

1996/04  
M289

TESE DE  
MESTRADO

Leon Ricardo Ururahy Manssur

**Sobre o modelo de Chern-Simons  
na frente de onda da luz**

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS  
RIO DE JANEIRO, ABRIL DE 1996.



# Agradecimentos

- Aos colegas e professores do CBPF e da PUC-Rio cujas conversas contribuíram para este trabalho,
- Ao Prem, pela orientação nestes 2 anos e meio,
- À Myriam Simões, e aos demais funcionários do CBPF e da PUC-Rio,
- Ao meu pai pelo apoio e incentivo,
- À Paula Patricia, Pamina, e todos os amigos por todos estes anos juntos,
- Perdita e Petrouscka (in memoriam)

# Resumo

São revistas algumas propriedades de sistemas físicos a duas dimensões espaciais, com ênfase na possibilidade de existência de excitações possuindo spin e estatística fracionários (*anyons*), e na relação destas com o modelo de Chern-Simons abeliano. Procedemos à quantização canônica do modelo na frente de onda da luz (proposto por Dirac) e esclarecemos algumas controvérsias relacionadas a este modelo em artigos recentes. São investigadas propriedades do modelo de Chern-Simons na frente de onda em detalhe, usando o método de Dirac para sistemas vinculados, para um campo escalar complexo assim como para um campo espinorial.

# Summary

Some properties of physical systems in two space dimensions are reviewed, with emphasis on the possibility of the existence of the excitations carrying fractional spin and statistics (anyons), and on the relation of these with the abelian Chern-Simons model. We perform the canonical quantization of the model on the light-front (suggested by Dirac) and clarify some controversies related to this model in the recent papers. Properties of the Chern-Simons model on the light-front are investigated in detail, following the Dirac method for constrained dynamical systems, both for a coupled complex scalar field as well as for a spinor field.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Summary . . . . .	iii
Índice . . . . .	iv
Notação e convenções . . . . .	vi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Teoria de campos e coordenadas da frente de onda da luz . . . . .	2
1.2 O modelo de Chern-Simons e o espaço-tempo em $(2 + 1)$ dimensões . . . . .	5
1.3 O aparecimento de anyons e spin fracionário . . . . .	6
<b>2 Formulação hamiltoniana da teoria bosônica</b>	<b>10</b>
2.1 Formulação, notação e definições . . . . .	10
2.2 Implementação dos vínculos. Parênteses de Dirac . . . . .	12
2.3 Alguns parênteses básicos e auto-consistência . . . . .	18
2.4 O campo multivalente $\hat{\phi}$ e o caráter anyônico da teoria . . . . .	20
2.5 O vácuo clássico e o espaço de Fock . . . . .	25
<b>3 Formulação hamiltoniana da teoria fermiônica</b>	<b>30</b>
3.1 Matrizes gama e espinores de Dirac em $(2 + 1)$ dimensões . . . . .	30
3.2 Formulação da teoria e equações de Lagrange . . . . .	32
3.3 Implementação dos vínculos. Parênteses de Dirac . . . . .	34
3.4 Alguns parênteses básicos e auto-consistência . . . . .	39

3.5	Algumas relações de invariância relativística . . . . .	41
	<b>Conclusões</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Método de Dirac para sistemas vinculados</b>	<b>47</b>
A.1	Descrição do método e definição dos parênteses de Dirac . . . . .	48
A.2	Comentários sobre o método . . . . .	50
<b>B</b>	<b>Comentários sobre distribuições</b>	<b>52</b>
B.1	Definições e relações úteis . . . . .	52
B.2	Expansões no espaço dos momentos . . . . .	54
<b>C</b>	<b>Abordagem invariante de calibre para bósons</b>	<b>56</b>
<b>D</b>	<b>Inversão de matrizes esparsas com índices contínuos</b>	<b>60</b>
D.1	Definição do problema . . . . .	60
D.2	O método . . . . .	61
D.3	Os elementos da inversa . . . . .	63
	<b>Referências</b>	<b>65</b>

