TESE DE MESTRADO

Condições para Ausência de Renormalização Infinita em Massas e Constantes de Acoplamento

João Felipe de Medeiros Neto

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro / Agosto de 1996.

Aos meus pais

Este trabalho não seria possível sem a colaboração direta ou indireta de muitas pessoas. Muitas outras também contribuíram de outras tantas maneiras, mesmo sem o saber, e seria impossível citar aqui o nome de todas elas sem que houvesse o penoso esquecimento de algumas (a lista completa também não caberia nesta página). Expresso então agradecimentos sinceros a todos aqueles que possibilitaram tornar realidade o que era antes apenas uma idéia.

Entretanto, não posso deixar de citar as dicas da Myriam e a participação ativa dos Professores Edgardo e Sebastião Alves, que me deram toda a base teórica para realizar este trabalho, este através de um curso realmente notável, e aquele por meio de discussões que se estenderam por mais de dois anos de trabalho conjunto e me indicaram o caminho computacional para matar um dragão de 3.340 cabeças (leia-se T-produto de campos). A participação de ambos foi absolutamente indispensável para a conclusão deste trabalho. Igualmente indispensável foram o estímulo, apoio e compreensão especial por parte de Êneo e Iracema Medeiros. Agradeço também a Elen Lúcia por tudo.

Last but not least, devo lembrar e agradecer o apoio financeiro do CNPq.

Conteúdo

RESUMO

Na tese é tratada a questão da obtenção de infinitos para a distribuição de probabilidades de transição entre estados iniciais e finais de um dado sistema de partículas em interação. São procuradas relações entre as constantes características do sistema, de maneira que as probabilidades de transição sejam finitas.

O modelo estudado envolve um campo escalar, um pseudo-escalar, um campo vetorial (todos estes reais), e um campo spinorial complexo. São considerados todos os termos de interação renormalizáveis possíveis que não violam paridade. Todas as massas e constantes de acoplamento foram inicialmente consideradas diferentes.

Introdução

A Teoria Quântica de Campos pode ser vista como uma extensão da Teoria Clássica de Campos e da Mecânica Quântica, basicamente para descrever processos de interação envolvendo "objetos quânticos", que se movem a velocidades comparáveis com a da luz. Notoriamente, em tais processos o número de partículas não necessariamente é conservado podendo haver transformações mútuas entre elas.

Um dos objetivos principais da Teoria Quântica de Campos é a determinação da distribuição de probabilidades de transição entre estados iniciais e finais de um dado sistema de partículas em interação. Como na maioria dos sistemas físicos não é possível dar um tratamento "exato" a essa questão, usa-se então o método perturbativo, segundo o qual consideramos a interação como uma (pequena) perturbação ao sistema livre. Por sistema livre entende-se aquele onde não há interação entre as partes.

Entretanto, o método perturbativo apresenta certos problemas de ordem matemática. O ponto é o aparecimento de divergências no cálculo da distribuição de probabilidades de transição entre estados, em geral mesmo nas primeiras correções perturbativas. Uma das maneiras usuais de resolver este tipo de problema, aplicável com certas restrições (modelos *renormalizáveis*), consiste em redefinir a Lagrangiana do sistema, mantendo sua forma inicial, porém considerando novos valores para massas, constantes de acoplamento e norma dos campos. Tal procedimento é conhecido como *processo de renormalização*, e as novas constantes características, ditas *renormalizadas*, se obtêm somando-se os valor "simbólicos" originais com os termos divergentes. Faz-se a suposição de que os valores originais não tem significado físico (não podem ser medidos), e os valores *renormalizados* resultantes são ajustados para reproduzir os resultados experimentais (finitos).

Neste trabalho tratamos do problema da obtenção de infinitos para as probabilidades de transição, mas em vez de renormalizar o modelo, buscamos condições sobre as constantes características do sistema tais que as probabilidades de transição sejam finitas desde o começo (C.G. Bollini e E.S. Cheb-Terrab, [1]).

O modelo estudado envolve partículas de spin 0, 1/2 e 1 (um campo escalar ϕ, um campo pseudo-escalar η, um campo spinorial complexo ψ, e um campo vetorial real A^{μ}), e inclui todos os termos de interação renormalizáveis possíveis (ver cap. 1) que não violam paridade. Mais especificamente, todas as massas e constantes de acoplamento foram inicialmente consideradas diferentes, e o trabalho consistiu em determinar quais seriam as relações entre estas constantes características de modo a não haver divergências nos cálculos a 1 loop. Se compararmos o modelo estudado nesta tese com o do trabalho [1] mencionado acima, a novidade está na introdução do campo vetorial.

Quanto à maneira de incorporar o campo vetorial, a invariância de gauge não foi imposta *a priori*, de modo a não restringirmos os termos de interação do modelo, e com a intenção de checar, nos resultados finais, a possível obtenção de um modelo "sem infinitos" e com tal invariância.

É importante mencionar também que o conjunto de campos do modelo não pode ser visto como multiplete supersimétrico de modo algum. Efetivamente, mesmo na ausência de campo vetorial, a existência de um campo de Dirac (spinor complexo) requereria a duplicação do número de campos escalares e pseudo-escalares do nosso modelo de modo a fechar a álgebra supersimétrica. Este aspecto é relevante visto serem os modelos supersimétricos os que, por excelência, possuem as atrativas propriedades de renormalização aqui buscadas. A vantagem de um modelo não supersimétrico estaria na liberdade para a escolha do conteúdo físico (campos integrantes), podendo-se com ela aproximar o modelo da realidade observável, em princípio[1], tanto quanto desejado.

Por último, devido ao grande volume dos cálculos necessários, e para viabilizar trabalhos posteriores, nesta mesma linha ou parecida, foi também objetivo desta tese a elaboração de rotinas de computação simbólica em Maple, apropriadas para o problema.

A exposição do trabalho está organizada como segue. No Capítulo 1, é feita uma revisão simples do método de quantização dos campos escalares[2], focalizando a construção da matriz de espalhamento (matriz "S") e o processo de renormalização. Este capítulo contém de maneira sucinta as bases teóricas do trabalho. O capítulo 2 inclui a apresentação do modelo estudado, a reformulação do problema através da introdução de campos

[1] Está claro que não é para todo modelo que esta solução para o problema dos infinitos irá funcionar.

[2] A exposição no capítulo 1 e nos seguintes supõe que o leitor esteja familiarizado com os aspectos básicos da teoria de campos, assim como com os resultados gerais do formalismo lagrangeano.

auxiliares e o cálculo dos propagadores. O capítulo 3 inclui o cálculo efetivo dos primeiros termos da série perturbativa e das partes infinitas para as funções de Green de duas e três pernas do modelo, contendo os resultados principais desta tese. Por último, nas conclusões, é feito um balanço geral do trabalho, assim como das suas possíveis extensões.

Capítulo 1

Bases Teóricas

1.1 Teoria dos campos escalares

1.1.1 Introdução - Campos escalares

Na Teoria Quântica de Campos, um sistema físico é descrito por uma densidade de Lagrangiana, que depende apenas das funções de campo e de suas derivadas. Tal densidade deve ainda ter um caráter local, ser hermitiana e invariante relativística.

No caso de partículas sem carga e de spin nulo, o campo será uma função real dos parâmetros espaço-temporais, $\Phi(x)$, que satisfaz a equação de Klein-Gordon,

$$\left(\Box + m^2\right)\Phi(x) = 0 \tag{1.1}$$

sendo $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ o d'Alembertiano. Quando o sistema é constituído de partículas livres m será a massa destas partículas. A eq. (1.1) pode ser obtida aplicando-se o princípio da mínima ação [2] à densidade de Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \Phi\right) \left(\partial^\mu \Phi\right) - \frac{m^2}{2} \Phi(x)^2 \tag{1.2}$$

1.1.2 Solução das equações clássicas do campo livre

Para resolver a eq. (1.1), é útil reescrevê-la em representação de momenta utilizando a expansão de Φ:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \tilde{\Phi}(p)\, d^4p \tag{1.3}$$

A equação de Klein-Gordon ficará:

$$\left(p^2 - m^2\right)\, \tilde{\Phi}(p) = 0,$$

cuja solução pode ser escrita como $\tilde{\Phi}(p) = \sqrt{2\pi}\delta(p^2 - m^2)\bar{\Phi}(p)$. Usando esta expressão e a eq. (1.3) podemos chegar, após uma integração em p_0, à seguinte expressão para $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left(e^{ipx} c^+(p) + e^{-ipx} c^-(p)\right) \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p_0}}$$

onde definimos

$$c^+(p) = \frac{\bar{\Phi}(p)}{\sqrt{2p_0}} \qquad c^-(p) = \frac{\bar{\Phi}(-p)}{\sqrt{2p_0}} \tag{1.4}$$

sendo considerada apenas a raiz positiva para a energia $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Usando a Lagrangiana eq. (1.2), é possível obter o quadri-vetor momemtum $P^\mu(x)$ para o campo escalar real de sua definição:

$$P^\mu(x) = \int T^{\mu 0}(x)\ d^3\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

onde $T^{\mu\nu}(x)$ é tensor de energia-momemtum dado por

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \Phi)}\ \partial^\mu \Phi - g^{\mu\nu} L \tag{1.6}$$

Após alguns cálculos diretos teremos:

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int p^\mu \Big(\ c^+(p)\ c^-(p) + c^-(p)\ c^+(p)\ \Big)\ d^3\mathbf{x} \tag{1.7}$$

e, lembrando que

$$c^+(p)\ c^-(p) - c^-(p)\ c^+(p) \equiv \Big[\ c^+(p),\ \ c^-(p)\ \Big] = 0$$

o resultado 1.7 pode ser reescrito como:

$$P^\mu = \int p^\mu\ c^+(p)\ c^-(p)\ d^3\mathbf{x} \tag{1.8}$$

No contexto de uma teoria clássica, a quantidade $c^+(p)\ c^-(p)$ pode ser interpretada como densidade de partículas sem carga, de spin nulo, massa m, momentum **p** e energia $p_0 > 0$.

1.1.3 Quantização do campo escalar

Podemos dizer que o processo de quantização em Teoria de Campos se dá de maneira análoga ao que ocorre em Mecânica Quântica. A diferença fundamental está no fato de que Teoria de Campos lida com sistemas de infinitos graus de liberdade.

No contexto da mecânica quântica, a quantização de um sistema é feita mapeando-se coordenadas e momenta generalizados em operadores lineares e utilizando o *Princípio da Correspondência*. Este afirma que ao parêntese clássico de Poisson entre duas variáveis corresponde o comutador quântico entre os operadores correspondentes, dividido pela unidade imaginária i. Podemos resumir o esquema de quantização como o que leva:

$$\begin{aligned}
\{q_i, p_j\}_{class} &= \delta_{ij} &\Rightarrow&& [q_i(t), p_j(t)] &= i\,\delta_{ij} \\
\{c^-(p), c^+(p)\}_{class} &= 1 &\Rightarrow&& [c^-(p), c^+(p)] &= i \\
\{q_i, q_j\}_{class} &= 0 &\Rightarrow&& [q_i(t), q_j(t)] &= 0 \\
\{p_i, p_j\}_{class} &= 0 &\Rightarrow&& [p_i(t), p_j(t)] &= 0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde i e j variam de 1 a N (número de graus de liberdade do sistema), e q e p à direita dos sinais de implicação representam operadores.

Este esquema de quantização pode ser estendido ao caso de sistemas com infinitos graus de liberdade se as funções de campo em cada ponto do espaço-tempo são vistas como *coordenadas generalizadas independentes*; isto é, se considerarmos a dependência funcional como um índice (contínuo). Neste caso, as relações de comutação entre as variáveis Φ, Π, c^+ e c^-, onde Π é o momentum canônico associado a Φ

$$\Pi(\mathbf{x},\, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}(\mathbf{x},\, t)},$$

podem ser obtidas através de generalizações das equações (1.9), basicamente substituindo-se os índices discretos por índices contínuos. Estas relações de comutação também podem ser obtidas diretamente dos parênteses clássicos de Poisson, substituindo-se derivadas comuns por derivadas funcionais [3]. Qualquer que seja o caminho, no caso de um sistema descrito por vários campos independentes $\Phi_r(\mathbf{x},\, t)$, obteremos:

$$\begin{aligned}
[\Phi_r(\mathbf{x},\, t),\, \Phi_s(\mathbf{y},\, t)] &= 0 \\
[\Pi_r(\mathbf{x},\, t),\, \Pi_s(\mathbf{y},\, t)] &= 0 \\
[\Phi_r(\mathbf{x},\, t),\, \Pi_s(\mathbf{y},\, t)] &= i\, \delta_{rs}\, \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
[c_r^-(\mathbf{p}),\, c_s^+(\mathbf{q})] &= \delta_{rs}\, \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})
\end{aligned}$$

Os operadores c^+ e c^- são chamados respectivamente de operadores de criação e de aniquilação, e quando aplicados a um estado de 4-momentum definido K_μ geram um outro estado de 4-momentum $K \pm p$, onde $p^2 = m^2$. Podemos então considerar c^+ como o operador de criação de uma partícula de 4-momentum p e massa m $(p^2 = m^2)$, enquanto que c^- representará o operador de aniquilação da mesma partícula.

1.2 Sistemas de partículas em interação

1.2.1 Teoria perturbativa - Matriz S

Os processos de interação entre partículas quânticas relativísticas podem ser estudados através do método perturbativo, desde que a interação possa ser considerada como uma *pequena* perturbação ao estado livre do sistema. Nestes casos, estados iniciais e finais poderam ser relacionados entre si por meio de um operador S, expresso como uma série de potências nas constantes de acoplamento (série perturbativa). Nos modelos físicos reais nem sempre se verificam esses pressupostos. Por exemplo, na Cromodinâmica Quântica há o problema da inexistência de estados livres para os quarks e gluons[2].

O modelo que consideraremos neste trabalho será tratado no contexto da teoria perturbativa usual. Estaremos supondo portanto que não haverá problemas com o comportamento assintótico da série S e nem com a definição do estado livre do sitema.

