

TESE DE
DOUTORADO

Métodos Funcionais em Teorias de
Campos e
Física da Matéria Condensada

FLAVIO DE SOUZA NOGUEIRA

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1996

MÉTODOS FUNCIONAIS EM TEORIAS DE
CAMPOS E FÍSICA DA MATÉRIA



1996/15
N778
020933

DEDICO

Esta tese é dedicada à minha filha *Alice*.

AGRADEÇO

Aos Profs. Adolfo P. C. Malbouisson e Nami F. Svaiter pela orientação e por me permitirem uma certa independência.

Ao Prof. Enrique V. Anda pela orientação em estágios anteriores deste trabalho.

A Gentil O. Pires por ter me chamado a atenção a muitas das referências utilizadas nessa tese e estimulantes discussões sobre grupo de renormalização.

A Miriam Coutinho pela ajuda e apoio.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta tese os métodos funcionais são utilizados em diversos contextos. No capítulo 1 desenvolvemos métodos de grupo de renormalização utilizando métodos funcionais. Deduzimos uma equação de evolução exata para a ação efetiva. Obtemos as equações de evolução para os acoplamentos de teorias crítica e tricrítica com simetria $O(N)$. No caso da teoria tricrítica estabelecemos não-perturbativamente a existência de um ponto fixo ultravioleta estável não-trivial para $N > 4$. No capítulo 2 discutimos a eletrodinâmica quântica escalar. No caso $d = 3$ com um termo de Chern-Simons e um acoplamento $(\phi^\dagger \phi)^3$ discutimos a estabilidade do vácuo e encontramos uma região de instabilidade para certos valores do auto-acoplamento quártico escalar. Estudamos a eletrodinâmica quântica escalar de Maxwell-Chern-Simons como um modelo de Ginzburg-Landau topológico para a supercondutividade. Nesse contexto discutimos o efeito da massa topológica sobre as flutuações críticas do parâmetro de ordem e concluímos que o termo de Chern-Simons estabiliza as mesmas. Concluímos que a contribuição topológica aumenta a ordem do sistema. No capítulo 3 os métodos funcionais também são aplicados a um modelo exatamente solúvel para elétrons fortemente correlacionados. Este modelo possui os mesmos limites exatos que o modelo de Hubbard e exibe

uma transição metal-isolante em função da interação. Mostramos que no limite de tunelamento de alcance infinito o modelo é equivalente ao modelo de Hubbard na mesma situação.

Abstract

In this thesis functional methods are used in several contexts. In chapter 1 we develop renormalization group methods through functional methods. We derive an exact evolution equation for the effective action. We obtain the evolution equations for the coupling constants of the critical and tricritical theories with $O(N)$ symmetry. In the case of the tricritical theory it is established non-perturbatively the existence of a non-trivial ultraviolet stable fixed point for $N > 4$. In chapter 2 we discuss scalar quantum electrodynamics. In the case $d = 3$ with Chern-Simons term and a $(\phi^\dagger \phi)^3$, we discuss on the vacuum stability and it is obtained an instability region for certain values of the quartic scalar self-coupling. We study the Maxwell-Chern-Simons scalar quantum electrodynamics as a topological Ginzburg-Landau model for the superconductivity. In this context we discuss the effect of the topological mass on the critical fluctuations of the order parameter and we conclude that the Chern-Simons term stabilizes the fluctuations. It is concluded that the topological contribution increases the order of the system. In chapter 3 functional methods are also applied to an exactly soluble model for strongly correlated electrons. This model shares the same exact limits with the Hubbard model and exhibits a metal-insulator transition as a function of the

interaction. It is shown that in the infinite range hopping limit the model is equivalent to the Hubbard model in the same situation.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo em português	iii
Abstract	v
Índice	vi
Introdução	1
1 Métodos Funcionais e o Grupo de Renormalização em Teo- rias Escalares	7
1.1 Introdução	7
1.2 Grupo de Renormalização com Corte Agudo (<i>Sharp Cutoff</i>) para Teorias Escalares	10
1.3 Uma Equação de Evolução Exata para a Ação Efetiva	17

1.4	Equações de Evolução para a Teoria Tricrítica	33
2	Eletrodinâmica Quântica Escalar e Flutuações Críticas em Supercondutores Topologicamente Massivos	38
2.1	Introdução	38
2.2	EDQE em $d = 4$	41
2.3	EDQE de Maxwell-Chern-Simons	50
2.4	Flutuações Críticas em Supercondutores Topologicamente Massivos	55
3	Métodos Funcionais em um Modelo Exatamente Solúvel para Elétrons Fortemente Correlacionados	65
3.1	Introdução	65
3.2	Um Modelo Exatamente Solúvel para a Transição Metal-Isolante	66
	Conclusão	84
	Referências	92

Introdução

Os livros texto mais recentes de teoria de campos demonstram claramente a tendência cada vez maior do uso de um formalismo comum com a física de matéria condensada. Basta citarmos como exemplo os livros de Itzykson e Drouffe [1], Parisi [2] e Zinn-Justin [3], onde a relação entre a teoria de campos e a teoria dos fenômenos críticos é explorada amplamente. Estes livros texto exibem basicamente os resultados dos esforços de Kadanoff, Wilson, Fisher, e muitos outros no estudo da física estatística (veja por exemplo as referências [5], [4] e os artigos em Domb e Green (1974) [7]). A técnica principal utilizada é o grupo de renormalização na versão desenvolvida por Wilson [4]. Esta versão do grupo de renormalização é mais geral que a versão original de Gellmann e Low [8] que é basicamente a de Callan-Symanzik [9]. O grupo de renormalização na versão Wilson mostra claramente que a física estatística e a teoria de campos estão intimamente relacionadas. Além do

mais, introduz um novo conceito de teorias efetivas. Estas idéias são, por sua vez, emprestadas à física de partículas e fornecem um significado físico a idéia de renormalizabilidade [13, 14, 11, 17, 26].

Apesar da teoria moderna dos fenômenos críticos ter se popularizado muito, principalmente devido a essa visão da conexão íntima com a teoria de campos, é importante ressaltar que existem muitos outros ramos da física da matéria condensada que estão intimamente relacionados com a teoria de campos. Na verdade, o intercâmbio entre as duas áreas é bastante vasto e ocorre há muito tempo, desde a década de cinquenta. Nos anos cinquenta todo o formalismo de operadores de campos (formalismo canônico) que mostrou-se bem sucedido na eletrodinâmica quântica (QED), mostrou-se igualmente útil na física do estado sólido. De fato, todo o formalismo de teoria de perturbação em termos de diagramas de Feynman foi aplicado à física do estado sólido. Por exemplo, existe uma correspondência completa entre os diagramas de Feynman usados em QED e aqueles usados para estudar a interação elétron-fônon. A diferença existe apenas nas expressões analíticas dos propagadores e nas constantes associadas aos vértices.

Uma teoria muito importante para a física dos sólidos também foi desenvolvida nessa época: a teoria dos líquidos quânticos, notavelmente a teoria

do líquido de Fermi de Landau [18, 19, 20]. Tudo isto culminou na teoria da supercondutividade de Bardeen, Cooper e Schrieffer, a teoria BCS [21]. Nascia nos anos cinquenta, como resultado de um intercâmbio com a física de partículas da época, a teoria de muitos corpos. Por exemplo, todo o formalismo de teoria de perturbações em termos de diagramas de Feynman, a teoria dos líquidos quânticos e a teoria da supercondutividade, podem ser encontrados em detalhe no excelente livro de Abrikosov *et al.* [35].

É bom enfatizar que a palavra intercâmbio utilizada aqui é realmente apropriada, isto é, o processo não foi unilateral. Da mesma forma que a física de matéria condensada tomou emprestado muitas das idéias da teoria quântica de campos, a situação inversa também ocorreu muitas vezes. Já citamos o exemplo da versão do grupo de renormalização usada na teoria dos fenômenos críticos. Hoje em dia a versão Wilson do grupo de renormalização é amplamente utilizada na física de partículas. Outro exemplo de grande importância é a quebra de simetria de calibre local. O mecanismo de Higgs, tão importante na física do modelo padrão, surgiu inicialmente associado ao fenômeno da supercondutividade. De fato, podemos ver o embrião do mecanismo de Higgs no artigo de Anderson em 1958 [67] que trata sobre a supercondutividade e a invariância de calibre. O mesmo tema é abordado,

também no contexto da supercondutividade, em um artigo de Nambu em 1960 [69]. Estas idéias foram generalizadas para a física de partículas por Higgs e outros [30, 31, 32, 33]. Curiosamente, o Higgs como partícula elementar ainda não foi encontrado experimentalmente enquanto que o Higgs como quasi-partícula é medido experimentalmente. Na supercondutividade o Higgs corresponde ao *plasmon*, quasi-partícula associada aos quanta das oscilações coletivas do gás de elétrons.

O exemplo da supercondutividade e seu intercâmbio com a física de partículas tem muitas ramificações. Isto porque existem dois tipos de teorias para a supercondutividade: a teoria BCS [21] que é uma teoria microscópica e a teoria de Ginzburg-Landau [52], que é uma teoria fenomenológica. A teoria microscópica é baseada em um Hamiltoniano quântico que descreve a interação de um líquido de Fermi com fônons. Os fônons podem ser eliminados do Hamiltoniano de maneira a gerar uma interação efetiva entre os elétrons mediadas por fônons [35], . Abaixo de uma certa temperatura crítica, T_c , esta interação efetiva torna-se atrativa e os elétrons passam a formar pares (pares de Cooper). Estes pares se comportam como bósons e condensam. A superfluidez desses bósons efetivos é a origem da supercondutividade.

A teoria de Ginzburg-Landau pode ser deduzida a partir da teoria mi-

crossópica [22]. Trata-se de uma teoria onde campos escalares carregados interagem via um acoplamento mínimo com um campo de calibre abeliano. Isto não é outra coisa senão a eletrodinâmica quântica escalar! Nos anos setenta a teoria moderna dos fenômenos críticos foi aplicada a teoria de Ginzburg-Landau [58, 59]. Uma transição de fase de primeira ordem induzida por flutuações é obtida. Pouco tempo antes, o mesmo comportamento, isto é, uma quebra de simetria induzida por flutuações tinha sido encontrada por físicos de partículas no contexto da eletrodinâmica quântica escalar [57]. Este é o mecanismo de Coleman-Weinberg que tem inúmeras aplicações, tanto no contexto da física de partículas bem como no da física de matéria condensada. Pelo lado da física de partículas este mecanismo está associado a modelos de grande unificação [70, 71]. Pelo lado da física de matéria condensada está associado a teoria da supercondutividade e aos cristais líquidos [59, 61].

A presente tese discutirá velhos e novos resultados sobre os tópicos brevemente comentados acima. É claro que existem muitas outras ramificações e conexões entre teoria de campos e física da matéria condensada. Por exemplo, não será discutido nessa tese nenhum tópico de teoria conforme que é uma área que se desenvolveu muito nos últimos quinze anos e é de grande

importância tanto na teoria de campos como na física de matéria condensada.

O capítulo 1 discute o grupo de renormalização na versão Wilson dentro do contexto dos métodos funcionais. Parte do material apresentado neste capítulo constitui um artigo que foi submetido para publicação.

O capítulo 2 se ocupa com o uso dos métodos funcionais na eletrodinâmica quântica escalar, incluindo situações onde um termo de Chern-Simons pode ser introduzido na ação. Também discutimos neste capítulo uma teoria de Ginzburg-Landau topológica para a supercondutividade. Este capítulo corresponde a três artigos escrito pelo autor desta tese, dois dos quais encontram-se publicados enquanto o terceiro está no momento submetido para a publicação [53, 54, 55].

O capítulo 3 aborda a utilização dos métodos funcionais em certos sistemas em física da matéria condensada. Este capítulo corresponde a um trabalho publicado pelo autor desta tese [63].

No capítulo 4 apresentamos uma conclusão e discussão de perspectivas futuras.

Capítulo 1

Métodos Funcionais e o Grupo de Renormalização em Teorias Escalares

1.1 Introdução

Neste capítulo discutiremos o grupo de renormalização na versão Wilson no contexto dos métodos funcionais. Omitiremos certos detalhes técnicos, incluindo algumas deduções elementares, uma vez que os mesmos podem ser encontrados em muitos livros texto (veja por exemplo o livro do Zinn-

Justin [3] e as referências ali citadas). A prioridade neste capítulo será a de discutir justamente aqueles resultados que não são encontrados facilmente em livros texto. Em particular, a versão Wilson do grupo de renormalização [4, 5] será discutida aqui em conexão com as equações de evolução para o potencial efetivo. Em particular, obteremos uma equação de evolução exata para a ação efetiva quântica ou, na linguagem da mecânica estatística, para a energia livre de Gibbs [6, 5, 11, 26]. O aspecto interessante deste tipo de abordagem é que o formalismo é adequado e capaz de fornecer resultados precisos tanto na teoria quântica de campos como na mecânica estatística.

O uso de métodos funcionais no contexto do grupo de renormalização não é recente. De fato, podemos citar aqui o artigo de Coleman e Weinberg [57] onde, a partir da equação de evolução para a ação efetiva quântica, obtém-se as equações de Callan-Symanzik do grupo de renormalização [9]. Podemos adotar um procedimento semelhante no que diz respeito à versão Wilson do grupo de renormalização e obter uma equação de evolução exata para uma ação efetiva quântica em uma certa escala k dos momenta [26]. Este método é baseado na idéia de formação de blocos (*blocking*) de Kadanoff [12] no espaço dos momenta [5]. Essencialmente, decompõe-se os campos em duas partes, uma correspondendo aos chamados modos lentos (*slow modes*) e a

outra aos modos rápidos (*fast modes*) e integra-se os modos rápidos de modo a definir uma teoria efetiva dependendo dos modos lentos somente. Os modos lentos são definidos como sendo o campo ressonante a escalas de momento abaixo de uma certa escala $\sim k$ enquanto que os modos rápidos correspondem àqueles que são restritos a escalas de momento superior a esta mesma escala $\sim k$. Integrando os modos rápidos determinamos uma teoria efetiva em uma escala de momentum $\sim k$. Usualmente este procedimento introduz novos acoplamentos que correspondem a interação entre os modos rápidos e os lentos e a ação resultante é consideravelmente complexa porque em geral temos um número infinito de acoplamentos. Assim, este procedimento só torna-se realmente útil no contexto de alguma aproximação, não necessariamente perturbativa. Por exemplo, para simplificar os cálculos, muitas vezes considera-se apenas os chamados acoplamentos relevantes, onde a palavra relevante aqui não está sendo usada no seu sentido coloquial [5].

A grande vantagem da versão Wilson do grupo de renormalização é a possibilidade de se obter resultados não-perturbativos. Por exemplo, no contexto das equações exatas de grupo de renormalização, obtemos em geral um número infinito de equações diferenciais que descrevem o fluxo do campo vetorial determinado pelas mesmas (*renormalization group flow*). Estas

equações estão todas acopladas e uma solução exata é obviamente impossível. Normalmente usa-se algum tipo de argumento para reduzir estas equações a um número finito. É importante enfatizar que este ponto de vista é completamente não-perturbativo em essência uma vez que não envolve necessariamente nenhum parâmetro de expansão. A situação é muito semelhante ao que ocorre com as equações de Schwinger-Dyson [16] para as funções de Green. Nesse caso resulta também um número infinito de equações de movimento acopladas, cada equação envolvendo funções de Green de ordem cada vez mais alta.

1.2 Grupo de Renormalização com Corte Agudo (*Sharp Cutoff*) para Teorias Escalares

Nesta seção desenvolveremos um exemplo pedagógico do grupo de renormalização na versão Wilson para uma teoria de um campo escalar com apenas uma componente. Faremos um tratamento na aproximação de um loop.

A apresentação dada aqui é completamente original e apresentações similares só são encontradas em alguns artigos que, muitas vezes, são demasiado técnicos tornando a informação difícil de ser apreendida.