# Notação e convenções

Quando não houver indicação em contrário, admite-se que:

## 1. Coordenadas e métrica em (2+1) dimensões

$$x^+ \equiv \tau \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^2)$$

$$x^- \equiv x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^2)$$

$$x^1 \equiv \bar{x}$$

$$g^{+-} = g^{-+} = -g^{11} = 1$$

## 2. Tensor de Levi-Civita

$$\epsilon^{+-1} = -\epsilon_{+-1} = 1$$

## 3. Índices

- gregos do meio do alfabeto  $\mu, \nu, \rho \dots = +, -, 1$  (de Lorentz);
- gregos do início do alfabeto  $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2$  (espinoriais);
- latinos  $i, j, k \dots = -, 1$ ;

com a convenção de somatório de Einstein

## 4. Comutadores, Parênteses de Poisson e Dirac

$\{f, g\}$  representam parênteses de Poisson

$\{f, g\}^*$  representam parênteses de Dirac intermediários

$\{f, g\}_D$  representam parênteses de Dirac finais

$[f, g]$  representam comutadores, e  $f$  e  $g$  são operadores

Usaremos duas convenções quanto à dependência nas coordenadas:

- Quando aparecerem soltos, assumimos que a primeira função depende de  $x$  e a segunda de  $y$ , por exemplo:

$$\{f, g\} = \{f(x), g(y)\} = \{f(\tau, x^-, x^1), g(\tau, y^-, y^1)\},$$

onde  $x$  representa  $(x^-, x^1)$  e  $\tau = x^+$  foi omitido no segundo membro por brevidade.

- Quando aparecerem na definição dos parênteses de Dirac, assumimos que as variáveis de integração, por exemplo  $u$  e  $v$  se referem aos vínculos:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \int d^2u d^2v \{f, \chi_i\} C_{ij}^{-1} \{\chi_j, g\} = \\ &\{f(x), g(y)\} - \int d^2u d^2v \{f(x), \chi_i(u)\} C_{ij}^{-1}(u, v) \{\chi_j(v), g(y)\} \end{aligned}$$



# Capítulo 1

## Introdução

Em trabalho de 1949, P. A. M. Dirac [1] demonstra algumas propriedades básicas de toda dinâmica que satisfaça os requerimentos da relatividade restrita, ou seja, explicita propriedades do grupo de Poincaré. Naquele artigo, é discutida a formulação canônica (hamiltoniana) da teoria quântica nas formas

- instantânea: tendo como suporte a superfície  $x^0 = \text{constante}$ ,
- sobre o hiperbolóide dado por  $x^\mu x_\mu = \text{constante}$ , e
- sobre a frente de onda da luz, dada por  $x^0 + x^3 = \text{constante}$ .

Foi notado que, sob certos aspectos, a forma sobre a frente de onda traz vantagens [3] em relação às formas instantânea ou sobre o hiperbolóide.

Baseados neste ponto de vista, faremos uma breve revisão destes conceitos e aplicaremos a uma teoria de calibre abeliana de um campo escalar complexo sem massa em (2+1) dimensões, com o termo topológico de Chern-Simons puro (sem termo de Maxwell) [4, 5, 7, 8, 10, 9, 13, 22], nas coordenadas da frente de onda da luz [2]. Refinaremos alguns resultados obtidos nestes últimos trabalhos, onde se utiliza o método introduzido por Dirac [32] para sistemas vinculados para encontrar a hamiltoniana auto-consistente e os parênteses modificados (de Dirac) que devem ser usados para a quantização canônica da teoria. Prosseguiremos, repetindo a análise com um espinor.

