TESE DE
MESTRADO

Matéria Tensorial em Teorias de Gauge Supersimétricas

Álvaro Luis Martins de Almeida Nogueira

DEPARTAMENTO DE TEORIA DE CAMPOS E PARTÍCULAS - DCP
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS - CBPF
RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 1996

Para Renata, minha amada,
e para Álvaro e Sonia, meus pais.

Agradecimentos

- ao CNPq e à Capes, pelas bolsas que recebi no mestrado.

- à Rosângela e à Beth, pela simpatia e eficiência com que nos atendem, agüentando nossas súbitas entradas na secretaria atrás de alguém ou de alguma coisa, e a nossa involuntária mas constante tendência de atribuir-lhes onisciência.

- à Vera, ao Sergio Velho, à Denise e ao Ronaldo, pela paciência e gentileza com que nos recebem à Biblioteca.

- à Myriam, pela atenção, competência e cuidado com que trata os problemas que freqüentemente trazemos à CFC. Pouco se realizaria sem o seu trabalho.

- ao prof. Francisco Caruso, pela lealdade, franqueza e disposição na busca de soluções para minha inusitada trajetória.

- ao prof. Fernando Simão, pela amizade, pelo estímulo constante, pelas reiteradas referências a uma capacidade que as dificuldades do caminho tentam negar.

- ao prof. Aníbal Omar Caride. Difícil expressar a gratidão que sinto pelo empenho, esforço, entrega, habilidade e carinho explícitos nas várias atitudes que tomou para viabilizar não só a conclusão deste trabalho, mas a continuidade de uma carreira. E à Suzana de Caride, por compartilhar desta solidariedade inabalável.

- ao prof. Silvio Sorella, pela amizade, pela atenção, pelos conhecimentos transmitidos em cursos e discussões, pelo estímulo e pela confiança depositada no trabalho dos pós-graduandos de nosso departamento.

- aos amigos, pela prova da existência de apreço sincero e incondicional: Luiz Cláudio, Cláudio e Daniel Sasaki, Marcello, Marcony, Ozemar, André, Mauro, Carmem, Cristine, Maurício, Isaías, Robertinho, Marcello Gonçalves, Sergio Duarte, Régio, Leoni, Wagner, Ladário, Cambraia, Alexandre Velasco, Flávio Nogueira, Flávio Garcia, Gentil, José Acácio (Bola), Zé Luiz, Vitor, Bartolomeu, e mais uma multidão omitida pela minha memória débil.

- ao professor-doutor-amigo Tião, a quem levei à beira do desespero com a tortuosidade do meu caminho. Pela confiança, pela resistência ao apelo à "objetividade" que as "evidências" trazem.

- ao amigo e parceiro Vitor Lemes, pela paciência incomensurável com as minhas paranóicas e quase intermináveis revisões de contas e resultados, e pela dedicação ao trabalho conjunto. O mesmo se aplica ao Renan, parceiro de discussões e resultados para o campo tensorial, e muito responsável pelo fraterno e engraçado ambiente de trabalho de que desfrutamos.

- aos também amigos e parceiros Oswaldo e Marquinho, pela solidariedade e ajuda na álgebra espinorial em supersimetria.

- ao irmão Marcelo Carvalho. Foram muitas as vezes em que saiu em minha defesa, em que me chamou à consciência, em que compartilhamos angústias, contemplações, esboços de verdade e alegrias. E muita cerveja.

Mais agradecimentos

- aos irmãos das antigas, mestres nas minhas inconstâncias, Luca Moriconi, Denison de S. Santos, Antonio Teles.

- ao irmão e cunhado Maurício del Giudice, pelo convívio agradável, pela amizade, pelas freqüentes e pertinentes indagações, fornecendo-me uma boa medida das lacunas em meu suposto conhecimento. E pelas bobagens que aliviam e confirmam a existência.

- às amigas e sogras Leda del Giudice e Norma de Azevedo Lima, e ao amigo e sogro Victor Giudice.

- a meus tios Staut, Marilene, Celeste, Murilo e Vera, Célio e Lurdes.

- à Branca, minha paixão canina.

- às minhas irmãs Ticha e Tininha, e a meus respectivos cunhados e irmãos Guilherme e Thomas.

- ao meu amigo, mestre, orientador, José Abdalla Helayël-Neto. Há o trabalho conjunto, o ambiente acolhedor, o cuidado científico, a eterna disposição para resolver toda e qualquer dúvida que surja, a paciência e a atenção para ouvir todo tipo de relato, do estritamente profissional ao absolutamente pessoal, o respeito e o estímulo constante à nossa qualificação acadêmica. Mas há mais a agradecer. Há o esforço e a competência na formação de toda uma geração de novos pesquisadores, há o desprendimento de nos fornecer todos os elementos para uma independência científica, há a inconformidade diante de qualquer situação desvantajosa, injusta, por que passe quem quer que seja, e não ponho limites mesmo porque nunca os vi. Mais há mais a agradecer. Pessoalmente, devo-lhe a recuperação de minha carreira, de minha auto-estima profissional. Mas há mais. Fica difícil aceitar, a partir de seu exemplo, qualquer consideração cética generalizante a respeito de relações no que chamam de "mundo real". Há mais a agradecer. E há muita gente para me ajudar a fazê-lo.

- Mais uma vez, aos meus pais, Álvaro e Sonia, de quem recebi simplesmente tudo.

- Mais uma vez à Renata, minha vida, meu sentido, minha coragem.

Resumo

Formulam-se, em termos de supercampos da supersimetria $N = 1$ em 4 dimensões (1+3), Lagrangeanos com simetrias global e local para campos tensoriais antissimétricos de rank-2 (2-formas) tratados como graus de liberdade de matéria, e não como campos de gauge, como usualmente feito.

Sumário

Introdução

Desde seu advento, as teorias de gauge vêm encontrando amplo campo de aplicação na construção de modelos renormalizáveis em Física de Partículas e Campos. Os anos '70 consolidaram as teorias de Yang-Mills como o esquema teórico mais viável rumo à quantização da gravitação - programa ainda incompleto nos dias de hoje - e à unificação das interações fundamentais.

A concepção de que as interações entre matéria carregada sejam mediadas por bósons vetoriais leva-nos imediatamente, devido à invariância relativística, ao problema do aparecimento de modos intermediários não-físicos, classicamente associados a fótons longitudinais, por exemplo. É a simetria de gauge o elemento que permite conciliar a invariância relativística dos modelos que descrevem as partículas elementares com a idéia de bósons mediadores vetoriais, respeitando a unitariedade, ingrediente fundamental na formulação quântica.

A proposta de formular teorias de gauge para partículas escalares intermediárias dita a introdução de campos tensoriais antissimétricos sujeitos a algum tipo de simetria local [1]. Também, ao se formular modelos de supergravidade, tais campos aparecem associados a graus de liberdade físicos do setor bosônico de multipletes da supersimetria local. O trabalho citado na ref.[2] sistematiza uma série de resultados interessantes no que diz respeito à adoção de campos tensoriais antissimétricos de gauge.

Nesta tese, partindo de um conjunto de trabalhos desenvolvidos por Avdeev e Chizhov

[3, 4, 5], e Lemes, Renan e Sorella, propomo-nos a discutir a possibilidade de inserir campos tensoriais antissimétricos, tratados agora como graus de liberdade de matéria, no contexto de um modelo Lagrangeano com supersimetria global $N = 1$.

A motivação principal para se proceder à supersimetrização do modelo Abeliano de Avdeev-Chizhov não se resume ao mero interesse acadêmico de simplesmente se encontrar a versão supersimétrica de um modelo original. É consenso, nos últimos anos da Física de Altas Energias, que uma "nova física" deva entrar em operação na escala de 1 TeV, região a ser perscrutada com as novas máquinas em fase de construção (LHC e NLC). Tal física deve registrar efeitos residuais da quebra da supersimetria, que, por sua vez, deve ocorrer em regiões de energia na faixa dos 10^{10} a 10^{11} GeV, preenchendo, assim, o chamado "deserto" entre as escalas eletrofraca (10^3 GeV) e de grande-unificação (10^{16} GeV).

Portanto, tendo em mente a proposta de Avdeev e Chizhov de enquadrar o seu modelo com campos tensoriais de matéria na fenomenologia do Modelo-Padrão, é natural partir para um programa de incorporação de tais campos no contexto das teorias supersimétricas, vistas as potencialidades do Modelo-Padrão Minimamente Supersimétrico (MSSM). Este é o ponto central discutido nesta tese. De fato, como ficará claro nos capítulos que seguem, alguns problemas inerentes ao tratamento de Avdeev e Chizhov revelam-se de modo manifesto no setor de parceiros supersimétricos fermiônicos, o que torna o modelo potencialmente interessante, mas ainda não conclusivo.

Deve-se lembrar, ainda, que, a partir dos estudos de Lemes, Renan e Sorella [6], emerge a questão do aparecimento de anomalias geradas pelo acoplamento dos campos tensoriais a férmions. Mesmo assim, cremos valer a pena persistir no estudo do modelo, a fim de procurarmos compreender a fundo a sua viabilidade no programa de gauge das interações fundamentais.

A organização desta tese é como segue. No Capítulo 1, propõe-se, a título de sistematização de resultados pré-existentes, uma revisão construtiva do modelo de Avdeev-Chizhov para campos tensoriais antissimétricos de matéria. O material descrito nos Capítulos 2 e 3, onde se discute a supersimetrização do modelo com simetrias global e local, respectivamente, constitui a contribuição original que se pretende trazer. Seguem-se as Conclusões Gerais e um Apêndice, onde são fixadas a notação e as convenções da álgebra de supersimetria-$N = 1$ em 4 dimensões espaço-temporais.

Capítulo 1

O Campo Tensorial Antissimétrico de Matéria

Neste capítulo, introduz-se um campo tensorial real antissimétrico de rank-2 para descrever matéria, e são apresentados alguns resultados já obtidos acerca das propriedades deste campo em modelos Lagrangeanos usuais, não-supersimétricos.

Inicia-se com a análise de sua dinâmica livre, a sua caracterização como campo de matéria (em oposição ao já conhecido campo tensorial de gauge), a verificação de uma simetria global quiral que induz a construção de um modelo com interação Abeliana, e a discussão da positividade do Hamiltoniano livre, visando a posterior quantização do modelo clássico. Construído o modelo com simetria quiral local, proposto por L. Avdeev e M. Chizhov [3], procede-se ao estudo de sua renormalizabilidade, com alguns resultados perturbativos a 1-loop fornecidos por esses autores, e com as implicações de uma análise perturbativa completa pelo método de renormalização algébrica [6].

Finalmente, introduz-se o campo tensorial antissimétrico auto-dual complexo, em termos do qual se obtém uma interpretação geométrica, com a conseqüente reformulação do modelo Abeliano como uma teoria tipo $\lambda\varphi^4$, neste novo campo, além de tornar imediata a generalização para um modelo de interação não-Abeliana [7]. É, também, este campo complexo que comporá o multiplete com o qual será construída a generalização supersimétrica.

1.1 O Campo Tensorial Antissimétrico Livre

A covariância manifesta de Lorentz e a adimensionalidade da ação permitem, para um campo tensorial antissimétrico real de dimensão canônica 1, em quatro dimensões, duas formas para termos componentes do setor cinético da teoria: $\partial_\lambda(T_{\mu\nu}(x))\partial^\lambda(T^{\mu\nu}(x))$ e $\partial_\mu(T^{\mu\lambda}(x))\partial^\nu(T_{\nu\lambda}(x))$. A combinação destes termos, com uma determinada escolha de coeficientes relativos, pode fornecer, sob integração, por exemplo, a ação

$$\mathcal{S}_{\mathrm{G}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\,\partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu}) - \partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda})\right] . \tag{1.1}$$

Esta ação apresenta invariância sob as transformações

$$\delta\, T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Lambda_\nu - \partial_\nu\Lambda_\mu \,, \tag{1.2}$$

que aparecem como uma generalização da simetria de gauge usual para campos vetoriais, $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$, com um acréscimo de uma unidade na ordem dos tensores campo e parâmetro de gauge. A ação (1.1) e a simetria (1.2) compõem, portanto, a teoria para o campo tensorial real antissimétrico de gauge livre, campo este presente em diversos contextos, como o das teorias de supergravidade e o das teorias topológicas (modelos BF) [2]. Isto justifica a análise cuidadosa da dinâmica deste tensor de gauge por diversos autores, bem como o estudo de sua generalização não-Abeliana [8].

Uma outra escolha dos coeficientes relativos dos termos cinéticos disponíveis fornece a ação

$$\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \;=\; \int d^4x \left[\frac{1}{2}\,\partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu}) \;-\; 2\,\partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda})\right] \;, \tag{1.3}$$

onde não mais se verifica a simetria de gauge (1.2). A alteração no coeficiente do 2º termo, contudo, não tem apenas como efeito o desaparecimento da simetria de gauge. A escolha específica exibida em (1.3) promove, também, a verificação de invariância conforme [9], característica de campos de matéria sem massa. A ação não-degenerada (1.3) e a dinâmica que esta determina para o campo tensorial de matéria, $T_{\mu\nu}$, foram objeto de estudo em dois trabalhos publicados, recentemente, por Avdeev e Chizhov [3, 4]. Os artigos exibem a obtenção das soluções clássicas para as equações de movimento derivadas de (1.3), uma análise de sua participação em observáveis e conseqüente interpretação física, a verificação de uma simetria global adicional que, estendida ao caso local, justifica a construção de um modelo para $T_{\mu\nu}$ em interação com um campo de gauge A_μ, e, para este modelo com interação Abeliana, acrescido de um setor fermiônico acoplado ao tensor $T_{\mu\nu}$, são ainda computados resultados quânticos em primeira ordem no contexto de teoria de perturbação.

A análise da dinâmica livre parte da parametrização das componentes independentes do tensor antissimétrico $T_{\mu\nu}$ através das identificações

$$
\begin{aligned}
A_i(x) &\equiv T_{0i}(x)\ , \\
e\ B_i(x) &\equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,T_{jk}\ , \quad i(j,k)=1,2,3.
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

O tri-vetor $\vec{A}(x)$ e o pseudo-tri-vetor $\vec{B}(x)$ recebem a usual expansão de Fourier:

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ e^{ikx}\ \vec{A}(k) \\
e\ \ \vec{B}(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ e^{ikx}\ \vec{B}(k)\ ,
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

e as suas componentes $\vec{A}(k)$ e $\vec{B}(k)$ se traduzem, no espaço dos momenta, por sua expansão na base $\hat{e}_i(\vec{k})$:

$$
\begin{aligned}
\vec{A}(k) &= a_i(k)\,\hat{e}_i(\vec{k})\ ; \\
\vec{B}(k) &= b_i(k)\,\hat{e}_i(\vec{k})\ , \quad i\ =\ 1,2,3\ ,
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

com a caracterização da base pelas expressões

$$
\hat{e}_i(\vec{k})\,.\,\hat{e}_j(\vec{k})\ =\ \delta_{ij}\ ;\ \ \hat{e}_i(\vec{k})\ \times\ \hat{e}_j(\vec{k})\ =\ \epsilon_{ijl}\,\hat{e}_l(\vec{k})\ ;\ \ \hat{e}_3(\vec{k})\ =\ \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\ .
$$

A ação (1.3) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \ =\ & 2\,\pi \int d^4k \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[a_i^*(k)\left(k_0^2\ +\ |\vec{k}|^2\right) a_i(k)\ +\ b_i^*(k)\left(k_0^2\ +\ |\vec{k}|^2\right) b_i(k) \right]\ + \right. \\
& -\ 2\,k_0|\vec{k}|\left[a_1^*(k)b_2(k)\ +\ b_2^*(k)a_1(k)\ -\ a_2^*(k)b_1(k)\ -\ b_1^*(k)a_2(k)\right]\ + \\
& \left. +\ a_3^*(k)\left(k_0^2\ -\ |\vec{k}|^2\right) a_3(k)\ +\ b_3^*(k)\left(k_0^2\ -\ |\vec{k}|^2\right) b_3(k) \right\}\ .
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Procede-se, então, à diagonalização da Lagrangeana, com as redefinições

$$\begin{aligned} a_1(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[c_1(k)+d_2(k)\right]\ , & a_2(k) &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[c_2(k)+d_1(k)\right]\ , & a_3(k) &\equiv c_3(k)\ , \\ b_1(k) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[d_1(k)-c_2(k)\right]\ , & b_2(k) &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[d_2(k)-c_1(k)\right]\ , & b_3(k) &\equiv d_3(k)\ . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Resulta:

$$\begin{aligned} S_M &= 2\,\pi \int d^4k \left[c_1^*(k)\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 c_1(k) + c_2^*(k)\left(k_0 - |\vec{k}|\right)^2 c_2(k) + \right. \\ &\left. + \ c_3^*(k)\left(k_0^2 - |\vec{k}|^2\right) c_3(k) + (c \longrightarrow d) \right] . \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ocorre que os vetores $\vec{A}(k)$ e $\vec{B}(k)$, suas componentes $a_i(k)$ e $b_i(k)$, e suas redefinições $c_i(k)$ e $d_i(k)$ são, em princípio, variáveis complexas. Das seis variáveis reais originais, T_{0i} e T_{jk}, chegou-se a um sistema definido por seis variáveis complexas, c_i e d_i. Existem, portanto, relações adicionais de dependência entre as variáveis c_i e d_i advindas do caráter real do tensor $T_{\mu\nu}$. De fato, $\vec{A}(x) = \vec{A}^*(x)$ implica $\vec{A}(k) = \vec{A}^*(-k)$, e daí decorre $a_i(k)\ \hat{e}_i(k) = a_i^*(-k)\ \hat{e}_i(-k)$ que, com as relações análogas para as componentes $b_i(k)$, fornece, finalmente,

$$\begin{aligned} c_3(k) &= -\, c_3^*(-k) \\ c_2(k) &= s\, c_1^*(-k) - c\, d_1^*(-k) \\ d_3(k) &= -\, d_3^*(-k) \\ d_2(k) &= c\, c_1^*(-k) + s\, d_1^*(-k)\ , \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde $c \equiv \hat{e}_1(-\vec{k})\,.\,\hat{e}_1(\vec{k}) = -\,\hat{e}_2(-\vec{k})\,.\,\hat{e}_2(\vec{k})$; $s \equiv \hat{e}_1(-\vec{k})\,.\,\hat{e}_2(\vec{k}) = \hat{e}_2(-\vec{k})\,.\,\hat{e}_1(\vec{k})$, e $s^2 + c^2 = 1$.

Como tais relações dizem respeito à definição das variáveis c_i e d_i, estas são relações off-shell e podemos impô-las já na Lagrangeana, para obter

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathrm{M}} &= 4\,\pi \int d^4k \left[c_1^*(k)\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 c_1(k) + d_1^*(k)\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 d_1(k) + \right. \\ &+ \left. c_3^*(k)\left(k_0 - |\vec{k}|\right)\left(k_0 + |\vec{k}|\right) c_3(k) + d_3^*(k)\left(k_0 - |\vec{k}|\right)\left(k_0 + |\vec{k}|\right) d_3(k)\right]. \qquad (1.11)\end{aligned}$$

A ação se decompõe, assim, em dois setores definidos pelo momentum $\vec{k} = |\vec{k}|\hat{e}_3$. A primeira linha de (1.11) é exclusivamente transversal e a segunda, longitudinal. Há quatro graus de liberdade transversais, acomodados nas duas variáveis complexas c_1 e d_1, e dois longitudinais, visto que as relações (1.10) para c_3 e d_3 deixam apenas um grau de liberdade para cada. A extremização de (1.11) com relação às variáveis $c_i^*(k)$ e $d_i^*(k)$ fornece as equações de movimento:

$$\begin{aligned}\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 c_1(k) &= 0 \\ \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 d_1(k) &= 0\ , \qquad (1.12)\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}\left(k_0 - |\vec{k}|\right)\left(k_0 + |\vec{k}|\right) c_3(k) &= 0 \\ \left(k_0 - |\vec{k}|\right)\left(k_0 + |\vec{k}|\right) d_3(k) &= 0\ . \qquad (1.13)\end{aligned}$$

As soluções gerais são:

$$\begin{aligned}c_1(k_0,\vec{k}) &= c_1(\vec{k})\,\delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \tilde{c}_1(\vec{k})\,\delta'\left(k_0 + |\vec{k}|\right) \\ e\ \ c_3(k_0,\vec{k}) &= c_3(\vec{k})\,\delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \overline{c}_3(\vec{k})\,\delta\left(k_0 - |\vec{k}|\right)\ , \qquad (1.14)\end{aligned}$$

além de expressões idênticas para as variáveis $d_1(k)$ e $d_3(k)$. Por $\delta'\left(k_0+|\vec{k}|\right)$ entende-se a derivada da distribuição, $\frac{\partial}{\partial k_0}\left(\delta\left(k_0+|\vec{k}|\right)\right)$, e as relações (1.10) fornecem ainda as igualdades

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_3(\vec{k}) &= -\,c_3^*(-\vec{k}) \\
e\ \ \overline{d}_3(\vec{k}) &= -\,d_3^*(-\vec{k})\,. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Valem, também, as inversões:

$$
c_1(\vec{k}) = \int dk_0\, c_1(k_0,\vec{k}) \quad , \quad d_1(\vec{k}) = \int dk_0\, d_1(k_0,\vec{k})\ ,
$$

$$
\widetilde{c_1}(\vec{k}) = -\int dk_0 \left(k_0+|\vec{k}|\right) c_1(k_0,\vec{k}) \quad e \quad \widetilde{d_1}(\vec{k}) = -\int dk_0 \left(k_0+|\vec{k}|\right) d_1(k_0,\vec{k})\ . \qquad (1.16)
$$

Há dois tipos diferentes de solução em (1.14): as ondas planas, de que se compõe exclusivamente o setor longitudinal e que aparecem, também, no setor transversal com o coeficiente $c_1(\vec{k})$ $\left(d_1(\vec{k})\right)$, e as soluções induzidas por $\delta'\left(k_0+|\vec{k}|\right)$, que têm a forma de $x^0 \times$ (Superposição de Ondas Planas). Estas últimas se manifestam somente no setor transversal, com magnitude definida pelo coeficiente $\widetilde{c_1}(\vec{k})$ $\left(\widetilde{d_1}(\vec{k})\right)$, e têm a característica incomum, e em princípio indesejável, de variar linearmente com o tempo (a menos da oscilação), o que contribui para uma possível magnitude infinita nos limites $t \to \pm\infty$. Ao contrário das ondas planas, típicas de dinâmica livre, as soluções de amplitude $\widetilde{c_1}(\vec{k})$ $\left(\widetilde{d_1}(\vec{k})\right)$ têm difícil interpretação física, e se realiza, então, o cálculo de observáveis com o intuito de verificar o papel desempenhado por estas soluções na teoria.