Para construir o operador S, consideramos inicialmente um sistema de partículas livres, cujo estado é descrito por um vetor de estado $| \varphi(t) \rangle$, em representação de números de ocupação. A equação de Schrodinger para este sistema é dada por:

$$i\frac{\partial}{\partial t} | \varphi(t) \rangle = H_0 | \varphi(t) \rangle \tag{1.10}$$

onde H_0 é o hamiltoniano. A solução formal desta equação pode ser escrita como

$$| \varphi(t) \rangle = e^{-iH_0 t} | \Phi \rangle \tag{1.11}$$

sendo $| \Phi \rangle$ constante. Ao introduzirmos interações entre as partículas, o hamiltoniano mudará, assim como os vetores de estado a ele associados. Sejam então H e $| \phi(t) \rangle$ respectivamente o hamiltoniano total e o vetor de estado para o sistema com interações, que serão consideras pequenas perturbações ao estado livre. Podemos então escrever $H = H_0 + V$, sendo H_0 o hamiltoniano do sistema livre e V o operador que contem informações sobre as interações. Nos casos de interesse físico, este operador coincide, a menos do sinal, com a Lagrangiana de interação L. A equação de Schrodinger para $| \phi(t) \rangle$ ficará então:

$$i\frac{\partial}{\partial t} | \phi(t) \rangle = (H_0 + H) | \phi(t) \rangle \tag{1.12}$$

A solução da eq. (1.12) pode ser escrita como uma generalização de (1.11) com $| \Phi \rangle$ dependendo do tempo, ou seja

$$| \phi(t) \rangle = e^{-iH_0 t} | \Phi(t) \rangle \tag{1.13}$$

Substituindo a eq. (1.13) em 1.12 teremos

$$i\frac{\partial}{\partial t} | \Phi(t) \rangle = V(t) | \Phi(t) \rangle \tag{1.14}$$

onde

$$V(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

é o operador V em representação dita *de interação.*

Consideremos agora os vetores $| \Phi(t) \rangle$ e $| \Phi(t + \delta t) \rangle$, definidos em dois instantes infinitesimalmente próximos. Usando a eq. (1.14) é simples verificar que

$$| \Phi(t + \delta t) \rangle = (1 - iV(t)\delta t) | \Phi(t) \rangle = e^{-iV(t)\delta t} | \Phi(t) \rangle$$

do que pode concluir-se que, se tomarmos dois instantes arbitrários t_i e t_f ($t_f > t_i$), então,

$$| \Phi(t_f) \rangle = \left(\prod_{t_i}^{t_f} e^{-iV(t_\alpha)\delta t_\alpha} \right) | \Phi(t_i) \rangle \qquad (1.15)$$

onde $\prod$ indica o limite do produto das exponenciais, tomadas entre todos os intervalos infinitesimais entre os instantes t_i e t_f. Se $V(t)$ comutasse com $V(t')$ (t e t' sendo dois instantes quaisquer), poderíamos substituir o produtório por

$$\exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} V(t)dt\right)$$

no entanto não é este o caso, e devemos então manter a ordem temporal do produtório. Escreveremos então a eq. (1.15) na forma simbólica

$$| \Phi(t_f) \rangle = T \ \exp\left(-i \int_{t_i}^{t_f} V(t)dt\right) | \Phi(t_i) \rangle \qquad (1.16)$$

onde T é o operador de ordenação cronológica, isto é, representa a manutenção da ordem cronológica no cálculo da exponencial acima através de série de potências. Mais concretamente, definimos a atuação do operador T como

$$T \ (\ V(t_1) \ ... \ V(t_n) \ ) = V(t_i) \ V(t_j) \ ... \ V(t_k) \ V(t_l), \qquad t_i \geq t_j \geq ... \geq t_k \geq t_l$$

e chamaremos a expressão T ($V(t_1)...V(t_n)$) de T-produto dos operadores $V(t_1)...V(t_n)$.

Considerando $t_i = -\infty$, $t_f = \infty$ e escrevendo o potencial de interação $V(t)$ em função da Lagrangiana de interação $L(t)$, podemos obter a partir da eq. (1.16):

$$| \Phi(\infty) \rangle = S \ | \ \Phi(-\infty) \rangle \qquad (1.17)$$

onde definimos a *matriz de espalhamento*:

$$S = T \ \exp\left(i \int_{-\infty}^{\infty} L(t) \ dt\right) \qquad (1.18)$$

Assim, se antes de ocorrer as interações o sistema encontrava-se num estado inicial $\mid \Phi(-\infty) \rangle$ característico de partículas livres, então a amplitude de probabilidade de transição para o estado final $\mid \Phi(\infty) \rangle$ (outro conjunto de partículas livres) será dada pelo elemento de matriz

$$S_{fi} = \langle \; \Phi(\infty) \mid S \mid \Phi(-\infty) \; \rangle$$

Expandindo a exponencial da eq. (1.18) em série de potências obteremos:

$$S = \sum_n \frac{(i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 ... \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_n \; T \; (\; L(t_1)...L(t_n) \;) \tag{1.19}$$

que é justamente a série da qual falamos no início desta seção.

1.2.2 Funções de Green, propagadores e integrais divergentes

Ao calcular os elementos da matriz S surgem certas expressões de fundamental importância física e matemática, chamadas de funções de Green de n pernas. Tais funções são representadas genericamente por $\tau(x_1, x_2, ..., x_n)$ e, no caso de um sistema de partículas livres (campo Φ) são dadas pelo valor esperado no vácuo do T-produto de n operadores de campo:

$$\tau(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv \langle \; 0 \mid T \; (\; \Phi(x_1)...\Phi(x_n) \;) \mid 0 \; \rangle \equiv \langle \; T\Phi(x_1)...\Phi(x_n) \; \rangle_0$$

Define-se o funcional gerador das funções de Green de um sistema de partículas livres como [4]:

$$Z[J] = N \int \exp\{ \; i \int (L_0 + J\Phi) \; d^4x \; \} \; D\Phi$$

onde J é uma função arbitrária, N é um número cujo valor é irrelevante (possivelmente infinito) e L_0 representa a densidade de Lagrangiana dos campos. O caso de interesse ocorre quando L_0 é uma forma quadrática:

$$L_0 = \frac{1}{2}\ \Phi A \Phi,$$

onde em geral A é um operador diferencial. Neste caso, é possível realizar a integração em Φ, obtendo-se:

$$Z[J] = N \exp\{\ -\frac{i}{2} \int J(x) D(x-y) J(y)\ d^4x d^4y\ \} \tag{1.20}$$

onde a função $D(x-y)$ acima é o *propagador* procurado, o qual por sua vez satisfaz:

$$A(x)\ D(x-y) = \delta^4(x-y)$$

Visto A ser um operador diferencial, costuma-se escrever o propagador em representação de Fourier:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} A^{-1}(p)$$

No caso do campo escalar, por exemplo, $A = -(\Box + m^2)$ e o propagador é dado por:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2}$$

Utilizando o resultado (1.20), é possível definir também o funcional gerador para as ditas funções de Green *conexas*[1] como [4]:

$$W[J] \equiv \int J(x) A^{-1}(x) J(x)\ d^4x$$

[1]As funções de Green conexas são aquelas que surgem ao calcularmos os elementos não-diagonais da matris S e são relacionadas diretamente ao processo de interação. Já as desconexas estão relacionadas ao movimento independente de partículas e não são de interesse prático.

Esta expressão para $W[J]$ pode ser reescrita como segue:

$$W[\ J\ ] = \int J(x)D(x-y)J(y)\ d^4xd^4y \tag{1.21}$$

Do ponto de vista matemático, os propagadores pertencem à classe das funções impróprias, ou distribuições. Estas não são definidas por relações entre seus valores e os valores de seus argumentos, mas através das regras de integração de seus produtos com funções regulares. Por outro lado, as regras de integração para os produtos de distribuições entre si não são definidas a princípio, e produtos deste tipo aparecem de maneira crescente na medida que avançamos na série perturbativa. De um modo geral, podemos dizer que esta é a origem das divergências que aparecem na série perturbativa. Como exemplo simples disto, consideremos o modelo $\lambda\phi^3$:

$$L = -\frac{1}{2}\phi\left(\ \Box + m_1^2\ \right)\phi + \lambda\phi^3$$

No termo de segunda ordem da série perturbativa da matriz S surge a expressão

$$\int :\phi(x)\phi(y):\left(\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2\right)\ d^4xd^4y$$

O quadrado do T-produto acima pode ser desenvolvido como:

$$\begin{aligned}\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2 &= -\left(\ D(x-y)\ \right)^2 \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^8}\int e^{-i(p+p')(x-y)}\ \Delta(p)\ \Delta(p')\ d^4pd^4p' \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\left(\int \Delta(p)\ \Delta(p-k)\ \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\right)\ d^4k\end{aligned} \tag{1.22}$$

onde

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2-m^2}$$

A integral entre chaves,

$$\int \frac{1}{(p^2 - m^2)\left[\, (p-k)^2 - m^2 \,\right]} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

é divergente, já que o integrando não vai a zero suficientemente rápido na região de grandes valores do módulo de p, resultando num valor *infinito* para $\langle\, T\phi(x)\phi(y) \,\rangle_0{}^2$.

O método que será utilizado para tratarmos destes tipos de produtos é o da regularização dimensional. Basicamente, este método (assim como outros semelhantes [2]) é uma prescrição para dividir em duas partes, uma finita e outra infinta, as integrais divergentes obtidas como resultado de produtos de propagadores. A parte infinita não apresenta a princípio significado físico concreto. De fato, a construção axiomática da matriz S mostra que os requisitos de causalidade, unitariedade, invariância relativística e princípio da correspondência não são suficientes para determinar a forma do integrando nas integrais 4-espaciais da matriz S[2]. Mais concretamente, é possível somar à densidade de Lagrangiana de interação operadores "quasilocais" $\Lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)$, diferentes de zero somente quando todos os seus argumentos coincidem, os quais podem ser usados para eliminar as partes divergentes da série perturbativa.

1.2.3 O processo de renormalização

Uma vez que é possível somar operadores quasilocais à densidade de Lagrangiana de interação, pode-se pensar em uma densidade de Lagrangiana *renormalizada*, dada pela soma da densidade inicial (L_0) com uma série de operadores quasilocais. A forma mais geral desta série é dada por [2]:

$$L_{ql} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Lambda_n(x_1, x_2, ...x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n \tag{1.23}$$

De um modo geral, a idéia da renormalização tem como pressuposto o fato de que a seqüência L_{ql} tem a mesma estrutura da densidade inicial L_0. Neste casos dizemos que o modelo é renormalizável. À densidade renormalizada $L_R = L_0 + L_{ql}$ corresponderão novas expressões ("renormalizadas") para as massas, constantes de acoplamento e norma dos campos. Estas expressões renormalizadas dependerão obviamente dos termos considerados em L_{ql}. A escolha correta dos operadores quasilocais pode então tornar finita a série perturbativa, e com isso a expressão da matriz de espalhamento.

É interessante notar que o fato dos operadores Λ serem diferentes de zero somente quando todos os seus argumentos coincidem faz com que L_{ql} seja um operador local, pois as integrais na eq. (1.23) desaparecem.

Devemos ainda assinalar que a identidade entre a estrutura de L_{ql} e a densidade de Lagrangiana inicial L_0 não ocorre para qualquer modelo teórico, em cujo caso o processo de renormalização não se mostra suficiente para eliminar as divergências da série perturbativa. Nesses casos, não é possível obter uma expressão fechada para a densidade de Lagrangiana efetiva $L_0 + L_{ql}$. Sem entrar nos detalhes formais da questão, podemos dizer que uma das características facilmente identificáveis dos modelos renormalizáveis mais comuns em quatro dimensões, é que os termos de interação não contém potências superiores a quatro nos campos escalares e vetoriais (como é o caso do modelo a ser tratado nesta tese).

Como exemplo, introduzindo a densidade de Lagrangiana renormalizada $L_R = L_0 + L_{ql}$ na expressão da matriz S - eq. (1.19) - teremos, até o terceiro termo, num caso geral:

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + i \int L(x_1)\ dx_1 + \frac{i^2}{2} \int \{ T\ (\ L(x_1)L(x_2)\ ) - i\Lambda_2(x_1, x_2)\ \}\ dx_1 dx_2 \\
&+ \frac{i^3}{3!} \int \{ T\ (\ L(x_1)L(x_2)L(x_3) - 3iL(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)\ ) \\
&- \Lambda_3(x_1, x_2, x_3)\ \}\ dx_1 dx_2 dx_3 + \ldots
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Na expressão acima, Λ_2 será utilizado para remover as divergências nas correções de um loop às funções de Green de duas pernas (os propagadores), enquanto que Λ_3 fará o mesmo papel em relação às correções de um loop às funções de Green de 3 pernas (os vértices).

1.3 Campos auxiliares

A introdução de campos auxiliares numa Lagrangiana pode ser útil na medida em que resulte em termos de interação mais simples do que os originais. Uma característica geral destes campos é o fato deles não terem dinâmica: a Lagrangiana não contem suas derivadas. Pode-se dizer então que os campos auxiliares não têm significado físico concreto, ou seja, não representam partícula alguma.

A título de exemplo, consideremos o modelo $\lambda\phi^4$:

$$L = -\frac{1}{2}\phi \left(\Box + m_1^2 \right) \phi - \lambda\phi^4 \tag{1.25}$$

Não é difícil ver que esta Lagrangiana pode ser reescrita com o auxílio do campo auxiliar F, em interação com ϕ, conforme:

$$L = -\frac{1}{2}\phi \left(\Box + m_1^2 \right) \phi + \frac{1}{2}F^2 + \sqrt{2\lambda}\ F\phi^2 \tag{1.26}$$

Efetivamente, é possível reobter a Lagrangiana original se removermos F na expressão acima utilizando sua equação de movimento:

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 0 = \sqrt{2\lambda}\,\phi^2 + F \qquad \Rightarrow \qquad F = -\sqrt{2\lambda}\,\phi^2 \tag{1.27}$$

do que se conclui que os conteúdos físicos das densidade de Lagrangianas (1.26) e (1.25), ao menos clássicos, são idênticos.

Esta equivalência também ocorre no âmbito da Teoria Quântica de Campos devido ao fato destes campos gerarem integrais gaussianas na função de partição do sistema, podendo portanto ser eliminados através de integrações simples [5] reobtendo-se a Lagrangiana original.