Consideremos a seguinte ação clássica Euclideana:

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial_\mu \chi + \frac{m^2}{2} \chi^2 + \frac{\lambda}{4!} \chi^4 \right). \quad (1.1)$$

Para obter a ação efetiva em um loop integramos as flutuações Gaussianas em torno de uma solução clássica uniforme, isto é, uma solução uniforme que minimiza a ação (1.1). Para este fim separaremos o campo χ em uma contribuição estática χ_0 que minimiza (1.1) mais uma correção $\delta\chi$ que corresponde a uma flutuação do campo χ em torno da configuração clássica. Manteremos na ação acima somente contribuições quadráticas em $\delta\chi$, ou seja, assumiremos que as flutuações são pequenas o suficiente de modo que termos não-Gaussianos não contribuem muito no cálculo do funcional gerador e podem, por este motivo, serem legitimamente desprezados. Assim, podemos escrever a seguinte expressão aproximada para a ação:

$$S \approx \Omega \left(\frac{m^2}{2} \chi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \chi_0^4 \right) + \int d^d x \frac{1}{2} \delta\chi \left(-\Delta + m^2 + \frac{\lambda}{2} \chi_0^2 \right) \delta\chi, \quad (1.2)$$

onde Ω é o volume do sistema e Δ denota o Laplaciano Euclidiano em

d dimensões.

Evidentemente podemos fazer a integral Gaussiana imediatamente e, após uma transformada de Legendre, obter a ação efetiva quântica em um loop. No entanto, tal procedimento nos levaria a um potencial efetivo onde *todos os modos de Fourier do campo $\delta\chi$ foram integrados* e nós estamos interessados em obter uma teoria efetiva em uma certa escala de momentum arbitrária k e estudar a evolução do potencial efetivo em função dessa escala. Assim, vamos decompor o campo $\delta\chi$ na forma

$$\delta\chi = \delta\chi_{<} + \delta\chi_{>} \tag{1.3}$$

onde $\delta\chi_{<}$ e $\delta\chi_{>}$ são respectivamente os modos lentos e os rápidos da flutuação $\delta\chi$. Estes são definidos por

$$\delta\chi_{<}(x) = \int_{0 < |q| < k} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{iq \cdot x} \delta\chi(x), \tag{1.4}$$

$$\delta\chi_{>}(x) = \int_{k < |q| < \Lambda} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{iq \cdot x} \delta\chi(x). \tag{1.5}$$

Note que a decomposição acima usa um corte agudo (*sharp cutoff*). Este procedimento costuma ser mais simples do ponto de vista computacional. Porém, uma análise tecnicamente correta deve usar um corte suave (*smooth*

cutoff). Discutiremos a implementação de tal recurso na seção seguinte.

Consideremos a contribuição Gaussiana contendo somente modos lentos, isto é,

$$\delta S_{<} = \int_{0 < |q| < k} d^d q \frac{1}{2} \delta \chi_{<}(q) \left(q^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \chi_0^2 \right) \delta \chi_{<}(-q). \quad (1.6)$$

Vamos fazer um reescalonamento na contribuição acima de modo a restaurar o setor Gaussiano original com todas as escalas de momenta. Este será o “nível de árvore” (*tree level*) com respeito aos modos rápidos. O reescalonamento consiste em fazer uma mudança de variáveis no momentum q e no campo $\delta \chi_{<}$. A mudança de variável $q' = \Lambda q/k$ transforma $\delta S_{<}$ em

$$\delta S_{<} = \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^d \int_{0 < |q| < \Lambda} d^d q' \frac{1}{2} \delta \chi_{<}(kq'/\Lambda) \left(\frac{k^2}{\Lambda^2} q'^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \chi_0^2 \right) \delta \chi_{<}(-kq'/\Lambda). \quad (1.7)$$

Devemos agora fazer uma mudança de variáveis no campo da forma $\delta \chi'(q') = \zeta^{-1} \delta \chi(kq'/\Lambda)$ onde o fator ζ será ajustado de modo a obtermos a contribuição Gaussiana original com todas as escalas de momenta. Isto será feito através de uma redefinição dos acoplamentos. Pondo $\zeta = (k/\Lambda)^{-\frac{d+2}{2}}$ e definindo os novos acoplamentos

$$\begin{aligned}
m'^2 &= \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^2 m^2, \\
\lambda' &= \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{4-d} \lambda, \\
\chi_0'^2 &= \left(\frac{\Lambda}{k}\right)^{d+2} \chi_0^2,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

restauramos a forma original da contribuição Gaussiana em (1.2) com todas as escalas de momenta. As equações acima determinam as equações de grupo de renormalização a nível de árvore. De fato, como consequência direta das equações acima obtemos

$$\begin{aligned}
k \frac{\partial m'^2}{\partial k} &= -2m'^2, \\
k \frac{\partial \lambda'}{\partial k} &= (d-4)\lambda', \\
k \frac{\partial \chi_0'^2}{\partial k} &= -(d+2)\chi_0'^2.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Note que as equações de fluxo a nível de árvore são lineares. Perceba que, pelas equações (1.8), os acoplamentos não renormalizam quando $k \rightarrow \Lambda$. Isto corresponde ao limite clássico (nível de árvore clássico). Note também que

podemos reescrever as equações de fluxo em termos de acoplamentos adimensionais. Estes são definidos como $m'^2 = \Lambda^2 \tilde{m}'^2$, $\lambda' = \Lambda^{4-d} \tilde{\lambda}'$ e $\chi_0'^2 = \Lambda^{\frac{d+2}{2}} \tilde{\chi}_0'^2$. Os acoplamentos adimensionais são definidos nesse caso usando-se potências apropriadas do corte ultravioleta. Quando obtivermos as equações de fluxo incluindo as correções (não-lineares) devido à integração dos modos rápidos definiremos os acoplamentos adimensionais de maneira diferente, usando uma potência apropriada do corte infravermelho.

Consideremos agora a contribuição devida aos modos rápidos. Integrando as flutuações Gaussianas relativas aos modos rápidos e fazendo a transformação de Legendre a fim de obter a ação efetiva, obtemos a seguinte expressão para o potencial efetivo numa escala k :

$$U_k(\phi) = V(\phi) + \frac{S_d}{2} \int_k^\Lambda dq q^{d-1} [\ln \left(q^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right) - \ln(q^2 + m^2)], \quad (1.10)$$

onde $V(\phi)$ corresponde ao potencial a nível de árvore e $S_d = 2^{1-d} \pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$.

Da equação acima é trivial obter a equação de evolução para o potencial efetivo em um loop [15]:

$$k \frac{\partial U_k}{\partial k} = -\frac{S_d}{2} k^d \ln \left[1 + \frac{\lambda \phi^2}{2(k^2 + m^2)} \right]. \quad (1.11)$$

Escrevendo U_k exatamente com a mesma forma do potencial clássico, com a diferença de que os acoplamentos agora dependem de k e expandindo o logaritmo na Eq.(1.11) e comparando as respectivas potências de ϕ obtemos as equações de evolução para os acoplamentos adimensionais:

$$k \frac{\partial \tilde{m}^2}{\partial k} = -2\tilde{m}^2 - \frac{S_d \tilde{\lambda}}{1 + \tilde{m}^2}, \quad (1.12)$$

$$k \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial k} = (d-4)\tilde{\lambda} + \frac{3S_d \tilde{\lambda}^2}{2(1 + \tilde{m}^2)^2}. \quad (1.13)$$

Os acoplamentos adimensionais são definidos como $m^2 = k^2 \tilde{m}^2$ e $\lambda = k^{4-d} \tilde{\lambda}$.

Note que o resultado de um loop para as funções beta foi obtido sem o uso explícito de graficos de Feynman. Uma outra observação importante diz respeito a renormalizabilidade. Apesar de termos usado como ponto de partida a ação de uma teoria escalar renormalizável, em nenhum momento fizemos uso de contratermos para cancelar divergências. *As funções beta foram obtidas sem fazer menção explícita aos contratermos.* Isto sugere que uma generalização apropriada do procedimento acima pode tornar factível o estudo do ponto de vista do grupo de renormalização de interações não re-

normalizáveis. A generalização do processo acima corresponde a formulação de uma equação de evolução exata para a ação efetiva e, conseqüentemente, para o potencial efetivo.

1.3 Uma Equação de Evolução Exata para a Ação Efetiva

Nesta seção desenvolveremos uma equação de evolução exata para a ação efetiva. Este tipo de equação de evolução surgiu inicialmente no contexto da física estatística [6, 5]. Porém, em tempos recentes foi introduzida na teoria de campos por Polchinski [11] como uma ferramenta para fornecer demonstrações simplificadas da renormalizabilidade de teorias de campos.

Vamos obter aqui a equação de evolução exata para uma teoria de campos escalar arbitrária com N componentes. O ponto de vista adotado aqui é devido a Wetterich [26]. No entanto, a apresentação que faremos é nova e é mais precisa que a dedução original de Wetterich.

O objeto básico que estudaremos é a ação efetiva em uma escala k , denotada por Γ_k . O funcional Γ_k deverá possuir as seguintes propriedades:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\phi] = \Gamma[\phi] \quad (1.14)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k[\phi] = S[\phi], \quad (1.15)$$

onde $\Gamma[\phi]$ é a ação efetiva quântica usual, envolvendo todas as escalas dos momenta de 0 até um corte ultravioleta Λ e $S[\phi]$ é a ação clássica. Assim, a ação efetiva Γ_k interpola entre a ação clássica e a ação efetiva quântica.

Para obter Γ_k devemos introduzir uma função de corte suave $R_k(q)$ com a seguinte propriedade:

$$\lim_{k \rightarrow 0} R_k(q) = 0. \quad (1.16)$$

A função corte $R_k(q)$ serve para separar os modos lentos dos modos rápidos e a sua definição não é única. Existem muitas funções que desempenham bem o papel de separar suavemente os modos lentos dos rápidos. O importante aqui é o efeito de tal função corte sobre os propagadores. A mesma introduz um corte infravermelho suave nos propagadores.

Considere o funcional gerador das funções de Green definido por

$$Z_k[J, \bar{R}_k] = \int D\chi e^{-S(\chi) - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y R_k(x-y) \chi(x) \chi(y) + \int d^d x J(x) \chi(x)}. \quad (1.17)$$

O funcional gerador das funções de Green conexas é dado por

$$W_k[J, R_k] = \ln Z_k[J, R_k]. \quad (1.18)$$

Temos obviamente que

$$\frac{\delta W_k}{\delta J} = \phi_k, \quad (1.19)$$

$$\frac{\delta^2 W_k}{\delta J(x) \delta J(y)} = G_k(x-y). \quad (1.20)$$

Também

$$\frac{\delta W_k}{\delta R_k} = -\frac{1}{2} G_k. \quad (1.21)$$

Para se obter a ação efetiva fazemos a transformada de Legendre:

$$W_k[J, \Gamma_k] + \Gamma_k[\phi_k] = \int d^d x J(x) \phi_k(x), \quad (1.22)$$

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_k} = J. \quad (1.23)$$

Definiremos também uma outra “ação efetiva” $\tilde{\Gamma}$ como um funcional do propagador exato G_k através da seguinte transformada de Legendre:

$$W_k[J, R_k] + \tilde{\Gamma}_k[G_k] = -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y R_k(x-y) G_k(x-y), \quad (1.24)$$

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta G_k} = -\frac{1}{2} R_k. \quad (1.25)$$

Elucidemos o significado físico da ação efetiva $\tilde{\Gamma}_k$. No limite $k \rightarrow 0$, $R_k \rightarrow 0$ e $\tilde{\Gamma}_k[G_k] \rightarrow \tilde{\Gamma}[G]$ onde G é o propagador exato com todas as escalas de momenta. De acordo com (1.24) $\tilde{\Gamma}[G]$ satisfaz

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta G} = 0. \quad (1.26)$$

Considere agora o funcional $\Phi[G]$ do propagador exato $G(q)$ definido como a soma de todos os diagramas conexos de vácuo, irreduzíveis a duas partículas,

onde as linhas correspondem ao propagador exato. Este funcional é usado em algumas aplicações em teoria de muitos corpos onde é usualmente denominado funcional de Luttinger-Ward [20]. A autoenergia (*self-energy*) exata, $\Sigma[G]$, é então um funcional de G e é obtida através da derivada funcional com respeito a G do funcional Φ :

$$\frac{\delta\Phi}{\delta G} = \Sigma[G]. \quad (1.27)$$

Derivadas funcionais de ordem superior de Φ geram todas as funções de n pontos exatas irreduzíveis a uma partícula. Por exemplo, diferenciando-se funcionalmente $\Sigma[G]$ com respeito a G obtemos a função de quatro pontos exata $\Gamma^{(4)}$ como funcional do propagador exato. A função de dois pontos é definida através da autoenergia como

$$\Gamma^{(2)}(q) = D^{-1}(q) + \Sigma[G], \quad (1.28)$$

onde D é o propagador livre. Lembrando que $G = [\Gamma^{(2)}]^{-1}$, obtemos que a Eq.(1.28) nos dá uma equação autoconsistente exata para G . Assim, se conhecemos a expressão de Σ como função de G podemos, em princípio, obter a expressão de G . Em geral tal solução exata é impossível e devemos usar

algum tipo de aproximação ¹. Podemos, por exemplo, obter $\Sigma[G]$ através de um truncamento do funcional Φ . Se consideramos Φ como sendo dado apenas pelo “diagrama oito”, obtemos a aproximação Hartree-Fock (conhecida na literatura de teoria de campos em temperatura finita como aproximação superdaisy), que sabemos ser exata no limite de N grande [2].

A expressão explícita de $\tilde{\Gamma}$ como funcional do propagador exato é dada por

$$\tilde{\Gamma}[G] = \frac{1}{2}Tr \ln DG^{-1} + \frac{1}{2}Tr D^{-1}G + \frac{1}{2}\Phi + const. \quad (1.29)$$

O traço deve ser compreendido como $\Omega \sum_{a=1}^N \int d^d q / (2\pi)^d$. A expressão acima está estreitamente relacionada à ação efetiva para operadores compostos deduzida por Cornwall, Jackiw e Tomboulis [42]. Note que a relação $\delta\tilde{\Gamma}/\delta G = 0$ dá a equação do movimento para o propagador exato G , isto é, a equação de Dyson.

Das Eqs.(1.22) e (1.24) obtemos

¹Vale a pena mencionar que é possível determinar $\Sigma[G]$ exatamente para alguns modelos. Por exemplo, o modelo de Falikov-Kimball em dimensão infinita foi resolvido exatamente através de uma determinação exata da autoenergia em função do propagador exato [28]

$$\Gamma_k[\phi_k] = \int d^d x J(x) \phi_k(x) + \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y R_k(x-y) \phi_k(x-y) + \tilde{\Gamma}_k[G_k]. \quad (1.30)$$

Note que

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} &= k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} \Big|_{\phi_k} + \int d^d x k \frac{\partial \phi_k}{\partial k} \frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_k} \\ &= k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} \Big|_{\phi_k} + \int d^d x J(x) k \frac{\partial \phi_k}{\partial k}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

De (1.30) obtemos

$$k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} \Big|_{\phi_k} = \frac{1}{2} \text{Tr} G_k k \frac{\partial R_k}{\partial k} + \frac{1}{2} \text{Tr} R_k k \frac{\partial G_k}{\partial k} + k \frac{\partial \tilde{\Gamma}_k}{\partial k}. \quad (1.32)$$

Usando que

$$k \frac{\partial \tilde{\Gamma}_k}{\partial k} = \int d^d x \int d^d y \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta G_k} k \frac{\partial G_k}{\partial k} = -\frac{1}{2} \text{Tr} R_k k \frac{\partial G_k}{\partial k}, \quad (1.33)$$

obtemos

$$k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} \Big|_{\phi_k} = \frac{1}{2} \text{Tr} G_k k \frac{\partial R_k}{\partial k}. \quad (1.34)$$

Notando que pela transformada de Legendre (1.22) $G_k^{-1} = \Gamma_k^{(2)} + R_k$, obtemos finalmente

$$k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} k \frac{\partial R_k}{\partial k} \right]. \quad (1.35)$$

Subentende-se que a derivada parcial com respeito a k é tomada para valores fixos de ϕ_k . A equação acima é exata. Desta equação podemos obter uma equação de evolução exata para o potencial efetivo numa escala k , $U_k(\rho)$ onde $\rho = \phi_a \phi_a / 2$ (índices repetidos implicam uma soma a menos que alguma menção contrária seja feita. Note que estamos supondo uma simetria $O(N)$).