Em particular, nosso objetivo será verificar e esclarecer, ao nível clássico, propriedades do modelo (já conhecidas na forma instantânea [5, 6, 7, 8, 11, 23]) na frente de onda da luz, para que a partir daí se possa introduzir flutuações quânticas. Faremos isto através do formalismo canônico [31, 32, 33, 35], demonstrado a auto-consistência (ou seja, que as equações de Lagrange e as de Hamilton se equivalem). Espera-se que estas propriedades sejam mais facilmente obtidas nas coordenadas da frente de onda que na forma instantânea, conforme previsto de maneira genérica por Dirac em [1].

Especial atenção será dada a tentar esclarecer a presença de campos com estatística fracionária (*anyons*) [7, 10, 11], excitações com estatística não-fermiônica e não-bosônica, e de anomalia rotacional [2, 5, 6, 7, 8, 10] como consequência da escolha de um calibre não covariante de Lorentz. Estes tópicos têm sido objeto de controvérsia na literatura [2, 6, 14, 10, 13] e esperamos contribuir para o esclarecimento da questão trabalhando nas coordenadas da frente de onda, onde a hamiltoniana se torna não local, mas o vácuo adquire uma forma mais simples [3].

Alguns de nossos resultados foram parcialmente obtidos e/ou checados com o auxílio do programa Maple 5 release 3 e das referências [42], no Laboratório de Computação Algébrica do Departamento de Relatividade e Partículas do CBPF. Foram de grande utilidade os pacotes *partials* e *PDEtools* de E. S. Cheb-Terrab *et al.*, à disposição nos endereços eletrônicos da *share library* do Maple. O primeiro calcula derivadas parciais e funcionais como é comum em teoria de campos, e o segundo é uma ferramenta para auxiliar na solução de equações diferenciais parciais em geral.

## 1.1 Teoria de campos e coordenadas da frente de onda da luz

Na ref. [1], cuja leitura é recomendada, Dirac afirma que os 10 geradores do grupo de Poincaré que ocorrem na prática (em 3+1 dimensões nesta seção) usualmente são tais que alguns são especialmente simples e outros não (hamiltonianas). O significado de *simples*

e *hamiltonianas* aqui é o seguinte: as hamiltonianas são relacionadas à evolução dinâmica do sistema no espaço-tempo; os geradores que sobram (simples, ou *cinemáticos*) se relacionam com um sub-grupo do grupo de Poincaré: eles mantêm invariante a hipersuperfície escolhida para a quantização. Na teoria não-relativística, as hamiltonianas correspondem à hamiltoniana, e os geradores cinemáticos fornecem as leis de conservação da Mecânica Clássica.

O argumento sobre o qual se justifica este e outros trabalhos em teorias de campos sobre a frente de onda da luz é o seguinte: na forma instantânea (de coordenadas generalizadas  $q^0, q^1, q^2, q^3$ ) há 6 geradores de transformações que deixam o plano  $q^0 = 0$  invariante, e portanto obtemos  $10 - 6 = 4$  hamiltonianas,

$$P_0 = (p_i p^i + m^2)^{1/2} \quad (1.1)$$

$$M_{i0} = q_i (p_j p^j + m^2)^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1.2)$$

enquanto que, na frente de onda, de coordenadas generalizadas

$$q^\pm \equiv q^0 \pm q^3$$

$$q^1, q^2$$

obtemos 7 geradores que deixam a frente de onda  $q^+ = 0$  invariante e apenas 3 hamiltonianas:

$$P_+ = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + m^2)}{p_-} \quad (1.3)$$

$$M_{i+} = \frac{q_i (p_1^2 + p_2^2 + m^2)}{p_-} - q_+ p_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

Uma vantagem é que na frente de onda da luz o problema é matematicamente mais simples (no caso do modelo de Chern-Simons, por ser em  $(2+1)$  dimensões, ainda mais simples com menos geradores; vide última seção de [2] e a seção 3.2, onde alguns geradores são calculados e a invariância relativística é checada). Além disto, não há raízes quadradas

na equação 1.3, o que evita o problema de energias negativas.