Capítulo 2

O modelo

2.1 A Lagrangiana, seu conteúdo e características

O modelo estudado nesta tese contem três campos bosônicos: um campo vetorial, A_μ, um escalar ϕ e um pseudo-escalar η - estes três campos sem carga; e um campo de spin 1/2 carregado Ψ.

A densidade de Lagrangiana considerada é constituída basicamente de termos cinéticos e de massa para os campos, e de todos os termos de interação renormalizáveis possíveis[1],

[1] Renormalizáveis deacordo com a prescrição dada no capítulo anterior, e excluindo termos de interação que contenham derivadas dos campos ou violem paridade.

sendo dada por:

$$
\begin{aligned}
L \;=\; & -\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\phi\left(\Box+m_1^2\right)\phi-\frac{1}{2}\eta\left(\Box+m_2^2\right)\eta+\frac{1}{2}m_3^2A_\mu A^\mu+\bar{\Psi}\left(i\,\hat{\partial}-M\right)\Psi \\
& +g_1\phi\bar{\Psi}\Psi+g_2\eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi+g_3\phi^3+g_4\phi\eta^2+g_5\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu+g_6\phi A^\nu A_\nu-e\phi^2A^\nu A_\nu \\
& -q\eta^2A^\sigma A_\sigma-\lambda\phi^4-\lambda^{'}\eta^4-\lambda^{''}\eta^2\phi^2-\alpha A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

onde $\hat{\partial}\equiv\gamma_\mu\partial^\mu$ e $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$.

A interação entre o campo espinorial e o escalar $(g_1\phi\bar{\Psi}\Psi)$ representa o acoplamento de Yukawa [5], enquanto que entre Ψ e η temos um acoplamento semelhante ao que descreve a interação entre pions e nucleons no modelo de Yukawa [2]. Já a interação entre os campos vetorial e espinorial é semelhante à que ocorre no caso da QED. Entre o campo vetorial e o escalar temos um acoplamento análogo ao que ocorre quando considera-se A_μ como campo de gauge no modelo $\lambda\Phi^4$. O acoplamento $g_6\phi A^\nu A_\nu$, no entanto, não possui análogo em modelos nos quais o campo vetorial é tomado como campo de calibre. O termo cinético relacionado ao campo vetorial é dado por $-(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Este termo é conhecido como a Lagrangiana de Maxwell, sendo invariante por transformações de Lorentz e de calibre.

Todas as 12 constantes de acoplamento do sistema são consideradas arbitrárias, assim como as massas associadas aos campos. O modelo possui portanto um total de 16 constantes características, todas independentes entre si.

Nosso objetivo foi buscar relações entre estas constantes, de modo a eliminar a renormalização infinita às massas e constantes de acoplamento. Isto poderia ser feito tomando-se diretamente a Lagrangiana dada na eq. (2.1), mas o fato de haver potências quartas dos campos nos obrigaria a trabalhar com divergências superpostas, "o maior problema para se provar a renormalizabilidade" [4], o que tornaria o problema extremamente complicado. Para evitar tais problemas, optamos por introduzir campos auxiliares, que eliminam as potências quartas dos campos. O uso dos campos auxiliares também permite associar um número único de loops a cada termo da série perturbativa, como veremos adiante.

2.2 Os campos auxiliares do modelo

A parcela $-e\phi^2 A^\mu A_\mu - q\eta^2 A^\mu A_\mu - \lambda\phi^4 - \lambda^{'}\eta^4 - \lambda^{''}\eta^2\phi^2 - \alpha A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu$ da Lagrangiana inicial - eq. (2.1) - será reescrita introduzindo campos auxiliares F, G, H, K, S_μ e V_μ. Basicamente, trata-se de fazer as seguintes substituições:

$$
\begin{aligned}
-\lambda\phi^4 &\rightarrow c_1\, F\phi^2 + \tfrac{1}{2}F^2 \\
-\lambda^{'}\eta^4 &\rightarrow c_2\, G\eta^2 + \tfrac{1}{2}G^2 \\
-\lambda^{''}\eta^2\phi^2 &\rightarrow c_3\, H\eta\phi + \tfrac{1}{2}H^2 \\
-\alpha A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu &\rightarrow c_4\, K A_\sigma A^\sigma + \tfrac{1}{2}K^2 \\
-e\phi^2 A^\nu A_\nu &\rightarrow c_5\, \phi A_\mu S^\mu + \tfrac{1}{2}S_\mu S^\mu \\
-q\eta^2 A^\sigma A_\sigma &\rightarrow c_6\, \eta A_\mu V^\mu + \tfrac{1}{2}V_\mu V^\mu
\end{aligned}
$$

Os valores das constantes $c_1, ..., c_6$ são determinados como feito no capítulo anterior para o modelo $\lambda\phi^4$, de modo a poder-se reobter a Lagrangiana original através das equações de movimento para os campos auxiliares, resultando em:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{2\lambda}, & c_2 &= \sqrt{2\lambda'}, & c_3 &= \sqrt{2\lambda''}, \\
c_4 &= \sqrt{2\alpha}, & c_5 &= \sqrt{2e}, & c_6 &= \sqrt{2q}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
S^\mu &= 2e\phi A^\mu, & G &= 2\lambda' \eta^2, & H &= 2\lambda'' \eta\phi, \\
V^\mu &= 2q\eta A^\mu, & F &= 2\lambda\phi^2, & K &= 2\alpha A_\sigma A^\sigma
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Escrita em termos dos campos auxiliares, a Lagrangiana inicial ficará:

$$
\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2}S_\nu S^\nu + \frac{1}{2}V_\nu V^\nu - \frac{1}{2}\phi\left(\Box + m_1^2\right)\phi \\
& -\frac{1}{2}\eta\left(\Box + m_2^2\right)\eta + \frac{1}{2}m_3^2 A_\mu A^\mu + \bar{\Psi}\left(i\hat{\partial} - M\right)\Psi + g_1\phi\bar{\Psi}\Psi + g_2\eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + g_3\phi^3 \\
& + g_4\phi\eta^2 + g_5\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu + g_6\phi A^\nu A_\nu + c_1\, F\phi^2 + c_2\, G\eta^2 + c_3\, H\eta\phi + c_4\, K A_\mu A^\mu \\
& + c_5\, \phi A_\mu S^\mu + c_6\, \eta A_\mu V^\mu
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

2.3 Cálculo dos propagadores

Como foi visto na seção 1.2.2 do primeiro capítulo, dado um sistema de partículas livres representadas pelo campo Φ, cuja Lagrangiana possa ser escrita como uma forma quadrática,

$$
L_0 = \frac{1}{2}\,\Phi A \Phi, \tag{2.5}
$$

onde A é um operador diferencial, então o propagador do campo livre, representado por $D(x-y)$, pode ser escrito como

$$
D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} A^{-1}(p)\, \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{2.6}
$$

onde $A^{-1}(p)$ é a transformada de Fourier do operador inverso de A. No nosso modelo, Φ e A são dados por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \eta \\ F \\ G \\ H \\ K \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -(\Box + m_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\Box + m_2^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto, usando a eq. (2.6), teremos:

$$D(x-y) = \int e^{-ip(x-y)} \Delta(p) \, \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

sendo $\Delta(p)$ a matriz dos propagadores em representação de momenta:

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{p^2-m_1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^2-m_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Consideremos agora o campo vetorial A_μ. A parte de L_0 relacionada a este campo será representada por $L_0^{(A)}$:

$$L_0^{(A)} \equiv -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}m_3^2 A_\mu A^\mu$$

reagrupando alguns termos, podemos reescrever esta expressão (a menos de uma derivada total) como [5]:

$$L_0^{(A)} = \frac{1}{2} A_\mu \left[g^{\mu\nu} \left(\Box^2 + m_3^2 \right) - \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu \tag{2.8}$$

Entretanto, no nosso modelo consideramos que as componentes de A_μ satisfazem[2]:

$$\partial^\nu A_\nu = 0$$

de modo que a eq. (2.8) ficará:

$$L_0^{(A)} = \frac{1}{2} A_\mu \left[\; g^{\mu\nu} \left(\Box^2 + m_3^2 \right) \; \right] A_\nu \tag{2.9}$$

que nos levará à seguinte expressão para o propagador do campo A_μ:

$$\Delta_{\mu\nu}^{(A)} = - \frac{g_{\mu\nu}}{p^2 - m_3^2} \tag{2.10}$$

Para o campo S_μ o procedimento é semelhante. A parcela de L_0 relacionada a este campo será representada por $L_0^{(S)}$:

$$L_0^{(S)} \equiv \frac{1}{2} S_\mu S^\mu$$

o que nos dará para o propagador de S_μ

$$\Delta_{\mu\nu}^{(S)}(p) = g_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

Analogamente, para V_μ teremos

$$\Delta_{\mu\nu}^{(V)}(p) = g_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

[2]Ao impor esta condição, reduzimos o número de componentes independentes do campo vetorial de quatro para três, de modo a descrever corretamente uma partícula de spin 1. As três componentes independentes estarão relacionadas aos três valores possíveis da componente do spin sobre um determinado eixo: -1, 0, e 1. Além disso, esta condição nos garante que a energia do campo A_μ será definida positiva[2].

Para o campo fermiônico o raciocínio é análogo (a introdução de variáveis anti-comutativas torna os cálculos um pouco menos diretos) resultando em:

$$\Delta^{(\Psi)}(p) = \frac{\gamma . p + M}{p^2 - M^2} \tag{2.13}$$

para o propagador em representação de momemta.

Capítulo 3

Ausência de renormalização infinita às massas e constantes de acoplamento

O conteúdo deste capítulo é dividido em três seções: na primeira é feito um estudo das funções de Green de duas pernas, sendo determinadas as relações que deverão ser satisfeitas pelas constantes do modelo de modo a garantir a ausência de renormalização infinita às massas. Na segunda seção são tratadas as funções de Green de três pernas, obtendo-se condições que garantam ausência de renormalização infinita às constantes de acoplamento do modelo. Finalmente, na terceira seção é discutida a questão da renormalização infinita às normas dos campos.

3.1 Correções infinitas até 1 loop às funções de Green de duas pernas

De acordo com a eq. (1.24), a expansão da série perturbativa até o segundo termo é dada por:

$$
\begin{aligned}
S &= 1 + i\int L(x_1)\ dx_1 + \frac{i^2}{2}\int\{T\ (\ L(x_1)L(x_2)\ ) - i\Lambda_2(x_1,x_2)\}\ dx_1dx_2 \\
&+\frac{i^3}{3!}\int\{T\ (\ L(x_1)L(x_2)L(x_3) - 3iL(x_1)\Lambda_2(x_2,x_3)\ ) \\
&-\Lambda_3(x_1,x_2,x_3)\}\ dx_1dx_2dx_3 + \ldots \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

onde $L(x_i)$ representa a densidade de Lagrangiana de interação, no nosso caso dada por:

$$
\begin{aligned}
L(x) &= g_1\phi\bar{\Psi}\Psi + g_2\eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + g_3\phi^3 + g_4\phi\eta^2 + g_5\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi A^\mu + g_6\phi A^\mu A_\mu + c_1\ F\phi^2 \\
&+c_2\ G\eta^2 + c_3\ H\eta\phi + c_4\ KA_\mu A^\mu + c_5\ \phi A_\mu S^\mu + c_6\ \eta A_\mu V^\mu \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

A parte infinita das correções a 1 loop para as funções de Green de duas pernas é obtida a partir da parte divergente de $T\ (\ L(x)L(y)\ )$, presente no terceiro termo da série perturbativa. Por sua vez, essa parte pode ser obtida a partir da expansão de $T\ (\ L(x)L(y)\ )$ via teoremas de Wick [2], tomando-se apenas as parcelas proporcionais aos produtos normais de dois campos.

Por exemplo, o termo $T\ (\ [g_3\phi^3(x)][g_3\phi^3(y)]\ )$ produzirá um termo proporcional a $:\ \phi(x)\phi(y)\ :$, dado por $18g_3^2\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2$. O fator 18 é chamado fator estatístico, e está relacionado ao número de maneiras em que é possível construir $:\ \phi(x)\phi(y)\ :$

$g_3^2\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2$ a partir de $T\,(\ [g_3\phi^3(x)][g_3\phi^3(y)]\ )$. O termo $\phi(x)$ que fará parte do produto normal pode ser escolhido de 3 maneiras diferentes no produto $g_3\phi^3(x)$, o mesmo correndo com $\phi(y)$ em relação ao produto $g_3\phi^3(y)$. Escolhidos os termos $\phi(x)$ e $\phi(y)$ que farão parte produto normal (há portanto 9 modos de se fazer isto), restarão os termos $g_3\phi(x)\phi(x)$ e $g_3\phi(y)\phi(y)$, que deverão ser contraídos entre si, de modo a produzirem $g_3^2\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2$. Há duas maneiras de se fazer isto: o "primeiro" $\phi(x)$ do produto $g_3\phi(x)\phi(x)$ pode ser contraído com o "primeiro" ou com o "segundo" $\phi(y)$ de $g_3\phi(y)\phi(y)$. Ficamos então com um fator estatístico $9\times 2=18$.

Havendo campos fermiônicos, este fator estatístico deverá ser multiplicado por $(-1)^p$, onde p é a paridade das permutações a que estes campos ficarão sujeitos no processo de arrumá-los, a partir da ordem inicial, até a ordem em que aparecem no termo considerado.