Vamos supor uma ação efetiva da forma

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2} Z_k(\rho, -\partial_\mu \partial_\mu) \partial_\mu \phi_a \partial_\mu \phi_a + U_k(\rho) \right], \quad (1.36)$$

onde Z_k é uma renormalização de função de onda apropriada. A equação de evolução para o potencial efetivo U_k é obtida expandindo-se os campos ϕ_a em torno de uma configuração clássica constante ϕ :

$$\phi_a = \phi \delta_{a1} + \delta \phi_a, \quad (1.37)$$

onde $\delta \phi_a$ corresponde às flutuações em torno da configuração clássica. Como na seção 1.2, manteremos apenas as flutuações Gaussianas. Contudo, na situação presente as flutuações Gaussianas correspondem aos termos mais gerais devido à forma da equação de evolução (1.35). A expansão de Γ_k é dada por

$$\Gamma_k = \Omega U_k(\rho) + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^2} (\Gamma_k^{(1)})_a \delta \phi_a(q) + \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \delta \phi_a(q) (\Gamma_k^{(2)})_{ab}(q, q') \delta \phi_b(-q) + \dots \quad (1.38)$$

onde

$$(\Gamma_k^{(2)})_{ab}(q, q') = [M_{ab}^2 + Z_k(\rho, q^2) q^2 \delta_{ab}] \delta^d(q - q'), \quad (1.39)$$

com a matriz de massa M_{ab}^2 sendo dada por

$$M_{ab}^2 = \frac{1}{2} \frac{\delta^2 U_k}{\delta(\delta \phi_a) \delta(\delta \phi_b)}$$

$$= U'_k(\rho)\delta_{ab} + 2\rho U''_k(\rho)\delta_{a1}\delta_{b1}. \quad (1.40)$$

Os primos denotam derivadas com respeito a ρ . Assim, a equação de evolução exata para o potencial efetivo é dada por

$$k \frac{\partial U_k}{\partial k} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{N-1}{M_0} + \frac{1}{M_1} \right) k \frac{\partial R_k(q)}{\partial k}, \quad (1.41)$$

onde

$$M_0 = Z_k(\rho, q^2)q^2 + R_k(q) + U'_k(\rho) \quad (1.42)$$

$$M_1 = Z_k(\rho, q^2)q^2 + R_k(q) + U'_k(\rho) + 2\rho U''_k(\rho). \quad (1.43)$$

Antes de passarmos a um exemplo de cálculo com as equações de evolução acima, vamos definir a dimensão anômala η . A mesma é dada por

$$\eta = -k \frac{\partial \ln Z_k}{\partial k}. \quad (1.44)$$

A renormalização de função de onda é em geral uma função de ρ e de q^2 . Z_k é obtida a partir de $\Gamma_k^{(2)}$ como sendo o coeficiente de q^2 . Uma equação de evolução exata para Z_k pode ser obtida a partir da equação de evolução

da função de dois pontos $\Gamma_k^{(2)}$. Esta última, por sua vez, é obtida através da derivada funcional segunda com respeito aos campos da equação (1.35). Contudo, usaremos aqui uma aproximação em que a renormalização de função de onda é considerada uniforme.

Daremos mais uma vez um exemplo com uma teoria escalar com uma interação quártica. No contexto das equações de evolução exatas utilizadas nesta seção vale a pena distinguir entre os casos simétrico (sem quebra de simetria) e com quebra de simetria. No caso simétrico vamos assumir que $U_k(\rho)$ admite uma expansão em série de potências de ρ em torno de $\rho = 0$. Já no caso com quebra de simetria assumiremos que $U_k(\rho)$ admite uma expansão em torno de $\rho_0(k) = \omega_k$. Esta última situação é mais interessante no que concerne a aplicação das equações de evolução acima.

Consideremos primeiro o caso simétrico. Podemos então expandir U_k como

$$U_k(\rho) = U_k(0) + U'_k(0)\rho + \frac{U''_k(0)}{2}\rho^2 + \dots \quad (1.45)$$

Vamos definir

$$u_k = U_k(0), \quad (1.46)$$

$$m_k^2 = U'_k(0), \quad (1.47)$$

$$\lambda_k = 3U''_k(0), \quad (1.48)$$

e truncar a expansão de U_k em ρ^2 . Em geral a simetria $O(N)$ faz com que a expansão de U_k admita todas as potências de ρ até o infinito. Nesse caso a equação de evolução (1.41) nos fornece um número infinito de equações diferenciais acopladas para os diferentes acoplamentos $U_k^{(n)}(0)$. Uma solução exata é obviamente impossível. Por este motivo é útil computacionalmente fazer algum tipo de truncamento em U_k de modo que ficamos com um número finito de equações de evolução. Um critério de truncamento muitas vezes empregado é o de manter no potencial apenas os termos que correspondem a acoplamentos relevantes. Porém, em muitas aplicações é conveniente utilizar também os acoplamentos irrelevantes pois estes podem ter implicações físicas importantes em algum regime específico. O critério que utilizamos acima corresponde a tomar os acoplamentos relevantes para $d \leq 4$.

Precisamos agora de uma escolha da função de corte R_k . Usaremos aqui

uma escolha frequentemente empregada na literatura [27, 36]:

$$R_k(q) = Z_k q^2 f_k(q), \quad (1.49)$$

onde

$$f_k(q) = \frac{1}{\exp(q^2/k^2) - 1}. \quad (1.50)$$

É conveniente definir as integrais

$$I_n^d(w) = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{d}{2}} H(x)}{\{x[1 + F(x)] + w\}^n}, \quad (1.51)$$

e

$$J_n^d(w) = \int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{d}{2}} F(x)}{\{x[1 + F(x)] + w\}^n}, \quad (1.52)$$

onde

$$F(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad (1.53)$$

$$H(x) = x e^x [F(x)]^2. \quad (1.54)$$

Definindo os acoplamentos adimensionais \tilde{u}_k , \tilde{m}_k^2 e $\tilde{\lambda}_k$ através das fórmulas

$$u_k = k^d \tilde{u}_k \quad (1.55)$$

$$m_k^2 = Z_k k^2 \tilde{m}_k^2 \quad (1.56)$$

$$\lambda_k = Z_k^2 k^{4-d} \tilde{\lambda}_k, \quad (1.57)$$

obtemos que as equações de evolução para os acoplamentos relevantes são

$$k \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial k} = -d \tilde{u}_k + N S_d [I_1^d(\tilde{m}_k^2) - \eta J_1^d(\tilde{m}_k^2)], \quad (1.58)$$

$$k \frac{\partial \tilde{m}_k^2}{\partial k} = (\eta - 2) \tilde{m}_k^2 - \frac{S_d(N+2) \tilde{\lambda}_k}{12} [I_2^d(\tilde{m}_k^2) - \eta J_2^d(\tilde{m}_k^2)], \quad (1.59)$$

$$k \frac{\partial \tilde{\lambda}_k}{\partial k} = (d - 4 + 2\eta) \tilde{\lambda}_k + \frac{S_d(N+8) \tilde{\lambda}_k^2}{3} [I_3^d(\tilde{m}_k^2) - \eta J_3^d(\tilde{m}_k^2)]. \quad (1.60)$$

Os pontos fixos são determinados completamente a partir das equações acima. Isto implica que não precisamos calcular a dimensão anômala em geral a partir da função de dois pontos, o que é uma tarefa bastante árdua. Basta calcularmos η no ponto fixo, isto é, o expoente crítico da função de correlação. As três funções betas acima igualadas a zero determinam os pontos fixos η^* , \tilde{m}^{*2} e $\tilde{\lambda}^*$. No limite sem massa temos o ponto fixo $\eta^* = 0$ e daí temos, para

$d = 4$,

$$k \frac{\partial \tilde{\lambda}_k}{\partial k} = \frac{(N + 8) \tilde{\lambda}_k^2}{48\pi^2}, \quad (1.61)$$

que corresponde ao resultado perturbativo usual em um loop [3].

Observe que as equações de evolução que obtivemos são equações integro-diferenciais, em contraste com as equações de evolução encontradas usualmente na literatura, que correspondem a equações diferenciais.

Voltemos agora a nossa atenção para o caso com quebra de simetria. Nessa situação devemos expandir o potencial efetivo em torno de um mínimo ω_k . Obviamente temos $U'_k(\omega_k) = 0$ para uma teoria com um comportamento denominado crítico. Esta teoria já foi muito estudada no contexto do presente formalismo por Wetterich e colaboradores [27, 36], incluindo a transição de Kosterlitz-Thouless. Contudo, praticamente nenhuma importância é dada a evolução do acoplamento $U_k(\omega_k) = u_k$, acoplamento este que pode levar a pontos fixos interessantes onde $u_k = 0$.

Antes de obtermos as equações de evolução vamos definir os acoplamentos adimensionais:

$$u_k = k^d \tilde{u}_k \quad (1.62)$$

$$\omega_k = Z_k^{-1} k^{d-2} \tilde{\omega}_k \quad (1.63)$$

$$U_k'' = \lambda_k = Z_k^2 k^{4-d} \tilde{\lambda}_k. \quad (1.64)$$

Assim, o potencial é definido aproximadamente pelo truncamento:

$$U_k(\rho) = u_k + \frac{\lambda_k}{2} (\rho - \omega_k)^2. \quad (1.65)$$

As equações de evolução para os acoplamentos relevantes próximo a $d = 4$ são dadas por

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial k} &= -d \tilde{u}_k - \frac{S_d \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k}{4} [(N-1) I_2^d(0) + 3 I_2^d(2 \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \\ &+ \frac{S_d \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k \eta}{4} [(N-1) J_2^d(0) + 3 J_2^d(2 \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \\ &- \frac{S_d \tilde{\lambda}_k^2 \tilde{\omega}_k^2}{4} [(N-1) I_3^d(0) + 9 I_3^d(2 \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \\ &+ \frac{S_d \tilde{\lambda}_k^2 \tilde{\omega}_k^2 \eta}{4} [(N-1) J_3^d(0) + 9 J_3^d(2 \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \quad (1.66) \\ k \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial k} &= (2 - d - \eta) \tilde{\omega}_k + \frac{S_d}{4} [(N-1) I_2^d(0) + 3 I_2^d(2 \tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \end{aligned}$$

$$- \frac{S_d \eta}{4} [(N-1)J_2^d(0) + 3J_2^d(2\tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{\lambda}_k}{\partial k} &= (d-4+2\eta)\tilde{\lambda}_k + \frac{S_d \tilde{\lambda}_k^2}{2} [(N-1)I_3^d(0) + 9I_3^d(2\tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)] \\ &- \frac{S_d \eta \tilde{\lambda}_k^2}{2} [(N-1)J_3^d(0) + 9J_3^d(2\tilde{\lambda}_k \tilde{\omega}_k)]. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Não discutiremos aqui a estrutura de pontos fixos e soluções numéricas das equações acima pois estes resultados encontram-se disponíveis na literatura [27, 36]. No entanto, gostaríamos chamar a atenção para o fato de que nas equações acima a posição do mínimo do potencial evolui, em contraste com o caso simétrico onde é a massa que evolui.

1.4 Equações de Evolução para a Teoria Tricrítica

As equações que exibimos na seção anterior descrevem a dinâmica dos acoplamentos consistente com o tipo de truncamento que utilizamos para o potencial efetivo. A teoria descrita acima se refere a um fenômeno crítico, ou seja, temos que $U'_k(\omega_k) = 0$. No entanto, podemos considerar a evolução de uma teoria tricrítica, que no presente contexto pode ser definida através da condição $U'_k(\omega_k) = U''_k(\omega_k) = 0$ e obter as equações de evolução correspondentes.

Definindo o acoplamento $U_k'''(\omega_k) = g_k = Z_k^3 k^{6-2d} \tilde{g}_k$ onde \tilde{g}_k é o acoplamento adimensional correspondente, obtemos que as equações de evolução para a teoria tricrítica são dadas por

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial k} &= -d\tilde{u}_k + \frac{S_d N}{4} [I_1^d - I_2^d - \eta(J_1^d - J_2^d)] + \frac{S_d N}{4} \tilde{g}_k \tilde{\omega}_k^2 (I_2^d - \eta J_2^d) \\ &+ S_d \tilde{\omega}_k^4 \tilde{g}_k^2 [I_2^d - I_3^d - \eta(J_2^d - J_3^d)], \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{\omega}_k}{\partial k} &= (2 - d - \eta) \tilde{\omega}_k + \frac{S_d N}{2} (I_2^d - \eta J_2^d) \\ &- 2S_d \tilde{\omega}_k^2 \tilde{g}_k (I_3^d - \eta J_3^d), \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{g}_k}{\partial k} &= (2d - 6 + 3\eta) \tilde{g}_k + 15S_d \tilde{\omega}_k \tilde{g}_k^2 (I_3^d - \eta J_3^d) \\ &- 12S_d \tilde{\omega}_k^3 \tilde{g}_k^3 (I_4^d - \eta J_4^d), \end{aligned} \quad (1.71)$$

onde por simplicidade denotamos $I_n^d(0) = I_n^d$ e $J_n^d(0) = J_n^d$. Vale observar que $I_{n+1}^d = J_n^d$.

O resultado que obtido acima difere consideravelmente daquele encontrado usando a teoria de perturbação usual ou mesmo de expansões não-perturbativas como a expansão $1/N$ [37, 38]. Em geral existem muitos pontos fixos para as equações de evolução (1.69,1.70,1.71). No entanto, só alguns possuem significado físico, a maior parte é inacessível. Por exemplo, existe um ponto fixo infravermelho da forma

$$\tilde{\omega}_k^* = \tilde{g}_k^* = 0, \quad (1.72)$$

$$\tilde{u}_k^* = \frac{S_d}{4d} [I_1^d - I_2^d - \eta^*(J_1^d - J_2^d)], \quad (1.73)$$

$$\eta^* = \frac{I_2^d}{J_2^d}. \quad (1.74)$$

O ponto fixo η^* corresponde ao expoente da função de correlação. Para $d = 3$ temos que $\eta^* \approx 1.71$ enquanto que para $d = 2$ obtemos $\eta^* = 1/\ln 2$.

É um fato bem conhecido que a expansão $1/N$ dá um ponto fixo ultravioleta estável fora da origem para a função beta do acoplamento \tilde{g}_k em $d = 3$. Este resultado corresponde a um caso particular das nossas equações não-perturbativas acima. De fato, em um regime em que $\eta = 0$ e $\tilde{\omega}_k = \text{const}$, obtemos que para $d = 3$ a Eq.(1.71) possui um ponto fixo ultravioleta estável.

Portanto, o que temos aqui corresponde a uma situação muito mais geral do que a que é usualmente considerada na literatura porque em geral os coeficientes de \tilde{g}_k^2 e \tilde{g}_k^3 são variáveis e proporcionais ω_k e $\tilde{\omega}_k^3$, respectivamente, cuja evolução é governada pela Eq.(1.70).