Nas coordenadas convencionais, dois pontos do hiperplano  $x^0 = \text{const.}$  têm em geral separação tipo espaço, que se torna tipo luz se e somente se estes pontos são coincidentes. Na frente de onda, dois pontos do hiperplano  $x^+ = \text{const.}$  também têm em geral um intervalo tipo espaço, mas este intervalo pode se tornar tipo luz, se os dois pontos pertencerem à reta onde o hiperplano tangencia o cone de luz. Logo, podemos, neste hiperplano, ter intervalo tipo luz para dois pontos não-coincidentes, ao contrário do caso anterior. No momento em que quantizamos a teoria, o princípio de causalidade microscópico faz aparecer a não-localidade: requer-se que o comutador

$$[A(x^+, x^-, x^\perp), B(0)]_{x^+=0},$$

onde  $x^\perp = (x^1, x^2)$ , se anule quando o intervalo  $(x)^\perp|_{x^+=0} = (2x^+x^- - x^\perp \cdot x^\perp)|_{x^+=0} = -x^\perp \cdot x^\perp$  for tipo espaço. Logo, o comutador é proporcional a  $\delta^2(x^\perp)$  (e suas derivadas), e o fato de termos  $x^-$  multiplicando  $x^+$  na expressão do intervalo fez com que não houvesse nenhuma restrição impondo localidade em  $x^-$ .

Podemos obter mais informação sobre a dependência em  $x^-$ . Considerando a representação espectral de Lehman para o campo escalar,

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\sigma^2 \rho(\sigma^2) \Delta(x; \sigma^2) \quad (1.5)$$

$$\Delta(x; \sigma^2) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \epsilon(k^0) \delta(k^2 - \sigma^2) e^{-ik \cdot x}, \quad (1.6)$$

mostra-se [3] que

$$\Delta(x^+, x^-, x^\perp; \sigma^2)|_{x^+=0} = -\frac{i}{4} \delta^2(x^\perp) \epsilon(x^-) \quad (1.7)$$

e segue-se que, na frente de onda,

$$\langle 0 | [\phi(x^+, x^-, x^\perp), \phi(0)]_{x^+=0} | 0 \rangle = -\frac{i}{4} \delta^2(x^\perp) \epsilon(x^-). \quad (1.8)$$

Este resultado será encontrado novamente no caso particular do Capítulo 2.

Na quantização, resulta que o vácuo é mais simples na frente de onda. O quadrivetor momento é dado por  $(k^+, k^-, k^\perp)$ , onde  $k^- = (k^0 - k^3)/\sqrt{2}$  é a energia,  $k^+ = (k^0 + k^3)/\sqrt{2}$  é a parte longitudinal, e  $k^\perp = (k^1, k^2)$  representa as duas componentes transversas. Ocorre que, para uma partícula massiva em sua camada de massa,  $k^\pm$  são positivo-definidos e portanto a conservação do momento longitudinal total,  $(k^+)_1 + (k^+)_2$  não permite que haja excitações de tais quanta no vácuo da frente de onda (um par criado do vácuo não poderia ter momentos opostos, se eles têm o mesmo sinal). Isto oferece vantagens para o cálculo de efeitos não-perturbativos, e pode esclarecer aspectos do vácuo da QCD: no formalismo convencional este inclui termos de condensados fermiônicos e gluônicos, que não podem comparecer no vácuo da frente de onda.

O formalismo canônico parece, à primeira vista, desnecessariamente complicado face ao formalismo lagrangeano (por integrais de trajetória). Mas deve ser dito [31] que ele tem a vantagem de permitir introduzir a abordagem de Heisenberg (via operadores) sem recorrer à rotação de Wick, e de maneira não perturbativa. Portanto, podemos, em princípio, usando o formalismo hamiltoniano, obter resultados que não estão acessíveis à teoria de perturbações.