A corrente conservada associada à invariância por translação da ação (1.3), identificada com o quadrivetor energia-momentum, é dada por

$$\mathcal{P}_\mu \;=\; \int d^3x \left[\partial_\mu(T_{\alpha\beta}) \, \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\left(\partial_0(T_{\alpha\beta})\right)} \;-\; \eta_{\mu 0}\, \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right] . \tag{1.17}$$

O Hamiltoniano clássico, por sua vez, é identificado com a componente zero deste quadrivetor,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \;=\; & \int d^3x \Big[\partial_0\left(A_i(x)\right) \partial_0\left(A_i(x)\right) + \partial_0\left(B_i(x)\right) \partial_0\left(B_i(x)\right) - \partial_i\left(A_j(x)\right) \partial_i\left(A_j(x)\right) \; + \\ & - \; \partial_i\left(B_j(x)\right) \partial_i\left(B_j(x)\right) + 2\, \partial_i\left(A_i(x)\right) \partial_j\left(A_j(x)\right) + 2\, \partial_i\left(B_j(x)\right) \partial_j\left(B_i(x)\right) \Big] . \end{aligned}$$

No espaço dos momenta temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \;=\; & 2 \int d^3k \Big[\widetilde{c_1}^*(\vec{k})\, \widetilde{c_1}(\vec{k}) + |\vec{k}| \left(\widetilde{c_1}^*(\vec{k})\, c_1(\vec{k}) + c_1^*(\vec{k})\, \widetilde{c_1}(\vec{k}) \right) + \widetilde{d_1}^*(\vec{k})\, \widetilde{d_1}(\vec{k}) \; + \\ & + \; |\vec{k}| \left(\widetilde{d_1}^*(\vec{k})\, d_1(\vec{k}) + d_1^*(\vec{k})\, \widetilde{d_1}(\vec{k}) \right) + \; 2|\vec{k}|^2 \left(c_3^*(\vec{k})\, c_3(\vec{k}) + d_3^*(\vec{k})\, d_3(\vec{k}) \right) \Big] . \end{aligned} \tag{1.18}$$

Esta expressão para o Hamiltoniano clássico apresenta um problema associado às soluções de coeficiente $\widetilde{c_1}(\vec{k})$ $\left(\widetilde{d_1}(\vec{k})\right)$. As parcelas $|\vec{k}| \left(\widetilde{c_1}^*(\vec{k})\, c_1(\vec{k}) + \text{conj. complexo} \right)$ e sua equivalente para d_1, ao contrário dos demais termos que compõem (1.18), não são positivo-definidas. Esta característica do Hamiltoniano clássico livre faz antever, se nenhuma alteração surgir, problemas para a quantização da teoria, com a dificuldade evidente de se construir um espaço de Fock a partir de um estado de vácuo, desta forma mal definido. Podemos diagonalizar (1.18) introduzindo as combinações $\overline{c}_1(\vec{k}) \equiv \widetilde{c}_1(\vec{k}) + |\vec{k}| c_1(\vec{k})$ e a sua equivalente para $d_1(\vec{k})$, obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \;=\; & 2 \int d^3k \Big[\overline{c}_1^*(\vec{k})\, \overline{c}_1(\vec{k}) + \overline{d}_1^*(\vec{k})\, \overline{d}_1(\vec{k}) - |\vec{k}|^2\, c_1^*(\vec{k})\, c_1(\vec{k}) - |\vec{k}|^2\, d_1^*(\vec{k})\, d_1(\vec{k}) \; + \\ & + \; 2|\vec{k}|^2\, c_3^*(\vec{k})\, c_3(\vec{k}) + 2|\vec{k}|^2\, d_3^*(\vec{k})\, d_3(\vec{k}) \Big] . \end{aligned} \tag{1.19}$$

Este resultado, uma combinação de termos positivo e negativo-definidos, é estranho para uma teoria de campo de matéria livre, sendo usual encontrar este tipo de situação em teorias de gauge. De fato, os dois modos transversos de energia negativa são, como argumentam os autores [4], desprovidos de interpretação em termos de partículas relativísticas, em contraste com o resultado usual de energia positiva de parte do setor transverso (dois modos) e de todo o setor longitudinal (dois modos). Observa-se, ainda, que toda esta dificuldade é gerada pela manutenção das soluções de coeficiente $\widetilde{c}_1(\vec{k})$ $\left(\widetilde{d}_1(\vec{k})\right)$, que, se eliminadas, ou seja, se tomarmos $\widetilde{c}_1(\vec{k}) = \widetilde{d}_1(\vec{k}) = 0$, leva ao Hamiltoniano

$$\mathcal{P}_0^+ = 2 \int d^3k \left[2\, |\vec{k}|^2 \left(c_3^*(\vec{k})\; c_3(\vec{k}) + d_3^*(\vec{k})\; d_3(\vec{k})\right)\right] , \tag{1.20}$$

totalmente longitudinal e positivo-definido.

A dificuldade de interpretação física dos modos negativos gerados, em última análise, pela presença dos coeficientes $\widetilde{c}_1(\vec{k})$ e $\widetilde{d}_1(\vec{k})$ na teoria, bem como a estranha dependência linear no tempo deste tipo de solução, em contraste com a usual superposição de ondas planas, levaram os autores a classificar tais contribuições como não-físicas, e, desse modo, a "projeção" no setor físico, já a nível clássico, foi feita tomando-se $\widetilde{c}_1(\vec{k}) = \widetilde{d}_1(\vec{k}) = 0$. Esta imposição, contudo, não só elimina os modos negativos do Hamiltoniano como todo o setor transverso, conforme se verifica em (1.20). Também o vetor momentum, originariamente dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= 2 \int d^3k \Big[k_i \Big(\widetilde{c}_1^*(\vec{k})\; c_1(\vec{k}) + c_1^*(\vec{k})\; \widetilde{c}_1(\vec{k}) + 2\, |\vec{k}| c_3^*(\vec{k})\; c_3(\vec{k})\ + \\ &+ \ \text{idem com } c \to d \Big) \Big] , \end{aligned} \tag{1.21}$$

reduz-se apenas ao setor longitudinal, se fizermos $\widetilde{c}_1 = \widetilde{d}_1 = 0$. Assim sendo, a classificação de não-físico vai se estendendo a todo o setor transverso. Com as redefinições $c_3^+(d_3^+)(\vec{k}) = 2\sqrt{k_0}\, c_3^*(d_3^*)(\vec{k})$, $c_3^-(d_3^-)(\vec{k}) = 2\sqrt{k_0}\, c_3(d_3)(\vec{k})$, $k_0 = |\vec{k}|$, chega-se à expressão usual

$$\mathcal{P}_\mu \;=\; \int d^3k\; k_\mu \left(c_3^+(\vec{k})\; c_3^-(\vec{k}) + d_3^+(\vec{k})\; d_3^-(\vec{k})\right) \; . \tag{1.22}$$

A imposição de $\tilde{c}_1 = \tilde{d}_1 = 0$, contudo, assume um caráter um tanto quanto artificial, tendo sido introduzida de maneira *ad hoc*, como solução para os possíveis problemas que a teoria pode conter. De fato, não foi apresentada nenhuma justificativa que nascesse do próprio formalismo, da definição do modelo, para tomarmos como nulos os coeficientes $\tilde{c}_1$ e $\tilde{d}_1$. Vale ressaltar, todavia, que os mecanismos usuais de tratamento de modos negativos no Hamiltoniano, nos modelos em que é usual encontrá-los - teorias de gauge, não estão à nossa disposição: não há liberdade de gauge, e as redefinições de setor físico que esta liberdade viabiliza não surgem, portanto, naturalmente neste modelo. Aparentemente, então, se a intenção for buscar uma solução já a nível clássico, a imposição de $\tilde{c}_1 = \tilde{d}_1 = 0$ pode não apresentar contrapartida mais "suave", a não ser que o mesmo formalismo que gerou as soluções com esses coeficientes forneça, também, condições de consistência que os anulem.

Neste sentido, há dois resultados interessantes acerca de restrições ao valor dos coeficientes em questão. O primeiro diz respeito ao fato de que, diferentemente do modelo para o campo tensorial de gauge, a equação de movimento obtida para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$, que no espaço das configurações é dada por

$$\Box\, T_{\mu\nu}(x) + 2\, \partial^\lambda \left[\partial_\mu \left(T_{\nu\lambda}(x)\right) - \partial_\nu \left(T_{\mu\lambda}(x)\right)\right] \;=\; 0 \; , \tag{1.23}$$

oferece mais uma equação, obtida via uma nova derivação:

$$
\begin{aligned}
&\partial^{\mu}\left(\Box T_{\mu\nu}\right) \;+\; 2\,\partial^{\lambda}\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}\,T_{\nu\lambda}\right) \;-\; 2\,\partial_{\nu}\partial^{\mu}\partial^{\lambda}\left(T_{\mu\lambda}\right) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad &\partial^{\mu}\left(\Box T_{\mu\nu}\right) \;-\; 2\,\partial^{\lambda}\left(\Box T_{\lambda\nu}\right) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad &\Box\left(\partial^{\mu}\,T_{\mu\nu}\right) \;=\; 0\,. \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

A eq. (1.24), que não aparece na teoria de gauge para $T_{\mu\nu}$, tem um aspecto bastante promissor. É inteiramente análoga à equação de movimento que se obtém na teoria para o campo de gauge vetorial A_{μ}, quando se introduz um termo de fixação de gauge via um multiplicador de Lagrange, com a intenção de reproduzir a escolha de gauge de Lorentz, $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$, e se toma a equação de movimento para o multiplicador: $\Box\ \partial_{\mu}A^{\mu} = 0$. Esta comparação gera a esperança de que (1.24) funcione como uma "fixação de gauge embutida" no formalismo, e promova a anulação dos coeficientes $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{d}_1$, eliminando os modos negativos de (1.19). Ocorre, entretanto, que o procedimento usado para provar, classicamente, a equivalência entre $\Box\ \partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ e o gauge de Lorentz $\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ consiste na imposição de condições de contorno apropriadas ao escalar $\partial_{\mu}A^{\mu}$ no infinito, e não é claro, para o caso do campo tensorial, que procedimento semelhante possa ser adotado, devido ao comportamento inusitado de algumas de suas soluções no infinito temporal. A equivalência clássica entre (1.24) e o análogo do gauge de Lorentz $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$ seria, se a intenção for anular os coeficientes "patológicos", essencial. De fato, as quatro equações (1.24) são identicamente satisfeitas por todas as soluções encontradas em (1.14), sem, portanto, o surgimento de qualquer restrição aos coeficientes $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{d}_1$. Já a expressão $\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, todavia, resulta suficiente para eliminar $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{d}_1$, sem gerar restrições aos coeficientes das ondas planas. Isto confere à relação $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ o status de resposta clássica ao problema dos modos negativos, mas, a não ser que a equivalência entre (1.24) e esta relação seja demonstrada, não parece haver modo de se chegar a ela naturalmente, partindo apenas do formalismo original, e a sua simples imposição repetiria o caráter *ad hoc* da eliminação sumária de $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{d}_1$.

Há, ainda, um segundo resultado. Se tomarmos a ação (1.3) on-shell, ou seja, se substituirmos em (1.3) as soluções (1.14) das equações de campo, resultará:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{M(on\text{-}shell)}} = \int dx^0 \int d^3k \Big(|\widetilde{c}_1(\vec{k})|^2 + |\widetilde{d}_1(\vec{k})|^2 \Big) . \tag{1.25}$$

A ação livre on-shell merece, ainda, a seguinte análise: as eqs. (1.12),(1.13) significam

$$\begin{aligned}
\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 c_1(k_0, \vec{k}) &= 0 \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad c_1(k_0, \vec{k}) &= c_1(\vec{k})\delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \widetilde{c}_1(\vec{k})\delta'\left(k_0 + |\vec{k}|\right) \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \int dk_0\, f(k_0) \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 \left[c_1(\vec{k})\delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \widetilde{c}_1(\vec{k})\delta'\left(k_0 + |\vec{k}|\right)\right] = 0 \,,\ \forall f(k_0)^1 .$$

Se, em particular, tomarmos

$$f(k_0) = c_1^*(\vec{k}) \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2} \right) + \widetilde{c}_1^*(\vec{k}) \left(-\frac{2n^3}{\sqrt{\pi}} \left(k_0 + |\vec{k}|\right) e^{-n^2\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2} \right) ,$$

continuará valendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n \equiv \int dk_0 \left\{ c_1^*(\vec{k}) \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2} \right) + \widetilde{c}_1^*(\vec{k}) \left(-\frac{2n^3}{\sqrt{\pi}} \left(k_0 + |\vec{k}|\right) e^{-n^2\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2} \right) \right\} \quad \times \\
\times \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 \left[c_1(\vec{k})\delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \widetilde{c}_1(\vec{k})\delta'\left(k_0 + |\vec{k}|\right)\right] = 0 \,.
\end{aligned}$$

[1] Pelo menos uma vez diferenciável e de derivada contínua em $-|\vec{k}|$.

Se agora realizarmos o limite de uma seqüência destas integrais, $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n$, obteremos novamente $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}_n = 0$, já que cada termo da seqüência é nulo, $\forall n$. Ocorre que a solução formal de (1.12) é qualquer objeto matemático que verifique

$$\int dk_0 \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 c_1(k_0, \vec{k})\, f(k_0) \;=\; 0 \;,\; \forall f(k_0).$$

Assim sendo, a solução $c_{1_{\text{on-shell}}}(k_0, \vec{k})$ pode ser escrita simbolicamente como combinação de distribuições na forma (1.14), ou traduzida numa seqüência delta [10], um limite tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int dk_0\, f(k_0) \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 \phi_n(k_0, \vec{k}) \;=\; 0 \;, \forall f(k_0) \;,$$

com $\phi_n(k_0, \vec{k}) = a(\vec{k}) \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2\left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2} \right) + b(\vec{k}) \left(- \frac{2n^3}{\sqrt{\pi}} \left(k_0 + |\vec{k}|\right) e^{-n^2\left(k_0+|\vec{k}|\right)^2} \right)$, por exemplo.

Ou seja, tanto $c_{1_{\text{on-shell}}}(k_0, \vec{k})$ quanto $c^*_{1_{\text{on-shell}}}(k_0, \vec{k})$ podem, sob integração, ser representadas por seqüências delta construídas, por exemplo, a partir das Gaussianas introduzidas acima. Mas então a ação livre on-shell pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{M(on-shell)}} \;&=\; \lim_{n\to\infty} \int dk_0 \left\{ c_1^*(\vec{k}) \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\,n^2\left(k_0+|\vec{k}|\right)^2} \right) + \tilde{c}_1^*(\vec{k})\, \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\,n^2\left(k_0+|\vec{k}|\right)^2} \right) \right\} \;\times \\
&\times\; \left(k_0 + |\vec{k}|\right)^2 \left[c_1(\vec{k}) \delta\left(k_0 + |\vec{k}|\right) + \tilde{c}_1(\vec{k}) \delta'\left(k_0 + |\vec{k}|\right) \right] \;+ \\
&+\; \text{análogo para } d_1 + \text{SETOR LONGITUDINAL} \;, \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

onde escrevemos, sob integração, $c^*_{1_{\text{on-shell}}}(k_0, \vec{k})$ explicitamente como uma seqüência delta, e deixamos $c_{1_{\text{on-shell}}}(k_0, \vec{k})$ representada na forma original (1.14). Mas o limite acima é, como já vimos, nulo, e, portanto, podemos completar (1.25) na forma

$$\mathcal{S}_{\text{M(on-shell)}} \;=\; \int dx^0 \int d^3k \left(|\tilde{c}_1(\vec{k})|^2 \;+\; |\tilde{d}_1(\vec{k})|^2 \right) \;=\; 0 \;. \qquad (1.27)$$

Isto tem como conseqüência

$$\widetilde{c}_1(\vec{k}) \;=\; \widetilde{d}_1(\vec{k}) \;=\; 0 \,, \tag{1.28}$$

o que resolve o problema dos termos negativo-definidos no Hamiltoniano livre e retira, também, todo o setor transverso do quadrivetor $\mathcal{P}_\mu$, o que equivale a eliminar este setor da parte cinética (livre) da teoria para o tensor de matéria $T_{\mu\nu}$ (podendo, contudo, haver o reaparecimento do setor transverso na presença de interações). Vale ressaltar, ainda, que qualquer outro resultado diferente de (1.28) deixa a ação on-shell (1.25) infinita, devido à integração $\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0$ e ao caráter positivo-definido de cada um dos termos do integrando de $\int d^3k$. Esta divergência da ação on-shell geraria estranheza pelo fato de ser sua Lagrangeana proporcional às equações de movimento (como pode ser melhor visto em (1.11)), além de trazer dificuldades à interpretação de (1.25) como ação mínima.

A caracterização do tensor $T_{\mu\nu}$ como campo de matéria é ratificada, ainda, pela existência de um propagador livre bem definido, dado por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(k) \;&=\; \frac{i}{k^2+i\epsilon}\bigg[\,\frac{1}{2}\,\left(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}-\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}\right)\;+ \\ &-\;\frac{\eta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta+\eta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha-\eta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha-\eta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta}{k^2}\bigg]\;. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Prosseguindo na análise das propriedades do campo tensorial $T_{\mu\nu}$, os autores da ref.[4] apresentam o cálculo de mais um observável, a helicidade. A projeção do spin na direção do movimento é, para um campo sem massa, a grandeza relevante na determinação da representação do grupo de Poincaré que vai abrigar os estados das partículas excitados por este campo. O tri-vetor de spin,

$$\vec{S} \;=\; \int d^3x\Big(\,\big[\vec{A}\times\partial_0\vec{A}\big]+\big[\vec{B}\times\partial_0\vec{B}\big]+\big[\vec{A}\times\big(\vec{\partial}\times\vec{B}\big)\big]-\big[\vec{B}\times\big(\vec{\partial}\times\vec{A}\big)\big]\,\Big)\,, \tag{1.30}$$

resulta nulo, independentemente da validade de (1.28). Isto significa que qualquer estado excitado por qualquer componente do tensor $T_{\mu\nu}$ pertence, necessariamente, à representação escalar do grupo de Poincaré.

O caráter não-massivo do campo $T_{\mu\nu}$ é corroborado pela condição de positividade do Hamiltoniano, visto que um termo de massa do tipo $-\,m^2 T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, quando incorporado à Lagrangeana, gera uma contribuição ao Hamiltoniano na forma

$$-\,m^2 T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \longrightarrow +\,m^2 T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \;=\; -\,2m^2\left(T_{0i}\right)^2 + m^2\left(T_{ij}\right)^2 \left(\text{índices espaciais somados}\right) ,$$

que não é positivo-definida (e também não permite nenhuma combinação proveitosa com o termo de sinal indefinido presente em (1.18)).

Outra condição proíbe o termo de massa. A ação (1.3) apresenta uma simetria global adicional, traduzida na invariância perante as transformações

$$\delta T_{\mu\nu} \;=\; \alpha\left(\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta}\right) , \tag{1.31}$$

onde α é o parâmetro global e $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor de Levi- Cività quadridimensional (de Minkowski). Mais compactamente,

$$\delta T_{\mu\nu} \;=\; \alpha\,\widetilde{T}_{\mu\nu} , \tag{1.32}$$

com $\widetilde{T}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$.

Esta simetria, tornada local, permite a construção de um modelo para a interação do tensor $T_{\mu\nu}$ com um campo de gauge A_μ, e a preservação desta interessante possibilidade requer, mais uma vez, a exclusão de um termo de massa, cuja forma viola a invariância de (1.3) sob (1.32).