Precisamente, em $d = 3$ temos o seguinte ponto fixo:

$$\eta^* = 0, \quad (1.75)$$

$$\tilde{u}_k^* = \frac{1}{2d\pi^2} \left\{ \frac{N}{4} [I_1^3 - I_2^3] + \frac{N}{4} I_2^3 \tilde{g}_k^* \tilde{\omega}_k^{*2} + \tilde{\omega}_k^{*4} \tilde{g}_k^{*2} [I_2^3 - I_3^3] \right\}, \quad (1.76)$$

$$\tilde{\omega}_k^* = \frac{1}{4\pi^2} \left[N I_2^3 - \frac{5(I_3^3)^2}{I_4^3} \right], \quad (1.77)$$

$$\tilde{g}_k^* = \frac{20\pi^4 I_3^3}{I_4^3 \left[N I_2^3 - \frac{5(I_3^3)^2}{I_4^3} \right]^2}. \quad (1.78)$$

As integrais que aparecem nas expressões acima podem ser calculadas exatamente. Especialmente importante são as integrais I_2^3 , I_3^3 e I_4^3 . Obtemos que $I_2^3 = \sqrt{\pi}/2$, $I_3^3 = \sqrt{\pi}(1 - \sqrt{\pi}/2)$ e $I_4^3 = 2\sqrt{\pi}(2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3})$. O ponto fixo aci-

ma corresponde a um ponto fixo ultravioleta estável acessível fisicamente somente quando $N > 4$, ou seja, estamos estabelecendo não-perturbativamente para valores finitos de N a existência de um ponto fixo ultravioleta estável na teoria tricrítica. Este resultado é suposto verdadeiro no limite de N grande [37, 38]. De fato, Pisarski argumenta que este resultado é possivelmente verdadeiro para $N > 1000$. Estamos estabelecendo o mesmo resultado para $N > 4$! Para $N < 4$ o ponto fixo acima não é acessível fisicamente porque $\tilde{\omega}_k^* < 0$ nesse caso (lembre-se que ω_k é o quadrado do campo na posição do mínimo e, como tal, deve ser positivo).

Os resultados obtidos nessa seção podem ser generalizados para teorias multicríticas. Por exemplo, uma teoria p -crítica pode ser obtida considerando-se $U_k^{(n)}(\omega_k) = 0$ para $n = 1, \dots, p - 1$. Desse modo podemos obter sistematicamente equações de evolução não-perturbativas para diferentes teorias multicríticas.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Quântica

Escalar e Flutuações Críticas

em Supercondutores

Topologicamente Massivos

2.1 Introdução

A eletrodinâmica quântica escalar (EDQE) constitui o chamado modelo de Higgs abeliano [30] e também pode ser pensada como uma teoria de Ginzburg-

Landau para a supercondutividade [52]. O mecanismo de Higgs (nesse caso, Abelian) é uma forma de introduzir a quebra espontânea de simetria. Este mecanismo apareceu inicialmente no contexto da teoria da supercondutividade onde o conceito de quebra espontânea de uma simetria de calibre local foi introduzido inicialmente [67, 68, 69]. Já na física de partículas este fenômeno está associado ao modelo padrão. De acordo com o modelo padrão, o mecanismo de Higgs é responsável pelas massas dos bosons vetoriais da interação fraca [16], o W^\pm e o Z^0 .

No modelo de Higgs um parâmetro de massa imaginário é introduzido no setor escalar, o qual também possui uma auto-interação e está minimamente acoplado a um campo de calibre. Nesse caso, a quebra de simetria se manifesta já a nível de árvore. Por outro lado, mesmo com massa nula podemos ter quebra espontânea de simetria. Nesse caso a quebra de simetria é induzida pelas correções radiativas. Este é o mecanismo de Coleman-Weinberg [57]. Este procedimento é mais natural no sentido que não precisamos introduzir a mão uma massa imaginária para o campo escalar. No caso Abelian este mecanismo está associado à transições de fase de primeira ordem induzida por flutuações em supercondutores e em cristais líquidos na fase esméctica-A [59]. No caso não-Abelian o mesmo foi exaustivamente estudado no contexto das

teorias de grande unificação e cosmologia inflacionária [70, 72, 73, 74, 75].

Neste capítulo discutiremos a EDQE no contexto do mecanismo de Coleman-Weinberg e mostraremos que o potencial de Coleman-Weinberg pode ser obtido naturalmente fazendo-se uma aproximação tipo campo médio que, no contexto dos métodos funcionais, corresponde ao cálculo de ponto de sela na integral funcional [53]. Desenvolveremos estes cálculos para a EDQE em $d = 4$ na seção seguinte. Contrariamente ao procedimento usualmente empregado na literatura, acharemos mais conveniente trabalhar no calibre unitário nas próximas duas seções.

Na seção 2.3 utilizaremos a lição da seção 2.2 para estudar a EDQE em $d = 3$ com um termo de Chern-Simons. Nesta situação demonstraremos que existe uma instabilidade para certos valores dos acoplamentos escalares [54].

Finalmente, na seção 2.4 estudaremos a EDQE de Maxwell-Chern-Simons associada à teoria fenomenológica da supercondutividade, a teoria de Ginzburg-Landau. Nessa seção usaremos técnicas de grupo de renormalização na versão Wilson perturbativa, método este discutido brevemente na última seção do capítulo anterior no caso de teorias escalares. Obteremos o resultado interessante que o termo de Chern-Simons estabiliza as flutuações do parâmetro de ordem, tornando os pontos fixos supercondutores acessíveis para certos

valores da massa topológica [55].

2.2 EDQE em $d = 4$

Considere a ação Euclideana para a EDQE em $d = 4$:

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + m^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{3!} (\phi^\dagger \phi)^2 \right], \quad (2.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

A amplitude vácuo-vácuo é dada pela integral funcional:

$$Z = \int \prod_{x\mu} [d\phi^\dagger(x) d\phi(x) dA_\mu(x)] \delta[\partial_\mu A_\mu] \det(-\Delta) e^{-S}. \quad (2.2)$$

Note na medida funcional acima o funcional delta $\delta[\partial_\mu A_\mu]$ impondo a condição de calibre de Lorentz. O fator $\det(-\Delta)$ na medida funcional é o determinante de Faddeev-Popov.

Será conveniente para os nossos propósitos parametrizar a teoria no calibre unitário, isto é, redefiniremos os campos como

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho e^{i\theta}, \quad (2.3)$$

$$B_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \quad (2.4)$$

Nesse caso a ação torna-se

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial_\mu\rho + \frac{1}{2}e^2\rho^2 B_\mu B_\mu + \frac{1}{2}m^2\rho^2 + \frac{\lambda}{4!}\rho^4 \right], \quad (2.5)$$

onde definimos $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Em termos dessa nova parametrização, a integral funcional é escrita como

$$Z = \int \prod_{x^\mu} [d\rho(x)\rho(x)dB_\mu(x)d\theta(x)]\delta[\partial_\mu B_\mu - \frac{1}{e}\Delta\theta] \det(-\Delta)e^{-S}. \quad (2.6)$$

Como a ação é independente do campo $\theta(x)$, podemos integrar imediatamente a arbitrariedade de calibre:

$$\int [d\theta(x)]\delta[\partial_\mu B_\mu - \frac{1}{e}\Delta\theta] = \frac{\det(e)}{\det(-\Delta)} = \frac{\prod_x e}{\det(-\Delta)}. \quad (2.7)$$

Vemos facilmente que o determinante de Faddeev-Popov é cancelado da medida funcional.

Podemos integrar exatamente o campo vetorial B_μ , uma vez que a integração é simplesmente Gaussiana nesses campos. Assim,

$$Z = \int \prod_x [d\rho(x)] e^{-S_{eff}[\rho]} \quad (2.8)$$

onde a ação efetiva $S_{eff}[\rho]$ (não confundir com a ação efetiva quântica utilizada no capítulo 1) é dada por

$$\begin{aligned} S_{eff}[\rho] = & \frac{1}{2} \ln \det[\delta_{\mu\nu}(-\Delta + e^2 \rho^2) + \partial_\mu \partial_\nu] - \frac{1}{2} \delta^4(0) \int d^4x \ln e^2 \rho^2 \\ & + \int d^4x \left[\frac{1}{2} \rho(-\Delta + m^2)\rho + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

É importante enfatizar que a expressão acima é exata. O fator $-(1/2)\delta^4(0)\int d^4x \ln e^2 \rho^2$ surge devido à exponenciação de $\prod_x e\rho(x)$ da medida funcional. A equação do movimento é dada por

$$\frac{\delta S_{eff}[\rho_c]}{\delta \rho(x)} = 0. \quad (2.10)$$

Considerando-se uma solução $\rho_c(x) = \langle \rho \rangle = const.$, a diferenciação fun-

cional acima torna-se uma diferenciação ordinária e daí obtemos a seguinte equação:

$$\int d^4x \left(m^2 \langle \rho \rangle + \frac{\lambda}{3!} \langle \rho \rangle^3 - \frac{\delta^4(0)}{\langle \rho \rangle} \right) + e^2 \langle \rho \rangle \text{Tr} D_{\mu\nu}(x - x') = 0, \quad (2.11)$$

onde $D_{\mu\nu}(x - x')$ é o propagador do campo vetorial massivo com massa $e^2 \langle \rho \rangle^2$.

Temos que

$$\text{Tr} D_{\mu\nu}(x - x') = \int d^4x \left[3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + e^2 \langle \rho \rangle^2} + \frac{\delta^4(0)}{e^2 \langle \rho \rangle^2} \right]. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11) obtemos

$$\int d^4x \langle \rho \rangle \left(m^2 + \frac{\lambda}{6} \langle \rho \rangle^2 + 3e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + e^2 \langle \rho \rangle^2} \right) = 0. \quad (2.13)$$

Note que o fator divergente $\delta^4(0)$ foi cancelado. A Eq. (2.13) nos dá duas soluções possíveis:

$$\langle \rho \rangle = 0, \quad (2.14)$$

e

$$\langle \rho \rangle^2 = -\frac{6m^2}{\lambda} - \frac{18e^2}{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + e^2 \langle \rho \rangle^2}. \quad (2.15)$$

Estamos interessados na solução com $\langle \rho \rangle \neq 0$ que corresponde a uma quebra de simetria.

Considerando-se uma configuração de campo constante $\bar{\rho}$ obtemos a seguinte expressão para o potencial efetivo:

$$V(\bar{\rho}) = \frac{3}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + e^2 \bar{\rho}^2) + \frac{1}{2} m^2 \bar{\rho}^2 + \frac{\lambda}{24} \bar{\rho}^4. \quad (2.16)$$

Note novamente o cancelamento do fator divergente $\delta^4(0)$.

Calculando a integral em (2.15) usando um corte ultravioleta Λ obtemos

$$\langle \rho \rangle^2 \left(\lambda + \frac{9e^4}{8\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) = -6m^2 - \frac{9e^2}{8\pi^2} \Lambda^2 - \frac{9e^4}{8\pi^2} \langle \rho \rangle^2 \ln \frac{e^2 \langle \rho \rangle^2}{\mu^2}, \quad (2.17)$$

onde μ é uma escala de renormalização arbitrária. Da Eq. (2.17) definimos

as quantidades renormalizadas:

$$m_R^2 = m^2 + \frac{3e^2}{16\pi^2}\Lambda^2, \quad (2.18)$$

$$\lambda_R = \lambda + \frac{9e^4}{8\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}. \quad (2.19)$$

A Eq.(2.17) torna-se

$$\lambda_R \langle \rho \rangle^2 = -6m_R^2 - \frac{9e^4}{8\pi^2} \langle \rho \rangle^2 \ln \frac{e^2 \langle \rho \rangle^2}{\mu^2}. \quad (2.20)$$

De maneira análoga obtemos

$$V(\bar{\rho}) = \frac{m_R^2}{2} \bar{\rho}^2 + \frac{\lambda_R}{24} \bar{\rho}^4 + \frac{3e^4}{64\pi^2} \bar{\rho}^4 \ln \frac{e^2 \bar{\rho}^2}{\mu^2} - \frac{3e^4}{128\pi^2} \bar{\rho}^4. \quad (2.21)$$

Resolvendo a Eq.(2.20) para λ_R e substituindo o resultado na Eq.(2.21), obtemos

$$V(\bar{\rho}) = \frac{m_R^2}{2} \bar{\rho}^2 - \frac{m_R^2}{4 \langle \rho \rangle^2} \bar{\rho}^4 + \frac{3e^4}{64\pi^2} \bar{\rho}^4 \left(\ln \frac{\bar{\rho}^2}{\langle \rho \rangle^2} - \frac{1}{2} \right). \quad (2.22)$$

Quando $m_R^2 = 0$ obtemos justamente o potencial de Coleman-Weinberg [57].

Note que esta condição de massa zero aplicada na equação de gap, Eq.(2.20), implica a seguinte equação para λ_R :

$$\lambda_R = -\frac{9e^4}{8\pi^2} \ln \frac{e^2 \langle \rho \rangle^2}{\mu^2}. \quad (2.23)$$

Uma equação muito semelhante para λ_R foi também obtida na referência [76]. Observe que obtemos a Eq.(2.22) sem calcular gráficos de Feynman. Na expansão em loops usual assume-se que λ_R é da mesma ordem que e^4 e daí termos proporcionais a λ_R^2 são desprezados. Esta hipótese não é necessária aqui. O potencial de Coleman-Weinberg é obtido naturalmente. A aproximação feita aqui é similar a aproximações de campo médio utilizadas em física estatística e na física da matéria condensada. Observe que os efeitos das flutuações do campo escalar não foram considerados, o que é uma característica típica das teorias de campo médio. O tipo de campo médio que empregamos aqui é exatamente da mesma forma daquele empregado por Halperin, Lubensky e Ma [58], no contexto da teoria da supercondutividade, isto é, EDQE em $d = 3$.

Podemos calcular a função beta a nível de campo médio. A partir da Eq.(2.23) podemos calcular imediatamente a função beta:

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{9e^4}{4\pi^2}, \quad (2.24)$$

ou seja, a função beta é, nessa aproximação, independente de λ_R . A função beta acima é diferente da função beta em um loop devido à ausência de dois termos. Isto é devido ao fato de que o potencial de Coleman-Weinberg não corresponde ao resultado de um loop completo. Alguns termos são desprezados frente à hipótese plausível de que $\lambda_R \sim e^4$. No artigo original de Coleman e Weinberg eles não utilizam este argumento no cálculo da função beta e daí, a função beta obtida por eles corresponde ao resultado de um loop completo, incluindo as flutuações do campo escalar. A função beta, Eq.(2.24), é consistente com o potencial de Coleman-Weinberg. O resultado completo em um loop é dado por

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{5}{6} \lambda_R^2 - 3e^2 \lambda_R + 9e^4 \right), \quad (2.25)$$

com uma dependência explícita em λ_R .

Analizemos as consequências da Eq.(2.22) com respeito à ordem da transição de fase. Claramente, a transição é de primeira ordem. Quando variamos o parâmetro de massa obtemos uma sequência de eventos característicos

de uma transição de primeira ordem como, por exemplo, o surgimento de mínimos locais fora da origem sem que a origem seja um máximo local, isto é, a origem continua sendo um mínimo local. Porém, para $m_R^2 = 0$ a origem torna-se um máximo local. O valor crítico do parâmetro de massa para que a transição de primeira ordem ocorra é dado por

$$m_{Rc}^2 = \frac{3e^4}{32\pi^2} \langle \rho \rangle^2 \quad (2.26)$$

Para $m_R^2 < m_{Rc}^2$, $V(0)$ torna-se um mínimo local mas não um mínimo absoluto, isto é, não corresponde ao verdadeiro estado fundamental. O verdadeiro vácuo é dado por $V(\langle \rho \rangle)$. É importante observar que o valor crítico do parâmetro de massa depende dos parâmetros disponíveis da teoria, isto é, e^2 e $\langle \rho \rangle$. Note que continuamos com três parâmetros como antes, isto é, antes tínhamos como parâmetros m_R^2 , λ_R e e^2 , dois dos quais adimensionais. Contudo, λ_R foi eliminado das nossas expressões em favor do parâmetro $\langle \rho \rangle$, que é dimensional. Este é o fenômeno da transmutação dimensional, que foi introduzido por Coleman e Weinberg [57].