Tomemos então a soma dos termos de $T\,(\ L(x)L(y)\ )$ proporcionais aos produtos normais de dois campos (funções de Green de duas pernas):

$$
\begin{aligned}
& :\phi(x)\phi(y):\ (\ c_5^2\ \langle\ TA_\mu(x)A_\nu(y)\ \rangle_0\ \langle\ TS^\mu(x)S^\nu(y)\ \rangle_0\ ) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ (\ 18g_3^2\ \langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2\ ) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ (\ 4c_1^2\ \langle\ TF(x)F(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0\ ) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ (\ 2g_4^2\ \langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0{}^2\ ) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ (\ c_3^2\ \langle\ TH(x)H(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0\ ) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ \Big(\ g_1^2\ \langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big) \\
+\ & :\phi(x)\phi(y):\ (\ 2g_6^2\ \langle\ TA_\mu(x)A_\nu(y)\ \rangle_0\ \langle\ TA^\mu(x)A^\nu(y)\ \rangle_0\ )
\end{aligned}
$$

$$+ \ :\eta(x)\eta(y):\left(c_6^2 \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TV^\mu(x)V^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\eta(x)\eta(y):\left(4c_2^2 \ \langle \ TG(x)G(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\eta(x)\eta(y):\left(c_3^2 \ \langle \ TH(x)H(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\eta(x)\eta(y):\left(g_2^2(\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}\langle \ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\eta(x)\eta(y):\left(4g_4^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :A_\mu(x)A_\nu(y):\left(c_5^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TS^\mu(x)S^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :A_\mu(x)A_\nu(y):\left(c_6^2 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TV^\mu(x)V^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :A_\mu(x)A_\nu(y):\left(4c_4^2 \ \langle \ TK(x)K(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TA^\mu(x)A^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :A_\mu(x)A_\nu(y):\left(g_5^2(\gamma^\mu)^{ij}(\gamma^\nu)^{kl} \ \langle \ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :A_\mu(x)A_\nu(y):\left(4g_6^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TA^\mu(x)A^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :S^\mu(x)S^\nu(y):\left(c_5^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :V^\mu(x)V^\nu(y):\left(c_6^2 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :G(x)G(y):\left(2c_2^2 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0^{\ 2}\right)$$

$$+ \ :F(x)F(y):\left(2c_1^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0^{\ 2}\right)$$

$$+ \ :K(x)K(y):\left(2c_4^2 \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \langle \ TA^\mu(x)A^\nu(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :H(x)H(y):\left(c_3^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y):\left(g_5^2(\gamma^\mu)^{ij}(\gamma^\nu)^{lk} \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_l(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y):\left(g_1^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y):\left(g_2^2(\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{lk}\langle \ T\eta(x)\eta(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_l(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y):\left(g_5^2(\gamma^\mu)^{ij}(\gamma^\nu)^{kl} \ \langle \ TA_\mu(x)A_\nu(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \ :\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y):\left(g_1^2 \ \langle \ T\phi(x)\phi(y) \ \rangle_0 \ \langle \ T\bar{\Psi}_j(x)\Psi_k(y) \ \rangle_0 \ \right)$$

$$+ \quad : \Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) : \Big(g_2^2(\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}\langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

$$+ \quad : F(x)\phi(y) : (\ 12c_1g_3\ \langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2\ )$$

$$+ \quad : \phi(x)G(y) : (\ 4c_2g_4\ \langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0{}^2\ )$$

$$+ \quad : A^\nu(x)\phi(y) : \Big(g_1g_5(\gamma_\nu)^{ij}\langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

$$+ \quad : \phi(x)A_\nu(y) : \Big(g_1g_5(\gamma^\nu)^{kl}\langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

$$+ \quad : \eta(x)H(y) : (\ 4c_3g_4\ \langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0\ )$$

$$+ \quad : K(x)\phi(y) : (\ 4c_4g_6\ \langle TA_\mu(x)A_\nu(y)\rangle_0\langle TA^\mu(x)A^\nu(y)\rangle_0)$$

$$+ \quad : A_\mu(x)S_\nu(y) : (\ 4c_5g_6\ \langle T\phi(x)\phi(y)\rangle_0\langle TA^\mu(x)A^\nu(y)\rangle_0)$$

$$+ \quad : \phi(x)\eta(y) : \Big(g_1g_2(\gamma_5)^{kl}\ \langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

$$+ \quad : \eta(x)\phi(y) : \Big(g_2g_1(\gamma_5)^{ij}\ \langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

$$+ \quad : \eta(x)A_\nu(y) : \Big(g_2g_5(\gamma_5)^{ij}(\gamma^\nu)^{kl}\langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \Big)$$

O cálculo dos produtos de propagadores que aparecem acima é feito na primeira parte do apêndice B. Substituindo então os resultados desse apêndice nestas expressões e somando apenas as partes infinitas dos resultados, teremos a parte divergente de $T\ (\ L(x)L(y)\ )$ relacionada às funções de Green de duas pernas. Nesta parte haverá termos que geram a renormalização das massas associadas aos campos, enquanto que outros termos estarão relacionados à renormalização das normas dos campos (estes serão estudados na última seção deste capítulo). Para os termos que geram renormalização das massas temos:

$T\ (\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{massas} \quad = \quad \{\ : \phi(x)\phi(y) : (\ 12M^2g_1^2 - 4c_1^2m_1^2 - c_3^2m_2^2 - 18g_3^2 + 4c_5^2m_3^2 - 2g_4^2 + 8g_6^2\ ) + : \eta(x)\eta(y) : (\ 4c_6^2m_3^2 - 4c_2^2m_2^2 - c_3^2m_1^2 - 4g_2^2M^2 - 4g_4^2\ ) - 16c_4g_6 : K(x)\phi(y) : + : A_\nu(x)A^\nu(y) : (\ 4g_6^2 - c_5^2m_1^2 - c_6^2m_2^2 + 4c_4^2m_3^2\ ) + c_5^2 : S_\nu(x)S^\nu(y) : + c_6^2 : V_\nu(x)V^\nu(y) : -2c_2^2 : G(x)G(y) : -6g_3c_1 : F(x)\phi(y) : -2c_1^2 : F(x)F(y) : -8c_4^2 : K(x)K(y) : -c_3^2$

$$: H(x)H(y) : -4c_3g_4 : \eta(x)H(y) : + : \bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y) : M\,(4g_5^2 - g_1^2 - g_2^2)^{ik} + : \Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) :$$

$$M\,(g_1^2 + g_2^2 - 4g_5^2)^{kj} - 4c_2g_4 : \phi(x)G(y) : -6c_1g_3 : \phi(x)F(y) : +4c_5g_6 : A_\nu(x)S^\nu(y) :\}$$

$$\frac{i}{2(2\pi)^2\epsilon}\,\delta(x-y) \tag{3.3}$$

onde ϵ é o pólo das funções gamma quando a dimensão tende a 4, característico do processo de regularização dimensional utilizado. A soma dos termos relacionados à renormalização de normas dos campos é dada por:

$$T\,(\,L(x)L(y)\,)^{(inf)}_{normas} = \{: \bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y) : \left[g_5^2\gamma^\mu\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_\mu - g_1^2\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) - g_2^2\gamma_5\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_5\right]^{ik}$$

$$+ : A_\mu(x)A_\nu(y) : \left[\frac{4}{3}g_5^2\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\Box_x\right)\right] + : \phi(x)\phi(y) : \left(2g_1^2\Box_x\right)\big) - : \eta(x)\eta(y) : \left(2g_2^2\Box_x\right)$$

$$+ : \Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) : \left[g_1^2\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) + g_2^2\gamma_5\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_5 - g_5^2\gamma^\mu\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_\mu\right]^{kj}\}\,\frac{i}{2(2\pi)^2\epsilon}\,\delta(x-y) \tag{3.4}$$

sendo que esta parte será estudada na última seção deste capítulo.

3.1.1 Condições para ausência de renormalização infinita às massas

De acordo com a eqpritres, a contribuição divergente do termo $T\,(\,L(x)L(y)\,)^{(inf)}_{massas}$ à matriz de espalhamento S é dada por:

$$S_{\substack{\text{parte relacionada}\\ \text{a } T(L(x)L(y))^{(inf)}_{massas}}} = -\frac{1}{2}\int T\,(\,L(x)L(y)\,)^{(inf)}_{massas}\,d^4x d^4y = i\int \Delta L^{(1)}(x)\,d^4x$$

A integração realizada acima é bastante simples devido à presença da função delta em $T\,(\,L(x)L(y)\,)^{(inf)}_{massas}$. O termo $\Delta L^{(1)}(x)$ pode ser visto como um contra-termo a ser somado a $L(x)$, na expressão da matriz de espalhamento. Sabemos no entanto que para que um modelo seja renormalizável é necessário que os contra-termos tenham a mesma forma dos termos da densidade de Lagrangiana inicial [4]. Deverão ser nulos, então, também os coeficientes das funções de Green de duas pernas não semelhantes aos termos da Lagrangiana original; isto é, a seguinte parcela de $\Delta L^{(1)}$:

$\{\ 12 : F(x)\phi(x) : g_3 c_1 + 4 : \phi(x)G(x) : g_4 c_2 + 4 : \eta(x)H(x) : g_4 c_3 + 16 : K(x)\phi(x) : g_6 c_4$

$-4 : A_\nu(x)S^\nu(x) : g_6 c_5\ \}\frac{1}{(4\pi)^2\epsilon}$ resultando em

$$g_3 c_1 = g_4 c_2 = g_6 c_4 = g_6 c_5 = 0 \tag{3.5}$$

Introduzindo os resultados acima na eq. (3.3) e impondo a anulação dos coeficientes dos produtos normais chegamos às seguintes relações entre as constantes do sistema:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0 \tag{3.6}$$

$$\left\{\begin{aligned} M\ (4g_5^2 - g_1^2 - g_2^2) &= 0 \\ g_2^2\ M^2 + g_4^2 &= 0 \\ 9g_3^2 + g_4^2 - 6g_1^2 M^2 - 4g_6^2 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{3.7}$$

$$g6 = 0 \tag{3.8}$$

As relações (3.6) garantem a ausência de renormalização infinita às massas dos campos auxiliares. Estas relações são de interesse prático para nossos cálculos, pois implicam em que todas as condições da eq. (3.5) são satisfeitas automaticamente. As equações do sistema (3.7) asseguram que as massas renormalizadas dos campos físicos (menos o vetorial) serão finitas. A eq. (3.8) deve ser satisfeita se quisermos impor a ausência de renormalização infinita à massa do campo vetorial[1]. As eqs. (3.5) a (3.8) serão utilizadas após calcularmos as correções infinitas às funções de Green de três pernas, o que é feito na seção seguinte.

3.2 Correções infinitas até 1 loop às funções de Green de três pernas

Nesta seção será calculada a parte divergente do T-produto $T(\ L(x)L(y)L(z)\ )$, relacionada com a renormalização infinita às constantes de acoplamento. Esta parte é obtida expandindo $T\ (\ L(x)L(y)L(z)\ )$ (teoremas de Wick), e tomando apenas as parcelas proporcionais aos produtos normais de três campos.

Os loops cujas linhas internas são do tipo $\phi\phi$, $\eta\eta$ ou $A_\mu A_\nu$ não produzem termos divergentes, pois a integral

$$\int \frac{1}{(m_1^2 - p^2)\,[m_2^2 - (p+k)^2]\,[m_3^2 - (p+k+q)^2]}\ d^D p$$

que é envolvida em tais loops, é convergente, como é mostrado no apêndice A (eq. A.26). De modo que estes termos não precissam ser tidos em conta ao longo do cálculo. O mesmo

[1]Como veremos na seção seguinte, a condição (3.8) resultaria na ausência de termos de interação envolvendo o campo vetorial e por isto não será imposta.

acontece com os loops cujas linhas internas resultam em integrais do tipo

$$\int \frac{P_1(p_\mu)}{(m_1^2 - p^2)\,[m_2^2 - (p+k)^2]\,[m_3^2 - (p+k+q)^2]}\; d^D p \tag{3.9}$$

onde $P_1(p_\mu)$ é um polinômio de primeiro grau em p_μ, e m_1, m_2 e m_3 representam as massas dos campos envolvidos. Efetivamente, as integrais do tipo 3.9 são finitas, como é mostrado no apêndice A usando as eqs. A.26 e A.27. Devemos então tomar apenas os seguintes termos da expansão $T[L(x)L(y)L(z)]$ [2]:

$$\begin{aligned}
& :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)A^\rho(z): \quad (\, 6g_2^2 g_5 (\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \, \langle \, T\eta(x)\eta(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z) \, \rangle_0 \times \\
& \qquad \langle \, T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_j(x) \, \rangle_0 \,) \\[2em]
- \; & :\phi(x)\eta(y)A^\rho(z): \quad (\, 12 g_1 g_2 g_5 (\gamma_5)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \, \langle \, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \\
& \qquad \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \,) \\[2em]
- \; & :\eta(x)\eta(y)A^\rho(z): \quad (\, 6g_2^2 g_5 (\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \, \langle \, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \\
& \qquad \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \,) \\[2em]
- \; & :\phi(x)\eta(y)\eta(z): \quad (\, 6 g_1 g_2^2 (\gamma_5)^{kl}(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \\
& \qquad \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \,) \\[2em]
+ \; & :\phi(x)\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z): \quad (\, 6 g_1 g_2^2 (\gamma_5)^{kl}(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\eta(y)\eta(z) \, \rangle_0 \, \langle \, T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_i(x) \, \rangle_0 \,)
\end{aligned}$$

[2] Estamos considerando válidas as relações 3.5 e 3.6.

$$- \quad :\phi(x)\phi(y)\phi(z): \quad \left(2g_1^3 \, \langle \, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_k(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_r(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$+ \quad :\phi(x)\bar{\Psi}_k(y)\Psi_r(z): \quad \left(6g_1^3 \, \langle \, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\phi(y)\phi(z) \, \rangle_0 \times \right.$$
$$\left. \langle \, T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$- \quad :\eta(x)\eta(y)\eta(z): \quad \left(2g_2^3(\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \right.$$
$$\left. \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$+ \quad :\bar{\Psi}_i(x)\eta(y)\Psi_s(z): \quad \left(6g_2^3(\gamma_5)^{ij}(\gamma_5)^{kl}(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \right.$$
$$\left. \langle \, T\eta(z)\eta(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$- \quad :\eta(x)A^\nu(y)A^\rho(z): \quad \left(6g_2g_5^2(\gamma_5)^{ij}(\gamma_\nu)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \, \langle \, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \times \right.$$
$$\left. \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$+ \quad :\eta(x)\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z): \quad \left(6g_2g_5^2(\gamma_5)^{ij}(\gamma_\nu)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \, \langle \, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \, \rangle_0 \, \langle \, TA^\nu(y)A^\rho(z) \, \rangle_0 \times \right.$$
$$\left. \langle \, T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_j(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$- \quad :\phi(x)\phi(y)\eta(z): \quad \left(6g_1^2g_2(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_k(y)\bar{\Psi}_r(z) \, \rangle_0 \, \langle \, T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$+ \quad :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\eta(z): \quad \left(6g_1^2g_2(\gamma_5)^{rs} \, \langle \, T\phi(x)\phi(y) \, \rangle_0 \, \langle \, T\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z) \, \rangle_0 \, \langle \, T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_i(x) \, \rangle_0 \right)$$

$$- \quad :\phi(x)A^{\nu}(y)A^{\rho}(z): \quad (6g_1g_5^2(\gamma_\nu)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \langle T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \rangle_0 \langle T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \rangle_0 \times \langle T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \rangle_0)$$

$$+ \quad :\phi(x)\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z): \quad (6g_1g_5^2(\gamma_\nu)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \langle T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y) \rangle_0 \langle TA^{\nu}(y)A^{\rho}(z) \rangle_0 \times \langle T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_i(x) \rangle_0)$$

$$- \quad :\phi(x)\phi(y)A^{\rho}(z): \quad (6g_1^2g_5(\gamma_\rho)^{rs} \langle T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y) \rangle_0 \langle T\Psi_k(y)\bar{\Psi}_r(z) \rangle_0 \langle T\Psi_s(z)\bar{\Psi}_i(x) \rangle_0)$$

$$+ \quad :\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)A^{\rho}(z): \quad (6g_1^2g_5(\gamma_\rho)^{rs} \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle_0 \langle T\bar{\Psi}_k(y)\Psi_s(z) \rangle_0 \langle T\bar{\Psi}_r(z)\Psi_i(x) \rangle_0)$$

$$+ \quad :\bar{\Psi}_i(x)A^{\nu}(y)\Psi_s(z): \quad (6g_5^3(\gamma_\mu)^{ij}(\gamma_\nu)^{kl}(\gamma_\rho)^{rs} \langle T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \rangle_0 \langle T\Psi_l(y)\bar{\Psi}_r(z) \rangle_0 \times \langle TA^{\rho}(z)A^{\mu}(x) \rangle_0)$$

