura.

Substituindo (3.2) em (3.1), temos a seguinte expressão para a amplitude, no espaço

Euclideano:

$$\langle \varphi_1 | e^{-iHt_1} | \varphi_0 \rangle = N \int [d\varphi] [d\pi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ i\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right] \right\}, \quad (3.3)$$

A função partição para bósons é:

$$Z = \text{Tr} \exp -\beta H = \int d\varphi_a \langle \varphi_a | e^{-\beta H} | \varphi_a \rangle,$$

onde  $\text{Tr}$  representa o traço da matriz.

Podemos expressar  $Z$  como uma integral sobre campos e seus momenta conjugados. Se aplicarmos a operação de traço em (3.3), isto significa integrar sobre todas as configurações periódicas de campo. Então, chegamos à fórmula fundamental [51]:

$$Z = N \int [d\pi] \int_{\text{periódicas}} [d\varphi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ i\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right] \right\}. \quad (3.4)$$

O termo periódico quer dizer que a integração sobre os campos é vinculada a  $\varphi(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}, \beta)$ . Isto é consequência de tomarmos o traço, escolhendo  $\varphi_a(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}, \beta)$ .

O mais simples modelo de bósons é aquele composto por um campo escalar real:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi),$$

sendo

$$V(\varphi) = \lambda \varphi^4,$$

com  $\lambda \geq 0$ . O Hamiltoniano é:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + V(\varphi) \quad (3.5)$$

Colocando (3.5) e (??) em (3.4) e realizando a integral dos momenta, encontramos:

$$Z = N' \int_{\text{periódicas}} [d\varphi] \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \lambda \varphi^4 \right] \right\},$$

onde  $N'$  é uma nova constante de normalização que é irrelevante.

Tomemos somente a parte livre da ação:

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ (\partial_0\varphi) (\partial_0\varphi) + (\partial_i\varphi) (\partial_i\varphi) + m^2\varphi^2 \right]. \quad (3.6)$$

Visto que agora  $\varphi(\vec{x}, t)$  é periódico no intervalo  $0 < \tau < \beta$ , nós expandimos a sua parte temporal em série de Fourier:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{i\omega_n t} \varphi_n(\vec{k}),$$

onde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ .

Usando a identidade:

$$\int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau} = \beta \delta_{n, n'},$$

com  $\delta$  sendo o delta de Kronecker, obtemos:

$$S_0 = -\frac{1}{2} (1/\beta) \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (\omega_n^2 + k^2 + m^2) \varphi_n(\vec{k}) \varphi_{-n}(-\vec{k}). \quad (3.7)$$

Se tivéssemos escrito (3.6) como:

$$S_0 = -\frac{1}{2} (\varphi, D\varphi),$$

onde os parênteses denotam o produto escalar no espaço de funções, então de (3.7),

$$D = \omega_n^2 + k^2 + m^2,$$

no espaço de momentum.

O propagador de Feynman é justamente  $D^{-1}$ . Assim, no espaço de momentum:

$$\Delta_F = \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m^2},$$

e no espaço de posição:

$$\Delta_F(\vec{x} - \vec{x}', \tau - \tau') = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') + i\omega_n(\tau - \tau')}}{\omega_n^2 + k^2 + m^2}. \quad (3.8)$$

Pode-se calcular a função partição efetuando uma expansão diagramática do potencial de interação em série de potências, como se faz com temperatura zero. Verifica-se [41] que as regras de Feynman no espaço Euclideano são as mesmas que a temperatura zero, com as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} &\rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \\ k_0 &\rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \\ (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + \dots) &\rightarrow -(2\pi)^3 \beta \delta_{\omega_1 + \omega_2 + \dots} \times \delta^3(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \dots), \end{aligned} \quad (3.9)$$

Através de (3.8) e das relações (3.9), pode-se refazer todos os cálculos usuais de TQC, considerando-se a temperatura diferente de zero.

### 3.1.1 A função de correlação da corda quântica a temperatura finita

Do capítulo 2, a expressão para a função de correlação dos operadores de criação de cordas quânticas no MHA em  $(3+1)$ -dimensões, considerando o módulo do campo de Higgs constante, é:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_S &= \frac{1}{Z[0]} \int D\rho D\chi D\mathbf{A}_\mu \exp \left\{ - \int d^4z \left[ \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} + \tilde{B}_{\mu\nu}(S)) \left[ 1 + \frac{e^2 \rho^2}{(-\square)} \right] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (F^{\mu\nu} + \tilde{B}^{\mu\nu}(S)) + \frac{1}{2} \rho^2 \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V(\rho) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

sendo

$$\tilde{B}_{\mu\nu}(S) = \frac{2\pi}{e} \int_S d^2\xi \xi_{\mu\nu} \delta^4(z - \xi), \quad (3.11)$$

onde  $S = S_x \cup S_y$ . As superfícies genéricas  $S_x$  e  $S_y$  estão presas, como bandeiras em um mastro, às cordas que cortam um plano transversal nos pontos  $x$  e  $y$ .  $S_y$  possui orientação contrária a  $S_x$ . No caso de cordas fechadas, as superfícies assumem a configuração de membranas ligadas a um aro.

As integrais em  $\rho$  e  $\chi$  dão origem a um fator que apenas modifica a constante de normalização  $Z[0]$ , no denominador.