2.3 EDQE de Maxwell-Chern-Simons

Na seção anterior vimos como os resultados de Coleman e Weinberg para a EDQE em $d = 4$ podem ser obtidos naturalmente no contexto de uma teoria de campo médio. Aqui faremos exatamente a mesma coisa em $d = 3$. Além disso, acrescentaremos à ação um termo de Chern-Simons [77].

Na seção anterior vimos que uma das consequências da nossa teoria de campo médio foi a transmutação dimensional. Contudo, para que tal efeito possa ocorrer é necessário a presença de pelo menos um parâmetro adimensional. Isto implica que devemos trabalhar com a ação mais geral renormalizável. Assim, no caso presente devemos incluir mais um termo de auto-interação para o campo escalar a saber, o termo $(\phi^\dagger\phi)^3$. Escolheremos trabalhar no calibre unitário, a exemplo do que foi feito na seção anterior.

Assim, após uma integração imediata do campo vetorial obtemos a seguinte ação efetiva:

$$S_{eff}^{CS}[\rho] = \frac{1}{2} \ln \det[\delta_{\mu\nu}(-\Delta + e^2\rho^2) + \partial_\mu\partial_\nu + i\theta\epsilon_{\mu\lambda\nu}\partial_\lambda] - \delta^3(0) \int d^3x \ln(e\rho)$$

$$+ \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho (-\Delta + m^2) \rho + \frac{\lambda}{4!} \rho^4 + \frac{\eta}{6!} \rho^6 \right]. \quad (2.27)$$

Na equação acima, θ é a massa de Chern-Simons e η é o acoplamento adimensional ¹.

Como antes, escolheremos uma solução de ponto de sela constante. Isto nos leva à seguinte equação de gap:

$$\begin{aligned} & e^2 \left(1 + \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2 \langle \rho \rangle^2}} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + M_+^2(\langle \rho \rangle^2)} \\ & + e^2 \left(1 - \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2 \langle \rho \rangle^2}} \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + M_-^2(\langle \rho \rangle^2)} \\ & + m^2 + \frac{\lambda}{6} \langle \rho \rangle^2 + \frac{\eta}{120} \langle \rho \rangle^4 = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde M_{\pm}^2 é definido por

$$M_{\pm}^2(\langle \rho \rangle^2) = e^2 \langle \rho \rangle^2 + \frac{\theta^2}{2} \pm \frac{|\theta|}{2} \sqrt{\theta^2 + 4e^2 \langle \rho \rangle^2}. \quad (2.29)$$

Usando um corte ultravioleta Λ , é imediato calcular as integrais em (2.28).

Como estamos interessados na quebra de simetria induzida pelas flutuações

¹Note que a massa topológica aqui possui dimensão de massa em consequência da presença do termo cinético para o campo de calibre na ação.

do campo de calibre, vamos assumir que a massa renormalizada é nula desde o princípio, em oposição ao que foi feito na seção anterior onde mantivemos a massa o tempo todo. Na seção seguinte, no contexto da teoria de Ginzburg-Landau topológica estudaremos a mesma teoria com a massa, porém, sem o acoplamento adimensional. A equação de gap torna-se

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^2}{4\pi} |M_+(\langle \rho \rangle^2)| \left(1 + \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2 \langle \rho \rangle^2}} \right) \\
& -\frac{e^2}{4\pi} |M_-(\langle \rho \rangle^2)| \left(1 - \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2 \langle \rho \rangle^2}} \right) \\
& + \frac{\lambda}{6} \langle \rho \rangle^2 + \frac{\eta}{120} \langle \rho \rangle^4 = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

O potencial efetivo é obtido a partir da Eq.(2.27) e é dado por

$$V(\bar{\rho}) = -\frac{1}{12\pi} [|M_+(\bar{\rho}^2)|^3 + |M_-(\bar{\rho}^2)|^3] + \frac{\lambda}{4!} \bar{\rho}^4 + \frac{\eta}{6!} \bar{\rho}^6. \tag{2.31}$$

Observe que, em contraste aos cálculos executados na seção anterior, nenhuma escala de renormalização arbitrária aparece aqui. Isto é uma característica especial de $d = 3$.

Consideremos a solução da equação de gap associada ao mínimo de quebra de simetria $\langle \rho \rangle_{min} = \sigma$. Resolvendo a Eq.(2.30) para η e substituindo o

resultado em (2.31) obtemos

$$\begin{aligned}
V(\bar{\rho}) = & -\frac{1}{12\pi} [|M_+(\bar{\rho}^2)|^3 + |M_-(\bar{\rho}^2)|^3] + \frac{\lambda}{24} \bar{\rho}^4 \\
& + \frac{1}{12\sigma^2} \left\{ \frac{e^2}{2\pi\sigma^2} \left[|M_+(\sigma^2)| \left(1 + \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2\sigma^2}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + |M_-(\sigma^2)| \left(1 - \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2\sigma^2}} \right) \right] - \frac{\lambda}{3} \right\} \bar{\rho}^6. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Note a ocorrência da transmutação dimensional. Tínhamos antes quatro parâmetros, θ , e^2 , λ e η , com o parâmetro η sendo adimensional. Agora continuamos com o mesmo número de parâmetros. Porém, o parâmetro η desapareceu dando lugar ao parâmetro dimensional σ^2 .

O potencial efetivo acima corresponde a uma fase com simetria quebrada com um máximo local na origem com dois mínimos absolutos degenerados em $\pm\sigma$. Se $\lambda > 0$, a condição de estabilidade do vácuo $\lambda \leq \lambda_c$ deve se verificar, onde o parâmetro crítico λ_c é dado por

$$\begin{aligned}
\lambda_c = & \frac{3e^2}{2\pi\sigma^2} \left[|M_+(\sigma^2)| \left(1 + \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2\sigma^2}} \right) \right. \\
& \left. + |M_-(\sigma^2)| \left(1 - \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + 4e^2\sigma^2}} \right) \right]. \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Se $\lambda > \lambda_c$ o potencial é ilimitado inferiormente e o vácuo é instável. Contudo, se $\lambda < 0$, nenhuma condição de estabilidade é necessária uma vez que o potencial será sempre limitado inferiormente. Uma instabilidade semelhante foi considerada não-perturbativamente na referência [78] no contexto de uma teoria ϕ_3^6 com simetria $O(N)$. O limite $\lambda = \lambda_c$ corresponde a uma EDQE de Maxwell-Chern-Simons sem o termo $(\phi^\dagger\phi)^3$. Esta situação com $\theta = 0$ já foi estudada na referência [79] onde argumenta-se que a quebra de simetria obtida pelo resultado de um loop é espúrio. Os cálculos nesta referência foram também executados no ponto crítico $m_R^2 = 0$. Neste caso as correções radiativas falharam em induzir a quebra de simetria por causa da ausência do termo $(\phi^\dagger\phi)^3$ e, portanto, de um acoplamento adimensional.

Uma outra característica do potencial efetivo dado pela Eq.(2.32) é que $V(0) = 0$ somente se $\theta = 0$. Se $\theta \neq 0$ temos que $V(0) < 0$. O campo escalar ρ possui o mesmo valor esperado de vácuo para todos os valores de θ . Contudo, a energia do vácuo é menor se $\theta \neq 0$. Isto significa que o termo topológico causa uma maior estabilidade para a teoria.

Comparemos nossos resultados com o cálculo em um loop tradicional. O potencial efetivo em um loop é dado por

$$\begin{aligned}
V(\bar{\rho}) &= -\frac{1}{12\pi} [|M_+|^3(\bar{\rho}^2) + |M_-|^3(\bar{\rho}^2)] \\
&\quad -\frac{1}{12\pi} \left(\frac{\lambda}{2}\bar{\rho}^2 + \frac{\eta}{24}\bar{\rho}^4 \right)^{3/2} + \frac{\lambda}{4!}\bar{\rho}^4 + \frac{\eta}{6!}\bar{\rho}^6. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Nesse caso, η é um parâmetro independente, isto é, não é função dos outros parâmetros da teoria. Quando $\eta = \theta = 0$, a Eq.(2.34) concorda com a referência [79]. A situação na qual $\eta = 0$ mas $\theta \neq 0$ corresponde, no caso da Eq.(2.32) a $\lambda = \lambda_c$. Porém, quando $\eta = 0$ o resultado de um loop possui um termo que está ausente na Eq.(2.32), um termo proporcional a $\lambda^{3/2}|\bar{\rho}|^3$.

2.4 Flutuações Críticas em Supercondutores

Topologicamente Massivos

Nesta seção desenvolveremos a EDQE de Maxwell-Chern-Simons no contexto da teoria fenomenológica da supercondutividade, isto é, o modelo de Ginzburg-Landau (GL). A teoria GL da supercondutividade [52] descreve muito bem a fenomenologia dos supercondutores convencionais. No entanto, acredita-se que uma teoria fenomenológica similar se aplica aos supercondu-

tores a alta temperatura [49]. Esta crença se apoia na evidência experimental de que o parâmetro de ordem é o mesmo em qualquer situação [56]. Outro fato importante é que a teoria GL é, em princípio, mais facilmente testável para os supercondutores de alta temperatura. De fato, a região crítica dos mesmos é consideravelmente maior do que a dos supercondutores convencionais. Contudo, a teoria GL despreza as flutuações do parâmetro de ordem (o campo escalar), que é muito importante para os supercondutores de alta temperatura. Conseqüentemente, os expoentes críticos diferirão daqueles dados pela teoria GL [60]. Teoricamente, as flutuações podem ser levadas em conta através da utilização das técnicas de grupo de renormalização para estudar a teoria na vizinhança do ponto crítico [58, 59, 80, 81, 82]. Outro caminho possível para atingir esse objetivo consiste em se calcular correções para o funcional de energia livre em uma forma sistemática executando-se uma expansão em loops [83].

Na seção presente utilizaremos uma notação diferente das seções precedentes com o objetivo de entrar em conformidade com a notação empregada usualmente na literatura que lida com teorias fenomenológicas da supercondutividade. Assim, ao invés de ação, falaremos “funcional energia livre”.

Nosso ponto de partida é o seguinte funcional de energia livre:

$$\begin{aligned}
F[\psi, \vec{A}] &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} |(\nabla - iq\vec{A})\psi|^2 + \frac{r_0}{2} |\psi|^2 + \frac{u_0}{4!} |\psi|^4 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + i \frac{\theta}{2} \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{A}) \right], \tag{2.35}
\end{aligned}$$

onde $r_0 = a_0(T - T_0)/T_0$ e $\theta > 0$ é a massa topológica. Note que nesta seção não estamos considerando acoplamentos de ordem maior que quatro, contrastando com o que fizemos na seção anterior. A razão para isto é simplesmente para seguir o padrão usual dos modelos GL.

A função partição é dada por

$$Z = \int D\vec{A} D\psi^\dagger D\psi \exp(-F[\psi, \vec{A}]). \tag{2.36}$$

Como nas seções precedentes, integraremos exatamente os campos vetoriais. Para um valor uniforme do parâmetro de ordem, isto define o seguinte funcional densidade de energia livre:

$$f_{eff}[\psi] = -\frac{1}{12\pi} [M_+^3(|\psi|^2) + M_-^3(|\psi|^2)] + \frac{r}{2} |\psi|^2 + \frac{u_0}{4!} |\psi|^4, \tag{2.37}$$

com as funções M_{\pm} definidas como na seção anterior. O parâmetro r_0 foi renormalizado para $r = a(T - T_c)/T_c$. Quando $\theta = 0$, a Eq.(2.37) se reduz ao funcional efetivo obtido no artigo clássico de Halperin, Lubensky e Ma (a ser referido de agora em diante como HLM) [58]. A temperatura crítica T_c não depende de θ e é a mesma que a do artigo de HLM.

O inverso da suscetibilidade é dada para temperaturas acima da temperatura crítica por

$$\chi^{-1} = \frac{\partial^2 f_{eff}}{\partial |\psi|^2} \Big|_{|\psi|=0}. \quad (2.38)$$

A temperatura crítica é definida como sendo a temperatura pela qual a suscetibilidade diverge e, portanto, obtemos uma temperatura crítica dependente de θ :

$$\tilde{T}_c = T_c \left(1 + \frac{q^2 \theta}{2\pi a} \right). \quad (2.39)$$

A suscetibilidade possui um comportamento crítico com expoente $\gamma = 1$ que é o valor de campo médio.

Minimizando funcional de energia livre efetivo com respeito a $|\psi|^2$ e denotando por σ o valor correspondente de $|\psi|$ que minimiza f_{eff} , obtemos a

expressão para o parâmetro de ordem em campo médio:

$$\sigma = \sqrt{\frac{6\tilde{a}}{u_0} \left(1 - \frac{T}{\tilde{T}_c}\right)^{1/2}}, \quad (2.40)$$

onde

$$\tilde{a} = a + \frac{q^2\theta}{2\pi}. \quad (2.41)$$

Portanto, os expoentes críticos a nível de campo médio são os mesmos que no artigo HLM como era de se esperar. Em particular, os resultados acima implicam que $\beta = \nu = 1/2$. Contudo, a temperatura crítica foi aumentada por um fator $1 + q^2\theta/2\pi^2 a$ com respeito a temperatura crítica de campo médio de HLM. A teoria de campo médio de HLM renormaliza desprezivelmente a temperatura crítica enquanto na situação presente isto não é necessariamente verdadeiro porque podemos ter, em princípio, valores arbitrários de θ os quais podem aumentar consideravelmente a temperatura crítica da transição de fase supercondutora.

Até agora não levamos em conta as flutuações do parâmetro de ordem e o caráter de campo médio do modelo foi preservado. Assim, vamos investigar os efeitos das flutuações críticas. Estas são obtidas em ordem mais baixa

calculando-se a correção de um loop originárias do parâmetro de ordem. A densidade de energia livre incluindo essas correções é dada por

$$f_{eff}^{1-loop} = \frac{r_0}{2} |\psi|^2 + \frac{u_0}{4!} |\psi|^4 + \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^2 [\ln(p^2 + M_+^2(|\psi|^2)) + \ln(p^2 + M_-^2(|\psi|^2)) + \ln(p^2 + r_0 + u_0|\psi|^2/2) - 3 \ln(p^2)] \right\}, \quad (2.42)$$

através da qual obtemos a correção correspondente para o inverso da suscetibilidade para $T > T'_c, T'_c$ sendo a nova temperatura crítica:

$$\chi_{1-loop}^{-1} = \frac{a}{T_c} (T - \tilde{T}_c) + \frac{u_0}{4\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^2}{p^2 + r'}. \quad (2.43)$$

Na equação acima trocamos r_0 por $r' = \alpha(T - T'_c) = \chi_{1-loop}^{-1}$. O erro envolvido nessa substituição está além de um loop. A temperatura crítica é

$$T'_c(\theta) = \tilde{T}_c(\theta) - \frac{u_0 T_c \Lambda}{4\pi^2 a}. \quad (2.44)$$

Assim, como é usual, as flutuações críticas produzem o efeito de diminuir a temperatura crítica. Contudo, $T'_c(0) < T'_c(\theta)$ e portanto, o termo topológico aumenta o grau de ordem com respeito ao modelo GL usual. Este efeito é

melhor elucidado se usamos a Eq.(?) para reescrever (?) como

$$T'_c(\theta) = T_c + \frac{\Lambda T_c}{2\pi a} \left(q^2 \bar{\theta} - \frac{u_0}{2} \right), \quad (2.45)$$

onde escolhemos medir θ em unidades de Λ , isto é, $\theta = \Lambda \bar{\theta}$. Da Eq.(2.45) vemos que o efeito das flutuações críticas pode ser suprimido pela massa topológica. De fato, se $u_0 = 2q^2 \bar{\theta}$, temos $T'_c = T_c$. Assim, o termo topológico age como um fator que compensa a disordem introduzida pelas flutuações críticas. Se atribuirmos valores BCS típicos a q^2 e u_0 , obtemos que $\bar{\theta} = u_0/2q^2 \sim 10^{-2}$ de maneira a suprimir os efeitos das flutuações críticas do parâmetro de ordem sobre a temperatura crítica. Como para uma situação típica BCS $u_0/2q^2 \sim 10^{-2}$, podemos escolher $\bar{\theta}$ tal que $\bar{\theta} \gg u_0/2q^2$ e $T'_c \approx \tilde{T}_c$. Portanto, em um modelo GL topologicamente massivo a temperatura crítica pode ser consideravelmente aumentada mesmo quando as flutuações críticas do parâmetro de ordem são levadas em conta. As flutuações originárias do potencial vetor \vec{A} dominam sobre as flutuações do parâmetro de ordem.