Avdeev e Chizhov exibem ainda a carga axial conservada associada à simetria (1.32), e o fato relevante é que, novamente, se eliminados os coeficientes $\tilde{c}_1$ e $\tilde{d}_1$ da teoria, a carga resulta puramente longitudinal. Isto endossa a conclusão de que as soluções em onda plana do setor transversal não oferecem, isoladamente, nenhuma contribuição dinâmica na camada de massa, ficando o sistema livre restrito a dois graus de liberdade longitudinais. Vale a ressalva, contudo, de que os graus de liberdade transversais, mesmo valendo (1.28), readquirem sua relevância física se acrescentarmos à teoria interações com outros campos ou auto-interação.

Os termos de auto-interação permitidos por covariância manifesta de Lorentz são as formas quárticas

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \quad e \quad T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu} \ .$$

A simetria quiral global (1.32) não proíbe tais termos, mas impõe os coeficientes relativos

$$\frac{1}{2}\, T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \ - \ 2\, T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu} \ ,$$

o que leva à construção, a partir de (1.3), de uma ação mais geral invariante por (1.32), na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathrm{M}\,+\,\varphi^4} \ &= \ \int d^4x \left[\frac{1}{2}\, \partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu}) \ - \ 2\, \partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda}) \ + \right. \\ &+ \ \left. \frac{1}{4}\, q\Big(\frac{1}{2}\, T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \ - \ 2\, T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu}\Big)\right] \ , \end{aligned} \tag{1.33}$$

onde q é uma constante adimensional.

A condição de positividade do Hamiltoniano não é afetada pela incorporação da auto-interação à teoria, desde que tenhamos o cuidado de tomar

$$q \geq 0 \ , \tag{1.34}$$

visto que $\frac{1}{4}\, q\Big(\dfrac{1}{2}\, T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\, T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu}\Big)$ pode ser escrito como

$$q\left[\frac{1}{2}\left(A_i^2 - B_i^2\right)^2 + 2\left(A_iB_i\right)^2\right] \ ,$$

não-negativo-definido se valer $q \geq 0$. Isto consagra a ação (1.33) como teoria para o campo de matéria $T_{\mu\nu}$ com simetria global quiral dada por (1.32).

1.2 O Modelo de Avdeev-Chizhov

A generalização de (1.33), no sentido de dotá-la de uma simetria local, impõe-se como continuação natural da análise das propriedades do tensor $T_{\mu\nu}$. Com este intuito, reescreve-se (1.32), tomando $\alpha \equiv -\ 2h\omega$, e explicita-se a regra de transformação para o objeto $\widetilde{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta}$, conseqüência imediata de (1.32), resultando disto as expressões

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu} &= -\ 2h\omega\ \widetilde{T}_{\mu\nu} \\ e\ \ \delta\widetilde{T}_{\mu\nu} &= +\ 2h\omega\ T_{\mu\nu}\ . \end{aligned} \tag{1.35}$$

Conferindo, agora, igual status ao tensor $T_{\mu\nu}$ e ao seu dual $\widetilde{T}_{\mu\nu}$, reescreve-se o termo cinético de (1.33), sob integração, na forma

$$\begin{aligned} \int\ d^4x\ \ \Big(\frac{1}{2}\ \partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu})\ -\ 2\ \partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda})\Big)\ = \\ =\ -\int d^4x\left(\partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda}) + \partial_\mu(\widetilde{T}^{\mu\lambda})\partial^\nu(\widetilde{T}_{\nu\lambda})\right)\ . \end{aligned} \tag{1.36}$$

A partir deste ponto, o procedimento é o usual. Permite-se ao parâmetro ω uma dependência no espaço-tempo, $\omega = \omega(x)$. Como conseqüência, $\partial_\alpha(T_{\mu\nu})$ perde seu caráter tensorial em relação ao grupo de transformações traduzido por (1.35) (com $\omega(x)$), e introduz-se um campo de gauge, $A_\mu(x)$, de modo a viabilizar uma redefinição de $\partial_\alpha(T_{\mu\nu})$ que apresente comportamento tensorial. Busca-se, então, um objeto $\nabla_\alpha(T_{\mu\nu})$ tal que

$$\begin{aligned} \delta\Big(\nabla_\alpha(T_{\mu\nu}(x))\Big) &= -\,2h\,\omega(x)\,\nabla_\alpha\left(\tilde{T}_{\mu\nu}(x)\right)\,, \\ e\ \ \delta\Big(\nabla_\alpha(\tilde{T}_{\mu\nu}(x))\Big) &= +\,2h\,\omega(x)\,\nabla_\alpha\left(T_{\mu\nu}(x)\right)\,,\ \text{naturalmente.} \end{aligned} \tag{1.37}$$

As derivadas covariantes que satisfazem (1.37) são dadas por [7]:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(T_{\mu\nu}) &= \partial_\alpha\left(T_{\mu\nu}\right) + 2h\,A_\alpha\tilde{T}_{\mu\nu} \\ e\ \ \nabla_\alpha(\tilde{T}_{\mu\nu}) &= \partial_\alpha\left(\tilde{T}_{\mu\nu}\right) - 2h\,A_\alpha T_{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{1.38}$$

onde tomamos

$$\delta A_\mu = \partial_\mu(\omega)\,. \tag{1.39}$$

Substituindo as derivadas comuns de (1.36) pelas derivadas covariantes (1.38) resulta, para a versão com simetria local do termo cinético de (1.33), a expressão

$$\text{Termo cin. local} = -\left[\nabla_\mu(T^{\mu\lambda})\nabla^\nu(T_{\nu\lambda}) + \nabla_\mu(\tilde{T}^{\mu\lambda})\nabla^\nu(\tilde{T}_{\nu\lambda})\right]. \tag{1.40}$$

Introduzindo ainda o termo cinético para o campo de gauge, $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, obtém-se a versão localmente invariante de (1.33) na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{Local}}_{\text{M}\,+\,\varphi^4} &= \int d^4x\Big[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \nabla_\mu(T^{\mu\lambda})\nabla^\nu(T_{\nu\lambda}) - \nabla_\mu(\tilde{T}^{\mu\lambda})\nabla^\nu(\tilde{T}_{\nu\lambda})\ + \\ &+\ \frac{1}{4}\,q\Big(\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\,T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu}\Big)\Big]\,, \end{aligned} \tag{1.41}$$

e, abrindo as derivadas covariantes, escreve-se

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\text{Local}}_{\text{M} + \varphi^4} &= \int d^4x \Big[-\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu}) - 2\,\partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda}) \; + \\
&+ \; 4h\, A_\mu\Big(T^{\mu\nu}\,\partial^\lambda(\widetilde{T}_{\lambda\nu}) - \widetilde{T}^{\mu\nu}\,\partial^\lambda(T_{\lambda\nu})\Big) \; + \\
&+ \; 4h^2\Big(\frac{1}{2}\,A_\lambda T_{\mu\nu}A^\lambda T^{\mu\nu} - 2\,A_\mu T^{\mu\lambda}A^\nu T_{\nu\lambda}\Big) \; + \\
&+ \; \frac{1}{4}\,q\Big(\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\,T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu}\Big)\Big] \,. \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

Se acrescentarmos, também, um setor fermiônico característico de eletrodinâmica quiral, construído a partir de um espinor de Dirac, e fornecermos uma interação direta entre o espinor e o campo tensorial $T_{\mu\nu}$, na forma de um termo de Yukawa, obteremos uma extensão de (1.42) expressa por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{Avdeev-Chizhov}} &= \int d^4x \Big[\frac{1}{2}\,\partial_\lambda(T_{\mu\nu})\partial^\lambda(T^{\mu\nu}) - 2\,\partial_\mu(T^{\mu\lambda})\partial^\nu(T_{\nu\lambda}) \; - \; \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \\
&+ \; i\,\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \; + \; h\,\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu A_\mu\psi \; + \; 4h\,A_\mu\Big(T^{\mu\nu}\,\partial^\lambda(\widetilde{T}_{\lambda\nu}) - \widetilde{T}^{\mu\nu}\,\partial^\lambda(T_{\lambda\nu})\Big) \; + \\
&+ \; 4h^2\Big(\frac{1}{2}\,A_\lambda T_{\mu\nu}A^\lambda T^{\mu\nu} - 2\,A_\mu T^{\mu\lambda}A^\nu T_{\nu\lambda}\Big) \; + y\,\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\psi \; + \\
&+ \; \frac{1}{4}\,q\Big(\frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\,T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}T^{\beta\mu}\Big)\Big] \,, \qquad (1.43)
\end{aligned}
$$

que é a integral de ação para a densidade de Lagrangeana proposta por L. Avdeev e M. Chizhov [3] (com $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$). Esta ação é invariante pelo conjunto de transformações

$$
\begin{aligned}
\delta T_{\mu\nu} &= -\,2h\,\omega\,\widetilde{T}_{\mu\nu} \,, \;\; \delta\widetilde{T}_{\mu\nu} \;=\; +\,2h\,\omega\,T_{\mu\nu} \,, \\
\delta A_\mu &= \partial_\mu(\omega) \,, \\
e \;\; \delta\psi &= -\,ih\,\omega\,\gamma_5\psi \,, \;\; \delta\overline{\psi} \;=\; -\,ih\,\omega\,\overline{\psi}\gamma_5 \,. \qquad (1.44)
\end{aligned}
$$

Os termos de massa continuam, como no caso global, proibidos, inclusive para o espinor ψ, e a presença de massa na teoria fica, assim, restrita à construção de um mecanismo de quebra espontânea de simetria. A inclusão do setor fermiônico e do termo de Yukawa tem por objetivo dar fundamentação teórica ao modelo eletrofraco estendido, introduzido por M. Chizhov recentemente [5], em nível fenomenológico, e que fornece resultados interessantes para dois decaimentos eletrofracos específicos. Em nível clássico, a introdução de um termo de Yukawa é, em princípio, admissível, mas é questionável se um campo como o tensor $T_{\mu\nu}$, cujas características estão sob estudo, aceita, numa análise quântica , uma tal interação.

Para aferir o comportamento do modelo no contexto quântico, Avdeev e Chizhov realizam cálculos relativos à sua renormalização, numa abordagem perturbativa, a 1-loop. Inicialmente, ressaltam a introdução, por correções radiativas, de um termo que quebra a invariância de gauge quiral do correspondente quântico do modelo proposto. Este termo de quebra, bem conhecido na literatura, é a anomalia de Adler-Bell-Jackiw [11], uma anomalia de gauge presente também na QED quiral, e cujo aparecimento nesta teoria era perfeitamente previsível. A sua caracterização como anomalia, traduzida numa quebra de simetria impossível de ser cancelada através de um contratermo (este último "produzido" por uma viável redefinição dos parâmetros da teoria - magnitude dos campos e constantes de acoplamento), não impede o tratamento do termo de Adler-Bell-Jackiw, que tem a forma

$$\mathcal{A} = c\, \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\, \partial_\alpha (A_\beta)\, \partial_\mu (A_\nu) \quad . \tag{1.45}$$

De fato, o coeficiente "c" de (1.45) pode ter seu valor controlado pelo ajuste do conjunto de campos que contribui para a anomalia - campos em interação com A_μ , e é bem conhecida a prescrição para a sua anulação a 1-loop: basta introduzir um parceiro para cada campo, com carga de gauge oposta. Eliminado o coeficiente a 1-loop, o teorema de Adler-Bardeen [12] garante o seu desaparecimento em todas as ordens da série perturbativa, preservando, assim, a simetria de gauge quiral no modelo quântico e afirmando a sua renormalizabilidade. Esta última conclusão, contudo, se restringe ao tratamento de (1.45), e perde a sua justificativa se houver, neste modelo, alguma outra anomalia, por sua vez intratável.

De fato, pode-se demonstrar a presença de uma outra anomalia [6], dada pela expressão

$$\mathcal{A}_{\text{Matéria}} = \eta \, \overline{\psi} \, \sigma^{\mu\nu} \, \gamma_5 \, \psi \, T_{\mu\nu} \quad , \tag{1.46}$$

com a característica notável de depender exclusivamente dos campos de matéria ψ e $T_{\mu\nu}$. O surgimento deste termo de quebra, verificado pelo método de renormalização algébrica, tem conseqüências decisivas na definição de um modelo renormalizável para o campo tensorial de matéria $T_{\mu\nu}$, restringindo fortemente o seu setor de interação. De fato, a necessidade de promover o cancelamento da anomalia (1.46) e a existência de uma prescrição para o tratamento de (1.45), com a anulação do coeficiente "c" a 1-loop através da introdução de campos com cargas opostas às originais, induzem à busca de um possível tratamento para (1.46), ou seja, sugerem a tentativa de realizar, de algum modo, a anulação do coeficiente numérico η. Neste sentido, Lemes, Renan e Sorella, no mesmo trabalho em que demonstram a presença de (1.46) no modelo, procedem à análise dos diagramas a 1-loop 1PI (one particle irreducible) que contribuem para η, e explicitam quantos e de que tipo são esses diagramas, observando, também, que todos são construídos a partir do termo de Yukawa, $y\ \overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\psi$. Ocorre, todavia, e este ponto é crucial, que o cancelamento da anomalia de Adler-Bell-Jackiw não se encerra na anulação do coeficiente "c" a 1-loop. Faz-se necessário, como já foi dito, o uso do teorema de Adler-Bardeen, que garante que esta anulação a 1-loop implica anulação a todas as ordens da série perturbativa. Isto posto, Lemes, Renan e Sorella advertem para o fato de que o teorema de Adler-Bardeen tem sua demonstração restrita a anomalias de gauge, e que este não é o caso de (1.46). Ou seja, mesmo que o cálculo dos diagramas que contribuem para η a 1-loop indicasse para este coeficiente o valor nulo, ou mesmo que se vislumbrasse algum artifício para zerar η nesta ordem, não haveria qualquer garantia de que tal anulação se preservaria em outras ordens. O cancelamento da anomalia de matéria (1.46) a 1-loop, se acontecesse, não seria, portanto, suficiente para garantir a preservação da simetria de gauge em nível quântico. Mais adiante, descreveremos a solução apresentada por Lemes, Renan e Sorella para o problema gerado pela anomalia (1.46), que significará uma redução do setor de interação no modelo para o tensor de matéria $T_{\mu\nu}$.

Desconsiderando esta possibilidade, Avdeev e Chizhov prosseguem no tratamento de (1.45)(o que é também indispensável), acrescentando à teoria o espinor de Dirac χ, de carga $-\ h$, e o tensor $U_{\mu\nu}$, de carga $-\ 2h$ (ψ e $T_{\mu\nu}$ tomados com carga $+\ h$ e $+\ 2h$, respectivamente). Este procedimento enriquece a teoria com vários termos adicionais, a começar pelos termos cinéticos e de acoplamento mínimo com A_μ, para χ e $U_{\mu\nu}$, iguais aos originais para ψ e $T_{\mu\nu}$ com a correção $h \rightarrow -\ h$, além das parcelas de interação correspondentes,

$$z\,\overline{\chi}\,\sigma^{\mu\nu}\,U_{\mu\nu}\,\chi\,+\,\frac{1}{4}\,r\Big(\frac{1}{2}\,U_{\mu\nu}U^{\mu\nu}U_{\alpha\beta}U^{\alpha\beta}-2\,U_{\mu\nu}U^{\nu\alpha}U_{\alpha\beta}U^{\beta\mu}\Big)\,,$$

e de termos de interação entre os tensores

$$\begin{aligned}\longrightarrow\quad & \frac{1}{2}\,s\Big(T_{\mu\nu}U^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}U^{\alpha\beta}\Big)+v\Big(\frac{1}{4}\,T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}U_{\alpha\beta}U^{\alpha\beta}-T_{\mu\nu}T^{\nu\alpha}U_{\alpha\beta}U^{\beta\mu}\Big)\;+\\ +\quad & w\Big(\frac{1}{4}\,T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}U_{\alpha\beta}U^{\alpha\beta}-T_{\mu\nu}U^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta}U^{\beta\mu}\Big)\,.\end{aligned}$$

Há, ainda, um outro termo invariante de gauge que poderia, em princípio, figurar na teoria, o termo de massa misto $m^2T_{\alpha\beta}U^{\beta\alpha}$. Ocorre, entretanto, que a introdução de massa no modelo por este processo geraria estados de táquion, e a conseqüente violação da causalidade, como será demonstrado para o análogo supersimétrico de $m^2T_{\alpha\beta}U^{\beta\alpha}$. Abandona-se, então, desde já, a possibilidade de um termo de massa misto, que, ausente da ação clássica, não será ressucitado por correções radiativas, deixando, mais uma vez, a presença de massa restrita a um mecanismo de quebra espontânea de simetria.

A prescrição para o tratamento de (1.45) diz respeito, na verdade, à anulação da soma das cargas de gauge dos campos que contribuem para a anomalia, soma à qual é proporcional o coeficiente "c" (mais precisamente, para os férmions, "c" é proporcional à soma dos cubos de suas cargas, observado que não haja termos de interação direta - "mistura" - entre os férmions). Isto abre espaço para o incremento do modelo com outros pares de espinores de cargas opostas h e $-\,h$, ou, equivalentemente, para dotarmos χ e ψ de um índice isotópico, tomando χ_i e ψ_i, com $i = 1, \cdots, n$. Tal procedimento preserva o valor nulo de "c" e mantém, portanto, o cancelamento da anomalia (1.45).

Para dar prosseguimento aos cálculos a 1-loop os autores obtêm propagadores e regras de Feynman [3], o que é realizável após a fixação do gauge, efetivada através do gauge de Feynman. Vale ressaltar, neste ponto, que a introdução de um termo de fixação de gauge na ação do modelo, com a forma

$$\int d^4x \; - \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A^\mu\right) \left(\partial_\nu A^\nu\right) \; , \tag{1.47}$$

não compromete de modo nenhum a sua renormalizabilidade. Do ponto de vista funcional, a quebra de simetria gerada pela presença de (1.47) na ação é linear (no campo A_μ), e tais quebras não precisam ser renormalizadas [13]. Ambigüidades na avaliação de divergências a 1-loop são removidas com o emprego de regularização por redução dimensional, e os autores apresentam, finalmente, seus resultados para o grupo de renormalização, com expressões para as funções β e dimensões anômalas dos campos, entre as quais se destaca

$$\beta_{h^2} \;=\; \gamma_{\mathrm{A}}\, h^2 \;=\; \left(16\,\pi^2\right)^{-1} \left(\frac{8}{3}\,n - 6\right) h^4 \; , \tag{1.48}$$

que explicita a função β para a carga de gauge h, escrita em termos do valor máximo "n" do índice isotópico de χ_i e ψ_i.

O resultado (1.48) é extremamente interessante porque implica, para $n = 1$ e $n = 2$, um comportamento assintoticamente livre para a carga de gauge. Isto é possível graças à contribuição negativa para β_{h^2} fornecida pelo campo tensorial de matéria $T_{\mu\nu}$, capaz de compensar, para $n = 1, 2$, a usual contribuição positiva dos espinores. A observação desta característica do campo tensorial é, sem dúvida, um dos resultados mais relevantes obtidos por Avdeev e Chizhov na análise de suas propriedades.

Avdeev e Chizhov revelam, ainda, a existência de uma solução especial do grupo de renormalização que estabelece proporcionalidade entre as cargas de Yukawa, y e z, e a carga de gauge h, através da relação

$$y^2 = z^2 = \left(2 - \frac{11}{9-n}\right) h^2 \,, \tag{1.49}$$

que admite valores reais para y e z se $n < 3,5$ ou $n > 9$. Para os casos interessantes $n = 1$ e $n = 2$, contudo, os autores advertem que não há soluções especiais capazes de relacionar as demais constantes de acoplamento com a carga de gauge h, de modo consistente com as funções β dessas outras constantes. Isto implica, por exemplo, que a auto-interação dos campos tensoriais não diminui assintoticamente no limite ultra-violeta, e, portanto, que correções radiativas de ordem superior, que já trazem contribuição das interações quárticas à β_{h^2}, podem tornar instável o resultado de liberdade assintótica de h. De qualquer forma, a contribuição perturbativamente mais relevante, a de 1-loop, garante o interesse pelo comportamento evidenciado em (1.48). Conjectura-se, mesmo assim, a respeito de uma possível solução especial de uma carga, obtida a partir da introdução de mais campos no modelo, no contexto da implementação de alguma outra simetria, ou, como sugerem os autores, de supersimetria.

O interesse despertado por resultados como (1.48), que abre a possibilidade de descrição de uma nova modalidade de interação em teorias de gauge, bem como a necessidade de averiguar a presença, ou ausência, de alguma outra anomalia no modelo em questão, além da já considerada anomalia de Adler-Bell-Jackiw, motivou a realização de mais dois trabalhos acerca das propriedades do campo tensorial antissimétrico de matéria. Lemes, Renan e Sorella [6, 7] abordaram, no primeiro trabalho, a problemática da renormalização do modelo proposto por Avdeev e Chizhov, fazendo uso de um procedimento independente de regularizações: o método de renormalização algébrica. Conforme já foi mencionado, esta análise levou à identificação de uma outra anomalia, (1.46), intratável pelo teorema de Adler-Bardeen, por caracterizar-se como uma "anomalia de matéria". A constatação de que toda contribuição para (1.46) é oriunda do termo de Yukawa, $y\,\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}T_{\mu\nu}\psi$, levou os autores a adotar a exclusão deste termo de interação como solução para a renormalizabilidade do modelo de Avdeev-Chizhov. Isto foi realizado, formalmente, com a imposição de uma simetria discreta adicional, a invariância da ação clássica (e automaticamente da quântica, por se tratar de simetria discreta) sob

$$T_{\mu\nu} \longrightarrow -\widetilde{T}_{\mu\nu} \ . \tag{1.50}$$

De fato, (1.50) proíbe o termo de Yukawa na ação clássica, e os autores demonstraram a impossibilidade de sua reintrodução por correções radiativas. A simetria discreta (1.50) evita, desse modo, o aparecimento da anomalia (1.46), e, juntamente com o tratamento usual dado à anomalia (1.45), permite a preservação da simetria local de gauge em nível quântico. Vale ressaltar, ainda, que a imposição de (1.50) não é propriamente uma prescrição de tratamento de (1.46), procedimento que demonstrou-se infrutífero, mas uma maneira de evitar o seu aparecimento na teoria. Obviamente, o campo tensorial $U_{\mu\nu}$, de carga oposta à $T_{\mu\nu}$, tem suas versões de (1.46) e (1.50), o que impede o termo de Yukawa $z\,\overline{\chi}\sigma^{\mu\nu}U_{\mu\nu}\chi$, introduzido por Avdeev e Chizhov.