O propagador, agora massivo, do campo de gauge é [35]:

$$D_M^{\lambda\rho} = \frac{\delta^{\lambda\rho}}{-\square + M^2} + (1 - \xi^{-1}) \partial^\lambda \partial^\rho \frac{1}{-\square (-\square + M^2)}. \quad (3.12)$$

Utilizando (3.12), a integração funcional quadrática em (3.10) pode ser facilmente realizada, dando o resultado:

$$\begin{aligned} \langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{8} \int d^4 z d^4 z' \tilde{B}_{\mu\nu}(z; S) \tilde{B}_{\alpha\beta}(z'; S) \left[ 1 + \frac{M^2}{-\square} \right] \left[ 1 + \frac{M^2}{-\square} \right] \times \right. \\ \left. P_\lambda^{\mu\nu} P_\rho^{\alpha\beta} D_M^{\lambda\rho}(z - z') - S_0(\tilde{B}_{\mu\nu}) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

com

$$P_\alpha^{\mu\nu} = \partial^\mu \delta_\alpha^\nu - \partial^\nu \delta_\alpha^\mu$$

e

$$S_0(\tilde{B}_{\mu\nu}) = \frac{1}{4} \int d^4 z \tilde{B}_{\mu\nu} \left[ 1 + \frac{M^2}{-\square} \right] \tilde{B}_{\mu\nu}.$$

Devido aos fatores  $P_\alpha^{\mu\nu}$ , somente o primeiro termo em (3.12) contribui para (3.13). Toda parte dependente de gauge se anula, o que é uma manifestação da invariância de gauge do operador de criação de cordas.

Reparando que [35]:

$$P_\lambda^{\mu\nu} P_\lambda^{\alpha\beta} \left[ 1 + \frac{M^2}{-\square} \right] \left[ 1 + \frac{M^2}{-\square} \right] \frac{1}{-\square + M^2} = K^{\mu\nu\alpha\beta} \left[ \frac{-\square + M^2}{(-\square)^2} \right],$$

sendo

$$K^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial^\mu \partial^\alpha \delta^{\beta\nu} - \partial^\mu \partial^\beta \delta^{\alpha\nu} - \partial^\nu \partial^\beta \delta^{\alpha\mu} - \partial^\nu \partial^\alpha \delta^{\beta\mu},$$

podemos escrever (3.13) como:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{8} \int d^4 z d^4 z' \tilde{B}_{\mu\nu}(z; S) \left[ -\square \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} + K^{\mu\nu\alpha\beta} \right] \left[ \frac{1}{-\square} + \frac{M^2}{(-\square)^2} \right] \tilde{B}_{\alpha\beta}(z'; S) \right\},$$

com

$$\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = \delta^{\mu\alpha} \delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\beta} \delta^{\nu\alpha}.$$

Observe que o termo em  $\Delta$  é o termo  $S_0$  de (3.13).

Integrando sobre  $z$  e  $z'$  e usando a identidade:

$$-\square \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} + K^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\rho\lambda} \partial_\sigma \partial_\lambda,$$

conseguimos [35]:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_S = \exp \left\{ -\frac{2\pi^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \int_{S(C_{x_i})} d^2 \xi^i \int_{S(C_{x_j})} d^2 \eta^j \epsilon^{ilk} \epsilon^{jrk} \partial_l^{(\xi)} \partial_r^{(\eta)} F_M(\xi - \eta) \right\}, \quad (3.14)$$

onde  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ . O termo

$$F_M = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{-\square} + \frac{M^2}{(-\square)^2} \right], \quad (3.15)$$

representa a inversa da transformada de Fourier do operador entre colchetes.

Aplicando o teorema de Stokes em (3.14), chegamos a:

$$\langle \mu(x) \mu^\dagger(y) \rangle_C = \exp \left\{ -\frac{2\pi^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \oint_{C_{x_i}} d\xi^l \oint_{C_{x_j}} d\eta^l F_M(\xi - \eta) \right\}, \quad (3.16)$$

onde  $C_{x_i}$  é o contorno da superfície  $S(C_{x_i})$ .

A (3.16) constitui-se a fórmula básica para a função de correlação de cordas magnéticas ao longo de curvas arbitrárias, na aproximação de  $\rho$  constante. Ela foi obtida em [35], onde também foi feito o seu cálculo para cordas retas infinitas a temperatura zero.

Agora iremos calcular (3.16) a temperatura finita. Primeiramente temos de inverter

os dois operadores em (3.15), isto é:

$$-\square\Delta_F^{(1)}(x-y) = \delta^4(x-y), \quad (3.17)$$

$$\frac{(-\square)^2}{M^2}\Delta_F^{(2)}(x-y) = \delta^4(x-y), \quad (3.18)$$

onde  $x, y \in \mathfrak{R}^4$  (Euclideano).

Porém, a transformada de Fourier deve ser calculada à temperatura finita, o que significa substituir por um somatório, a integral no tempo. Assim, de acordo com a equação (3.9) da seção anterior:

$$\Delta_F = \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + i \omega_n (x_4 - y_4)} \tilde{\Delta}_F(\vec{k}), \quad (3.19)$$

onde  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ .

Colocando (3.19) em (3.17) e (3.18), e usando a representação em transformada de Fourier da delta, encontramos:

$$\tilde{\Delta}_F^{(1)}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2 + \omega_n^2}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Delta}_F^{(2)}(\vec{k}) = \frac{M^2}{(k^2 + \omega_n^2)^2}. \quad (3.21)$$

Introduzindo (3.20) e (3.21) em (3.19), temos:

$$\begin{aligned} \Delta_F^{(1)} &= \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + i \omega_n (x_4 - y_4)}, \\ \Delta_F^{(2)} &= \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{M^2}{(k^2 + \omega_n^2)^2} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + i \omega_n (x_4 - y_4)}. \end{aligned}$$

Queremos calcular a função de correlação a tempos iguais. Fazendo  $x_4 = y_4$  nas expressões acima:

$$\Delta_F^{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2}, \quad (3.22)$$



$$\Delta_F^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{M^2}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2}. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_c = \exp \left\{ -\frac{2\pi^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \oint_{C_{x_i}} \oint_{C_{x_j}} d\xi^l d\eta^l \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{D}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{D}} \frac{M^2}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2} \right] \right\}, \quad (3.24) \end{aligned}$$

onde  $\vec{D} = \vec{\xi} - \vec{\eta}$ .