O comportamento crítico é melhor analisado através dos métodos de grupo de renormalização. O caso com $\theta = 0$ já foi analisado por muitos autores [58, 59, 80, 81–82]. Um estudo usando grupo de renormalização no limite ultravioleta foi feito no caso da EDQE de Maxwell-Chern-Simons sem o aco-

plamento quártico do campo escalar e exibe um comportamento trivial do acoplamento de Chern-Simons, pelo menos no contexto da teoria de perturbação [84]. Estamos interessados no comportamento infravermelho e, portanto, o corte ultravioleta é mantido fixo (mecânica estatística). Usaremos aqui a versão Wilson do grupo de renormalização em sua forma perturbativa (veja por exemplo [5, 40]). Apesar da presença de um corte infravermelho destruir a invariância de calibre, pode se mostrar que a mesma é recuperada tão logo o corte em questão é removido [23, 85, 24]. Na ordem de um loop, a parte antisimétrica do propagador não contribui, o que simplifica consideravelmente os cálculos. As equações de evolução são mais bem expressas em termos dos acoplamentos adimensionais $r = \Lambda^2 \bar{r}$, $u = S_d^{-1} \Lambda \bar{u}$, $f = q^2 = S_d^{-1} \Lambda \bar{f}$ e $\theta = \Lambda \bar{\theta}$. O resultado é dado por ²

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = (2 - \eta)\bar{r} + \frac{2\bar{u}}{3(1 + \bar{r})} + \frac{3\bar{f}}{(1 + \bar{\theta}^2)} \quad (2.46)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = (1 - 2\eta)\bar{u} - \frac{5\bar{u}^2}{3(1 + \bar{r})^2} - \frac{18\bar{f}^2}{(1 + \bar{\theta}^2)^2} \quad (2.47)$$

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = (1 - \eta_A)\bar{f} \quad (2.48)$$

²Note o sinal contrário no lado esquerdo das equações de evolução. Isto é oriundo da versão Wilson perturbativa. Se g é um dado acoplamento $dg/dt = -\beta(g)$.

onde as dimensões anômalas para os campos escalar e vetorial são dadas respectivamente por

$$\eta = -3 \frac{\bar{f}}{(1 + \bar{\tau})(1 + \bar{\theta}^2)} \quad (2.49)$$

e

$$\eta_A = \frac{\bar{f}}{3(1 + \bar{\tau})}. \quad (2.50)$$

Note que o parâmetro $\bar{\theta}$ não evolui. Das equações de evolução acima vemos imediatamente que todos os expoentes críticos dependerão de $\bar{\theta}$. Portanto, o parâmetro $\bar{\theta}$ faz com que o sistema varie entre diferentes classes de universalidade.

A estrutura de pontos fixos é bem conhecida para $\bar{\theta} = 0$. Obtém-se nesse caso que o ponto fixo supercondutor $(\bar{r}^*, \bar{u}^*, \bar{f}^*)$ possui um valor complexo para \bar{u}^* se o número de componentes do parâmetro de ordem é menor que 365.9 [59]. Este comportamento é interpretado usualmente como um indicativo de uma transição de primeira ordem induzida por flutuações.

Por outro lado, este comportamento muda para $\bar{\theta} > 0$. Nesta situação, achamos pontos fixos supercondutores reais. Tipicamente, encontramos dois pontos fixos supercondutores correspondendo a uma situação física, um com

duas direções atrativas no infravermelho e uma repulsiva e o outro correspondendo a uma situação inversa. Por exemplo, para $\bar{\theta} = 5$ e $\bar{\theta} = 10$ encontramos os seguintes pontos fixos com duas direções atrativas no infravermelho, $(-0.28, 2.16, 0.44)$ e $(-0.21, 0.43, 2.37)$, respectivamente. Este tipo de comportamento confirma o fato já mencionado de que a massa topológica amortece as flutuações críticas do parâmetro de ordem. De fato, para valores muito altos de $\bar{\theta}$, os expoentes críticos tendem a seus valores de campo médio. Por exemplo, $\bar{\theta} = 100$ obtemos para o expoente da função de correlação $\eta = -0.0006$. Com base nesses resultados podemos concluir que os expoentes críticos de campo médio tornam-se exatos para valores muito altos da massa topológica.

Capítulo 3

Métodos Funcionais em um Modelo Exatamente Solúvel para Elétrons Fortemente Correlacionados

3.1 Introdução

Este capítulo usa os mesmos métodos dos capítulos anteriores em modelos bem diferentes daqueles que abordamos. A nossa preocupação básica aqui

será o estudo de modelos fermiônicos de muitas partículas no limite em que a correlação entre as mesmas é muito forte. O interesse nesse tipo de assunto é bastante antigo. Porém, um grande esforço vem sendo feito nos últimos anos no sentido de melhorar a compreensão desses sistemas. Este interesse maior pelo assunto nos últimos anos se deve basicamente à descoberta dos supercondutores a alta temperatura [49].

Neste capítulo discutiremos basicamente questões relacionadas com o modelo de Hubbard [86] e suas variantes. Assim, na seção 3.2 consideraremos um modelo simples, exatamente solúvel, o qual partilha propriedades semelhantes com o modelo de Hubbard. Além de possuir os mesmos limites exatos do modelo, o modelo considerado na seção 3.2 exibe uma transição metal-isolante.

3.2 Um Modelo Exatamente Solúvel para a Transição Metal-Isolante

Existe um modelo simples que foi proposto originalmente por Hatsugai e Kohmoto [88] (a ser referido de agora em diante como modelo HK). Este modelo é exatamente solúvel de uma forma muito simples e possui os mesmos

limites, atômico e de banda, que o modelo de Hubbard. Além do mais, como foi mostrado por Hatsugai e Kohmoto, o modelo descreve uma transição metal-isolante. Esta transição no modelo HK foi estudada pelo ponto de vista de teorias escalonamento em modelos de muitos corpos [66] por Continentino e Coutinho-Filho [65], que também propuseram uma generalização bosônica para o modelo. Um modelo estreitamente relacionado foi também discutido por Baskaran [89]. Existe também uma versão atrativa do modelo HK que foi proposta por Mattis e Bedersky [90]. O modelo HK relaciona-se a um modelo mais antigo proposto por Kamimura e Yamaguchi [91] que foi desenvolvido para simular o comportamento de sistemas desordenados com estados localizados de Anderson. O ponto de vista que adotaremos será aquele proposto por Nogueira e Anda [63].

O modelo HK é descrito pelo Hamiltoniano:

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} [\epsilon(\vec{k}) - \mu] n_{\vec{k}\sigma} + U \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}\uparrow} n_{\vec{k}\downarrow}, \quad (3.1)$$

onde $n_{\vec{k}\sigma} \equiv c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger} c_{\vec{k}\sigma}$ e $\epsilon(\vec{k}) = -2t \sum_{i=1}^d \cos k_i$. μ é o potencial químico. A dispersão $\epsilon(\vec{k})$ corresponde a um tunelamento (*hopping*) entre primeiros vizinhos em uma rede hipercúbica em d dimensões. Observe que, em contraste com o que ocorre no modelo de Hubbard, a repulsão Coulombiana é local no espaço

\vec{k} ao invés de no espaço real. Como o Hamiltoniano é local no espaço \vec{k} e a parte interagente comuta com a não-interagente, é imediato resolvê-lo. Por exemplo, a densidade de energia livre é dada por

$$f = -\frac{1}{L\beta} \sum_{\vec{k}} \ln\{1 + 2e^{\beta[\mu - \epsilon(\vec{k})]} + e^{\beta[2\mu - 2\epsilon(\vec{k}) - U]}\} \quad (3.2)$$

onde $\beta = 1/T$, T sendo a temperatura, e L é o número de sítios da rede. Note que no limite de largura da banda zero obtemos a densidade de energia livre do limite atômico do modelo de Hubbard. Também, no limite $U = 0$, obtemos o limite de banda.

A função de Green de Matsubara é definida por $G_{\sigma}(\vec{k}, \tau) = -\langle T c_{\vec{k}\sigma}(\tau) c_{\vec{k}\sigma}^{\dagger}(0) \rangle$.

Na representação de modos de Fourier a mesma é dada facilmente por

$$G_{\sigma}(\vec{k}, \omega_n) = \frac{1 - n_{\vec{k}\bar{\sigma}}}{i\omega_n + \mu - \epsilon(\vec{k})} + \frac{n_{\vec{k}\bar{\sigma}}}{i\omega_n + \mu - \epsilon(\vec{k}) - U}, \quad (3.3)$$

onde $\omega_n = (2n + 1)\pi T$, $n \in Z$, e

$$n_{\vec{k}\bar{\sigma}} = \frac{e^{\beta[\mu - \epsilon(\vec{k})]} + e^{\beta[2\mu - 2\epsilon(\vec{k}) - U]}}{1 + 2e^{\beta[\mu - \epsilon(\vec{k})]} + e^{\beta[2\mu - 2\epsilon(\vec{k}) - U]}}. \quad (3.4)$$

Note que estamos assumindo uma fase paramagnética, isto é, $n_{\vec{k}\uparrow} = n_{\vec{k}\downarrow}$.

Quando $T = 0$ Eq.(3.4) assume a forma de uma função degrau:

$$n_{\vec{k}\sigma}(T=0) = \theta(\mu_0 - \epsilon(\vec{k})) \left[\frac{1}{2} \theta(U - |\epsilon(\vec{k}) - \mu_0|) + \theta(|\epsilon(\vec{k}) - \mu_0| - U) \right], \quad (3.5)$$

onde μ_0 é o potencial químico em $T = 0$. $\theta(x)$ é a função de Heaviside usual. Este número de ocupação possui dois saltos descontínuos. Uma consequência imediata deste fato é que o teorema de Luttinger não se verifica. Observe que a função de Green exata para o modelo HK possui o mesmo limite atômico que o modelo de Hubbard, bem como o limite de banda.

Como no modelo de Hubbard, uma condição de ocupação metade é obtida pondo $\mu = U/2$. Para ocupação metade e $T = 0$ temos que a função de Green torna-se

$$G_\sigma(\vec{k}, \omega) = \frac{i\omega - \epsilon(\vec{k})}{[i\omega - \epsilon(\vec{k})]^2 - \frac{U^2}{4}}. \quad (3.6)$$

Na equação acima, ω não é mais uma frequência de Matsubara e sim uma frequência Euclideana.

A partir dos polos da Eq.(3.6) obtemos duas bandas em estreita analogia com o modelo de Hubbard onde temos as chamadas banda inferior de Hubbard e banda superior de Hubbard:

$$E_- = \epsilon(\vec{k}) - \frac{U}{2} \quad (3.7)$$

$$E_+ = \epsilon(\vec{k}) + \frac{U}{2} \quad (3.8)$$

Observe que o gap possui um tamanho que depende de U . Se as duas bandas estão separadas por um gap diferente de zero temos um isolante. O valor de U o qual dá um valor nulo para o gap é determinado considerando-se o topo da banda inferior coincida com a parte mais baixa da banda superior. Assim, obtemos que o valor crítico de U que marca a transição metal-isolante é dado por $U_c = 4td = W$, onde W é a largura da banda. Assim, para $U < U_c$ o sistema é metálico. Note que no modelo HK temos uma transição metal-isolante em qualquer dimensão, em contraste com o modelo de Hubbard onde não há tal transição para $d = 1$ [87].

Estudemos o comportamento da suscetibilidade de spin. A mesma é dada pela função resposta:

$$\chi(\vec{k}, \nu_n) = -\mu_B^2 \Pi(\vec{k}, \nu_n) \quad (3.9)$$

onde μ_B é o magneton de Bohr e $\Pi(\vec{k}, \nu_n)$ é a polarização, a qual é dada por

$$\Pi(\vec{k}, \nu_n) = \frac{1}{L\beta} \sum_{\vec{q}} \sum_{\omega_n} G(\vec{k} + \vec{q}, \nu_n + \omega_n) G(\vec{q}, \omega_n), \quad (3.10)$$

onde $\nu_n = 2n\pi T$, $n \in Z$, é uma frequência de Matsubara bosônica. Estamos omitindo índice de spin por simplicidade. A soma de Matsubara é sobre uma frequência fermiônica. No cálculo usaremos funções de Green com preenchimento metade da banda. Vamos calcular a suscetibilidade no limite de temperatura zero e no limite estático, no vetor de *nesting* $\vec{Q} = (\pi, \dots, \pi)$. Fazendo a soma de Matsubara e tomando o limite de temperatura zero, obtemos

$$\begin{aligned} \chi(\vec{Q}, 0) = & -\frac{\mu_B^2}{4} \int_{\text{BZ}} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{\theta(U/2 + \epsilon(\vec{q})) - \theta(U/2 - \epsilon(\vec{q}))}{2\epsilon(\vec{q})} \right. \\ & + \frac{\theta(U/2 + \epsilon(\vec{q})) - \theta(-\epsilon(\vec{q}) - U/2)}{2\epsilon(\vec{q}) + U} + \frac{\theta(\epsilon(\vec{q}) - U/2) - \theta(U/2 - \epsilon(\vec{q}))}{2\epsilon(\vec{q}) - U} \\ & \left. + \frac{\theta(\epsilon(\vec{q}) - U/2) - \theta(-\epsilon(\vec{q}) - U/2)}{2\epsilon(\vec{q})} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Quando $U = U_c$ a integral do segundo termo na Eq.(3.11) é divergente para $\vec{q} = 0$ (“divergência infravermelho”) enquanto que a integral do terceiro termo é divergente para $\vec{q} = \vec{Q}$ (“divergência ultravioleta”).

Calculemos a suscetibilidade explicitamente. Se usarmos uma densidade

de estados quadrada, $\rho(\omega) = (1/W)\theta(W/2 - \omega)\theta(\omega + W/2)$, e consideramos $U > U_c$, obtemos

$$\chi(\vec{Q}, 0) = -\frac{\mu_B^2}{4W} \ln \left(\frac{U + U_c}{U - U_c} \right). \quad (3.12)$$

Assim, temos que de fato a suscetibilidade diverge quando U se aproxima de U_c . Note que não temos um comportamento seguindo uma lei de potências para a suscetibilidade. É interessante comparar este comportamento com outras descrições da transição metal-isolante. Por exemplo, a transição de Brinkman e Rice [93] dá um comportamento tipo lei de potências para a suscetibilidade estática, a qual é calculada para um valor nulo do vetor da rede recíproca ao invés do vetor de *nesting*.

O modelo HK pode ser relacionado com outro modelo simples e exatamente solúvel que é o modelo de Hubbard com tunelamento de alcance infinito [92]. De fato, podemos mostrar que o mesmo é equivalente ao modelo HK com tunelamento de alcance infinito. Ambas as soluções são obtidas no limite termodinâmico. No caso onde o tunelamento é de alcance infinito não importa se a interação é local no espaço real ou no espaço \vec{k} . Em ambas as situações a solução é a mesma.