A eliminação da interação direta entre o espinor, ψ, e o campo tensorial, $T_{\mu\nu}$, desfaz o interesse pela manutenção do setor de eletrodinâmica na ação clássica, que assim, desconexo, não apresenta possibilidade de informação nova. Isto compromete, também, a possível interpretação fenomenológica do modelo na forma como é sugerida por um trabalho anterior de M. Chizhov [5], o que não impede alguma eventual reinterpretação do papel do campo tensorial de matéria na fenomenologia.

Adota-se, então, a ação (1.42) como teoria renormalizável, e Lemes, Renan e Sorella apresentam, no segundo trabalho [7], uma reformulação de (1.42), que passa a ter como objeto dinâmico fundamental um campo tensorial antissimétrico auto-dual complexo. A reexpressão de (1.42) em termos do novo campo permite a sua reinterpretação como uma teoria tipo $\lambda\varphi^4$, o que induz, ainda, direta e facilmente, à generalização não-Abeliana do modelo de Avdeev-Chizhov. O tensor antissimétrico auto-dual complexo [2] é definido pela relação

$$\widetilde{\varphi}_{\mu\nu} = i\,\varphi_{\mu\nu}\,, \tag{1.51}$$

que obriga a expressão geral para um tensor antissimétrico complexo, $\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\,R_{\mu\nu}$, a assumir a forma

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - i\,\widetilde{T}_{\mu\nu}\,. \tag{1.52}$$

Observa-se, imediatamente, que a condição de auto-dualidade complexa (1.51) fornece uma maneira compacta de introduzir as duas representações do campo tensorial real, $T_{\mu\nu}$ e $\widetilde{T}_{\mu\nu}$, com o mesmo status. Deste modo, com a imposição de (1.51), $\varphi_{\mu\nu}$ passa a conter em si o caráter quiral da teoria, e a busca da reformulação de (1.42) em termos de $\varphi_{\mu\nu}$

[2] Aqui o termo "complexo" se aplica duas vezes: o tensor é um objeto complexo (ao contrário de $T_{\mu\nu}$, que é real), e o conceito de dualidade também é complexo, incluindo um fator i na sua definição.

se traduz na construção de um modelo com simetria local Abeliana usual (não-quiral), para o novo campo. Os autores realizam este percurso estabelecendo transformações de simetria e derivadas covariantes, na forma

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \left(\omega(x)\right) \ , \\ \delta\varphi_{\mu\nu} &= i\, \omega(x)\, \varphi_{\mu\nu}(x) \ , \\ e \quad \delta\tilde{\varphi}^\dagger_{\mu\nu} &= -i\, \omega(x)\, \varphi^\dagger_{\mu\nu} \ ; \end{aligned} \tag{1.53}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha\, \varphi_{\mu\nu} &= \partial_\alpha\, \varphi_{\mu\nu} \ - \ i\, A_\alpha\, \varphi_{\mu\nu} \\ e \quad (\nabla_\alpha\, \varphi_{\mu\nu})^\dagger &= \partial_\alpha\, \varphi^\dagger_{\mu\nu} \ + \ i\, A_\alpha\, \varphi^\dagger_{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{1.54}$$

que se reduzem às relações (1.35) e (1.38), se escritas em função de $T_{\mu\nu}$ e $\widetilde{T}_{\mu\nu}$, com $2h = -1$.

O conteúdo de (1.42), termo cinético + acoplamento mínimo + auto-interação quártica, sugere, para a sua reformulação em termos de $\varphi_{\mu\nu}$, uma ação com a forma geral de uma teoria tipo φ^4, e os autores exibem a ação invariante local Abeliana

$$\mathcal{S} \ = \ \int d^4x \left[(\nabla\, \varphi)^\dagger\, (\nabla\, \varphi) \ - \ \frac{1}{8}\, q\, \left(\varphi^\dagger\, \varphi\right)^2 \right] , \tag{1.55}$$

onde são deixadas implícitas todas as possíveis contrações de índices de Lorentz.

Os autores demonstram, então, um fato fundamental para a identificação de (1.55) com (1.42). A condição de auto-dualidade complexa (1.51) fixa, completamente, a estrutura de Lorentz de (1.55), selecionando, entre todas as possíveis contrações de índices, e, portanto, entre todos os possíveis diferentes modelos Abelianos com a forma geral (1.55), apenas um único termo cinético (salvo integrações por partes) e um único termo de auto-interação, resultando equivalentes quaisquer outras possibilidades. A condição (1.51) restringe, assim, (1.55) a um único modelo, o que vai permitir a identificação completa (uma relação unívoca) entre (1.55) e (1.42), se a primeira se reduzir à segunda.

A condição (1.51) estabelece, assim, para (1.55), a forma

$$\mathcal{S}_{\text{INV. LOCAL}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - (\nabla_\mu \varphi^{\mu\alpha})(\nabla^\nu \varphi_{\nu\alpha})^\dagger - \frac{q}{8} \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu} \right], \tag{1.56}$$

com o acréscimo do termo cinético para o campo de gauge A_μ. Escrevendo (1.56) em função de $T_{\mu\nu}$ e $\widetilde{T}_{\mu\nu}$, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{INV. LOCAL}} &= \int d^4x \Bigg[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial_\mu T^{\mu\alpha})^2 + \\ &- 2 A_\mu \left(T^{\mu\nu} \partial^\lambda \widetilde{T}_{\lambda\nu} - \widetilde{T}^{\mu\nu} \partial^\lambda T_{\lambda\nu} \right) + \frac{1}{2} (A_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (A_\mu T^{\mu\alpha})^2 + \\ &+ \frac{q}{4} \left(\frac{1}{2} T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2 T^{\mu\nu}T_{\nu\alpha}T^{\alpha\beta}T_{\beta\mu} \right) \Bigg], \end{aligned} \tag{1.57}$$

que é a ação (1.42), com $2h = -1$. Fica demonstrado, assim, que a ação de Avdeev-Chizhov (sem férmions) para o campo tensorial antissimétrico real pode ser escrita, equivalentemente, como um modelo tipo $q\varphi^4$ para um campo tensorial antissimétrico auto-dual complexo, minimamente acoplado ao campo de gauge A_μ. Obtém-se, ainda, a versão não-Abeliana do modelo [7].

Encerra-se, com isto, a apresentação e discussão de resultados existentes na literatura, relativos ao modelo para o campo tensorial de matéria, e se propõe, no capítulo que se segue, a generalização supersimétrica da ação renormalizável (1.42).

Capítulo 2

Supersimetrização do Modelo de Avdeev-Chizhov: Caso Global

Neste capítulo, prossegue-se com a descrição dos seis graus de liberdade do tensor antissimétrico real de rank-2 através de suas duas representações, $T_{\mu\nu}$ e $\widetilde{T}_{\mu\nu}$. Estas, por sua vez, estão acomodadas nas representações (1,0) e (0,1) (ambas complexas) de SO(1,3), dadas pelos tensores antissimétricos auto-dual e anti-auto-dual:

$$\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\left(T_{\mu\nu} - i\widetilde{T}_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.1}$$

$$\lambda^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\left(T_{\mu\nu} + i\widetilde{T}_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.2}$$

com $\widetilde{\lambda}_{\mu\nu} = i\lambda_{\mu\nu}$ e $\widetilde{\lambda}^*_{\mu\nu} = -i\lambda_{\mu\nu}$. A busca de uma generalização supersimétrica traduz-se, inicialmente, na obtenção de um supercampo, Σ, definido no superespaço parametrizado por coordenadas $\left(x^\mu, \theta^a, \overline{\theta}_{\dot{a}}\right)$, $\mu = 0, 1, 2, 3; a, \dot{a} = 1, 2$, capaz de acomodar o tensor $\lambda_{\mu\nu}(x)$ como campo componente, ficando o tensor $\lambda^*_{\mu\nu}(x)$ automaticamente associado a $\overline{\Sigma}$, conjugado complexo de Σ. As convenções relativas à álgebra espinorial e à parametrização do superespaço aqui utilizadas encontram-se em [14]. É aconselhável a leitura prévia do Apêndice de convenções.

2.1 Supercampos

O supercampo é um dispositivo compacto que se presta a exibir uma representação linear (irredutível ou não) da álgebra de supersimetria. Constitui-se numa coleção de campos que definem o espaço funcional no qual agem os elementos dessa álgebra. Formalmente, o supercampo pode ser entendido como uma expansão em série de potências nos parâmetros globais anticomutantes θ^a e $\overline{\theta}_{\dot{a}}$ [15]. No caso de um supercampo que se transforma como um escalar do grupo de Lorentz, tem-se

$$
\begin{aligned}
\Sigma\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) &= C(x) + \theta^a \phi_a(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}} \overline{\psi}^{\dot{a}}(x) + \theta^a \sigma^\mu_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} v_\mu(x) + \theta^2 D(x) + \overline{\theta}^2 E(x) + \\
&\quad + \theta^2 \overline{\theta}_{\dot{a}} \overline{\lambda}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2 \theta^a \chi_a(x) + \theta^2 \overline{\theta}^2 F(x) \ , \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

onde C(x), D(x), E(x) e F(x) são campos escalares, $v_\mu(x)$ é um campo vetorial, e $\phi_a(x)$, $\overline{\psi}^{\dot{a}}(x)$, $\overline{\lambda}^{\dot{a}}(x)$ e $\chi_a(x)$ são espinores de Weyl. A série não tem mais termos devido à natureza anticomutante de θ^a e $\overline{\theta}_{\dot{a}}$, o que acarreta $(\theta^a)^n = \left(\overline{\theta}_{\dot{a}}\right)^n = 0$, $n \geq 2$.

Rigorosamente, o supercampo, como é usual na verificação de um caráter tensorial ou de algo análogo, é definido pela forma de sua transformação sob a ação de um elemento da álgebra de supersimetria. A álgebra graduada que especifica a supersimetria simples (ou N = 1) é dada pelas seguintes relações [15]:

$$\left\{Q_a \, , \, \overline{Q}_{\dot{a}}\right\} = 2 \, \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} P_{\mu} \ , \tag{2.4}$$

$$e \ \ \{Q_a \, , \, Q_b\} = \left\{\overline{Q}_{\dot{a}} \, , \, \overline{Q}_{\dot{b}}\right\} = [Q_a \, , \, P_{\mu}] = \left[\overline{Q}_{\dot{a}} \, , \, P_{\mu}\right] = [P_{\mu} \, , \, P_{\nu}] = 0 \ . \tag{2.5}$$

A introdução de parâmetros globais anticomutantes, ξ_a e $\overline{\xi}_{\dot{a}}$, permite reexpressar a álgebra somente em termos de comutadores, transformando-a numa álgebra de Lie usual:

$$\left[\xi^a Q_a \, , \, \overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}}\right] = 2 \, \xi^a \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} \overline{\xi}^{\dot{a}} P_{\mu} \ , \tag{2.6}$$

$$e \ \left[\xi^a Q_a \, , \, \xi^b Q_b\right] = \left[\overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}} \, , \, \overline{\xi}_{\dot{b}} \overline{Q}^{\dot{b}}\right] = [\xi^a Q_a \, , \, P_{\mu}] = \left[\overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}} \, , \, P_{\mu}\right] = [P_{\mu} \, , \, P_{\nu}] = 0. \tag{2.7}$$

Um elemento da álgebra gerada por Q_a, $\overline{Q}_{\dot{a}}$ e P_{μ} escreve-se

$$a = x^{\mu} P_{\mu} + \xi^a Q_a + \overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}} \ , \tag{2.8}$$

e, exponenciado, fornece um elemento do grupo de transformações de supersimetria:

$$G = e^{i\left(x^{\mu} P_{\mu} + \xi^a Q_a + \overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}}\right)} \equiv G(x^{\mu}, \xi, \overline{\xi}) \ . \tag{2.9}$$

A ação de $G\left(0, \xi, \overline{\xi}\right)$ sobre $G\left(x^{\mu}, \theta, \overline{\theta}\right)$ pode ser interpretada como efetuando uma translação no superespaço:

$$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu} - i\theta^a \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} \overline{\xi}^{\dot{a}} + i\xi^a \sigma^{\mu}_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} \ ,$$

$$
\begin{aligned}
\theta^a &\longrightarrow \theta^a + \xi^a \, , \\
\overline{\theta}^{\dot{a}} &\longrightarrow \overline{\theta}^{\dot{a}} + \overline{\xi}^{\dot{a}} \, .
\end{aligned}
$$

Conseqüentemente, encontra-se uma representação para os geradores Q_a e $\overline{Q}_{\dot{a}}$, na forma dos operadores diferenciais que implementam os deslocamentos acima:

$$
Q_a = \frac{\partial}{\partial \theta^a} + i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\mu} \tag{2.10}
$$

e

$$
\overline{Q}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{a}}} - i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_{\mu} \, . \tag{2.11}
$$

A representação de P_μ é a usual, $P_\mu = -i\partial_\mu$. Na verdade, utilizou-se $G\left(0, \xi, \overline{\xi}\right)$, excluindo assim, com um parâmetro nulo, a ação de P_μ, para caracterizar apenas a parte da álgebra que realiza a transformação de supersimetria propriamente dita, que é o setor gerado por Q_a e $\overline{Q}_{\dot{a}}$. São estes geradores os responsáveis pela "mistura" de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Neste sentido, definimos a transformação infinitesimal de supersimetria de um campo pela expressão

$$
\delta_\xi \phi(x) = \left(\xi^a Q_a + \overline{\xi}_{\dot{a}}\overline{Q}^{\dot{a}}\right) \phi(x) \, , \tag{2.12}
$$

com a obrigatoriedade de termos

$$
\left(\delta_\xi\delta_\eta - \delta_\eta\delta_\xi\right)\phi(x) = +2i\left(\eta\sigma^\mu\overline{\xi} - \xi\sigma^\mu\overline{\eta}\right)\partial_\mu\,\phi(x) \, , \tag{2.13}
$$

o que é imposto pela álgebra.

O supercampo, então, aparece como o objeto que se transforma segundo

$$\delta_\xi \Sigma \equiv \left(\xi^a Q_a + \overline{\xi}_{\dot{a}} \overline{Q}^{\dot{a}}\right) \Sigma \quad , \tag{2.14}$$

com Q_a e $\overline{Q}_{\dot{a}}$ dados em (2.10) e (2.11). Ou seja, transforma-se via um deslocamento no espaço dos parâmetros, e, formalmente, um supercampo transformado resulta uma expansão em série de potências de θ e $\overline{\theta}$, cujos coeficientes são os campos componentes transformados:

$$\begin{aligned}\delta_\xi \Sigma\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) &= \delta_\xi C(x) + \theta^a \delta_\xi \phi_a(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}} \delta_\xi \overline{\psi}^{\dot{a}}(x) + \theta^a \sigma^\mu_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} \delta_\xi v_\mu(x) + \theta^2 \delta_\xi D(x) + \\ &+ \overline{\theta}^2 \delta_\xi E(x) + \theta^2 \overline{\theta}_{\dot{a}} \delta_\xi \overline{\lambda}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2 \theta^a \delta_\xi \chi_a(x) + \theta^2 \overline{\theta}^2 \delta_\xi F(x) \quad , \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tal definição garante ainda que um polinômio nos supercampos é, também, um supercampo .

A coleção de campos de Σ, contudo, fornece, em geral, uma representação redutível da álgebra de supersimetria, ou seja, pode-se fechar a álgebra com um subconjunto dos campos presentes em Σ. A redução é feita através da imposição de vínculos, os quais constituem relações covariantes envolvendo os supercampos. De fato, algumas representações irredutíveis são:

Supercampo escalar quiral: Σ, tal que $\overline{D}_{\dot{a}} \Sigma = 0$. Este admite a seguinte expansão em componentes:

$$\begin{aligned}\Sigma_{quiral}\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) &= C(x) + \theta^a \phi_a(x) + \theta^2 D(x) - i\theta^a \sigma^\mu_{a\dot{a}} \overline{\theta}^{\dot{a}} \partial_\mu C(x) + \\ &\quad - i\theta^b \sigma^\mu_{b\dot{b}} \overline{\theta}^{\dot{b}} \theta^a \partial_\mu \phi_a(x) - \frac{1}{4} \theta^2 \overline{\theta}^2 \partial_\mu \partial^\mu C(x) = \\ &= e^{\left(-i\theta^b \sigma^\mu_{b\dot{b}} \overline{\theta}^{\dot{b}} \partial_\mu\right)} \left[C(x) + \theta^a \phi_a(x) + \theta^2 D(x)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Supercampo escalar anti-quiral: $\overline{\Sigma}$, tal que $D_a\overline{\Sigma} = 0$, com expansão em componentes conforme segue:

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}_{anti-quiral}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= C^*(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\phi}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2 D^*(x) + i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu C^*(x) + \\ &+ i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\overline{\theta}_{\dot{a}}\partial_\mu\overline{\phi}^{\dot{a}}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu C^*(x) = \\ &= e^{\left(+i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\right)}\left[C^*(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\phi}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2 D^*(x)\right] . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Supercampo escalar real, vetorial, ou Hermitiano: V, tal que $V = V^\dagger$.

$$\begin{aligned}V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= B(x) + \theta^a b_a(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{b}^{\dot{a}}(x) + \theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}A_\mu(x) + \theta^2\lambda(x) + \\ &+ \overline{\theta}^2\overline{\lambda}(x) + \theta^2\overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2\theta^a\gamma_a(x) + \theta^2\overline{\theta}^2\Delta(x) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

A covariância das duas primeiras relações é garantida pelo caráter de supercampo dos operadores diferenciais D_a e $\overline{D}_{\dot{a}}$, que são as derivadas covariantes de supersimetria, construídas, como é usual, de modo a preservar a forma da transformação sobre Σ após a aplicação da derivada:

$$\delta_\xi\Sigma = \left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right)\Sigma \quad \Rightarrow \quad \delta_\xi\left(\overline{D}_{\dot{a}}\Sigma\right) = \left(\xi Q + \overline{\xi Q}\right)\left(\overline{D}_{\dot{a}}\Sigma\right) \;;$$

o mesmo valendo para $D_a\Sigma$, com Q e $\overline{Q}$ dados em (2.10) e (2.11).

Aqui, tomamos

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\,\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu \quad (2.19)$$

e

$$\overline{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot{a}}} + i\,\theta^a \sigma^\mu_{a\dot{a}} \partial_\mu \,. \qquad (2.20)$$

Vale, ainda, observar que, qualquer que seja a representação linear, redutível ou irredutível, o supercampo caracteriza-se por conter igual número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. No caso de representações não-lineares, todavia, o balanceamento entre estes graus de liberdade não é mais respeitado.

2.2 O Modelo Supersimétrico

Os seis graus de liberdade bosônicos presentes no tensor antissimétrico auto-dual complexo, $\lambda_{\mu\nu}(x)$, podem ser alojados em algum supercampo Σ, desde que sejam acompanhados por seis graus de liberdade fermiônicos. Como cada espinor de Weyl carrega quatro graus de liberdade (duas quantidades complexas), o problema é resolvido fazendo-se com que $\lambda_{\mu\nu}(x)$ esteja acompanhado de dois espinores de Weyl e um campo escalar complexo. O supercampo que abriga dois espinores de Weyl, um escalar complexo e um tensor antissimétrico auto-dual complexo é o supercampo espinorial quiral, dado por

$$\begin{aligned}
\Sigma_a\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= \psi_a(x) + \theta^b\Lambda_{ba}(x) + \theta^2\mathcal{F}_a(x) - i\theta^b\sigma^\mu_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\psi_a(x) + \\
&\quad -i\theta^c\sigma^\mu_{c\dot{c}}\overline{\theta}^{\dot{c}}\theta^b\partial_\mu\Lambda_{ba}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu\psi_a(x) \;= \\
&= e^{\left(-i\theta^c\sigma^\mu_{c\dot{c}}\overline{\theta}^{\dot{c}}\partial_\mu\right)}\left[\psi_a(x) + \theta^b\Lambda_{ba}(x) + \theta^2\mathcal{F}_a(x)\right] . \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Vale o vínculo $\overline{D}_{\dot{b}}\Sigma_a = 0$, de modo a eliminar campos componentes de spin-$\frac{3}{2}$, cujo acoplamento a campos vetoriais é problemático na ausência de gravitação [16].