O produto escalar no argumento da exponencial em ambas integrais, nos sugere que usemos coordenadas esféricas. Logo,

$$\begin{aligned} d^3 \vec{k} &= k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi, \\ \vec{k} \cdot \vec{D} &= kD \cos \theta, \end{aligned}$$

onde  $\varphi : 0 \rightarrow 2\pi$ ,  $\theta : 0 \rightarrow \pi$  e  $k : 0 \rightarrow \infty$ . Assim,

- Primeira integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk d\theta d\varphi}{(2\pi)^3} \sin \theta e^{ikD \cos \theta} \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2}.$$

- Segunda integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk d\theta d\varphi}{(2\pi)^3} \sin \theta e^{ikD \cos \theta} \frac{M^2}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2}.$$

A integração em  $\varphi$  é trivial e, por substituição, a integral em  $\theta$  dá:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikD \cos \theta} = \frac{2 \sin(kD)}{kD}.$$

Então,

- Primeira integral

$$\int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k \sin(kD)}{D} \frac{2}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2}.$$

- Segunda integral

$$\int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k \sin(kD)}{D} \frac{2M^2}{\beta} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2}.$$

As séries acima podem ser escritas de forma mais adequada:

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2} &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{k^2}, \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2} &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k^2 + \omega_n^2)^2} + \frac{1}{k^4}. \end{aligned}$$

Logo,

- Primeira integral

$$\frac{1}{\pi^2 \beta D} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\infty dk \frac{k \sin(kD)}{k^2 + \omega_n^2} + \frac{1}{2\pi^2 \beta D} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kD)}{k}. \quad (3.25)$$

- Segunda integral

$$\frac{M^2}{\pi^2 \beta D} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\infty dk \frac{k \sin(kD)}{(k^2 + \omega_n^2)^2} + \frac{M^2}{2\pi^2 \beta D} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kD)}{k^3}. \quad (3.26)$$

As quatro integrais em (3.25) e (3.26), bem como as séries resultantes estão calculadas no apêndice. Substituindo os seus resultados em (3.24), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_c &= \exp \left\{ -\frac{2\pi^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \oint_{C_{x_i}} \oint_{C_{x_j}} d\xi^l d\eta^l \left[ -\frac{1}{4\pi\beta} \frac{1}{D} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2\pi\beta} \frac{1}{D \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D}\right)} - \frac{M^2}{8\pi\beta} D - \frac{M^2}{8\pi^2} \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D}\right) \right] \right\}. \quad (3.27) \end{aligned}$$

onde  $D = |\vec{\xi} - \vec{\eta}|$ .

Esta expressão para a função de correlação é válida para qualquer configuração de cordas fechadas a temperatura finita, na aproximação de  $\rho$  constante. Podemos utilizá-la também para cordas retas e infinitas. Neste caso, efetuamos o seu cálculo, no limite de temperatura zero, e reproduzimos o resultado encontrado em [35].

### 3.1.2 Cálculo da função de correlação de duas cordas circulares com simetria cilíndrica

A configuração geométrica mais simples de duas cordas fechadas é aquela de cordas circulares com simetria cilíndrica (3-1).

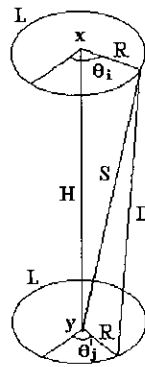


Figura 3-1:

Na figura,  $R$  é o raio das cordas,  $H = |\vec{x} - \vec{y}|$  é a distância entre os seus centros,  $D$  é a distância entre dois pontos quaisquer das cordas. Pela lei dos cossenos:

$$S^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(\theta_i - \theta_j),$$

$$S^2 = 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta_j)].$$

Mas,

$$D^2 = H^2 + S^2.$$

Logo,

$$D^2 = H^2 + 2R^2 \left[ 1 - \cos(\theta_i - \theta'_j) \right]. \quad (3.28)$$

Colocando (3.28) em (3.27), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = \exp \left\{ -\frac{2\pi^2 R^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta'_j \cos(\theta_i - \theta'_j) \times \right. \\ \left[ \frac{1}{4\pi\beta} \frac{1}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta'_j)]}} - \frac{M^2}{8\pi\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta'_j)]} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi\beta} \frac{1}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta'_j)]}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta'_j)]}}} \right. \\ \left. \left. - \frac{M^2}{8\pi^2} \ln \left( 1 - e^{\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 [1 - \cos(\theta_i - \theta'_j)]}} \right) \right] \right\}, \quad (3.29) \end{aligned}$$

onde

$$H_{ij} = \begin{cases} H & \text{para } i \neq j \\ 0 & \text{para } i = j \end{cases}.$$

Fazendo,

$$\alpha = \theta_i - \theta'_j \quad e \quad \gamma = \theta'_j, \quad (3.30)$$

então,

$$\theta_i = \alpha + \gamma \quad e \quad \theta'_j = \gamma.$$

Assim,

$$|J(\theta_i, \theta'_j)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow d\theta_i d\theta'_j = d\alpha d\gamma. \quad (3.31)$$

Inserindo (3.30) e (3.31) em (3.29), fazendo a integral elementar em  $\gamma$  e reparando que as integrais em  $\alpha$  são pares, achamos:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = \exp \left\{ -\frac{4\pi^3 R^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2 (1 - \cos \alpha)}} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{M^2}{4\pi\beta} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right)} \\
& - \frac{M^2}{4\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right) \Bigg] \Bigg\}. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Esta é a expressão final para a função de correlação à temperatura finita para uma corda circular. A seguir, estudaremos o comportamento de (3.32) nos seguintes limites:

- Temperatura zero ( $\beta \rightarrow \infty$ ).
- Baixas temperaturas ( $\beta$  grande).
- Altas temperaturas ( $\beta$  pequeno).

### Limite de temperatura zero

O limite de temperatura zero corresponde a tomar  $\beta \rightarrow \infty$  em (3.32), fazendo com que as duas primeiras integrais se anulem. Então:

$$\begin{aligned}
\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle &= \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{4\pi^2 R^2}{e^2} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \times \right. \right. \\
& \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right)} \\
& \quad \left. \left. + \frac{M^2 \pi R^2}{e^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right) \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

A princípio, faríamos uma expansão do termo exponencial até a ordem zero em  $\frac{1}{\beta}$ , mas em virtude do  $\beta$  já existente no denominador do primeiro limite e ao logaritmo, no segundo limite; temos de efetuar os limites até uma ordem acima.