## 1.2 O modelo de Chern-Simons e o espaço-tempo em $(2 + 1)$ dimensões

O modelo de Chern-Simons tem uma forte dependência da topologia do espaço-tempo de três dimensões [11, 10, 7, 23]. Neste espaço, temos que o primeiro grupo de homotopia é o *grupo de tranças*,  $B_N$ , enquanto que em dimensões mais altas o primeiro grupo de homotopia é trivialmente o grupo de permutações  $S_N$ . Isto quer dizer: se no espaço  $R^3$  retiramos a origem, ele permanece simplesmente conexo (toda curva fechada pode ser deformada continuamente em qualquer outra). Mas em  $R^2$  isto não acontece:  $R^2 \setminus \{0\}$  é multiplamente conexo, isto é, não podemos deformar continuamente todo arco em qualquer outro. As curvas são classificadas em classes de equivalência, que são conjuntos de

curvas deformáveis umas nas outras.

Não daremos uma abordagem mais completa da topologia envolvida, mas teremos em mente um exemplo físico deste fato que é o seguinte: somente em 2 dimensões espaciais, uma *circulação* de uma partícula ao redor de outra é definida. Isto é, traçando um caminho fechado de uma partícula ao redor de outra, a segunda está ou dentro ou fora do curva descrita, se proibirmos as duas de se superporem. É imediato ver que num espaço de dimensão maior que 2, não podemos definir *dentro* ou *fora* de uma curva: a curva sempre está contida numa superfície, e basta sair desta superfície para passar continuamente de 'dentro' para 'fora' da curva sem tocá-la. Isto tem como importante conseqüência uma mudança na maneira de se definir, por exemplo, uma *interação de troca*, onde agora faz diferença a troca em sentido horário ou anti-horário.

Isto se reflete no fato de podermos construir um termo topológico na Lagrangeana: o tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita,  $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ , neste caso tem três índices e poderemos contruir, nesta dimensão (e em geral, nas dimensões ímpares, termos análogos)

$$a\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda,$$

onde  $a$  é uma constante que dá a intensidade da interação. Notemos que este termo não envolve a métrica (por isto é chamado de topológico), e é invariante de calibre a menos de uma divergência total, mas não é invariante por paridade. Pode-se mostrar [4, 5, 12] que numa Lagrangeana com termo de Maxwell este termo acrescenta uma massa para o campo de gauge, a qual é proporcional a  $a$ . Isto define que tipo de problema prático podemos tratar com o modelo: mesmo mantendo o termo de Maxwell, o resultado seria bem diferente do eletromagnetismo usual, pois é mudado o alcance da interação.

### 1.3 O aparecimento de anyons e spin fracionário

Lembramos que, em 2 dimensões espaciais, o grupo de rotações tem uma estrutura peculiar: as rotações comutam (o grupo  $SO(2)$  é abeliano), e não há *a priori* nenhuma

razão para que o momento angular seja quantizado. Espera-se então que a função de onda para um sistema de  $n$  partículas satisfaça

$$\Psi(\dots, q_i, \dots, q_j, \dots) = e^{2\pi i \sigma} \Psi(\dots, q_j, \dots, q_i, \dots), \quad (1.9)$$

$q_i$  denotando o conjunto de números quânticos da  $i$ -ésima partícula, e  $\sigma$  o parâmetro de estatística, um número real qualquer (a menos de um inteiro). Os casos particulares de bósons e férmions são dados por  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 1/2$ , respectivamente. O caso geral é o que se chama de *anyon*, do inglês *any*, qualquer. Como esperado, neste caso o espectro do operador de momento angular tem valores diferentes de inteiro ou semi-inteiro.

