

**Tese de Doutorado**

**Propriedades da Rede de Vórtices em  
Supercondutores Anisotrópicos**

**Isaias Gonzaga de Oliveira**

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas  
Rio de Janeiro, Abril de 1996

“Não somos o que deveríamos ser  
Não somos o que queríamos ser  
Não somos o que iremos ser  
Mas, graças a Deus,  
Não somos o que éramos”

Martin Luther King

# Dedicatória

Aos meus pais;  
aos meus irmãos;  
e à Betinha.

# Agradecimentos

- Ao meu orientador, Mauro Dória, pela paciência e dedicação.
- Ao meu orientador acadêmico, José Helayel, pela sua inesgotável gentileza.
- Aos meus pais, pois sem eles eu, seguramente, não estaria aqui.
- À minha querida esposa, Betinha, pelo amor, dedicação e carinho.
- A toda a minha família que sempre me deu força, mesmo sem ter a menor idéia do que eu fazia.
- Aos meus amigos Roberto Sathour, Ivan, Vitor, Cristiane (Kit), Gerson Richa, Francisco, Ladário, Carmem, Célia, Crisógono, Pancho, Fortunato, Flávio, Cambraia, Marcelão, Marcelo, Álvaro, Marco Antônio, Claudio e Daniel Sasaki, Armando, Tião, Barbi, Régio, Paiva, e é claro, à todos que esqueci.
- Aos meus amigos-funcionários do "Bar do Manoel".
- A todos os amigos, professores e funcionários do CBPF.
- À Myriam, pela competência, paciência e soluções sempre providenciais.
- Às duas grandes secretárias, Vanda e Rosângela.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.

# Resumo

No contexto da teoria de London anisotrópica, estudamos propriedades das linhas de vórtice, nos supercondutores a altas temperaturas. Obtemos o torque magnético intrínseco, para qualquer valor da indução magnética. Tomamos as linhas de vórtices retas, e levamos em conta a contribuição das supercorrentes no interior do núcleo do vórtice usando a teoria de London. Mostramos que as energias, de interação (inter) e auto-energia (intra), dão contribuições opostas ao torque magnético; a primeira, dirige a indução magnética paralelamente ao eixo de simetria do supercondutor, a segunda, ortogonal à primeira. Para induções magnéticas elevadas, nossa expressão para o torque generaliza a fórmula do Kogan, uma vez que consideramos, além da energia intra, a energia inter. Não usamos nenhum parâmetro livre, mas sim o parâmetro de anisotropia de massa,  $\gamma = m_1/m_3$  e a constante de Ginzburg-Landau. Para induções magnéticas baixas, propomos um método de observar efeitos da cadeia de vórtices no torque magnético total, baseado nos fatos de que a teoria de London é linear e a energia para fazer uma linha de vórtice no espaço mostra-se ser independente da indução magnética.

Analisamos o problema da coexistência das linhas de vórtice. Estudamos a energia livre de Helmholtz para o caso da indução magnética formar um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo de simetria da amostra. Para este conjunto de linhas de vórtice, encontramos uma energia livre maior do que o conjunto de linhas em direções ortogonais, isto é, para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ .

Para induções magnéticas elevadas, obtemos algumas propriedades do arranjo do fluxo de vórtice, recentemente considerado por Preosti e Muzikar - dois conjuntos de linhas ortogonais, ao longo e perpendicular ao eixo de simetria do supercondutor. Obtemos a linha crítica no diagrama da anisotropia,  $\gamma$ , versus a constante de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ , acima da qual o arranjo ortogonal pode ocorrer. Na região reversível do diagrama

$H - T$ , propomos um método, baseado em experimentos de torque e magnetização, para verificarmos a existência deste estado ortogonal.

No contexto teoria de London anisotrópica na rede, utilizamos o método de Monte Carlo para descrever o comportamento das linhas de vórtice em um supercondutor a alta temperatura. Tomamos uma amostra, sujeita a condições periódicas de contorno. O modelo de Monte Carlo simula diferentes configurações da linha de vórtice, pela adição randômica de loops, os quais conservam a vorticidade e o campo magnético local.

# Índice

Dedicatória . . . . .	ii
Agradecimentos . . . . .	iii
Resumo . . . . .	iv
Índice . . . . .	1
<b>1 Teorias</b>	<b>2</b>
1.1 Introdução . . . . .	2
1.2 Teoria Ginzburg-Landau . . . . .	14
1.3 Vórtice na aproximação de London . . . . .	19
1.4 Extensão do tratamento de London para o núcleo do vórtice . . . . .	24
1.5 A anisotropia de massa . . . . .	27
1.5.1 A energia livre de London . . . . .	30
1.5.2 A rede de vórtice inclinada . . . . .	30
1.5.3 Energia de Interação (energia inter) . . . . .	32
1.5.4 Auto-energia (energia intra) . . . . .	43
1.6 A Teoria de London na Rede . . . . .	47
<b>2 O Torque Magnético Intrínseco</b>	<b>48</b>
2.1 Introdução . . . . .	48
2.2 A Energia Total do Sistema e o Torque Intrínseco . . . . .	57
2.3 Conclusão . . . . .	64
<b>3 Coexistência de Linhas de Fluxo Ortogonais</b>	<b>69</b>
3.1 Introdução . . . . .	69
3.2 A Teoria de London Anisotrópica . . . . .	80

3.3	O Torque Magnético intrínseco . . . . .	85
3.4	Distâncias entre cadeias e vórtices na mesma cadeia . . . . .	89
3.5	Conclusão . . . . .	94
<b>4</b>	<b>O Comportamento das Linhas de Vórtice e o Método de Monte Carlo</b>	<b>97</b>
4.1	Introdução . . . . .	97
4.2	Teoria de London Anisotrópica na Rede . . . . .	97
4.3	Deformação da Linha de Vórtice e o Método de Monte Carlo . . . . .	101
	Conclusão . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>O Potencial <math>V(x)</math> e a Convergência Rápida</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Derivação da Energia Livre a partir da Equação (1.83)</b>	<b>119</b>
<b>C</b>	<b>O Torque em Função do Ângulo <math>\theta</math></b>	<b>123</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>129</b>

# Capítulo 1

## Teorias

### 1.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos o conceito geral de supercondutividade, revemos as características básicas dos supercondutores, e fazemos um estudo da teoria de London para supercondutores isotrópicos e anisotrópicos. Analisamos o conceito de rede de vórtice e a célula unitária. Mostramos um método de convergência rápida para calcular o potencial de interação na rede de vórtices. Fazemos um estudo da rede de vórtice inclinada. Apresentamos alguns resultados obtidos através deste método de convergência rápida para supercondutores de simetria unaxial. Ainda mostramos o bem conhecido resultado da energia mínima para a rede triangular. Por fim fazemos um estudo da teoria de London na rede, isto é, discretizamos a teoria e passamos a tratar a linha de vórtice como segmentos de linha.

Esfriando-se um certa classe de material, encontramos abaixo de uma certo valor crítico de temperatura,  $T_c$ , um novo estado termodinâmico. A presença de uma descontinuidade no calor específico em  $T_c$ , como mostra a fig.1a, sinaliza uma transição de fase de segunda ordem. Portanto abaixo e acima de  $T_c$  encontram-se fases termodinâmicas distintas. Uma nova propriedade apresentada abaixo desta temperatura crítica é a resistência nula, descoberta por Kammerlingh Onnes em 1911.

A energia livre  $F_s$  na fase supercondutora pode ser derivada do calor específico e está mostrado na fig.1b pela linha cheia. A curva tracejada representa a energia livre para o estado normal  $F_n$  para um metal. A diferença entre estas duas energias livres em

$T = 0$ , isto é,  $(F_s - F_n)_{T=0}$  é chamada energia de condensação. De acordo com a teoria microscópica, este é o gap (hiato) de energia cujo valor é da ordem de  $(k_B T_c)^2 / E_F$ , onde  $E_F$  é a energia de Fermi dos elétrons de condução no estado normal, e  $k_B$  é a constante de Boltzmann.

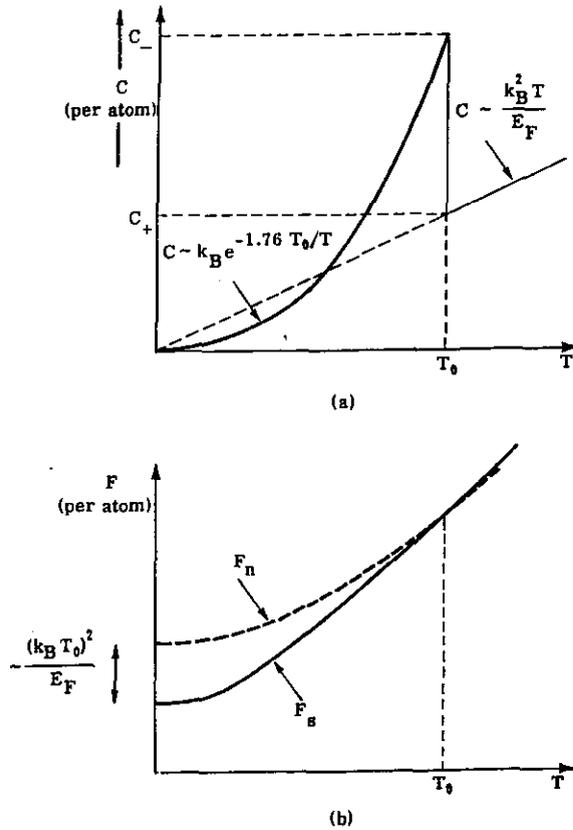


fig. 1 - (a) O calor específico eletrônico  $C$  de um supercondutor ( sem campo magnético) em função da temperatura. No ponto de transição  $T_0$ ,  $C$  tem uma descontinuidade.

(b) Mostra as fases normal e supercondutora da energia livre versus a temperatura. Estas duas curvas tem a mesma inclinação no ponto de transição  $T_0$ .

Considerações situações onde existam supercorrentes  $\vec{J}_s(\vec{r})$  e, associado a estas, um

campo magnético local  $\vec{B}(\vec{r})$ , no limite de correntes e campos fracos, temos uma nova relação entre estas grandezas, como veremos a seguir.

Considerando um metal resfriado abaixo de uma temperatura crítica  $T_c$ , apresentando-se no estado supercondutor, seus elétrons tendo uma massa efetiva  $m$ , a energia livre tem a forma:

$$F = \int F_s d^3x + E_{cin} + E_{mag} \quad (1.1)$$

onde  $F_s$  é a energia dos elétrons no estado condensado,  $E_{cin}$  é a energia cinética associada com as supercorrentes e  $E_{mag}$  é a energia associada ao campo magnético local. Chamando  $\vec{v}(\vec{r})$  a velocidade dos elétrons na posição  $\vec{r}$ , esta velocidade é relacionada com a densidade de corrente  $\vec{J}_s$  por

$$n_s e \vec{v}(\vec{r}) = \vec{J}_s(\vec{r}) \quad (1.2)$$

onde  $e$  é a carga do elétron, e  $n_s$  é o número de elétrons supercondutores por volume ( $cm^3$ ). A energia cinética é

$$E_{cin} = \int d^3x \frac{1}{2} m \vec{v}^2 n_s \quad (1.3)$$

a integral se estende por todo o volume da amostra. No limite que estamos estudando,  $\vec{v}(\vec{r})$  é uma função que varia suavemente com  $\vec{r}$ .

$E_{mag}$  é a energia associada ao campo magnético  $\vec{B}(\vec{r})$

$$E_{mag} = \int d^3x \frac{B^2}{8\pi}. \quad (1.4)$$

O campo é relacionado com a supercorrente  $\vec{J}_s$  pela equação de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_s. \quad (1.5)$$

Usando as equações (3), (4) e (5) a energia  $E$  fica

$$E = E_0 + \frac{1}{8\pi} \int \left\{ B^2 + \lambda^2 |\vec{\nabla} \times \vec{B}|^2 \right\} d^3x \quad (1.6)$$

onde

$$E_0 = \int F_s d^3x$$

e o comprimento  $\lambda$  é definido por

$$\lambda = \left( \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

Minimizando a energia livre (1.6) em relação ao campo  $B$ . Se  $\vec{B}(\vec{r})$  varia de  $\delta \vec{B}(\vec{r})$ , a energia  $E$  varia de um  $\delta E$ , dado por

$$\delta E = \frac{1}{4\pi} \int \left[ \vec{B} + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} \right] \cdot \delta \vec{B} d^3x. \quad (1.8)$$

O campo no interior da amostra supercondutora que minimiza a energia deve satisfazer

$$\vec{B} - \lambda^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0. \quad (1.9)$$

Esta equação foi proposta primeiramente pelos irmãos F. e H. London e permite o cálculo da distribuição de campos e correntes. O comprimento definido acima por  $\lambda$  é chamado de comprimento de London.

Aplicando a equação acima obtemos a penetração do campo magnético  $\vec{B}$  no supercondutor. Suponhamos que a superfície da amostra esteja no plano  $\widehat{xy}$  e a região  $z < 0$  é vácuo. O campo magnético  $\vec{B}$  tem dependência apenas na direção  $\widehat{z}$ . A solução para a eq. de London, (1.9), é

$$B_z(z) = B(0) \exp(-z/\lambda). \quad (1.10)$$

O campo  $B$  penetra na amostra apenas de uma distância  $\lambda$ . Este resultado é generalizado para uma amostra macroscópica de geometria arbitrária. Como o comprimento  $\lambda$  é pequeno, campos magnéticos fracos não penetram no supercondutor como mostra a fig.(2), e neste caso temos o conhecido efeito Meissner.

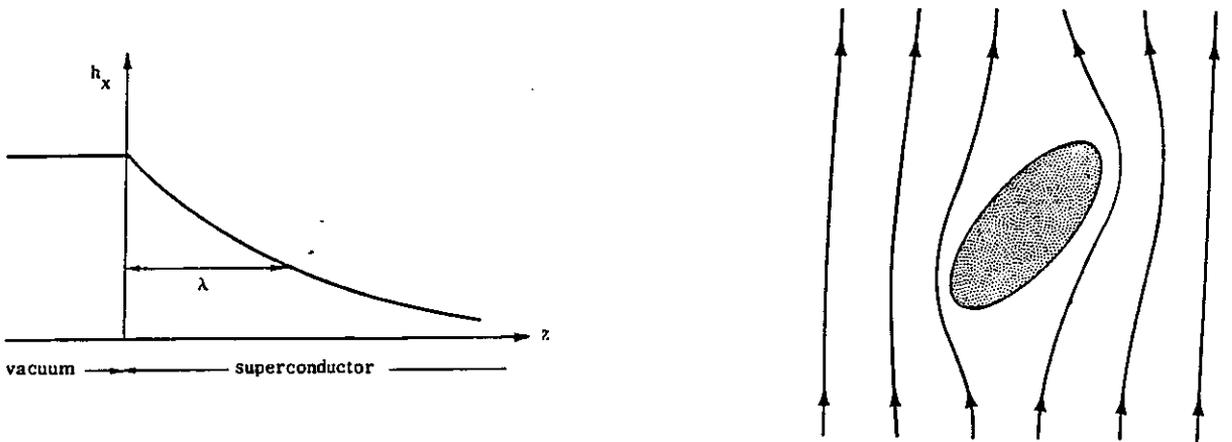


fig. 2 - (a) Mostra o comprimento de penetração de London.

(b) Distorção das linhas de campo em torno da amostra supercondutora. Caso o campo não seja muito intenso, o superconductor expeli completamente as linhas de campo de seu interior (efeito Meissner).

Podemos concluir que o superconductor encontra um estado de equilíbrio onde a soma das energias magnética e cinética é mínima, e este estado corresponde a expulsão do fluxo magnético do interior da amostra supercondutora.

Existe um campo crítico  $H_c$  o qual separa um material em duas fases: supercondutora e normal. Existem duas categorias de supercondutores, chamados tipo I e II. Os supercondutores do tipo I apresentam uma completa expulsão do fluxo magnético do seu interior em  $H_c$ . Os supercondutores do tipo II tem dois campos críticos,  $H_{c1}$  e  $H_{c2}$ . Aplicando-se um campo magnético  $H$ , a amostra não apresenta uma expulsão total do fluxo de linhas de campo do seu interior, exceto quando o campo externo  $H$  é menor que  $H_{c1}$ . Para campo externo  $H > H_{c1}$ , linhas de campo penetram na amostra. A região por onde passa o campo magnético está no estado normal. Isto ocorre na região  $H_{c1} < H < H_{c2}$ . Para  $H > H_{c2}$  a amostra não apresenta nenhuma expulsão do fluxo magnético. Um preenchi-

mento do interior da espécime pelas linhas de campo ocorre de modo que  $H = B$ . Ainda há supercondutividade na superfície da amostra, no intervalo  $H_{c2} < H < H_{c3}$ . O fluxo devido às correntes na superfície da amostra não estão sendo consideradas.

O campo crítico  $H_c$  decresce com a temperatura de acordo com a lei empírica[4]

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - (T/T_c)^2 \right]. \quad (1.11)$$

$T_c$  é a temperatura de transição à campo zero.

Um exemplo do P.G. De Gennes [1] mostra que a transição supercondutora à campo zero é de segunda ordem. Vamos discutir tal exemplo que elucida o campo crítico  $H_c$ . De  $H_c$  podemos calcular a diferença de energia entre o estado normal e supercondutor. Considerando uma amostra cilíndrica de raio  $a$  dentro de uma bobina de raio  $b$ , o campo uniforme dentro do solenoide é

$$B = \frac{4\pi Ni}{cl} \quad (1.12)$$

onde  $N$  é o número de espiras do solenoide e  $l$  é o seu comprimento, que é o mesmo da amostra. A energia livre do sistema é

$$F_n = \pi a^2 l f_n + \pi b^2 l \frac{B^2}{8\pi}. \quad (1.13)$$

$f_n$  é a densidade de energia livre da amostra no estado normal e o segundo termo é a energia magnética no interior da bobina. Supondo que a amostra se torne supercondura, a corrente na bobina se mantém constante. O campo é nulo no interior da amostra mas o valor da indução magnética  $\vec{B}$ , é mantido o mesmo na região  $a < r < b$ . A energia livre é agora

$$F_s = \pi a^2 l f_s + \pi(a^2 - b^2) l \frac{B^2}{8\pi}. \quad (1.14)$$

$f_s$  é a densidade de energia livre da amostra no estado supercondutor. A eq.(1.14) não considera efeitos de superfície (energia cinética das supercorrentes na superfície da amostra e a penetração do campo na camada externa) uma vez que para uma amostra macroscópica

$a \gg \lambda$ . Notemos que a função  $F_s$  é menor que  $F_n$ , tendo em vista que  $f_s < f_n$  e o termo magnético é menor no estado supercondutor. O que acontece é que o fluxo passando através da bobina diminui quando o sistema vai do estado  $(s) \rightarrow (n)$ . Esta variação no fluxo magnético induz uma voltagem  $V$  nas espiras. O trabalho realizado por esta voltagem no circuito é

$$\int V i dt = \int_s^n -\left(\frac{N}{c} \frac{d\phi}{dt}\right) i dt. \quad (1.15)$$

Como  $i$  é mantido constante durante a transição,

$$\int V i dt = \pi a^2 l \frac{B^2}{4\pi}. \quad (1.16)$$

Na transição,  $B = H_c$  e sendo a diferença  $F_s - F_n = \int V i dt$ , podemos através das eqs. (1.13) e (1.14) obter

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (1.17)$$

A eq. (1.17) nos permite deduzir varias grandezas termodinâmicas. A entropia é dada por

$$S = -\frac{df}{dT}. \quad (1.18)$$

A diferença de entropia entre as duas fases é

$$S_n - S_s = -\frac{1}{2\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}. \quad (1.19)$$

O calor latente da transição é

$$L = T(S_n - S_s) = -\frac{T}{2\pi} H_c \frac{dH_c}{dT}. \quad (1.20)$$

$L$  se anula quando a transição é a campo zero: Para  $T = T_c$ ,  $H_c = 0$ , e experimentos mostram que  $\frac{dH_c}{dT}$  é finito. Assim o calor latente a campo externo nulo é zero. Existe uma descontinuidade no calor específico em  $T = T_c$ .

$$C_n - C_s = -\frac{T}{2\pi} \left( \frac{dH_c}{dT} \right)_{T=T_c}^2. \quad (1.21)$$

À campo zero a transição supercondutora é de *segunda ordem*.

A variação com a temperatura para estes 3 campos críticos  $H_{c1}$ ,  $H_{c2}$  e  $H_{c3}$  é apresentado na fig. 3. Nesta tese a região em foco é  $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ . A região entre estes 2 campos é conhecida como estado de vórtice. Flutuações térmicas e desordem das linhas de vórtices, mostram importantes relações para os supercondutores de altas temperaturas. Huse e Radzihovsky, [2], após detalhado estudo, do diagrama de fase por campo médio, observaram significantes modificações que resultam, quando os efeitos de temperatura finita e desordem são incorporados. Flutuações térmicas, causam o derretimento da rede de vórtice, em um líquido para temperaturas elevadas. A desordem produz novas fases para baixas temperaturas. A fig. 4 mostra estas novas transições de fase. Estudos do campo  $H_{c3}$ , mostrando supercondutividade na superfície da amostra tem sido motivo de vários estudos [3]. A fig. 5 mostra a curva de magnetização. Nesta figura a linha pontilhada representa a curva encontrada para um supercondutor do tipo I, com o mesmo campo  $H_c$  de um supercondutor do tipo II representado na linha cheia. A fig. 6 mostra a curva  $B(H)$ .

A transição quando o campo aplicado  $H$  é igual a  $H_{c1}$  ou  $H_{c2}$  é uma transição de *segunda ordem*. Medidas de magnetização mostram que a curva  $B(H)$  é contínua em  $H = H_{c2}$ . Pode ser mostrado, por argumentos puramente termodinâmicos, a existência da descontinuidade no calor específico [1]. Estes argumentos ratificam a ordem da transição, e mostram que as transições Meissner-vórtice são de mesma ordem que as transições vórtice-normal.

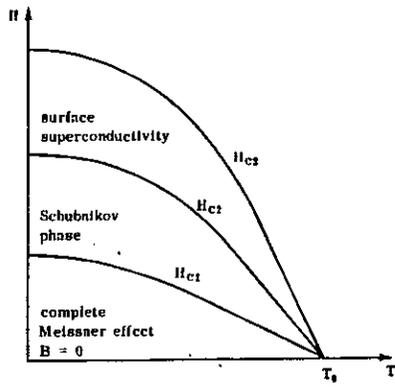


fig. 3 - Diagrama de fase para um supercondutor do tipo II.

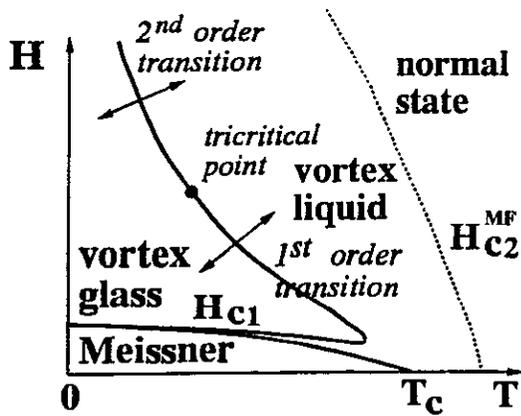


fig. 4 - Diagrama de fase para um supercondutor do tipo II, conseguido por teoria de campo médio. Mostrando regiões onde transições de fase ocorrem dentro do estado de vórtice.

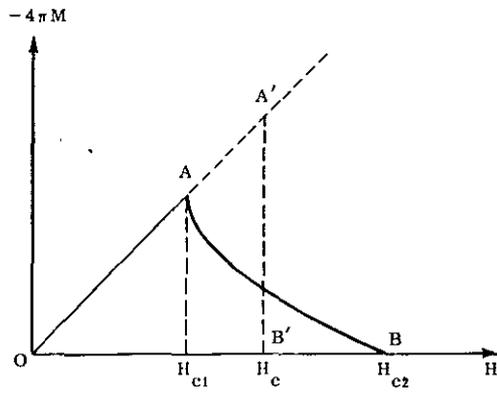


fig. 5 - Curva de magnetização para o tipo II (linha cheia) e para o tipo I (linha tracejada). Caso os dois materiais tenham o mesmo campo termodinâmico  $H_c$ , as áreas OAB e OA'B' são iguais.

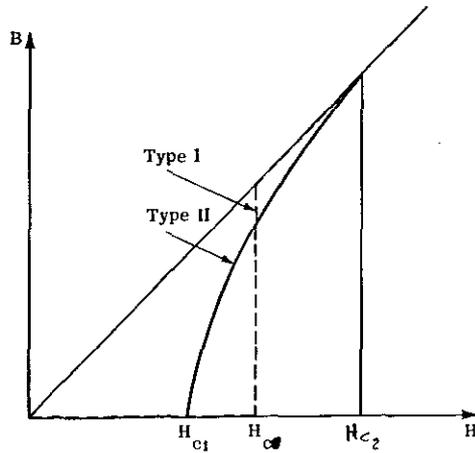


fig. 6 - A indução magnética em função do campo aplicado,  $H$ . A curva cheia é aplicada a um supercondutor do tipo II, e a tracejada ao tipo I.

Quando  $B$  é maior que  $H_{c1}$ , as linhas de campo que penetram na amostra supercondutora na forma de filamentos cujos núcleos são caracterizados por um raio  $\xi$ , chamado comprimento de coerência. O campo magnético é máximo no centro destes núcleos, e se estendem dentro do supercondutor por uma distância  $\lambda$ . Correntes  $\vec{J}$  circulam o filamento e são responsáveis pela expulsão do campo magnético em regiões de  $r > \lambda$ . Para  $r > \xi$  a teoria de London até aqui apresentada pode calcular campos e correntes. Na fig. 7 mostramos a estrutura de um vórtice.

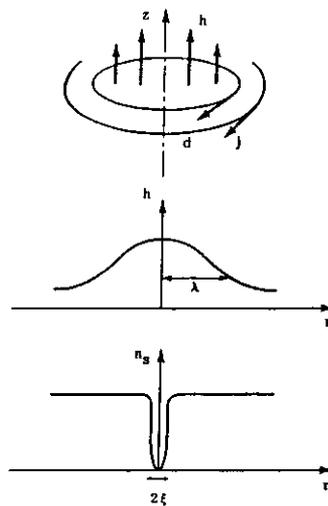


fig. 7 - Estrutura de uma linha de vórtice em um supercondutor do tipo II.

No limite de  $\lambda \gg \xi$  o núcleo do vórtice pode ser desprezado e descrito no contexto da teoria de London por uma função delta,  $\delta$ , a partir da eq. (1.9),

$$\vec{B} + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \Phi \delta^2(\vec{r}) \hat{e}. \quad (1.22)$$

Onde  $\Phi = \int \vec{B} d\vec{s} = n\Phi_0$  é o fluxo total da linha,  $\Phi_0$  é um quantum do fluxo, onde

$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7}$  gauss-cm<sup>2</sup>,  $n$  é o número de linhas, e  $\hat{e}$  é a direção desta linha. No limite  $\lambda \gg \xi$ , a (1.22) tem solução exata

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \hat{e}, \quad (1.23)$$

$K_0$  é a função de Bessel de ordem zero e quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $K_0$  cai com  $e^{-r/\lambda}$  e diverge logaritmicamente com  $\ln(\lambda/r)$  quando  $r \rightarrow 0$  [4].

Considerando duas linhas de vórtices retas e paralelas ao longo do eixo  $\hat{z}$  nas posições  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$  e  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ , a distribuição de campo magnético é dada pela equação de London, eq. (1.22), na forma

$$\vec{B} + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \Phi_0 [\delta_2(\vec{r} - \vec{r}_1) + \delta_2(\vec{r} - \vec{r}_2)] \hat{z}. \quad (1.24)$$

A eq. (1.24) é a superposição de dois campos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  devido aos vórtices 1 e 2.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_1(\vec{r}_1) + \vec{B}_2(\vec{r}_2).$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r - r_1}{\lambda}\right).$$

O campo sentido pelo vórtice 1, gerado pelo vórtice 2 é

$$B_{12} = \vec{B}_1(\vec{r}_2) = \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right) \quad (1.25)$$

A energia de interação por unidade de comprimento da linha é dada por

$$F_{12} = \frac{\Phi_0}{4\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right). \quad (1.26)$$

Esta energia repulsiva decresce com a distância entre os vórtices. Isto sugere que um supercondutor isotrópico, quando as linhas de vórtices estão alinhadas em uma certa direção  $\hat{z}$ , a energia que minimiza o sistema é a que corresponde ao maior afastamento entre estes filamentos. A configuração da rede triangular é a que torna esta distância maior [5]. Comparando o espaçamento entre uma rede quadrada e a triangular, verificamos

que os vórtices ficam mais distântes na rede triangular (ou hexagonal). Experiências confirmam este resultado [6], contudo em alguns materiais, defeitos na estrutura cristalina podem fazer com que encontremos uma rede quadrada ou até mesmo retangular sendo a rede estável. Defeitos no material podem introduzir inomogeneidade capaz de destruir inteiramente o arranjo regular da rede, apontando para um líquido de vórtices.

## 1.2 Teoria Ginzburg-Landau

Nesta seção descrevemos o vórtice perto de seu núcleo, onde  $n_s$  (densidade de elétrons supercondutores) varia necessariamente. Descrevemos o estado supercondutor próximo de  $H_{c2}$ , onde os núcleos estão suficientemente próximos e portanto a teoria de London não mais é válida.

Em 1950 foi proposta a teoria Ginzburg-Landau (GL) [7], uma teoria fenomenológica, propondo que a função de onda  $\psi(\vec{r})$  varie suavemente no espaço e que  $|\psi(\vec{r})|^2$  represente a densidade de elétrons supercondutores,  $n_s(\vec{r})$ . Esta teoria é desenvolvida pela aplicação do método variacional para uma densidade de energia expandida em série de potências de  $|\psi(\vec{r})|^2$  e  $|\vec{\nabla}\psi(\vec{r})|^2$ . O resultado desta teoria foi a generalização da teoria de London em situações onde  $n_s$  varie no espaço, e ainda ocasiões de resposta não linear

para campos fortes o suficiente para fazer variar a densidade de elétrons pelo supercondutor. Embora esta teoria responda a várias questões relativas ao estado misto, esta teoria não foi de logo aceita, uma vez que foi fundamentada na fenomenologia. Apenas dois anos após o aparecimento da teoria microscópica BCS [8], foi que esta situação modificou-se. Em 1959, Gor'kov [9] mostrou que a teoria GL podia ser derivada da teoria microscópica BCS, sendo esta última reformulada adequadamente em termos de funções de Green para permitir tratar regimes de inhomogeneidade espacial. Com isto Gor'kov encontrou os coeficientes da teoria GL,  $A$ ,  $B$ , e  $C$  em termos de grandezas microscópicas, como veremos em seguida. A energia livre proposta por Landau e Guinzburg é

$$F_s = F_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi} \quad (1.27)$$

Analizando esta equação na ausência de campo magnético e gradiente, teremos

$$F_s - F_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (1.28)$$

Esta função irá depender dos valores atribuídos a  $\alpha$  e  $\beta$ , como pode-se observar na fig. 8.

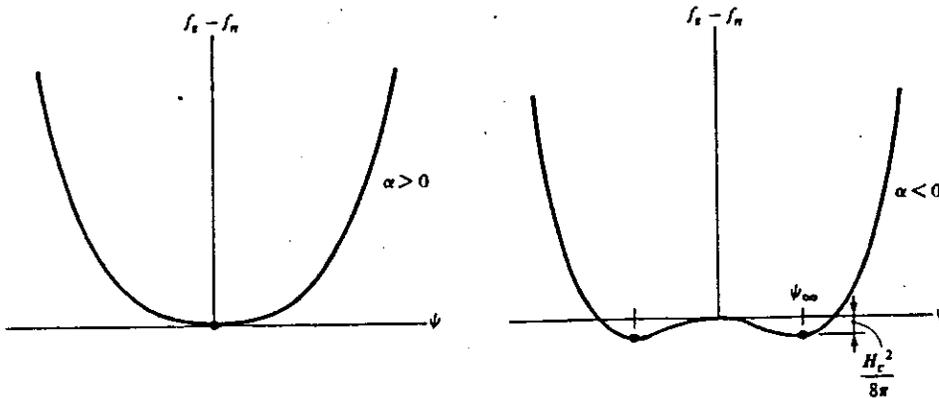


fig. 8 - A função energia livre de Ginzburg-Landau para  $T > T_c$  ( $\alpha > 0$ ) e para  $T < T_c$  ( $\alpha < 0$ ). Os pontos indicam as posições de equilíbrio. Por simplicidade, fazemos  $\psi$  como sendo real.

Para que a eq. (1.28) tenha significado físico,  $\beta$  deve ser maior que zero. Em  $T = T_c$ , temos  $|\psi|^2 = 0$ . Quando  $\alpha > 0$  o mínimo é em  $|\psi|^2 = 0$ , correspondendo ao estado normal. Caso  $\alpha < 0$  o mínimo ocorre quando  $|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ . A notação  $\psi_\infty$  é usada devido  $\psi$  se encontrar extremamente no interior do supercondutor, ficando deste modo sem contato com qualquer efeito de superfície (campos e correntes). Levando este resultado à eq. (1.28), encontramos

$$F_s - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{H_c^2}{8\pi}. \quad (1.29)$$

Nesta última equação, estamos usando a definição do campo termodinâmico  $H_c$ . Observamos que  $\alpha(T)$  varia de positivo para negativo na passagem por  $T_c$ . Próximo à temperatura crítica,  $\alpha(T)$  pode ser expandida em série de Taylor e encontramos,

$$\alpha(T) = (T_c - T) \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_{T=T_c}$$

como vimos acima,  $|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ , pondo nesta equação o valor de  $\alpha$  expandido, temos

$$|\psi_\infty|^2 = \frac{(T - T_c)}{\beta} \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_{T=T_c}$$

este resultado levado à eq. (1.28), obtemos

$$H_c^2(T) = \frac{4\pi}{\beta_c} (T - T_c)^2 \left( \frac{d\alpha}{dT} \right)_{T=T_c}^2$$

Esta expressão está mostrando que  $H_c(T)$  é proporcional a  $(T - T_c)$ , para regiões de  $T \approx T_c$ , o que é verificado experimentalmente e sintetizado pela equação (1.11).

Sob a ação de um campo magnético, a densidade de energia livre será adicionada do termo  $B^2/8\pi$  e ainda de termos associados ao possível aparecimento de gradientes do parâmetro de ordem  $\psi$ . Para valores pequenos de  $|\nabla\psi|^2$ , a energia atribuída a este termo pode ser escrita, via mecânica quântica, como

$$\frac{\hbar}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2 = \frac{1}{2m} \left| \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}\psi \right|^2.$$

Devido a invariância de calibre, devemos ter

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A}$$

onde  $\vec{A}$  é o potencial vetor para o campo  $\vec{B}$ . Deste modo, a energia associada ao campo magnético e ao gradiente de  $\psi$  é assim escrita:

$$\frac{\vec{B}^2}{8\pi} + \frac{1}{2m} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2. \quad (1.30)$$

Em geral a densidade de energia livre é apresentada adimensional, o que chamamos unidades reduzidas (u.d.). Podemos escrever eq. (1.27) definindo uma nova variável  $\Delta$ , tal que

$$\Delta = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha(T)}} \psi. \quad (1.31)$$

Assim, esta energia fica

$$F_s = \int d^3x \left\{ \alpha \frac{\alpha}{\beta} |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 |\Delta|^4 + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) \frac{1}{2m} |\vec{D} \Delta|^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 / 8\pi \right\}.$$

Como vimos anteriormente  $H_c^2/8\pi = \alpha^2(T)/2\beta$ , assim a energia livre é dividida pela energia magnética  $H_c^2/8\pi$ , depois de algumas etapas algébricas e sendo o comprimento de coerência dado por  $\xi^2(T) = \hbar^2/2m\alpha(T)$  e tomando

$$\vec{a} = \frac{2\pi\xi}{\phi_0} \vec{A},$$

obtemos,

$$F'_s = \frac{F_s}{\xi^3 H_c^2 / 4\pi} = \int d^3y \left\{ -|\Delta|^2 + \frac{|\Delta|^4}{2} \left| \left( \vec{\nabla}_y - \vec{a} \right) \Delta \right|^2 + \left[ \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2}H_c\xi^2} \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \times \vec{a} \right]^2 \right\}. \quad (1.32)$$

Sendo o termo do rotacional de  $\vec{a}$ , a constante de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ ,

$$\kappa = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}H_c\xi^2}. \quad (1.33)$$

Onde devemos salientar que existe apenas um parâmetro livre na teoria GL,  $\kappa$ . Podemos notar que  $\kappa$  é independente da temperatura, uma vez que

$$\kappa = \frac{mc}{\hbar 2e} \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}},$$

e como quem traz toda a dependência em  $T$  na teoria GL é o parâmetro  $\alpha(T)$ , temos uma nova característica para a constante de GL, esta não depende de  $T$ . Podemos interpretar  $\kappa$  levando em conta as definições do comprimento de penetração de London e do comprimento de coerência. Sendo  $2e = q$ . Como já vimos o  $\lambda$  é dado por

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi q^2 |\psi|^2}.$$

Para o caso de  $B = 0$ , mostramos que  $|\psi_\infty|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$ , assim é possível definir

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{mc^2}{4\pi q^2} \frac{\beta}{\alpha}$$

ou

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}(T=0)}{\sqrt{1 - T/T_c}},$$

e que

$$\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\xi}(T=0)}{\sqrt{1 - T/T_c}}.$$

A razão entre  $\lambda$  e  $\xi$  resgata o valor de  $\kappa$ . Concluimos que  $\kappa = \lambda/\xi$  e esta constante  $\kappa$  é intrínseca do material. Um outro modo de escrever  $\kappa$ , e bastante usual, é

$$\kappa = 2\sqrt{2} \frac{e}{\hbar c} H_c(T) \lambda^2(T). \quad (1.34)$$

Desta expressão obtemos uma fórmula simples para escrevermos  $H_c(T)$ ,

$$H_c(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\sqrt{2}\xi(T)\lambda(T)}, \quad (1.35)$$

onde  $\Phi_0 = hc/2e$  é o quantum de fluxo magnético que penetra no supercondutor.