- Primeiro limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}.$$

- Segundo limite

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( 1 - e^{\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right) \right] = \frac{1}{2} \ln \left[ H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha) \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle &= \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{2\pi R^2}{e^2} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha d\alpha}{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} \times \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{M^2 \pi R^2}{e^2} \ln \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha + \frac{M^2 \pi R^2}{2e^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \ln \left[ H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Nesta expressão, a segunda integral dá resultado nulo, eliminando a singularidade logarítmica em  $\beta$ . As outras duas integrais estão calculadas no apêndice, de modo que:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = \exp \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{\pi^2}{e^2} \frac{H_{ij}^2 + 2R^2}{H_{ij} \sqrt{H_{ij}^2 + 4R^2}} + \frac{M^2 \pi^2 R^2}{2e^2} \frac{H_{ij} - \sqrt{H_{ij}^2 + 4R^2}}{H_{ij} + \sqrt{H_{ij}^2 + 4R^2}} \right] \right\}. \quad (3.34)$$

Os termos com  $i = j$  representam auto-interações das cordas, sendo portanto não físicos. Eles podem ser eliminados por uma renormalização multiplicativa do operador de desordem:

$$\mu_r = \mu \exp \frac{\pi^2 R}{e^2 |\vec{e}|}.$$

para  $|\vec{e}| \rightarrow 0$ .

Substituindo  $H_{ij} = H$  e realizando o somatório em  $\lambda$ , então:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ \frac{2\pi^2}{e^2} \frac{H^2 + 2R^2}{H \sqrt{H^2 + 4R^2}} - \frac{M^2 \pi^2 R^2}{e^2} \frac{H - \sqrt{H^2 + 4R^2}}{H + \sqrt{H^2 + 4R^2}} \right] \right\}.$$

Vemos que a função de correlação para duas cordas circulares a temperatura zero depende de dois parâmetros: o raio da corda  $R$  e a distância entre seus centros  $H = |\vec{x} - \vec{y}|$ . Variando a relação entre estes parâmetros, extraímos informações importantes acerca das propriedades das cordas. Então, consideremos dois casos (novamente, os cálculos estão feitos no apêndice):

- $H \gg R$

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ -\frac{8\pi^2 R^4}{e^2 H^4} + \frac{M^2 \pi^2 R^4}{e^2 H^2} \right] \right\}.$$

Depois, tomando o limite de longas distâncias ( $H \rightarrow \infty$ ) os termos se anulam, fornecendo:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = 1. \quad (3.35)$$

Logo, o operador  $\mu$  cria estados de vácuo, que não representam excitações genuínas.

- $R \gg H$

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ \frac{2\pi^2 R}{e^2 H} - \frac{M^2 \pi^2}{e^2} R H \right] \right\}.$$

Finalmente obtemos,

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left[ \frac{2\pi^2 R}{e^2 |\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{M^2 \pi^2}{e^2} R |\vec{x} - \vec{y}| \right]. \quad (3.36)$$

Mais uma vez estamos interessados no comportamento assintótico  $H \rightarrow \infty$ , cujo resultado é:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = 0. \quad (3.37)$$

Observe que como  $R \gg H$ , ao fazermos o limite assintótico  $H \rightarrow \infty$ , automaticamente estamos considerando cordas infinitas. Portanto, somente estas constituem estados legítimos, ortogonais ao vácuo.

A densidade de energia da corda é obtida dividindo o coeficiente do termo linear em (3.36), pelo comprimento da corda. Isto dá:

$$\mathcal{M} = \frac{M^2 \pi}{2e^2} H. \quad (3.38)$$

Comparando a densidade de energia da corda circular infinita em (3.38) com aquela da corda reta infinita, vista no capítulo anterior, vemos que as duas são idênticas.

## Limite de baixas temperaturas

No limite de baixas temperatura fazemos  $\beta$  grande em (3.32). As integrais de primeira ordem em  $\beta$ , ao contrário do limite anterior, a princípio, devem contribuir. Nas duas últimas integrais, expandimos a exponencial até a ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)^4$ .

As expansões estão feitas no apêndice, obtendo-se:

$$\frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right)} \xrightarrow{\beta \gg 1} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} + \frac{1}{2\beta} + \frac{\pi}{6\beta^2} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} + \frac{\pi^3}{18\beta^4} \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.39)$$

$$\left[ \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right) \right] \xrightarrow{\beta \gg 1} \ln \frac{2\pi}{\beta} + \frac{1}{2} \ln \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right] - \frac{\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} + \frac{\pi^2}{6\beta^2} \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right] - \frac{5\pi^4}{36\beta^4} \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right]^2. \quad (3.40)$$

Enfim, substituindo (3.39) e (3.40) em (3.32),

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = \exp \left\{ -\frac{4\pi^3 R^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right. \right. \\ \left. -\frac{M^2}{4\pi\beta} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} + \frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right. \\ \left. + \frac{1}{6\beta^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha + \frac{\pi^2}{18\beta^4} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right] \right. \\ \left. - \frac{M^2}{4\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \ln \frac{2\pi}{\beta} - \frac{M^2}{8\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \ln \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right] \right. \\ \left. + \frac{M^2}{4\pi\beta} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} - \frac{M^2}{24\beta^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right] \right. \\ \left. + \frac{5M^2\pi^2}{144\beta^4} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \left[H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)\right]^2 \right\}. \quad (3.41) \end{aligned}$$



As integrais com termos de ordem zero em  $\beta$  são as mesmas de (3.33) e já estão feitas no apêndice. Verificamos que as integrais com termos de ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)$  se cancelam mutuamente. As integrais dos termos de ordem  $O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$  são nulas, de forma que a primeira contribuição diferente de zero, aparece na ordem  $O\left(\frac{1}{\beta^4}\right)$ . Este é o motivo pelo qual continuamos a expansão para ordens mais elevadas. As outras integrações são triviais.