Para obter este efeito a partir de primeiros princípios [11], basta notar que no espaço de configurações de um sistema de  $n$  partículas em  $d$  dimensões temos que assumir que os vetores de cada uma delas são diferentes uns dos outros, isto é, não podem ocupar o mesmo lugar. Do contrário teríamos necessariamente estatística bosônica. Portanto, ao excluirmos estes pontos, apenas no caso de 2 dimensões espaciais, o espaço de configurações deixa de ser simplesmente conexo, pelo motivo exposto na seção anterior. Então, ao calcularmos amplitudes de transição, as trajetórias na integral de caminho não são equivalentes, e têm um peso segundo a classe de equivalência a que pertencem (usando como exemplo Mecânica Quântica não-relativística nesta seção):

$$K(q', t'; q, t) = \sum_{\alpha} \chi(\alpha) K^{\alpha}(q', t'; q, t), \quad (1.10)$$

onde  $\alpha$  identifica cada classe e  $q$  é o conjunto dos números quânticos do sistema. Usando diretamente uma representação do grupo de tranças, é imediato mostrar que o efeito dos pesos  $\chi(\alpha)$  é criar um termo extra na lagrangeana contida na integral de caminho  $K^{\alpha}$ :

$$L = \sum_i \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{d}{dt} \Theta(x_i(t) - x_j(t)) \right], \quad (1.11)$$

onde  $\Phi$  é uma constante,  $i$  e  $j$  vão de 1 a  $n$  e

$$\Theta(\mathbf{x}) = \arctan \left( \frac{x^2}{x^1} \right). \quad (1.12)$$

Resulta [23] que surge um campo magnético proporcional à densidade de partículas. Portanto, a título de ilustração, podemos interpretar a interação neste sistema como tubos de fluxo de raio infinitesimal acompanhando cada partícula. Segue-se [11], então, que

$$J = l - \frac{\Phi}{2\pi} n(n-1); \quad l \text{ inteiro}, \quad (1.13)$$

em geral não inteiro. Pode-se mostrar que a introdução do termo de Chern-Simons da seção anterior, com  $a = \pi/\Phi$  também leva a este resultado.

A hamiltoniana deste sistema é dada por

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p}_i - \sum_{j \neq i} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x^i} \Theta(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right]^2. \quad (1.14)$$

A interação é um calibre puro e pode ser eliminada, gerando uma fase na função de onda:

$$\psi'(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \prod_{i < j} \exp \left[ -i \frac{\Phi}{\pi} \Theta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \right] \psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n). \quad (1.15)$$

$\psi'$  satisfaz uma equação de Schrödinger livre, mas sujeita a condições de contorno diferentes: para duas partículas, por exemplo, com ângulo polar relativo  $\phi$ , temos  $\psi'(\phi + 2\pi) = \exp(-2i\Phi)\psi'(\phi)$ . Além disto,  $\psi'$  satisfaz a relação 1.9 com

$$\sigma = -\frac{\Phi}{2\pi}.$$

tendo portanto estatística fracionária. Temos uma descrição dual:  $\psi$  com estatística usual e interação, ou  $\psi'$  livre com estatística fracionária.

Até aqui, citamos resultados de Mecânica Quântica não-relativística. Na passagem a uma teoria de campos relativística, encontramos dificuldades e pouco é conhecido no



momento sobre estatística e spin não usuais. Os fatos relevantes para este trabalho estão contidos na seção 2.4.

Este modelo tem sido usado para tratar problemas de física da matéria condensada onde o movimento é confinado a um plano, como por exemplo, a supercondutividade a baixas temperaturas e o efeito Hall quantizado (vide [16, 17, 22, 21, 18, 20, 19], onde são usadas funções de onda da forma 1.15). Para uma abordagem esclarecedora sobre estes tópicos, vide os trabalhos [11, 7, 10, 23] as e referências contidas neles.

# Capítulo 2

## Formulação hamiltoniana da teoria bosônica

Uma parte substancial deste capítulo seguirá de perto [2], no que diz respeito a notação, definições e alguns resultados. Alguns de nossos resultados serão uma versão alternativa ou estendida de resultados daquele trabalho.