Os oito graus de liberdade bosônicos presentes em $\Lambda_{ba}(x)$ distribuem-se da seguinte forma:

$$\Lambda_{ba}(x) \;=\; \varepsilon_{ba}\rho(x) \;+\; \sigma^{\mu\nu}_{ba}\lambda_{\mu\nu}(x)\;, \tag{2.22}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ba} \;&=\; \begin{pmatrix} \text{PARTE ANTISSIMÉTRICA} \\ \text{NOS ÍNDICES ESPINORIAIS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{CAMPO ESCALAR} \end{pmatrix} + \\
&+\; \begin{pmatrix} \text{PARTE SIMÉTRICA NOS} \\ \text{ÍNDICES ESPINORIAIS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{TENSOR ANTISSIMÉTRICO} \\ \text{AUTO-DUAL COMPLEXO} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

A natureza quiral do supercampo Σ_a, que corresponde à representação $\left(\frac{1}{2},0\right)$ do grupo de Lorentz, garante a presença do objeto $\lambda_{\mu\nu}(x)$, associado à representação $(1,0)$.

A descrição se completa com a caracterização do tensor anti-auto-dual complexo $\lambda^{*}_{\mu\nu}(x)$ como campo componente, figurando no supercampo espinorial anti-quiral $\overline{\Sigma}_{\dot a}$, conjugado complexo de Σ_a, e dado por

$$\begin{aligned}
\overline{\Sigma}_{\dot a}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \;&=\; \overline{\psi}_{\dot a}(x) + \overline{\theta}_{\dot b}\overline{\Lambda}^{\dot b}_{\dot a}(x) + \overline{\theta}^2\overline{\mathcal{F}}_{\dot a}(x) + i\theta^c\sigma^{\mu}_{c\dot c}\overline{\theta}^{\dot c}\partial_\mu\overline{\psi}_{\dot a}(x) + \\
&\quad + i\theta^c\sigma^{\mu}_{c\dot c}\overline{\theta}^{\dot c}\overline{\theta}_{\dot b}\partial_\mu\overline{\Lambda}^{\dot b}_{\dot a}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu\overline{\psi}_{\dot a}(x) \;\;= \\
&= e^{\left(+i\theta^c\sigma^{\mu}_{c\dot c}\overline{\theta}^{\dot c}\partial_\mu\right)}\;\left[\overline{\psi}_{\dot a}(x) \;+\; \overline{\theta}_{\dot b}\overline{\Lambda}^{\dot b}_{\dot a}(x) \;+\; \overline{\theta}^2\overline{\mathcal{F}}_{\dot a}(x)\right] .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Vale o vínculo $D_b\overline{\Sigma}_{\dot a} \;=\; 0$, e tem-se a seguinte decomposição para $\overline{\Lambda}_{\dot b\dot a}(x)$:

$$\overline{\Lambda}_{\dot{b}\dot{a}}(x) \;=\; -\,\varepsilon_{\dot{b}\dot{a}}\rho^*(x) \;-\; \overline{\sigma}^{\mu\nu}_{\dot{b}\dot{a}}\lambda^*_{\mu\nu}(x)\,. \tag{2.24}$$

Analogamente, a natureza anti-quiral de $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}$ justifica a presença do objeto $\lambda^*_{\mu\nu}(x)$, associado à representação $(0,1)$ de SO(1,3).

Estamos tomando

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu\nu}(x) \;&=\; a\left(T_{\mu\nu}(x) - i\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)\right) \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\lambda}_{\mu\nu}(x) \;&=\; i\lambda_{\mu\nu}(x) \\ e\;\; \lambda^*_{\mu\nu}(x) \;&=\; a\left(T_{\mu\nu}(x) + i\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)\right) \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\lambda}^*_{\mu\nu}(x) \;&=\; -i\lambda^*_{\mu\nu}(x)\;, \end{aligned}$$

onde a é uma constante real e $\widetilde{T}_{\mu\nu}(x) \;=\; \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta}(x)$. Por conveniência, para o ajuste de coeficientes na expressão final do modelo generalizado em campos componentes, tomamos $a = \frac{1}{4}$.

A presença do termo

$$\frac{1}{4}\,q\left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \;-\; 2\;T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu}\right]$$

na densidade de Lagrangeana que define o modelo de Avdeev-Chizhov (tal termo figura como uma auto-interação quártica para o campo $T_{\mu\nu}(x)$ e q como o parâmetro adimensional associado) implica para o campo $T_{\mu\nu}(x)$ a dimensão canônica (de massa) igual a 1, e fixa, conseqüentemente, as dimensões de todos os demais campos presentes nos supercampos Σ_a e $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}$, bem como as dimensões dos próprios supercampos:

$$\begin{aligned} d\left(T_{\mu\nu}\right) \;&=\; 1 \quad \Rightarrow \quad d\left(\lambda_{\mu\nu}\right) \;=\; d\left(\lambda^*_{\mu\nu}\right) \;=\; 1 \quad &\Rightarrow \quad d\left(\Lambda_{ba}\right) \;&=\; 1 \\ d\left(\theta^b\right) \;&=\; -\,\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad d\left(\theta^b\Lambda_{ba}\right) \;=\; +\,\tfrac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad d\left(\Sigma_a\right) \;=\; d\left(\psi_a\right) \;&=\; +\,\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$e \;\; d\left(\mathcal{F}_a\right) \;=\; \frac{3}{2}\,.$$

Esquematicamente,

$$
\begin{aligned}
d\left(\psi_a\right) \quad &= d\left(\overline{\psi}_{\dot{a}}\right) \;=\; \tfrac{1}{2} \quad = d\left(\Sigma_a\right) \;=\; d\left(\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\right)\;,\\
d\left(\rho\right) \; &= d\left(\lambda_{\mu\nu}\right) \;=\; 1\;,\\
d\left(\mathcal{F}_a\right) \; &= d\left(\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\right) \;=\; \tfrac{3}{2}\,.
\end{aligned}
$$

O campo $T_{\mu\nu}(x)$, apresentado sob a forma $\left[\lambda_{\mu\nu}(x) \;+\; \lambda^{*}_{\mu\nu}(x)\right]$, tem, então, como parceiros supersimétricos um escalar $\rho(x)$ e dois férmions, sendo um físico, o espinor de Weyl $\mathcal{F}_a(x)$, e um não-físico, o espinor $\psi_a(x)$, que aparece como um férmion de dimensão canônica $\frac{1}{2}$.

2.2.1 Simetria U(1) global: Lagrangeana sem campo de gauge

Procura-se, inicialmente, uma generalização supersimétrica dos termos da Lagrangeana de Avdeev-Chizhov que não contêm o campo de gauge $A_\mu(x)$, já excluídos os espinores de Dirac e a interação de Yukawa, pelos motivos que foram expostos no primeiro capítulo. A passagem para o caso de simetria local, com a conseqüente introdução de um supercampo de gauge, segue uma prescrição bem conhecida, e será explicitada no próximo capítulo. O estabelecimento da versão supersimétrica para o caso global é, portanto, um passo decisivo na obtenção do modelo supersimétrico para os campos tensoriais antissimétricos de matéria com interação Abeliana.

Os termos que buscamos generalizar são:

$$\mathcal{L}_{\text{sem } A_\mu} = \frac{1}{2}\,\partial_\lambda\left(T_{\mu\nu}\right)\partial^\lambda\left(T^{\mu\nu}\right) - 2\,\partial_\mu\left(T^{\mu\nu}\right)\partial^\alpha\left(T_{\alpha\nu}\right) + \\ + \frac{1}{4}\,q\left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\,T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\alpha}T^{\alpha\mu}\right] .$$

A forma dos termos acima já sugere, como tentativa razoável de uma ação supersimétrica, algo do tipo

$$\mathcal{S} = \int_{\text{superespaço}} dV\left[a\left(D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)\right) + b\,q\left(\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)\right] , \qquad (2.25)$$

onde dV é o elemento de volume do superespaço, $dV = d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}$, e a e b são constantes reais, a serem ajustadas para reobtermos exatamente a Lagrangeana de Avdeev-Chizhov.

A primeira parcela deve ser capaz de reproduzir os termos de Avdeev-Chizhov do tipo $\partial(T)\partial(T)$ (termos cinéticos), e, fazendo uso das derivadas covariantes D_a e $\overline{D}_{\dot{a}}$, garante-se o caráter de supercampo da parcela. Isto é importante porque, realizando-se a integração em todo o superespaço, mantemos apenas a componente $\theta^2\overline{\theta}^2$ da parcela como possível contribuição à densidade de Lagrangeana no espaço usual. Se a parcela é de fato um supercampo, sendo o coeficiente de $\theta^2\overline{\theta}^2$ o seu campo componente de maior dimensão, a transformada de supersimetria dessa possível contribuição resulta sempre uma quadridivergência total [15]. Desse modo, com o supercampo $D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)$, garantimos que a contribuição da parcela cinética é supersimétrica, módulo um termo de fronteira.

Além da supersimetria, outra invariância atua no estabelecimento da forma do termo cinético supersimétrico. Buscamos uma ação invariante por uma transformação global do grupo U(1), ou seja, queremos simetria perante

$$\Sigma_a \quad \Rightarrow \quad \Sigma_a' \; = \; e^{ih\alpha}\Sigma_a \tag{2.26.a}$$

e

$$\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Sigma}_{\dot{a}}' \; = \; e^{-ih\alpha}\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \; , \tag{2.26.b}$$

onde h e α são constantes reais, sendo h a carga (gerador) U(1) associada e α o parâmetro (ângulo de rotação rígida) que especifica o elemento do grupo. Constantes, contudo, são supercampos sujeitos simultaneamente aos vínculos de quiralidade e anti-quiralidade [15]. Valem para α, portanto, as relações

$$D_a\left(\alpha\right) \; = \; \overline{D}_{\dot{a}}\left(\alpha\right) \; = \; 0 \; ,$$

e, obviamente, o mesmo para qualquer potência do produto $h\alpha$, o que implica

$$D_a(e^{\pm ih\alpha}) = \overline{D}_{\dot{a}}(e^{\pm ih\alpha}) = 0 \; .$$

Isto demonstra que o termo cinético proposto é, de fato, U(1) global-invariante. O mesmo não ocorre com outras opções supersimétricas, tais como $D^a(\Sigma_a)D^b(\Sigma_b)$ e $\overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}})\overline{D}_{\dot{b}}(\overline{\Sigma}^{\dot{b}})$.

Argumentos dimensionais ratificam $D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)$. Temos:

$$d\left(D^a\right) \; = \; d\left(\overline{D}_{\dot{a}}\right) \; = \; d\left(\Sigma_a\right) \; = \; d\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) \; = \; \frac{1}{2} \; ;$$

logo, $d\left(D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)\right) \; = \; 2$. O elemento de integração $d^2\theta d^2\overline{\theta}$ pode ser substituído por $D^2\overline{D}^2\left.\right|_{\theta=\overline{\theta}=0}$, fornecendo $d\left(D^2\overline{D}^2\right) \; = \; 2$. Assim, $d\left(d^2\theta d^2\overline{\theta}D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)\right) \; = \; 4$, que é o que devemos ter para compor com d^4x uma ação adimensional.

A segunda parcela deve reproduzir termos de Avdeev-Chizhov do tipo TTTT, termos de auto-interação, e a expressão $\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}$, além de conter produtos na forma $\lambda\lambda\lambda^*\lambda^*$, que fornecem TTTT, é um produto de supercampos e é, assim, um supercampo. Com o mesmo esquema de integração, os argumentos que usamos para afirmar a supersimetria da 1ª parcela (termo cinético) se aplicam imediatamente a $\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}$, e, desse modo, garantimos que a ação é supersimétrica. O caráter fermiônico anticomutativo de Σ_a e $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}$ já elimina as possibilidades $\Sigma^a\Sigma_a\Sigma^b\Sigma_b$ e $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\overline{\Sigma}_{\dot{b}}\overline{\Sigma}^{\dot{b}}$, ou qualquer outra tentativa que inclua mais de duas vezes o supercampo Σ_a ou o seu conjugado $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}$. Além disso, o termo $\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}$ se confirma, ainda, por verificar, também, simetria perante U(1) global:

$$\left(\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)' = e^{ih\alpha}\Sigma^a\, e^{ih\alpha}\Sigma_a\, e^{-ih\alpha}\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\, e^{-ih\alpha}\overline{\Sigma}^{\dot{a}} = \Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}} \; .$$

Argumentos dimensionais, mais uma vez, ratificam a escolha.

Concluímos, então, que a ação que propomos deve fornecer os termos da Lagrangeana de Avdeev-Chizhov: é supersimétrica e invariante por U(1) global.

A despeito desta descrição-justificativa da ação (2.25), algo intuitiva e carente, sem dúvida, de confirmação a posteriori, com a sua expressão em campos componentes, vale ressaltar que a demonstração de que o modelo de Avdeev-Chizhov é uma teoria $q\phi^4$, para $\phi = \lambda_{\mu\nu}$ [7], impõe para a versão supersimétrica uma Lagrangeana tipo $q\phi^4$ para o supercampo que abriga $\lambda_{\mu\nu}$. Isto é exatamente o que temos em (2.25).

Tomamos, então, a ação (2.25), já com coeficientes escolhidos:

$$\mathcal{S} = \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \frac{-1}{32}\left[D^a\left(\Sigma_a\right)\overline{D}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) + q\, \Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right] \; . \tag{2.27}$$

Reescrevendo-a em função dos campos componentes $\psi_a(x)$, $\rho(x)$, $\lambda_{\mu\nu}(x)$, $\mathcal{F}_a(x)$, e seus conjugados complexos, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \int d^4x \Bigg(+ \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho^* - 16 \partial^\mu \lambda_{\mu\nu} \partial_\alpha \lambda^{*\alpha\nu} + i\overline{\mathcal{F}}^{\dot{a}} \overline{\sigma}^\mu_{\dot{a}a} \partial_\mu \mathcal{F}^a - i\overline{\psi}^{\dot{a}} \overline{\sigma}^\mu_{\dot{a}a} \partial_\mu \partial^\nu \partial_\nu \psi^a \\
&- q\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^2 - 4\lambda_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu})\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{*2} - 4\lambda^*_{\alpha\beta}\lambda^{*\alpha\beta}) + 4q\lambda^{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} + 4q\lambda^{*\mu\nu}\lambda^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^a\psi_a \\
&- 2q\mathcal{F}^a\psi_a\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - q\rho^2\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - q(\rho^*)^2\mathcal{F}^a\psi_a + \frac{q}{2}\psi^a\psi_a\partial^\mu\partial_\mu(\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}}) \\
&- iq\rho\psi^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu(\overline{\psi}^{\dot{a}}\rho^*) + 4q\rho\psi^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\beta(\lambda^{*\beta}{}_\mu\overline{\psi}^{\dot{a}}) - 4q\lambda_{\mu\beta}\partial^\beta(\rho^*\overline{\psi}_{\dot{a}})\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\psi_a \\
&- 16iq\lambda_{\mu\alpha}\partial_\beta(\lambda^{*\beta\alpha}\overline{\psi}_{\dot{a}})\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\psi_a\Bigg) \,. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Com $\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{\mu\nu} - i\widetilde{T}_{\mu\nu})$ e $\lambda^*_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{\mu\nu} + i\widetilde{T}_{\mu\nu})$, identificamos:

$$
-16\partial^\mu(\lambda_{\mu\nu})\partial_\alpha(\lambda^{*\alpha\nu}) = +\frac{1}{2}\partial^\lambda(T^{\mu\nu})\partial_\lambda(T_{\mu\nu}) - 2\partial^\alpha(T_{\alpha\nu})\partial_\mu(T^{\mu\nu}) \qquad (2.29.a)
$$

e

$$
-8q\lambda_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu}\lambda^*_{\alpha\beta}\lambda^{*\alpha\beta} = \frac{q}{4}\left(\frac{1}{2}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} - 2\,T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\alpha}T^{\alpha\mu}\right) \qquad (2.29.b)
$$

Confirma-se, portanto, que a ação (2.27), ou a sua densidade de Lagrangeana, reproduz exatamente a densidade de Lagrangeana de Avdeev-Chizhov, no que se refere aos termos sem o campo de gauge (simetria U(1) global) e já excluídos espinores de Dirac e termo de Yukawa. Para verificar, entretanto, se (2.27) é a versão supersimétrica de Avdeev-Chizhov ou de algum outro possível modelo, mais geral, resta certificarmo-nos de que

(2.27) não fornece nenhum outro termo envolvendo apenas $T_{\mu\nu}(x)$ e suas derivadas. De fato, por inspeção, observa-se com facilidade que qualquer outro termo contendo $\lambda_{\mu\nu}(x)$ (e portanto $T_{\mu\nu}(x)$) envolve também algum de seus parceiros supersimétricos. Como vimos no primeiro capítulo, o caráter auto-dual complexo de $\lambda_{\mu\nu}(x)$, juntamente com a covariância de Lorentz, garantida por construção, restringem fortemente, na verdade, a forma de possíveis termos cinéticos e de auto-interação para $\lambda_{\mu\nu}(x)$ [7]. Neste sentido, o modelo de Avdeev-Chizhov é, como foi demonstrado [7], uma teoria $q\phi^4$ completa, e a coincidência exata do setor de (2.27) independente dos parceiros ρ, ψ_a e $\mathcal{F}_a$ com Avdeev-Chizhov (1.33) é esperada.

Conclui-se, com isto, que a ação (2.27) é a generalização supersimétrica do modelo de Avdeev-Chizhov sem campos de gauge, invariante por U(1) global.

Cabe ainda, neste ponto, um comentário acerca da incômoda presença de um espinor de dimensão canônica $\frac{1}{2}$. Pode-se, de fato, reformular o setor fermiônico de (2.28), introduzindo-se um espinor de Dirac que abrigue, simultaneamente, os graus de liberdade referentes a $\mathcal{F}_a$ e a ψ_a. Construído com dimensão canônica $\frac{3}{2}$, como usual para férmions, o espinor de Dirac tem a forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_a(x) \\ \overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\partial_\mu\left(\psi_a(x)\right) \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

e representa, assim, uma esperança de solução de qualquer problema de interpretação física do objeto ψ_a. Há, contudo, a necessidade de demonstrarmos que (2.30) é suficiente para reproduzir todos os termos de (2.28) que contêm os espinores $\mathcal{F}$ e ψ. Isto ocorre, realmente, apenas para o setor cinético, com a expressão usual

$$i\,\overline{\Psi}\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\,(\Psi)$$

se reduzindo, quando escrita em função de $\mathcal{F}$ e ψ, aos termos originais $i\,\overline{\mathcal{F}}^{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot{a}a}\partial_{\mu}\mathcal{F}^{a}$ e $-i\,\overline{\psi}^{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot{a}a}\partial_{\mu}\partial^{\nu}\partial_{\nu}\psi^{a}$. Resulta, todavia, impossível descrever o setor de interação em termos de Ψ. A teoria livre, portanto, tem a patologia do setor fermiônico (derivadas superiores) removida por uma redefinição do espinor fundamental, ficando o objeto ψ vinculado a componentes de um espinor de dimensão $\frac{3}{2}$. Este mesmo problema, contudo, parece insolúvel na presença de interação. É razoável conjecturar, então, se esta patologia não surge como contrapartida fermiônica, no contexto de supersimetria, de algum problema no setor bosônico que se manifeste apenas na presença de interação. Vale lembrar, ainda, que, no capítulo precedente, mostrou-se que a eliminação dos coeficientes das soluções com dependência linear no tempo, $\widetilde{c}_1$ e $\widetilde{d}_1$, "desligava" todo o setor transversal da teoria livre, inclusive a parte deste setor descrita por soluções usuais de onda plana. Estas soluções, contudo, poderiam, em princípio, ser "religadas" com a introdução de interações.

Capítulo 3

Supersimetrização do Modelo de Avdeev-Chizhov Acoplado a Campos-de-Gauge Abelianos

Tendo sido obtido o modelo supersimétrico com invariância global U(1) para o campo tensorial de matéria, $T_{\mu\nu}$, realiza-se, neste capítulo, a extensão natural para o caso de simetria local, com o intuito de produzir, como resultado final, a formulação supersimétrica do modelo de Avdeev-Chizhov, expresso em (1.42).