### 1.3 Vórtice na aproximação de London

Na aproximação de London a densidade de elétrons supercondutores  $\rho(\vec{r})$  é mantida constante em todo o espaço. A função de onda é definida como  $\psi(r) = \rho e^{i\Theta(r)}$ . Aplicando  $\vec{D}$  na equação para o vórtice encontramos

$$\vec{D}\psi(r) = \rho e^{i\Theta(r)} \left( \hbar \vec{\nabla} \Theta - \frac{e}{c} \vec{A} \right).$$

Portanto, a energia livre é obtida a partir de Ginzburg-Landau, e temos

$$F = \frac{\rho^2}{m} \left( \hbar \vec{\nabla} \Theta - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{|\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2}{8\pi} + Cte \quad (1.36)$$

A lei de Ampère mostra a corrente na aproximação de London

$$\vec{J} = \frac{e}{c} \rho \left( \hbar \vec{\nabla} \Theta - \frac{e}{c} \vec{A} \right) = \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (1.37)$$

Obtemos

$$\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{e\rho^2}{m} \left( \hbar \vec{\nabla} \Theta - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \quad (1.38)$$

Sendo o comprimento de penetração de London dado por

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 \rho^2}$$

e

$$\phi_0 = \frac{hc}{2e}$$

o rotacional de  $\vec{B}$  pode ser escrito como

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \lambda^{-2} \left( \phi_0 \vec{\nabla} \Theta - \vec{A} \right)$$

e chegamos a equação

$$-\lambda^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \vec{B} = \phi_0 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta. \quad (1.39)$$

Integrando  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta(\vec{r})$  em todo o espaço, e utilizando o teorema de Stokes, temos

$$\int_s \{ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta(\vec{r}') \} ds = \oint \nabla \Theta \cdot dl$$

e sendo  $\nabla \Theta = \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{d\theta}$  e  $dl = r d\theta$  temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{d\Theta}{d\theta} r d\theta = 2\pi n.$$

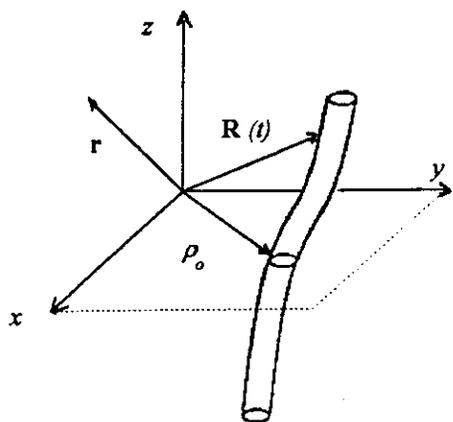
Onde  $n$  é um inteiro qualquer, fazemos  $n = 1$ . Assim,

$$\frac{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta}{2\pi} = \delta^2(\vec{r}') \hat{z}.$$

Portanto encontramos a equação

$$-\lambda^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B} + \vec{B} = \phi_0 \delta^2(\vec{r}') \hat{z}. \quad (1.40)$$

Onde  $\vec{r}'$  pertence ao plano como mostra a fig. 9. Note que  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi \equiv 0$  se e somente se  $\phi$  não tenha singularidades no espaço. Entretanto o vórtice é uma inhomogeneidade, desta maneira o  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta$  não é nulo. É importante notar que agora,  $\frac{\phi_0}{2\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta = \delta^2(\vec{r}') \hat{z}$ , é derivado e não mais imposto à força como na eq. (1.22).



$$\vec{R}(t) = t\hat{z} + \vec{r}_o$$

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}_o = \vec{\rho}_o = \rho_{0x}\hat{x} + \rho_{0y}\hat{y}$$

fig. 9 - Uma linha de fluxo, de forma arbitrária, é apresentada no sistema de referência.

Mostraremos agora o formalismo para linhas de vórtice de forma arbitrária fazendo uso das funções de Green.

Seja  $\vec{R}(t)$  um vetor que descreve a posição de um vórtice no espaço, como mostra a fig. 9. Onde  $t$  é um parâmetro arbitrário. Analizando a eq. (1.43) para o caso de um vórtice reto na direção  $\hat{z}$ , temos

$$\frac{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta(\vec{r})}{2\pi} = \hat{z} \delta(y - \rho_{0y}) \delta(x - \rho_{0x}).$$

A equação de London pode ser reescrita ficando:

$$\vec{B} - \lambda^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \hat{z} \phi_0 \delta(y - \rho_{0y}) \delta(x - \rho_{0x}). \quad (1.41)$$

Podemos reescrever esta equação para  $N$  vórtices,

$$\vec{B} - \lambda^2 \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \hat{z} \phi_0 \sum_{i=1}^N \int d\vec{R}_i \delta^3(\vec{r} - \vec{R}_i). \quad (1.42)$$

Podemos por hipótese utilizar a função de Green como solução para  $\vec{B}(\vec{r})$ , e levar a eq. (1.46) à (1.45) e isto indicando a solução desta equação. Assim,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_0 \int d\vec{R}_i G(\vec{r} - \vec{R}_i). \quad (1.43)$$

A energia livre oriunda da eq. (1.6) pode ser escrita como

$$F = \frac{\phi_0^2}{8\pi} \sum_{i,j=1}^N \iint d\vec{R}_j \cdot d\vec{R}_i G(\vec{R}_i - \vec{R}_j). \quad (1.44)$$

A eq.(1.45) mostra que a energia livre para um sistema de linhas de vórtices pode ser calculada pelo uso das funções de Green. Estas funções de Green são encontradas através do uso de transformadas de Fourier, como vemos a seguir: No caso tridimensional (3D),

$$(-\lambda^2 \vec{\nabla}^2 + 1)G(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$$

$$G(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\lambda^2 k^2 + 1}. \quad (1.45)$$

No limite quando  $\lambda$  é muito grande podemos esperar que

$$\vec{\nabla}^2(-\lambda^2 G(\vec{x})) \simeq \delta^3(\vec{x}) \quad (1.46)$$

e sendo[10],

$$\delta^3(\vec{x}) = \nabla^2 \left( -\frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \right),$$

temos,

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\lambda^2|\vec{x}|} \quad (1.47)$$

$G(\vec{x})$  é função do módulo  $|\vec{x}|$ , assim para todo  $\vec{x} \neq 0$  implica  $r = |\vec{x}|$ . Podemos, deste modo, escrever:

$$-\lambda^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rG_3) + G_3 = 0$$

fazendo  $\tilde{r} = r/\lambda$ ,

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{d}{d\tilde{r}}(\tilde{r}G_3(\tilde{r})) = G_3(\tilde{r}).$$

Esta última equação tem como solução

$$\tilde{r}G_3(\tilde{r}) = Ae^{-\tilde{r}}.$$

Portanto,

$$G(\tilde{r}/\lambda) = \frac{1}{4\pi\lambda^2} \frac{e^{-|\vec{x}|/\lambda}}{|\vec{x}|}. \quad (1.48)$$

Supondo que as linhas de vórtices sejam retas e paralelas, como mostra a fig.10:

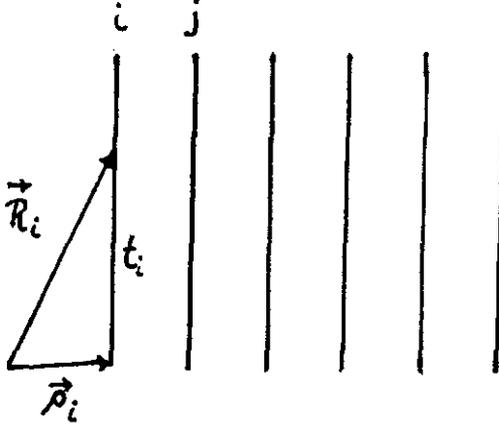


fig. 10 - Linhas de fluxo retas.

Observando a fig.10 podemos representar o vetor  $\vec{R}_i$  em termos de  $\hat{z}$  e  $\vec{\rho}_i$ . Sendo,

$$\vec{R}_i = t_i \hat{z} + \vec{\rho}_i$$

Fazendo esta mudança de variável e levando em conta a eq. (1.45), temos

$$F = \frac{\phi_0^2}{8\pi} \sum_{i,j=1}^N \iint dt_i dt_j \int \frac{dk_z}{2\pi} e^{ik_z(t_i - t_j)} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j)}}{\lambda^2(q^2 + k_z^2) + 1}. \quad (1.49)$$

A eq. (1.50) mostra a função de Green, eq. (1.49), decomposta vetorialmente. Notemos que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_i e^{ik_z t_i} = 2\pi \delta(k_z)$$

sendo assim, é possível reescrever a eq. (1.50), como

$$F = \frac{\phi_0^2}{8\pi} \sum_{i,j=1}^N \int dt_j \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j)}}{\lambda^2 q^2 + 1}. \quad (1.50)$$

A primeira integral na eq. (1.51) é igual ao tamanho da linha de vórtice, e chamaremos de  $L$ . A segunda integral nesta equação é a função de Green em 2D [10]. Então podemos escrever a energia livre por comprimento como,

$$\frac{F}{L} = \frac{\phi_0^2}{16\pi} \sum_{i,j=1}^N K_0[(\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j)/\lambda] \quad (1.51)$$

Esta última equação mostra que a energia livre por comprimento de um sistema de linhas paralelas ao campo externo comporta-se como um sistema bidimensional. Este resultado foi obtido anteriormente na eq. (1.26)

## 1.4 Extensão do tratamento de London para o núcleo do vórtice

Dentro do contexto da teoria de London estudamos a linha de vórtice considerando a região do seu núcleo. Introduzimos o comprimento de coerência  $\xi$ .

A fim de ser mais didático, encontramos o valor de  $B(\vec{r})$  utilizando a sua transformada de Fourier e a definição da função delta  $\delta(\vec{r})$ . Levando estes dois ingredientes à equação de London obtemos

$$B(\vec{k}) = \frac{\phi_0}{(2\pi)^2} \frac{1}{1 + \lambda^2 k^2},$$

o que nos permite escrever

$$B(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ 2\pi \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{1/\lambda^2 + k^2} \right],$$

que é a forma integral da eq. (1.23). Esta função diverge na origem, para evitarmos esta divergência consideramos o núcleo do vórtice introduzindo o comprimento de coerência  $\xi$ , que mede o raio do núcleo do vórtice, na equação acima. Introduzimos este comprimento na forma  $e^{-\xi^2 k^2/2}$ .

$$B(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[ 2\pi \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-\xi^2 k^2/2}}{1/\lambda^2 + k^2} \right] \quad (1.52)$$

Podemos ver que no limite  $\xi \rightarrow 0$  a eq. (1.53) retorna à forma apresentada pela equação de London usual. Quando  $\xi \rightarrow \infty$  a eq. (1.53) é nula, entretanto não mais é um resultado físico uma vez que esta teoria se aplica para região  $\xi k \ll 1$ .

Esta equação pode ser desenvolvida, encontrando-se

$$B_z(r) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} 2\pi \int_0^\infty \frac{kdk}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\xi^2 k^2/2}}{1/\lambda^2 + k^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ikr \cos \theta}$$

a integral em  $\theta$  tem como resultado [12]  $2\pi J_0(\beta)$ , onde  $J_0$  é a função de Bessel de ordem zero, e  $\beta = kr$ . Assim, temos

$$B_z(r) = \int_0^\infty kdk J_0(rk) g(k), \quad (1.53)$$

onde

$$g(k) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{e^{-\xi^2 k^2/2}}{1/\lambda^2 + k^2}. \quad (1.54)$$

Podemos escrever a eq. (1.54) em unidades reduzidas (u.r.), fazendo  $\xi' = \xi/r$  e  $\lambda' = \lambda/r$ , de tal forma que teremos

$$B_z(r) = \frac{\phi_0}{2\pi r^2} \int_0^\infty (rk) d(rk) J_0(rk) \frac{e^{-\xi'^2 (rk)^2/2}}{1 + \lambda'^2 (rk)^2}$$

chamando  $x = rk$ , teremos

$$B_z(x) = \frac{\phi_0}{2\pi r^2} \int_0^\infty x dx J_0(x) \frac{e^{-\xi'^2 x^2/2}}{1 + \lambda'^2 x^2} \quad (1.55)$$

No limite  $\xi = 0$ ,  $B_z(\vec{r}) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0(r/\lambda)$ , como é apresentado por Fischer [11]. No limite quando  $\vec{r} \rightarrow 0$  podemos desenvolver a eq. (1.56),

$$B_z(0) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \int_0^\infty kdk J_0(0) \frac{e^{-\xi^2 k^2/2}}{(1/\lambda)^2 + k^2},$$

sabendo que  $J_0(0) = 1$  e fazendo  $x = k^2$ , teremos:

$$B_z(0) = \frac{\phi_0}{2\pi\lambda^2} \int_0^\infty dx \frac{e^{-x\xi^2/2}}{(1/\lambda)^2 + x}.$$

Pela referência [12], eq. (3.352), temos

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-\mu x}}{x + \beta} = -e^{\beta\mu} E_i(-\mu\beta)$$

onde  $E_i$  é dado por,

$$E_i(x) = c + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!},$$

$c$  é a constante de Euler,  $c = 0.577215\dots$  Fazendo  $\mu = \xi^2/2$ ,  $\beta = 1/\lambda^2$  e tendo que  $\mu\beta = \frac{1}{2}(\frac{\xi}{\lambda})^2$ , podemos escreve este campo em u.r. e encontramos

$$B_z(0) = \frac{1}{2k} e^{\frac{1}{2k^2}} \left[ -c + \ln 2k^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n} \right]. \quad (1.56)$$

A eq (1.59) nos mostra que o campo magnético no interior de um vórtice de raio  $\xi$  depende da característica própria do supercondutor dada pela constante de GL,  $\kappa = \lambda/\xi$ .

Obtemos, assim, um resultado não divergente para o valor de  $B$ , no centro do vórtice, já, a teoria de London, sem  $\xi$ , diverge neste limite. Então, um importante ponto é a consideração do núcleo do vórtice, na teoria de London. A fig. 11 mostra o comportamento de  $B_z(r)$  sem  $\xi$  e com  $\xi$  próximo da origem.

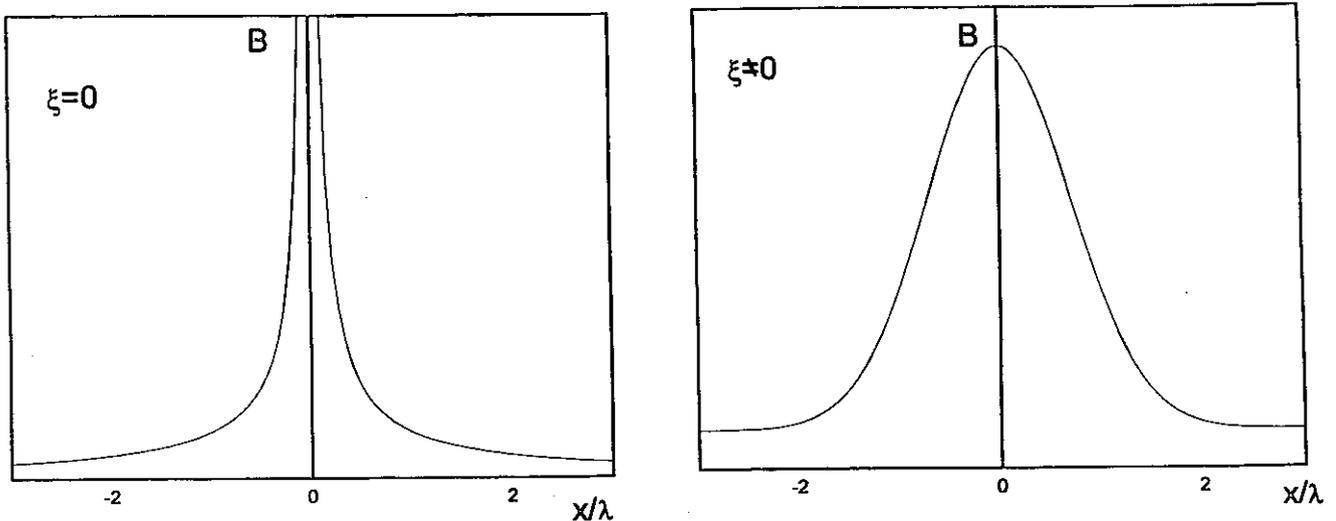


fig. 11 - Mostra o campo magnético de um vórtice, levando em conta a interação eletromagnética do seu interior, e sem considera-lo.

## 1.5 A anisotropia de massa

Nesta seção iremos introduzir as grandezas anisotrópicas da teoria como por exemplo:  $\lambda$ ,  $\xi$ , o tensor das massas, entre outras. Estudaremos separadamente a energia livre de London, a rede de vórtice inclinada, a energia de interação (energia inter), e a auto-energia da linha de vórtice (energia intra).

A aproximação de London aplica-se aos supercondutores de altas temperaturas. As teorias considerando  $E = E_{cin} + E_{mag}$  para supercondutores, tipo as teorias London e Lawrence-Doniach [13], são boas aproximações quando  $\xi < l$  ( $l$  é o livre caminho médio dos elétrons supercondutores) uma vez que não ocorrem colisões nos núcleos dos vórtices, portanto não há dissipação de energia. A teoria de London é contínua mas a teoria Lawrence-Doniach é descontínua considerando o espaçamento,  $a$  entre as camadas. Sendo o comprimento de coerência  $\xi > a$ .

Existe nos supercondutores de alta  $T_c$ , os planos de Cobre e Oxigênio ( $CuO$ ), onde as correntes supercondutoras fluem. Estas correntes podem passar para outros planos, isto é, estando no plano  $n$ , esta pode ir para o plano  $n + 1$  ou  $n - 1$ , através do conhecido efeito Josephson.

Aqui não estudamos uma teoria para os planos de  $CuO$ , conseqüentemente não existe parâmetro associado a distância entre estes. Consideramos sim, uma anisotropia de massa que descreve a maior inércia ao longo do eixo de anisotropia, isto é, perpendicular aos planos de  $CuO$ . Para isto, atribuímos à os eixos cristalográficos diferentes inércias, representadas por massas distintas em  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , e  $\hat{z}$ . Assim temos, em  $\hat{x}$ :  $m_1$ ;  $\hat{y}$ :  $m_2$ ;  $\hat{z}$ :  $m_3$ .

Contudo é observado que  $m_1 \simeq m_2$ . Desta forma, temos um supercondutor com simetria uniaxial de massa, tal que  $m_3 > m_1$ . O tensor das massas é representado por

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

A energia livre de Ginzburg-Landau é escrita como

$$F = \int d^3x \frac{1}{2} (\overrightarrow{D}\psi)^* \cdot \frac{1}{\overleftrightarrow{M}} \cdot (\overrightarrow{D}\psi) + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A})^2}{8\pi}. \quad (1.58)$$

Onde  $\overleftrightarrow{M}$  é dado por (1.57) e as derivadas covariantes  $\overrightarrow{D}$  são dadas por  $D_j = \frac{\hbar}{i} \partial_j - \frac{q}{c} A_j$ . Fazendo variações da energia livre de Helmholtz da parte cinética  $\delta F_{cin}$  e da parte de campo  $\delta F_{mag}$  e supondo que a variação total de  $F$  seja nula. Encontramos via equação de Ampère,

$$J_i = \frac{1}{2m_{ij}} [\psi^* D_j \psi + (D_j \psi)^* \psi]. \quad (1.59)$$

Na aproximação de London temos,

$$\psi = \rho e^{i\Theta}$$

onde  $\rho$  é constante e apenas existe variação espacial na fase da função de onda,  $\Theta = \Theta(\overrightarrow{x})$ .

Neste caso temos

$$\overrightarrow{D}\psi = \left( \hbar \nabla \Theta - \frac{q}{c} \overrightarrow{A} \right) \rho e^{i\Theta} = \psi \left( \hbar \nabla \Theta - \frac{q}{c} \overrightarrow{A} \right) \quad (1.60)$$

e

$$J_i = \frac{|\psi|^2}{m_{ij}} \left( \hbar \partial_j \Theta - \frac{q}{c} A_j \right). \quad (1.61)$$

Trabalharemos com a notação de coordenadas (índices), pois fica mais fácil observarmos a anisotropia do problema. Assim a lei de Ampère aplicada no caso de London anisotrópico, isto é, eq. (1.65), nos permite

$$m_{ii}\epsilon_{ips}\partial_p B_s = \frac{4\pi q^2}{c^2} |\psi|^2 \left( \hbar \partial_i \Theta - \frac{q}{c} A_i \right) \quad (1.62)$$

onde  $\phi_0 = \frac{\hbar c}{q}$  é o quantum de fluxo magnético. Definindo o parâmetro de massa  $M$  de tal modo que

$$\widehat{m}_{ii} = \frac{m_{ii}}{M} \quad (1.63)$$

onde  $M = m_3$ . A eq. (1.66) fica,

$$\widehat{m}_{ii}\epsilon_{ips}\partial_p B_s = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \partial_i \Theta - A_i \right) \quad (1.64)$$

Tomando o rotacional da eq. (1.68), teremos

$$\lambda^2 \epsilon_{jkl} \partial_k \widehat{m}_{ii} \epsilon_{ips} \partial_p B_s = \frac{\Phi_0}{2\pi} \epsilon_{jkl} \partial_k \partial_l \Theta - \epsilon_{jkl} \partial_k A_l \quad (1.65)$$

A equação acima apresenta os termos:

$$\text{a) } \epsilon_{jkl} \partial_k \partial_l \Theta = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Theta(\vec{r}) = 2\pi \delta_2(\vec{r}_v - \vec{r}).$$

Observemos que  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \xi$  é identicamente nulo. O vórtice é uma descontinuidade no espaço, portanto esta relação não mais é verdadeira. E em certos pontos do espaço esta relação é diferente de zero.

$$\text{b) } \epsilon_{jkl} \partial_k A_l = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_j = (\vec{B})_j.$$

Sabemos que  $\vec{B}$  é o campo magnético local na direção  $j$ . Podemos reescrever a eq. (1.66) e teremos

$$\lambda^2 \epsilon_{jkl} \partial_k [\widehat{m}_{ii} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j] = \Phi_0 \delta^2(\vec{r}_v - \vec{r}) \widehat{e}_j - B_j \quad (1.66)$$

$$\lambda^2 \vec{\nabla} \times \overleftarrow{M} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \Phi_0 \delta^2(\vec{r}_v - \vec{r}) - \vec{B}$$

Vemos que no caso isotrópico  $\widehat{m}_{ii} = \delta_{ii}$  e resgatamos a eq. (1.22).

### 1.5.1 A energia livre de London

Nesta seção mostramos que a energia cinética e a energia do campo magnético são as contribuições para a energia livre de London.

A energia livre na aproximação de London pode ser escrita tomando duas partes: a parte cinética e a parte do campo magnético. A energia cinética das supercorrentes também podem ser escrita em função de  $\vec{B}$  através da lei de Ampère. Temos assim,

$$F = \int d^3x \left\{ \frac{\vec{p}^2}{2m_{ij}} + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} \right\}$$

$$F = \int d^3x \left\{ \frac{|\psi|^2}{2m_{ij}} \left( \hbar \partial_j \Theta - \frac{q}{c} A_j \right) \left( \hbar \partial_i \Theta - \frac{q}{c} A_i \right) + \frac{\vec{B}^2}{8\pi} \right\}$$

Usando a lei de Ampère,  $\vec{J} = \frac{c}{4\pi q} \nabla \times \vec{B}$ , podemos escrever

$$F = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \left\{ \lambda^2 \widehat{m}_{ij} (\nabla \times \vec{B})_i (\nabla \times \vec{B})_j + \vec{B}^2 \right\} \quad (1.67)$$

ou ainda,

$$F = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{B} \left\{ \vec{B} - \lambda^2 m \nabla^2 \vec{B} \right\} \quad (1.68)$$

A energia livre acima é minimizada para a equação de London. A equação de London para  $N$  vórtices é dada, a partir da eq. (1.67), por:

$$\lambda^2 \{ \nabla \times [\vec{M} (\nabla \times \vec{B})_i] \}_j + B_j = \Phi_0 \hat{e}_j \sum_{m=1}^N \delta^2(\vec{r}_v - \vec{r}) \quad (1.69)$$

onde  $\vec{M}$  é definido na seção anterior.

### 1.5.2 A rede de vórtice inclinada

Nesta seção definimos o parâmetro de anisotropia de massa  $\gamma$ , e os parâmetros da célula unitária tais como  $\phi$ ,  $\rho$ .

Dentro da aproximação de London analisamos um supercondutor tridimensional (3D), onde as linhas de vórtices são retas e paralelas ao campo magnético aplicado [14],[15]. Considerando o plano ortogonal a estas linhas, os vórtices comportam-se como estruturas pontuais. A teoria de London é válida quando o tamanho do núcleo do vórtice, descrito pelo comprimento de coerência  $\xi$ , é muito menor que a distância  $L$  entre os vórtices e o comprimento de penetração de London  $\lambda$ . A simetria uniaxial é devido ao comprimento de penetração de London ao longo de um dos eixos cristalinos ser diferentes nos demais eixos do cristal. Os supercondutores de alta temperatura crítica [16] tem uma simetria uniaxial e o eixo de simetria é perpendicular aos planos de  $CuO$ . Nesta seção atribuímos à direção uniaxial da amostra o número 3 e definimos o parâmetro de anisotropia de massa por

$$\gamma = \frac{m_1}{m_3}, \quad (1.70)$$

onde  $m_1 = m_2$ . O parâmetro de anisotropia de massa é obtido por várias técnicas, por exemplo, magneto torquemétrie [17]. Nesta tese apresentaremos uma expressão analítica onde  $\gamma$  é função apenas do ângulo  $\theta_{\max}$  que produz o torque máximo na amostra. Para os supercondutores de alta  $T_c$  valores típicos de  $\gamma$  são  $10^{-2}$  e  $10^{-4}$  para o  $YBCO$  e  $BSCCO$  respectivamente.

O cálculo da energia livre da rede de vórtices envolve o desenvolvimento da soma das interações entre os diversos membros que constituem a rede. Tais somatórios foram obtidas por Kogan [19] e Fetter [20], este último obteve um método de convergência rápida para o caso de redes de vórtices em supercondutores isotrópicos. Dória [21] desenvolveu um método de convergência rápida para um supercondutor com simetria uniaxial no limite da aproximação de London. Campbell, Dória e Kogan [22] encontraram a configuração da rede de vórtice que minimiza a energia livre quando  $\lambda \gg L$  como função do parâmetro de anisotropia de massa  $\gamma$  e do ângulo  $\theta$  entre a indução magnética e  $\vec{B}$  e a direção uniaxial  $\hat{c}$ . Sendo  $L_1$  e  $L_2$  os lados da célula unitária e  $\phi$  o ângulo entre estes lados. O lado  $L_1$  fica ao longo do plano definido por  $\vec{B}$  e  $\hat{c}$ . Este plano é referido como plano- $\theta$ . O lado  $L_2$  faz um ângulo  $\phi$  com o plano- $\theta$ . A razão entre estes dois lados é  $\rho = L_1/L_2$ . Os parâmetros

encontrados na referência [22] são dados por

$$\phi = \arctan \sqrt{\frac{3}{\cos^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta}}$$

e

$$\rho = 2 \cos \phi \quad (1.71)$$

A fig.(12) mostra a célula unitária .

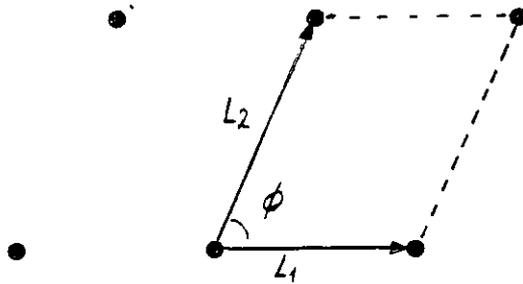


fig. 12 - A célula unitária.

### 1.5.3 Energia de Interação (energia inter)

Nesta seção estudamos o espaço recíproco, e uma fórmula de convergência rápida muito útil para o cálculo da rede de vórtices.

A célula unitária mostrada na fig. 12 é uma estrutura básica que se repete ao longo das direções de periodicidades. Entretanto esta não é necessariamente a célula primitiva e de fato esta célula pode ser formada por várias células primitivas juntas. Existe apenas uma célula primitiva mas diferentes células unitárias para a mesma rede física. Tomamos

a célula unitária sendo um paralelograma contendo  $J$  vórtices. O fluxo magnético é quantizado para a célula unitária

$$BL_1L_2 \sin \phi = J\Phi_0 \quad (1.72)$$

tendo  $J$  vórtices dentro da área  $L_1L_2 \sin \phi$ . A periodicidade na rede de vórtice deve refletir na periodicidade do potencial. O potencial representado pela função de Bessel modificada de ordem zero[10] pode ser escrito como[21]

$$V(\vec{x}) = \frac{2\pi}{L_1L_2 \sin \phi} \sum_{\vec{g}} \frac{e^{i\vec{g} \cdot \vec{x}}}{(\vec{g} \cdot \vec{x}_1)^2 + (\vec{g} \cdot \vec{x}_2)^2 + \mu^2} \quad (1.73)$$

$\mu$  é o *cut-off* da teoria, sendo  $\mu = 1/\lambda$  e sendo  $\vec{g}$  um vetor do espaço recíproco definido por  $\vec{g} = \frac{2\pi}{\sin \phi} (\frac{n_1}{L_1} \hat{v}_1 + \frac{n_2}{L_2} \hat{v}_2)$ , onde  $n_1$  e  $n_2$  são inteiros quaisquer. Os vetores unitários satisfazem as relções:  $\hat{v}_1 \cdot \hat{e}_1 = \sin \phi$ ,  $\hat{v}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$ ,  $\hat{v}_2 \cdot \hat{e}_1 = \sin \phi$ ,  $\hat{v}_1 \cdot \hat{x}_1 = \sin \phi$ ,  $\hat{v}_1 \cdot \hat{x}_2 = -\cos \phi$ ,  $\hat{v}_2 \cdot \hat{x}_1 = 0$ ,  $\hat{v}_2 \cdot \hat{x}_2 = 1$  e  $\hat{x}_1 = \hat{e}_1$ ,  $\hat{x}_2 = \hat{v}_2$ . Verificando que  $V(\vec{x}) = V(\vec{x} + \vec{L}_n)$ , encontramos

$$e^{i\vec{g} \cdot \vec{x}} = e^{i\vec{g} \cdot (\vec{x} + \vec{L}_n)} \rightarrow e^{i\vec{g} \cdot \vec{L}_n} = 1.$$

Calculamos o potencial  $V(\vec{x})$  que possui convergência rápida [21], este cálculo encontra-se no Apêndice A.

$$V(\vec{x}) = \frac{\cosh [\mu_0 (\sigma/2 - |z_2|)]}{2\mu_0 \sinh(\mu_0 \sigma/2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \cos [m(z_1 + \chi s)] \frac{e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2} |z_2 + \chi s|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}}, \quad (1.74)$$

onde  $z_1 = \frac{2\pi x_1}{L_1}$ ,  $z_2 = \frac{2\pi x_2}{L_2}$ ,  $\sigma = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \sigma_0$ ,  $\sigma_0 = \frac{2\pi \sin \phi}{\rho}$ ,  $\chi = \chi_0$ ,  $\chi_0 = \frac{2\pi \cos \phi}{\rho}$ , e  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \frac{L_1 \mu}{2\pi}$ .  $\mu = 1/\lambda$ , sendo  $\lambda$ , o comprimento de London. Separamos este potencial em partes, para facilitar a construção de um programa, em linguagem C. Onde temos:

O termo sem série,

$$\tilde{V}_0 = \frac{\cosh [\mu_0 (\sigma/2 - |z_2|)]}{2\mu_0 \sinh(\mu_0 \sigma/2)} - \frac{1}{2} \ln[1 - 2\cos(z_1)e^{-|z_2|} + e^{-2|z_2|}];$$

A parte da série em  $m$ , tomamos  $s = 0$ ,

$$\tilde{V}_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \cos(mz_1) \left[ \frac{e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2}|z_2|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}} - \frac{e^{-m|z_2|}}{m} \right];$$

A parte da série em  $m$  e  $s$ , onde  $\tilde{z}_1$  e  $\tilde{z}_2$  dependem de  $s$ ,  $\tilde{z}_1 = z_1 + \chi s$  e  $\tilde{z}_2 = z_2 + \chi s$ ,

$$\tilde{V}_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos(m\tilde{z}_1) \left[ \frac{e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2}|\tilde{z}_2|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}} - \frac{e^{-m|\tilde{z}_2|}}{m} \right];$$

e o produtório,

$$\tilde{V}_3 = -\frac{1}{2} \ln \prod_{s=1}^{\infty} \left( 1 - 2\cos \tilde{z}_1 e^{-|\tilde{z}_2|} + e^{-2|\tilde{z}_2|} \right).$$

Ficando o potencial  $V(\vec{x})$  na forma

$$V(\vec{x}) = \tilde{V}_0 + \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3. \quad (1.75)$$

O cálculo de  $V_0(\vec{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} [V(\vec{x}) - K_0(\vec{x})]$ , é calculado e sendo  $V(\vec{x})$  dado pela eq. (1.76) e  $K_0(\vec{x})$  é dado por

$$K_0(\vec{x}) = -\left\{ \ln(|\vec{x}|/2) + Ce \right\}$$

onde  $Ce = 0.5772\dots$  é a constante de Euler. Obtemos a equação

$$V_0(\vec{x}) = \frac{1}{2\mu_0 \tanh(\mu_0 \sigma / 2)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(m\chi s) e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2} \sigma s}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}} - \frac{1}{m} \right) + \ln\left(\frac{\mu_0}{2}\right) + 0.5772\dots \quad (1.76)$$

Verificamos assim, a dependência logarítmica próximo à origem para o potencial  $V_0(\vec{x})$  e encontramos  $V_0(\vec{x}) = K_0(\vec{x})$ . O potencial dado pela eq. (1.75), respeita a periodicidade da rede de vórtice, isto é,  $V(\vec{x}) = V(\vec{x} + \vec{L}_n)$  onde  $\vec{L}_n$  é um vetor da rede.

Fizemos um programa em linguagem C, o qual foi generalizado para o caso inclinado, este programa calcula a eq. (1.76) e nos permitiu estudar alguns aspectos deste potencial.

Analisamos este potencial em relação a várias grandezas da teoria, como por exemplo: O potencial em função do comprimento de penetração de London; em função da posição na rede; em função de parâmetros da célula unitária,  $\phi$ . Encontramos, ainda, o famoso resultado de Abrikosov, para a rede de mínima energia, e mostramos a aproximação  $V_0(\vec{x}) = K_0(\vec{x})$ .