A expressão resultante, já renormalizada, é:

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ \frac{2\pi^2}{e^2} \frac{H^2 + 2R^2}{H\sqrt{H^2 + 4R^2}} - \frac{M^2\pi^2}{4e^2} R^2 \frac{H - \sqrt{H^2 + 4R^2}}{H + \sqrt{H^2 + 4R^2}} - \frac{5M^2\pi^5}{18e^2\beta^4} R^4 H^2 \right] \right\}. \quad (3.42)$$

O último termo em (3.42) fornece a primeira correção de temperatura ao resultado (3.34), de temperatura zero.

Faremos a mesma análise dos parâmetros  $H$  e  $R$ . Os cálculos são iguais aos da corda a temperatura zero.

- $H \gg R$

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ -\frac{8\pi^2}{e^2} \frac{R^4}{H^4} + \frac{M^2\pi^2}{4e^2} \frac{R^4}{H^2} - \frac{5M^2\pi^5}{18e^2} \frac{R^4 H^2}{\beta^4} \right] \right\}.$$

- $R \gg H$

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle_r = \exp \left\{ \left[ \frac{2\pi^2}{e^2} \frac{R}{H} - \frac{M^2\pi^2}{4e^2} RH - \frac{5M^2\pi^5}{18e^2} \frac{R^4 H^2}{\beta^4} \right] \right\}.$$

Nas expressões acima, se tomarmos o limite a longas distâncias, o termo de correção devido à temperatura será nulo, pois trabalhamos inicialmente com a condição de  $\beta \gg H$ . Assim, se fizermos  $H \rightarrow \infty$ , necessariamente,  $\beta$  irá para infinito antes.

### Limite de altas temperaturas

No limite de altas temperatura é preciso fazer  $\beta$  pequeno em (3.32). As integrais de primeira ordem em  $\beta$  permanecem. Diferentemente dos limites anteriores, agora vamos

expandir o termo  $1 - Y$ , onde  $Y$  é a exponencial, até a ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)$ . Estes limites encontram-se no apêndice. Levando-os em conta, a (3.32) torna-se:

$$\begin{aligned} \langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = \exp \left\{ -\frac{4\pi^3 R^2}{e^2} \sum_{i,j=1}^2 \lambda_i \lambda_j \left[ -\frac{1}{2\pi\beta} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{M^2}{4\pi\beta} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta\pi} \int_0^\pi \frac{d\alpha \cos \alpha}{\sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M^2}{4\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \cos \alpha e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Claramente, o seu comportamento assintótico é:

- $H \gg R$

$$\langle \mu(\vec{x}, t) \mu^\dagger(\vec{y}, t) \rangle = 1.$$

Logo, o operador  $\mu$  não gera estados de corda legítimos.

O limite de  $R \gg H$  não pode ser tomado na expressão (3.43), em virtude do cosseno que se anula em  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Isto invalida a expansão, para este valor de  $\alpha$ .

A finalidade de tomarmos os limites de baixas e altas temperaturas em (3.32), foi extrair a correção de temperatura para a função de correlação. Contudo, o nosso principal resultado é obtido realizando-se uma análise qualitativa e preliminar desta equação.

Nesta expressão, se assumirmos de início que  $H \rightarrow \infty$ , a primeira integral claramente irá se anular e a segunda integral terá um termo dominante  $H$ ; no entanto o integrando está multiplicado por  $\cos \alpha$  e a integral, neste intervalo, será zero. Finalmente, as duas integrais restantes, só poderão dar uma contribuição não nula quando  $\beta$ , no argumento da exponencial, for também infinito. Logo, concluímos que a função de correlação a longas distâncias será 1, e portanto trivial, a menos que  $\beta$  seja infinito.

Fisicamente, isto quer dizer que existem estados quânticos de cordas magnéticas, apenas para temperatura zero. Se temperatura for não nula, nenhuma excitação topológica

será genuína. Portanto, constatamos que a introdução da temperatura desestabiliza o sistema, pois as cordas infinitas que antes existiam a temperatura zero, não se formam a temperatura finita.

# Conclusão

É um resultado conhecido que o Modelo de Higgs Abeliano em  $(3 + 1)$ -dimensões apresenta cordas magnéticas, como soluções clássicas de energia infinita. Em [35], desenvolveu-se um método de quantização de cordas a temperatura zero e aplicou-se ao caso de cordas retas e infinitas, na aproximação do campo de Higgs constante. Na presente dissertação damos prosseguimento a este trabalho: estudamos os efeitos oriundos da introdução de temperatura na formação de estados quânticos de cordas magnéticas. Para efeito de cálculo, consideramos uma configuração de cordas fechadas e com simetria cilíndrica. Os resultados dos cálculos, obtidos no capítulo 3 podem ser sumarizados como se segue:

- Temperatura zero

A temperatura zero, a existência de estados quânticos genuínos está condicionada ao tamanho da corda. No caso de cordas de tamanho finito, verificamos que não existem estados quânticos associados. Somente para cordas infinitas existem tais estados físicos. Obtemos a densidade de energia da corda infinita e circular e verificamos que é igual a densidade de energia da corda, também infinita, porém reta.

- Temperatura finita

Ao levarmos em conta a temperatura, duas diferenças surgem em relação a situação anterior. Do ponto de vista da Física, a temperatura altera o sistema de modo fundamental.

Para cordas finitas, a temperatura não acrescenta nada de novo e o mesmo comportamento a temperatura zero é mantido.

No entanto, para cordas infinitas, ao contrário da situação quando a temperatura era zero, o limite assintótico da função de correlação é 1, o que indica que os estados quânticos de corda são proporcionais ao vácuo e portanto não se constituem em estados físicos genuínos.

Nosso resultado mostra claramente que a inclusão de temperatura desestabiliza os estados quânticos de cordas fechadas e infinitas, que estavam presentes a temperatura zero. Este é o principal resultado deste trabalho.