A generalização para uma invariância local U(1) é feita através da mudança da natureza do parâmetro do grupo, que deixa de ser uma constante e passa a abrigar todo um multiplete de campos, na forma de um supercampo escalar quiral [15]. A transformação básica perante a qual deseja-se a invariância do modelo é

$$\Sigma_a \quad \Rightarrow \quad \Sigma'_a \; = \; e^{ih\Lambda}\Sigma_a \tag{3.1.a}$$

e

$$\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Sigma}'_{\dot{a}} \; = \; e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \; , \tag{3.1.b}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \;&=\; \phi(x) + \theta^a\omega_a(x) + \theta^2\pi(x) - i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\phi(x) + \\
&\quad -i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\theta^a\partial_\mu\omega_a(x) - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu\phi(x) \;=\; \\
&= e^{\left(-i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\right)}\left[\phi(x) \;+\; \theta^a\omega_a(x) \;+\; \theta^2\pi(x)\right] \; ,
\end{aligned} \tag{3.2.a}$$

$$\begin{aligned}
e\;\; \overline{\Lambda}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \;&=\; \phi^*(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\omega}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2\pi^*(x) + i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu\phi^*(x) + \\
&\quad +i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\overline{\theta}_{\dot{a}}\partial_\mu\overline{\omega}^{\dot{a}}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu\phi^*(x) \;=\; \\
&= e^{\left(+i\theta^b\sigma^{\mu}_{b\dot{b}}\overline{\theta}^{\dot{b}}\partial_\mu\right)}\left[\phi^*(x) \;+\; \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\omega}^{\dot{a}}(x) \;+\; \overline{\theta}^2\pi^*(x)\right] \; .
\end{aligned} \tag{3.2.b}$$

Infinitesimalmente ,

$$\delta\Sigma_a \;=\; +\,ih\Lambda\Sigma_a \; , \tag{3.3.a}$$

$$e\;\; \delta\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \;=\; -\,ih\overline{\Lambda}\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \; . \tag{3.3.b}$$

Para estabelecer a invariância, verifica-se, inicialmente, o comportamento do termo cinético supersimétrico, invariante por U(1) global, perante (3.1.a , 3.1.b):

$$\left(D^a\Sigma_a\right)' \;\equiv\; D^a\Sigma'_a \;=\; D^a\left(e^{ih\Lambda}\Sigma_a\right) \;=\; D^a\left(e^{ih\Lambda}\right)\Sigma_a \;+\; e^{ih\Lambda}\,D^a\Sigma_a \;=$$

$$= e^{ih\Lambda}\left(ihD^a(\Lambda)\right)\Sigma_a + e^{ih\Lambda}\, D^a\Sigma_a =$$

$$= e^{ih\Lambda}\left[D^a(\Sigma_a) + ihD^a(\Lambda)\Sigma_a\right] ,$$

e, similarmente,

$$\left(\overline{D}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)' \equiv \overline{D}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}\prime} = \overline{D}_{\dot{a}}\left(e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) = \overline{D}_{\dot{a}}\left(e^{-ih\overline{\Lambda}}\right)\overline{\Sigma}^{\dot{a}} + e^{-ih\overline{\Lambda}}\,\overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}) =$$

$$= e^{-ih\overline{\Lambda}}\left[\overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}) - ih\overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Lambda})\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right] .$$

Como é usual na implementação de uma simetria local, busca-se escrever as derivadas dos objetos transformados sob forma covariante desta simetria, ou seja, introduz-se uma conexão nas derivadas D_a e $\overline{D}_{\dot{a}}$ para obter uma derivada covariante de supersimetria e de gauge U(1), ∇_a (e sua conjugada $\overline{\nabla}_{\dot{a}}$), de modo a satisfazer:

$$\left(\nabla^a(\Sigma_a)\right)' = e^{ih\Lambda}\nabla^a(\Sigma_a) \tag{3.4.a}$$

e

$$\left(\overline{\nabla}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}})\right)' = e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\nabla}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}) . \tag{3.4.b}$$

Propomos, então :

$$D_a \quad \Rightarrow \quad \nabla_a = D_a + ih\Gamma_a \tag{3.5.a}$$

e

$$\overline{D}_{\dot{a}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\nabla}_{\dot{a}} = \overline{D}_{\dot{a}} - ih\overline{\Gamma}_{\dot{a}} , \tag{3.5.b}$$

onde Γ_a e $\overline{\Gamma}_{\dot{a}}$, as conexões, têm necessariamente a natureza de supercampos espinoriais, para que não se perca a covariância de supersimetria, e devem possuir relação com algum equivalente supersimétrico do potencial de gauge $A_\mu(x)$, como é usual.

Se impusermos as variações

$$\Gamma_a \quad \Rightarrow \quad \Gamma_a^{'} = \Gamma_a - D_a(\Lambda) \tag{3.6.a}$$

e

$$\overline{\Gamma}_{\dot{a}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\Gamma}_{\dot{a}}^{'} = \overline{\Gamma}_{\dot{a}} - \overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Lambda}) \; , \tag{3.6.b}$$

resulta :

$$\begin{aligned} (\nabla^a \Sigma_a)^{'} &\equiv \nabla^{a'} \Sigma_a^{'} = \left(D^a + ih\Gamma^{a'}\right)\left(e^{ih\Lambda}\Sigma_a\right) = \left(D^a + ih\Gamma^a - ihD^a(\Lambda)\right) e^{ih\Lambda}\Sigma_a = \\ &= e^{ih\Lambda}\nabla^a\Sigma_a \; , \end{aligned}$$

e, analogamente, obtém-se:

$$\left(\overline{\nabla}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)^{'} = e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\nabla}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}} \; ,$$

que são os resultados que desejávamos.

O termo $(\nabla^a\Sigma_a)\left(\overline{\nabla}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)$ segue, assim, a seguinte lei de transformação:

$$\left[(\nabla^a\Sigma_a)\left(\overline{\nabla}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)\right]^{'} = e^{+ih\left(\Lambda-\overline{\Lambda}\right)}(\nabla^a\Sigma_a)\left(\overline{\nabla}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) \; ,$$

e, portanto, ainda não se constitui num termo cinético supersimétrico invariante de gauge U(1). Se observarmos que $\left[i\left(\Lambda-\overline{\Lambda}\right)\right]^{\dagger} = i\left(\Lambda-\overline{\Lambda}\right)$, perceberemos facilmente que a introdução da exponencial de um supercampo (sempre buscando manter covariância de supersimetria) V, tal que $V = V^\dagger$ [15], com a regra de transformação

$$V \quad \Rightarrow \quad V' = V + i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right) , \tag{3.7}$$

fornece uma expressão invariante de gauge:

$$\begin{aligned}\left[\nabla^a(\Sigma_a)\, e^{hV}\, \overline{\nabla}_{\dot a}(\overline{\Sigma}^{\dot a})\right]' &\equiv (\nabla^a\Sigma_a)'\, e^{hV'}\, \left(\overline{\nabla}_{\dot a}\overline{\Sigma}^{\dot a}\right)' = \\ &= \nabla^a(\Sigma_a) e^{hV}\overline{\nabla}_{\dot a}(\overline{\Sigma}^{\dot a}) \, . \end{aligned}\tag{3.8}$$

Vale ressaltar que a presença de uma nova simetria, aqui U(1) local, não deve provocar alterações na estrutura supersimétrica original, inclusive no que diz respeito às representações definidas pelos supercampos. Assim sendo, os supercampos transformados de gauge respeitam os vínculos originais:

$$\begin{aligned}\Sigma_a' = e^{ih\Lambda}\Sigma_a \quad \Rightarrow \quad & \overline{D}_{\dot b}(\Sigma_a') = \overline{D}_{\dot b}\left(e^{ih\Lambda}\Sigma_a\right) = \\ = \quad & \overline{D}_{\dot b}\left(e^{ih\Lambda}\right)\Sigma_a + e^{ih\Lambda}\overline{D}_{\dot b}\left(\Sigma_a\right) = 0 \, ,\end{aligned}$$

com Σ_a e Λ quirais.

Do mesmo modo, $D_b(\overline{\Sigma}_{\dot a}') = D_b\left(e^{-ih\overline{\Lambda}}\right)\overline{\Sigma}_{\dot a} + e^{-ih\overline{\Lambda}}D_b(\overline{\Sigma}_{\dot a}) = 0$, com $\overline{\Sigma}_{\dot a}$ e $\overline{\Lambda}$ anti-quirais.

E também,

$$\begin{aligned}V' = V + i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right) \quad \Rightarrow \quad & V'^\dagger = V^\dagger + \left(i\overline{\Lambda}\right)^\dagger + (-i\Lambda)^\dagger = \\ = \quad & V - i\Lambda + i\overline{\Lambda} = V' \, ,\end{aligned}$$

se $V^\dagger = V$, o que corrobora a escolha de um supercampo vetorial (ou real) para a composição de um termo cinético supersimétrico invariante de gauge.

Um supercampo $V = V^\dagger$ tem a expressão geral:

$$\begin{aligned} V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= C(x) + \theta^a b_a(x) + \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{b}^{\dot{a}}(x) + \theta^a \sigma^\mu_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}(4A_\mu(x)) + \theta^2 D(x) + \\ &+ \overline{\theta}^2 D^*(x) + \theta^2\overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x) + \overline{\theta}^2\theta^a\gamma_a(x) + \theta^2\overline{\theta}^2\Delta(x) \ , \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde C(x), D(x) e $\Delta(x)$ são campos escalares, com C(x) e $\Delta(x)$ reais, $b_a(x)$ e $\gamma_a(x)$ são espinores e $A_\mu(x)$ é um campo vetorial real que pode desempenhar o papel de campo de gauge Abeliano usual. A propósito, (3.7) fornece as seguintes transformações de gauge para os campos componentes de V:

$$\begin{aligned} &\delta C(x) = i\left(\phi^*(x) - \phi(x)\right) \ , && \delta D(x) = -\, i\pi(x) \ , \quad \delta D^*(x) = +\, i\pi^*(x) \ , \\ &\delta b_a(x) = -\, i\omega_a(x) \ , && \delta\overline{b}_{\dot{a}}(x) = +\, i\overline{\omega}_{\dot{a}}(x) \ , \\ &\delta\Delta(x) = \tfrac{i}{4}\,\partial_\mu\partial^\mu\left(\phi(x) - \phi^*(x)\right) \ , && \delta\gamma_a(x) = \tfrac{1}{2}\,\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu\left(\overline{\omega}^{\dot{a}}(x)\right) , \\ &\delta\overline{\gamma}_{\dot{a}}(x) = \tfrac{-1}{2}\,\partial_\mu\left(\omega^a(x)\right)\sigma^\mu_{a\dot{a}} && e \ \ \delta A_\mu(x) = \tfrac{-1}{4}\,\partial_\mu\left(\phi(x) + \phi^*(x)\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

A transformação para o campo $A_\mu(x)$, juntamente com a participação do supercampo V no termo U(1)-invariante supersimétrico (3.8), permite-nos interpretar esse supercampo V como uma generalização supersimétrica do potencial de gauge $A_\mu(x)$ usual, que aqui aparece como um de seus componentes, e as transformações (3.10) como uma generalização da variação usual $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu(\varphi(x))$.

Esta interpretação, por sua vez, nos motiva a buscar uma relação entre o supercampo espinorial conexão de gauge Γ_a (e seu conjugado $\overline{\Gamma}_{\dot{a}}$) e o supercampo vetorial potencial de gauge V. De fato, também Γ_a apresenta campo vetorial como componente (dois campos vetoriais),

$$\Gamma_a\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \;=\; \chi_a(x) \;+\; \theta^a f(x) \;+\; \sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\left(B_\mu(x)\right) \;+\; \cdots \;+\; \theta^2\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\left(C_\mu(x)\right) \;+\cdots\;,$$

e teríamos graus de liberdade vetoriais redundantes, desnecessários à implementação da simetria U(1)-local, se insistíssemos em tomar Γ_a e V completamente independentes, desconectados. Se impusermos, contudo,

$$\Gamma_a \;=\; -\,i\;D_a(V)\;, \tag{3.11}$$

permanecem apenas os graus de liberdade relevantes e, verificando-se que (3.11) satisfaz (3.6.a), com

$$\begin{aligned}\Gamma_a' \;\equiv\; -\,i\;D_a(V') \;\;&=\;\; -\,i\;D_a\left[V+i\left(\overline{\Lambda}-\Lambda\right)\right] \;=\; -\,iD_aV \;+\; D_a\overline{\Lambda} \;-\; D_a\Lambda \;=\\ &=\; \Gamma_a \;+\; 0 \;-\; D_a\Lambda \;=\; \Gamma_a \;-\; D_a\Lambda\;,\end{aligned}$$

confirmamos (3.11) como a relação procurada entre Γ_a e V.

Da mesma forma,

$$\overline{\Gamma}_{\dot{a}} \;=\; +\,i\overline{D}_{\dot{a}}(V)\;, \tag{3.12}$$

o que satisfaz $\overline{\Gamma}'_{\dot{a}} \;=\; \overline{\Gamma}_{\dot{a}} \;-\; \overline{D}_{\dot{a}}(\overline{\Lambda})$.

Com isso as derivadas covariantes de supersimetria e de gauge U(1), (3.5.a , 3.5.b), se escrevem:

$$\nabla_a = D_a + ih\Gamma_a = D_a + ih(-iD_aV) = D_a + hD_aV$$

e

$$\overline{\nabla}_{\dot{a}} = \overline{D}_{\dot{a}} - ih\overline{\Gamma}_{\dot{a}} = \overline{D}_{\dot{a}} - ih\left(+i\overline{D}_{\dot{a}}V\right) = \overline{D}_{\dot{a}} + h\overline{D}_{\dot{a}}V \ . \tag{3.13}$$

Determinamos assim completamente o termo cinético supersimétrico invariante de gauge U(1):

$$\nabla^a(\Sigma_a)\, e^{hV}\, \overline{\nabla}_{\dot{a}}(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}) \ . \tag{3.14}$$

O termo de auto-interação, na sua forma original (U(1) global invariante), $\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}$, transforma-se segundo

$$\begin{aligned}\left(\Sigma^a\Sigma_a\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right)' &\equiv \Sigma'^a\Sigma'_a\overline{\Sigma}'_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}\prime} = \left(e^{ih\Lambda}\Sigma^a\right)\left(e^{ih\Lambda}\Sigma_a\right)\left(e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\right)\left(e^{-ih\overline{\Lambda}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) = \\ &= \Sigma^a\Sigma_a\, e^{+\,2ih\left(\Lambda-\overline{\Lambda}\right)}\, \overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}} \ ,\end{aligned}$$

e a forma invariante U(1) local é facilmente obtida recorrendo-se mais uma vez ao super-campo V, tomando

$$\Sigma^a\Sigma_a\, e^{2hV}\, \overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}} \ . \tag{3.15}$$

Temos então a densidade (no superespaço) de Lagrangeana de matéria supersimétrica invariante de gauge U(1):

$$L = -\frac{1}{32}\left[\nabla^a(\Sigma_a)\, e^{hV}\, \overline{\nabla}_{\dot{a}}\left(\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right) + q\, \Sigma^a\Sigma_a\, e^{2hV}\, \overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}\right] \ . \tag{3.16}$$

Para completar a ação supersimétrica U(1) invariante, introduzimos o termo cinético para o supercampo de gauge V[1] [15]:

$$L_\theta = -\frac{1}{2048}\left[\overline{D}^2\left(e^{-V}\, D^a(e^V)\right)\,\overline{D}^2\left(e^{-V}\, D_a(e^V)\right)\right] ,$$

ou ainda, para o caso Abeliano,

$$L_\theta = -\frac{1}{2048}\left[\overline{D}^2\left(D^a(V)\right)\,\overline{D}^2\left(D_a(V)\right)\right] , \tag{3.17}$$

onde aparece, como é usual, o quadrado de um objeto escrito em função de derivadas do potencial de gauge, e que funciona, desse modo, como uma generalização supersimétrica do field-strength $F_{\mu\nu}(x)$:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) \quad &\Rightarrow \quad V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \\ F_{\mu\nu}(x) \quad &\Rightarrow \quad -\frac{1}{4}\,\overline{D}^2 D^a(V) \;\equiv\; W^a\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) \end{aligned}$$

O field-strength W^a é um supercampo, visto que é dado como o resultado de três derivações covariantes de supersimetria sobre o supercampo V, o que garante o caráter supersimétrico de (3.17). Além disso, o supercampo espinorial W^a satisfaz ao vínculo de quiralidade:

$$\overline{D}_{\dot{b}} W^a \equiv \overline{D}_{\dot{b}}\left(-\frac{1}{4}\,\overline{D}_{\dot{a}}\overline{D}^{\dot{a}} D^a(V)\right) = 0 ,$$

em virtude da presença de três espinores iguais $\overline{D}$ (com índice que abriga apenas duas possibilidades).

[1] O termo cinético recebe o rótulo L_θ, com L_θ representando uma densidade de Lagrangeana no superespaço, excluindo-se o setor $d^2\overline{\theta}$.

Para se caracterizar definitivamente como uma generalização supersimétrica do field-strength Abeliano $F_{\mu\nu}$, W^a deve ser invariante perante a versão supersimétrica das transformações de gauge U(1), $V' = V + i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right)$, e apresentar no produto $W^a W_a$ a contribuição, em campo componente, $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
W^{a'} &\equiv -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D^a(V') = -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D^a\left[V + i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{4}\overline{D}^2 D^a(V) - \frac{i}{4}\overline{D}^2 D^a(\overline{\Lambda}) + \frac{i}{4}\overline{D}_{\dot{b}}\overline{D}^{\dot{b}} D^a(\Lambda) = \\
&= W^a + 0 + \frac{i}{4}\overline{D}_{\dot{b}}\left\{\overline{D}^{\dot{b}}\,,\ D^a\right\}(\Lambda) - \frac{i}{4}\overline{D}_{\dot{b}} D^a \overline{D}^{\dot{b}}(\Lambda) = \\
&= W^a + \frac{i}{4}\overline{D}_{\dot{b}}\left(-2\,\overline{\sigma}^{\mu\dot{b}a}P_\mu\right)(\Lambda) + 0 = \\
&= W^a - \frac{i}{2}\overline{\sigma}^{\mu\dot{b}a}P_\mu\overline{D}_{\dot{b}}(\Lambda) = \\
&= W^a\,,
\end{aligned}
$$

e, em campos componentes, aparece realmente o termo $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ no produto $W^a W_a$.

Define-se, também, o field-strength conjugado de W^a, $\overline{W}^{\dot{a}}$:

$$
\overline{W}^{\dot{a}} \equiv -\frac{1}{4}D^2\overline{D}^{\dot{a}}(V)\,,
$$

que é um supercampo espinorial anti-quiral, $D_b\overline{W}^{\dot{a}} = 0$, e é também invariante sob $V \Rightarrow V' + i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right)$.

A forma mais simétrica, aliás, para o termo cinético de gauge seria $L_\theta + L_{\overline{\theta}}$, com $L_\theta = b\, W^a W_a$ e $L_{\overline{\theta}} = b\, \overline{W}_{\dot{a}}\overline{W}^{\dot{a}}$, onde b é alguma constante real. Isto equivale, entretanto, via integração por partes, a $L_\theta = 2bW^aW_a$.

Estabelecemos, assim, a ação supersimétrica invariante por U(1) local:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} \ &= \ \int d^4x \, d^2\theta \ \left[-\frac{1}{2048} \Big(\overline{D}^2 (e^{-V} D^a e^V) \overline{D}^2 (e^{-V} D_a e^V) \Big) \right] \\
&+ \ \int d^4x \, d^2\theta d^2\overline{\theta} \ \left[-\frac{1}{32} \left(\nabla^a \Sigma_a \, e^{hV} \, \overline{\nabla_{\dot{a}} \Sigma^{\dot{a}}} + q \Sigma^a \Sigma_a e^{2hV} \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\Sigma}^{\dot{a}} \right) \right] ,
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Tendo esta ação sido obtida via uma prescrição para transformar a ação (2.27), invariante por U(1) global, numa ação que apresentasse simetria local U(1), e sabendo-se que (2.27) é de fato a generalização supersimétrica do modelo de Avdeev-Chizhov sem o campo de gauge $A_\mu(x)$, o que foi confirmado escrevendo-a em campos componentes, espera-se que (3.18) forneça realmente, em campos componentes, toda a Lagrangeana de Avdeev-Chizhov para o campo tensorial antissimétrico de matéria em interação Abeliana (sem o termo de Yukawa e os espinores de Dirac, como sempre). Para verificar esta assertiva, fazemos uso do gauge de Wess-Zumino [15], que implica uma redução no grupo de transformações (3.10), aproximando-nos da transformação de gauge usual. A fixação deste gauge provoca, na verdade, a quebra da supersimetria manifesta, que até aqui adotamos como um pré-requisito do modelo, de fato a sua própria justificativa. No entanto, esta é uma quebra de simetria usual, via fixação de gauge, e obviamente os resultados assim gerados ainda guardarão a riqueza da formulação supersimétrica a partir da qual foram obtidos.

O gauge de Wess-Zumino reduz consideravelmente a extensão e a complexidade dos cálculos em campos componentes, e é implementado através de uma escolha dos parâmetros (campos componentes de Λ e $\overline{\Lambda}$) da transformação de gauge generalizada (3.7):

$$
\begin{aligned}
V' = V \,+\, i\left(\overline{\Lambda} - \Lambda\right) \ , \ \text{com} \quad i\left(\phi^*(x) - \phi(x)\right) &= -\,C(x) \\
-\,i\,\pi(x) &= -\,D(x) \\
+\,i\,\pi^*(x) &= -\,D^*(x) \\
-\,i\,\omega_a(x) &= -\,b_a(x) \\
+\,i\,\overline{\omega}_{\dot{a}}(x) &= -\,\overline{b}_{\dot{a}}(x) \ ,
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

onde foram escolhidos todos os parâmetros disponíveis, à exceção de $\phi(x)+\phi^*(x)$, parte real de $\phi(x)$, que determina a variação de $A_\mu(x)$. Com isto resulta, após uma tal transformação,

$$
\begin{aligned}
C'(x) &= D'(x) \,=\, D^{*'}(x) \,=\, b'_a(x) \,=\, \overline{b}'_{\dot{a}}(x) \,=\, 0 \ , \\
\Delta'(x) &= \Delta(x) \,+\, \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu(C(x)) \ , \\
\gamma'_a(x) &= \gamma_a(x) \,+\, \frac{i}{2}\,\sigma^\mu_{a\dot{a}}\,\partial_\mu(\overline{b}^{\dot{a}}(x)) \ , \\
\overline{\gamma}'_{\dot{a}}(x) &= \overline{\gamma}_{\dot{a}}(x) \,+\, \frac{i}{2}\,\overline{\sigma}^\mu_{\dot{a}a}\,\partial_\mu(b^a(x)) \ , \\
\text{e} \ \ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) \,-\, \frac{1}{4}\,\partial_\mu(\phi(x)+\phi^*(x)) \ , \ \text{não fixado.}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Faz-se, então, a restrição no grupo de transformações (3.10), impondo-se que os campos que foram anulados, C(x), D(x) e $b_a(x)$, permaneçam com seu valor zero, isto é, sejam definitivamente eliminados da teoria. Isto significa que só serão admitidas transformações do tipo $V = V' + i(\overline{\Lambda} - \Lambda)$ com os parâmetros $\phi(x) - \phi^*(x)$, $\pi(x)$, $\pi^*(x)$, $\omega_a(x)$ e $\overline{\omega}_{\dot{a}}(x)$ iguais a zero, caso contrário os campos anulados poderiam recuperar valores não-nulos.