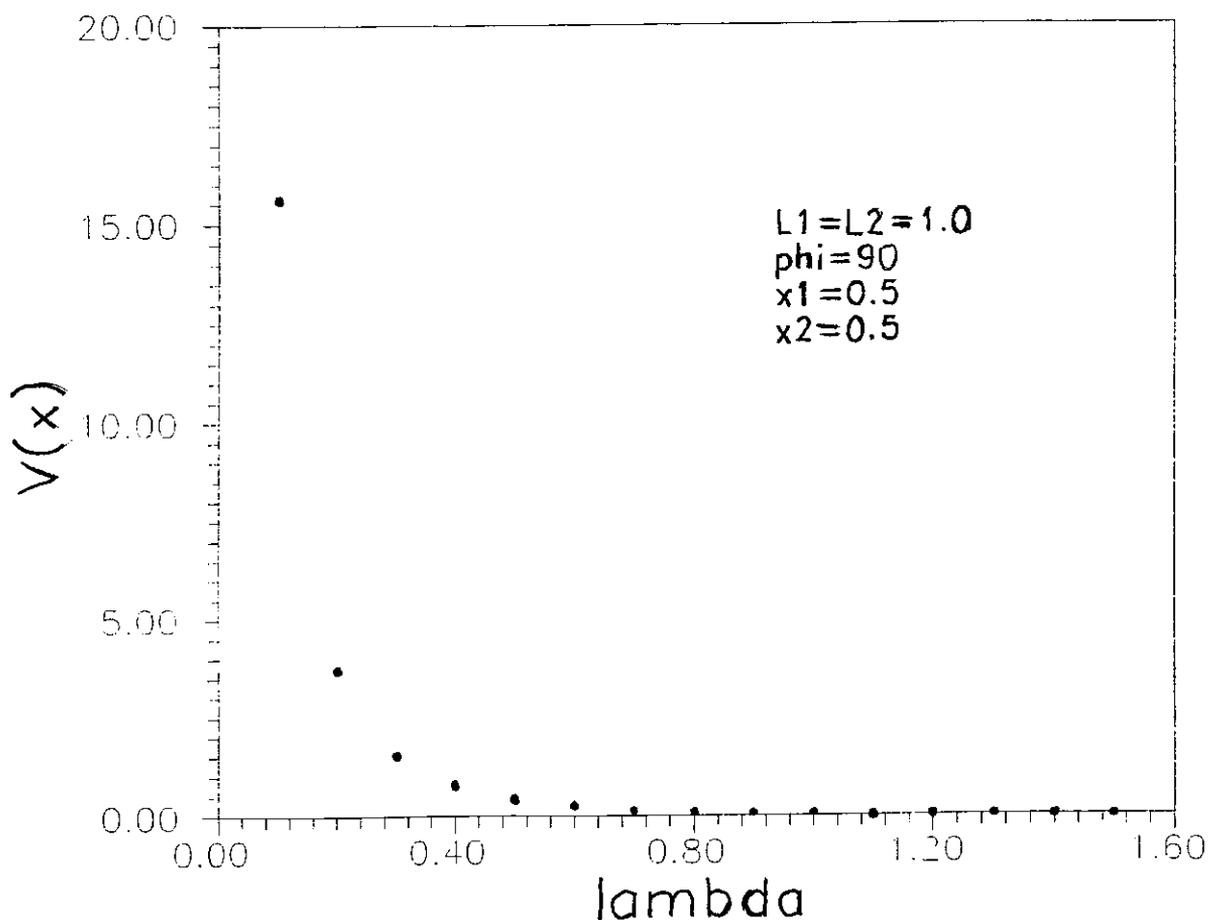


fig. 13 - O potencial  $V(x/\lambda)$  em função do comprimento de penetração,  $\lambda$ .

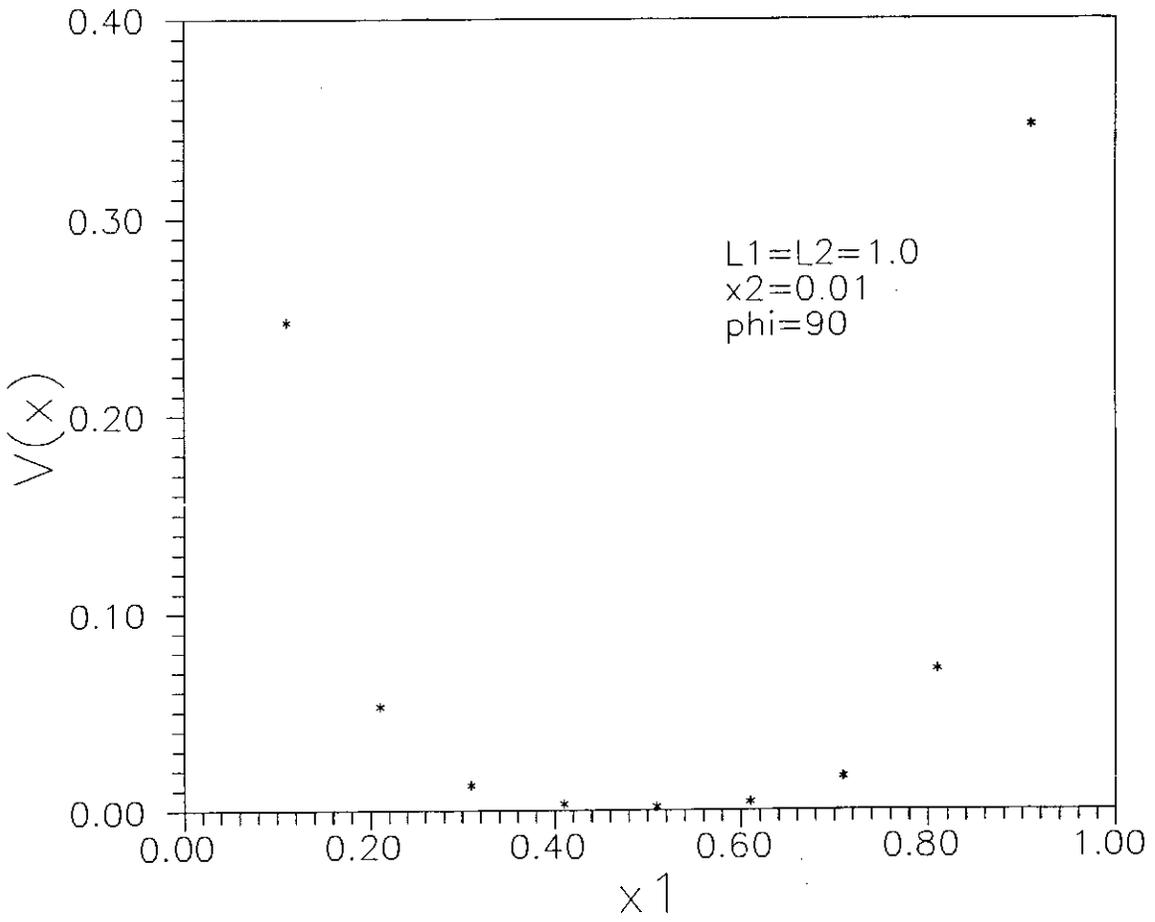


fig. 14 - O potencial  $V(x/\lambda)$  em função da posição dentro da célula unitária.

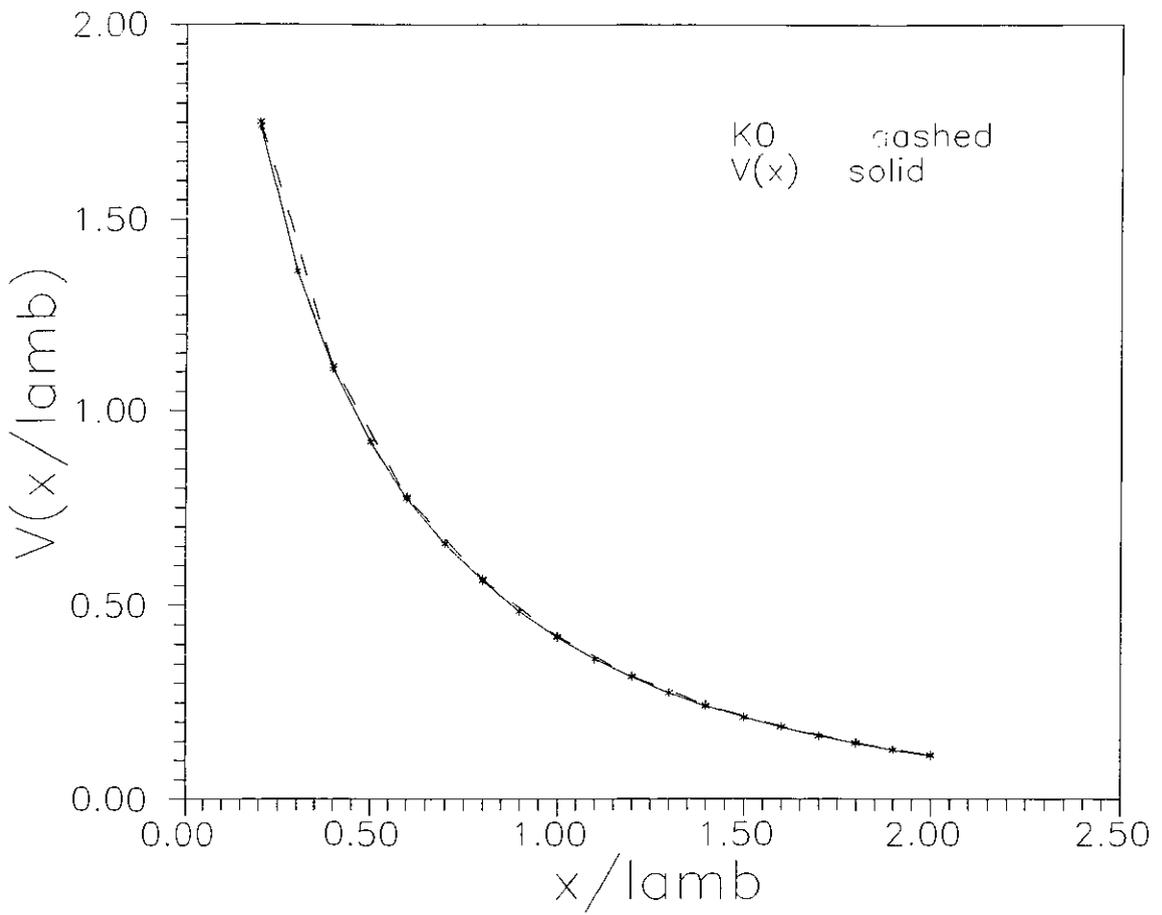


fig. 15 - Comparação entre o potencial  $V(x/\lambda)$  e a função de Bessel  $K_0(x/\lambda)$ , próximo da origem.

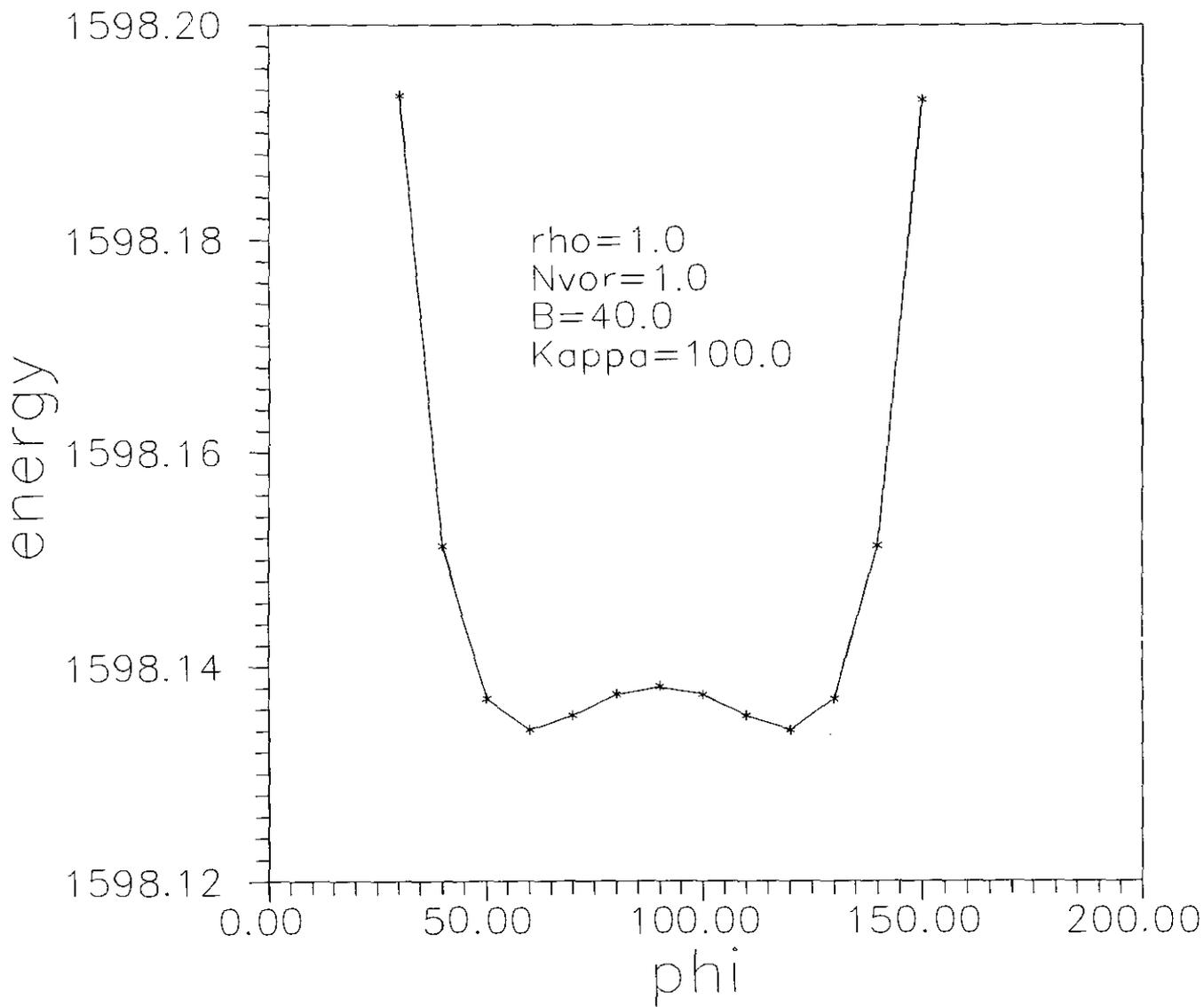


fig. 16 - A energia do sistema em função do ângulo  $\phi$ , da célula unitária. Apresentando mínima energia para a célula triangular.  $\phi=60$ , e  $120$ .

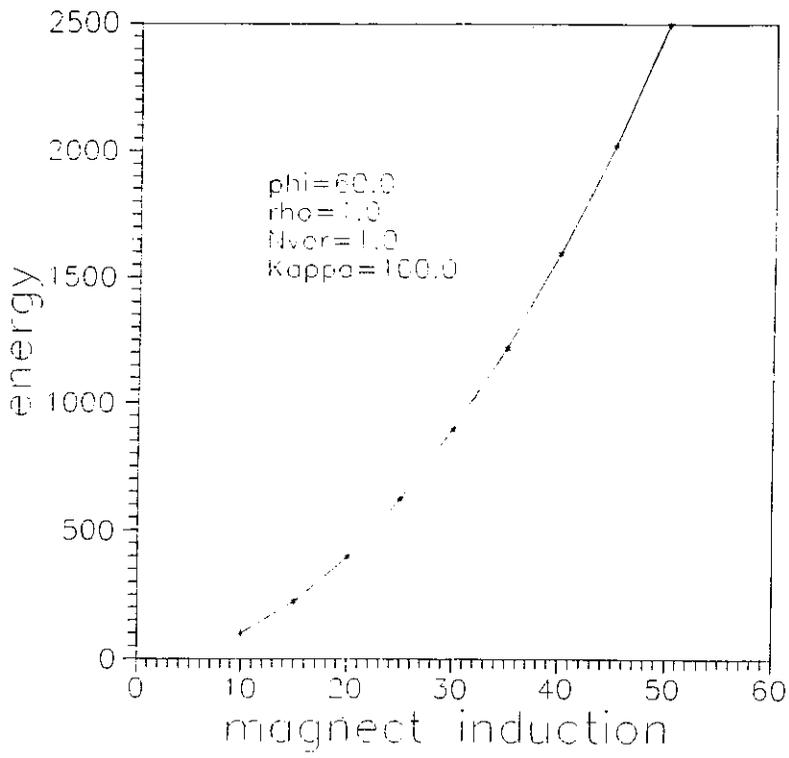


fig. 17 - A energia em função da indução magnética B.

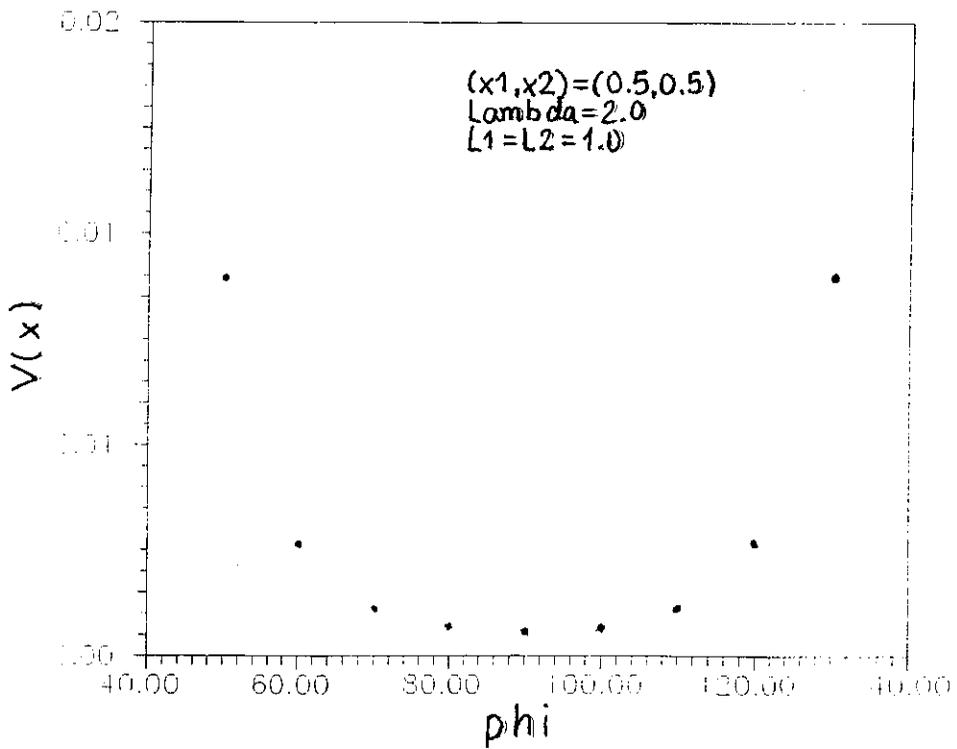


fig. 18 - O potencial  $V(x/\lambda)$  em função do ângulo  $\phi$ .

Quando as linhas de vórtices penetram em um supercondutor isotrópico estas linhas repelem-se umas das outras, como se fossem dois dipolos magnéticos, isto pode ser visto, por uma aproximação, analisando o campo magnético gerado por duas espiras. Nos supercondutores anisotrópicos este comportamento, é também observado, entretanto apenas em circunstâncias especiais. Esta repulsão é apenas observada quando o vórtice está paralelo ao eixo de simetria da amostra. Quando a indução magnética não está alinhada ao eixo principal do cristal existe uma atração [23], [24], [25] entre os vórtices. Isto faz ocorrer diversos fenômenos, por exemplo, a modificação nas propriedades elásticas da rede [26], formação de cadeias de vórtices na direção do plano- $\theta$  [21], [25], torque magnéticos [32], [21], entre diversos outros problemas. As cadeias de vórtices tem sido observadas por técnicas de decoração magnética por Bolle [39] e por Grigoriva [40], previsões teóricas tinham sido apresentadas por Kogan e colaboradores [15]. A fig. 19 mostra os eixos cristalinos e a posição da linha de vórtice.

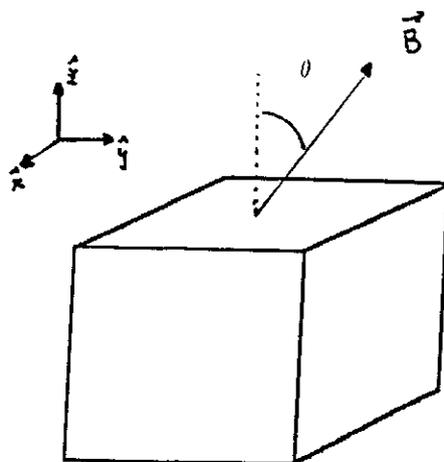


fig. 19 - Os eixos cristalinos, e a direção da linha de vórtice formando um ângulo,  $\theta$ , com o eixo de simetria do material.

Por conveniência resolvemos a equação de London tomando como eixo principal a direção do vórtice, isto é, a direção  $\hat{Z}$ . Para isto é feito uma rotação no tensor de massa

e encontrarmos,

$$m = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \rightarrow m' = \begin{pmatrix} m_1 \cos^2 \theta + m_3 \sin^2 \theta & 0 & (m_1 - m_3) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & m_1 & 0 \\ (m_1 - m_3) \sin \theta \cos \theta & 0 & m_1 \sin^2 \theta + m_3 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

onde,  $m_{xx} = m_1 \cos^2 \theta + m_3 \sin^2 \theta$ ,  $m_{zz} = m_1 \sin^2 \theta + m_3 \cos^2 \theta$ , e  $m_{xy} = (m_1 - m_3) \sin \theta \cos \theta$ . Kogan resolveu a equação de London para as linhas de vórtices inclinadas de um ângulo  $\theta$  do eixo de simetria [27]. Encontramos as componentes, considerando o vórtice na posição  $\vec{r}_v = 0$ , e  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,

$$B_x = \lambda^2 [-m_{zz} k^2 B_x + m_{xz} k_y^2 B_z] \quad (1.77)$$

$$B_y = \lambda^2 [-m_{zz} k^2 B_y - m_{xz} k_y k_x B_z] \quad (1.78)$$

$$B_z = \lambda^2 [-m_1 k_x^2 B_z + m_{xx} k_y^2 B_z + m_{xz} k^2 B_x] + \Phi_0. \quad (1.79)$$

Da eq.(1.78) podemos chegar a

$$B_x = \frac{\lambda^2 m_{xz} k_y^2}{1 + \lambda^2 m_{zz} k^2} B_z \quad (1.80)$$

com a eq. (1.81) levada à eq. (1.80), encontramos

$$B_z = \frac{\Phi_0 (1 + \lambda^2 m_{zz} k^2)}{(1 + \lambda^2 m_{zz} k^2) [1 + \lambda^2 (m_1 k_x^2 + m_{xx} k_y^2)] - \lambda^4 m_{xz}^2 k_y^2 k^2}. \quad (1.81)$$

Após algumas manipulações algébricas, temos

$$B_z = \frac{\Phi_0 (1 + \lambda^2 m_{zz} k^2)}{(1 + \lambda^2 m_1 k^2) [1 + \lambda^2 (m_1 k_x^2 + m_3 k_y^2)]}.$$

Sendo  $\vec{B}(\vec{r}) \cdot \hat{z} = B_z$ , temos

$$B_z = \frac{\Phi_0 (1 + \lambda^2 m_{zz} k^2) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{(1 + \lambda^2 m_1 k^2) [1 + \lambda^2 (m_{zz} k_x^2 + m_3 k_y^2)]}$$

$$B_z(\vec{r}) = \Phi_0 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(1/\lambda^2 + m_{zz}k^2)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\lambda^2(1/\lambda^2 + m_1k^2)[1/\lambda^2 + (m_{zz}k_x^2 + m_3k_y^2)]} \quad (1.82)$$

Encontramos  $B_z(\vec{r})$  podemos agora escrever a energia livre do sistema. Definindo,

$$L_0(\vec{r}) = 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{(\mu^2 + m_{zz}k^2)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{(\mu^2 + m_1k^2)[\mu^2 + (m_{zz}k_x^2 + m_3k_y^2)]},$$

a energia livre fica

$$F = \frac{\Phi_0}{8\pi} \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \sum_{i<j} L_0(\vec{r}_i - \vec{r}_j) + N\epsilon \right\}. \quad (1.83)$$

A função  $L_0(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  é a energia de interação do vórtice na posição  $\vec{r}_i$  com todos os outros vórtices nas posições  $\vec{r}_j$ 's, excluindo a interação com ele mesmo.  $\epsilon$  é a energia necessária para formar uma única linha de vórtice, isto é, a auto-energia(energia intra).  $N$  é o número total de linhas na amostra. No Apêndice B, mostramos como fazer a passagem da eq. (1.83) para (1.85).

$$E(\vec{x}) = \frac{\Gamma(\theta, \gamma)}{\gamma} V_0(\vec{x}) - \frac{1-\gamma}{\gamma} \cos^2\theta \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} \left[ -\mu_0^2 \frac{\partial V_0(\vec{x}, u)}{\partial \mu_0^2} \right]. \quad (1.84)$$

A eq. (1.85) é a energia livre total para o sistema de linhas de vórtices paralelos. Esta é dividida em duas partes a energia de interação entre os vórtices (energia inter) e a energia de auto-interação (energia intra). Na próxima seção calcularemos a energia intra. A energia inter é função explícita ou implícita das variáveis  $B$ , a indução magnética,  $k$ , a constante de Ginzburg-Landau,  $\theta$ , o ângulo entre a indução magnética e o eixo de simetria da amostra,  $\gamma$ , o parâmetro de anisotropia de massa, e dos parâmetros da célula unitária  $\rho = L_1/L_2$ , a razão entre os lados da célula unitária, e  $\phi$ , o ângulo formado por estes lados. Temos a energia livre de interação [25] na forma

$$f_{inter} = \frac{B}{k_z} [V(Bk_z, \gamma, \theta, \rho_{otimizado}, \phi = 90^\circ) - Bk_z] + B^2. \quad (1.85)$$

Na fig. 27, Capítulo 2, mostramos a energia inter removido o background de campo magnético para diferentes valores de  $Bk_z$ . A configuração de maior energia é  $\theta = 90$ .

Para induções magnéticas baixas, observamos que existe um mínimo na energia próximo de  $\theta = 60^\circ$ , isto caracteriza o surgimento das cadeias de vórtices.

### 1.5.4 Auto-energia (energia intra)

Nesta seção estudaremos as linhas de vórtices sem considerarmos interações entre estas, por esta razão a indução magnética apenas aparece para determinar a densidade de linhas de vórtices. A energia necessária para formar uma única linha de vórtice no espaço considera apenas interações entre seus próprios segmentos, como mostra a fig. 25, Capítulo 2. A teoria de London é capaz de determinar a energia intra uma vez que o modelo descreve as correntes circulando no interior do núcleo do vortice. O tamanho do núcleo é determinado pelo comprimento de coerência  $\xi$ , que é anisotrópico e obedece a condição da teoria GL,  $\lambda_1\xi_1 = \lambda_3\xi_3$ [21]. O valor médio do comprimento de coerência e do comprimento de penetração de London são,

$$\xi^3 = \xi_1^2\xi_3$$

$$\lambda^3 = \lambda_1^2\lambda_3.$$

Considerando as linhas de vórtices retas e não alinhadas com o eixo de simetria do cristal, a energia de  $N$  linhas de vórtices não interagentes é

$$F_{intra} = NL\epsilon \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2$$

e em unidades reduzidas (u.r.), temos

$$\frac{F_{intra}}{VolH_c^2/4\pi} = \frac{B}{\kappa_z}\epsilon,$$

onde  $\kappa_z = k\gamma^{-2/3}$ . A energia intra dada pela interação entre os segmentos da linha é escrito por

$$F = \frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda^2} \int dr_\alpha dr'_\beta G_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.86)$$

Esta expressão é o caso anisotrópico da eq. (1.45) para o caso de interações entre segmentos da própria linha. A função de Green  $G_{\alpha\beta}$  é dada pela matriz

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix},$$

onde

$$g_1(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{|f(\vec{r})|^2 \lambda_1^2}{\lambda_3^2 k_{//}^2 + \lambda_1^2 k_{\perp}^2 + 1}$$

$$g_3(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{|f(\vec{r})|^2 \lambda_1^2 (\lambda_3^2 k^2 + 1)}{(\lambda_3^2 k^2 + 1)(\lambda_3^2 k_{//}^2 + \lambda_1^2 k_{\perp}^2 + 1)}$$

$k_{//}^2 = k_1^2 + k_2^2$ , é a componente no plano  $\hat{x}\hat{y}$  do vetor  $\vec{k}$ . Em  $g_1(\vec{r})$  e  $g_3(\vec{r})$  é introduzido um cutoff anisotrópico Gaussiano na forma  $f(\vec{k}) = e^{-\xi_1^2 k_{//}^2 - \xi_3^2 k_{\perp}^2}$ . Este cutoff tem origem [28] no tamanho finito do núcleo do vórtice e limita as componentes de  $\vec{k}$  paralelas ao eixo  $\hat{z}$  em  $< 1/\xi_3$  e perpendiculares em  $< 1/\xi_1$ , onde  $\xi_3$  e  $\xi_1$  são os comprimentos de coerência na direção  $\hat{z}$  e nas direções  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ . Definimos a razão de anisotropia  $\xi_1/\xi_3 = \lambda_3\lambda_1 = \zeta$  e o parâmetro de GL  $\kappa = \lambda_1/\xi_1$ . Para o  $YBaCuO$  temos  $\lambda_1 \approx 2000 \text{ \AA}$ ,  $\zeta \approx 5$  e  $\kappa \approx 100$ . A função  $f(\vec{k})$  descreve o comportamento para pequenas distâncias ( $|\vec{k}|$  grande). Não existe contribuição à  $g_1$  e  $g_3$  vindas de  $f(\vec{k})$  para regiões dentro da elipse de semi-eixos  $\xi_1$  e  $\xi_3$ . Podemos reescrever na eq.(1.87)

$$dr_\alpha dr'_\beta G_{\alpha\beta} = dx dx' g_1 + dz dz' g_3.$$

Esta última expressão, em coordenadas polares, é dada por

$$dx dx' g_1 + dz dz' g_3 = \sin^2 \theta dl dl' g_1 + \cos^2 \theta dl dl' g_3$$

A energia livre em u.r. pode ser escrita por

$$f = \frac{F}{\Phi_0^2/8\pi\lambda^2} = \int_{-L/2}^{L/2} dl \int_{-L/2}^{L/2} dl' [\sin^2\theta g_1(l-l') + \cos^2\theta g_2(l-l')]. \quad (1.87)$$

Para  $L \rightarrow \infty$  a eq. (1.88) fica

$$f = \int_{-L/2}^{L/2} dl [\sin^2\theta g_1(l) + \cos^2\theta g_2(l)]. \quad (1.88)$$

Fazendo a transformação  $x = l \sin \theta$ ,  $y = 0$ , e  $z = l \cos \theta$ , encontramos

$$g_1(l) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g_1(\vec{k}) \delta^3(k_1 \sin \theta + k_3 \cos \theta).$$

Prosseguindo, fazemos a rotação,

$$q = k_1 \sin \theta + k_3 \cos \theta$$

$$k' = k_1 \cos \theta - k_3 \sin \theta$$

$$k_2 = k_2$$

onde  $d^3k = dq dk_2 dk'$ . Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl g_1(l) = \int \frac{dq dk_2 dk'}{(2\pi)^3} g_1(q, k_2, k') \delta(q)$$

fazendo  $q = 0$ , logo  $dq = 1$ . Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl g_1(l) = \int \frac{dk_2 dk'}{(2\pi)^2} g_1(0, k_2, k'). \quad (1.89)$$

Com a rotação em  $k_2$  e fazendo  $q = 0$ , encontramos,  $k_3 = -k' \sin \theta$  e  $k_1 = k' \cos \theta$ . A função  $g_1(\vec{k})$ ,

$$g_1(\vec{k}) = \frac{e^{-\xi_1^2 k_1^2 / \lambda_1^2 - \xi_3^2 k_3^2 / \lambda_3^2}}{\lambda_3^2 k_1^2 + \lambda_1^2 k_3^2 + 1},$$

é reescrita termo a termo:

$$\xi_1^2 k_{//}^2 + \xi_3^2 k_3^2 = \xi(\theta) k'^2 + \xi_1^2 k_2^2. \text{ Definição: } \xi^2(\theta) = \xi_1^2 \cos^2 \theta + \xi_3^2 \sin^2 \theta.$$

$$\lambda_3^2 k_{//}^2 + \lambda_1^2 k_3^2 = \lambda(\theta) k'^2 + \lambda_3^2 k_2^2. \text{ Definição: } \lambda^2(\theta) = \lambda_1^2 \cos^2 \theta + \lambda_3^2 \sin^2 \theta.$$

A integral dada pela eq. (1.89) pode ser escrita

$$[A] = \int_{-\infty}^{\infty} dl g_1(l) = \int \frac{dk_2 dk'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\xi^2(\theta) k'^2 - \xi_1^2 k_3^2} \lambda_1^2}{\lambda^2(\theta) k'^2 + \lambda_3^2 k_2^2 + 1}.$$

Chamando esta última integral de  $[A]$ . De forma análoga podemos desenvolver  $g_3(l)$  obtendo  $[B]$ , dado por

$$[B] = \int_{-\infty}^{\infty} dl g_3(l) = \int \frac{dk_2 dk'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-\xi^2(\theta) k'^2 - \xi_1^2 k_3^2} \lambda_1^2 [\lambda_3^2 (k'^2 + k_2^2) + 1]}{[\lambda_1^2 (k'^2 + k_2^2) + 1] [\lambda^2(\theta) k'^2 + \lambda_3^2 k_2^2 + 1]}.$$

Deste modo a eq. (1.88) fica,

$$\frac{f}{L} = [A] \sin^2 \theta + [B] \cos^2 \theta. \quad (1.90)$$

Esta é a energia livre por comprimento  $L$  necessária para fazer uma linha de vórtice.

Fazendo a transformação  $q' = k' \xi(\theta)$  e  $q_2 = k_2 \lambda_1$ , teremos  $[A]$  e  $[B]$ , como

$$[A] = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \frac{\lambda_1}{\xi(\theta)} \right) \left( \frac{\lambda_1}{\xi_1} \right) \int \frac{dq_2 dq'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q'^2 - q_2^2}}{\left( \frac{\lambda(\theta)}{\xi(\theta)} \right)^2 q'^2 + \left( \frac{\lambda_3}{\xi_1} \right)^2 q_2^2 + 1},$$

$$[B] = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \frac{\lambda_1}{\xi(\theta)} \right) \left( \frac{\lambda_1}{\xi_1} \right) \int \frac{dq_2 dq'}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q'^2 - q_2^2}}{[\left( \frac{\lambda(\theta)}{\xi(\theta)} \right)^2 q'^2 + \left( \frac{\lambda_3}{\xi_1} \right)^2 q_2^2 + 1] [\left( \frac{\lambda(\theta)}{\xi(\theta)} \right)^2 q'^2 + \left( \frac{\lambda_1}{\xi_1} \right)^2 q_2^2 + 1]}.$$

Fazendo uso da relação de anisotropia da teoria GL,  $\lambda_1 \xi_1 = \lambda_3 \xi_3$ , e ainda das relações  $\lambda^3 = \lambda_1^2 \lambda_3$ ,  $\xi^3 = \xi_1^2 \xi_3$ ,  $\gamma = m_1/m_3$ ,  $\lambda_1/\lambda_3 = \xi_3/\xi_1 = \sqrt{\gamma}$  e  $\kappa = \lambda/\xi$  podemos encontrar os coeficientes:  $\frac{\lambda_1}{\xi(\theta)}$ ,  $\frac{\lambda_1}{\xi_1}$ ,  $\frac{\lambda_3}{\xi_1}$ , etc. permitindo nos escrever a eq. (1.91) mais simplificada. Igualando a eq.(1.91) com a eq.(1.87)

$$\epsilon = \frac{2\pi}{L} \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^2 \int dr_\alpha dr'_\beta G_{\alpha\beta}(\vec{r} - \vec{r}'),$$

temos

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Gamma(\theta)}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2 \int dq_2 \int dq [\tilde{g}_1(q, k_2) \sin^2\theta + \tilde{g}_3(q, k_2) \cos^2\theta].$$

Onde

$$\tilde{g}_1(q, k_2) = \frac{e^{-q^2 - k_2^2}}{\left(\frac{\lambda_3}{\xi_1}\right)^2 (q^2 + k_2^2) + 1} \quad (1.91)$$

$$\tilde{g}_3(q, k_2) = \frac{\left(\frac{\lambda_3}{\xi_1}\right)^2 (q^2/\Gamma(\theta) + k_2^2) + 1}{\left(\frac{\lambda_1}{\xi_1}\right)^2 (q^2/\Gamma(\theta) + k_2^2) + 1} \tilde{g}_1(q, k_2). \quad (1.92)$$

Para valores da constante de GL grande, encontramos a expressão analítica de  $\epsilon$

$$\epsilon_{approx} = \frac{\Gamma(\theta)}{\gamma} \ln \left[ \frac{k_z \gamma}{\Gamma(\theta)} \right], \quad (1.93)$$

onde  $k_z = k\gamma^{-2/3}$ ,  $\gamma = m_1/m_3$ , e  $\Gamma(\theta) = \sqrt{\cos^2(\theta) + \gamma \sin^2(\theta)}$ . A fig. 25 mostra a energia intra, tanto para a aproximação dada acima como para o cálculo completo. A energia intra tem seu mínimo para o ângulo  $\theta = 90^\circ$ . Já a energia inter tem seu mínimo em  $\theta = 0^\circ$ . Daí a competição entre estas duas energias para o estado de equilíbrio da linha de vórtice [25].