O método para calcular os produtos de propagadores que aparecem acima é mostrado na segunda parte do apêndice B. Após realizar os cálculos, a soma dos partes divergentes resulta em:

$$T\ (\ L(x)L(y)L(z)\ )^{(inf)} \quad =$$

$$\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon} \{ +72Mg_1g_2^2 :\phi(x)\eta(y)\eta(z): +24Mg_1^3 :\phi(x)\phi(y)\phi(z): -12ig_1^2g_5 :\phi(x)\phi(y)A_\nu(z): \times \left(2\frac{\partial}{\partial y_\nu}+\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right) + 12ig_2^2g_5 :\eta(x)\eta(y)A_\nu(z): \left(2\frac{\partial}{\partial y_\nu}+\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right) - 6g_2 :\eta(z)\bar{\Psi}(x)\gamma_5\Psi(y): (\ g_1^2+g_2^2 + 4g_5^2\ ) + :\bar{\Psi}(x)\gamma_\nu\Psi(y)A^{\nu}(z): 3g_5\,(g_2^2-g_1^2-2g_5^2) + :\bar{\Psi}(x)\Psi(y)\phi(z): 6g_1\,(g_1^2+g_2^2-4g_5^2)\ \}$$

$$\delta(y-x)\ \delta(z-x)$$

Utilizando os resultados da quarta parte do apêndice A, teremos então:

$$
\begin{aligned}
S_{\substack{\text{parte relacionada} \\ \text{a } T(\ L(x)L(y)L(z)\ )^{(inf)}}} &= \frac{i^3}{3!}\int T\left(\ L(x)L(y)T(z)\ \right)^{(inf)}\ dx_1dx_2dx_3 \\
&= i\int \Delta L^{(2)}(x)\ d^4x
\end{aligned}
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
\Delta L^{(2)} &= -\frac{1}{3(4\pi)^2\epsilon}\ \{\ -6g_2 : \eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi : \left(g_1^2+g_2^2+4g_5^2\right) + : \bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi A^\nu : 3g_5\left(g_2^2-g_1^2-2g_5^2\right) \\
&+ : \bar{\Psi}\Psi\phi : 6g_1\left(g_1^2+g_2^2-4g_5^2\right) + 72Mg_1g_2^2 : \phi\eta\eta : +24Mg_1^3 : \phi\phi\phi : + : \phi A_\nu A^\nu : \times \\
&\left(\ 24c_4^2g_6+6c_6^2g_4+12c_5^2g_6+18c_5^2g_3\ \right)\ \} + \frac{i}{2(\pi^2)\epsilon}\ \{\ g_1^2g_5 : \phi(x)\left(\ \partial^\nu\phi(x)\ \right)A_\nu(x) : \\
&+g_2^2g_5 : \eta(x)\left(\ \partial^\nu\phi(x)\ \right)A_\nu(x) :\ \}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

3.2.1 Condições para ausência de renormalização infinita às constantes de acoplamento

Assim como ocorreu com o termo $\Delta L^{(1)}(x)$, pode-se mostrar que $\Delta L^{(2)}(x)$ encontrado na seção anterior é o contra-termo a ser somado a $L(x)$ na expressão da matriz de espalhamento. O termo $\Delta L^{(2)}$ deve então ser anulado, resultando no seguinte sistema de equações (já levando em conta as eqs. (3.5) e (3.6)):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 9g_3^2+g_4^2-6g_1^2M^2-4g_6^2 & = & 0 \\ g_2\ (g_1^2+g_2^2+4g_5^2) & = & 0 \\ g_5\ (g_2^2-g_1^2-2g_5^2) & = & 0 \\ M\ (4g_5^2-g_1^2-g_2^2) & = & 0 \\ g_1\ (g_1^2+g_2^2-4g_5^2) & = & 0 \\ g_2^2M^2+g_4^2 & = & 0 \\ M\ g_1 & = & 0 \\ g_1\ g_5 & = & 0 \\ g_2\ g_5 & = & 0 \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Usando as eqs. (3.7) e (3.8), chegaremos à conclusão de que o sistema acima possui duas soluções possíveis. Uma delas implica em valores nulos para todas as constantes de acoplamento de nosso modelo, o que não é de nosso interesse, pois nesse caso teríamos um sistema sem interações. A outra solução possível é $\{M = 0,\ g_2 = \pm i g_1\}$, sendo nulas todas as outras constantes de acoplamento, incluindo todas as relacionadas com termos que envolvem o campo vetorial. Tal solução também não é satisfatória, visto que a proposta inicial deste trabalho envolve interações do campo vetorial, a menos que consideremos $g_6 \neq 0$ e não levemos em conta a eq. (3.8); embora esta não seja a solução ideal no contexto da proposta deste trabalho, pois implicará numa renormalização infinita à massa do campo vetorial.

O que faremos então será reanalizar o sistema (3.11) considerando $g_6 \neq 0$. Nesse caso o sistema (3.11) possui 8 soluções possíveis, correspondendo a duas situações físicas:

SITUAÇÃO 1: $M = 0.$

$$
\begin{aligned}
g_6 &= \pm\tfrac{3}{2}g_3 \\
g_2 &= \pm i g_1 \\
g_4 &= g_5 = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

sendo g_1 e g_3 arbitrários.

SITUAÇÃO 2: $M \neq 0.$

$$
\begin{aligned}
g_6 &= \pm\tfrac{3}{2}g_3 \\
g_1 = g_2 &= g_4 = g_5 = 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

sendo g_3 arbitrário.

Nas duas situações analizadas acima o sistema (3.11) tem todas as suas equações satisfeitas, e portanto não haverá, nessas situações, renormalização infinita às constantes de acoplamento. Entretanto, como foi mencionado acima, a condição $g_6 \neq 0$ implicará numa renormalização infinita à massa das partículas vetoriais. Nas duas situações consideradas devemos ter ainda:

$$
c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0
$$

Vemos então que a situação 2 não é de nosso interesse, pois foram anuladas as interações do campo espinorial e do campo pseudo-escalar com os outros campos do modelo. Usando então as relações obtidas na situação 1, a Lagrangiana inicial ficará:

$$
\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2}S_\nu S^\nu + \frac{1}{2}V_\nu V^\nu - \frac{1}{2}\phi\left(\Box + m_1^2\right)\phi \; - \\
& \frac{1}{2}\eta\left(\Box + m_2^2\right)\eta + \frac{1}{2}m_3^2 A_\mu A^\mu + i\ \bar{\Psi}\hat{\partial}\Psi + g_1\phi\bar{\Psi}\Psi \pm i g_1 \eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + g_3\phi^3 \pm \frac{3}{2}g_3\phi A^\nu A_\nu
\end{aligned}
$$

Como já foi comentado, os campos auxiliares que aparecem acima podem ser integrados diretamente na função de partição do sistema, sem alterar o conteúdo físico do problema.

3.3 Renormalização às normas dos campos

Nesta seção será tratada a questão da renormalização das normas dos campos. Este assunto é de interesse físico relativo, uma vez que a norma de um campo não é uma quantidade física mensurável. Conforme foi dito na seção 3.1, a renormalização das normas dos campos é produzida pelo termo $T\,(\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{normas}$, dado na eq. (3.4). Levando em conta as relações obtidas para as constantes na primeira situação considerada acima, este termo ficará:

$$T\,(\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{normas} \quad = \quad \{: \phi(x)\phi(y) : (2g_1^2\Box_x) + : \eta(x)\eta(y) : (2g_1^2\Box_x) : \bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y) :$$
$$\left[-g_1^2\left(\frac{i}{2}\gamma.\frac{\partial}{\partial x}\right) + g_1^2\gamma_5\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_5\right]^{ik} + \ : \ \Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y) \ : \ \left[g_1^2\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right) - g_1^2\gamma_5\left(\frac{i}{2}\gamma\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\gamma_5\right]^{kj} \ \}$$
$$\frac{i}{2(2\pi)^2\epsilon}\ \delta(x-y)$$

onde, como já foi mencionado, ϵ é o polo das funções gamma quando a dimensão tende a 4. A anulação do termo acima nos levaria à relação $g_1 = 0$, com a conseqüente anulação de todas as interações do campo fermiônico, o que não se enquadra na proposta inicial do trabalho. Vemos então que deve ser considerada uma renormalização infinita às normas dos campos. Esta renormalização pode ser calculada a partir da contribuição divergente do termo $T\,(\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{normas}$ à matriz S. Com essa finalidade usamos os resultados da quarta parte do apêndice A, obtendo:

$$S_{\substack{\text{parte relacionada} \\ \text{a } T(\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{normas}}} = -\frac{1}{2}\int T\ (\ L(x)L(y)\ )^{(inf)}_{normas}\ d^4x d^4y = i\int \Delta L_{normas}(x)\ d^4x$$

sendo

$$\Delta L_{normas} = -\frac{g_1^2}{2(2\pi)^2\epsilon}\ \{\ :\phi\Box\phi: + :\eta\Box\eta: + :\bar{\Psi}i\hat{\partial}\Psi:\ \} \tag{3.14}$$

o contra-termo a ser somado à Lagrangiana inicial. As normas dos campos ficarão, então:

$$\phi' = \phi\sqrt{1+\frac{g_1^2}{(2\pi)^2\epsilon}} \qquad \eta' = \eta\sqrt{1+\frac{g_1^2}{(2\pi)^2\epsilon}} \qquad \Psi' = \Psi\sqrt{1-\frac{g_1^2}{2(2\pi)^2\epsilon}}$$

Conclusões

Neste trabalho foram calculadas as correções de 1 loop às funções de Green de 2 e 3 pernas de um modelo onde interagem quatro tipos de campos: um escalar ϕ, um pseudo-escalar η, um vetorial A_ν, e um campo de spin 1/2 Ψ. Todos os campos, com exceção do espinorial, têm carga nula. Foi também estudada a possibilidade de ajustar as constantes do modelo de modo a obter o cancelamento dos infinitos da série perturbativa. Neste sentido, podemos dizer que este trabalho consistiu numa tentativa de estender o modelo finito proposto por C.G. Bollini e E.S. Cheb-Terrab[1], que envolvia um campo escalar, um pseudo-escalar (ambos reais) e um campo de spin 1/2 complexo.

Dos resultados do capítulo anterior concluímos que é possível construir um modelo finito, até um loop, onde partículas escalares e pseudo-escalares interajam com partículas fermiônicas, desde que seja nula a massa dessas últimas. Podemos ainda considerar um termo de interação das partículas vetoriais com as escalares, que deverá ser acompanhado de um termo de auto-interação dessas últimas. Entretanto, nesse caso não se pode evitar uma renormalização infinita à massa das partículas vetoriais (sendo esta a única constante do modelo a apresentar renormalização infinita).

É importante notar que um termo de interação do tipo $g_3\phi A^\nu A_\nu$ não existe em modelos com invariância de gauge (assim como um termo de massa para as partículas vetoriais). Além disso não foi necessário considerar, em nenhum momento, a invariância do sistema por transformações de tipo $U(1)$, ou de outro grupo qualquer. Isto nos possibilitou trabalhar com termos de interação mais gerais do que os previstos nos casos de sistemas com invariância de gauge. Podemos então pensar numa possível extensão deste trabalho, incluindo campos de spin 2, e sem impôr *apriori* invariância de calibre. Tal modelo incluiria termos mais gerais dos que os que surgem quando consideramos, por exemplo, modelos de interações baseados em simetrias do tipo $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(5)$ - relacionados às interações fracas, fortes e gravitacionais, respectivamente.

Voltando ao nosso modelo, concluimos então que a solução de interesse que relaciona as constantes características leva nossa Lagrangiana original a:

$$\begin{aligned}L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{2}S_\nu S^\nu + \frac{1}{2}V_\nu V^\nu - \frac{1}{2}\phi\left(\Box + m_1^2\right)\phi \; - \\ &\quad \frac{1}{2}\eta\left(\Box + m_2^2\right)\eta + \frac{1}{2}m_3^2 A_\mu A^\mu + i\;\bar{\Psi}\hat{\partial}\Psi + g_1\phi\bar{\Psi}\Psi \pm i g_1\eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi + g_3\phi^3 \pm \frac{3}{2}g_3\phi A^\nu A_\nu\end{aligned}$$

com g_1 e g_3 arbitrários ($g_1 \neq 0$).

No nosso modelo, as partículas bosônicas foram consideradas massivas desde o princípio. Partículas com essas características existem também no modelo de Weinberg-Salam [6], sendo conhecidas como bosons de Higgs.

O fato das partículas espinoriais terem massa nula pode ser associado com a existência de neutrinos. Isto impõe a condição[3] $\bar{\Psi}\Psi = 0$, o que no entanto não gera nenhuma contradição aos resultados aqui obtidos.