Tecnicamente, o cálculo da função de correlação torna-se bem mais complicado, dificultando a obtenção de uma expressão analítica para algumas integrais. Esta dificuldade pode ser contornada fazendo-se um estudo dos limites entre os parâmetros da expressão, à saber o raio da corda e a distância entre seus centros. Nestes limites, conseguimos calcular o termo de correção de temperatura na função de correlação.

# Apêndice A

## Cálculos diversos

Neste apêndice, encontram-se as demonstrações de vários resultados apresentados no capítulo 3.

### A.1 Cálculo das integrais em $k$

As integrais em (3.25) e (3.26) estão tabeladas em [52], fórmulas 3.723 – 3 e 3.729 – 2. Os seus resultados são:

$$\int_0^{\infty} dk \frac{k \sin(kx)}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax} \quad (x > 0, \operatorname{Re} a > 0). \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^{\infty} dk \frac{k \sin(kx)}{(k^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a} x e^{-ax} \quad (x > 0, \operatorname{Re} a > 0). \quad (\text{A.2})$$

onde  $a = \omega_n$ .

Expandindo o lado direito de (A.1) e depois tomando o limite quando  $a \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.3})$$

Realizando o mesmo procedimento, agora em (A.2), encontramos:

$$\int_0^{\infty} dk \frac{\sin(kx)}{k^3} = \frac{\pi}{4} x \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} - \frac{\pi}{4} x^2. \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Cálculo das séries

Inserindo (A.1) e (A.3) em (3.25) e (A.2) e (A.4) em (3.26), chegamos a:

- Primeira integral

$$\frac{1}{2\pi\beta D} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\omega_n D} + \frac{1}{4\pi\beta D}.$$

- Segunda integral

$$\frac{M^2}{4\pi\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\omega_n D}}{\omega_n} + \frac{M^2}{8\pi\beta} \lim_{\omega_n \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n} - \frac{M^2}{8\pi\beta} D.$$

onde  $\omega_n = \frac{2\pi}{n}$ . As séries também são encontradas em [52], fornecendo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\omega_n D} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D}} - 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\omega_n D}}{\omega_n} = -\frac{\beta}{2\pi} \ln \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D} \right).$$

Então:

- Primeira integral

$$\frac{1}{2\pi\beta D} \frac{1}{\left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D} \right)} - \frac{1}{4\pi\beta D}. \quad (\text{A.5})$$

- Segunda integral

$$-\frac{M^2}{8\pi^2} \ln \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} D} \right) + \frac{M^2}{8\pi\beta} \lim_{\omega_n \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n} - \frac{M^2}{8\pi\beta} D. \quad (\text{A.6})$$

O segundo termo, apesar de ser singular, é constante. Sendo assim, ele é eliminado pelo somatório em  $\lambda$ , ao ser substituído em (3.24).

### A.3 Cálculo das integrais em $\alpha$

As integrais em (3.33) podem ser rearranjadas da seguinte maneira:

$$\int_0^\pi \frac{\cos x dx}{H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos x)} = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{H_{ij}^2 + 2R^2 - 2R^2 \cos x}, \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^\pi dx \cos x \ln \left[ H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos x) \right] = \int_0^\pi dx \cos x \ln \left( H_{ij}^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Fazendo ainda  $y = 2x$ , a (A.8) torna-se:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi dx \cos x \ln \left( H_{ij}^2 + 4R^2 \sin^2 x \right) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \cos 2y \ln \left( H_{ij}^2 + 4R^2 \sin^2 y \right) \quad (\text{A.9}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \cos 2y \ln \left[ H_{ij}^2 \left( 1 + \frac{4R^2}{H_{ij}^2} \sin^2 y \right) \right] \\ &= 4 \ln H_{ij} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \cos 2y \\ &\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy (2 \cos^2 y - 1) \ln \left( 1 + \frac{4R^2}{H_{ij}^2} \sin^2 y \right). \end{aligned}$$

Na expressão acima, a primeira integral é zero, logo:

$$\int_0^\pi dx \cos x \ln \left[ H_{ij}^2 + 2R^2(1 - \cos x) \right] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy (2 \cos^2 y - 1) \ln \left( 1 + \frac{4R^2}{H_{ij}^2} \sin^2 y \right). \quad (\text{A.10})$$

A integral (A.7) está em [52], fórmulas 2.554 – 2 e 2.554 – 3, e as outras (A.10) aparecem em [53], fórmulas 2.638 – 1 e 2.638 – 2. Os seus resultados são:

$$\begin{aligned} \int \frac{A + B \cos x}{a + b \cos x} dx &= \frac{B}{b} x + \frac{Ab - aB}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x} \\ &= \frac{B}{b} x + \frac{Ab - aB}{b} \left[ \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan \frac{x}{2}}{a + b} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \ln (1 + c \sin^2 x) = \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 + c}}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \cos^2 x \ln (1 + c \sin^2 x) = \frac{\pi}{2} \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1 + c}}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{1 + c}}{1 + \sqrt{1 + c}} \right),$$

onde  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $a = H_{ij}^2 + 2R^2$ ,  $b = -2R^2$  e  $c = \frac{4R^2}{H_{ij}^2}$ .



## A.4 Cálculo dos limites de $H$ e $R$

Vamos calcular os termos da função de correlação para  $\beta \rightarrow \infty$  (3.34) nos seguintes limites:

- $H \gg R$

Primeiro termo:

$$\frac{H^2 + 2R^2}{H\sqrt{H^2 + 4R^2}} = \frac{H^2 \left(1 + \frac{2R^2}{H^2}\right)}{H^2 \left(\sqrt{1 + \frac{4R^2}{H^2}}\right)} = \frac{1 + \frac{2R^2}{H^2}}{1 + \frac{2R^2}{H^2}} = 1 - \frac{4R^4}{H^4}.$$

O termo independente de  $H$  é constante e pode ser eliminado.