## 1.6 A Teoria de London na Rede

O modelo para descrever vórtices pela teoria de London na rede foi recentemente apresentado por Carneiro e colaboradores [63],[65]. A rede aqui estudada é uma rede tridimensional (de lados  $L_1$ ,  $L_2$ , e  $L_3$ ) onde as linhas de vórtices não mais são contínuas e sim discretas. Esta discretização toma a linha como segmentos paralelos /as arestas de pequenos cubos de tamanho  $L_1/n$ , onde  $n$  é um número inteiro. No Capítulo 4, apresentamos um breve resumo deste modelo, onde descrevemos o supercondutor, sujeito a condições periódicas de contorno. A figura abaixo, mostra este este cubo, e os pequenos cubos nos quais as linhas de vórtice se formam.

# Capítulo 2

## O Torque Magnético Intrínseco

Usando a teoria de London anisotrópica, obtemos uma expressão para o torque magnético intrínseco, no caso de supercondutores uniaxiais do tipo II, para qualquer valor de indução magnética. Tomamos a linha de vórtice como reta, e consideramos a contribuição das supercorrentes dentro da região do núcleo do vórtice no contexto da teoria de London. Mostramos que as energias de interação e auto-energia dão contribuições opostas para o torque; a primeira dirige a indução magnética paralelamente ao eixo de simetria do supercondutor, a segunda perpendicular à primeira. Para indução magnética alta, nossa expressão generaliza a fórmula do Kogan, uma vez que não usamos nenhum parâmetro livre, mas sim o parâmetro de anisotropia de massa  $\gamma = m_1/m_3$  e a constante de Ginzburg-Landau. À indução magnética baixa, propomos um método de observar efeitos da cadeia de vórtices no torque magnético total, baseado nos fatos de ser a teoria de London linear e a energia para fazer uma linha de vórtice no espaço mostrar-se ser independente da indução magnética.

### 2.1 Introdução

Abaixo da temperatura crítica,  $T_c$ , o supercondutor experimenta um torque, sempre que sua magnetização não está alinhada com o campo magnético externo. As principais razões para isto ocorrer são o ancoramento (*pinning*) e a forma da amostra supercondutora [48]. O nosso objeto de estudo é uma terceira razão para o torque, baseada na anisotropia de massa apresentada por supercondutores de alta  $T_c$ , que produz uma magnetização não

orientada ao longo do eixo de simetria do material; este fato responde pelo chamado *torque intrínseco* [32].

Um supercondutor submetido a um campo aplicado possui um momento magnético devido às correntes supercondutoras que circulam na superfície e ao redor dos vórtices. A forma da amostra pode dar origem a um torque. Podemos visualizar certas situações onde isto ocorre. Suponhamos que temos uma pastilha supercondutora tal que a sua altura,  $h$ , seja bem menor que as dimensões da área da base,  $A$ . Seja qual for a direção do campo magnético aplicado, exceto quando paralelo à base, o momento magnético é aproximadamente na direção normal à base. Portanto, as correntes supercondutoras circulando no plano da base criam um momento magnético perpendicular à base desta pastilha. Concluimos que este efeito é exclusivamente devido à forma geométrica, e varia acentuadamente com a mudança desta.

O ancoramento das linhas de vórtice é outro processo pelo qual o supercondutor experimenta um torque. Em um processo de resfriamento com campo externo, as linhas de vórtice são criadas ao longo da direção do campo externo. Resulta, deste processo, uma magnetização nesta direção. A existência de defeitos no material faz com que estas linhas fiquem ligadas energeticamente a estes centros. Uma mudança brusca na direção do campo magnético externo não será acompanhada por uma mudança da magnetização nem em direção ou intensidade. Isto, por causa das barreiras de potencial introduzidas pelo fenômeno de ancoramento, ficando a magnetização e o campo externo não-alinhados.

O torque magnético intrínseco deriva da anisotropia do supercondutor, e o seu estudo é o que nos interessa, pois é revelador de propriedades intrínsecas do supercondutor, independentes da sua forma ou de impurezas (*pinning*). V.G. Kogan, em 1988, propôs a existência de tal efeito [32]. No mesmo ano, Farrell e colaboradores [48] detectaram uma magnetização transversa à rede de Abrikosov em supercondutores anisotrópicos, tomando o cuidado de eliminar as duas outras fontes de torque discutida acima. Para tal, usaram amostras cuja forma geométrica torna nulo o chamado "fator de desmagnetização", e cuja temperatura é ligeiramente abaixo de  $T_c$ , numa região onde a magnetização é reversível e o ancoramento é desprezível.

A torquemetria magnética tem sido uma poderosa técnica para estudar efeitos nos supercondutores anisotrópicos. Esta técnica é apresentada em detalhes por M. Qvarford e col. [33], onde se propõe um microtorquímetro para medidas de magnetização de pequenas amostras supercondutoras.

Como discutido anteriormente, os dados experimentais do torque magnético devem ser coletados acima da curva de irreversibilidade no diagrama  $H - T$ , para evitar contribuição devida ao ancoramento. Portanto, vamos revisar rapidamente a origem da curva de irreversibilidade mostrada por Muller, Takashige e Berdnoz [51], que separa o diagrama  $H - T$  em duas regiões, abaixo da qual está um estado vítrio. As linhas de vórtice encontram-se em um estado metaestável. A curva de suscetibilidade de massa por temperatura mostra que o processo de resfriamento, até uma certa temperatura  $T^*$ , não depende se a termalização é feita com campo magnético aplicado ("field cooling" - FC) ou se apenas depois do resfriamento é aplicado o campo ("zero field cooling" - ZFC). Abaixo de  $T^*$ , a resposta magnética do sistema para os dois métodos acima são bem distintas. Pela figura abaixo, obtida na referência [51], fig. 23, pode-se entender melhor o que é a irreversibilidade. Quando a termalização é por ZFC, e se aplica um campo magnético após a chegada até uma certa temperatura, encontramos o ponto A. Esquentando a amostra, chegamos até um ponto B. Resfriando o sistema, a partir deste ponto, verificamos que a suscetibilidade é independente da temperatura. Esquentando a amostra do ponto B até o ponto C, e novamente resfriando o sistema, verificamos que existe uma inclinação maior que a curva entre B e C. Esquentando o sistema entre C e D, e resfriando-o, temos uma curva mais inclinada que a curva entre C e D. E obtemos que D é o ponto crítico deste sistema, isto é, este ponto separa a região reversível e a região irreversível.

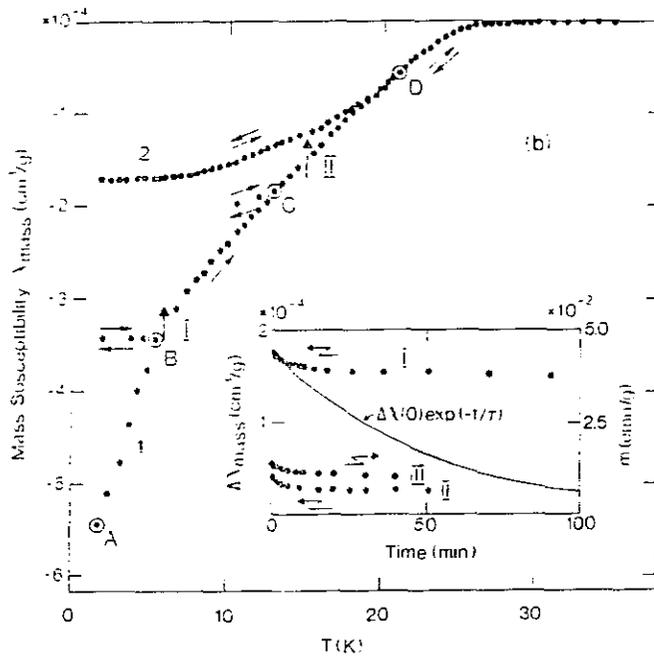


fig. 23 - A curva de irreversibilidade apresentada por Muller, Takashige e Berdnoz.

A origem da curva de irreversibilidade nos supercondutores [34] é a competição energética de várias contribuições. A energia térmica, a energia de *pinning*, e a energia elástica da rede de vórtice estão em competição, e isto pode levar ao derretimento da

rede. No diagrama  $H - T$ , observa-se que o supercondutor tem mais fases que os simples três estados: Meissner, rede triangular de vórtices, e normal. Huse e Radzihovsky [2] fizeram, através da teoria de campo médio, um diagrama de fase descrevendo modificações significantes, quando são incorporados à teoria efeitos de temperatura finita e de desordem. Mostraram que flutuações térmicas causam o derretimento da rede de Abrikosov em um líquido de vórtice para altas temperaturas; mostram também que a desordem produz novas fases à baixas temperaturas. Este diagrama é mostrado na fig. 4, no Capítulo 1.

Para temperaturas abaixo de  $T_c$  e campos  $H \gg H_{c1}$ , o torque  $\tau$  tem sido medido [49] para amostras de  $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$  e  $Bi_2Sr_2Cu_2O_{8+\delta}$  como função do ângulo  $\theta$  entre o campo externo  $H$  e o eixo de simetria  $\hat{z}$ .

Para uma temperatura fixa, na região reversível do diagrama  $H - T$ , foram coletados dados do torque magnético para ângulos crescente e decrescente: observou-se que estes dois procedimentos resultaram, essencialmente, numa mesma curva de torque versus ângulo  $\theta$ . Esta total reversibilidade nas medidas exclui a possibilidade do torque receber contribuição devido ao ancoramento.  $\theta$  é o ângulo entre o eixo de simetria e as linhas de vórtice. Efeitos da forma da amostra foram também descartados como fontes para o torque nesses compostos de acordo com Farrell e colaboradores [48]. Tal experimento estava, então, medindo um novo efeito: o torque intrínseco, cuja fonte exclusiva é a anisotropia de massa apresentada nos compostos de  $CuO$ .

Temperaturas suficientemente altas, onde a reversibilidade existe [49], medidas do torque magnético ajustam-se bem à fórmula primeiramente derivada por Kogan [32]. Este resultado foi obtido no contexto da teoria de London anisotrópica para o estado misto.

Neste capítulo, também calculamos o torque magnético intrínseco no contexto da teoria de London anisotrópica. Nossa análise generaliza o resultado do Kogan em vários aspectos. A fórmula do Kogan apenas se aplica quando a indução magnética  $B$  toma valores suficientemente elevados, enquanto nossa generalização vale para qualquer valor de  $B$ , onde a teoria de London se aplica. Deste modo, supõe-se o campo externo esteja distante dos campos críticos superior e inferior,  $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ . Na fórmula do Kogan, um pequeno "cut-off" remove as interações em um intervalo menor que o comprimento de

coerência. Em nosso tratamento, este cut-off resulta de um modelo eletromagnético para o núcleo do vórtice. Este é o chamado modelo Gaussiano [18]. Nosso modelo não possui parâmetros livres, sendo  $\eta$  derivado do arranjo da rede de vórtices e  $H_{c2}$  derivado da fórmula para o campo crítico superior. Determinamos estes parâmetros como função da anisotropia  $\gamma$  e da constante de Ginzburg-Landau  $\kappa$ . Diferenças da ordem de  $1/\kappa$  entre o campo externo e a indução magnética são ignoradas, uma vez que neste trabalho supomos  $\kappa$  tendo valores elevados, uma característica dos supercondutores anisotrópicos.

Mostramos que se constitui de duas contribuições opostas em relação ao ângulo  $\theta$  para o torque intrínseco, estas vindo da energia de interação entre os vórtices e da auto-energia. Mostramos, nesta tese, qual é a dependência de cada uma destas energias em função de  $\theta$  e seus comportamentos totalmente distintos. Propomos um método para, independentemente, extrairmos as contribuições de cada uma destas energias para o torque total. A energia de interação (energia inter) é devida à interação entre linhas de vórtices distintas no espaço. A auto-energia (energia intra) é a energia necessária para a formação de uma única linha de vórtice no espaço, e apenas é considerada a interação de segmentos de uma mesma linha. .

A razão por que as energias inter e intra dão contribuições distintas e opostas em relação ao ângulo  $\theta$  é fácil de ser compreendida. O torque magnético gira o supercondutor anisotrópico em torno de um eixo perpendicular a  $\vec{M}$  e  $\vec{H}$ , buscando o ângulo  $\theta$  que resulta em uma configuração de vórtices com menor energia. Mantendo a densidade de linhas de vórtice fixa,  $\vec{B}$  é constante e o estado pode ser desenvolvido pela energia livre de Helmholtz,  $F$ . O fluxo das correntes supercondutoras (supercorrentes) custam menos energia no plano do cristal de menor massa, ortogonal ao eixo de simetria. Portanto, resulta uma magnetização não orientada em relação ao campo aplicado, se este último não estiver orientado ao longo do eixo de simetria. Este argumento intuitivo é suficiente para determinarmos a rede de mais baixa energia na região  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , pelo menos no limite de densidade de linha de vórtice elevada. Uma vez que o fluxo das supercorrentes prefere realmente se localizar nos planos de menor massa (planos de  $CuO$ ), entre as redes de vórtices na região  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , a bem-conhecida rede triangular com  $\theta = 0^\circ$  tem

a energia mais baixa e a rede triangular destorcida em  $\theta = 90^\circ$  tem a energia mais alta.

Contudo, o estudo feito no parágrafo anterior diz respeito apenas a fenômenos que ocorrem fora da região do núcleo do vórtice, isto é, a parte da energia inter. A contribuição da energia intra também é importante nas considerações do torque magnético, uma vez que a energia para fazer uma linha de vórtice reta no espaço depende do ângulo  $\theta$ . Fenômenos dentro da região do volume da linha de vórtice, definido pela área do núcleo e o comprimento da linha  $L$ , são associados à energia intra. Este volume é menor para linhas perpendiculares ao eixo de simetria ( $L\pi\xi_1\xi_3$ ) do que para linhas paralelas a este ( $L\pi\xi_1^2$ ). Supondo que a densidade de energia não varia significativamente com o ângulo  $\theta$ , conclui-se que uma linha de vórtice sem interação com as demais possui menor energia por comprimento para  $\theta = 90^\circ$  do que para  $\theta = 0^\circ$ . Em resumo, por argumentos volumétricos, as energias inter e intra são opostas e isto pode ser visto rapidamente pela comparação dos ângulos limites,  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ , para densidade de vórtice fixa ( $B$ ). A energia intra é maior em  $\theta = 0^\circ$  que em  $\theta = 90^\circ$ , enquanto a energia inter é justamente o oposto. As energias livres inter e intra contribuem de maneira oposta para o torque; a primeira tem mínimo energético em  $\theta = 0^\circ$ , enquanto a última em  $\theta = 90^\circ$ . Descrevemos detalhadamente a competição destas contribuições para o torque magnético e mostramos que suas diferenças podem ser notadas principalmente nos regimes de indução magnética extremamente alta e baixa. O torque cresce com a densidade de linhas de vórtice e para discutirmos os efeitos intra e inter, achamos mais conveniente estudar a curva  $\tau(\theta, H)/H$  versus  $\theta$ . Uma conclusão importante desta tese é que, experimentalmente observa-se que para campos magnéticos elevados  $\tau(\theta, H)/H$  decresce com o crescimento de  $H$ , e vemos isto como um efeito da competição entre energias inter e intra. Uma descrição mais quantitativa ainda será dada neste capítulo.

Para campos magnéticos baixos, um novo efeito foi previsto há algum tempo atrás, o surgimento das chamadas cadeias de vórtices [39],[61], as quais têm origem na atração entre linhas de vórtices separadas por uma distância da ordem do comprimento de penetração e localizadas nos planos de simetria, definidos por  $\hat{z}$  e  $\vec{B}$  [14],[15],[36]. O estado de cadeias de vórtices foi observado para baixas temperaturas ( $4K$ ) e baixo campo magnético

(25G) em *YBCO*, por experimentos de decoração magnética[61]. Neste capítulo, calculamos o torque intrínseco no limite da formação das cadeias. Outro importante resultado obtido nesta tese é que a obtenção de estado de cadeias de vórtices ocorrem para alguns ângulos intermediários de  $\theta$  que possuem energia menor que a rede triangular ( $\theta = 0^\circ$ ) e é o mínimo absoluto da energia inter [21],[25]. Entretanto, para baixo  $B$ , a energia da rede é muito fraca e a energia livre total é dominada completamente pela energia intra. O resultado disto é que  $\tau(\theta, H)/H$  não mostra mudança significativa em função do campo aplicado. Em suma, a contribuição inter para a energia livre total não pode ser diretamente detectada no torque total para indução magnética baixa. Aproveitando-se da linearidade da teoria de London, sugerimos um método para extrair os efeitos da energia intra do torque total. Basicamente, propomos que a diferença do torque magnético seja analisada, que é  $\tau(\theta, H_1)/H_1 - \tau(\theta, H_2)/H_2$  versus  $\theta$ . Onde  $H_1$  e  $H_2$  são valores dados pelo experimento. Admitimos que a energia intra não contribui para esta diferença, e apenas efeitos devidos à energia inter são encontrados.

Para os novos supercondutores cerâmicos, onde a supercondutividade é confinada aos planos de *CuO*, é conveniente o estudo do modelo Lawrence-Doniach (LD), onde planos supercondutores interagem entre si através do efeito Josephson. O efeito de camadas não é abordado nesta tese, para isto é necessário trabalharmos com a teoria LD. A teoria de London anisotrópica pode ser encarada como uma aproximação contínua da teoria de LD, válida quando o comprimento de coerência ao longo da direção ortogonal aos planos é muito maior que a separação entre os planos. No caso de linhas de vórtices inclinadas, no modelo de LD, a supercorrente de Josephson dá contribuição importante para o torque magnético. Temperaturas baixas, o núcleo das linhas de vórtice acomodam-se nas regiões entre as camadas supercondutoras. Isto causa uma atração natural das linhas para estas regiões, apresentando um mecanismo de ancoramento intrínseco que leva a uma corrente crítica muito alta. Para um campo aplicado numa direção próxima à direção do plano das camadas, a linha de vórtice inclinada pode ser imaginada como uma escada com degraus longos ao longo das camadas, e curtas linhas de vórtices retas na direção perpendicular ao plano das camadas. Para temperaturas altas, não podemos imaginar este modelo, pois

um número grande de camadas irão atravessar a área de seção reta do núcleo do vórtice. Em conclusão, na região de  $\theta$  próximo a  $90^\circ$ , aparece um pico no torque magnético nesta região [37]. Este resultado não é previsto pela teoria de London. Este gráfico é apresentado abaixo, [37].

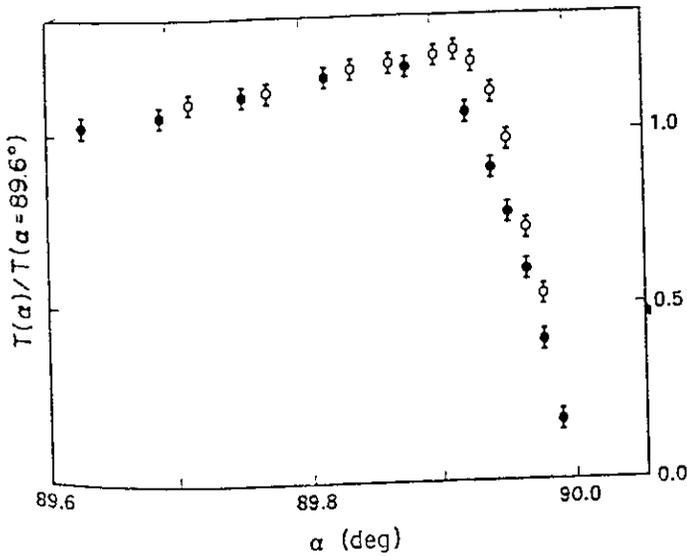


fig. 24 - Para linhas muito inclinadas, o torque mostra um pico.

Supomos que as linhas de vórtice são retas para qualquer valor da indução magnética e a distribuição das linhas formam sempre um arranjo periódico, com apenas um vórtice por célula unitária. Neste trabalho, restringimo-nos ao limite de valores elevados de  $\kappa$ , e correções da ordem de  $1/\kappa$  entre o campo externo e a indução magnética não são considerados [58]. Os efeitos devido à forma do supercondutor não são considerados, assim

o fator de desmagnetização é nulo, de modo que o campo magnético externo seja o campo termodinâmico  $\vec{H}$ .

## 2.2 A Energia Total do Sistema e o Torque Intrínseco

A energia total para o sistema de linhas de vórtices pode ser escrito na seguinte forma:

$$f = \frac{B}{k_z} [\epsilon(k_z, \gamma, \theta) + V(Bk_z, \gamma, \theta, \rho, \phi)] + B^2, \quad (2.1)$$

esta expressão é derivada da fórmula para a energia inter de vórtice sem núcleo e da energia intra baseada no modelo Gaussiano para a linha de vórtice. O termo multiplicativo,  $B$ , indica que a energia livre por volume deve ser proporcional à densidade de linhas de vórtice. Esta equação foi derivada a partir da eq. (1.94). A contribuição da energia intra,  $B\epsilon/k_z$ , não depende de parâmetros da célula unitária,  $\rho$  e  $\phi$ , nem da densidade de linhas de vórtice  $B$ . Entretanto, a contribuição da energia inter,  $BV/k_z$ , que descreve a interação entre as linhas de vórtice, depende da densidade  $B$ , e do arranjo das linhas de vórtice no espaço, descrito por  $\rho$  e  $\phi$ , onde  $\rho$  é a razão entre os lados da célula unitária,  $L_1/L_2$  e  $\phi$  é o ângulo que estes lados formam. A constante de Ginzburg-Landau ao longo da direção uniaxial é  $k_z = k\gamma^{-2/3}$ . O parâmetro de anisotropia de massa é  $\gamma$ , e como vimos na seção anterior, o ângulo entre a linha de vórtice e o eixo de simetria do material é  $\theta$ .

O torque magnético pode ser escrito em relação à variável  $\theta$ , como veremos a seguir: O torque magnético,  $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{H}$ , é escrito em unidades reduzidas na forma (veja Apêndice C),

$$\vec{\tau} = \vec{B} \times \frac{\partial f}{\partial \vec{B}}.$$

Neste trabalho, consideramos o supercondutor com um fator de desmagnetização nulo, e portanto o campo externo é obtido pela expressão  $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$ . A energia livre de Helmholtz é determinada pela densidade de linhas de vórtice  $B$ , e o ângulo  $\theta$ , e nestas variáveis o torque é escrito

$$\vec{\tau} = -\frac{B}{\kappa_z} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \hat{y}. \quad (2.2)$$

O torque intrínseco deve ser escrito em funções de variáveis acessíveis experimentalmente, que são o campo magnético externo  $H$ , e seu ângulo com o eixo de simetria do material. No limite de valores extremamente elevados de  $\kappa$ , onde a magnetização  $\vec{M}$  é suficientemente pequena, podemos aproximar, na eq. (2.2),  $B$  por  $H$ , e o ângulo entre  $\vec{H}$  e  $\hat{z}$  (o ângulo  $\alpha$ ) por  $\theta$  [58].

Muitas conclusões podem ser extraídas do experimento do torque tendo em conta que as energias *intra* e *inter* contribuem aditivamente ao torque na aproximação de  $\kappa$  elevado.

A expressão para a energia intra, que foi derivada no capítulo anterior, eq.(1.107),

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Gamma(\theta)}} \left( \frac{\lambda}{\xi_1} \right)^2 \int dq \int dk_2 [g_1(q, k_2) \sin^2 \theta + g_3(q, k_2) \cos^2 \theta] \quad (2.3)$$

onde

$$g_1(q, k_2) = \frac{e^{-q^2 - k_2^2}}{(\lambda_3/\xi_1)^2 (q^2 + k_2^2) + 1},$$

$$g_3(q, k_2) = g_1(q, k_2) \frac{(\lambda_3/\xi_1)^2 (q^2/\Gamma(\theta) + k_2^2) + 1}{(\lambda_1/\xi_1)^2 (q^2/\Gamma(\theta) + k_2^2) + 1}$$

e

$$\Gamma(\theta, \gamma) = \sqrt{\cos^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta}$$

é válida para todo o intervalo onde vale a teoria de London anisotrópica, isto é,  $H_{c1} \ll H \ll H_{c2}$ . Obtemos uma expressão analítica para o caso quando a constante de Ginzburg-Landau  $k$  é grande. A energia aproximada neste limite é

$$\epsilon_{approx} = \frac{\Gamma(\theta, \gamma)}{\gamma} \ln \left[ \frac{k_z \gamma}{\Gamma(\theta, \gamma)} \right]. \quad (2.4)$$

Calculamos a energia intra e o torque como função do ângulo  $\theta$  para uma anisotropia fixa ( $\gamma = 0.02$ ) e parâmetro de Ginzburg-Landau  $k_z = 1000$ , usando a expressão integral

(sem a aproximação) e a expressão analítica. A figura 25 mostra nossos resultados indicando que a fórmula acima, eq. (2.4), (linha tracejada) dá uma boa descrição do modelo Gaussiano no limite de supercondutores do tipo II extremo (grande valor de  $\kappa$ ) [38].

Uma conclusão imediata obtida da figura 25 é que fazer uma linha de vórtice isolada perpendicular ao eixo de simetria custa menos energia que fazer esta linha paralela a este eixo. Para uma densidade fixa  $B$ , e variando  $\theta$ , a energia intra decresce com o aumento do ângulo  $\theta$ , como mostrado na fig. 25. O torque é nulo para as configurações  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ , uma vez que estes pontos são extremos locais da energia intra. Entretanto, o primeiro,  $\theta = 0^\circ$ , é uma posição de equilíbrio instável, enquanto  $\theta = 90^\circ$  é estável. Assim, para um pequeno deslocamento da posição de equilíbrio, o torque leva a linha de vórtice, sem interação, para a configuração  $\theta = 90^\circ$ . A contribuição para o torque pela energia intra é sempre positiva, como podemos ver pela eq. (2.2), e é nula para os ângulos extremos.

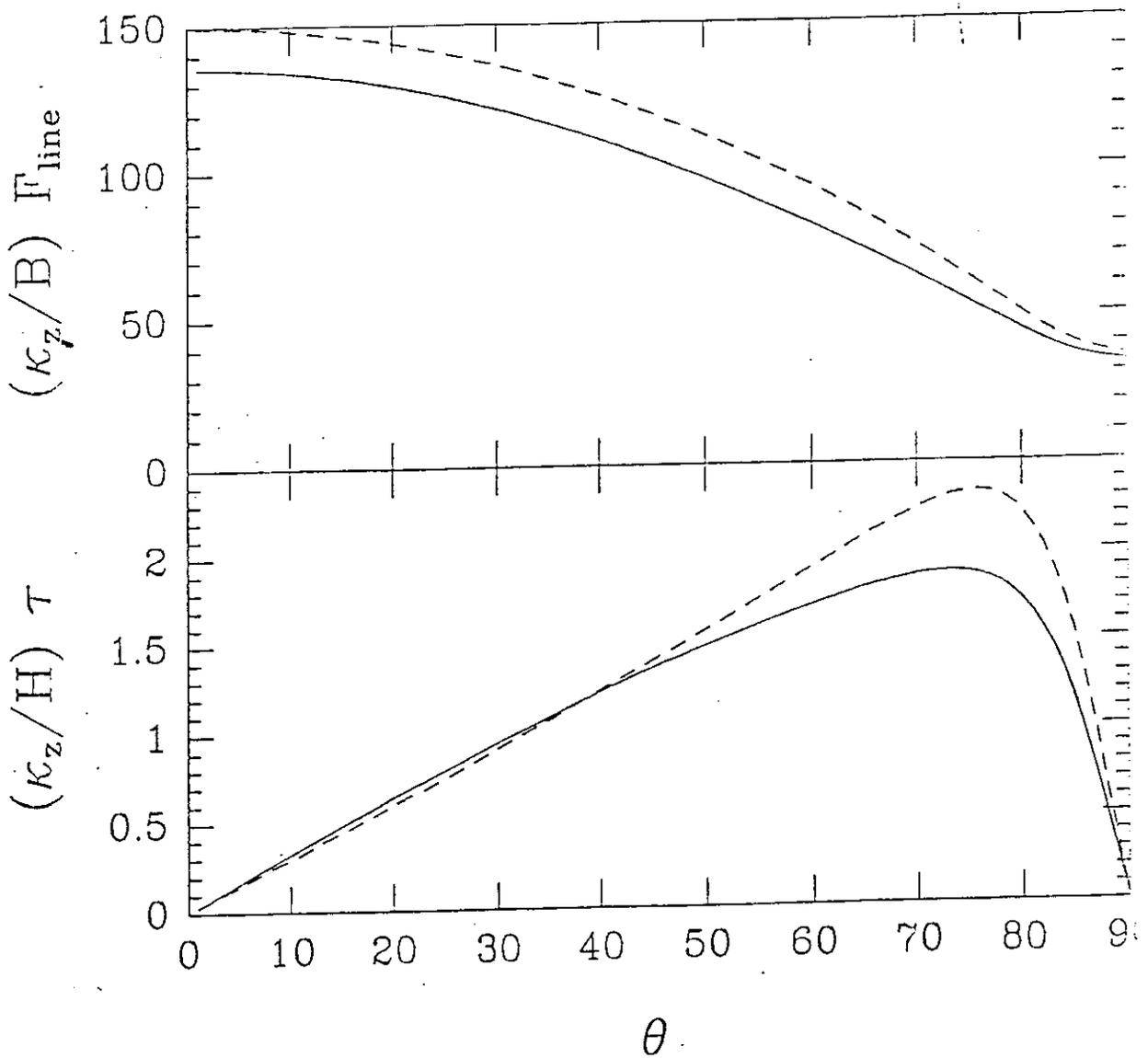


fig. 25 - Comparação da energia livre intra e o torque para o modelo Gaussiano, Eq. (2.3) (linha contínua), e fórmula aproximada, Eq. (2.4) (linha tracejada).

A energia inter, derivada no capítulo anterior, foi otimizada, isto é, procuramos os parâmetros da rede de vórtice que minimizam esta energia. Assim, buscamos o conjunto  $(\rho, \phi)$  ótimo. Neste trabalho, não fazemos uma procura completa para encon-

trar os parâmetros que otimizam esta energia. Nossa busca é aproximada, e consiste em determinarmos a energia inter mínima para o caso da célula unitária retangular ( $\phi = 90^\circ$ ). A procura neste caso, se resume em encontrar a razão,  $\rho$ , entre os lados da célula unitária,  $L_1$  e  $L_2$ . Por exemplo, para  $\theta = 0^\circ$ , nossa busca é limitada a achar uma célula unitária retangular, em vez de uma rede triangular, que como é sabido, apresenta a menor energia para esta configuração. A razão desta aproximação é dupla. A busca para o ângulo  $\phi$  ótimo da célula unitária fica muito difícil para valores baixos da indução magnética. O plano definido pela indução magnética,  $B$ , e o eixo de simetria é a direção de deformações elástica "fácil" onde o módulo de cisalhamento  $C_{66}$  cai rápido em função de  $\theta$ ,  $C_{66}(\theta = 90^\circ)/C_{66}(\theta = 0^\circ) = \gamma^{3/2}$  [26]. Para o limite de baixa indução magnética o surgimento das cadeias de vórtice congelam a separação da linha ao longo deste plano,  $L_1$ , e a separação entre as cadeias, através da condição de quantização do fluxo é  $L_2 \sin \phi = \Phi_0/BL_1$  [21]. Portanto, a energia livre inter tem essencialmente o mesmo valor para todas as redes caracterizadas por  $\phi$  e  $L_2$ . A outra razão para não fazermos uma procura mais completa para os parâmetros da rede que a minimizem é que a energia da rede e o torque são mais sensíveis a variações do ângulo  $\theta$  que do ângulo  $\phi$ . Tomamos dois casos,  $\phi = 90^\circ$ , e  $\phi = \tan^{-1}[\sqrt{3}/\Gamma(\theta)]$  [22], que é o ângulo da célula unitária para valores elevados da indução magnética, e procuramos pelo valor ótimo de  $\rho$  em ambos os casos. O resultado é que diferenças insignificantes na energia livre e no torque versus  $\theta$  foram encontradas. Deste modo, a energia inter tem a forma,

$$f_{inter} = \frac{B}{k_z} [V(Bk_z, \gamma, \theta, \rho_{\text{ótimo}}, \phi = 90^\circ) - Bk_z] + B^2. \quad (2.5)$$

O comportamento da energia livre inter com  $\theta$  foi anteriormente obtido [21]. Os ângulos  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  correspondem a configurações de equilíbrio energético como mostra a fig. 27 para 3 valores de  $B$ .  $\theta = 90^\circ$  é a configuração de maior energia para qualquer valor de  $B$ . Interessante observar que  $\theta = 0^\circ$  apenas é um mínimo absoluto para valores da indução magnética bastante elevados, embora este seja sempre um mínimo local. Para indução magnética baixa, o estado de vórtice mistura-se com cadeias que, eventualmente, pode ter menor energia inter que a rede triangular [21],[43].

A atração entre linhas de vórtice ao longo do plano especial definido pela indução magnética e pelo eixo de simetria do supercondutor decorre das propriedades de  $\vec{B}(\vec{r})$ , o campo magnético local de uma linha de vórtice no espaço [15], [14], [36]. A fig. 26 mostra a distância  $L_1$  de repulsão mínima entre as linhas de vórtice para cada valor do ângulo  $\theta$ . Nesta figura mostramos ainda que os estados considerados na fig. 27 são, realmente, estados onde começam o aparecimento das cadeias de vórtice para baixos valores da indução magnética  $B$ . O parâmetro da célula unitária ao longo do plano de simetria,  $L_1/\lambda_3$ , é mostrado nesta figura para um desses estados.