Sobra, então,

$$
\begin{aligned}
C(x) \;=\; D(x) \;&=\; D^*(x) \;=\; b_a(x) \;=\; \overline{b}_{\dot{a}}(x) \;=\; 0\,, \\
\Delta(x) \text{ tal que } \delta\Delta(x) \;&=\; \frac{i}{4}\,\partial_\mu\partial^\mu\left(\phi(x)-\phi^*(x)\right) \;=\; 0\,, \\
\gamma_a(x) \text{ tal que } \delta\gamma_a(x) \;&=\; \frac{1}{2}\,\sigma^\mu_{a\dot{a}}\,\partial_\mu(\overline{\omega}^{\dot{a}}(x)) \;=\; 0\,, \\
\overline{\gamma}_{\dot{a}}(x) \text{ tal que } \delta\overline{\gamma}_{\dot{a}}(x) \;&=\; -\,\frac{1}{2}\,\overline{\sigma}^\mu_{\dot{a}a}\,\partial_\mu(\omega^a(x)) \;=\; 0\,, \\
e\;\; A_\mu(x) \text{ tal que } \delta A_\mu(x) \;&=\; -\,\frac{1}{4}\,\partial_\mu\left(\phi(x)+\phi^*(x)\right)\;,\;\; \text{não fixado.}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Ou seja, fixado o gauge de Wess-Zumino o supercampo V mantém apenas os campos componentes $A_\mu(x)$, $\gamma_a(x)$, $\overline{\gamma}_{\dot{a}}(x)$ e $\Delta(x)$, sendo que as transformações de gauge que restam à teoria deixam γ_a, $\overline{\gamma}_{\dot{a}}$ e Δ invariantes e modificam apenas A_μ, na forma usual $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu(\varphi(x))$. Aproximamo-nos, assim, de um modelo com simetria local U(1) convencional, contendo todavia parceiros supersimétricos, tanto para o campo de matéria $\lambda_{\mu\nu}(x)$ (que carrega o tensor $T_{\mu\nu}$) quanto para o campo de gauge $A_\mu(x)$.

No gauge de Wess-Zumino, temos então:

$$
V \;=\; 4\,\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}A_\mu(x) \;+\; \theta^2\overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x) \;+\; \overline{\theta}^2\theta^a\gamma_a(x) \;+\; \theta^2\overline{\theta}^2\Delta(x)\,,
\tag{3.22}
$$

e, conseqüentemente,

$$
e^{hV} = 1 + 4h\theta^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}A_\mu(x) + h\theta^2\overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x) + h\overline{\theta}^2\theta^a\gamma_a(x) + h\theta^2\overline{\theta}^2\Delta(x) + 4h^2\theta^2\overline{\theta}^2A_\mu(x)A^\mu(x)\,,
\tag{3.23}
$$

onde o estranho fator 4 tem por finalidade facilitar a comparação dos resultados com os de Avdeev-Chizhov.

Expandindo as transformações de gauge para os supercampos Σ_a e $\overline{\Sigma}_{\dot{a}}$(3.1.a,3.1.b) em termos de campos componentes, já fixado o gauge de Wess-Zumino, resulta:

$$\begin{aligned}
\delta\psi_a(x) &= ih\ \phi(x)\psi_a(x)\ , \\
\delta\rho(x) &= ih\ \phi(x)\rho(x)\ , \\
\delta\lambda_{\mu\nu}(x) &= ih\ \phi(x)\lambda_{\mu\nu}(x)\ , \\
\delta\mathcal{F}_a(x) &= ih\ \phi(x)\mathcal{F}_a(x)\ ,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde foram levadas em consideração as restrições sobre os campos componentes de Λ e $\overline{\Lambda}$, $\omega_b = \overline{\omega}_{\dot{b}} = \pi = \pi^* = (\phi - \phi^*) = 0$, necessárias à manutenção do gauge de Wess-Zumino. A restrição $\phi - \phi^* = 0$ implica termos o parâmetro $\phi(x)$ real, e nos permite reescrever a variação do campo de gauge $A_\mu(x)$ na forma

$$\delta A_\mu(x) \ = \ -\ \frac{1}{4}\ \partial_\mu\left(\phi(x) + \phi^*(x)\right) \ = \ -\ \frac{1}{4}\ \partial_\mu(2\ \phi(x)) \ = \ -\ \frac{1}{2}\ \partial_\mu(\phi(x))\ .$$

As transformações de gauge dos campos tensoriais $T_{\mu\nu}$ são dadas por:

$$\begin{aligned}
&\delta\lambda_{\mu\nu}(x) = ih\phi(x)\lambda_{\mu\nu}(x) \quad \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \quad \delta\left(\tfrac{1}{4}(T_{\mu\nu}(x) - i\ \widetilde{T}_{\mu\nu}(x))\right) = ih\phi(x)\left(\tfrac{1}{4}(T_{\mu\nu}(x) - i\ \widetilde{T}_{\mu\nu}(x))\right) \\
&\qquad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{4}(\delta T_{\mu\nu}(x) - i\ \delta\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)) = \tfrac{1}{4}\left(ih\phi(x)T_{\mu\nu}(x) + h\phi(x)\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \delta T_{\mu\nu}(x) \ = \ h\ \phi(x)\widetilde{T}_{\mu\nu}(x)$$

$$\text{e}\ \ \delta\widetilde{T}_{\mu\nu}(x) \ = \ -\ h\ \phi(x)T_{\mu\nu}(x)\ .$$

Se redefinimos

$$w(x) \ \equiv \ -\ \frac{1}{2}\ \phi(x)\ , \tag{3.25}$$

as transformações para o campo de gauge e campos tensoriais se escrevem:

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu(x) &= \partial_\mu(w(x)) \\
\delta T_{\mu\nu}(x) &= -\,2h\; w(x)\widetilde{T}_{\mu\nu}(x) \\
\delta \widetilde{T}_{\mu\nu}(x) &= +\,2h\; w(x)T_{\mu\nu}(x)\;.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Estas são exatamente as transformações de gauge para os campos A_μ, $T_{\mu\nu}$ e seu dual $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ que compõem o modelo com invariância local proposto por Avdeev-Chizhov [3].

Resta, finalmente, obter a expressão da ação originariamente supersimétrica e U(1) localmente invariante (3.18) em campos componentes, respeitando as restrições impostas pelo gauge de Wess-Zumino. Os elementos para este cálculo, bastante extenso, já estão todos disponíveis, mas é útil estabelecer previamente as expressões para as derivadas covariantes de supersimetria do supercampo V, $D^a(V)$ e $\overline{D}_{\dot{a}}(V)$, que compõem as derivadas covariantes de supersimetria e de gauge ∇^a e $\overline{\nabla}_{\dot{a}}$, no gauge de Wess-Zumino.

$$
\begin{aligned}
D^a(V)\,|_{\text{Wess-Zumino}} &= 4\left(+\,\epsilon^{ab}\;\sigma^\mu_{b\dot{a}}A_\mu(x)\right)\overline{\theta}^{\dot{a}} \;+\; 2\;\theta^a\overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x) \;+\; \overline{\theta}^2\gamma^a(x) \;+ \\
&+\; \theta^c\overline{\theta}^2\left(2\;\delta_c^{\;a}\;\Delta(x) - 2i\delta_c^{\;a}\;\partial_\mu(A^\mu(x)) + 2\epsilon^{ab}\epsilon_{cd}\;(\sigma^{\mu\nu})_b^{\;d}\;\partial_\mu(A_\nu(x))\right) \;+ \\
&+\; \theta^2\overline{\theta}^2\left(+\,\frac{i}{2}\;\epsilon^{ab}\;\sigma^\mu_{b\dot{a}}\;\partial_\mu(\overline{\gamma}^{\dot{a}}(x))\right)\;.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_{\dot{a}}\,|_{\text{WZ}} &= 4\theta^a\;(\sigma^\mu_{a\dot{a}}\;A_\mu(x)) \;+\; \theta^2\overline{\gamma}_{\dot{a}}(x) \;+\; 2\;\theta^a\gamma_a(x)\overline{\theta}_{\dot{a}} \;+ \\
&+\; \theta^2\overline{\theta}^{\dot{b}}\left(2\;\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\;\Delta(x) \;+\; 2i\;\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\;\partial_\mu(A^\mu(x)) \;-\; 2\;\epsilon_{\dot{b}\dot{c}}(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{c}}_{\;\dot{a}}\;\partial_\nu(A_\mu(x))\right) \\
&+\; \theta^2\overline{\theta}^2\left(-\,\frac{i}{2}\;\partial_\mu(\gamma^a(x))\sigma^\mu_{a\dot{a}}\right)\;.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

A ação (3.18), em campos componentes, é então dada por[2]:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; & \int d^4x \Big(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8}\Delta^2 + \frac{i}{16}\overline{\gamma}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\gamma^a + \partial^\mu\rho\partial_\mu\rho^* - 16\partial^\mu\lambda_{\mu\nu}\partial_\alpha\lambda^{*\alpha\nu} \\
+ \;& i\overline{\mathcal{F}}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\mathcal{F}^a - i\overline{\psi}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\partial^\nu\partial_\nu\psi^a - 2ih\;\partial^\mu\rho A_\mu\rho^* + 2ih\;\rho A^\mu\partial_\mu\rho^* \\
+ \;& 2h\rho\Delta\rho^* + 4h^2\rho A^\mu A_\mu\rho^* - h\gamma^a\mathcal{F}_a\rho^* - h\rho\overline{\gamma}_{\dot a}\overline{\mathcal{F}}^{\dot a} - i\frac{h}{2}\rho\gamma^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}\partial_\mu\overline{\psi}^{\dot a} \\
- \;& i\frac{h}{2}\rho^*\overline{\gamma}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\psi^a + i\frac{h}{2}\partial_\mu\rho^*\psi^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}\overline{\gamma}^{\dot a} - i\frac{h}{2}\partial_\mu\rho\gamma^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}\overline{\psi}^{\dot a} - h\psi^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}A_\mu\partial^\nu\partial_\nu\overline{\psi}^{\dot a} \\
+ \;& h\overline{\psi}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}A_\mu\partial^\nu\partial_\nu\psi^a + ih\Delta\overline{\psi}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\psi^a + ih\Delta\psi^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}\partial_\mu\overline{\psi}^{\dot a} - h\;\partial^\nu A_\nu\overline{\psi}^{\dot a}\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot a a}\partial_\mu\psi^a \\
+ \;& h\;\partial_\nu A^\nu\psi^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}\partial_\mu\overline{\psi}^{\dot a} + 2h\mathcal{F}^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}A_\mu\overline{\mathcal{F}}^{\dot a} - \frac{h}{2}\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}F_{\mu\nu}\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} \\
+ \;& \frac{h}{2}\partial_\mu\psi^a(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\nu)_{a\dot a}F_{\nu\alpha}\overline{\psi}^{\dot a} + 4h\rho^*F_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu} + 4h\rho F_{\mu\nu}\lambda^{*\mu\nu} \\
+ \;& 8ih(4\partial_\mu\lambda^{*\mu\nu}\lambda_{\nu\alpha}A^\alpha - 4\partial^\mu\lambda_{\mu\nu}A_\alpha\lambda^{*\nu\alpha}) \\
- \;& 2ih^2\gamma^a(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\alpha)_{a\dot a}\lambda_{\mu\nu}A_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} + \frac{h}{2}\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}\overline{\gamma}^{\dot a}\partial_\nu\lambda^*_{\mu\alpha} - \frac{h}{2}\partial_\nu\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}\lambda^*_{\mu\alpha}\overline{\gamma}^{\dot a} \\
+ \;& 2ih^2\overline{\gamma}^{\dot a}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha\overline{\sigma}^\beta)_{\dot a a}A_\mu\psi^a\lambda^*_{\alpha\beta} - \frac{h}{2}\gamma^a(\sigma^\alpha\overline{\sigma}^\beta\sigma^\mu)_{a\dot a}\partial_\mu\lambda_{\alpha\beta}\overline{\psi}^{\dot a} + \frac{h}{2}\gamma^a(\sigma^\alpha\overline{\sigma}^\beta\sigma^\mu)_{a\dot a}\lambda_{\alpha\beta}\partial_\mu\overline{\psi}^{\dot a} \\
+ \;& 2h\;\partial_\mu\psi^a(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\alpha)_{a\dot a}A_\nu\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} + h\;\partial_\mu\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}A_\nu\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} \\
+ \;& h\;\partial_\mu\psi^a(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\nu)_{a\dot a}A_\nu\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} + 4h^2\Delta\psi^a\sigma^{\mu}_{a\dot a}A_\mu\overline{\psi}^{\dot a} + ih^2\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}F_{\mu\nu}A_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} \\
+ \;& ih^2\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}F_{\alpha\mu}A_\nu\overline{\psi}^{\dot a} - 2ih^2\gamma^a(\sigma^\alpha\overline{\sigma}^\beta\sigma^\mu)_{a\dot a}\lambda_{\alpha\beta}A_\mu\overline{\psi}^{\dot a} \\
- \;& 4ih^2\;\partial_\mu\psi^a(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\alpha)_{a\dot a}A_\nu A_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} - 2ih^2\;\partial_\mu\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot a}A_\nu A_\alpha\overline{\psi}^{\dot a} \;+
\end{aligned}
$$

[2]As derivadas presentes nesta ação atuam, única e exclusivamente, sobre o campo escrito imediatamente à sua direita.

$$
\begin{aligned}
&+ \quad 4ih^2\psi^a A_\nu A_\mu(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\alpha)_{a\dot{a}}\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot{a}} + 2ih^2\psi^a A_\nu A_\mu(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\mu)_{a\dot{a}}\partial_\alpha\overline{\psi}^{\dot{a}} \\
&+ \quad 8h^3\psi^a(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\mu)_{a\dot{a}}A_\nu A_\alpha A_\mu\overline{\psi}^{\dot{a}} - h^2\gamma^a\psi_a\overline{\gamma}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} + 64h^2A^\nu A_\mu\lambda_{\nu\beta}\lambda^{*\beta\mu} \\
&- \quad q\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^2 - 4\lambda_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu})\frac{1}{\sqrt{2}}(\rho^{*2} - 4\lambda^*_{\alpha\beta}\lambda^{*\alpha\beta}) + 4q\lambda^{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu}\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} + 4q\lambda^{*\mu\nu}\lambda^*_{\mu\nu}\mathcal{F}^a\psi_a \\
&- \quad 2q\mathcal{F}^a\psi_a\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - q\rho^2\overline{\mathcal{F}}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - q(\rho^*)^2\mathcal{F}^a\psi_a + \frac{q}{2}\psi^a\psi_a\partial^\mu\partial_\mu(\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}}) \\
&- \quad iq\rho\psi^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial_\mu(\overline{\psi}^{\dot{a}}\rho^*) + 4q\rho\psi^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}\partial^\beta(\lambda^*_{\beta\mu}\overline{\psi}^{\dot{a}}) - 4q\lambda_{\mu\beta}\partial^\beta(\rho^*\overline{\psi}_{\dot{a}})\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\psi_a \\
&- \quad 16iq\lambda_{\mu\alpha}\partial_\beta(\lambda^{*\beta\alpha}\overline{\psi}_{\dot{a}})\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\psi_a - qh\Delta\psi^a\psi_a\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - 2iqhA_\mu\psi^a\psi_a\partial^\mu(\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}}) \\
&+ \quad 2iqhA_\mu\partial^\mu(\psi^a\psi_a)\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - 8qh^2A^\mu A_\mu\psi^a\psi_a\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - qh\rho\gamma^a\psi_a\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}} - qh\rho^*\overline{\gamma}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}}\psi^a\psi_a \\
&- \quad qh\gamma^a\sigma^{\mu\nu}_{ab}\psi^b\overline{\psi}_{\dot{a}}\overline{\psi}^{\dot{a}}\lambda_{\mu\nu} + qh\overline{\gamma}^{\dot{a}}\overline{\sigma}^{\mu\nu}_{\dot{a}\dot{b}}\lambda^*_{\mu\nu}\overline{\psi}^{\dot{b}}\psi^a\psi_a - 4qh\rho\psi^a\sigma^\mu_{a\dot{a}}A_\mu\overline{\psi}^{\dot{a}}\rho^* \\
&- \quad 8iqh\rho\psi^a A_\mu(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\beta)_{a\dot{a}}\lambda^*_{\alpha\beta}\overline{\psi}^{\dot{a}} + 8iqh\rho^*\psi^a(\sigma^\beta\overline{\sigma}^\alpha\sigma^\mu)_{a\dot{a}}A_\mu\lambda_{\alpha\beta}\overline{\psi}^{\dot{a}} \\
&+ \quad 8qh\psi^a(\sigma^\alpha\overline{\sigma}^\beta\sigma^\gamma\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu)_{a\dot{a}}\lambda_{\alpha\beta}A_\gamma\lambda^*_{\mu\nu}\overline{\psi}^{\dot{a}}\Big). \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Usando $\lambda_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}(T_{\mu\nu}(x) - \ i\ \widetilde{T}_{\mu\nu}(x))$, os termos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &\equiv -16\ \partial_\mu(\lambda^{\mu\nu})\partial^\alpha(\lambda^*_{\alpha\nu}) \text{ , já conhecido do caso U(1) global ,} \\
\mathcal{B} &\equiv +8ih\,[4\ \partial_\mu(\lambda^{*\mu\nu})\lambda_{\nu\alpha}\ A^\alpha\ -\ 4\ \partial_\mu(\lambda^{\mu\nu})\lambda^*_{\nu\alpha}\ A^\alpha]\ , \\
\mathcal{C} &\equiv +64h^2\ A^\nu A_\mu\lambda_{\nu\beta}\lambda^{*\beta\mu} \ \text{ e o também já conhecido} \\
\mathcal{D} &\equiv -8q\ \lambda_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu}\lambda^*_{\alpha\beta}\lambda^{*\alpha\beta}\ ,
\end{aligned}
$$

presentes em (3.29), resultam:

$$
\mathcal{A} \ \equiv\ +\frac{1}{2}\ \partial^\mu(T^{\nu\alpha})\partial_\mu(T_{\nu\alpha})\ -\ 2\ \partial^\mu(T_{\mu\nu})\partial_\alpha(T^{\alpha\nu}) \qquad (3.30)
$$

$$\mathcal{B} \equiv + 4h\, A^{\alpha} \Big[T_{\alpha\nu}\, \partial_{\mu}(\widetilde{T}^{\mu\nu}) \; - \; \widetilde{T}_{\alpha\nu}\, \partial_{\mu}(T^{\mu\nu}) \Big] \tag{3.31}$$

$$\mathcal{C} \equiv + 4h^2 \Big[\frac{1}{2}(A_{\alpha}T_{\mu\nu})(A^{\alpha}T^{\mu\nu}) \; - \; 2(A^{\nu}T_{\nu\beta})(A_{\mu}T^{\mu\beta}) \Big] \tag{3.32}$$

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{4}\, q \left[\frac{1}{2}\, T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \; - \; 2\, T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\alpha}T^{\alpha\mu} \right] \tag{3.33}$$

Identificamos, também, $\mathcal{E} \equiv - \frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Desta forma, a soma $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D} + \mathcal{E}$ fornece a densidade de Lagrangeana de Avdeev-Chizhov (1.42) (sem o termo de Yukawa e os espinores de Dirac). Como (3.29) não apresenta nenhum outro termo envolvendo apenas $A_{\mu}(x)$ e/ou $T_{\mu\nu}(x)$, estando estes sempre acompanhados de parceiros supersimétricos, conclui-se, como era esperado, que a ação (3.18) é de fato a generalização supersimétrica do modelo de Avdeev-Chizhov.