Segundo termo:

$$\begin{aligned} R^2 \frac{H - \sqrt{H^2 + 4R^2}}{H + \sqrt{H^2 + 4R^2}} &= R^2 \frac{H - H\sqrt{1 + \frac{4R^2}{H^2}}}{H + H\sqrt{1 + \frac{4R^2}{H^2}}} = R^2 \frac{H - H\left(1 + \frac{2R^2}{H^2}\right)}{H + H\left(1 + \frac{2R^2}{H^2}\right)} \\ &= R^2 \frac{-\frac{2R^2}{H}}{2H\left(1 + \frac{R^2}{H}\right)} = -\frac{R^4}{H^2} \left(1 - \frac{R^2}{H}\right) = -\frac{R^4}{H^2}. \end{aligned}$$

- $R \gg H$

Primeiro termo:

$$\begin{aligned} \frac{H^2 + 2R^2}{H\sqrt{H^2 + 4R^2}} &= \frac{2R^2 \left(1 + \frac{H^2}{2R^2}\right)}{H2R\sqrt{1 + \frac{H^2}{4R^2}}} = \frac{R \left(1 + \frac{H^2}{2R^2}\right)}{H \left(1 + \frac{H^2}{8R^2}\right)} \\ &= \frac{R}{H} \left(1 + \frac{H^2}{2R^2}\right) \left(1 - \frac{H^2}{8R^2}\right) = \frac{R}{H}. \end{aligned}$$

Segundo termo:

$$\begin{aligned} R^2 \frac{H - \sqrt{H^2 + 4R^2}}{H + \sqrt{H^2 + 4R^2}} &= R^2 \frac{H - 2R\sqrt{1 + \frac{H^2}{4R^2}}}{H + 2R\sqrt{1 + \frac{H^2}{4R^2}}} = R^2 \frac{H - 2R\left(1 + \frac{H^2}{8R^2}\right)}{H + 2R\left(1 + \frac{H^2}{8R^2}\right)} \\ &= R^2 \frac{2R\left(\frac{H}{2R} - 1 - \frac{H^2}{8R^2}\right)}{2R\left(\frac{H}{2R} + 1 + \frac{H^2}{8R^2}\right)} = R^2 \left(\frac{H}{2R} - 1\right) \left(1 - \frac{H}{2R}\right) \\ &= R^2 \left(-1 + \frac{H}{R} - \frac{H^2}{4R^2}\right) = -R^2 + RH. \end{aligned}$$

## A.5 Cálculo do limite de baixas temperaturas

Vamos expandir dois integrandos da expressão geral para a função de correlação de cordas circulares (3.32), até a ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)^4$ . Os integrandos restantes, de ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)$ , são mantidos. Então:

- Primeiro limite

$$\frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right)} \text{ para } (\beta \gg 1).$$

- Segundo limite

$$\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{H^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha)}}\right) \text{ para } (\beta \gg 1).$$

Para simplificar a notação, vamos definir:

$$K = H^2 + 2R^2(1 - \cos \alpha). \quad (\text{A.11})$$

Cada limite será efetuado separadamente. Assim:

- Primeiro limite

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta \left(1 - \exp -\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K}\right)} &\xrightarrow{\beta \gg 1} \frac{1}{\beta \left(1 - 1 + \frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K} - \frac{2\pi^2}{\beta^2} K + \frac{4\pi^3}{3\beta^3} K^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi^4}{3\beta^4} K^2\right)} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{K} \left[1 - \left(\frac{\pi}{\beta} \sqrt{K} - \frac{2\pi^2}{3\beta^2} K + \frac{\pi^3}{3\beta^3} K^{\frac{3}{2}}\right)\right]}. \end{aligned}$$

- Segundo limite

$$\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K}}\right) \xrightarrow{\beta \gg 1} \ln \left\{ \frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K} \left[1 - \left(\frac{\pi}{\beta} \sqrt{K} - \frac{2\pi^2}{3\beta^2} K + \frac{\pi^3}{3\beta^3} K^{\frac{3}{2}}\right)\right] \right\}.$$

Definindo

$$X = \frac{\pi}{\beta} \sqrt{K} - \frac{2\pi^2}{3\beta^2} K + \frac{\pi^3}{3\beta^3} K^{\frac{3}{2}}, \quad (\text{A.12})$$

e expandindo em  $X$ , os limites tornam-se:

- Primeiro limite

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{K}(1-X)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{K}} (1 + X + X^2 + X^3 + X^4). \quad (\text{A.13})$$

- Segundo limite

$$\ln \left[ \frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K} (1-X) \right] = \ln \frac{2\pi}{\beta} + \frac{1}{2} \ln K - X - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4}. \quad (\text{A.14})$$

Porém,

$$X^2 = \frac{\pi^2}{\beta^2} K - \frac{4\pi^3}{3\beta^3} K^{\frac{3}{2}} + \frac{10\pi^4}{9\beta^4} K^2, \quad (\text{A.15})$$

$$X^3 = \frac{\pi^3}{\beta^3} K^{\frac{3}{2}} - \frac{2\pi^4}{\beta^4} K^2, \quad (\text{A.16})$$

$$X^4 = \frac{\pi^4}{\beta^4} K^2, \quad (\text{A.17})$$

onde desprezamos todos os termos de ordem maiores do que  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)^4$ .

Substituindo (A.12), (A.15), (A.16) e (A.17) em (A.13) e (A.14), os termos de ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)^3$  se cancelam e obtemos as expressões (3.39) e (3.40).

## A.6 Cálculo do limite de altas temperaturas

Mais uma vez, consideramos a expressão (3.32). As integrais, com termos de ordem  $O\left(\frac{1}{\beta}\right)$ , continuam. Nas outras, efetuamos os mesmos limites da seção anterior, só que para  $\beta$  pequeno, isto é:

$$\frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K}}\right)} \text{ para } (\beta \ll 1)$$

e

$$\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta} \sqrt{K}}\right) \text{ para } (\beta \ll 1),$$

onde  $K$  é definido por (A.11).