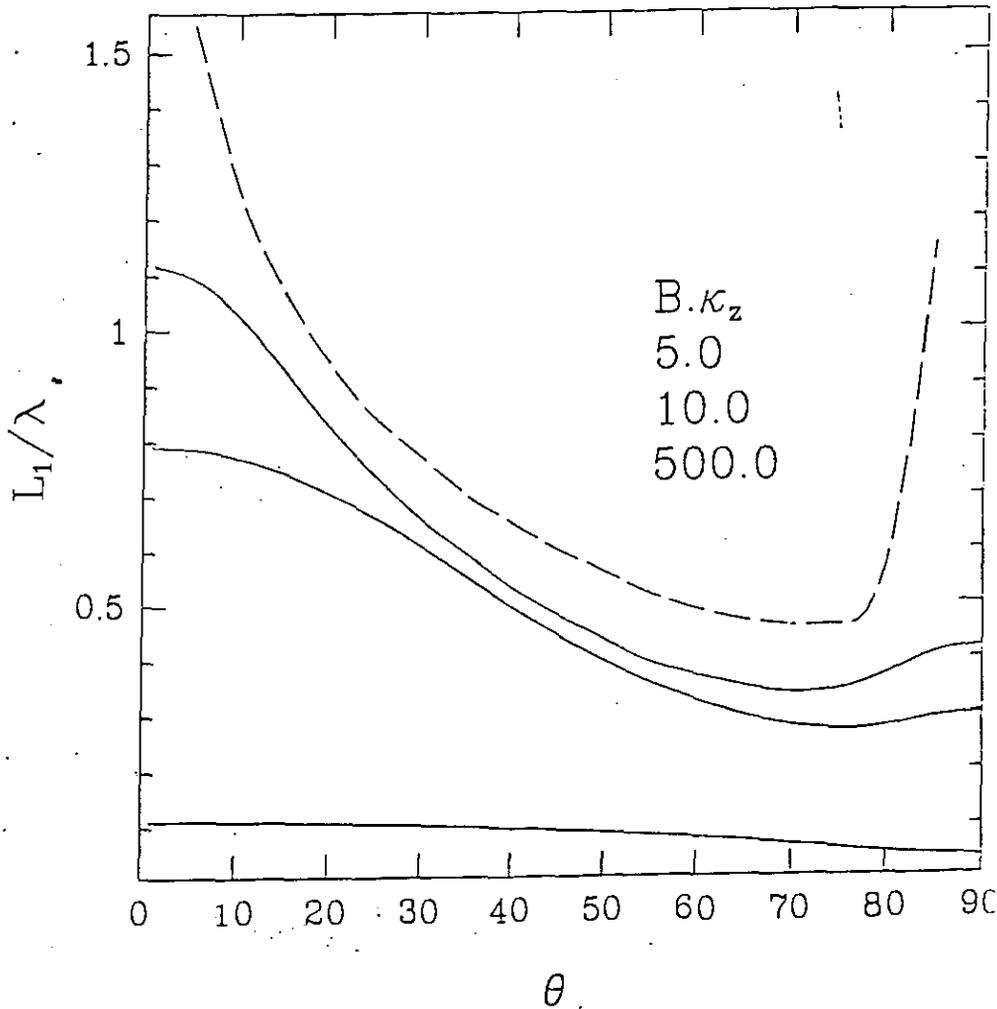


fig. 26 - A distância entre vórtices ao longo do plano de simetria, definido pela indução magnética,  $B$  e pelo eixo de simetria, é apresentada para os valores  $B\kappa$  estudados na Fig. 27. O campo magnético de uma única linha ao longo deste plano também é apresentado (linha tracejada).

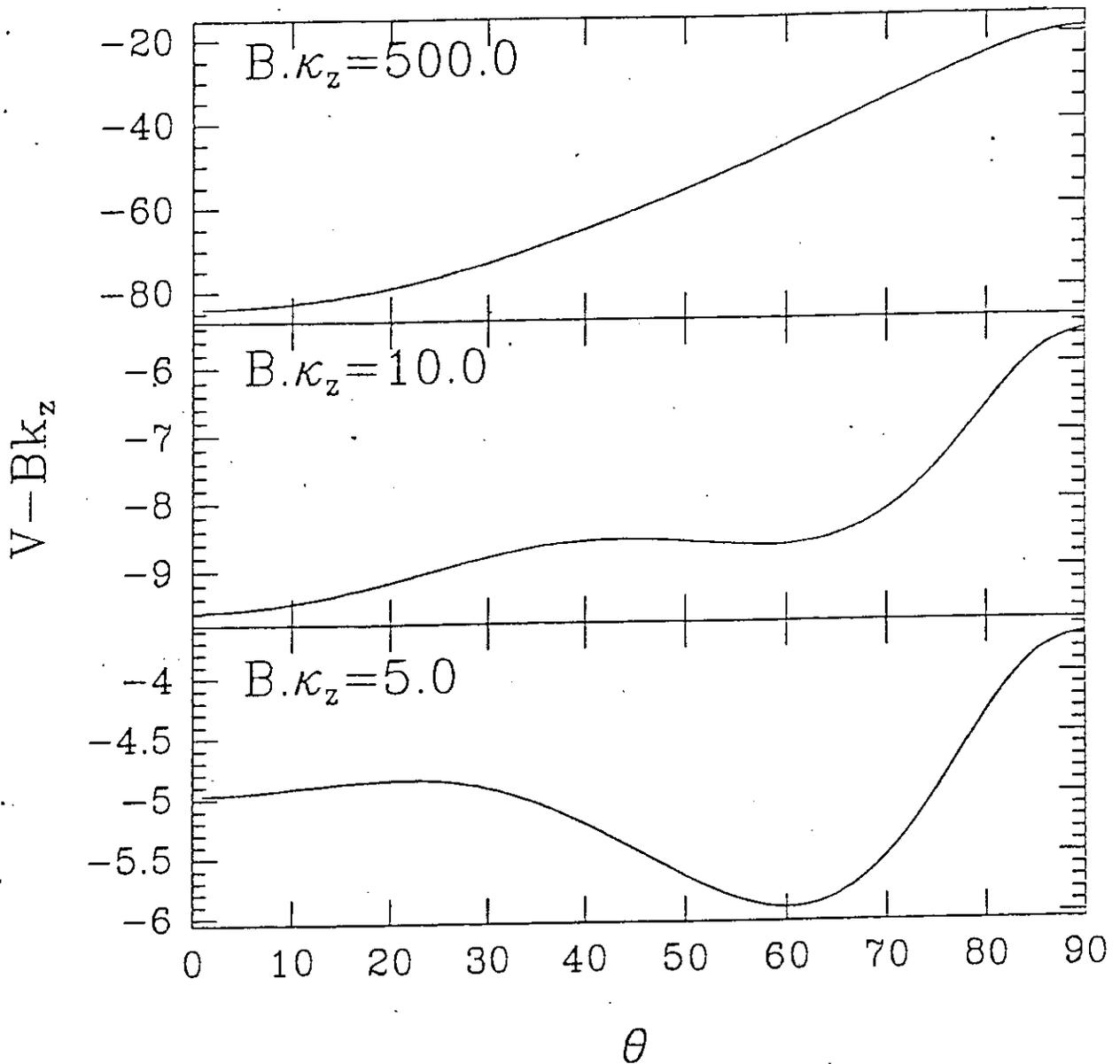


fig. 27 - A energia livre inter, removida o background de campo, é mostrada para diferentes valores de  $B\kappa_z$ . Para  $B\kappa_z=5$ , o ângulo  $\theta=60$  é o mínimo absoluto e caracteriza o surgimento das cadeias de vórtices.

O torque devido à contribuição da energia inter é mostrado na fig. 6, e reflete o carácter da energia inter. Este torque é contrário ao torque gerado pela energia intra. Para valores de  $B$  grandes, o torque é negativo, uma vez que a configuração da rede de menor energia é em  $\theta = 0^\circ$  e cresce monotonicamente até  $\theta = 90^\circ$ . Note que a configuração do torque resultante é oposta em sinal ao encontrado quando consideramos apenas a energia intra.

Para valores da indução magnética pequenos, o torque gerado pela energia inter não é apenas nulo em  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  mas também em ângulos intermediários, isto sendo devido ao surgimento das cadeias de vórtice.

## 2.3 Conclusão

Um supercondutor anisotrópico experimenta um torque, uma vez que seja deslocado do seu ângulo de equilíbrio. Portanto, para entendermos o torque magnético intrínseco, analisamos a energia livre de Helmholtz, procurando por sua configuração de mais baixa energia. Estudamos a energia livre no contexto da teoria de London anisotrópica, a qual nos mostra que a energia recebe duas contribuições contrárias com respeito ao ângulo de equilíbrio  $\theta$ . Supomos os vórtices como sendo linhas retas, a energia intra sendo a energia necessária para formar uma linha de vórtice no espaço versus o número total de linhas. Consideramos o modelo Gaussiano para descrever a interação eletromagnética no interior do núcleo do vórtice. A energia inter é obtida da interação entre linhas de vórtices distintas onde não consideramos o seu núcleo. Discutimos separadamente as duas contribuições para o torque. Vamos, a seguir, discutí-las juntas.

No limite de densidade de vórtices extremamente grande,  $B$ , a energia livre total considerada aqui é da mesma ordem que a encontrada na ref. [22], somada à energia intra. Portanto encontramos a mesma forma da expressão do Kogan [32],

$$f = B^2 + \frac{B\Gamma(\theta)}{2\kappa_z\gamma} \ln \left[ \frac{H_{c2}(\theta, \gamma)\eta(\theta, \gamma)}{B} \right], \quad (2.6)$$

contudo, não utilizamos parâmetros livres outros quais  $\gamma$ , e  $\kappa$ .

$$H_{c2}(\theta, \gamma) = \frac{\kappa_z\gamma}{\Gamma(\theta)}, \quad \eta(\theta, \gamma) = \frac{\gamma e^{2C_e} A_2^2(\theta, \rho, \gamma)}{4\Gamma(\theta)^2 \sigma A_1^2(\theta, \rho, \gamma)}, \quad (2.7)$$

e as funções auxiliares são

$$A_1^2(\theta, \rho, \gamma) = \prod_{s=1}^{\infty} [1 - 2 \exp(-\sigma s) \cos(\chi s) + \exp(-2\sigma s)]$$

e

$$A_2^2(\theta, \gamma) = \left[ \frac{\Gamma(\theta) + |\cos \theta|}{\sqrt{\gamma}(1 + |\cos \theta|)} \right]^{\frac{|\cos \theta|}{\Gamma(\theta)}}$$

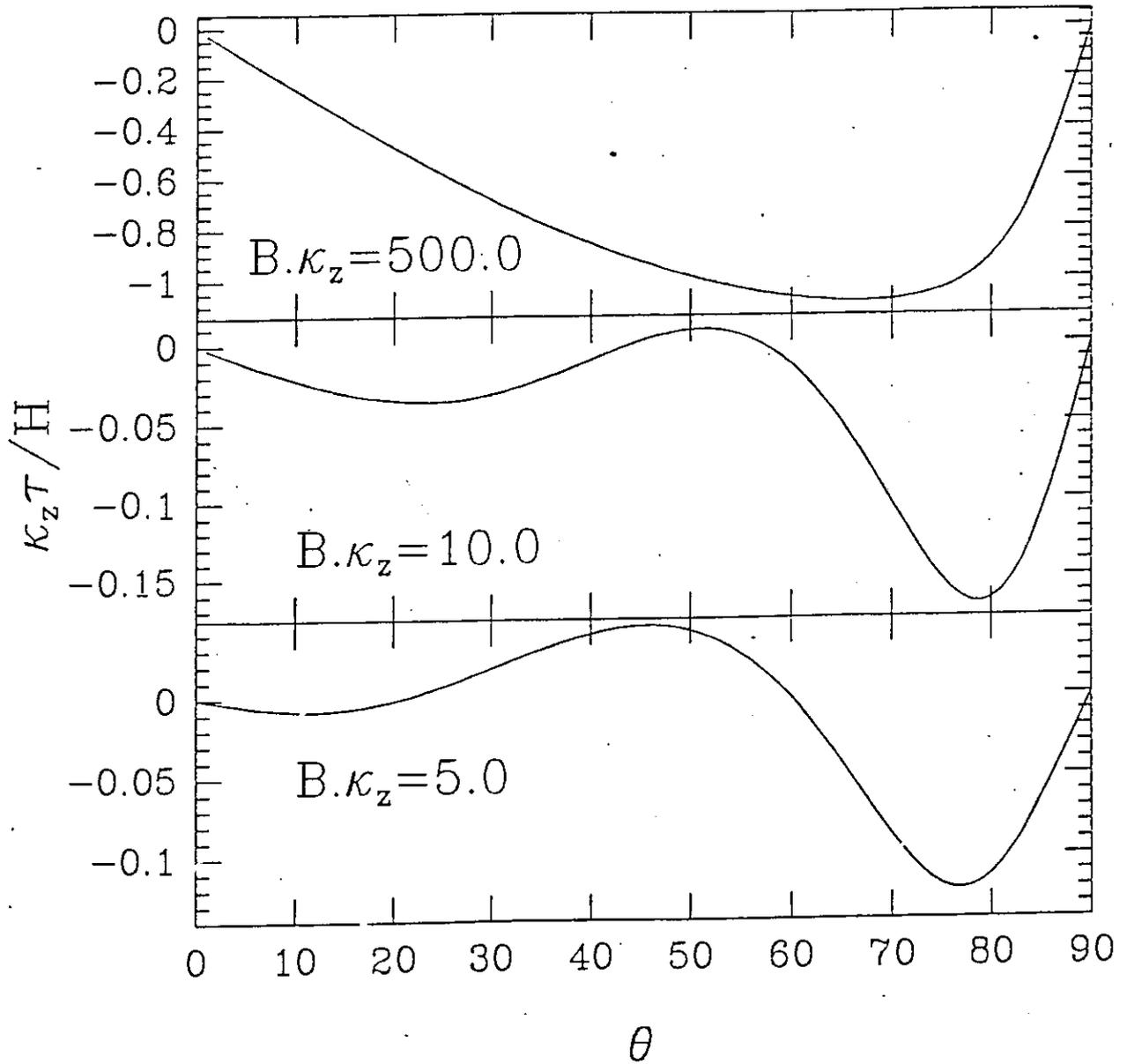


fig. 28 - O torque irter é mostrado aqui para os mesmos valores de  $B \cdot \kappa_z$  estudados na Fig. 26 e Fig. 27.

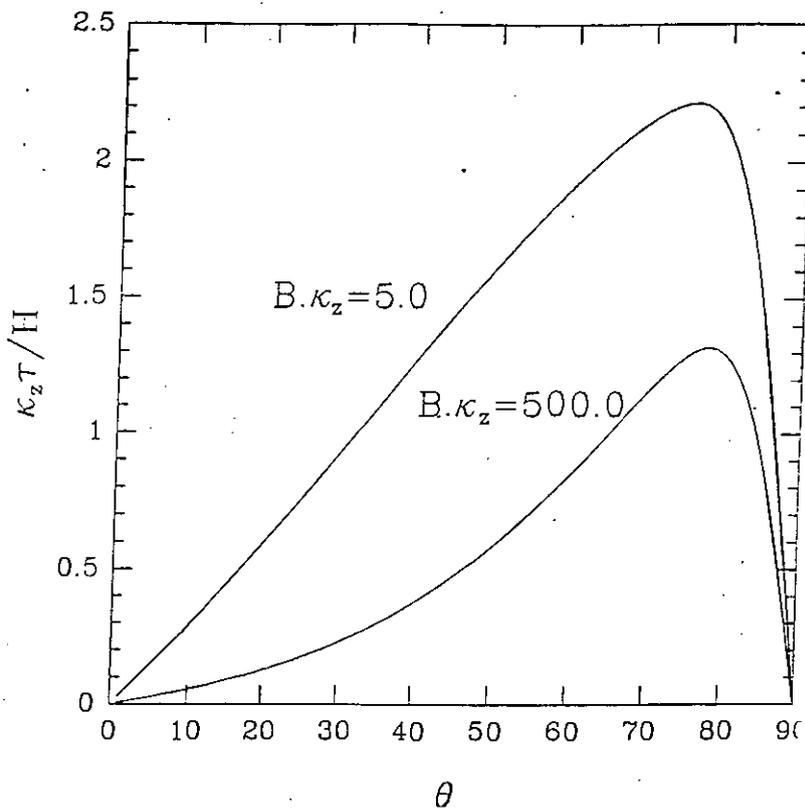


fig. 30 - O torque total incluindo as contribuições inter e intra, é mostrado para os mesmos valores da Fig. 29.

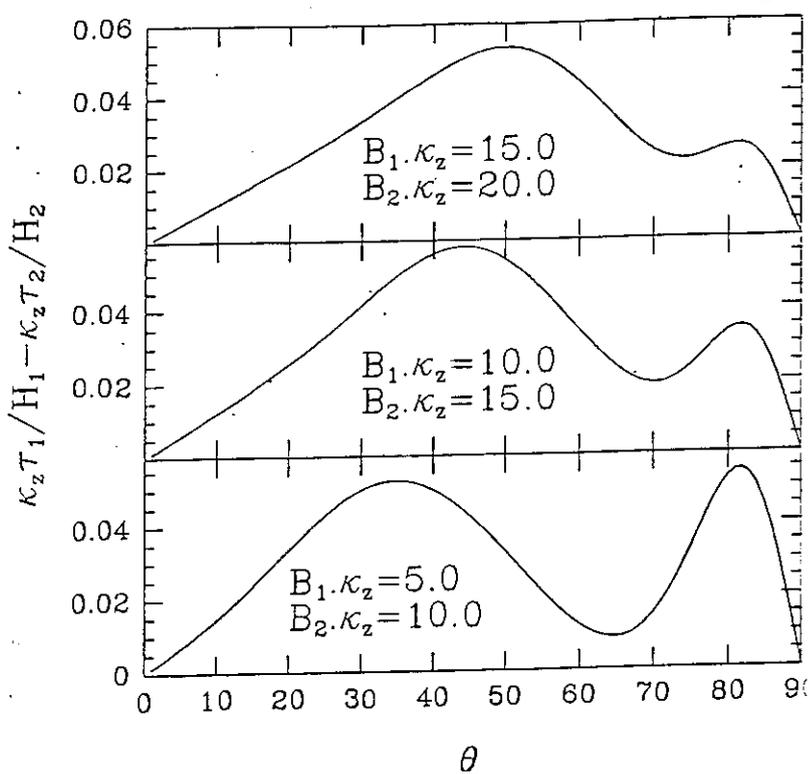


fig. 31 - A diferença do torque total é mostrada para campos magnéticos baixos, próximos ao aparecimento das cadeias de vórtices.

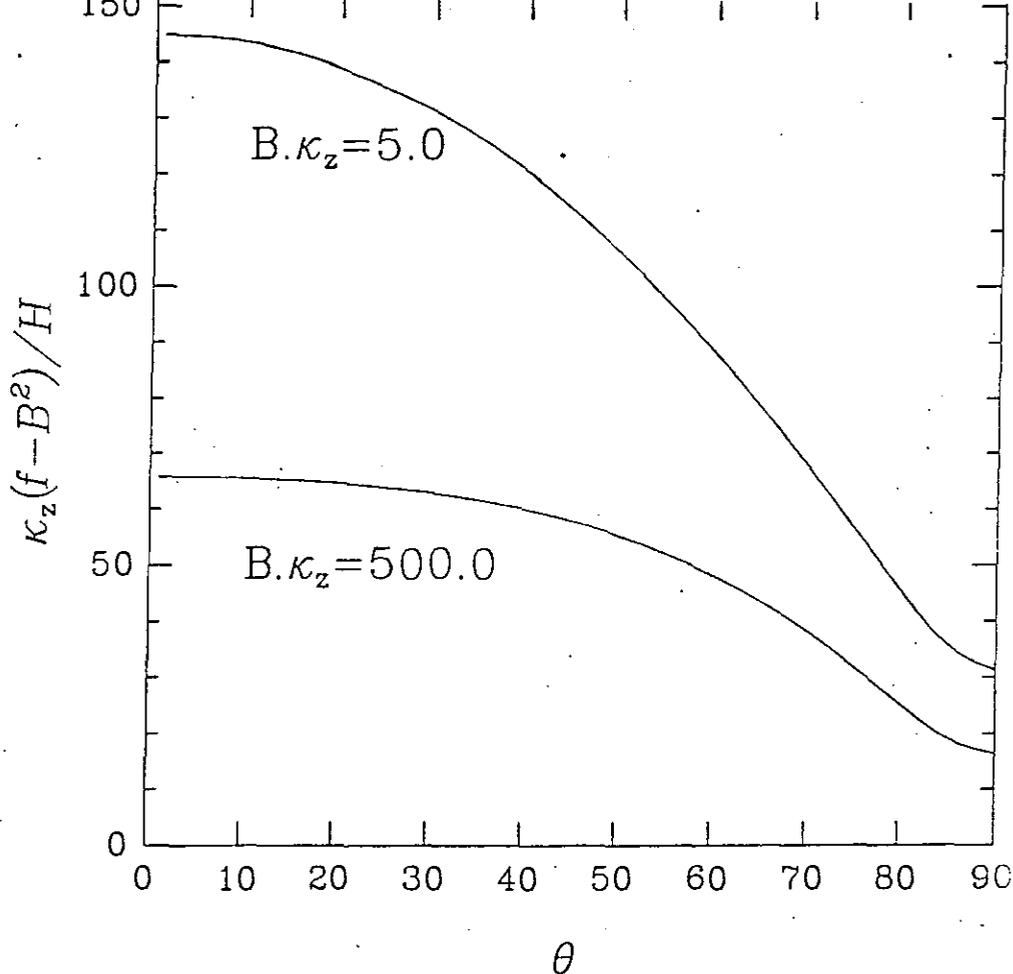


fig. 29 - A energia livre total incluindo a contribuição inter e intra, com a remoção do background de campo é mostrada aqui para valores extremantes alto e baixo de  $B\kappa_z$ .

As funções acima dependem de  $\sigma = 2\pi\Gamma(\theta)\sin\phi/\rho$ ,  $\chi = 2\pi\cos\phi/\rho$ , e da constante de Euler,  $C_e$ . Os parâmetros da rede que extremizam esta energia livre [22] são dados por  $\phi = \tan^{-1}[\sqrt{3}/\Gamma(\theta)]$  e  $\rho = 2\cos\phi$ . Através do critério de Lindemann, a energia livre tem sido usada para determinar a dependência angular da temperatura de derretimento [38].

A energia livre total tem seu máximo e mínimo absoluto para qualquer valor de  $B$ , em  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$  respectivamente, como mostra a fig. 29. Estes ângulos correspondem à configuração de energia de equilíbrio e isto foi independentemente encontrado para as energias intra e inter, de acordo com as figs. 25 e 28. A fig. 30 mostra o torque total incluindo as contribuições das energias intra e inter para valores de  $B\kappa_z$  altos e baixos. Este resultado reproduz os gráficos experimentais obtidos por Farrel e col. [48]. A contribuição da energia livre intra é sempre dominante para a energia livre total. Quando a densidade de linhas de vórtice é baixa, a interação entre estas linhas é desprezível e a contribuição da energia inter é totalmente dominada pela contribuição da energia intra. Quando as

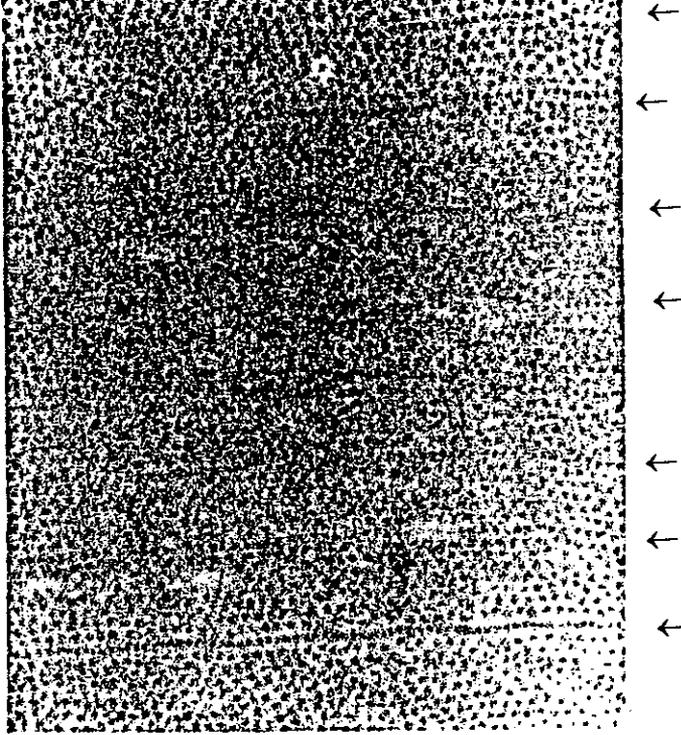
linhas de vórtice estão próximas uma das outras, ou seja temos um elevado valor de  $B$ , os efeitos gerados pela energia livre inter são notados. Isto explica alguns resultados, como na fig. 27, a dependência em  $B$  dos valores da energia livre total máximo e mínimo em  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ . Vemos que o máximo (mínimo) em  $\theta$  da energia decresce (cresce) quando o valor de  $B$  cresce. Consequentemente,  $\tau(\theta)/H$  deve decrescer com o crescimento de  $H$  como mostra a fig. 30. Para valores elevados do campo magnético aplicado,  $H$ , a rede de vórtice de menor energia é em  $\theta = 0^\circ$ , e isto provoca um torque magnético negativo, não grande o suficiente para cancelar o torque vindo da contribuição da energia intra. Para campos baixos,  $\tau(\theta)/H$  é essencialmente devido à contribuição da energia das linhas sem interação (energia intra). O torque tem sinal positivo e dirige o sistema para o seu mínimo de energia em  $\theta = 90^\circ$ , onde é energeticamente favorável a criação de uma linha de vórtice. Para observarmos interessantes efeitos no torque magnético devido a contribuição da energia de interação, eliminamos a contribuição dominante intra. Isto pode ser feito baseando-se no fato de ser a teoria de London linear e a energia de uma única linha de vórtice não depender da densidade de vórtice  $B$ . Por esta razão, estudamos  $\tau(\theta, H_1)/H_1 - \tau(\theta, H_2)/H_2$ , que não carrega contribuições da energia intra. A fig. 31 mostra esta diferença de torques para valores baixos de campos como função do ângulo  $\theta$ . A rica estrutura encontrada nessas curvas reflete os efeitos da contribuição da energia de interação, isto é, o aparecimento da atração entre vórtices ao longo do plano de simetria.

# Capítulo 3

## Coexistência de Linhas de Fluxo Ortogonais

### 3.1 Introdução

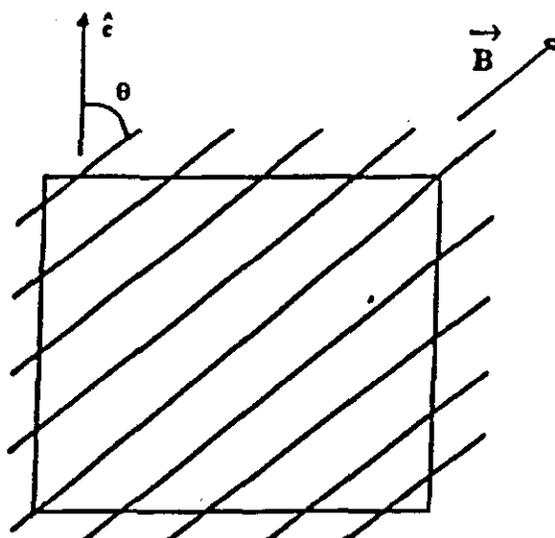
Experimentos de decoração magnética feitos em monocristais de *BSCCO* revelam uma nova rede de vórtices para os supercondutores uniaxiais [39]. A figura encontrada consiste de cadeias de vórtices ao longo do plano definido pelo vetor  $\vec{B}$  e pelo ângulo  $\theta$  entre este vetor e o eixo de simetria da amostra, e redes hexagonais ordenadas localmente. Grigorieva [40] fez, recentemente, um trabalho também utilizando decoração magnética, onde se estuda o comportamento do ângulo  $\theta$  e o derretimento desta configuração. A descoberta desta nova configuração para a rede de vórtices gerou vários modelos teóricos, sugerindo a possível coexistência de linhas de vórtices em diferentes orientações no contexto da teoria de London anisotrópica [41], [42] e [43]. A fig. 32 mostra tal arranjo [39].



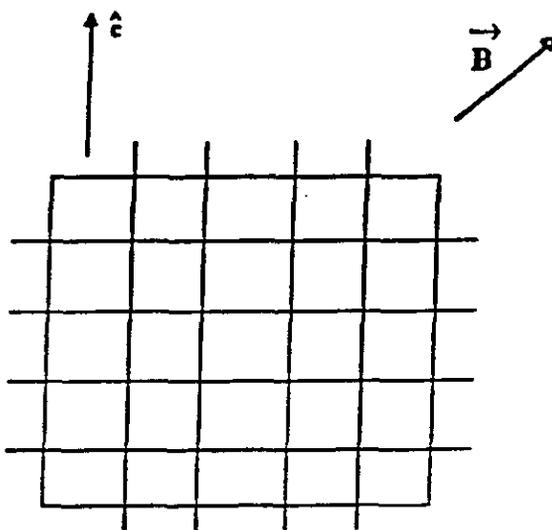
**fig. 33 - Experimento de decoração magnética realizado no BSCCO. Mostrando cadeias de vórtices intercaladas por redes triangulares distorcidas. As setas indicam as cadeias de vórtices.**

Vamos rerepresentar os parâmetros de interesse para os supercondutores uniaxiais que já foram apresentados nesta tese. Existe um plano especial de simetria definido pelo eixo de simetria  $\hat{c}$ , e a indução magnética  $\vec{B}$ , sendo  $\theta$  o ângulo formado entre eles ( $\cos \theta = \vec{B} \cdot \hat{c}$ ). Na teoria de London anisotrópica o supercondutor uniaxial é caracterizado pela constante de Ginzburg-Landau (GL),  $\kappa$ , e pelo parâmetro de anisotropia de massa,  $\gamma = m_1/m_3$ , ( $0 \leq \gamma \leq 1$ ), onde  $m_3$  e  $m_1$  são os parâmetros de massa ao longo e ortogonal ao eixo- $c$ , respectivamente. O comprimento de penetração de London,  $\lambda_i$ , e o comprimento de coerência,  $\xi_i$ , ao longo do eixo- $c$  ( $i = 3$ ), e ortogonal a este ( $i = 1$ ), satisfazem a relação  $\lambda_1 \xi_1 = \lambda_3 \xi_3$ . A constante de GL é  $\kappa = \Phi_0 / (2\pi\sqrt{2}H_c \xi^2) = \lambda/\xi$  onde o comprimento médio de penetração de London e o comprimento de coerência médio são  $\lambda = (\lambda_1^2 \lambda_3)^{1/3}$ , e  $\xi = (\xi_1^2 \xi_3)^{1/3}$ . A constante de GL na direção ao longo da direção uniaxial é  $\kappa_z = (\lambda_3/\xi_3) = (\kappa\gamma^{-2/3})$ . Huse [41] propôs que esta figura observada no BSCCO reflete a interação entre linhas de fluxo paralelas e quase perpendiculares ao eixo- $c$ . Daemen e col. [42] alegaram através de argumentos termodinâmicos, a existência de duas espécies de linhas de fluxo, como sendo uma consequência direta da forma da amostra e, assim, estudaram a geometria da placa. Sardella e Moore [44] estudaram a estabilidade da linha de vórtice e encontraram que os vórtices paralelos, fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo- $c$ ,

é uma configuração instável; uma instabilidade na onda inclinada ocorre mesmo que a região tenha uma alta densidade de linhas de vórtice . A instabilidade ocorre em um determinado valor crítico da anisotropia de massa,  $\gamma_c = 1/(3 + \sqrt{8})$  , para o intervalo do ângulo  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ . Eles argumentam que esta instabilidade provavelmente gera a formação de uma orientação múltipla das linhas de fluxo da rede. Sudbo e col. [44] tem consideraram linhas de vórtices retas e não-interagentes. Encontraram que a energia de Gibbs possui dois mínimos locais associado com orientações distintas das linhas de vórtice, não necessariamente ortogonais. Obtiveram uma linha crítica onde estes dois mínimos permanecem em um estado energético degenerado. Seus resultados indicam a coexistência de linhas de fluxo com diferentes orientações na vizinhança de  $H_{c1}$ , onde a interação vórtice-vórtice é desprezível. Preosti e Muzikar [46] mostraram que apenas para um supercondutor sem fronteiras, no contexto mais simples da teoria de London, o arranjo das linhas de vórtice inclinadas alcançam uma configuração de energia menor, se as linhas separam-se em dois conjuntos ortogonais, ao longo e perpendicular ao eixo- $c$ . Seus resultados mostram que linhas paralelas inclinadas e retas não formam a configuração de mais baixa energia para supercondutores extremamente anisotrópicos. Isto é que chamamos de configuração ortogonal, como mostra a fig. 33.



$$F(B, \theta)$$



$$F(B \cos \theta, \theta) + F(B \sin \theta, 90^\circ)$$

fig. 33 - Esta figura é a representação das duas configurações de rede de vórtice, que apresentam a mesma densidade de linhas B. A primeira tem todas as linhas ao longo da indução magnética. A outra tem as linhas de vórtice pertencendo a dois conjuntos, ortogonal e paralelo ao eixo de simetria da amostra.

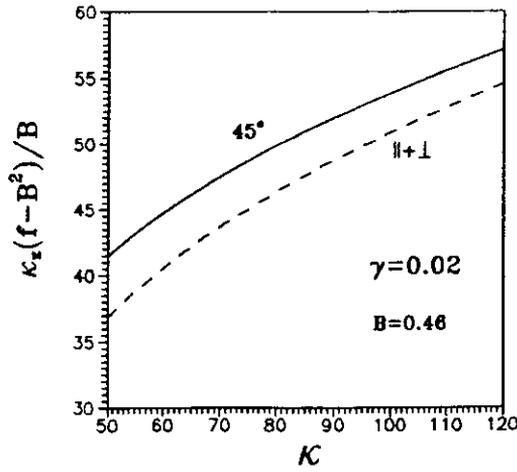


fig. 34 - As energias  $F_{\parallel+\perp}$  e  $F_{45}$  versus  $\kappa$ .

Neste capítulo, mostramos novos resultados em relação ao estado ortogonal. Comparamos a energia de Helmholtz de duas configurações ortogonais para a mesma densidade de linhas, isto é, mesmo  $\vec{B}$ . Calculamos a energia para uma direção simples, que tomamos  $45^\circ$ , e para uma direção dupla para linhas fazendo dois conjuntos, um paralelo e outro perpendicular ao eixo- $c$ . As energias são chamadas  $F_{45} = (B, 45^\circ, \kappa, \gamma)$  e  $F_{\parallel+\perp} = F(\sqrt{2}B/2, 0^\circ, \kappa, \gamma) + F(\sqrt{2}B/2, 90^\circ, \kappa, \gamma)$ . Em unidades reduzidas (u.r.), a densidade de energia livre é  $f = F/V(H_c^2/4\pi)$ , onde  $H_c$  é o campo crítico. De modo a remover a contribuição do campo externo, e devido ao efeito linear do crescimento da densidade de vórtice com  $B$ , é feito o gráfico  $\kappa_z(f - B^2)/B$  versus  $\kappa$ , mostrado na fig. 34. No limite isotrópico é sempre verdade que  $F_{\parallel+\perp} > F_{45}$  para qualquer  $\kappa$ . Isto implica a existência de uma anisotropia crítica,  $\gamma_c$ , acima da qual a configuração de múltiplas direções deva cessar [47], [48]. Obtemos a linha crítica no diagrama  $\gamma$  versus  $\kappa$ , e estudamos as propriedades do torque para o estado de configuração ortogonal. Independentemente, conseguimos os mesmos resultados derivados por Preosti e Muzikar, isto é, a decomposição ortogonal das linhas de vórtices apresentam energia inferior à configuração das linhas inclinadas, fig. 34. Similarmente a estes autores trabalhamos com a teoria de London anisotrópica estendida para o núcleo do vórtice pelo modelo Gaussiano, como apresentado no Capítulo 1.