O cancelamento das divergências nas funções de Green que possuem duas pernas espinoriais e uma escalar (ou pseudo-escalar) se dá devido à relação entre as constantes de acoplamento nos termos $g_1\phi\bar{\Psi}\Psi$ e $g_2\eta\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$. Isto nos sugere a possibilidade de, numa futura extensão deste trabalho, considerar um modelo com dois campos vetoriais reais, de modo que se produza um cancelamento semelhante entre as funções de vértice destes campos (que seriam semelhantes às consideradas na QED).

Por outro lado, devemos lembrar também que o fato de termos feito cálculos até um loop não nos permite fazer afirmações gerais a respeito do modelo considerado. Seria portanto interessante, em futuras continuações deste trabalho, desenvolver os cálculos até pelo menos dois loops, para então pesquisar a estrutura das divergências e assim verificar se os resultados aqui obtidos se mantém a medida em que avançamos na série perturbativa.

Por último, merece comentário a técnica utilizada para a realização dos cálculos. Poderíamos pensar, e com razão, que uma das principais limitações práticas para este trabalho ou suas possíveis extensões está no grande número de termos envolvidos nos cálculos (por exemplo, introduzindo um campo de spin 2, e/ou estendendo os cálculos a 2 loops). Nesta tese, nos cálculos das funções de Green de três pernas, trabalhamos

[3] $\bar{\Psi}\Psi = 0$ ocorre porque o neutrino pode ser visto como a componente de "mão direita", R, de um espinor de Dirac ψ. Qualquer componente deste tipo pode ser obtida através da projeção $R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi$, sendo $\bar{R} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$. Com isto tem-se que $\bar{R}R = 0$, já que $\gamma_5^2 = 1$. Fato semelhante ocorre com a componente de "mão esquerda".

com uma soma de 125 termos, sendo cada um deles o produto normal de nove campos e de constantes de acoplamento. Para tornar possível tal cálculo desenvolvemos rotinas de computação simbólica (basicamente implementando os teoremas de Wick) capazes de trabalhar com campos bosônicos e fermiônicos. Estas rotinas, quando aplicadas ao nosso modelo, geraram um total de 3340 produtos de T-produtos dos campos (i.e., integrais de Feynman; um número razoável destes T-produtos eram nulos), em forma de série perturbativa, e com os fatores estatísticos corretos de maneira automática. Os resultados das integrais correspondentes (partes infinitas) foram calculados a mão, basicamente organizando o cálculo de maneira a expressar o resultado de todas elas em termos do resultado de algumas poucas. A seguir, estes resultados foram introduzidos no computador, resultando na associação direta entre as integrais de Feynman mencionadas acima e suas partes divergentes.

Podemos concluir, então, que parte dos *resultados* desta tese está também na experiência acumulada para desenvolver cálculos perturbativos, a nível simbólico, utilizando um computador. Efetivamente, em teorias de campos a altas ou mesmo baixas energias o cálculo perturbativo ainda é a via principal para a obtenção de resultados havendo assim grande interesse tanto na experimentação como no desenvolvimento de algorítmos como os que foram utilizados nesta tese.

Explicações mais detalhadas a relativas a estas rotinas e a suas possíveis adaptações para resolver problemas mais complexos deverão ficar prontas, em forma de artigo, em breve; assim como um outro artigo com os resultados desta tese, o qual está agora em fase de redação.

Apêndice A

A.1 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são definidas a partir de sua propriedade básica de anticomutação:

$$\gamma_\mu \, \gamma_\nu + \gamma_\nu \, \gamma_\mu \;=\; 2 \; g_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu} \;=\; (+,\, -,\, -,\, -)$. Define-se ainda a quantidade

$$\gamma_5 \;=\; \gamma^5 \;=\; \gamma_0 \, \gamma_1 \, \gamma_2 \, \gamma_3 \tag{A.2}$$

de modo que a eq. (A.1) pode ser generalizada:

$$\gamma_i \, \gamma_j + \gamma_j \, \gamma_i \;=\; 2 \; g_{ij} \tag{A.3}$$

onde, por definição, $g_{55} = 1$ e $g_{5i} = g_{i5} = 0$ para $i \neq 5$.

A operação de conjugação hermitiana para as matrizes γ pode ser definida como:

Apêndice A

A.1 Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac são definidas a partir de sua propriedade básica de anticomutação:

$$\gamma_\mu \, \gamma_\nu + \gamma_\nu \, \gamma_\mu \;=\; 2 \, g_{\mu\nu} \tag{A.1}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu} \;=\; (+, \, -, \, -, \, -)$. Define-se ainda a quantidade

$$\gamma_5 \;=\; \gamma^5 \;=\; \gamma_0 \, \gamma_1 \, \gamma_2 \, \gamma_3 \tag{A.2}$$

de modo que a eq. (A.1) pode ser generalizada:

$$\gamma_i \, \gamma_j + \gamma_j \, \gamma_i \;=\; 2 \, g_{ij} \tag{A.3}$$

onde, por definição, $g_{55} = 1$ e $g_{5i} = g_{i5} = 0$ para $i \neq 5$.

A operação de conjugação hermitiana para as matrizes γ pode ser definida como:

$$\gamma_i^{\dagger} = \gamma^i = g^{ij}\,\gamma_j \tag{A.4}$$

de modo que as quantidades γ_i são tidas como unitárias.

Pode-se mostrar que a propriedade básica dada na eq. (A.3), bem como as outras propriedades dela derivadas, são invariantes por transformações unitárias ($\gamma_i \rightarrow O\gamma_i O^{-1}$) [2]. Assim, várias representações são possíveis para as matrizes γ. A representação que será utilizada nesta tese é a Standard (ou representação de Dirac-Pauli). Nela temos:

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Vemos então que

$$Tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = 4\,g^{\mu\nu}, \qquad Tr(\gamma^i) = 0$$

Estas duas propriedades também são válidas para outras representações e, de um modo geral, podemos afirmar que são nulos os traços dos produtos de números ímpares de matrizes γ.

Podemos ainda definir as matrizes γ, e suas propriedades, num espaço de dimensão D arbitrária. A matriz γ_5, no entanto, só é definida para $D = 4$. Para uma dimensão qualquer D, a eq1A continuará válida, mas $g^{\mu\nu}$ deverá ser considerado como o tensor métrico em D dimensões $(g_\mu{}^\mu = \delta\mu\ ^\mu = D)$. Portanto:

$$\gamma_\mu\, \gamma^\mu \;=\; D; \qquad\qquad \gamma_\mu\, \gamma_\nu\, \gamma^\mu \;=\; (2-D)\, \gamma_\nu; \tag{A.6}$$

$$\gamma_\mu\, \gamma_\alpha\, \gamma_\nu\, \gamma_\beta\, \gamma^\mu \;=\; (2-D)\, \gamma_\alpha\, \gamma_\nu\, \gamma_\beta + 2\, (\gamma_\nu\, \gamma_\beta\, \gamma_\alpha - \gamma_\alpha\, \gamma_\beta\, \gamma_\nu); \tag{A.7}$$

Os traços dos produtos de números ímpares de matrizes γ continuarão sendo nulos em D dimensões, e teremos ainda:

$$Tr(I) \;=\; f(D) \tag{A.8}$$

$$Tr(\gamma_\mu\, \gamma_\nu) \;=\; f(D)\, g_{\mu\nu} \tag{A.9}$$

$$Tr(\gamma_\mu\, \gamma_\alpha\, \gamma_\nu\, \gamma_\beta) \;=\; f(D)\, (g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}\, g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}\, g_{\alpha\nu}) \tag{A.10}$$

onde $f(D)$ é uma função bem comportada que tende a 4 quando $D \to 4$

A.2 Formulário

A integral básica, da qual serão derivadas as outras integrais necessárias para os cálculos posteriores, é:

$$\int \frac{1}{(m^2 - p^2 - 2pk)^\alpha}\, d^D p \;=\; \frac{i\pi^{D/2}}{(m^2 + k^2)^{\alpha - D/2}}\, \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \tag{A.11}$$

A integral acima será aceita sem demonstração (para um cálculo explícito, ver por exemplo a referência [?]), e as três próximas integrais poderão ser obtidas a partir dela por derivação:

$$\int \frac{p^\mu}{(m^2 - p^2 - 2pk)^\alpha}\, d^D p \;=\; i\pi^{D/2}\, \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{(-k^\mu)}{(m^2 + k^2)^{\alpha - D/2}} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{p^\mu\, p^\nu}{(m^2 - p^2 - 2pk)^\alpha}\, d^D p \;&=\; \frac{i\pi^{D/2}}{(m^2 + k^2)^{\alpha - D/2}} \times \\ &\left[\frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)}\, k^\mu\, k^\nu - \frac{\Gamma(\alpha - 1 - D/2)}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{g^{\mu\nu}}{2}\, (m^2 + k^2) \right] \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{p^\mu\, p^\nu\, p^\alpha}{(m^2 - p^2 - 2pk)^\alpha}\, d^D p \;&=\; \frac{i\pi^{D/2}}{(m^2 + k^2)^{\alpha - D/2}} \left[\frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)}\, (-k^\mu\, k^\nu\, k^\alpha\,) \;+ \right. \\ &\left. \frac{\Gamma(\alpha - 1 - D/2)}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{1}{2}\, (\, g^{\mu\nu}\, K^\alpha + g^{\mu\alpha}\, K^\nu + g^{\nu\alpha}\, K^\mu\,)\, (m^2 + k^2) \right] \end{aligned} \tag{A.14}$$

Nas equações acima, $\Gamma(n)$ é a função Gamma usual: $\Gamma(n) \;=\; (n-1)!$ para n inteiro positivo. Tal função possui pólos em zero e em inteiros negativos, satisfazendo:

$$\Gamma(-n + \epsilon) \;=\; \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right] \tag{A.15}$$

para n inteiro positivo e $\epsilon \to 0$. Ψ_1 satisfaz:

$$\Psi_1(n+1) \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - C \tag{A.16}$$

sendo $C = 0,577$ a constante de Euler-Mascheroni. Temos ainda:

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - C + O(\epsilon), \qquad (\ \epsilon \to 0\ ) \tag{A.17}$$

As seguintes fórmulas também serão úteis:

$$\frac{1}{a^\alpha\ b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_0^1 \left[\frac{x^{\alpha-1}\ (1-x)^{\beta-1}}{[\ ax + b(1-x)\ ]^{\alpha+\beta}} \right] dx \tag{A.18}$$

$$\frac{1}{a^\alpha\ b^\beta\ c^\theta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+\theta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)\ \Gamma(\theta)} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left[\frac{y^{\alpha-1}\ (x-y)^{\beta-1}\ (1-x)^{\theta-1}}{[\ ay + b(x-y) + c(1-x)\ ]^{\alpha+\beta+\theta}} \right] \tag{A.19}$$

$$A^x = 1 + x \ln A + \frac{(x \ln A)^2}{2!} + \ldots = \sum_n \frac{(x\ \ln A)^n}{n!} \qquad (A > 0) \tag{A.20}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)x^m}{m!} + \ldots \quad (-1 < x < 1)^1 \tag{A.21}$$

As seguintes integrais serão necessárias para o cálculo da parte infinita do produto de propagadores. Como estamos interessados apenas nas partes infinitas, o resultado de

[1]Nos limites do intervalo de convergência (isto é, quando $x = 1$ ou $x = -1$) este desenvolvimento se comporta da seguinte maneira: se $m \geq 0$, converge absolutamenteem ambos os extremos; se $0 > m > -1$, diverge quando $x = 0$ e converge condicionalmente $x = 1$; se $m \leq -1$ diverge em ambos os extremos. Esta fórmula de expansão será usada para substituir a eq. (A.20) nos casos em que tivermos $A = 0$, como por exemplo quando integrarmos A^x entre limites de integração que anulem A.

cada uma delas será representado pela soma de uma parte finita ($I^{(fin)}$) e de uma parte infinita, cuja forma explícita dependerá da integral em questão. Os cálculos que levam aos resultados mostrados são feitos na útima parte deste apêndice.

$$I_1 = \int \frac{d^D p}{p^2 - m^2} = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} m^2 + I_1^{(fin)} \tag{A.22}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(p^2 - m_1^2)\ [\ (p+k)^2 - m_2^2\ ]}\, d^D p = \frac{2i\pi^2}{\epsilon} + I_2^{(fin)} \tag{A.23}$$

$$I_3 = \int \frac{p_\mu}{(p^2 - m_1^2)\ [\ (p+k)^2 - m_2^2\ ]}\, d^D p = -\ \frac{2i\pi^2}{\epsilon}\ \frac{k_\mu}{2} + I_3^{(fin)} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{p_\mu\ p_\nu}{(p^2 - m_1^2)[\ (p+k)^2 - m_2^2\ ]}\, d^D p \\ &= \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \left[\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} \left[\frac{(m_1^2 + m_2^2)}{2} - \frac{k^2}{6} \right] + \frac{1}{3}\, k_\mu\, k_\nu \right] + I_4^{(fin)} \end{aligned} \tag{A.25}$$

$$I_5 = \int \frac{1}{(m_1^2 - p^2)\ [\ m_2^2 - (p+k)^2\ ]\ [\ m_3^2 - (p+k+q)^2\ ]}\, d^D p = I_5^{(fin)} \tag{A.26}$$

$$I_6 = \int \frac{p_\mu}{(m_1^2 - p^2)[\ m_2^2 - (p+k)^2\ ]\ [\ m_3^2 - (p+k+q)^2\ ]}\, d^D p = I_6^{(fin)} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned} I_7 &= \int \frac{p_\mu\ p_\nu}{(m_1^2 - p^2)[\ m_2^2 - (p+k)^2\ ]\ [\ m_3^2 - (p+k+q)^2\ ]}\, d^D p \\ &= -\ \frac{2i\pi^2}{\epsilon}\ \frac{g_{\mu\nu}}{4} + I_7^{(fin)} \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$I_8 = \int \frac{p_\mu\ p_\nu\ p_\alpha}{(m_1^2 - p^2)[\ m_2^2 - (p+k)^2\ ]\ [\ m_3^2 - (p+k+q)^2\ ]}\, d^D p$$

$$= \frac{2i\pi^2}{\epsilon}\frac{1}{6}\left[g_{\mu\nu}(k_\alpha + \frac{q_\alpha}{2}) + g_{\mu\alpha}(k_\nu + \frac{q_\nu}{2}) + \gamma_{\nu\alpha}(k_\mu + \frac{q_\mu}{2}) \right] + I_8^{(fin)} \quad (A.29)$$

A.3 Cálculo das integrais do formulário

Consideremos inicialmente a integral

$$I_1 = \int \frac{d^D p}{p^2 - m^2}$$

Para calculá-la basta usar diretamente a eq. (A.11), tomando $k = 0$ e $\alpha = 1$. Teremos:

$$I_1 = i\,\pi^{D/2}\,m^{D-2}\,\Gamma(1 - D/2) \quad (A.30)$$

Fazendo

$$\epsilon = 4 - D \quad (A.31)$$

e usando as eqs. A.15 e A.16 poderemos escrever (quando $D \to 4$):

$$\Gamma(1 - D/2) = \Gamma(-1 + \epsilon/2) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + C + O(\epsilon) \quad (A.32)$$

substituindo esta expressão na eq. (A.30) teremos:

$$I_1 = i\,\pi^2\,m^2\left(-\frac{2}{\epsilon} - 1 + C\right)$$

Vemos então que é possível escrever I_1 como a soma de dois termos, um finito ($I_2^{(fin)}$) e outro que diverge quando $D \to 4$ ($\epsilon \to 0$). Obtemos assim o resultado da eq. (A.22).