Definimos

$$Y = e^{-\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{K}}.$$

Logo:

$$\frac{1}{\beta \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{K}}\right)} \xrightarrow{\beta \ll 1} \frac{1}{\beta} Y = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{K}}$$

e

$$\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{K}}\right) \xrightarrow{\beta \ll 1} Y = e^{\frac{2\pi}{\beta}\sqrt{K}}.$$

# Bibliografia

- [1] R. F. Dashen, B. Hasslacher e A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 4130.
- [2] J. Goldstone e R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1486.
- [3] A. M. Polyakov, *Zh. E. T. F.* **20** (1974) 430.
- [4] J. Rubinstein, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 258
- [5] J. R. Schieffer, *Theory of superconductivity*, W. A. Benjamin Inc., New York (1964).
- [6] H. B. Nielsen e P. Olesen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45.
- [7] T. Skyrme, *Proc. Royal Soc. London* **262** (1961) 237.
- [8] A. A. Belavin e A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **22** (1975) 245.
- [9] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 276.
- [10] L. D. Landau e V. L. Ginzburg, *Jour. Exp. Theor. Phys.* **20** (1950) 1064 (em russo).
- [11] F. D. M. Haldane, *Phys. Lett.* **A93** (1983) 464; *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1153.
- [12] A. A. Abrikosov, *Zh. E. T. F.* **32** (1957) 1441 [*JETP.* **5** (1957) 1173].
- [13] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 591.
- [14] M. J. Bowick, L. Chandar, E. A. Schiff e A. M. Srivastava, *Science* **264** (1994) 943.
- [15] C. Callan, *Phys. Rev.* **D25** (1982) 2141; *Phys. Rev.* **D26** (1982) 2058.
- [16] V. Rubakov, *JETP Lett.* **33** (1981) 644; *Nucl. Phys.* **B203** (1982) 311.

- [17] R. H. Brandenberger, A. C. Davis e A. M. Matheson, *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 909.
- [18] Y. Nambu, *Nucl. Phys.* **B130** (1977) 505.
- [19] T. Vachaspati, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1977.
- [20] R. H. Brandenberger, A. C. Davis e M. Hindmarsh, *Phys. Lett.* **B263** (1991) 239.
- [21] R. H. Brandenberger e A. C. Davis, *Phys. Lett.* **B308** (1993) 79.
- [22] A. C. Davis e M. Earnshaw, *Nucl. Phys.* **B394** (1993) 21.
- [23] J. Fröhlich, *Comm. Math. Phys.* **47** (1976) 269.
- [24] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [25] S. Coleman, *New Phenomena in Subnuclear Physics*, A. Zichichi ed. Plenum, New York (1977).
- [26] E. C. Marino e J. A. Swieca, *Nucl. Phys.* **B170** (1980) 175.
- [27] E. C. Marino, B. Schroer e J. A. Swieca, *Nucl. Phys.* **B200** (1982) 473.
- [28] E. C. Marino, *Nucl. Phys.* **B217** (1983) 413.
- [29] E. C. Marino, *Nucl. Phys.* **B230** (1984) 149.
- [30] E. C. Marino, *Phys. Rev.* **D38** (1988) 3194.
- [31] E. C. Marino, G. C. Marques, R. O. Ramos e J. Stephany Ruiz, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 3690.
- [32] E. C. Marino, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 4311.
- [33] E. C. Marino e J. Stephany Ruiz, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 3690.
- [34] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B179** (1981) 509.
- [35] E. C. Marino, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 1001.

- [36] J. Fröhlich e P. A. Marchetti, *Lett. Math. Phys.* **16** (1988) 347; *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 177.
- [37] J. Fröhlich, F. Gabiani e P. A. Marchetti, *Proceedings, Banff Summer School in Theoretical Physics*, H. C. Lee ed.
- [38] M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B326** (1989) 557; G. W. Semenoff e P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328** (1989) 753; R. Jackiw e S. Y. Pi, *Phys Rev.* **D42** (1990) 3500; A. Kovner, B. Rosenstein e D. Eliezer, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 2733; *Nucl. Phys.* **B350** (1991) 325; V. F. Müller, *Z. Phys.* **C51** (1991) 665; A. Kovner e B. Rosenstein, *Phys. Rev* **D49** (1994) 5571.
- [39] E. T. Akhmedov, M. N. Chernodub, M. I. Polikarpov e M. A. Zubkov, *ITEP-95-24* preprint (1995).
- [40] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **91** (1953) 1291; R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [41] C. W. Bernard, *Phys. Rev.* **D12** (1974) 3312.
- [42] Z. F. Ezawa e H. C. Tze, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 2228; Z. F. Ezawa e H. C. Tze, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 1006.
- [43] M. B. Hindmarsh e T. W. B. Kibble, *Rep. Prog. Phys.* **58** (1995) 477.
- [44] H. A. Kramers e G. H. Wannier, *Phys. Rev.* **60** (1941) 252.
- [45] E. Fradkin e L. Susskind, *Phys. Rev.* **D17** (1978) 2637.
- [46] R. Savit, *Rev. of Mod. Phys.* **52** (1980) 453.
- [47] L. Kadanoff e H. Ceva, *Phys. Rev.* **B3** (1971) 3918.
- [48] E. C. Marino, in *Applications of Statistical and Field Theory Methods in condensed matter*, *Proceedings of NATO Advanced Study Institute*, D. Baeriswyl, A. Bishop e J. Carmelo Eds., Plenum, New York, 1992.

- [49] A. A. S. de Macedo e E. C. Marino, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 1360.
- [50] R. Köberle e E. C. Marino, *Phys. Lett.* **B126** (1983) 475.
- [51] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989).
- [52] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, Inc (1980).
- [53] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov e O. I. Marichev, *Integrals and Series, Vol.1*, Gordon and Breach Science Publishers (1986).



# “CORDAS MAGNÉTICAS QUÂNTICAS À TEMPERATURA FINITA”

DANIEL GUILHERME GOMES SASAKI

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Eduardo Cantera Marino - Presidente

Nelson Ricardo de Freitas Braga

Sebastião Alves Dias

Rio de Janeiro, 25 de setembro de 1996