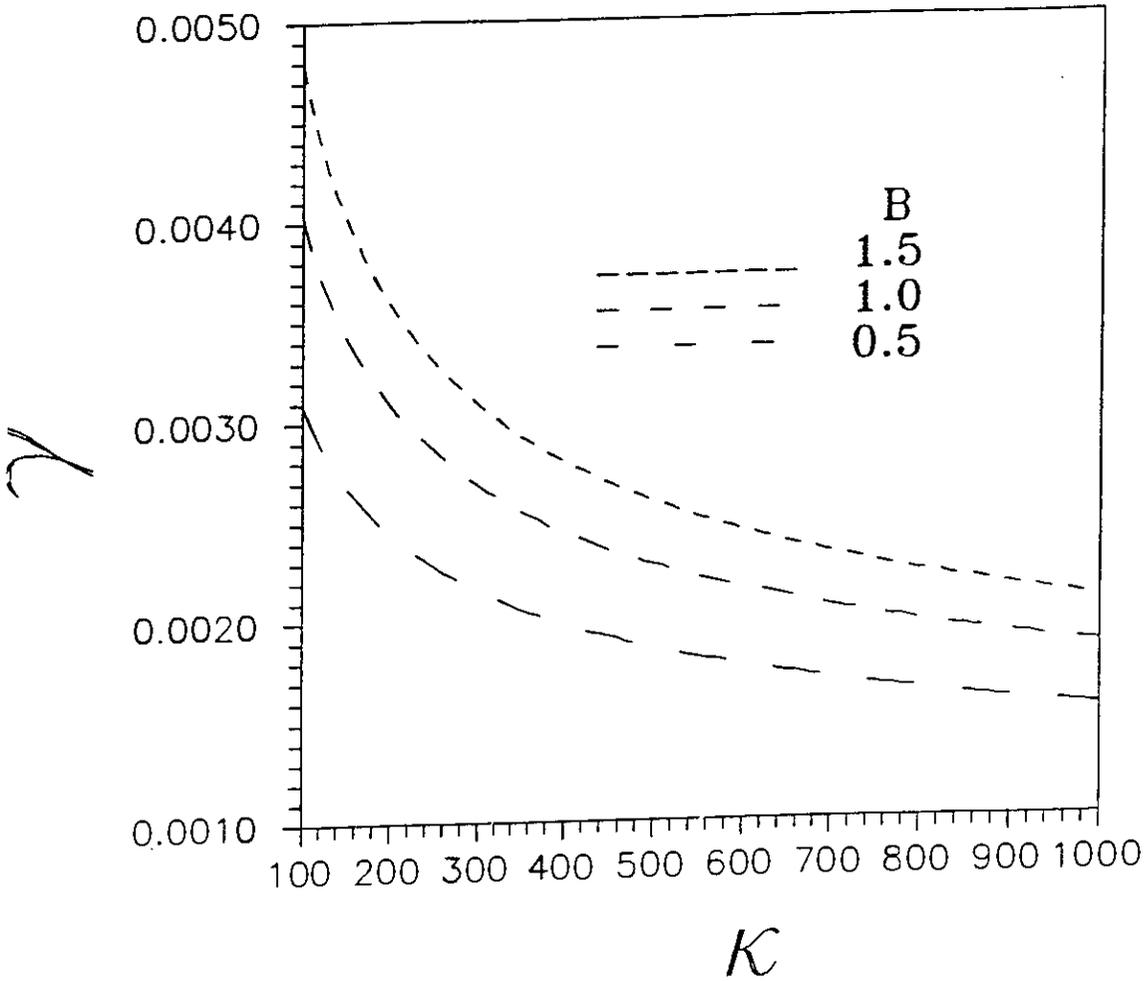


fig. 35 - A curva crítica  $\gamma(\kappa)$  é apresentada para três valores de  $B$ , para  $\theta=45$ . Esta linha separa dois possíveis regimes para o comportamento das linhas de vórtice nos supercondutores anisotrópicos. Acima da linha a configuração ortogonal não é energeticamente favorável, enquanto abaixo desta linha, as linhas de vórtices retas e paralelas ao campo  $B$ , não são energeticamente favoráveis.

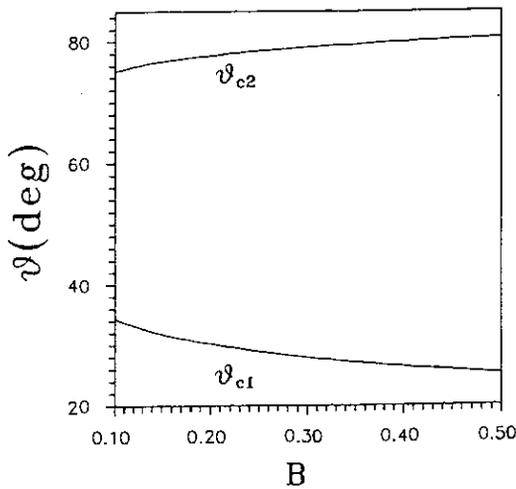


fig. 36 - A dependência dos ângulos críticos,  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$ , em termo da indução magnética  $B$ , é mostrada aqui. A anisotropia de massa,  $\gamma=m1/m3=0.002$ , o parâmetro de Ginzburg-Landau  $\kappa=100$ , são usados nesta figura.  $\theta_{c1}$  decresce do ângulo 34.4 até 25.2 e  $\theta_{c2}$  cresce de 75.1 até 80.6, quando a indução magnética aumenta como apresenta a figura.

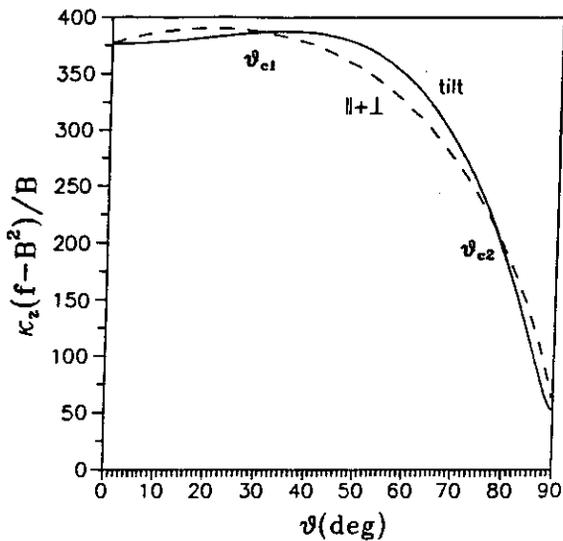


fig. 37 - Esta figura mostra a energia configurações de linhas de fluxo inclinadas e ortogonais para os mesmos parâmetros da Fig. 36, isto é,  $\kappa=100$  e  $\gamma=0.002$ . A indução magnética  $B/Hc2(\theta=0)=1.6 \times 10^{-3}$ . Isto mostra que a configuração ortogonal apenas é possível em certo intervalo  $\theta_{c1} < \theta < \theta_{c2}$ , onde estes ângulos críticos são tomados onde as energias das duas configurações se interceptam. Aqui encontramos  $\theta_{c1}=34.4$  e  $\theta_{c2}= 77.8$ .

Notemos que apenas a ref. [44] trata das verdadeiras propriedades da configuração de mais baixa energia. Tanto neste capítulo quanto na ref. [46], não questionamos se a configuração ortogonal seja a de mais baixa energia, ou se é apenas um mínimo local. Propomos aqui um método para observar se este estado ortogonal ocorre no supercondutor, baseado em dados experimentais de torque e medidas de magnetização.

A linha crítica de anisotropia de massa,  $\gamma_c(\kappa, \theta, B)$ , obtida neste trabalho (veja fig. 35), separa o supercondutor em duas famílias, de acordo com as propriedades do material, a anisotropia,  $\gamma$ , e a constante de Ginzburg-Landau,  $\kappa$ . Descobrimos que apenas os supercondutores do tipo II extremo, e com alta anisotropia pode ter o estado ortogonal. É o caso de um supercondutor com os parâmetros da ordem do *BSCCO* ( $\gamma = 10^{-4}$ ,  $\kappa \approx 100$ ) [40], em concordância com os argumentos dados por Huse [42]. O estado ortogonal não é esperado para o supercondutor *YBCO*, uma vez que este se encontra acima da linha crítica. Este supercondutor tem parâmetros ( $\gamma = 0.02$ ,  $\kappa \approx 100$ ) [49]. Obviamente, esta linha crítica não existe para os ângulos limites  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ ; deste modo, esperamos uma forte dependência da linha crítica com  $\theta$  para ângulos intermediários. Similarmente à Sardella e Moore, encontramos que este fenômeno apenas ocorre em um certo limite dos ângulos  $\theta_{c1} < \theta < \theta_{c2}$  (veja figs. 36 e 37).

Uma linha crítica similar foi previamente obtida na ref. [44]. Sua linha crítica é obtida no diagrama de anisotropia,  $\gamma$ , versus o ângulo entre o campo magnético aplicado e o eixo-*c*. ( $\cos \alpha = B \cdot c$ ), para um valor de  $\kappa$  fixo. Eles mostram que, ao longo de sua linha crítica os dois mínimos locais da energia de Gibbs tornam-se degenerados. Uma vez

que não consideram a energia de interação vórtice-vórtice, seus resultados estão limitados a regiões de indução magnética baixa, enquanto o presente trabalho, analogamente à ref. [46], encontra-se no limite oposto, grandes  $B$ , onde a interação entre as linhas é considerada. Ambas linhas críticas sustentam a idéia de que em qualquer indução magnética, a coexistência de orientações múltiplas das linhas de vórtice é possível, para supercondutores tipo II extremamente duros e suficientemente anisotrópicos. Neste capítulo, também mostramos que  $\gamma_c$ ,  $\theta_{c1}$ , e  $\theta_{c2}$  dependem da indução magnética, e tais dependências ainda não haviam sido estudadas (veja figs. 35 e 37).

Mostramos, ainda, o efeito do estado ortogonal para o torque magnético, onde as orientações das linhas de vórtice têm uma relação decisiva. Magnetometria de torque é uma poderosa técnica para investigar as propriedades dos supercondutores anisotrópicos [49], [50], [51]. Sob um campo magnético aplicado,  $\vec{H}$ , os supercondutores intrinsecamente anisotrópicos desenvolvem uma magnetização,  $\vec{M}$ , não-orientada ao longo do campo aplicado, e isto faz com que apareça o torque  $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{H}$ . As supercorrentes fluem na maioria das vezes nos planos de mais baixa massa, isto é, os planos de  $CuO$  para os supercondutores cerâmicos, resultando em uma magnetização ao longo do eixo- $c$ . Este efeito apenas é encontrado se o campo  $\vec{H}$  estiver suavemente inclinado em relação ao eixo- $c$ . Esta propriedade é intrínseca aos supercondutores anisotrópicos e como vimos no capítulo anterior, temos que eliminar outras contribuições para o torque, que são os das supercorrentes na superfície da amostra do supercondutor, as quais dependem da forma da amostra. Então, toma-se uma geometria para a confecção da amostra, com um fator de desmagnetização nulo. Para obter resultados reproduzíveis, tais medidas são realizadas na região reversível do diagrama  $H - T$  [52], onde os efeitos de aprisionamento (*pinning*) não estão presentes, e os processos *field cooling* e *zero field cooling* coincidem. Nesta região, uma mudança na direção do campo  $\vec{H}$  imediatamente alinha as linhas de fluxo nesta nova direção, e não existe as forças restauradoras devido à presença dos centros de aprisionamento. A teoria do Kogan para o torque intrínseco [53], como descrito no capítulo anterior, baseada na teoria anisotrópica de London, descreve relativamente bem a dependência angular das medidas de torque para vários compostos. O ajuste do torque angular para a

fórmula do Kogan determina o parâmetro  $\eta H_{c2}(0)$ , onde  $\eta$  é uma constante da ordem de um representando propriedades da rede, e a anisotropia de massa  $m_c/m_a$ . Esta teoria não considera possíveis efeitos de flutuação térmica, o que foi proposto por Blatter para explicar a linha de irreversibilidade do  $YBaCuO$  como sendo um possível derretimento quântico da rede de vórtice [54]. Apesar da região reversível ser aquela identificada com flutuações térmicas, estas não são fundamentais no entendimento do torque magnético, como discutimos a seguir. Medidas de torque também podem sugerir a presença de efeitos quânticos na rede de vórtices de acordo com G. Blatter e recentemente contestado por J.C. Martinez [51]. Deformações da rede de sua configuração de equilíbrio podem ser consideradas em termos da teoria elástica [28]. Para o supercondutor isotrópico são três as constantes elásticas, associadas à compressão, cisalhamento, e inclinação da rede de vórtice. Para os supercondutores anisotrópicos, existe mais de uma constante elástica de cisalhamento e de inclinação [55]. Na região reversível, a rede de vórtices comporta-se aproximadamente como um líquido de vórtice, e podemos apenas encontrar os módulos de compressão e de inclinação, mas não o módulo de cisalhamento, que é nulo para o líquido. O torque é mais sensível ao módulo de inclinação e não é sensível a deformações de cisalhamento da rede. Por esta razão, efeitos de flutuações térmicas no torque não devem ser grandes, devido ao cisalhamento e, conseqüentemente, os parâmetros da célula unitária caracterizando a rede de vórtice ( $\eta$ ), não têm um papel decisivo no torque.

Neste trabalho, propomos um método de interesse experimental para a determinação do conjunto ortogonal de linhas de vórtice acima da linha de irreversibilidade, através de medidas do torque e magnéticas. Nossa sugestão é que, para o conjunto ortogonal de linhas de vórtice, podemos obter o torque intrínseco por dois procedimentos independentes. A comparação dos resultados destes dois procedimentos nos permite identificar a presença do estado ortogonal. No caso dos resultados para os dois procedimentos serem os mesmos, concluímos que a decomposição ortogonal de linhas de vórtice está presente no interior do supercondutor. Para um campo externo aplicado,  $\vec{H}$ , fazendo um ângulo  $\alpha$  com o eixo- $c$ , o torque intrínseco é determinado por

$$\tau/H = \cos \alpha M_{90}(\vec{H}) - \sin \alpha M_0(\vec{H}).$$

Para o conjunto ortogonal, o torque pode ser ainda obtido pela magnetometria de torque ou, indiretamente, por medidas de magnetização. Sejam  $M_0(H_{\parallel})$  e  $M_{90}(H_{\perp})$  medidas independentes da curva de magnetização reversível, tomadas para o campo externo aplicado ao longo e perpendicularmente ao eixo- $c$ , respectivamente. O conhecimento destas duas curvas de magnetização reversível para diversos valores de  $H_{\parallel}$  e  $H_{\perp}$ , nos permite derivar o torque magnético para o conjunto de linhas de vórtice inclinada, assumindo que o estado ortogonal está presente. Para o estado ortogonal podemos dizer que

$$\tau/H = \cos \alpha M_{90}(H_{\parallel} = H \sin \alpha) - \sin \alpha M_0(H_{\perp} = H \cos \alpha), \quad (3.1)$$

desde que para esta decomposição, as linhas de vórtice não mudem de direção e permaneçam sempre orientadas ao longo e perpendicularmente ao eixo- $c$ . Apenas a densidade de linhas varia nestas duas direções, com a mudança da orientação do campo aplicado. Este não é o caso do estado inclinado, uma vez que todas as linhas devem se manter na direção do campo magnético aplicado e assumir uma nova direção no espaço, sempre que houver uma variação de  $\alpha$ . Em conclusão, conhecendo as duas curvas de magnetização  $M_0(H_{\parallel})$  e  $M_{90}(H_{\perp})$ , podemos obter o lado direito da equação acima apenas, por medidas de magnetização, e comparar estas medidas com o lado esquerdo da equação, que é obtido diretamente da magnetometria de torque. Obviamente que esta comparação apenas faz sentido para o intervalo angular onde a decomposição das linhas de vórtice, ao longo e perpendicularmente ao eixo- $c$ , é energeticamente favorável, isto é, na região  $\theta_{c1} < \theta < \theta_{c2}$ .

Neste trabalho, obtemos a expressão analítica do torque para o estado ortogonal e comparamos esta com a fórmula do Kogan para o estado inclinado. Nossa expressão para o torque é levemente diferente da fórmula do Kogan uma vez que temos uma dependência angular para  $\eta$  [25], e o Kogan toma esta como uma constante da ordem de 1. Como visto no capítulo anterior,  $\eta$  representa propriedades da rede de vórtice na energia livre.

## 3.2 A Teoria de London Anisotrópica

Calculamos, no limite de alta densidade de linhas de vórtice, a energia livre para os conjuntos de linhas inclinadas e ortogonais, mantendo a densidade a mesma para ambos conjuntos, isto é, a mesma indução magnética  $B$ . A primeira configuração corresponde a todos os vórtices distando de um ângulo  $\theta$  do eixo de simetria do supercondutor, e a última consiste de dois conjuntos ortogonais de linhas de vórtice, um em  $\theta = 0^\circ$  e o outro em  $\theta = 90^\circ$  com densidades de linhas  $B \cos \theta$  e  $B \sin \theta$ , respectivamente. A determinação da energia da configuração ortogonal é simples, uma vez que os dois conjuntos não interagem, como mostra a expressão da energia dada abaixo. Por esta razão, para o estado ortogonal estudado aqui, a energia é justamente a soma da energia dos dois conjuntos ortogonais independentes.

O cálculo da energia do sistema de linhas de vórtice é determinado pela eq. (1.47), do capítulo 1. Reapresentamos tal equação, por ser a base da discussão a seguir; em unidades reduzidas, temos

$$E_v = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \oint \oint d\vec{l}_i \cdot [G(\vec{r}_i - \vec{r}_j') d\vec{l}_j'], \quad (3.2)$$

onde  $i$  e  $j$  indicam as linhas de vórtice,  $d\vec{l}_i$  ( $d\vec{l}_j'$ ) é o  $i$ -ésimo ( $j$ -ésimo) elemento de comprimento da linha de vórtice localizado em  $\vec{r}_i$  ( $\vec{r}_j'$ ) e  $G(\vec{r})$  é uma matriz onde todos os elementos  $G_{\alpha,\beta}(\vec{r})$  são determinados pela solução das equações de London. Como mostrado no Capítulo 1, para anisotropia uniaxial pode-se mostrar que a matriz  $G$  pode ser calculada na forma diagonal [56].

A teoria de London requer que a densidade de elétrons supercondutores permaneça constante no espaço, sendo, deste modo, aplicável para regiões maiores que o comprimento de coerência; em regiões menores que esta, ocorrem flutuações na densidade de elétrons. Os elementos  $G_{\alpha,\beta}(\vec{r})$  apresentam singularidades em  $\vec{r} = 0$ , mostrando que a energia apresentada acima não trata apropriadamente a interação entre os elementos infinitesimais muito próximos. Esta dificuldade é vencida introduzindo na teoria certas "receitas" para descrever a física para distâncias menores que o comprimento de coerência. Isto pode ser

feito tomando um modelo particular para o núcleo do vórtice, ou modificando a interação para pequenas distâncias. No caso de anisotropia de massa, o modelo de núcleo Gaussiano [57] é a mais utilizada extensão da teoria de London anisotrópica. Isto surge naturalmente da teoria Ginzburg-Landau anisotrópica [58], e satisfaz a condição  $\lambda_a \xi_a = \lambda_c \xi_c$ . A inclusão do modelo Gaussiano para o núcleo do vórtice não altera a propriedade de não interação das linhas ortogonais, uma vez que a única modificação introduzida pelo modelo Gaussiano é nas funções de Green  $G_{\alpha,\beta}(\vec{r})$  para distâncias menores que o comprimento de coerência,  $\xi$ , e além disto não cria novas componentes na matriz  $G$ .

Chamamos  $F(B, \theta, \gamma, \kappa)$  a energia livre para o sistema de linhas de vórtice retas e paralelas, para uma densidade fixa de linhas todas fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo de simetria do supercondutor, eixo- $c$ . Os parâmetros da célula unitária não são mencionados explicitamente, pois para induções magnéticas elevadas supõe-se a extremização destes parâmetros. A teoria de London é linear e a energia total é a soma de duas contribuições, isto é, as energias *inter* e *intra*,

$$F = F_{intra} + F_{inter} \quad (3.3)$$

$$F_{intra} = N F_{linha}$$

$$F_{inter} = \frac{\Phi_0}{8\pi} \sum_{i,j} \hat{Z} \cdot B(\vec{r}_i - \vec{r}_j'),$$

onde  $F_{linha}$  é a energia necessária para formar uma única linha de comprimento  $L$  no espaço,  $\vec{r}_i$  é a posição do  $i$ -ésimo vórtice no plano ortogonal às linhas. A fórmula acima tem uma aproximação, para calcularmos a energia *inter* tomamos o modelo para linhas de vórtice sem núcleo, quer dizer para esta energia não consideramos a estrutura interior do vórtice. Esta aproximação pode ser feita uma vez que a região de interação ocorre numa região maior que o comprimento de coerência  $\xi$ .

A explicação física por que o estado ortogonal é energeticamente favorável basia-se nas interações *inter* e *intra* que mostram uma dependência oposta em  $\theta$ . O comportamento dessa duas interações para linhas paralelas formando uma configuração regular com um

vórtice por célula unitária, foi recentemente mostrado [25].

A procura pela rede de vórtice ótima (*que minimiza a energia livre*) para um valor fixo do ângulo  $\theta$  determina a energia *inter*. No limite de alta densidade de linhas de vórtice tratado aqui, os parâmetros da célula unitária foram determinados a um tempo atrás por Campbell e col. [22]. Estamos interessados na dependência em  $\theta$  da energia da rede de vórtice ótima.

A energia cinética alcança seu mínimo de energia quando as supercorrentes fluem sobre os planos do cristal de menor massa, isto é, ortogonalmente ao eixo- $c$ . Assim, esperamos que a rede de vórtice encontrada seja a bem-conhecida rede triangular para  $\theta = 0^\circ$  sendo esta a de mais baixa energia. Consequentemente, a energia *inter* tem seu mínimo em  $\theta = 0^\circ$  [25].

Para entender a dependência da energia *intra* com  $\theta$  temos que considerar a energia para se fazer uma linha reta no espaço dentro do modelo de núcleo Gaussiano. Para o limite de  $\kappa$  grande, este comportamento é determinado essencialmente pelo volume da linha de vórtice, como já discutimos no capítulo anterior, definida pela área de seção reta do núcleo vezes o comprimento da linha de vórtice,  $L$ . O volume é menor para linhas de vórtice perpendiculares ao eixo de simetria ( $L\pi\xi_1\xi_3$ ) que para as linhas paralelas a este ( $L\pi\xi_1^2$ ). Isto ocorre uma vez que a densidade de energia não tem uma variação significativa em função do ângulo  $\theta$ , então as linhas de vórtice que não se interagem no espaço são energeticamente mais fáceis de se fazer para  $\theta = 90^\circ$  que para  $\theta = 0^\circ$ .

Enfim, as energias *inter* e *intra* tem uma dependência oposta em  $\theta$  e vemos isto imediatamente quando comparamos os ângulos limites  $\theta = 90^\circ$  e  $\theta = 0^\circ$ , para uma densidade de vórtice fixa dada por  $B$ . A energia *intra* é maior para  $\theta = 0^\circ$  que para  $\theta = 90^\circ$ , já para a energia *inter* ocorre justamente o oposto. A decomposição da energia total nas partes *intra* e *inter* é útil para entendermos o problema da indução magnética inclinada, uma vez que a energia *intra* é dominante em relação a energia *inter*. Trabalharemos neste capítulo com unidades reduzidas, a indução magnética fica  $B/\sqrt{2}H_c$  e a densidade de energia livre é  $f = F/V(H_c^2/4\pi)$ , onde  $H_c$  é o campo crítico. Em unidades reduzidas, por exemplo, a razão entre comprimento de penetração de London,  $\lambda$ , e a separação entre

vórtices,  $L = \sqrt{\Phi_0/B}$  se torna  $\lambda/L = \sqrt{B\kappa/2\pi}$ .

No limite de densidade de vórtice elevada  $B$ , a soma das energias *inter* e *intra* tem como resultado a expressão abaixo, a qual uma forma similar é encontrada na ref. [25]:

$$f = B^2 + \frac{B\Gamma(\theta)}{2\kappa_z\gamma} \ln \left[ \frac{H_{c2}(\theta, \gamma)\eta(\theta, \gamma)}{B\Gamma(\theta)} \right], \quad (3.4)$$

onde  $\Gamma(\theta) = \sqrt{\cos^2\theta + \gamma \sin^2\theta}$ . Notemos que esta expressão não tem parâmetros livres outros a não ser os fundamentais, a anisotropia de massa  $\gamma$ , e o tipo de material  $\kappa$ . Temos

$$H_{c2}(\theta, \gamma) = \frac{\kappa_z\gamma}{\Gamma(\theta)},$$

$$\eta(\theta, \gamma) = \frac{\gamma e^{2Ce} A_2^2(\theta, \gamma, \rho)}{4\Gamma(\theta)\sigma A_1^2(\theta, \gamma, \rho)}. \quad (3.5)$$

As funções auxiliares são

$$A_1^2(\theta, \gamma, \rho) = \prod_{s=1}^{\infty} [1 - 2 \exp(-\sigma s) \cos(\chi s) + \exp(-2\sigma s)]$$

e

$$A_2^2(\theta, \gamma, \rho) = \left[ \frac{\Gamma(\theta) + |\cos\theta|}{\sqrt{\gamma}(1 + |\cos\theta|)} \right]^{\frac{\cos\theta}{\Gamma(\theta)}}.$$

As funções acima dependem de  $\sigma = \frac{2\pi\Gamma(\theta)\sin\phi}{\rho}$ ,  $\chi = \frac{2\pi\cos\phi}{\rho}$  e da constante de Euler  $Ce$ . Os parâmetros que extremizam a energia livre [22] foram escolhidos serem  $\phi = \tan^{-1}[\sqrt{3}/\Gamma(\theta)]$  e  $\rho = 2\cos\phi$ .

Comparando a energia livre destas duas configurações de linhas de vórtice retas para um mesmo  $B$ , para uma única direção, temos

$$f_{\text{tilt}} = f(B, \theta, \kappa, \gamma); \quad (3.6)$$

e para o conjunto ortogonal, temos

$$f_{\parallel+\perp} = f(B\cos\theta, 0^\circ, \kappa, \gamma) + f(B\sin\theta, 90^\circ, \kappa, \gamma). \quad (3.7)$$

Verificamos que, no limite isotrópico, é sempre verdade que  $F_{\parallel+\perp} > F_{45}$  para qualquer  $\kappa$ . Isto implica a existência de uma anisotropia crítica,  $\gamma_c$ , acima da qual a configuração de múltiplas direções deve cessar [47], [48]. A fig. 35 mostra a linha de anisotropia crítica  $\gamma_c(\kappa)$ , que separa a região do diagrama  $\gamma$  versus  $\kappa$  em duas regiões. Acima desta linha, linhas de vórtice paralelas não são a configuração de mais baixa energia. Podemos notar ainda que a anisotropia crítica, como definida aqui, depende da densidade de linhas de vórtice através de  $B$ , como mostra a fig. 35.

Para removermos a contribuição do campo externo e efeitos devido ao crescimento da densidade de vórtice, na fig. 36 mostramos o gráfico  $k_z(f - B^2)/B$  versus  $\theta$  para as duas energias livres acima. Estas duas energias  $f_{vlt}$  e  $f_{\parallel+\perp}$  coincidem em  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ . No limite de anisotropia de massa muito intensa, a fig. 35 mostra que a configuração ortogonal é energeticamente favorável dentro de certo intervalo,  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ . A fig. 37 mostra que esses ângulos críticos  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$  variam muito suavemente com  $B$ .

### 3.3 O Torque Magnético intrínseco

Em unidades reduzidas, o campo aplicado é dado por  $H = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial B}$ , e disto obtemos a magnetização,  $4\pi M = B - H$ . Conhecendo-se a densidade de linhas de fluxo, o torque é dado por  $\tau = M \times H = B \times \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial B}$  que pode ser obtido para campo  $H$  fixo. Para supercondutores com valor da constante de Ginzburg-Landau  $\kappa$  muito elevado, o campo  $H$  e a indução magnética  $B$  podem ser tomados iguais pois a diferença entre estas duas grandezas é da ordem de  $\frac{1}{\kappa^2}$  [59] e o torque intrínseco é proporsional a  $\frac{-\partial f}{\partial \theta}$ . Nesta seção devemos obter as seguintes expressões para o torque das energias livres.

Na direção única, temos

$$\tau_{\text{tilt}} = -\frac{\partial f_{\text{tilt}}}{\partial B} = (1 - \gamma) \frac{B}{2\kappa_z \gamma} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\Gamma(\theta)} \ln \left[ \frac{\kappa_z \gamma \eta(\theta, \gamma)}{B \Gamma(\theta) e} \right]. \quad (3.8)$$

Uma vez que  $\eta(\theta, \gamma)$  tem um comportamento angular bastante suave, não o incluímos na derivação da fórmula acima;  $\eta$  é considerado por Kogan como sendo uma constante da orden da unidade. A fig. 38 exemplifica o comportamento de  $\eta(\theta)$ , sendo esta uma ordem de grandeza menor do que aquele utilizado por Kogan, e possui um comportamento angular aproximadamente constante, a menos na região próximo ao ângulo  $\theta \approx 80^\circ$ . A fig. 38 mostra esta dependência angular.

Na direção ortogonal, temos

$$\tau_{\parallel+\perp} = -\frac{\partial f_{\parallel+\perp}}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{B}{2\kappa_z \gamma} \ln \left[ \frac{\kappa_z \gamma \eta}{B \cos \theta e} \right] - \cos \theta \frac{B}{2\kappa_z \sqrt{\gamma}} \ln \left[ \frac{\kappa_z \sqrt{\gamma} \eta}{B \sin \theta e} \right], \quad (3.9)$$

onde  $\eta \equiv \eta(90^\circ, \gamma) = \eta(0^\circ, \gamma)$ , como mostra a fig. 38. O torque para o estado ortogonal pode ser também obtido pela derivação do expressão da magnetização ao longo do eixo- $c$ ,

$$M_0(B) = -\frac{1}{2\kappa_z \gamma} \ln \left[ \frac{\kappa_z \gamma \eta}{B e} \right],$$

e ortogonal a este

$$M_{90}(B) = -\frac{1}{2\kappa_z \sqrt{\gamma}} \ln \left[ \frac{\kappa_z \sqrt{\gamma} \eta}{B e} \right],$$

com o resultado

$$\tau_{\parallel+\perp} = B \cos \theta M_{90}(B \sin \theta) - B \sin \theta M_0(B \cos \theta).$$

O gráfico mostrado na fig. 39 é o torque obtido para a configuração ortogonal e para a configuração inclinada das linhas de vórtice. Notemos que  $\tau_{\parallel+\perp}$  cresce indefinidamente nas regiões  $\theta > \theta_{c2}$  e  $\theta < \theta_{c1}$  e diverge para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ . Entretanto, isto não é importante para o estado ortogonal, uma vez que este estado tem sentido físico apenas dentro da região  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ .

Algumas propriedades gerais para o torque associadas a essas duas possibilidades de arranjo podem ser estabelecidas aqui. Na região de interesse, para esta comparação,  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ , segue que

$$\tau_{\parallel+\perp}(\theta) < \tau_{\text{tilt}}(\theta). \quad (3.10)$$

Podemos concluir a relação acima pela inspeção direta das energias  $f_{\parallel+\perp}(\theta)$  e  $f_{\text{tilt}}(\theta)$  dadas na fig. 36. Para  $\theta = 0^\circ$  ambas configurações coincidem, em energia e a rede de Abrikosov prevalece. Para pequenos ângulos,  $\theta < \theta_{c1}$ , temos  $\partial f_{\parallel+\perp}/\partial\theta > 0$  e  $f_{\parallel+\perp} > f_{\text{tilt}}$ . De fato nesta região, o estado ortogonal apresenta um torque negativo, uma vez que a derivada é positiva. Isto não traz nenhuma consequência física à nossa teoria, pois esta configuração não é energeticamente favorável nesta região. Nesta região  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ , temos  $\partial f_{\parallel+\perp}/\partial\theta < \partial f_{\text{tilt}}/\partial\theta < 0$  e o arranjo ortogonal é favorecido. Daí a desigualdade dada pela eq. (3.10).

De acordo com nossa análise numérica, o ângulo  $\theta_m$ , onde ocorre o torque máximo, nunca é encontrado na região  $\theta_{c1} \leq \theta \leq \theta_{c2}$ . Por esta razão, mesmo existindo a decomposição ortogonal das linhas de vórtice, o ângulo  $\theta_m$  é ainda definido pelo torque das linhas inclinadas  $\tau_{\parallel+\perp}$ . É possível que a presença de estruturas de camadas [60] possa alterar este quadro de tal modo que o pico da curva do torque ocorra onde a decomposição ortogonal seja esperada. O quadro emergente dos supercondutores em camadas [61] é que para campos aplicados próximo à direção das camadas, a linha de vórtice pode ser imag-

inada como uma escadinha com longos degraus paralelos às camadas, e pequenas linhas retas perpendiculares a estas. Interpretamos isto como sendo uma indicação de que para regiões de grandes ângulos a física seja dominada por um novo arranjo das linhas de vórtice.

Em suma, supondo que a teoria de London anisotrópica permaneça válida em regiões de ângulo  $\theta$  grande, o torque pode ser um método bastante apropriado para verificarmos se realmente existe a decomposição ortogonal das linhas de vórtice na região reversível do diagrama de fase  $H - T$ .

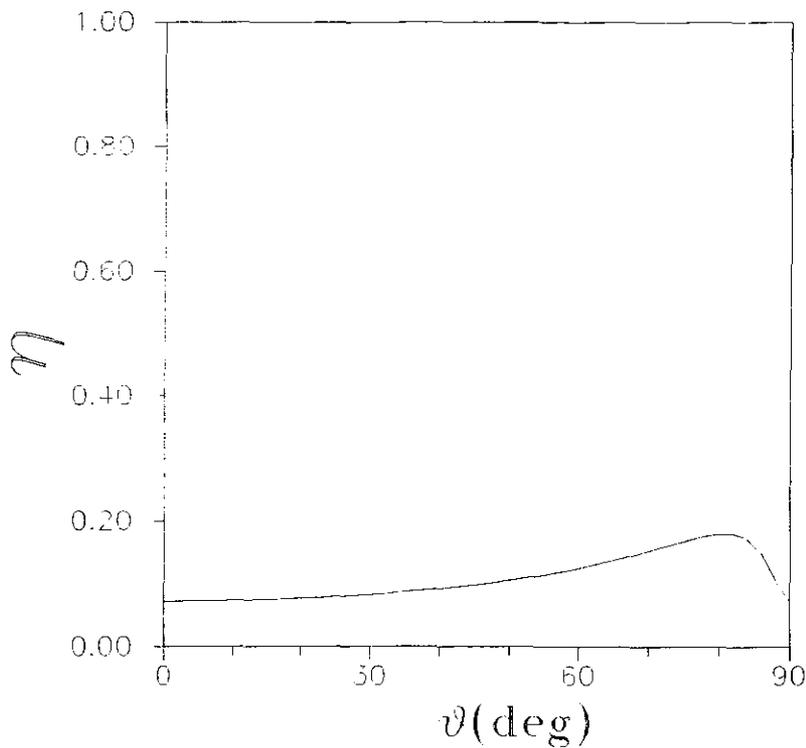


fig. 38 - Mostramos o comportamento angular da função  $\eta$ .

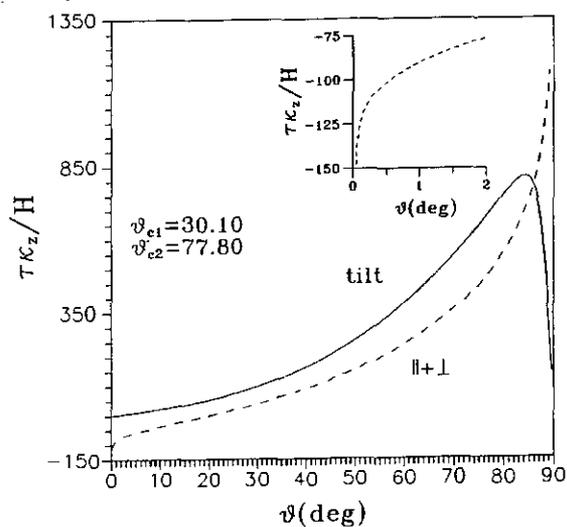


fig. 39 - Esta figura mostra o torque intrínseco obtido para ambas as configurações de fluxo, inclinada e ortogonal. Tomamos  $\gamma=0.002$ , e  $\kappa=100$  e  $B/He_2(\theta=0)=1.6 \times 10^{-3}$ . Os ângulos críticos são  $\theta_{c1}=34.4$  e  $\theta_{c2}=77.8$ . Dentro do intervalo, onde é possível o arranjo ortogonal,  $\theta_{c1} < \theta < \theta_{c2}$ , temos  $\tau_{\perp+||} < \tau_{\text{tilt}}$ . Note que o torque ortogonal diverge nos ângulos extremos,  $\theta=0$  e  $\theta=90$ .

### 3.4 Distâncias entre cadeias e vórtices na mesma cadeia

A fig. 40 mostra cadeias de vórtice separadas por arranjos hexagonais. Isto ocorre para o *BSCCO*, já para a família dos *YBaCuO* observa-se apenas a formação de cadeias na direção definida pelo eixo de simetria da amostra (eixo-*c*) e pela indução magnética *B*, como mostra a fig. 40. Para este último caso, podemos estimar a distância entre as cadeias e a distância entre vórtices de uma mesma cadeia. Para tal consideremos as distâncias  $L_1$  e  $L_2$  como sendo respectivamente a distância entre dois vórtices vizinhos em uma mesma cadeia e a distância entre duas cadeias, como mostra a fig. 40. O fluxo magnético é quantizado para a célula unitária [21] por

$$BL_1L_2 \sin \phi = \Phi_0. \quad (3.11)$$

Supondo apenas um vórtice por célula, a fig. 40 mostra os lados desta célula, o ângulo entre estes, e ainda a distância entre as duas cadeias. A energia livre do sistema de linhas de vórtice inclinados é a função [25], como vimos anteriormente,

$$f = \frac{B}{\kappa_z} [\epsilon(\kappa, \gamma, \theta) + V(B, \kappa, \gamma, \theta, \rho, \phi) - B\kappa_z] + B^2, \quad (3.12)$$

onde  $B$ ,  $\kappa$  e  $\gamma$  são a indução magnética, a constante de GL, e o parâmetro de anisotropia de massa.  $B$  é determinado pelo experimento e  $\kappa$  e  $\gamma$  são característicos do material supercondutor.  $\theta$  é o ângulo que a linha de vórtice faz com o eixo de simetria da amostra.