Quando o tunelamento é de alcance infinito a dispersão é dada por $\epsilon(\vec{k}) =$

$-Lt\delta_{\vec{k},0}$ [92]. A densidade de energia livre exata para o modelo HK é obtida substituindo-se esta dispersão na expressão exata Eq.(3.2) e tomando-se o limite termodinâmico. Obtemos imediatamente que

$$f_{IRH} = -2t - \frac{1}{\beta} \ln[1 + 2e^{\beta\mu} + e^{\beta(2\mu-U)}], \quad (3.13)$$

a qual é a mesma expressão obtida na referência [92] para o modelo de Hubbard com tunelamento de alcance infinito.

Também, obtemos a seguinte expressão para a função de Green exata nesse limite:

$$G_{IRH}(\vec{k}, \omega_n) = \frac{(1 - \delta_{\vec{k},0})}{Z_0} \left(\frac{1 + e^{\beta\mu}}{i\omega_n + \mu} + \frac{e^{\beta\mu} + e^{\beta(2\mu-U)}}{i\omega_n + \mu - U} \right), \quad (3.14)$$

Z_0 sendo a função partição atômica por sítio. Note que o modo $\vec{k} = 0$ não se propaga enquanto todos os outros modos \vec{k} possuem propagadores independentes de \vec{k} . Este comportamento se manifesta também na expressão para a energia livre, Eq.(3.13), onde temos um termo dado pela solução atômica correspondendo aos modos $\vec{k} \neq 0$ e um termo $-2t$ correspondendo ao modo $\vec{k} = 0$. Isto significa que no regime em que o tunelamento é de alcance

infinito os modos $\vec{k} = 0$ e $\vec{k} \neq 0$ se separam.

A partir da Eq.(3.14) obtemos a densidade eletrônica:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2}{L\beta} \sum_{\vec{k}} \sum_n e^{-i\omega_n 0^+} G_{IRH}(\vec{k}, \omega_n) \\ &= \frac{2[e^{\beta\mu} + e^{\beta(2\mu-U)}]}{1 + 2e^{\beta\mu} + e^{\beta(2\mu-U)}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A relação acima pode também ser obtida diretamente da expressão para a energia livre como $n = -(\partial f_{IRH}/\partial \mu)_\beta$. Resolvendo a Eq.(3.15) para μ , obtemos

$$\mu = U + \beta^{-1} \ln \left[\frac{\sqrt{(1-n)^2 + n(2-n)e^{-\beta U}} - (1-n)}{2-n} \right] \quad (3.16)$$

que concorda com a referência [92].

Da Eq.(3.14) obtemos a densidade de sítios duplamente ocupados \bar{d} :

$$\bar{d}(\beta, U, \mu) = \frac{e^{\beta(2\mu-U)}}{1 + 2e^{\beta\mu} + e^{\beta(2\mu-U)}}. \quad (3.17)$$

A expressão acima como função de μ é muito mais compacta do que a obtida

na referência [92] que é escrita como função de n . Quando $\mu = U/2$, que corresponde a $n = 1$, temos

$$\bar{d} = \frac{1}{2(e^{\frac{\beta U}{2}} + 1)}, \quad (3.18)$$

que mais uma vez concorda com a referência [92].

Até o presente momento resolvemos o modelo HK com $N = 2s + 1 = 2$ componentes. É instrutivo resolvermos o mesmo com um número arbitrário de componentes.

Vamos definir os espinores de N componentes:

$$\psi_{\vec{k}} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\vec{k}1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_{\vec{k}N} \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\bar{\psi}_{\vec{k}} \equiv \left(\psi_{\vec{k}1}^* \quad \dots \quad \psi_{\vec{k}N}^* \right). \quad (3.20)$$

Cada componente da expressão acima é uma variável de Grassmann. Calcularemos a função partição exata escrevendo-a como uma integral funcional

sobre os campos definidos acima. A função partição é dada por

$$Z = \int \prod_{\vec{k}} D\bar{\psi}_{\vec{k}} D\psi_{\vec{k}} e^{-S[\bar{\psi}_{\vec{k}}, \psi_{\vec{k}}]} \quad (3.21)$$

onde a ação S é dada por

$$S[\bar{\psi}_{\vec{k}}, \psi_{\vec{k}}] = \int_0^\beta d\tau \sum_{\vec{k}} [\bar{\psi}_{\vec{k}}(\partial_\tau - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k}))\psi_{\vec{k}} + \frac{U}{2}(\bar{\psi}_{\vec{k}}\psi_{\vec{k}})^2], \quad (3.22)$$

onde subentende-se que os campos satisfazem condições de contorno anti-periódicas no tempo de Matsubara.

Eliminaremos o termo quártico por intermédio de uma transformação de Hubbard-Stratonovich, obtendo a nova ação:

$$S' = \int_0^\beta d\tau \sum_{\vec{k}} [\bar{\psi}_{\vec{k}}(\partial_\tau - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k})) - iU\phi_{\vec{k}}]\psi_{\vec{k}} + (U/2)\phi_{\vec{k}}^2 \quad (3.23)$$

onde $\phi_{\vec{k}}$ é um campo auxiliar bosônico. Como a nova ação é quadrática nos campos fermiônicos, é imediato integrar os mesmos e obter a seguinte ação efetiva:

$$S_{eff} = -N \ln \det[\partial_\tau - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k}) - iU\phi_{\vec{k}}] + \frac{U}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}^2 \quad (3.24)$$

Podemos calcular exatamente o determinante que aparece na equação acima resolvendo-se a seguinte equação diferencial:

$$[\partial_\tau - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k}) - iU\phi_{\vec{k}}(\tau)]f_n(\vec{k}, \tau) = \alpha_n(\vec{k})f_n(\vec{k}, \tau) \quad (3.25)$$

com f_n satisfazendo a condição de contorno anti-periódica $f_n(\vec{k}, 0) = -f_n(\vec{k}, \beta)$.

É fácil resolver a Eq.(3.25). A solução é dada por

$$f_n(\vec{k}, \tau) = c \exp\left(\int_0^\tau d\tau' [\mu + U/2 - \epsilon(\vec{k}) + iU\phi_{\vec{k}}(\tau') + \alpha_n(\vec{k})]\right), \quad (3.26)$$

c sendo uma constante arbitrária. Aplicando a condição de contorno anti-periódica a esta solução obtemos

$$\alpha_n(\vec{k}) = -i\omega_n - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k}) - i(U/\beta) \int_0^\beta d\tau \phi_{\vec{k}} \quad (3.27)$$

onde ω_n é uma frequência de Matsubara fermiônica. Assim, o determinante que aparece na ação efetiva é dado pelo produto dos α_n 's. Portanto,

$$S_{eff} = -N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\vec{k}} \ln[-i\omega_n - \mu - U/2 + \epsilon(\vec{k}) - i(U/\beta) \int_0^\beta d\tau \phi_{\vec{k}}(\tau)] + \frac{U}{2} \int_0^\beta d\tau \sum_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}^2(\tau) \quad (3.28)$$

A soma de Matsubara na Eq.(3.28) é facilmente feita através de métodos bem conhecidos [94]. Então, a função partição torna-se

$$Z = \prod_{\vec{k}} \int D\phi_{\vec{k}} \left\{ 1 + e^{\beta[\mu+U/2-\epsilon(\vec{k})]} e^{iU \int_0^\beta d\tau \phi_{\vec{k}}(\tau)} \right\}^N e^{-\frac{U}{2} \int_0^\beta d\tau \phi_{\vec{k}}^2(\tau)} \quad (3.29)$$

Expandindo-se o termo entre chaves e fazendo as integrais Gaussianas obtemos a expressão exata para a função partição do modelo HK com N componentes:

$$Z = \prod_{\vec{k}} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{n\beta[\mu-\epsilon(\vec{k})]} e^{-\beta \frac{n(n-1)U}{2}} \quad (3.30)$$

Da Eq.(3.30) obtemos a densidade de energia livre:

$$f = -\frac{1}{L\beta} \sum_{\vec{k}} \ln \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{n\beta[\mu-\epsilon(\vec{k})]} e^{-\beta \frac{n(n-1)U}{2}} \right\}. \quad (3.31)$$

Note que quando $N = 2$ o resultado dado na Eq.(3.2) é recuperado. Além do mais, no limite de largura da banda zero obtemos o limite atômico de um modelo de Hubbard com N componentes.

É importante enfatizar que o resultado acima é exato para qualquer N finito. Podemos também estudar a solução para N grande. O limite $N \rightarrow \infty$ da Eq.(3.31) não é imediato por causa da combinatória envolvida. Contudo, podemos obter a solução para N grande através de um cálculo de ponto de sela na integral funcional com ação efetiva (3.28). De forma a executar este cálculo, é útil fazer o reescalonamento $U \rightarrow \frac{U}{N}$, $\phi_{\vec{k}} \rightarrow N\phi_{\vec{k}}$. Deste modo obtemos que $S_{eff} = N\overline{S_{eff}}$ onde $\overline{S_{eff}}$ é independente de N . Assim, a solução ponto de sela corresponde à solução exata quando $N \rightarrow \infty$. A solução com N grande é obtida como sendo a aproximação Hartree-Fock para o modelo HK.

A partir da expressão exata (3.31) é possível obter a energia livre exata para o modelo de Hubbard com tunelamento de alcance infinito com N componentes:

$$f_{IRH}(N) = -Nt - \frac{1}{\beta} \ln \left[\sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{n\beta\mu} e^{-\beta \frac{n(n-1)U}{2}} \right]. \quad (3.32)$$

Deve ser observado que, a exemplo do caso com duas componentes, a expressão acima é exata no limite termodinâmico.

Consideremos agora a interação no modelo HK no espaço real. Isto é conseguido através da decomposição de Fourier:

$$c_{\vec{k}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_i \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R}_i) c_{i\sigma}. \quad (3.33)$$

Obtemos imediatamente que a interação é dada por

$$H_1 = \frac{U}{L} \sum_{ijkl} \delta_{i+k, j+l} c_{i\uparrow}^\dagger c_{j\uparrow} c_{k\downarrow}^\dagger c_{l\downarrow}. \quad (3.34)$$

A interação acima é obviamente de alcance infinito. Note que não precisamos considerar somente interação entre spins opostos. Generalizar a expressão acima de modo a incluir interação entre spins iguais corresponde a modificar o potencial químico. Nesta situação podemos considerar o seguinte caso particular do modelo HK que consiste de um Hamiltoniano dado por

$$H = -t \sum_{\langle i,j \rangle} \sum_{\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{j\sigma} + h.c. - \mu \sum_i \sum_{\sigma} n_{i\sigma} + \frac{U}{2L} \sum_{i,j} n_i n_j, \quad (3.35)$$

onde $n_i = \sum_{\sigma} n_{i\sigma}$. Como a interação é a mesma para todo par de sítios na rede podemos escrever $\sum_{i,j} n_i n_j = (\sum_i n_i)^2$. É imediato escrever o Hamiltoniano acima no espaço \vec{k} :

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} [\epsilon(\vec{k}) - \mu] n_{\vec{k}\sigma} + \frac{U}{2L} (\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}})^2. \quad (3.36)$$

Como antes, escreveremos a função partição como uma integral funcional em termos de variáveis de Grassmann. O termo quártico será eliminado por intermédio de uma transformação de Hubbard-Stratonovich. Obtemos desse modo a seguinte ação envolvendo um campo auxiliar ϕ :

$$S = \int_0^{\beta} d\tau \left\{ \sum_{\vec{k}} \sum_{\sigma} \bar{\psi}_{\vec{k}\sigma} [\partial_{\tau} - \mu + \epsilon(\vec{k}) - iU\phi] \psi_{\vec{k}\sigma} + \frac{UL}{2} \phi^2 \right\}. \quad (3.37)$$

Após a integração dos fermions obtemos uma ação efetiva $S_{eff} = L\bar{S}_{eff}$, onde \bar{S}_{eff} é dado por

$$\bar{S}_{eff} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \rho_0(\epsilon) \sum_n \ln[-i\omega_n - \mu + \epsilon - i\frac{U}{\beta} \int_0^\beta d\tau \phi(\tau)] + \frac{U}{2} \int_0^\beta d\tau \phi^2(\tau), \quad (3.38)$$

onde $\rho_0(\epsilon)$ é a densidade de estados não-renormalizada. Portanto, podemos escrever a função partição na seguinte forma:

$$Z = N \int D\phi e^{-L\bar{S}_{eff}[\phi]}, \quad (3.39)$$

onde N é um fator de normalização apropriado. Da Eq.(3.39) vemos que no limite termodinâmico a solução de ponto de sela da ação corresponde à solução exata do problema. O ponto de sela é dado por um número imaginário no caso repulsivo: $\phi_0 = in_0$, n_0 sendo um número real no intervalo $[0, 2]$. No caso atrativo o ponto de sela é um número real porque a transformação de Hubbard-Stratonovich resultante não envolve a unidade imaginária i multiplicando o termo linear em ϕ como nas equações precedentes. A equação de ponto de sela é dada por

$$n_0 = \frac{2}{\beta} \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \frac{\rho_0(\epsilon)}{i\omega_n + \mu - \epsilon - Un_0}. \quad (3.40)$$

A Eq.(3.40) é justamente a aproximação Hartree-Fock para o problema. Isto significa que no caso de interação de alcance infinito na forma descrita na Eq.(3.35), a aproximação Hartree-Fock corresponde à solução exata do problema. Observe que em contraste com o caso do modelo HK, temos um líquido de Fermi na situação presente.

Conclusão

Nos capítulos precedentes vimos como os métodos funcionais são úteis em diversos tipos de problemas, tanto em teoria de campos bem como na física da matéria condensada. O interessante na abordagem seguida na presente tese é que o formalismo funcional pode muitas vezes dispensar o uso dos gráficos de Feynman, o que pode significar uma grande simplificação em alguns casos. Assim, no capítulo 1 discutimos o grupo de renormalização, na versão formulada por Wilson, utilizando técnicas funcionais e sem fazer uso explícito de diagramas de Feynman. Em certas situações abordadas no mesmo capítulo o uso de gráficos de Feynman nem mesmo era possível, uma vez que alguns resultados eram não-perturbativos. Um caso particularmente importante foi o da teoria tricrítica, onde estabelecemos a existência de um ponto fixo ultravioleta estável não trivial para $N > 4$. Este resultado só era conhecido através da expansão $1/N$. De fato, estabelece-se como sendo

verdadeiro para $N > 1000$ pelo menos [37]. É realmente notável termos estabelecido a existência de um ponto fixo desta natureza para valores não muito grandes de N . Este resultado só foi possível de ser obtido devido ao fato de termos utilizado uma equação de evolução exata para a ação efetiva que deduzimos com o uso de métodos funcionais. Vale enfatizar que as funções beta da teoria tricrítica obtidas no capítulo 1 não podem ser obtidas através da teoria de perturbações.