Tomemos agora

$$I_2 \;=\; \int \frac{1}{(p^2 - m_1^2)\ [\ (p+k)^2 - m_2^2\ ]}\ d^Dp$$

Usamos inicialmente a eq. (A.18), fazendo $a = m_2^2 - (p+k)^2$ e $b = m_1^2 - p^2$, com $\alpha = \beta = 1$.

Assim teremos:

$$\begin{aligned} I_2 \;&=\; \int_0^1 \left[\ \int \frac{1}{\{\ [\ m_2^2 - (p+k)^2\ ]\,x + (m_1^2 - p^2)(1-x)\ \}^2}\ d^Dp\ \right]\ dx \\ &=\; \int_0^1 \left[\ \int \frac{1}{\{\ [\ (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2\ ] - p^2 - 2p(kx)\ \}^2}\ d^Dp \right]\ dx \qquad \text{(A.33)} \end{aligned}$$

ou, usando a eq. (A.11) e fazendo a substituição indicada na eq. (A.31) teremos:

$$I_2 \;=\; i\pi^{D/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 \left[\ (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2\ \right]^{-\frac{\epsilon}{2}}\ dx$$

Estamos agora em condições de separar as partes finita e infinita da integral acima. Para isto devemos expandir o integrando em série de potências de ϵ, lembrando que $\epsilon \to 0$ quando $D \to 4$. Usando a eq. (A.20) teremos:

$$I_2 \;=\; i\ \pi^{D/2}\ \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \left[\ 1 - \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 \ln\left[\ (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2\ \right]\ dx\ \right]$$

e usando a eq. (A.17) poderemos reescrever a expressão acima como:

$$I_2 \;=\; \frac{2i\ \pi^{D/2}}{\epsilon} + i\ \pi^{D/2} \left[\ \left(\ \frac{C\epsilon}{2} - 1\ \right) \int_0^1 \ln[...]\ dx\ - C\ \right]$$

O segundo termo do lado direito da expressão acima é finito e vamos representá-lo por $I_2^{(fin)}$. Assim obteremos o resultado mostrado na eq. (A.23).

A próxima integral que deveremos resolver é:

$$I_3 = \int \frac{p_\mu}{(p^2 - m_1^2) \; [\; (p+k)^2 - m_2^2 \;]} \; d^D p$$

Podemos notar que o denominador do integrando de I_3 coincide com o de I_2 (eq. (A.23)), o que nos permite fazer com I_3 o mesmo desenvolvimento inicial feito para I_2 (usando a eq. (A.18)). Teremos então:

$$I_3 = \int_0^1 \left[\int \frac{p_\mu}{\{\; [\; (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 \;] - p^2 - 2p(kx) \;\}^2} \; d^D p \right] dx$$

Usamos então a eq. (A.12), fazendo $\epsilon = 4 - D$, para obter

$$I_3 = -i \; \pi^{D/2} \; \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) k_\mu \int_0^1 \left[\; (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2 \;\right]^{-\frac{\epsilon}{2}} x \; dx$$

Podemos expandir a expressão acima lembrando que $\epsilon \to 0$ $(D \to 4)$ e usando as eqs. A.17 e A.20. Tomando apenas a parte divergente, teremos:

$$I_3 = -\frac{2i\pi^2}{\epsilon} \; k_\mu \int_0^1 x \; dx$$

e realizando a integral em x obteremos o resultado mostrado na eq. (A.24).

O desenvolvimento inicial para a integral I_4 é o mesmo usado para as duas integrais anteriores, I_2 e I_3. Usamos então a eq. (A.18) e arrumamos o denominador adequadamente para posteriormente aplicar A.13 ($\epsilon = 4 - D$):

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{p_\mu \; p_\nu}{(p^2 - m_1^2) \; [\; (p+k)^2 - m_2^2 \;]} \; d^D p \\ &= \int_0^1 \left[\int \frac{p_\mu \; p_\nu}{\{\; [\; (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 \;] - p^2 - 2p(kx) \;\}^2} \; d^D p \right] \; dx \end{aligned}$$

$$= \; i\,\pi^{D/2} \int_0^1 dx \left[(m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2 \right]^{-\frac{\epsilon}{2}} \times$$

$$\left[\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) k_\mu\, k_\nu\, x^2 - \Gamma(-1+\epsilon/2) \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[(m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2 \right] \right]$$

lembrando que $\epsilon \to 0$ poderemos usar as eqs. A.20, A.17 e A.32 para desenvolver o termo acima. Representando a parte convergente por $I_4^{(fin)}$ teremos:

$$I_4 \; = \; \frac{2i\pi^2}{\epsilon} \int_0^1 \left[k_\mu\, k_\nu\, x^2 - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[(m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (kx)^2 \right] \right] \, dx \; + I_4^{(fin)}$$

e realizando a integração sobre x chegaremos à eq. (A.25).

Consideremos agora

$$I_5 \; = \; \int \frac{1}{(m_1^2 - p^2)\; [\, m_2^2 - (p+k)^2 \,]\; [\, m_3^2 - (p+k+q)^2 \,]} \, d^D p$$

Usaremos a eq. (A.19) para desenvolver o integrando, tomando $a = m_3^2 - (p+k+q)^2$, $b = m_2^2 - (p+k)^2$, $c = m_1^2 - p^2$ e $\alpha = \beta = \theta = 1$. Poderemos reescrever I_5 como:

$$I_5 \; = \; \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^D p \qquad \times$$
$$\frac{\Gamma(3)}{\{\, [\, m_3^2 - (p+k+q)^2 \,]\, y + [\, m_2^2 - (p+k)^2 \,](x-y) + (m_1^2 - p^2)(1-x) \,\}^3}$$

ou ainda, rearrumando o denominador,

$$I_5 \; = \; \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^D p \qquad \times$$
$$\frac{\Gamma(3)}{\{\, [\, (m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 \,] - p^2 - 2p(qy + kx) \,\}^3}$$

usando agora a eq. (A.11) teremos:

$$
\begin{aligned}
I_5 &= i\,\pi^{D/2}\,\Gamma(3-D/2)\int_0^1 dx\int_0^x dy \qquad \times \\
&\quad \left[\,(m_3^2-m_2^2-q^2-2qk)y+(m_2^2-m_1^2-k^2)x+m_1^2+(qy+kx)^2\,\right]^{\frac{D-6}{2}}
\end{aligned}
$$

Para $D \to 4$ a integral acima será finita, e a função $\Gamma(n)$ não apresenta polo em $n = (3-D/2)$. Vemos portanto que I_5 não contém parte divergente ($I_5 = I_5^{(fin)}$).

A próxima integral que devemos resolver é I_6 (ver eq. (A.27)). O denominador do integrando desta integral coincide com o de I_5 (considerada acima), e portanto podemos reescrever I_6 como:

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^Dp \qquad \times \\
&\quad \frac{\Gamma(3)\;p_\mu}{\{\;[\;(m_3^2-m_2^2-q^2-2qk)y+(m_2^2-m_1^2-k^2)x+m_1^2\;]-p^2-2p(qy+kx)\;\}^3}
\end{aligned}
$$

usamos então diretamente a eq. (A.12) para obter:

$$
\begin{aligned}
I_6 &= i\,\pi^{D/2}\,\Gamma(3-D/2)\int_0^1 dx\int_0^x dy\;(q_\mu\;y+k_\mu\;x) \qquad \times \\
&\quad \left[\,(m_3^2-m_2^2-q^2-2qk)y+(m_2^2-m_1^2-k^2)x+m_1^2+(qy+kx)^2\,\right]^{\frac{D-6}{2}}
\end{aligned}
$$

No entanto, assim como ocorreu com I_5, para $D \to 4$ a integral que aparece na eq. acima é finita, assim como a função $\Gamma(3-D/2)$, e então I_6 será finita.

Seja agora

$$
I_7 = \int \frac{p_\mu\;p_\nu}{(m_1^2-p^2)\;[\;m_2^2-(p+k)^2\;]\;[\;m_3^2-(p+k+q)^2\;]}\;d^Dp
$$

O desenvolvimento inicial é o mesmo das integrais I_5 e I_6, ou seja,

$$I_7 = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^Dp \qquad \times$$

$$\frac{\Gamma(3)\; p_\mu\; p_\nu}{\{\;[\;(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2\;] - p^2 - 2p(qy + kx)\;\}^3}$$

e então, usando a eq. (A.13) teremos:

$$\begin{aligned} I_7 \;=\;& i\,\pi^{D/2}\,\Gamma(3 - D/2) \int_0^1 dx \int_0^x dy\; (q_\mu\; y + k_\mu\; x)\; (q_\nu\; y + k_\nu\; x) \qquad \times \\ & \Big[\;(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (qy + kx)^2\;\Big]^{\frac{D-6}{2}} \\ & -\; i\,\pi^{D/2}\frac{g_{\mu\nu}}{2}\Gamma(\frac{4-D}{2}) \int_0^1 dx \int_0^x dy \qquad \times \\ & \Big[\;(m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (qy + kx)^2\;\Big]^{\frac{D-4}{2}} \end{aligned}$$

Seguindo então o mesmo raciocínio usado com I_5 e I_6, vemos que a primeira integral que aparece no lado direito da eq. acima é finita, enquanto que a segunda pode ser desenvolvida fazendo-se $\epsilon = 4 - D \to 0$ e usando as eqs. A.17 e A.20, como foi feito com integrais que resolvemos anteriormente. Chegamos assim ao resultado mostrado na eq. (A.28).

Consideremos agora a próxima integral:

$$I_8 = \int \frac{p_\mu\; p_\nu\; p_\alpha}{(m_1^2 - p^2)\;[\;m_2^2 - (p+k)^2\;]\;[\;m_3^2 - (p+k+q)^2\;]}\; d^Dp$$

Analogamente ao que foi feito com as integrais I_5, I_6 e I_7, teremos:

$$I_8 = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^Dp \qquad \times$$

$$\frac{\Gamma(3)\, p_\mu\, p_\nu\, p_\alpha}{\{\ [\ (m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2\ ] - p^2 - 2p(qy + kx)\ \}^3}$$

e, usando a eq. (A.14),

$$\begin{aligned}
I_8 \;=\;& -\, i\, \pi^{D/2}\, \Gamma(3 - D/2) \int_0^1 dx \int_0^x dy\ (q_\mu\, y + k_\mu\, x)\ (q_\nu\, y + k_\nu\, x)\ (q_\alpha\, y + k_\alpha\, x) \times \\
& \Big[\ (m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (qy + kx)^2\ \Big]^{\frac{D-6}{2}} \\
& +\quad i\, \pi^{D/2}\, \frac{1}{2}\, \Gamma(\frac{4-D}{2}) \int_0^1 dx \int_0^x dy \qquad \times \\
& \Big[\ (m_3^2 - m_2^2 - q^2 - 2qk)y + (m_2^2 - m_1^2 - k^2)x + m_1^2 + (qy + kx)^2\ \Big]^{\frac{D-4}{2}} \quad \times \\
& [\ g_{\mu\nu}\, (q_\alpha\, y + k_\alpha\, x) + g_{\mu\alpha}\, (q_\nu\, y + k_\nu\, x) + g_{\nu\alpha}\, (q_\mu\, y + k_\mu\, x)\ ]
\end{aligned}$$

De modo semelhante ao que ocorreu com I_5, a primeira integral que do lado direito da eq. acima é finita. Seu valor dará contribuição apenas para à parte finita de I_8. A segunda integral na eq. acimapode ser desenvolvida do modo usual, com $\epsilon = 4 - D \to 0$ e usando as eqs. A.17 e A.20. Obtemos assim o resultado dado em A.29.