Os parâmetros da rede são  $\rho = L_1/L_2$  que é a razão entre os lados da célula unitária, e  $\phi$  o ângulo entre estes lados. A energia livre apresenta duas contribuições: uma sendo a energia *intra* (energia necessária para a formação de uma linha no supercondutor),  $\epsilon = \epsilon(\kappa, \gamma, \theta)$  e a outra sendo a energia *inter* (energia de interação entre as linhas de vórtices),  $V = V(B, \kappa, \gamma, \theta, \rho, \phi)$ . Notemos que a energia *inter*, além da dependência em  $B$ ,  $\kappa$  e  $\gamma$ , depende ainda dos parâmetros da rede,  $\rho$  e  $\phi$ . A eq. 10 pode ser escrita por

$$L_1^2 \frac{\sin \phi}{\rho} B = \Phi_0.$$

Escrevendo a equação acima em unidades reduzidas,  $B \rightarrow B/(\sqrt{2}H_c)$  e aproveitando-se da relação

$$\kappa 2\pi \xi^2 = \kappa 2\pi \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^2 \lambda^2,$$

obtemos

$$\left(\frac{L_1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2\pi\rho}{\sin \phi \kappa B}. \quad (3.13)$$

Seja  $\sigma = \frac{2\pi \sin \phi}{\rho}$  e  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa B \sigma}}$ . Esta equação pode ser escrita como

$$\frac{L_1}{\lambda} = 2\pi\mu_0, \quad (3.14)$$

sendo  $\mu_0 = \mu_0(\sigma(\phi, \sigma), \kappa B) = \mu_0(\phi, \sigma, \kappa B)$ . Conhecendo-se o valor experimental de  $\lambda$ , e sendo  $\kappa B$  um valor conhecido da experiência, e ainda, obtendo  $\rho$  através das equações propostas por Campbell, Doria e Kogan [22],

$$\phi = \arctan \left( \sqrt{\frac{3}{\cos^2 \theta + \gamma \sin^2 \theta}} \right); \rho = 2 \cos \phi,$$

o valor de  $L_1$  pode ser determinado pela eq. (3.14). Para  $\theta = 0^\circ$ , não temos a formação das cadeias de vórtice, mas sim o aparecimento da rede de Abrikosov. Para  $\theta \neq 0^\circ$ , o potencial de um vórtice apresenta um mínimo em relação à posição, favorecendo, deste modo, a localização de um vórtice em sua vizinhança. Este, por sua vez, faz o mesmo com o próximo vórtice e assim por diante, até termos formado a cadeia de vórtice. No caso

onde  $\theta = 0^\circ$ , o segundo vórtice busca o mínimo de energia para se fixar e este mínimo é encontrado para  $x$  no infinito, mas pela limitação do espaço da amostra aparece a rede hexagonal, rede esta que possibilita com que o vórtice fique o mais distante de seu vizinho. Nesta situação não existe a formação de cadeias de vórtice. Numericamente, encontramos o valor da posição por unidade de comprimento de penetração de London,  $x_1/\lambda$ , em função do ângulo  $\theta$  [25], [21] para um certo valor do parâmetro de massa  $\gamma$ . Tomamos  $\gamma = 0.02$  que é o valor típico para o  $YBaCuO$ . Gammel e col. [62], conseguiram fotografar, por experimentos de decoração magnética as cadeias de vórtices que surgem neste material. Com os resultados numéricos relatados acima e mostrados na fig. 35 do Capítulo 2, podemos estimar o valor de  $\kappa B$  para o qual começa a formação das cadeias de vórtices. Por exemplo, conhecido  $\gamma, \theta$ , temos  $x_1/\lambda$ . Com a eq. (3.13), obteremos

$$\frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{2\pi}{\kappa B (0.5)^2}$$

onde estamos tomando  $\theta = 60^\circ$  e daí,  $x_1/\lambda = 0.5$ . Pelas eqs. dadas pela referência [22], temos  $\phi \cong 90^\circ$  e  $\rho = 2$ , assim encontramos  $\kappa B \cong 25$ . E ainda podemos escrever,

$$\kappa B = 25\sqrt{2}H_c$$

e como estamos tomando  $\kappa = 100$  temos para a indução magnética que inicia a formação das cadeias de vórtices, neste caso,  $B \cong 0.35H_c$ .

Podemos generalizar o resultado anterior, mostrando que a indução magnética mínima para o surgimento das cadeias de vórtices pode ser fornecido por

$$\kappa B = \frac{(2\pi)^2}{x_1/\lambda} \frac{1}{\sigma}, \quad (3.15)$$

onde  $\sigma = \frac{2\pi \sin \phi}{\rho}$  e  $x_1/\lambda$  é dado pelo fig. 35, do capítulo 2. A distância entre duas cadeias de vórtice é dada por  $h = L_2 \sin \phi$ , conforme mostra a fig. 40. Pela definição de  $\sigma$ , ficamos com  $h/L_1 = \frac{\sin \phi}{\rho} = \frac{\sigma}{2\pi}$  e portanto, a distância entre as duas cadeias é dada por

$$h = \frac{\sigma}{2\pi} L_1. \quad (3.16)$$

Fazendo  $L_1 = 1$ , temos que as distâncias entre as cadeias são dadas por  $h = \frac{\sigma}{2\pi}$ , onde estamos supondo que a distância entre todas as cadeias adjacentes seja a mesma. Numericamente, podemos observar que a distância entre as cadeias de vórtices têm aproximadamente o mesmo valor para diferentes valores do parâmetro  $\phi$  da célula unitária.

Resumindo, para supercondutores com elevado valor da constante Ginzburg-Landau,  $\kappa$ , podemos encontrar a distância entre vórtices em uma mesma cadeia. Conseguimos estimar qual o valor limite da indução magnética para a formação das cadeias de vórtice. E por fim, podemos avaliar a distância entre as cadeias dada por uma fórmula simples,  $h = \frac{\sigma}{2\pi}$ . Esta fórmula estando de acordo com o caso da rede isotrópica, isto é,  $L = L_1 = L_2$ . Onde  $\phi \cong 60^\circ$  e assim  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ .

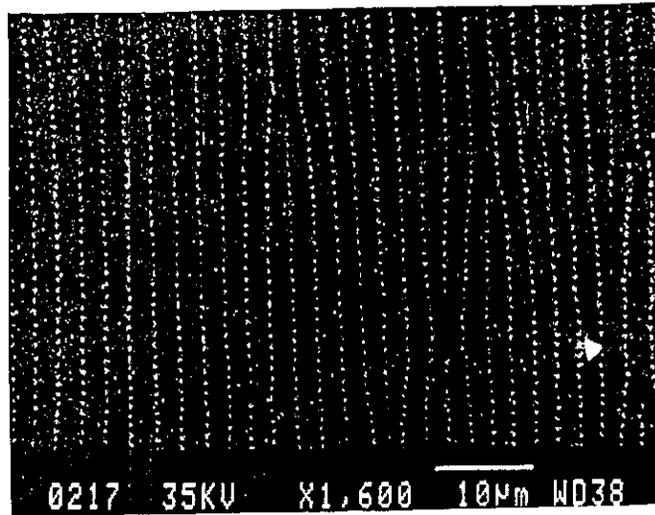


fig. 40 - Experimento de decoração magnética mostrando cadeias de vórtices para o YBaCuO.

### 3.5 Conclusão

Há alguns anos atrás, propriedades inesperadas da teoria de London anisotrópica foram encontradas. Por exemplo, a atração entre linhas de vórtice retas inclinadas [14], levando ao

estado de cadeias, o qual foi observado experimentalmente para uma temperatura baixa (4 K) e um baixo campo magnético (25 G) em uma amostra supercondutora monocristalina de *YBCO* "untwinned" por experimento de decoração magnética [62]. Outra propriedade da teoria de London anisotrópica é a existência de múltiplas orientações das linhas de vórtice. No limite de indução magnética baixa, onde se pode deixar de considerar as interações entre as linhas de vórtice, A. Sudbo e col. [44] encontraram que a energia de Gibbs apresenta dois mínimos locais associados a orientações distintas, não sendo estas ortogonais. Para linhas de vórtice com interação, foi mostrado [45] que a configuração de menor energia não consiste de linhas de vórtice retas e paralelas ao longo da indução magnética. Podemos ver que o estado de linhas retas inclinadas não é o estado de menor energia, para um certo campo  $B$ , apresentando uma dependência angular o arranjo ortogonal é energeticamente favorável [46], [48]. No limite de indução magnética elevada, obtemos uma linha crítica, similar à linha derivada por A. Sudbo e col. [44] no limite de não interação das linhas de vórtice. Nossa linha crítica no diagrama de fase  $\kappa$  versus  $\gamma$ , para um  $\theta$  fixo, separa o supercondutor anisotrópico em duas famílias. A dependência em  $B$  desta linha também é analisada. Assim, contrariamente, à suposição apresentada pela ref. [44], este trabalho e a ref. [46] mostram que a interação vórtice-vórtice não destrói a coexistência de linhas de vórtice em diferentes orientações. Uma vez que linhas críticas similares, tanto para valores de  $B$  altos como baixos, foram encontradas, podemos imaginar que estados de múltiplas orientações possam existir para qualquer indução magnética.

Neste capítulo, propomos um método para determinar se a decomposição ortogonal das linhas de vórtice existe na região reversível do diagrama de fase  $H - T$  ou não. Este método é baseado em medidas de torque e de magnetização. Na região reversível, alegamos que a presença da configuração de linhas de vórtice ortogonais produz um torque que pode ser indiretamente obtido das curvas de magnetizações reversíveis, medidas independentemente na direção ao longo e perpendicular ao eixo- $c$ . Conhecendo tais curvas de magnetização, podemos reconstruir as medidas de torque como função do ângulo  $\alpha$ , entre o eixo- $c$  e o campo magnético aplicado  $H$ .

No limite de valores extremamente elevados de  $\kappa$ , onde a densidade de magnetização é muito pequena,  $H \approx B$ , correções para esta aproximação [59] não parecem trazer qualquer modificação nos presentes resultados.

# Capítulo 4

## O Comportamento das Linhas de Vórtice e o Método de Monte Carlo

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, utilizamos o método de Monte Carlo (MC) para descrever, no contexto da teoria de London anisotrópica na rede, o comportamento das linhas de vórtices, em um supercondutor a alta temperatura. Consideramos uma amostra supercondutora, sem, porém, tratarmos problemas de fronteiras [62],[63],[64].

Neste capítulo, o método de MC simula o comportamento das linhas de vórtices, tomando como configuração inicial duas linhas de vórtices ortogonais. O processo de MC resume-se na criação de "loops", os quais conservam a vorticidade,  $\vec{q}$ , e o campo magnético local,  $\vec{B}$ . A consequência do aparecimento destes loops, é a deformação da linha, e por fim, uma modificação no valor da energia livre do sistema. Este processo de deformação da linha pela adição de loops esta representado na figura 41.

### 4.2 Teoria de London Anisotrópica na Rede

O modelo para descrever vórtices pela teoria de London na rede (TLR) foi apresentado por Carneiro e colaboradores [63],[65]. Nesta seção, fazemos um breve resumo da TLR.

Tomamos uma rede cúbica simples, com células unitárias de lado  $d$ , sendo esta célula definida pelos vetores primitivos  $\hat{e}_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$  e  $|\hat{e}_\mu| = d$ ). Na teoria de London, os

definida pelos vetores primitivos  $\hat{e}_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$  e  $|\hat{e}_\mu| = d$ ). Na teoria de London, os vórtices são construídos por elementos finitos,  $\hat{e}_\mu$ , localizados nas arestas das plaquetas, como mostra a figura 41.

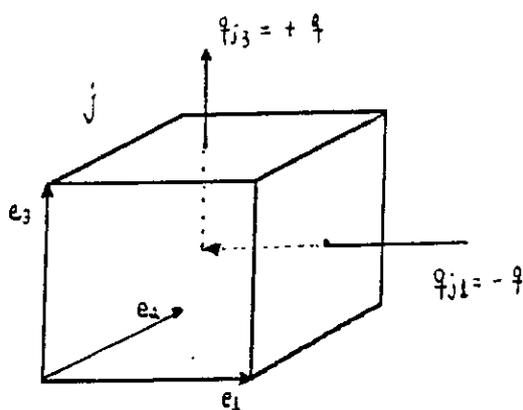


fig. 41 - Esta figura apresenta a célula unitária de lado  $d$ , definida pelos vetores primitivos,  $e_\mu$ .

Os vórtices são construídos pela formação de loops fechados ou linhas infinitas. Um número inteiro,  $q$ , está associado a cada uma destas configurações. Este número  $q$  representa o quantum de fluxo do vórtice. As configurações são completamente definidas conhecendo-se o sítio,  $j$ , e os inteiros  $q_{j\mu} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (\mu = 1, 2, 3)$ . A vorticidade,  $q_{j\mu}$ , e o campo magnético local  $B_{j\mu}$ , satisfazem à relação

$$\sum_{\mu=1}^3 \Delta_{\mu} q_{j\mu} = \sum_{\mu=1}^3 \Delta_{\mu} B_{j\mu} = 0, \quad (4.1)$$

sendo  $\Delta_{\mu} f(\vec{r}_j) = f(\vec{r}_j) - f(\vec{r}_j - \hat{e}_{\mu})$ , a derivada na rede. A eq. (4.1) expressa a conservação da vorticidade e do fluxo magnético. Aplicando-se este modelo a supercondutores a altas temperaturas, tomamos o plano  $\hat{x}\hat{y}$  perpendicular ao eixo de simetria  $\hat{c}$  da amostra, e sendo  $d$  a distância entre dois planos vizinhos. A versão da TLR, para descrever a linha de vórtice descrita acima, é

$$[\Delta \times (M \Delta \times B_j)]_{\mu} = \phi_0 \lambda_1^{-2} q_{j\mu} - \lambda^{-2} d^2 B_{j\mu}, \quad (4.2)$$

sendo  $\Delta$  o operador gradiente na rede e  $M$  o tensor de massa. Este tensor tem componentes  $M_{\mu\nu} = M_\mu \delta_{\mu\nu}$ , onde  $M_1 = M_2$  e  $M_3 = m_1/m_3$ . Como já citamos em capítulos anteriores,  $m_1$  e  $m_3$  são as massas atribuídas às direções  $\hat{x}$  (ou  $\hat{y}$ ) e  $\hat{z}$ . A modificação da eq. (1.8), do Capítulo 1, para o caso da TLR é

$$E = \frac{\Phi_0 d}{8\pi} \sum_i \sum_{\mu=1}^3 B_\mu(\vec{r}_i) q_\mu(\vec{r}_i). \quad (4.3)$$

Esta equação pode ser escrita em termos de funções de Green:

$$E = \sum_{i,j} \sum_{\mu=1}^3 G_\mu(\vec{r}_i - \vec{r}_j) q_{i\mu} q_{j\mu}, \quad (4.4)$$

sendo  $G_\mu$  dada em termos das transformadas de Fourier

$$G_\mu(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} G_\mu(\vec{k}),$$

com

$$G_3(\vec{k}) = 4\pi^2 J_1 \frac{k^2 + \gamma \lambda_1^{-2} d^2}{(k^2 + \lambda_1^{-2} d^2) [k_{12}^2 + \gamma(k_3^2 + \lambda_1^{-2} d^2)]},$$

$$G_1(\vec{k}) = G_2(\vec{k}) = 4\pi^2 J_1 \frac{\gamma}{k_{12}^2 + \gamma(k_3^2 + \lambda_1^{-2} d^2)},$$

onde  $J_1 = \frac{\Phi_0^2 d}{32\pi^3 \lambda_1^2}$ , e  $\gamma = m_1/m_3$ .

### 4.3 Deformação da Linha de Vórtice e o Método de Monte Carlo

A deformação da linha de vórtice, neste trabalho, é feita por um processo de adição randômica de loops [67]. Esta escolha está ilustrada na figura abaixo.

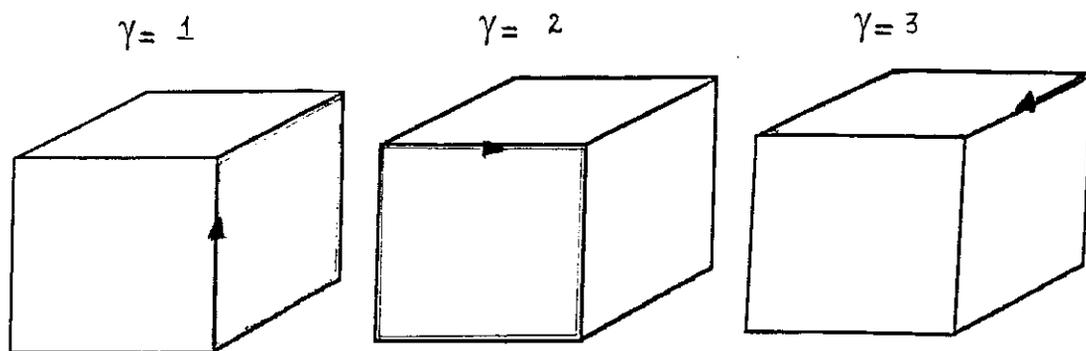


fig. 42 - Possíveis escolhas, pelo processo de MC, para o loop.

Na verdade, esta escolha randômica tem 6 loops elementares, sendo os 3 apresentados na figura acima e seus respectivos sentidos contrários. A variação da energia do sistema que resulta da adição destes loops é calculada, e o algoritimo de Metropolis[68],[69] é usado para decidir se uma nova configuração é procurada, ou não.

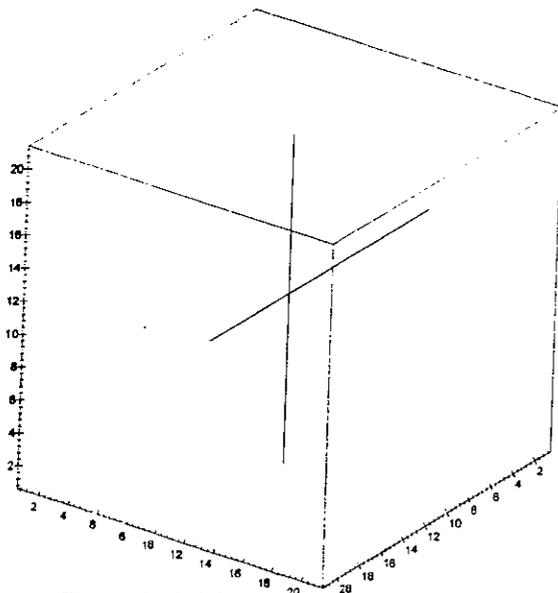
Neste trabalho, partimos de uma configuração de linhas ortogonais, e tomamos a energia inicial sendo nula. Calculamos todas as funções de Green e as PBC 's. A prova a que o sistema é submetido, a cada passo, pelo método de MC é calcular  $r = \exp(-\Delta E/kT)$ , e gerar um número randômico,  $z$ , no intervalo,  $0 < z < 1$ . Daí, tem-se duas opções: na

primeira,  $r > z$ , a configuração é aceita, calcula-se todas as variáveis do problema, e, novamente, o sistema é submetido ao teste inicial, passando, assim, para outra busca; a segunda opção dá-se para  $r < z$ , a configuração é rejeitada. Após o programa cumprir várias etapas, toma-se a média da energia do sistema.

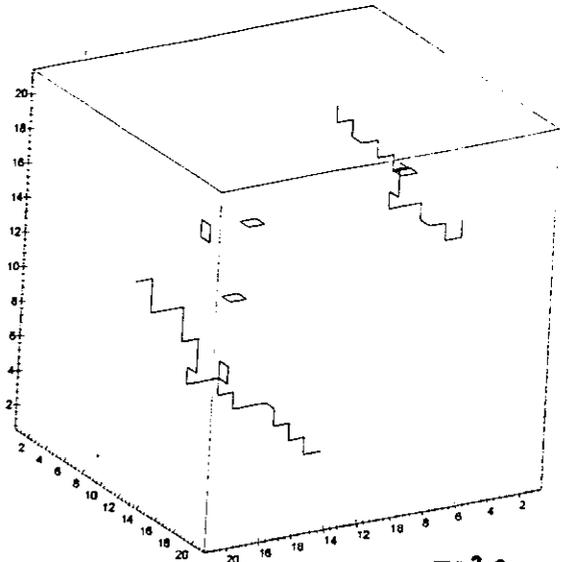
No Capítulo 3, estudamos a configuração de linhas de vórtice ortogonais, e obtivemos um diagrama de fase  $\gamma - \kappa$  ( $\gamma$  é a anisotropia de massa, e  $\kappa$  é a constante de Ginzburg-Landau), no qual, acima e abaixo de uma curva crítica,  $\gamma_c(\kappa)$ , existem duas configurações distintas, linhas inclinadas na direção da indução magnética, e linhas ortogonais, respectivamente. Neste capítulo, buscamos encontrar análogo resultado.

Estudamos o comportamento da energia livre do sistema em função dos parâmetros: comprimento de penetração de London,  $\lambda$ ; anisotropia de massa,  $\gamma$ ; temperatura de Monte Carlo,  $T$ ; e, ainda o lado da caixa,  $L$ . Analisamos, inicialmente, o caso isotrópico por conhecermos o resultado final. Feito isto, partimos para o caso dos supercondutores a altas temperaturas ( $\gamma \ll 1$ ).

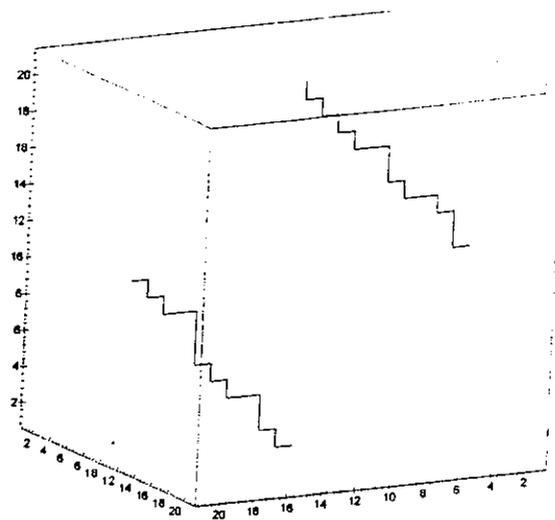
Para o caso isotrópico, partindo de uma configuração inicial de linhas ortogonais, esperamos e obtivemos uma configuração final do tipo *escadinha*. Para obtermos estes dados, utilizamos programas FORTRAN. Para visualizar estas linhas no interior do supercondutor, utilizamos o programa MAPLE V. Mostramos estas etapas nas figs. 44.



configuração inicial



$T=3.0$



$T=1.0$

**fig. 44 - Nesta figura mostramos a configuração inicial (linhas ortogonais); mostramos a configuração para uma determinada temperatura, quando o sistema ainda não se encontra em equilíbrio; e por fim a configuração final quando resfriamos o sistema.**

Para o caso anisotrópico, analisamos, para as mesmas condições anteriores, diferentes tamanhos do cubo, para um valor fixo do comprimento de London,  $\lambda$ , e não obtivemos

um resultado diferente do caso isotrópico. Para um certo valor fixo da caixa,  $L_x = L_y = L_z = 4.0$ , variamos  $\lambda$ ,  $\gamma$ , e  $T(MC)$ . Resfriando o sistema, para distintas anisotropias,  $\gamma$ , observamos que a energia livre satura-se. Para o caso isotrópico, esta saturação é bastante rápida, enquanto para uma anisotropia elevada, esta saturação acontece para valores pequenos de  $T$ . Por exemplo, para uma anisotropia,  $\gamma = 0.001$ , vemos na fig. 45, esta saturação muito próxima a  $T = 0$ ; entretanto não encontramos uma configuração ortogonal, como buscávamos. Para se encontrar a configuração ortogonal, deveríamos ao esfriar o sistema, chegarmos na energia livre  $E = 0$ .

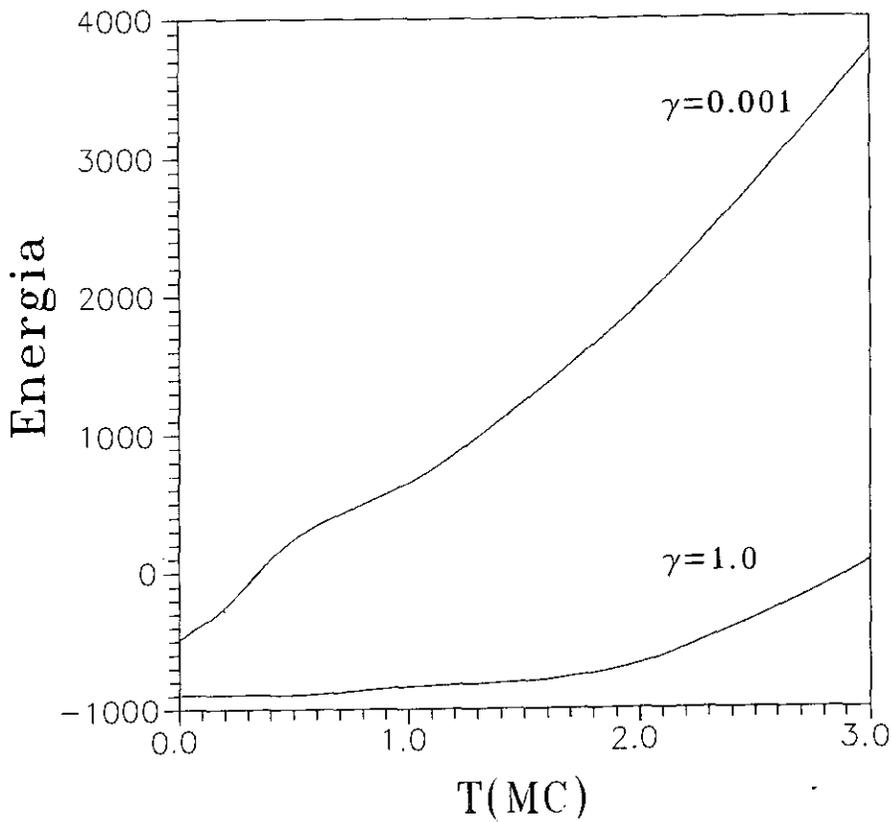


fig. 45 - Mostramos a energia livre do sistema em função da temperatura de Monte Carlo.

A investigação da dependência da energia livre em função do comprimento de penetração,  $\lambda$ , mostra-nos que, quanto maior o alcance da indução magnética no supercondutor, mais próximo do equilíbrio estará o sistema. Para valores de  $\lambda$  menores que o tamanho do lado,  $L$ , do cubo, a energia livre é dominada pela auto-energia da linha. A energia da interação de segmentos de vórtices, em sítios distintos, torna-se irrelevante. A figura abaixo mostra um comportamento quase linear da energia  $E$  em função de  $\lambda$ , para regiões fora do cubo.

A energia livre do sistema decresce com a diminuição da anisotropia de massa. Isto está de acordo com a teoria de London anisotrópica usual, o que nos indica ser mais fácil o aparecimento de linhas de vórtice em supercondutores a baixas temperaturas (isotrópicos), que naqueles a altas temperaturas (anisotrópicos). A fig. 46 mostra a dependência da energia,  $E$ , em relação à anisotropia de massa,  $\gamma$ .

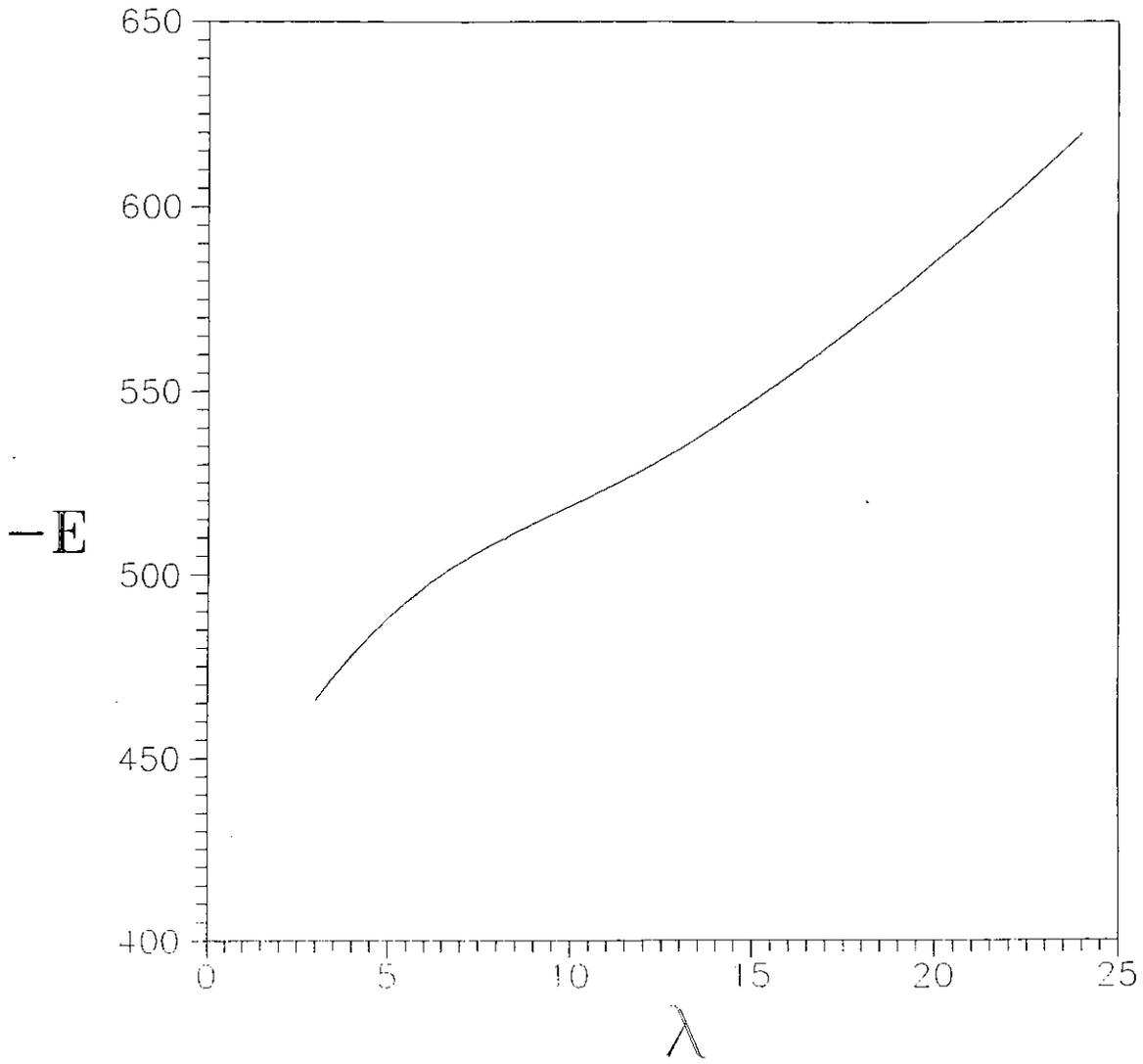


fig. 46 - Mostramos  $-E$  versus  $\lambda$ , para  $\lambda$ 's maiores que a dimensão da caixa.

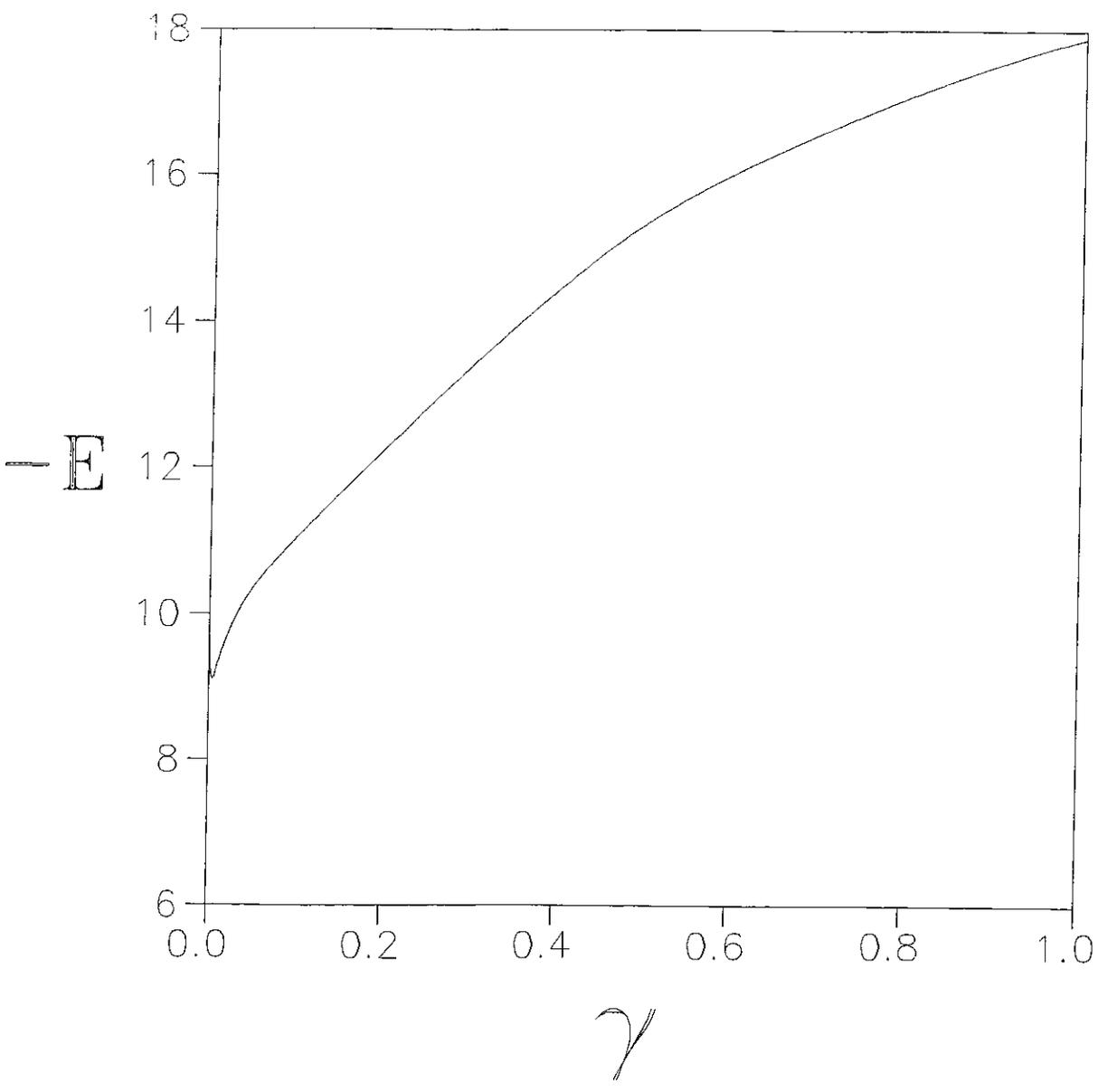


fig. 46 - Mostramos  $-E$  versus  $\gamma$ .

# Capítulo 5

## Conclusão

Nesta tese estudamos algumas propriedades da rede de vórtices em supercondutores uniaxiais, no contexto da teoria de London anisotrópica, em particular, o torque magnético intrínseco e a coexistência das linhas de vórtices em direções distintas. Além da técnica de convergência rápida, no tratamento da rede de vórtices, utilizamos nesta tese o método de Monte Carlo no estudo das linhas de vórtices ortogonais.

Mostramos que a energia de interação entre linhas distintas (inter) e a auto-energia das linhas (intra) dão contribuições contrárias ao torque magnético em relação a  $\theta$ , o ângulo formado pelo eixo de simetria e a indução magnética,  $\cos \theta = \hat{B} \cdot \hat{c}$ . Enquanto a energia de interação tende a orientar as linhas de vórtices paralelamente ao eixo de simetria, a auto-energia tende a orientar as linhas em direção ortogonal, isto é, perpendicularmente ao eixo de simetria. Resultam novos efeitos, desta competição, aqui estudados a partir de uma generalização da expressão de Kogan, onde explicamos a curva do torque em função de  $\theta$ , para baixas e altas induções magnéticas. O presente estudo das contribuições intra e inter para a energia da rede de vórtices nos leva a propor, nesta tese, um novo método para a observação das cadeias de vórtices através de medidas do torque magnético. Este método baseia-se em medidas do torque  $\tau$ , considerando-se as diferenças entre valores consecutivos e próximos da razão  $\tau/H$  em função do campo magnético aplicado  $H$ :  $\tau_1/H_1 - \tau_2/H_2$ . Tais diferenças eliminam a contribuição majoritária, devido a auto energia das linhas (intra), resultando numa medida que reflete puramente a energia inter envolvida na formação das cadeias. Isto é possível devido a linearidade em  $B$  da teoria de London.