Observa-se, ainda, nesta formulação, uma diferença considerável em relação ao modelo supersimétrico usual com simetria local U(1), construído com supercampos escalares quirais e anti-quirais: o modelo de Wess-Zumino [15]. Neste modelo, o acoplamento dos supercampos de matéria ao setor de gauge não impõe a presença dos campos componentes do supercampo de gauge nos termos de auto-interação da matéria. Afeta-os, apenas, na confirmação da restrição ao valor relativo das cargas dos diversos supercampos escalares que compõem o setor de auto-interação (de matéria) da teoria, restrição esta já presente na formulação com simetria U(1) global, e que condiciona a presença de um termo de auto-interação a um somatório nulo das cargas U(1) dos supercampos presentes neste termo. No modelo que apresentamos, contudo, a construção da invariância U(1) local impõe a forma $+\, q\Sigma^{a}\Sigma_{a}\; e^{2hV}\; \overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\Sigma}^{\dot{a}}$ para o termo de auto-interação, o que fornece, para o modelo supersimétrico da interação U(1) do campo tensorial $T_{\mu\nu}(x)$, não apenas o esperado enriquecimento das interações deste campo tensorial via o acoplamento com seus parceiros supersimétricos, mas também uma adicional composição de interações através da introdução do bóson de gauge A_μ e do férmion de gauge -gaugino- γ_a nos termos de auto-interação da matéria.

Se, todavia, buscarmos uma proximidade maior com o modelo de Wess-Zumino, tentando compor termos de auto-interação com dois supercampos espinoriais quirais (e dois anti-quirais) de cargas U(1) opostas, na forma

$$\begin{aligned} \Sigma_a' &= e^{ih\Lambda}\,\Sigma_a \\ e\ \ \mathcal{T}_a' &= e^{-ih\Lambda}\,\mathcal{T}_a\,, \end{aligned} \tag{3.34}$$

teremos como candidata a expressão

$$\Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}\,, \tag{3.35}$$

que é automaticamente invariante de gauge:

$$\left(\Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}\right)' = e^{ih\Lambda}\, e^{-ih\Lambda}\, e^{-ih\overline{\Lambda}}\, e^{+ih\overline{\Lambda}}\, \Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}} = \Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}\,.$$

Desta forma, dispensaríamos a introdução da exponencial e^{2hV} no termo de auto-interação da matéria, não havendo, assim, a necessidade de campos componentes do supercampo de gauge estarem presentes nesse termo. Numa tal situação teríamos também, é claro, a presença de mais um campo tensorial antissimétrico de matéria na teoria, $U_{\mu\nu}(x)$, que seria o equivalente de $T_{\mu\nu}(x)$ para o supercampo adicional $\mathcal{T}_a$, além da introdução de um outro campo escalar, $\varphi(x)$, e dois espinoriais, $\chi_a(x)$ e $\mathcal{G}_a(x)$, componentes de $\mathcal{T}_a$ correspondentes aos originais $\rho(x)$, $\psi_a(x)$ e $\mathcal{F}_a(x)$, de Σ_a.

O termo (3.35) poderia, em princípio, ser pensado como um possível gerador de massa para os supercampos espinoriais Σ_a e $\mathcal{T}_a$, no contexto de uma quebra espontânea de simetria. De fato, se o campo escalar físico $\rho(x)$ pudesse exibir um valor esperado no vácuo não-trivial, isto implicaria a mesma característica para o supercampo que o abriga, Σ_a, e teríamos a redefinição

$\Sigma_a = \Sigma_{a(\text{físico})} + < 0 \mid \Sigma_a \mid 0 >$, onde $< 0 \mid \Sigma_a \mid 0 >$ é alguma constante não nula.

A expressão $\Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}$ forneceria

$$\left(\Sigma^a_{(\text{fís.})} + < 0 \mid \Sigma^a \mid 0 >\right) \mathcal{T}_a \left(\overline{\Sigma}_{\dot{a}(\text{fís.})} + < 0 \mid \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \mid 0 >\right) \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}} \ ,$$

e uma das parcelas daí resultantes seria

$- < 0 \mid \Sigma^a \mid 0 > < 0 \mid \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \mid 0 > \mathcal{T}_a \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}} = C^a_{\ \dot{a}} \, \mathcal{T}_a \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}$, onde $C^a_{\ \dot{a}}$ é uma constante.

Poderíamos, então, interpretar $C^a_{\ \dot{a}} \, \mathcal{T}_a \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}$ como um termo de massa para o supercampo $\mathcal{T}_a$.

Construindo uma teoria simétrica para os dois supercampos espinoriais Σ_a e $\mathcal{T}_a$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \ = \ & + \int d^4x \, d^2\theta d^2\overline{\theta} \ - \frac{1}{32}\left(\nabla^a \Sigma_a \, e^{hV} \, \overline{\nabla_{\dot{a}} \overline{\Sigma}^{\dot{a}}} + \nabla^a \mathcal{T}_a \, e^{-hV} \, \overline{\nabla_{\dot{a}} \mathcal{T}^{\dot{a}}}\right) + \\
& + \int d^4x \, d^2\theta d^2\overline{\theta} \ - \frac{q}{32}\left(\Sigma^a \Sigma_a \, e^{2hV} \, \overline{\Sigma_{\dot{a}} \Sigma^{\dot{a}}} + \mathcal{T}^a \mathcal{T}_a \, e^{-2hV} \, \overline{\mathcal{T}_{\dot{a}} \mathcal{T}^{\dot{a}}}\right) + \\
& + \int d^4x \, d^2\theta d^2\overline{\theta} \ - \frac{1}{32}\left(q \Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}\right) + \text{Termo cinético de gauge} \ , \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

se $\rho(x)$ pudesse exibir $< 0 \mid \rho \mid 0 >$ não-trivial, $\varphi(x)$ também forneceria $< 0 \mid \varphi \mid 0 >$ não-trivial, e de modo análogo geraríamos massa para o supercampo Σ_a. Ocorre, entretanto, que a ausência de termo de massa para os escalares ρ e φ proíbe uma relação alternativa às usuais $\rho^* \rho = 0$ e $\varphi^* \varphi = 0$ no vácuo, e, assim sendo, nem $\rho(x)$ pode induzir quebra espontânea de simetria e geração de massa para $\mathcal{T}_a$, nem $\varphi(x)$ pode produzir efeito semelhante sobre Σ_a. De fato, pelo menos um dos supercampos deveria, neste esquema, possuir massa a priori, mas um termo do tipo $m^2\Sigma^a\Sigma_a$ é proibido pela invariância U(1). Esta impossibilidade, na verdade, não é novidade se notarmos que a relação $< 0 \mid \Sigma_a \mid 0 > \neq 0$ não pode se verificar, se pretendermos manter covariância de Lorentz, devido ao caráter espinorial de Σ_a, o que desclassifica este supercampo como fonte de quebra espontânea de simetria, confirmando a análise que fizemos concentrando-nos nos escalares $\rho(x)$ e $\varphi(x)$.

Uma outra tentativa para introduzir massa no modelo seria propor um termo invariante de gauge na forma

$$\mathcal{S}_{massa} = \int d^4x \, (d^2\theta \; \frac{im^2}{4}\Sigma^a\mathcal{T}_a - d^2\overline{\theta} \; \frac{i\overline{m}^2}{4}\overline{\Sigma}_{\dot{a}}\overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}) \, . \tag{3.37}$$

Entretanto, um tal termo forneceria, se novamente nos concentrarmos nos escalares $\rho(x)$ e $\varphi(x)$,

$$\int d^4x \;\; D^2 \left[\frac{im^2}{4}\left(\epsilon^{ac}\Sigma_c\mathcal{T}_a\right)\right] \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ componente θ^2 de $\Sigma_c\mathcal{T}_a$ (termos envolvendo apenas os escalares):

$$1) \;\; \theta^b\Omega_{bc}(x)\theta^d\Lambda_{da}(x) \quad \Rightarrow \quad \theta^b(\epsilon_{bc}\rho(x))\theta^d(\epsilon_{da}\varphi(x)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon^{ac}\Sigma_c\mathcal{T}_a \quad = \quad \theta^b\theta^d\epsilon^{ac}(-\,\epsilon_{cb})\epsilon_{da}\rho(x)\varphi(x) \;=$$

$$= -\,\theta^b\theta^d\epsilon_{db}\rho(x)\varphi(x) \quad = \quad \theta^2\rho(x)\varphi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{im^2}{4}(\Sigma^a\mathcal{T}_a) \;=\; \frac{i\theta^2m^2}{4}\;\rho(x)\varphi(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad D^2\left[\frac{im^2}{4}\left(\Sigma^a\mathcal{T}_a\right)\right] \;=\; -\,im^2\;\rho(x)\varphi(x)\,.$$

E também, para o conjugado complexo

$$\int d^4x \;\; \overline{D}^2 \left[- \frac{im^2}{4} \left(\Sigma_{\dot{a}} \overline{T}^{\dot{a}} \right) \right] \;, \text{ teríamos}$$

$$2) \;\; \overline{D}^2 \left[- \frac{im^2}{4} \left(\overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{T}^{\dot{a}} \right) \right] \;=\; + \, im^2 \, \rho^*(x) \varphi^*(x) \;.$$

Tomando os termos cinéticos para os campos escalares $\rho(x)$ e $\varphi(x)$ presentes em (3.36), $\partial_\mu(\rho(x))\partial^\mu(\rho^*(x))$ e $\partial_\mu(\varphi(x))\partial^\mu(\varphi^*(x))$, a parte livre da dinâmica destes campos (termo cinético livre + termo de massa) fornece, então, como equações de movimento livres, as expressões

Equação para $\rho(x)$:

$$\Box(\rho^*(x)) \;+\; im^2 \; \varphi(x) \;=\; 0$$

Equação para $\varphi^*(x)$:

$$\Box(\varphi(x)) \;-\; im^2 \; \rho^*(x) \;=\; 0$$

Aplicando o dalambertiano à 2ª equação, resulta:

$$\Box^2(\varphi(x)) \;-\; im^2 \, \Box(\rho^*(x)) \;=\; 0$$

Substituindo a 1ª equação neste resultado, fica:

$$\Box^2(\varphi(x)) \;-\; im^2 \left(- \, im^2 \; \varphi(x) \right) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad \Box^2(\varphi(x)) \;-\; m^4 \varphi(x) \;=\; 0 \;.$$

E, similarmente, obtém-se

$$\Box^2(\rho(x)) \;-\; m^4 \rho(x) \;=\; 0 \;.$$

No espaço dos momenta tais equações são escritas na forma

$$\left(k^4 - m^4\right)\tilde{\varphi}(k) = 0 \qquad (3.38)$$

$$\left(k^4 - m^4\right)\tilde{\rho}(k) = 0 , \qquad (3.39)$$

onde $\tilde{\rho}(k)$ e $\tilde{\varphi}(k)$ são as transformadas de Fourier dos campos $\rho(x)$ e $\varphi(x)$.

Invertendo-se o operador "diferencial" (originariamente) $k^4 - m^4$ resulta a função de Green-propagador livre, $\frac{1}{k^4-m^4}$, e os pólos $k^4 = m^4$ desta função demonstram que o termo de massa tentativa (3.37) introduz duas excitações massivas, $k^2 = -m^2$ e $k^2 = +m^2$, simultaneamente presentes no espectro. Deste modo, qualquer que seja o sinal de m^2, teremos sempre um táquion na teoria, e a premissa de causalidade nos obriga, portanto, a abandonar (3.37) como termo de massa.

Descartada, então, a possibilidade de introdução de massa na teoria através desses dois processos, adição de termo explícito e quebra espontânea de simetria induzida pelo supercampo Σ (em conjunto com um parceiro de carga oposta, $\mathcal{T}$), resta a construção de um mecanismo de quebra espontânea induzida por supercampos adicionais, de outra natureza (escalares), no contexto do modelo de O' Raifeartaigh [15]. Estes novos supercampos, com termos de massa explícitos, compõem, com o supercampo Σ, um modelo mais geral em que há espaço para a atribuição de massa a excitações de campos presentes em Σ, inclusive do campo tensorial de matéria [17]. Conclui-se, assim, a análise do modelo supersimétrico para o campo tensorial antissimétrico de matéria.

Conclusões Gerais

O desenvolvimento alcançado no projeto de supersimetrização do modelo Abeliano de Avdeev-Chizhov para campos tensoriais reais antissimétricos de matéria estabelece, como era objetivo desta tese, um conjunto de resultados acerca do método de inserção de tais campos no contexto de teorias supersimétricas, evidenciando, ainda, interessantes conseqüências para a dinâmica destes tensores e de seus parceiros, neste novo contexto.

Inicialmente, verificou-se que o multiplete de supersimetria adequado para acomodar os graus de liberdade do campo tensorial é um supercampo espinorial quiral, de dimensão de massa $\frac{1}{2}$. A construção de um modelo supersimétrico invariante por U(1)-local para um supercampo desta natureza revelou, por sua vez, uma característica peculiar da forma de acoplamento deste objeto a campos de gauge. Diferentemente do que acontece na abordagem usual que se emprega, em supersimetria, para descrever matéria (escalares e espinores) em interação Abeliana (modelo de Wess-Zumino), no modelo que construímos para tais campos tensoriais emerge uma novidade: a presença inevitável do campo de gauge e seus parceiros no termo de auto-interação da matéria. Termos do tipo $\Sigma^a \mathcal{T}_a \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\mathcal{T}}^{\dot{a}}$, onde Σ_a e $\mathcal{T}_a$ têm cargas de gauge opostas, e que se assemelham mais à forma típica das interações do modelo de Wess-Zumino, ainda que obrigatoriamente presentes no modelo renormalizável mais geral (devido à anomalia de Adler-Bell-Jackiw), não substituem as auto-interações $\Sigma^a \Sigma_a e^{2hV} \overline{\Sigma}_{\dot{a}} \overline{\Sigma}^{\dot{a}}$, que trazem a novidade mencionada, dotando a versão supersimétrica do acoplamento de gauge Abeliano para campos tensoriais deste interessante enriquecimento. Percebe-se, ainda, nesta construção, que a exigência de simetria U(1) e a natureza espinorial do supercampo que carrega o campo tensorial têm, conjuntamente, efeito fortemente restritivo no que concerne à presença de massa na teoria. A simetria U(1), global ou local, inviabiliza a introdução de termos de massa explícitos, e a natureza espinorial proíbe a participação ativa do supercampo Σ_a num esquema de quebra espontânea de simetria, impondo resultado trivial para o valor esperado de Σ_a no vácuo, se quisermos manter covariância de Lorentz. Permanece, apenas, a possibilidade de quebra espontânea induzida por supercampos escalares adicionais.

Outra característica notável do modelo supersimétrico para campos tensoriais de matéria é a presença de uma patologia no setor fermiônico dos parceiros de $T_{\mu\nu}$. De fato, um dos parceiros fermiônicos de $T_{\mu\nu}$, o espinor de Weyl ψ_a, apresenta dimensão de massa $\frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, um termo cinético com derivadas superiores. Mostra-se, contudo, que a teoria supersimétrica livre permite uma redefinição capaz de acomodar estes graus de liberdade num objeto físico, um espinor de Dirac de dimensão $\frac{3}{2}$. Na presença de interações, todavia, este esquema não mais se aplica, e não é claro como a permanência de ψ_a pode afetar a teoria. Eventualmente, a solução de problemas existentes na definição do modelo não-supersimétrico, relativos, portanto, ao setor bosônico da versão supersimétrica, pode oferecer contribuição decisiva para o desacoplamento do férmion patológico, mas este percurso não é, a esta altura, óbvio.

A continuidade deste trabalho de enquadramento do modelo de Avdeev-Chizhov no contexto de teorias supersimétricas, observada a intenção de verificar o alcance fenomenológico deste novo objeto - o campo tensorial de matéria, passa pela busca de possíveis multipletes não-mínimos capazes de acomodar $T_{\mu\nu}$. De fato, se esperamos registros de quebra de supersimetria em experiências num futuro próximo, torna-se natural procurar estabelecer o processo pelo qual tal quebra ocorre em nosso modelo específico. Tem-se, então, como perspectiva de continuação do presente trabalho, a busca de um modelo não-mínimo que viabilize o acoplamento com a gravitação, de modo a obtermos as informações necessárias ao desvendamento do processo de quebra de supersimetria e de suas conseqüências.

Apêndice A

Convenções

Convenção notacional: índices gregos referem-se ao espaço-tempo; índices latinos designam componentes espinoriais.

A métrica adotada para o espaço-tempo de Minkowski é dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \ . \tag{A.1}$$

As matrizes σ^μ que realizam a representação de Weyl da álgebra de Clifford em $D = (1+3)$ são fixadas como segue:

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \overline{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}), \quad \overline{\sigma}^\mu_{\dot{b}a} = \sigma^\mu_{a\dot{b}} \ , \tag{A.2}$$

onde $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ \hline 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0, & -i \\ \hline i, & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \hline 0, & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.3}$$

Além disso, as matrizes $\sigma^{\mu\nu}$ e $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$, geradores de SO(1,3) nas representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e

$(0, \frac{1}{2})$, respectivamente, satisfazem às relações:

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\sigma}^{\nu\dot{a}b} = \eta^{\mu\nu}\delta_a^{\ b} - i(\sigma^{\mu\nu})_a^{\ b} \ , \tag{A.4}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot{a}a}\sigma^{\nu}_{a\dot{b}} = \eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} - i(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}}_{\ \dot{b}} \ , \tag{A.5}$$

e

$$\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\sigma}^{\nu\dot{a}b}\sigma^{\alpha}_{b\dot{b}}\overline{\sigma}^{\beta\dot{b}a} = 2\Big(\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha} + i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\Big), \tag{A.6}$$

onde $\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1$.

A convenção de soma para os índices espinoriais segue a regra

$$\theta\eta = \theta^a\eta_a, \quad \overline{\theta}\overline{\eta} = \overline{\theta}_{\dot{a}}\overline{\eta}^{\dot{a}}, \tag{A.7}$$

onde subimos e descemos índices de acordo com

$$\theta^a = \varepsilon^{ab}\theta_b, \quad \theta_a = \varepsilon_{ab}\theta^b, \tag{A.8}$$

com $\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{ba}$ (o mesmo vale para índices com ponto).

Diferenciação com respeito aos parâmetros anticomutantes θ_a, $\overline{\theta}_{\dot{a}}$ é definida por

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}\theta^b = \delta_a^{\ b} \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{a}}}\overline{\theta}^{\dot{b}} = \delta_{\dot{a}}^{\ \dot{b}}. \tag{A.9}$$

Derivadas covariantes de supersimetria têm as expressões:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\overline{\theta}^{\dot{a}}\partial_\mu \tag{A.10}$$

$$\overline{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{a}}} + i\theta^a\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_\mu \ , \tag{A.11}$$

e obedecem às relações de anticomutação

$$\{D_a, \overline{D}_{\dot{a}}\} = 2i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\partial_\mu \ ; \quad \{D_a, D_b\} = 0 = \{\overline{D}_{\dot{a}}, \overline{D}_{\dot{b}}\}. \tag{A.12}$$

As matrizes de Dirac, γ^μ, presentes no termo cinético $i\,\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$, são dadas, em função das matrizes de Pauli, pela expressão

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\,\overline{\sigma}^\mu \\ -\,\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.13}$$

O objeto $\overline{\Psi}$ tem a definição usual:

$$\overline{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0 \;, \text{com } \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\,1 \\ -\,1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{A.14}$$

Referências

[1] T. E. Clark, C. H. Lee and S. T. Love, *Nucl. Phys.* **B308** (1988) 379.

[2] P. van Nieuwenhuizen, *General Theory of Coset Manifolds and Antisymmetric Tensors Applied to Kaluza-Klein Supergravity*, in Proceedings of the Trieste Spring School on Supersymmetry and Supergravity, ed. by B. de Wit, P. Fayet, P. van Nieuwenhuizen (Trieste, 1984).

[3] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *Phys. Lett.* **B321** (1994) 212.

[4] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *A queer reduction of degrees of freedom*, preprint JINR Dubna, hep-th/9407067.

[5] M. V. Chizhov, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 2753.

[6] V. Lemes, R. Renan, S. P. Sorella, *Phys. Lett.* **B344** (1995) 158.

[7] V. Lemes, R. Renan, S. P. Sorella, *Phys. Lett.* **B352** (1995) 37.

[8] S. A. Frolov, *Teor. Mat. Fiz.* **76** (1988) 314;
S. A. Frolov and A. A. Slavnov, *Phys. Lett.* **B218** (1989) 461.

[9] I. T. Todorov, M. C. Mintchev and V. B. Petkova, *Conformal Invariance in Quantum Field Theory*, ETS, (Pisa, 1978).

[10] E. Butkov, *Física Matemática*, Ed. Guanabara Dois, (Rio de Janeiro, 1978), do original em inglês *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1968).

[11] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426;
J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim.* **A60** (1969) 47.

[12] R. Jackiw, *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific Publishing, (Singapore, 1985).

[13] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Springer-Verlag, (1995).

[14] O. Piguet and K. Sibold, *Renormalized Supersymmetry*, Birkhäuser Press (Boston, 1986).

[15] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1983).

[16] G. Velo and D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **186** (1969) 1337;
K. Johnson and E. C. G. Sudarshan, *Ann. Phys.* **vol.13** (1961) 126.

[17] V. Lemes, A. Nogueira and J. A. Helayël-Neto, *Supersymmetric Generalization of the Tensor Matter Fields*, preprint CBPF, CBPF-NF-054/95, (August, 1995); hep-th/9508049.

“MATÉRIA TENSORIAL EM TEORIAS DE GAUGE SUPERSIMÉTRICAS”

ÁLVARO LUIS MARTINS DE ALMEIDA NOGUEIRA

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Silvio Paolo Sorella

Roman Raykov Paunov

Maurício Werneck de Oliveira - Suplente

Rio de Janeiro, 05 de julho de 1996