A.4 Integrais envolvendo derivadas da função delta de Dirac

A equação geral que utilizaremos nos cálculos seguintes é:

$$\int \frac{d^n \delta(x-y)}{dx^{\alpha_1}\, dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_n}}\, f(x)\, d^4x \;=\; (-1)^n\, \frac{d^n f(x)}{dx^{\alpha_1}\, dx^{\alpha_2} \ldots dx^{\alpha_n}}|_{x=y} \qquad \text{(A.34)}$$

com n inteiro positivo e $\alpha_i = 0, 1, 2$ ou 3 [?]. Podemos escrever portanto,

$$\begin{aligned} I^a &= \int f(x)\; g(y)\; \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x^\nu}\; d^4x d^4y \;=\; \int g(y) \left[\int d^4x\; f(x)\; \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial x^\nu} \right] d^4y \\ &= -\int g(y)\; \partial_\nu f(y)\; d^4y \;=\; -\int g(x)\; \partial_\nu f(x)\; d^4x \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\begin{aligned} I^b &= \int A^\mu(x)\; A^\nu(y)\; \frac{\partial^2 \delta(x-y)}{\partial x^\mu\, \partial x^\nu}\; d^4x d^4y \;=\; \int A^\nu(x)\; \partial_\mu \partial_\nu A^\mu(x)\; d^4x \\ &= \int \{\; \partial_\mu\; [\; A^\mu(x) \partial_\mu A^\nu(x)\;] - (\partial A)^2\; \}\; d^4x \end{aligned}$$

Podemos ainda escrever:

$$I^c \;=\; \int A^\mu(x)\; A_\mu(y)\; \frac{\partial^2 \delta(x-y)}{\partial x^\nu\, \partial x_\nu}\; d^4x d^4y \;=\; \int A^\mu(x)\; \partial^\nu \partial_\nu A_\mu(x)\; d^4x \qquad \text{(A.35)}$$

Através de cálculos diretos mostra-se que é possível reescrever a integral acima como:

$$I^c \;=\; \int \left[\; \frac{1}{2}(F_{\mu\nu})^2 + (\partial A)^2 \right]\; d^4x \qquad \text{(A.36)}$$

Consideremos agora

$$I^d \;=\; \int f(x)\; g(y)\; h(z)\; \delta(z-x)\; \frac{\partial \delta(y-x)}{\partial y^\sigma}\; d^4x d^4y d^4z \qquad \text{(A.37)}$$

fazendo inicialmente a integração em y teremos:

$$I^d \;=\; -\int f(x)\; h(z)\; \delta(z-x)\; \partial_\sigma g(x)\; d^4x d^4z \;=\; -\int f(x)\; h(x)\; \partial_\sigma g(x)\; d^4x \qquad \text{(A.38)}$$

Apêndice B

B.1 Cálculo da parte infinita do produto de dois propagadores

Sabemos que a relação entre um propagador e a função de Green de duas pernas correspondente é:

$$D_A(x-y) \;=\; -i\;\langle\; TA(x)A(y)\;\rangle_0$$

onde A reprenta um operador de campo de spin arbitrário.

Em representação de Fourier temos:

$$D_A(x-y) \;=\; \int e^{-ip(x-y)}\;\Delta_A(p)\;\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{B.1}$$

Considerando outro campo arbitrário B, com $D_B(x-y) = D_B(y-x)$, poderemos escrever:

$$\langle\, TA(x)A(y)\,\rangle_0\,\langle\, TB(x)B(y)\,\rangle_0 \;=-\;\left[\int e^{-ip(x-y)}\;\Delta_A(p)\;\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\right]\cdot\left[\int e^{ip'(x-y)}\;\Delta_B(p')\;\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\right]$$

Fazendo $p' \;=\; p-k$, com $d^4p' \;=\; d^4k$, teremos:

$$\langle\, TA(x)A(y)\rangle_0\,\langle\, TB(x)B(y)\rangle_0 \;=-\;\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\;\left[\int \Delta_A(p)\;\Delta_B(p+k)\;d^4p\right]\;\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

Utlizamos então o método de regularização dimensional [?] para tratar a integral do produto de propagadores que aparece acima (integral de loop). A idéia consiste basicamente em tratar tal integral como sendo realizada num espaço de momenta de D dimensões, e em seguida tomar o limite $D\to 4$. Assim usaremos as integrais calculadas no apêndice A e, como foi mostrado, obteremos singularidades representadas por polos em $D=4$. Como estamos interessados apenas nas partes divergentes, desprezaremos as partes finitas das integrais do apêndice A. Teremos então:

$$\langle\, TA(x)A(y)\rangle_0\,\langle\, TB(x)B(y)\rangle_0 = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\left[\mu^{4-D}\int \Delta_A(p)\;\Delta_B(p+k)\;d^Dp\right]\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tag{B.2}$$

onde μ é um parâmetro de massa arbitrário cuja finalidade é manter nula a dimensão da integral de loop enquanto consideramos $D\neq 4$. Como $D\to 4$ desprezaremos este fator nos cálculos subsequentes.

Usando as expressões dos propagadores obtidas no capítulo 2 e com o auxílio dos resultados obtidos no apêndice A, podemos calcular todos os produtos dos pares de propagadores que aparecem no capítulo 3. Nos cálculos que seguem usaremos a relação

$$\int e^{-ik(x-y)}\ \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ =\ \delta(x-y)$$

Tomemos inicialmente o produto $\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2$. Usando a eq. (B.2) teremos:

$$\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2\ =\ -\ \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\left[\int \frac{1}{(p^2-m_1^2)}\ \frac{1}{[(p+k)^2-m_1^2]}\ d^Dp\right]\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

usando então a eq. (A.23), com $m_1 = m_2$, teremos

$$\langle\ T\phi(x)\phi(y)\ \rangle_0{}^2\ =\ -\ \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\ \delta(x-y) \tag{B.3}$$

do mesmo modo,

$$\langle\ T\eta(x)\eta(y)\ \rangle_0{}^2\ =\ -\ \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\ \delta(x-y) \tag{B.4}$$

O cálculo para $\langle\ TA_\mu(x)A_\nu(y)\ \rangle_0\ \langle\ TA^\mu(x)A^\nu(y)\ \rangle_0$ é semelhante e teremos:

$$\langle\ TA_\mu(x)A_\nu(y)\ \rangle_0\ \langle\ TA^\mu(x)A^\nu(y)\ \rangle_0\ \ =\ -\ \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\ 4\ \delta(x-y) \tag{B.5}$$

Lembrando agora que $\langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\ \rangle_0\ \ =\ -\ \langle\ T\Psi_k(X)\bar{\Psi}_i(Y)\ \rangle_0$

e usando a expressão do propagador fermiônico dada na eq. (2.13) poderemos escrever:

$$\langle\ T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\ \rangle_0\ \langle\ T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\ \rangle_0\ \ =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\left[\int \frac{(\hat{p}+M)_{ki}}{(p^2-M^2)}\ \frac{(\hat{p}+\hat{k}+M)_{ik}}{[\ (p+k)^2-M^2\ ]}\ d^Dp\right]\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

O denominador do integrando na integral D-dimensional pode ser escrito como $Tr[(\hat{p}+M)(\hat{p}+\hat{k}+M)]$. Usamos então o fato de que é nulo o traço do produto de um número ímpar de matrizes γ e assim reescreveremos a espressão acima como:

$$\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \,\langle\, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)} \left[\int \frac{Tr(\hat{p}^2+\hat{p}\hat{k}+M^2)}{(p^2-M^2)\,[\,(p+k)^2-M^2\,]}\, d^Dp\right] \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

A integral D-dimensional restante pode ser resolvida com o auxílio das eqs. A.23, A.24 e A.25. Após alguns cálculos simples teremos:

$$\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \,\langle\, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left[\,12M^2-2k^2\,\right]\,\delta(x-y)$$

ou ainda

$$\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \,\langle\, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left[\,12M^2+2\Box_x\,\right]\,\delta(x-y) \qquad \text{(B.6)}$$

onde $\Box_x$ representa o Dalambertiano tomado no sistema de coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3).

Usando argumentos semelhantes, poderemos escrever:

$$\gamma_\nu^{ij}\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \,\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; -\,\langle\, T\Psi_k(X)\bar{\Psi}_i(Y)\,\rangle_0\gamma_\nu^{ij}\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)} \left[\int \frac{Tr\left[\,(\hat{p}+M)\gamma_\nu(\hat{p}+\hat{k}+M)\,\right]}{(p^2-M^2)\;[\,(p+k)^2-M^2\,]}\, d^Dp\right] \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

onde consideramos a matriz γ_ν^{ij} para calcular diretamente um termo que aparece no capítulo 3. Teremos após simplificações:

$$\gamma_\nu^{ij}\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \,\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \quad \times$$
$$\left[\int \frac{4M(2p_\nu+k_\nu)}{(p^2-M^2)\;[\,(p+k)^2-M^2\,]}\, d^Dp\right]$$

e usando as fórmulas para integração já obtidas, vemos que

$$\gamma_\nu^{ij} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; 0 \tag{B.7}$$

analogamente,

$$(\gamma^\nu)^{kl} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; 0 \tag{B.8}$$

de modo semelhante, lembrando que $g_{5\mu}p^\mu = g_{5\mu}p^\mu = 0$ (pois $\mu = 0, 1, 2, 3$ e $g_{5\mu} = 0$ para $\mu \neq 5$), teremos

$$\gamma_5^{ij} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; 0 \tag{B.9}$$

podemos ainda escrever, usando a eq. (A.10):

$$(\gamma^\nu)^{kl}\gamma_5^{ij} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; 0 \tag{B.10}$$

As próximas expressões podem ser calculadas de modo semelhante:

$$(\gamma^\mu)^{ij}(\gamma^\nu)^{kl} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\,\frac{4}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} - g^{\mu\nu}\Box_x\right)\delta(x-y)$$

$$\gamma_5^{ij}\gamma_5^{kl} \langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\,(4M^2 + 2\Box_x)\delta(x-y)$$

$$\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0 \;\langle\, T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_k(y)\,\rangle_0 \;=\; -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left(\frac{\hat{k}}{2} + M\right)^{ik}\int e^{-ik(x-y)}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\mu)^{ik}.\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\delta^{ik}\right)\delta(x-y)$$

$$\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\bar{\Psi}_j(x)\Psi_k(y)\,\rangle_0 = \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\mu)^{kj}.\frac{\partial}{\partial x_\mu}+M\delta^{kj}\right)\delta(x-y)$$

$$\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_l(y)\,\rangle_0 = -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\alpha)^{jl}.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+M\delta^{jl}\right)\delta(x-y)$$

$$\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 = \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\alpha)^{li}.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+M\delta^{li}\right)\delta(x-y)$$

$$\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\Psi_j(x)\bar{\Psi}_l(y)\,\rangle_0 = \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\,g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\alpha)^{jl}.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+M\delta^{jl}\right)\delta(x-y)$$

$$\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_l(y)\,\rangle_0 = -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\,g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{2}(\gamma_\alpha)^{li}.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+M\delta^{li}\right)\delta(x-y)$$

Para os produtos que seguem bastará usarmos as expressões dos propagadores e as integrais I_1 e I_2 do apêndice A. Teremos então:

$$\begin{aligned}
\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\;\delta(x-y)\\
\langle\, TF(x)F(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\;m_1^2\,\delta(x-y)\\
\langle\, TG(x)G(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\;m_2^2\,\delta(x-y)\\
\langle\, TH(x)H(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\;m_1^2\,\delta(x-y)\\
\langle\, TH(x)H(y)\,\rangle_0\,\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0 &= -\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\;m_2^2\,\delta(x-y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; g_{\mu\nu}\;\delta(x-y) \\
\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; g_{\mu\nu}\;\delta(x-y) \\
\langle\, TK(x)K(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TA^\mu(x)A^\nu(y)\,\rangle_0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; m_3^2\; g^{\mu\nu}\;\delta(x-y) \\
\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TS^\mu(x)S^\nu(y)\,\rangle_0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; 4\; m_3^2\;\delta(x-y) \\
\langle\, TA_\mu(x)A_\nu(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TV^\mu(x)V^\nu(y)\,\rangle_0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; 4\; m_3^2\;\delta(x-y) \\
\langle\, T\phi(x)\phi(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TS^\mu(x)S^\nu(y)\,\rangle_0 &= -\,\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; m_1^2\; g^{\mu\nu}\;\delta(x-y) \\
\langle\, T\eta(x)\eta(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TV^\mu(x)V^\nu(y)\,\rangle_0 &= -\,\frac{1}{2(2\pi)^2\epsilon}\; m_2^2\; g^{\mu\nu}\;\delta(x-y)
\end{aligned}
$$

B.2 Parte infinita do produto de três propagadores

Consideremos agora o produto de três propagadores $D_A(x-y)$, $D_B(y-z)$ e $D_C(z-x)$. Tomando a eq. (B.1) poderemos escrever:

$$
\begin{aligned}
I \;=\;& \langle\, TA(x)A(y)\,\rangle_0 \,\langle\, TB(y)B(z)\,\rangle_0 \,\langle\, TC(z)C(x)\,\rangle_0 \\
& -\, i\left[\int e^{-ip(x-y)}\;\Delta_A(p)\;\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\right]\cdot\left[\int e^{il(y-z)}\;\Delta_B(l)\;\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\right]\cdot\left[\int e^{it(z-x)}\;\Delta_C(t)\;\frac{d^4t}{(2\pi)^4}\right]
\end{aligned}
$$

Fazemos então as seguintes mudanças de variáveis:

$$
\begin{aligned}
l \to p+k \quad &\Rightarrow\quad d^4l \to d^4k \\
t \to p+k+q \quad &\Rightarrow\quad d^4t \to d^4q
\end{aligned}
$$

de modo que a integral I ficará:

$$I = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \left[\int \Delta_A(p)\ \Delta_B(p+k)\ \Delta_C(p+k+q)\ d^D p \right] \frac{d^4k\ d^4q}{(2\pi)^8}$$

Usamos então as expressões dos propagadores obtidas no capítulo 2, juntamente com os resultados obtidos no apêndice A, para calcular os produtos de propagadores que aparecem na segunda parte do capítulo 3. Os resultados obtidos não serão mostrados aqui por uma questão de espaço, porém podem ser solicitados via E-mail:

medeiros@cbpfsu1.cat.cbpf.br

Bibliografia

[1] C.G. Bollini and E.S. Cheb-Terrab, *Conditions for the absence of infinite renormalization in a general model*, Brazilian Journal of Physics 23 No 3 (1993) 308-311.

[2] Bogoliubov N. N., Shirkov D. V., *Quantum Fields*, The Benjamim Cummings Publishing Company Inc., 1983.

[3] Itzykson C., Zuber J. B., *Quantum Field Theory*, Mc. Graw Hill, 1980.

[4] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985.

[5] Kerson Huang, *Quarks Leptons and Gauge Fields*, World Cientific, 1982.

[6] S. Weinberg, *Review of Modern Physics*, 53, 539, 1980.

"CONDIÇÕES PARA AUSÊNCIA DE RENORMALIZAÇÃO INFINITA EM MASSAS E CONSTANTES DE ACOPLAMENTO"

JOÃO FELIPE DE MEDEIROS NETO

Tese apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Física, fazendo parte da Banca examinadora os seguintes Professores:

Edgardo Solomon Cheb-Terrab/UERJ

Sebastião Alves Dias/CBPF

Daniel Gustavo Barci/UERJ

Francisco Caruso Neto/CBPF

Rio de Janeiro, 16 de agosto de 1996