Os métodos funcionais utilizados no capítulo 2 permitiu rededuzir o potencial de Coleman-Weinberg [57] na EDQE em $d = 4$ de uma forma muito mais transparente e sem as hipóteses adicionais de Coleman e Weinberg, necessárias quando se tenta obter o resultado deles no contexto dos gráficos de Feynman. Usando a mesma abordagem da seção 2.2, fomos capazes de estudar a EDQE de Maxwell-Chern-Simons, tanto no contexto da teoria de campos como também no âmbito de teorias fenomenológicas da supercondutividade, isto é, discutimos um modelo de Ginzburg-Landau topológico. Isto foi feito nas seções 2.3 e 2.4. Um resultado interessante diz respeito a estabilidade do vácuo para a EDQE de Maxwell-Chern-Simons. Deduzimos uma condição que o acoplamento quártico escalar λ deve satisfazer para termos um vácuo bem definido. Outro resultado interessante foi obtido quando estu-

damos um funcional de energia livre para o supercondutor topologicamente massivo. Nesse caso a massa topológica corrige a temperatura crítica da transição supercondutora. Um efeito importante da massa topológica nesse contexto concerne à estabilização das flutuações críticas oriundas do parâmetro de ordem. A contribuição de Chern-Simons para o funcional energia livre pode dominar as flutuações do parâmetro de ordem e eventualmente podemos ter um comportamento tipo campo médio (campo médio em um sentido mais amplo que usamos no capítulo 2, ou seja, um campo médio HLM [58]). Podemos afirmar então que o termo topológico aumenta o grau de ordem do sistema. Isto é percebido imediatamente observando-se os valores que a temperatura crítica assume em função da massa topológica. Mesmo quando as flutuações críticas são consideradas podemos elevar a temperatura crítica. O usual em modelos de Ginzburg-Landau é justamente o contrário. Normalmente as flutuações críticas tendem a aumentar a desordem do sistema e, portanto, a diminuir a temperatura crítica. O efeito estabilizador da massa topológica também se reflete nas equações de evolução dos acoplamentos da teoria. Em modelos de Ginzburg-Landau convencionais para a supercondutividade as equações de grupo de renormalização revelam uma estrutura de pontos fixos bastante peculiar. Por exemplo, não existem pontos fixos

supercondutores acessíveis fisicamente para o caso de uma componente complexa [58, 59]. No entanto, quando introduzimos o termo de Chern-Simons na energia livre descobrimos que este comportamento muda em função da massa topológica. Para certos valores de θ os pontos fixos supercondutores passam a ser acessíveis, isto é, não são complexos como no caso com $\theta = 0$. Este resultado é interessante porque passamos a obter pontos fixos infravermelhos estáveis em pelo menos duas direções de fluxos e, portanto, a transição de fase pode ser interpretada como sendo de segunda ordem. Isto não ocorre no caso $\theta = 0$ onde os pontos fixos supercondutores são inacessíveis. Nesse caso, este fato foi interpretado como um indicador de uma transição fracamente de primeira ordem [58, 59].

Uma outra aplicação interessante dos métodos funcionais foi feita no capítulo 3 onde consideramos um modelo exatamente solúvel, aparentado com o modelo de Hubbard [86], o qual denominamos modelo HK [63]. Nesse caso a integração funcional foi feita em termos de variáveis de Grassmann uma vez que se tratava de um modelo fermiônico. O interessante aqui é que apesar de termos um modelo com fermions interagentes, podemos fazer a integração funcional exatamente. Este modelo fornece um exemplo onde a introdução de um campo auxiliar via uma transformação de Hubbard-

Stratonovich permite que integremos o mesmo exatamente a seguir. Normalmente, elimina-se o campo auxiliar usando alguma condição de estacionariedade na ação efetiva, o que implica em fazer uma teoria de campo médio, que em geral só se torna exata em algum limite particular. Isto é assim porque usualmente não se pode integrar exatamente o campo auxiliar e daí algum tipo de aproximação deve ser feita.

Uma crítica que pode eventualmente ser feita a esta tese e a muitos artigos e livros texto que utilizam os métodos funcionais diz respeito ao rigor matemático das técnicas utilizadas. De fato, todas as manipulações são um tanto quanto formais e carecem muitas vezes de rigor matemático. Uma dificuldade que surge muitas vezes concerne o significado preciso da medida funcional. Em geral admite-se que podemos definir de forma mais ou menos precisa as medidas funcionais quando estamos trabalhando com ações Euclidianas. Isto parece ser verdadeiro pelo menos para algumas teorias. No caso mais simples de uma teoria escalar Gaussiana este fato pode ser vislumbrado de imediato. De fato, no espaço de Minkowski o propagador de Klein-Gordon, essencial para definirmos a medida funcional Gaussiana, possui ambiguidades de caráter analítico e necessitamos, por este motivo, introduzi. uma prescrição $i\epsilon$ (funções retardadas, avançadas, etc.). Já no es-

paço Euclideano, o propagador resultante pode ser definido de forma precisa e livre de ambiguidades analíticas. Dito de maneira mais técnica: a teoria satisfaz a propriedade de positividade de Nelson-Symanzik [95]. Grosso modo, esta propriedade nos garante em que situações podemos tratar uma teoria Euclideana de campos como uma teoria em mecânica estatística. Basicamente, só podemos usar rigorosamente os métodos funcionais em teorias que satisfazem esta propriedade. Felizmente, em muitos casos de interesse temos que a propriedade de positividade de Nelson-Symanzik é satisfeita.

Perspectivas

No capítulo 1 discutimos o grupo de renormalização em um contexto não-perturbativo. Fizemos uma nova dedução para a equação exata de grupo de renormalização [5, 6, 11, 26]. Nesta dedução utilizamos uma ação efetiva auxiliar que corresponde a um caso particular da ação efetiva para operadores compostos [42]. A dedução que foi feita aqui sugere que talvez se possa deduzir uma equação de evolução exata para a ação efetiva de operadores compostos. De fato, isto pode ser feito sem maiores problemas e corresponde a um trabalho ainda não terminado do autor da presente tese. A dificuldade

que aparece nesse caso não é a dedução da equação de evolução propriamente dita e sim em como aplicar a mesma. Apesar de fornecer novas possibilidades para tratamentos não-perturbativos, este formalismo é muito complicado em termos computacionais. Por exemplo, enquanto o potencial efetivo usual é uma função do campo uniforme de fundo (*uniform background field*), a generalização correspondente para operadores compostos, o potencial efetivo para operadores compostos, é uma função do campo uniforme e um funcional de um certo propagador generalizado. Este fato introduz alguns problemas com respeito a um tratamento analítico eficaz.

Ainda com respeito às equações exatas de grupo de renormalização, seria desejável ter equações correspondentes para teorias de muitos corpos, em particular os sistemas envolvendo muitos fermions. Atualmente existe uma literatura extensa a respeito do uso do grupo de renormalização em teoria de muitos corpos, principalmente em questões relativas à teoria do líquido de Fermi de Landau [39, 40, 41]. No entanto, as construções usualmente empregadas se apoiam muito em métodos perturbativos, ainda que no contexto da versão Wilson do grupo de renormalização. Em compensação existem muitos resultados rigorosos a respeito [10, 46, 47, 48, 51]. A tarefa de deduzir uma equação de evolução exata para teorias de muitos fermions não é

trivial. Boa parte do problema está por trás do corte infravermelho natural da teoria, ou seja, a superfície de Fermi. Em $T = 0$ a teoria é singular na superfície de Fermi e devemos aproximar a mesma através de uma função de corte suave para obter uma análise tecnicamente correta. Esta função de corte deve conter um fator de escala através do qual a ação efetiva deverá depender. É importante observar que em $T \neq 0$ não existem singularidades infravermelhas em um sistema de muitos fermions não-relativístico como um líquido de Fermi. Assim, podemos usar em princípio a própria temperatura como fator de escala. Para uma função de corte suave podemos utilizar uma generalização apropriada da distribuição de Fermi-Dirac. No caso mais simples de fermions não-interagentes a função de Fermi-Dirac tende a uma função degrau cujo corte agudo reflete a existência de uma superfície de Fermi. Este tipo de abordagem nesses sistemas pode fornecer caminhos melhores para tratar os chamados sistemas eletrônicos fortemente correlacionados, que tem como arauto o modelo de Hubbard [86]. Por exemplo, pode-se tentar justificar eventuais relações de escalonamento na transição metal-isolante no modelo de Hubbard a partir de técnicas de grupo de renormalização [66].

Referências

- [1] C. Itzykson & M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, vols. 1 e 2 (Cambridge, 1989).
- [2] G. Parisi, *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, 1989).
- [3] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford, 1993).
- [4] K. G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3184 (1971).
- [5] K. G. Wilson & J. B. Kogut, Phys. Rep. **12**, 75 (1974).
- [6] F. J. Wegner & A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1975).
- [7] C. Domb & M. S. Green, eds., *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 6 (Academic Press, 1976).
- [8] M. Gellmann & F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).

- [9] C. G. Callan, *Phys. Rev. D* **2**, 1541 (1970).
- [10] G. Benfatto & G. Gallavotti, *Renormalization Group*, Princeton Physics Notes 1 (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995).
- [11] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984).
- [12] L. P. Kadanoff, *Physics* **2**, 263 (1966).
- [13] M. Bonini, M. D'Attanasio & G. Marchesini, *Nucl. Phys. B* **421**, 429 (1994).
- [14] M. Bonini, M. D'Attanasio & G. Marchesini, *Nucl. Phys. B* **437**, 163 (1995).
- [15] S. B. Liao & J. Polonyi, *Ann. Phys.* **222**, 122 (1993).
- [16] C. Itzykson & J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (MacGraw-Hill, 1981).
- [17] S. Weinberg, *Critical Phenomena for Field Theorists*, lectures, Erice Subnucl. Phys., 1 (1976).
- [18] L.D. Landau, *Sov. Phys. JETP* **3**, 920 (1956).
- [19] L.D. Landau, *Sov. Phys. JETP* **8**, 70 (1959).

- [20] J. M. Luttinger & J. C. Ward, Phys. Rev. **118**, 1417 (1960).
- [21] J. Bardeen, L. N. Cooper & J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [22] L. P. Gorkov, Sov. Phys. JETP **9**, 1364 (1959).
- [23] U. Ellwanger, M. Hirsch & A. Weber, e-print hep-th/9506019.
- [24] F. Freire e C. Wetterich, e-print hep-th/9601081.
- [25] M. D'Attanasio & T. Morris, e-print hep-th/9602156.
- [26] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [27] N. Tetradis & C. Wetterich, Nucl. Phys. B **422**, 541 (1994).
- [28] U. Brandt & C. Mielsch, Z. Phys. B **75**, 365 (1989).
- [29] M. Reuter & C. Wetterich, Nucl. Phys. B **417**, 181 (1994).
- [30] P. W. Higgs, Phys. Lett., **12**, 132 (1964)
- [31] F. Englert and R. Brout, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [32] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964);

- [33] T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.*, **155**, 1554 (1967)
- [34] C. Becchi, Parma preprint.
- [35] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov & I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover, New York, 1963).
- [36] Grater & Wetterich, *Phys. Rev. Lett.* (1995).
- [37] R. D. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 574 (1982).
- [38] R. Gudmundsdottir, G. Rydnnel & P. Salomonsson, *Ann. Phys. (NY)* **162**, 72 (1985).
- [39] R. Shankar, *Physica A* **177**, 530 (1991).
- [40] R. Shankar, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 129 (1994).
- [41] J. Polchinski, *Effective Field Theory and the Fermi Surface* em Recent directions in particle theory, Proc. 1992 TASI, eds.: J. Harvey & J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993).
- [42] J. M. Cornwall, R. Jackiw & E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **10**, 2428 (1974).
- [43] J. Feldman & E. Trubowitz, *Helv. Phys. Acta* **63**, 156 (1990).

- [44] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau & E. Trubowitz, *Helv. Phys. Acta* **65**, 679 (1992).
- [45] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau & E. Trubowitz, *Helv. Phys. Acta* **66**, 498 (1993).
- [46] G. Benfatto & G. Gallavotti, *J. Stat. Phys.* **59**, 541 (1990).
- [47] G. Benfatto & G. Gallavotti, *Phys. Rev. B* **42**, 9967 (1990).
- [48] G. Benfatto & G. Gallavotti, *Phys. Rev. B* **45**, 5468 (1992).
- [49] Berdnoz & Muller, *Z. Phys. B* **64**, 189 (1986).
- [50] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau & E. Trubowitz, *A Rigorous Analysis of the Superconducting Phase of an Electron-Phonon System*, em Les Houches 1994.
- [51] J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau & E. Trubowitz, *Constructive Many-Body Theory em States of Matter*, ed. : (World Scientific, Singapore, 1994).
- [52] V. L. Ginzburg, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **14**, 177 (1949).
- [53] A. P. C. Malbouisson, F. S. Nogueira & N. F. Svaiter, *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 749 (1996).

- [54] F. S. Nogueira & N. F. Svaiter, *Mod. Phys. Lett. A* **11**, 1627 (1996).
- [55] A. P. C. Malbouisson, F. S. Nogueira & N. F. Svaiter, preprint CBPF-NF/051/96; submetido para publicação.
- [56] P. W. Anderson, *Science* **256**, 1526 (1992) e referências ali citadas.
- [57] S. Coleman & E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).
- [58] B. I. Halperin, T. C. Lubensky & S.-K. Ma, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 292 (1974).
- [59] J.-H. Chen, T. C. Lubensky & D. R. Nelson, *Phys. Rev. B* **17**, 4274 (1978).
- [60] C. J. Lobb, *Phys. Rev. B* **36**, 3930 (1987).
- [61] M. A. Amisov, P. E. Cladis, E. E. Gorodetskii, D. A. Huse, V. E. Podnecks, V. G. Taratuta, W. van Saarloos & V. P. Voronov, *Phys. Rev. A* **41**, 6749 (1990).
- [62] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison-Wesley, 1991).
- [63] F. S. Nogueira & E. V. Anda, *Int. J. Mod. Phys. B* **10** (1996).

- [64] Y. Hatsugai and M. Kohmoto, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **61**, 2056 (1992).
- [65] M. A. Continentino and M. D. Coutinho-Filho, *Solid State Commun.*, **90**, 619 (1994).
- [66] M. A. Continentino, *Phys. Rep.* **239**, 179 (1994).
- [67] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **112**, 1900 (1958).
- [68] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **130**, 439 (1962);
- [69] Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
- [70] A. Guth & E. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1131 (1980).
- [71] A. Guth & E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **23**, 876 (1981).
- [72] M. Sher, *Phys. Rev. D* **24**, 1699 (1981).
- [73] E. Witten, *Nuc. Phys.* **B177**, 477 (1981).
- [74] A. Billoire and K. Tamvakis, *Nucl. Phys.* **B200**[FS4], 329 (1982).
- [75] A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **116**, 340 (1982).
- [76] D. Litim, C. Wetterich and N. Tetradis, Heidelberg preprint HD-THEP-94-23, OUTP-94-12 p.

- [77] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Ann. Phys. (N. Y.)* **140**, 372 (1982).
- [78] W.A.Bardeen, M.Moshe and M.Bander, *Phys.Rev.Lett* **52**, 1188 (1984).
- [79] T. Appelquist and U. Heinz, *Phys. Rev. D* **25**, 2620 (1982).
- [80] S. Kolnberger and R. Folk, *Phys. Rev. B* **41**, 4083 (1990).
- [81] M. Kiometzis, H. Kleinert and A. M. J. Schakel, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1975 (1994).
- [82] R. Folk and Y. Holovatch, *J. Phys. A* **29**, 3409 (1996).
- [83] H. Kleinert, *Gauge Fields in Condensed Matter* (World Scientific, Singapore, 1989), Vol. 1.
- [84] G. W. Semenoff, P. Sodano and Y.-S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 715 (1989).
- [85] M. D'Attanasio and T. Morris, hep-th/9602156.
- [86] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A276**, 238 (1963).
- [87] E. Lieb and F. Y Wu, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 1445 (1968).

- [88] Y. Hatsugai and M. Kohmoto, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **61**, 2056 (1992).
- [89] G. Baskaran, *Mod. Phys. Lett.*, **B5**, 643 (1991).
- [90] D. C. Mattis and A. Bedersky, *Mod. Phys. Lett.*, **B8**, 617 (1994).
- [91] H. Kamimura and E. Yamaguchi, *Solid State Commun.*, **28**, 127 (1978).
- [92] P. van Dongen and D. Vollhardt, *Phys. Rev. B* **40**, 7252 (1989).
- [93] W. F. Brinkman and T. M. Rice, *Phys. Rev.*, **B2**, 4302 (1970).
- [94] Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge, 1989).
- [95] J. Glimm & A. Jaffe, *Quantum Physics - A Functional Integral Point of View*, second edition (Springer-Verlag, 1987).

**“MÉTODOS FUNCIONAIS EM TEORIAS DE CAMPO
E FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA”**

Flávio de Souza Nogueira

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson - Presidente

Nami Fux Svaiter - Presidente

Carlos Alberto Aragão de Carvalho Filho

Mucio Amado Continentino

José Abdalla Helayël-Neto

Francisco Caruso Neto

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 12 de dezembro de 1996