Utilizando o ensemble termodinâmico de indução magnética  $\vec{B}$  fixa, campo apli-

cado  $\vec{H}$  variável, mostramos, neste tese, que linhas de vórtices retas não se orientam necessariamente ao longo de  $\vec{B}$ , no caso do supercondutor anisotrópico. É possível encontrar situações onde um conjunto ortogonal de linhas de vórtices é energeticamente favorável em relação ao mesmo conjunto todo orientado ao longo de  $\vec{B}$ . Obtemos a curva crítica no diagrama  $\gamma - k$ , abaixo da qual o arranjo ortogonal pode ocorrer, e verificamos que esta curva depende da indução magnética. O arranjo multi-direcional é favorecido em relação ao uni-direcional, na região de alta anisotropia,  $\gamma = m_1/m_3 \ll 1$  e e para supercondutores do tipo II no limite extremo, isto é, com alta constante de Ginzburg-Landau,  $\kappa \gg 1$ . Tal estado ortogonal só ocorre dentro de um intervalo angular, definido pelos ângulos críticos,  $\theta_{c1}$  e  $\theta_{c2}$ , como determinamos nesta tese. Na região reversível do diagrama  $H - T$ , propomos um método para verificar a existência deste estado ortogonal, baseado em medidas de magnetização e de torque.

No contexto da teoria de London anisotrópica discretizada na rede, estudamos o comportamento do estado ortogonal de linhas de vórtice utilizando o método de Monte Carlo. O método de Monte Carlo simula um banho térmico introduzindo flutuações na forma da linha de vórtice, pela adição randômica de loops, os quais conservam a vorticidade e o campo magnético local. Partimos de uma configuração de linhas ortogonais a uma certa temperatura inicial. Em seguida introduzimos flutuações térmicas e abaixamos a temperatura do sistema, buscando a configuração de menor energia, no limite em que a temperatura é a menor possível, tal como no método de recozimento simulado em metais. Fixamos o valor de  $\theta = 45^\circ$  e obtivemos para o caso isotrópico o resultado esperado. A configuração ortogonal desaparece dando lugar ao arranjo uni-direcional onde as linhas orientam-se ao longo da direção de  $\vec{B}$ . No caso altamente anisotrópico, os resultados do Método Monte Carlo não resgatam o resultado previsto anteriormente nesta tese, utilizando o método analítico. A configuração ortogonal não é a de menor energia. Provavelmente isto é consequência do tratamento da auto-energia das linhas que até o momento é bastante distinto entre os dois métodos. Enquanto a discretização atual da energia de London na rede não leva em conta o modelo Gaussiano, a teoria do contínuo leva. Portanto os diferentes tratamentos das interações eletromagnéticas no interior do

núcleo do vórtice devem ser responsáveis pelo desacordo encontrado no limite de alta anisotropia.

# Apêndice A

## O Potencial $V(\mathbf{x})$ e a Convergência Rápida

Calcularemos o potencial  $V(\vec{x})$  que possua uma convergência rápida [21].

Chamando,  $C_1 = \sin^2 \phi + \gamma \cos^2 \phi$ ,  $C_2 = \gamma \rho$ , e  $\tilde{C} = \gamma \rho \cos \phi$ , teremos

$$(\vec{g} \cdot \hat{x}_1)^2 + \gamma(\vec{g} \cdot \hat{x}_2)^2 = \left( \frac{2\pi}{L_1 \sin \phi} \right)^2 \{m_1^2 C_1 - 2m_1 m_2 \tilde{C} + m_2^2 C_2\}$$

e  $\vec{g} \cdot \hat{x}$ , temos

$$\vec{g} \cdot \hat{x} = \left\{ \frac{m_1}{L_1 \sin \phi} (x_1 \sin \phi - x_2 \cos \phi) + \frac{m_2}{L_2 \sin \phi} x_2 \right\}.$$

Deste modo, podemos reescrever a eq. (1.74) na forma,

$$V(\vec{x}) = \frac{2\pi}{L_1 L_2 \sin \phi} \sum_{m_1, m_2} \frac{e^{i2\pi \left\{ \frac{m_1}{L_1 \sin \phi} (x_1 \sin \phi - x_2 \cos \phi) + \frac{m_2}{L_2 \sin \phi} x_2 \right\}}}{\left( \frac{2\pi}{L_1 \sin \phi} \right)^2 \{m_1 \sin^2 \phi + \gamma(m_1^2 \cos^2 \phi - 2m_1 m_2 \rho \cos \phi + m_2^2 \rho^2)\} + \mu^2} \quad (\text{A.1})$$

chamando,

$$y_1 = \frac{(x_1 \sin \phi - x_2 \cos \phi)}{L_1 \sin \phi}$$

$$y_2 = \frac{x_2}{L_2 \sin \phi}$$

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu L_1 \sin \phi}{2\pi}$$

teremos para o potencial a expressão,

$$V(\vec{x}) = \frac{\rho \sin \phi}{2\pi} \sum_{m_1, m_2} \frac{e^{2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)}}{m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 - 2m_1 m_2 \tilde{C} + \tilde{\mu}^2}. \quad (\text{A.2})$$

Utilizando a identidade matemática,

$$\frac{1}{b} = \int_0^{\infty} dt e^{-bt},$$

podemos escrever a eq. (A.2), obtendo

$$V(\vec{x}) = \frac{\rho \sin \phi}{2\pi} \int_0^{\infty} dt \sum_{m_1, m_2} e^{-[m_1^2 C_1 + m_2^2 C_2 - 2m_1 m_2 \tilde{C} + \tilde{\mu}^2]t + 2\pi i(m_1 y_1 + m_2 y_2)} \quad (\text{A.3})$$

Resumindo a eq. (A.3), fazemos

$$\{\dots\} = \sum_{m_2} e^{-m_2^2 C_2 t + 2\pi i m_2 y_2} + \sum_{m_1 \neq 0} (\dots) e^{-m_1^2 C_1 t + 2\pi i m_1 y_1}$$

onde (...) é dado por

$$(\dots) = \sum_{m_2} e^{-m_2^2 C_2^2 t + 2\pi i m_2 (y_2 + \frac{1}{\pi i} m_1 \tilde{C} t)}$$

Então a eq. (A.3) é resumida em,

$$V(\vec{x}) = \int_0^{\infty} dt e^{-\tilde{\mu}^2 t} \{\dots\}. \quad (\text{A.4})$$

De acordo com a transformação de abaixo,

$$\sum_m e^{-sm^2 + 2\pi i mx} = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_m e^{\frac{\pi^2}{s}(m+x)^2},$$

podemos reescrever (...), obtendo:

$$(\dots) = \left(\frac{\pi}{C_2 t}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_s e^{\frac{\pi^2}{C_2 t} (s + y_2 + \frac{m_1}{\pi i} \tilde{C} t)^2}.$$

Escrevendo o argumento da exponencial em potencias de  $t$ , temos

$$(\dots) = \sqrt{\frac{\pi}{C_2 t}} \sum_s e^{-\frac{\pi}{C_2}(s+y_2)/t + \frac{m_1 \tilde{C}}{C_2} t + 2\pi i \frac{s+y_2}{C_2} m_1 \tilde{C}}$$

De volta ao potencial  $V(\vec{x})$ , eq. (A.3), temos

$$V(\vec{x}) = \frac{\rho \sin \phi}{2\pi} \int_0^\infty dt e^{-\tilde{\mu}^2 t} \{\dots\}$$

onde agora temos  $\{\dots\}$  como,

$$\{\dots\} = \sum_{m_2} e^{-m_2^2 C_2 t + 2\pi i m_2 y_2} + \sum_s e^{-\frac{\pi^2}{C_2}(s+y_2)^2 \frac{1}{t}} e^{2\pi i m_1 \left(\frac{s+y_2}{C_2} \tilde{C} + y_1\right)} e^{-m_1^2 t \left(C_1 - \frac{\tilde{C}^2}{C_2}\right)}$$

e sendo  $C_1 - \frac{\tilde{C}^2}{C_2} = \sin^2 \phi$ . Fazendo a integral em  $t$  [12],

$$\int_0^\infty dt t^{\alpha-1} e^{-pt} e^{-q/t} = 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{pq}),$$

encontraremos para a primeira integral,

$$\int_0^\infty dt e^{-\tilde{\mu}^2 t - m_2^2 C_2 t} = \frac{1}{\tilde{\mu}^2 + m_2^2 C_2}$$

e para a segunda integral teremos,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt e^{-(\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin^2 \phi)t} e^{-\frac{\pi^2}{C_2}(s+y_2)^2 t^{-1}} t^{-1/2} = \\ & = 2 \left( \frac{\frac{\pi^2}{C_2}(s+y_2)^2}{\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin^2 \phi} \right)^{1/4} K_{1/2} \left( 2\sqrt{[\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin^2 \phi] \frac{\pi^2}{C_2}(s+y_2)^2} \right) \end{aligned}$$

onde  $\alpha = 1/2$ . Assim o potencial  $V(\vec{x})$  pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) = & \frac{\rho \sin \phi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\tilde{\mu}^2} + 2 \sum_{m_2=1}^\infty \frac{\cos 2\pi m_2 y_2}{\tilde{\mu}^2 + m_2^2 C_2} + \sqrt{\frac{\pi}{C_2}} \sum_{m_1 \neq 0}^\infty \sum_s e^{2\pi i m_1 \left[\frac{s+y_2}{C_2} \tilde{C} + y_1\right]} \right. \\ & \left. 2 \left[ \frac{\pi^2}{C_2} \frac{(s+y_2)^2}{\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin^2 \phi} \right] K_{1/2} \left[ \left( 2 \left( \tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin^2 \phi \right) \frac{\pi^2}{C_2} (s+y_2)^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

De acordo com a definição da função de Bessel,  $K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right) e^{-z}$ , podemos ter o potencial na forma

$$V(\vec{x}) = \frac{\rho \sin \phi}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\mu^2} + 2 \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m_2 y_2}{\tilde{\mu}^2 + m_2^2 C_2} + 2\sqrt{\frac{\pi}{C_2}} \sum_{m_1 \neq 0}^{\infty} \sum_s e^{2\pi i m_1 \left[ \frac{s+y_2}{C_2} \tilde{C} + y_1 \right] \pi (s+y_2) / \sqrt{C_2}} \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\pi}}{(\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin \phi)^{1/2}} e^{-(\tilde{\mu}^2 + m_1^2 \sin \phi)^{1/2}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Simplificando a eq. (A.5)

$$\frac{s + y_2}{C_2} \tilde{C} + y_1 = \frac{\cos \phi}{\rho} s + \frac{z_1}{2\pi}$$

chamando  $z_1 = \frac{2\pi x_1}{L_1}$  e  $z_2 = \frac{2\pi x_2}{L_2}$ .

Portanto o potencial  $V(\vec{x})$ , fica

$$V(\vec{x}) = \frac{2\pi}{L_1 L_2 \sin \phi} \frac{1}{\mu^2} + \frac{\sin \phi}{\pi \rho} \sum_{m_2=1}^{\infty} \frac{\cos(m_2 z_2 / \sin \phi)}{(\mu \frac{L_2 \sin \phi}{2\pi})^2} \\ + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_s \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ m_1 \left( \frac{2\pi \cos \phi}{\rho} s + z_1 \right) \right]}{\left[ m_1^2 + \left( \frac{\mu L_1}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \frac{L_1 \mu}{2\pi} \right)^2 + m_1^2} \frac{1}{\rho} \frac{1}{2} |2\pi \sin \phi s + z_2| \quad (\text{A.7})$$

O potencial  $V(\vec{x})$ , dado pela eq. (A.6), é transformado com o auxílio da identidade encontrada na ref. [12], sec.1.445, que apresenta,

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 + \alpha^2} = \frac{\pi \cosh[\alpha(\pi - x)]}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha^2}$$

para todo  $x$  pertencente ao intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Temos então,

$$V(\vec{x}) = \frac{\pi}{\mu L_1} \frac{\cosh \left[ \frac{L_2 \sin \phi}{2\pi} \mu \left( \pi - \frac{z_2}{\sin \phi} \right) \right]}{\sinh(L_2 \sin \phi \mu / 2)} \\ + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \left[ m \left( \frac{2\pi \cos \phi}{\rho} s + z_1 \right) \right]}{\left[ m^2 + \left( \frac{\mu L_1}{2\pi} \right)^2 \right]^{1/2}} \times e^{-\left[ \left( \frac{L_1 \mu}{2\pi} \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} \frac{1}{\rho} |z_2 + 2\pi \sin \phi s|} \quad (\text{A.8})$$

Definindo novas variáveis,  $\sigma = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\sigma_0$ ,  $\sigma_0 = \frac{2\pi \sin \phi}{\rho}$ ,  $\chi = \chi_0$ ,  $\chi_0 = \frac{2\pi \cos \phi}{\rho}$ , e  $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \frac{L_1 \mu}{2\pi}$ . Onde  $\mu = 1/\lambda$  e  $\lambda$  é o comprimento de penetração de London. Com estas novas variáveis a eq. (A.7) fica

$$V_0(\vec{x}) = \frac{\cosh[\mu_0(\sigma/2 - |z_2|)]}{2\mu_0 \sinh(\mu_0\sigma/2)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos[m(z_1 + \chi s)]e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2}|z_2 + \sigma s|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}} \quad (\text{A.9})$$

A função de Bessel modificada  $K_0$  tem uma singularidade logarítmica próximo à origem. Para o potencial  $V_0(\vec{x})$  esta singularidade surge do termo  $s = 0$ , uma vez que [21]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos(mz_1) \frac{e^{-m|z_2|}}{m} = -\frac{1}{2} \ln[1 - 2e^{-|z_2|} \cos(z_1) + e^{-2|z_2|}].$$

A inclusão desta identidade ao potencial  $V_0(\vec{x})$  faz com que a convergência deste seja mais eficiente. O estudo do limite de  $V_0(\vec{x})$  quando  $\vec{x} \rightarrow 0$  limita-se a estudar a parte do potencial que diverge na origem.

$$V_0(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mz_1) e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2}|z_2|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}}.$$

Como  $\mu_0 \sim 1/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de London, neste limite  $\lambda \gg x$  e portanto  $\mu_0 \sim \frac{1}{\infty} = 0$ . Então,

$$V_0(\vec{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mz_1) e^{-m|z_2|}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{(iz_1 - z_2)m} + e^{-(iz_1 + z_2)m}}{m}.$$

Usando a relação,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1 - x|,$$

temos

$$V_0(\vec{x}) = \ln(1 - 2\cos z_1 e^{-z_2} + e^{-2z_2}).$$

O limite da função  $\Theta = 1 - 2\cos z_1 e^{-z_2} + e^{-2z_2}$ , quando  $x \rightarrow 0$  é  $z_1^2 + z_2^2$ . Como  $z_i = \frac{2\pi}{L_i} x_i$  temos que o limite de  $V_0(\vec{x})$  é dado por

$$V_0(\vec{x}) = -\ln\left(\frac{2\pi}{L_1}\right)^2 |x_1^2 + x_2^2| = -\ln|x| - 2\ln\left(\frac{2\pi}{L_1}\right)$$

$$V_0(\vec{x}) \approx -\ln|x|.$$

Verificamos assim, a dependência logarítmica próximo à origem para o potencial  $V_0(\vec{x})$  e portanto  $V_0(\vec{x}) = K_0(\vec{x})$  na vizinhança da origem. O potencial dado pela eq. (A.8), respeita a periodicidade da rede de vórtice, isto é,  $V(\vec{x}) = V(\vec{x} + \vec{L}_n)$  onde  $\vec{L}_n$  é um vetor da rede. Separamos o potencial  $V(\vec{x})$  em várias etapas afim de podermos fazer um programa e obtermos resultados numéricos,

$$V(\vec{x}) = \frac{\cosh[\mu_0(\sigma/2 - |z_2|)]}{2\mu_0 \sinh(\mu_0\sigma/2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \cos[m(z_1 + \chi s)] \frac{e^{-\sqrt{\mu_0^2 + m^2}|z_2 + \chi s|}}{\sqrt{\mu_0^2 + m^2}}.$$

# Apêndice B

## Derivação da Energia Livre a partir da Equação (1.83)

Neste apêndice, mostramos a passagem da eq. (1.83) para (1.85).

Usando a igualdade

$$m_{zz} - \mu^2 \frac{m_{zz} - m_1}{\mu^2 + m_1 k^2} = m_1 \frac{\mu^2 + m_{zz} k^2}{\mu^2 + m_1 k^2}$$

podemos reescrever

$$\frac{\mu^2 + m_{zz} k^2}{\mu^2 + m_1 k^2} = \frac{m_{zz}}{m_1} - \frac{\mu^2}{m_1} \frac{m_{zz} - m_1}{\mu^2 + m_1 k^2}.$$

A eq. (1.83) pode ser reescrita por

$$B_z(\vec{r}) = \left\{ \frac{m_{zz}}{m_1} 2\pi \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{\mu^2 + m_{zz} k_x^2 + m_3 k_y^2} - \frac{\mu^2}{m_1} (m_{zz} - m_1) 2\pi \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}}}{(\mu^2 + m_1 k^2)(\mu^2 + m_{zz} k_x^2 + m_3 k_y^2)} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Utilizando o truque de *Feynman*,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 du \frac{1}{[(1-u)A + Bu]^2}$$

e fazendo  $A = \mu^2 + m_{zz} k_x^2 + m_3 k_y^2$  e  $B = \mu^2 + m_1 k^2$ , teremos

$$(1-u)A + Bu = \mu^2 + [m_{zz} - u(m_{zz} - m_1)]k_x^2 + [m_3 - u(m_3 - m_1)]k_y^2$$

Assim,  $B_z(\vec{r})$  pode ser escrito como,

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{m_{zz}}{m_1} 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\mu^2 + m_{zz}k_x^2 + m_3k_y^2} \right. \\ \left. - \frac{\mu^2}{m_1} (m_{zz} - m_1) \int_0^1 du \right. \\ \left. 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\{\mu^2 + [m_{zz} - u(m_{zz} - m_1)]k_x^2 + [m_3 - u(m_3 - m_1)]k_y^2\}^2} \right. \quad (\text{B.2})$$

Definimos:  $C_1 = \widehat{m}_{zz} - u(\widehat{m}_{zz} - \widehat{m}_1)$ ,  $\gamma = \frac{m_1}{m_3} = \widehat{m}_1 \ll 1$ ,  $\widehat{m}_1 = \gamma$ ,  $\widehat{m}_3 = 1$  e  $C_2 = 1 - u(1 - \gamma)$ . Fazendo a transformação de  $\frac{1}{A^2}$  para  $\frac{1}{A}$ :

$$\frac{1}{(\mu^2 + A)^2} = -\frac{\partial}{\partial \mu^2} \frac{1}{\mu^2 + A}.$$

Assim escrevemos  $B_z(\vec{r})$  por

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{m_{zz}}{m_1} 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\mu^2 + m_{zz}k_x^2 + m_3k_y^2} \right. \\ \left. - \mu^2 \frac{(m_{zz} - m_1)}{m_1} \int_0^1 du (-1) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right. \\ \left. 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\mu^2 + [m_{zz} - u(m_{zz} - m_1)]k_x^2 + [m_3 - u(m_3 - m_1)]k_y^2} \right. \quad (\text{B.3})$$

Impondo uma escala na teoria, fazemos  $k_x \rightarrow \sqrt{m_{zz}}k_x$  e  $k_y \rightarrow \sqrt{m_3}k_y$ . Assim reescrevemos  $B_z(\vec{r})$ ,

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{m_{zz}}{m_1} \frac{1}{\sqrt{m_{zz}m_3}} 2\pi \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(k_x x/\sqrt{m_{zz}} + k_y y/\sqrt{m_3})}}{\mu^2 + k_x^2 + k_y^2} \right. \\ \left. - \mu^2 \frac{(m_{zz} - m_1)}{m_1} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} (-1) \frac{\partial}{\partial \mu^2} \frac{e^{(k_x x/\sqrt{C_1} + k_y y/\sqrt{C_2})}}{\mu^2 + k_x^2 + k_y^2} \right.$$

Pela definição da função de Bessel modificada podemos reescrever  $B_z(\vec{r})$  na forma de combinações de  $K_0$ . Então,

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{\sqrt{m_{zz}}}{m_1\sqrt{m_3}} K_0\left(\frac{x}{\widehat{m}_{zz}}, \frac{y}{\widehat{m}_3}\right) - \mu^2 \frac{(m_{zz} - m_1)}{m_1} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} (-1) \frac{\partial}{\partial \mu^2} K_0\left(\frac{x}{\sqrt{C_1}}, \frac{y}{\sqrt{C_2}}\right) \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Estudando a rede inclinada quando  $\vec{x} \rightarrow 0$ . Neste limite temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} K_0(\vec{x}) = -\ln \mu |\vec{x}| - \ln(0.5) - Ce$$

e

$$(-1) \frac{\partial}{\partial \mu^2} K_0(\vec{x}) = -\left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(-\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{2\mu^2}.$$

Então,

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{\sqrt{m_{zz}}}{m_1\sqrt{m_3}} \left[ \ln\left(\frac{\mu}{2} \sqrt{\left(x/\sqrt{\widehat{m}_{zz}}\right)^2 + \left(y/\widehat{m}_3\right)^2} + Ce \right] - \mu^2 \frac{(m_{zz} - m_1)}{m_1} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} \right\}.$$

Onde  $C_1 = \cos^2\theta + \gamma \sin^2\theta - \cos^2\theta(1 - \gamma)u$  e  $C_2 = 1 - u(1 - \gamma)$ , a integral  $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}}$  é resolvida via ref. [12] e encontramos:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} = \frac{2}{1 - \gamma} \frac{1}{|\cos\theta|} \ln \left[ \frac{\cos\theta + \gamma \sin^2\theta + |\cos\theta|}{\sqrt{\gamma}(1 + |\cos\theta|)} \right]$$

Definindo,

$$\Gamma(\theta, \gamma) = \sqrt{\cos^2\theta + \gamma \sin^2\theta}.$$

Deste modo,

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} B_z(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left\{ \frac{\Gamma(\theta, \gamma)}{\gamma} \left[ -\ln \left( \frac{\mu}{2} \sqrt{\left( \frac{x}{\Gamma(\theta, \gamma)} \right)^2 + y^2} \right) + Ce \right] - \frac{|\cos \theta|}{\sqrt{\Gamma(\theta, \gamma)}} \ln \left[ \frac{\Gamma(\theta, \gamma) + |\cos \theta|}{\sqrt{\gamma}(1 + |\cos \theta|)} \right] \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Checando este resultado para  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ , obtemos as expressões:

$$B_z(\vec{r})|_{\theta=0} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2\gamma} \left\{ -\ln \frac{1}{2} \frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{x^2 + y^2} + Ce \right\},$$

onde  $M = m_3$ ,  $\lambda^2 = \lambda_3^2 = \frac{m_3 c^2}{4\pi q^2 |\psi|^2}$ ,  $\lambda_1 = \lambda^2 \gamma = \lambda^2 \frac{m_1}{m_3}$ ,  $\frac{\mu}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\gamma}} = \mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}$  e assim temos

$$B_z(\vec{r})|_{\theta=0} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_1^2} \left\{ -\ln \frac{1}{2} \sqrt{(x/\lambda_1)^2 + (y/\lambda_1)^2} + Ce \right\}.$$

Checando para  $\theta = 90$ , encontramos

$$B_z(\vec{r})|_{\theta=90} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left\{ -\ln \frac{\mu}{2} \sqrt{\left( \frac{x}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 + y^2} + Ce \right\}$$

onde  $\gamma = \frac{m_1}{m_3} = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^2$ ,  $\lambda^2 = \lambda_3^2$ ,  $\lambda^2 \sqrt{\gamma} = \lambda_1 \lambda_3$ . Então,

$$B_z(\vec{r})|_{\theta=90} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda_1\lambda_3} \left\{ -\ln \frac{1}{2} \sqrt{(x/\lambda_1)^2 + (y/\lambda_3)^2} + Ce \right\}.$$

Como estamos no limite de  $|\vec{r}| \approx 0$  o argumento do logaritmo tanto em  $B_z(\vec{r})|_{\theta=0}$  como em  $B_z(\vec{r})|_{\theta=90}$  são da mesma ordem, porém  $\lambda_1 \gg \lambda_3$  e portanto a energia para a configuração em  $\theta = 90$  é menos estável que a configuração em  $\theta = 0$ . De acordo com as eqs. (B.4) e (B.5), a contribuição da energia de interação para a energia livre é [21]

$$E(\vec{x}) = \frac{\Gamma(\theta, \gamma)}{\gamma} V_0(\vec{x}) - \frac{1-\gamma}{\gamma} \cos^2 \theta \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{C_1 C_2}} \left[ -\mu_0^2 \frac{\partial V_0(\vec{x}, u)}{\partial \mu_0^2} \right]. \quad (\text{B.6})$$

# Apêndice C

## O Torque em Função do Ângulo $\theta$

Neste apêndice, iremos mostrar a fórmula (2.2), onde o torque é a derivada da energia livre do sistema, em função do ângulo  $\theta$ . Tomando como direção das linhas de vórtice, o campo  $\vec{B}$ . Este vetor forma um ângulo  $\theta$  com o eixo de simetria do supercondutor. Sendo o torque dado por,  $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{H}$ , e sabendo que  $\vec{H} = 4\pi \frac{\partial F}{\partial \vec{B}}$ , podemos escrever  $\vec{\tau} = -\vec{B} \times \frac{\partial F}{\partial \vec{B}}$ . Como a indução magnética pode ser escrita por  $\vec{B} = (B \sin \theta, B \cos \theta)$ ; e o torque por  $\vec{\tau} = (B_x \frac{\partial F}{\partial B_z} - B_z \frac{\partial F}{\partial B_x}) \hat{y}$ , só é necessário a troca de  $B_x$  e  $B_z$  por  $\theta$  e  $|\vec{B}| = B$ . Tomando,  $B_x = B \sin \theta$  e  $B_z = B \cos \theta$ , temos as derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial B_z} = \frac{\partial F}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial B_z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial B_z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial B_x} = \frac{\partial F}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial B_x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial B_x}$$

Estas são desenvolvidas e temos,

$$\frac{\partial F}{\partial B_z} = \cos \theta \frac{\partial F}{\partial B} - \frac{\sin \theta}{B} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial B_x} = \sin \theta \frac{\partial F}{\partial B} + \frac{\cos \theta}{B} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

Deste modo, temos o torque dado por,

$$\vec{\tau} = - \left[ B \sin \theta \left( \cos \theta \frac{\partial F}{\partial B} - \frac{\sin \theta}{B} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) - B \cos \theta \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial B} + \frac{\cos \theta}{B} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \right] \hat{y}$$

$$\vec{\tau} = -\frac{\partial F(B, \theta)}{\partial \theta}.$$

# Bibliografia

- [1] P.G.de Gennes,"Superconductivity of Metal and Alloys", W.A. Benjamin, N.Y., 1966.
- [2] D.A. Huse e Radzihovsky., (pre-print)
- [3] J.P. Hurault, Phys. Letters, **20** (1966) 587; U. Welp e col., Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1908; O.F. de Lima, Solid State Commun. **81** (1992) 411.
- [4] M. Tinkhan, "Introduction to Superconductivity", (McGraw-Hill, N.Y.,1975).
- [5] A.A. Abrikosov, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., **32** (1957) 1442.
- [6] U. Essmann e H. Tranuble, Phys. Letters **24A** (1967) 526; U. Essmann, Phys. Letters **41A** (1972) 477.
- [7] V.L. Ginzburg e L.D. Landau, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz, **20** (1950) 1064.
- [8] J.Bardeen, L.N.Cooper, e J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108** (1957) 1175.
- [9] L.P. Gor'Kov, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz, **36** (1959) 1918.
- [10] J.D. Jackson, "Classical Eletrodynamics", 2nd ed., John Wiley & Sons, N.Y., 1975.
- [11] K.H. Fischer, Physica C 178 ( 1991) 161.
- [12] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik, editado por Alan Jeffrey, Academic Press, 5th Edition.
- [13] W.E Lauwrence e S. Doniach, no Proc. 12th Int. Conf. Low Temp. Phys., ed. E. Kanda (Academic Press of Japan, Kyoto,1971) p. 361.

- [14] A.M.Grishin, A.Y. Martynovich e S.V. Yampol'skii, Zh. Eksp. i Teor. Fiz. **97** (1990) 1930.
- [15] V.G. Kogan, N. Nakagawa e S.L. Thiemann, Phys. Rev. B **42** (1990) 2631.
- [16] J.G. Berdnorz e K.A. Muller, Z. Phys, B **64** (1986) 189.
- [17] D.E. Farrel, C.M. Willians, S.A. Wolf, N.P. Bansal, e V,G. Kogan, Phys. Rev. Lett.**61** (1988) 2805.
- [18] E.H. Brandt, J. Low Temp. Phys. 28 (1977) 291; J. Low Temp. Phys. 26 (1977) 709; J. Low Temp. Phys. 26 (1977) 735.
- [19] V.G. Kogan, Phys. Rev. B **24** (1980) 1572; Phys. Lett. A **85** (1981) 298.
- [20] A.L. Fetter, P.C.Hohenberg, e P. Pincus, Phys. Rev. **147** (1966) 140
- [21] M.M. Doria, Physica C 178 (1991) 51.
- [22] L.J. Campbell, M.M. Doria, e V.G. Kogan, Phys. Rev. B **38** (1988) 2439.
- [23] A.M. Grishin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 97 (1990) 1930).
- [24] A.I. Buzdin e A. Yu. Simonov, Sov. Phys. JETP Lett. 51 (1990) 191; Physica B 165 (1990) 1101; V.G. Kogan, Phys.Rev. Lett. 64 (1990) 2192.
- [25] M.M. Doria e I.G. de Oliveira, Phys. Rev. B 49 (1994) 6205.
- [26] V.G. Kogan e L.J. Campbell, Pys. Rev Lett. 62 (1989) 1552.
- [27] V.G. Kogan, Physics Lett. **85** (1981) 298.
- [28] E.H. Brandt, Physica C 195 (1992) 1.
- [29] R. Cavalcanti, G. Carneiro, e A.Gartner, Europhys. Lett. **17**, (1992) 449.
- [30] G. Carneiro,R. Cavalcanti, e A.Gartner, Phys.Rev. B **47**,5263 (1993), G. Carneiro, Phys. Rev. B (à ser publicado).

- [31] D.E. Farrell, C.M. Williams, S.A. Wolf, N.P. Bansal, e V.G. Kogan, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2805 (1988).
- [32] V.G. Kogan, *Phys. Rev. B* **38**, 2805 (1988).
- [33] M. Qvarford, K. Heeck, J.G. Lensink, R. Wijngaarden, e R. Griessen, *Rev. Sci. Instr.*, **63** (1992) 5726.
- [34] T. Matsushita, *Physica C* **214** (1993) 100.
- [35] D.E. Farrel, J.P. Rice, D.M. Ginsberg, e J.Z. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1573;  
D.E. Farrel, J.P. Rice, e D.M. Ginsberg, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1165.
- [36] A.I. Buzdin e A.Y. Simonov, *Pis'ma Zh. Eksp. i Teor. Fiz.* **51** (1990) 168.
- [37] L.N. Bulaevskii, M. Ledvij, e V.G. Kogan, *Phys. Rev. B* **46** (1992) 366.
- [38] G. Blatter, V.B. Geshkenbein, e A.I. Larkin, *Phys. Rev. Lett.* **68**, (1992) 875.
- [39] C.A. Bolle, P.L. Gammel, D.G.Grier, C.A. Murray, D.J. Bishop e A. Kapitulnik, *Phys.Rev. Lett.* **66** (1991) 112.
- [40] I.V. Grigorieva, J.W. Steeds, G. Balakrishman e D.M. Paul, *Phys. Rev. B* **51** (1995) 3765.
- [41] D.A. Huse, *Phys.Rev.B* **46** (1992) 8621
- [42] L.L. Daemen, A.Y. Simonov, e V.G. Kogan, *Phys.Rev. Lett.* **70** (1993) 2948.
- [43] A. Sudbo, E.H. Brandt e D.A. Huse, *Phys.Rev. Lett.* **71** (1993) 1451.
- [44] E. Sardella e M.A. Moore, *Phys.Rev.B* **48** (1993) 9664.
- [45] G. Preosti e P. Muzikar, *Phys.Rev.B* **48** (1993) 9921; *Phys. Rev. B* **47** (1993) 8831.
- [46] M.M. Doria e I.G. de Oliveira, *Physica C* **235** (1994) 2577
- [47] I.G. de Oliveira e M.M. Doria, *Physica C* **246** (1995) 95

- [48] D.E. Farrel, C.M. Williams, S.A. Wolf, N.P. Bansal e V.G. Kogan, *Phys.Rev. Lett.* **61** (1988) 2805.
- [49] D.E. Farrel, J.P. Rice, D.M. Ginsberg e J.Z. Liu, *Phys.Rev. Lett.* **64** (1990) 1573.
- [50] J.C. Martinez, D. Zech, R. Griessen, H. Keller, M.Warden, S.L. Lee, O. Laborde, J. Karpinski, e E. Kaldis, (submetido ao *Phys. Rev. Lett.*)
- [51] M. Takashige, K.A. Muller e J.G. Bednorz, *Phys.Rev. Lett.* **50** (1987) 1143.
- [52] V.G. Kogan, *Phys.Rev.B* **38** (1988) 7049.
- [53] G. Blatter, B. Ivlev, *Phys.Rev. Lett.* **70** (1993) 2621 e *Phys.Rev. Lett.* **50** (1994) 10272.
- [54] E. Sardella, *Phys.Rev.B* **45** (1991) 3141.
- [55] G.Carneiro, M.M.Doria, e S.C.B. de Andrade, *Physica C* **203** (1992) 167. G. Carneiro, *Physica C* **183** (1991) 360; *Phys.Rev. B* **45** (1992) 2391.
- [56] A. Sudbo e E.H. Brandt, *Phys.Rev. Lett.* **66** (1991) 1781; *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1781.
- [57] R.A. Klemm e J.R. Clem, *Phys.Rev.B* **21** (1980) 1868; R.A. Klemm, *Phys.Rev.B* **47** (1993) 14630.
- [58] I.G. de Oliveira, CBPF-NF-031/94.
- [59] G. Blatter e col., *Vortices in High Temperature Superconductors* (ETH-TH/93-9 preprint, Zurich, Switzerland).
- [60] L.N. Bulaevskii, M. Ledvij e V.G. Kogan, *Phys.Rev.B* **46** (1991) 366; L.N. Bulaevskii, *Phys.Rev.B* **44** (1991) 366.
- [61] P.L.Gammel, D.J. Bishop, J.P. Rice e D.M. Ginsberg, *Phys.Rev.Lett.* **68** (1992) 3343.

- [62] G. Blatter, M.V. Feigel 'man, V.J. Geshkenbein, A.I. Larkin, e V. M. Vinokur, Rev. Mod. Phys. (à ser publicado)
- [63] R. Cavalcanti, G. Carneiro, e A. Gartner, Europhys. Lett. **17**, (1992) 449
- [64] G. Carneiro, Phys. Rev. **B** 50 (1994)
- [65] G. Carneiro, R. Cavalcanti, e A. Gartner, Phys. Rev. B **47**, 5263 (1993).
- [66] R.D. Nelson e J. Toner, Phys.Rev B **24** (1981) 363.
- [67] Binder K. (Editor), Monte Carlo Methods in Statistical Physics (Springer, Berlin) 1979.
- [68] J.M.Yeomans, Statistical Mechanic of Phase Transition (Claredon Press, Oxford) 1992.

# “PROPRIEDADES DE REDE DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES ANISOTRÓPICOS”

ISAIAS GONZAGA DE OLIVEIRA

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Mauro Melchiades Dória - Presidente

José Abdalla Helayël-Neto

Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho

Edson Sardella

Gilson Carneiro

Elisa Maria Baggio Saitovitch

Jorge Silvio Helman

Rio de Janeiro, 19 de abril de 1996