### 2.1 Formulação, notação e definições

O modelo mais simples que podemos pensar (depois de apenas o termo de Chern-Simons puro) é um campo escalar carregado sem massa, minimamente acoplado a um campo de calibre que figura no termo de Chern-Simons, sem termo de Maxwell. A teoria no espaço-tempo em 3 dimensões ( $R^2 \times R$ ) considerada aqui é definida pela seguinte densidade de lagrangeana:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_\mu \phi^*) + \frac{\kappa}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (2.1)$$

Aqui  $\kappa$  é uma constante,  $\phi$  é um campo escalar complexo,  $A_\mu$  é um campo de gauge abeliano e

$$\mathcal{D}_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu) \quad (2.2)$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_\mu = (\partial_\mu - ieA_\mu). \quad (2.3)$$

Nossas coordenadas e métrica são definidas na seção Notação no início deste trabalho. Elas definem as componentes de um vetor qualquer na frente de onda, dadas as componentes convencionais:

$$V^\pm = V_\mp \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(V^0 \pm V^2). \quad (2.4)$$

Vemos que esta *não* é uma transformação de Lorentz. Outra observação é que o momento canonicamente conjugado a  $x^+$  é  $p_+ = p^-$ ; uma consequência importante é que a hamiltoniana vem da componente  $\theta_c^{+}_+ = \theta_c^{+-}$  do tensor de energia-momento.

Os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ \phi)} = \tilde{\mathcal{D}}_- \phi^* \quad (2.5)$$

$$\pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ \phi^*)} = \mathcal{D}_- \phi \quad (2.6)$$

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_\mu)} = a\epsilon^{+\mu\nu} A_\nu \quad (2.7)$$

onde  $a = \kappa/4\pi$ . A corrente de Noether invariante de calibre

$$j^\mu = ie(\phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - \phi \tilde{\mathcal{D}}^\mu \phi^*) \quad (2.8)$$

é conservada. As equações de movimento de Lagrange são facilmente obtidas e dadas por

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu \phi = 0 \quad (2.9)$$

$$2a\epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho = j^\mu \quad (2.10)$$

e adiante se simplificam, pela escolha do calibre  $A_- \approx 0$ , para

$$\partial_+ \partial_- \phi = \frac{1}{2} \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 \phi - i A_+ \partial_- \phi - \frac{i}{2} (\partial_- A_+) \phi \quad (2.11)$$

$$\partial_+ \partial_- \phi^* = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{D}}_1 \tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^* + i A_+ \partial_- \phi^* + \frac{i}{2} (\partial_- A_+) \phi^* \quad (2.12)$$

$$\frac{\kappa}{2\pi} \partial_- A_1 = j^+ = i(\phi^* \partial_- \phi - \phi \partial_- \phi^*) \quad (2.13)$$

$$\frac{\kappa}{2\pi} (\partial_1 A_+ - \partial_+ A_1) = j^- = i(\phi^* \mathcal{D}_+ \phi - \phi \tilde{\mathcal{D}}_+ \phi^*) \quad (2.14)$$

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \partial_- A_+ = j^1 = -i(\phi^* \mathcal{D}_1 \phi - \phi \tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*), \quad (2.15)$$

onde, de agora em diante, faremos  $\epsilon = 1$ , por conveniência.

Os campos  $\phi$  e  $\phi^*$  satisfazem condições de contorno nulas no infinito ao longo das duas direções espaciais  $x^-$  e  $x^1$ . Os campos de calibre satisfazem condições de contorno no infinito nulas ao longo de  $x^1$  e anti-periódicas ao longo de  $x^-$ . Para entender porque deve ser assim, tomemos como exemplo  $A_1$ . Ele não pode satisfazer condições nulas ou periódicas ao longo de  $x^-$ , pois isto tornaria nula a carga elétrica conservada do campo  $\phi$ : usando a eq. 2.13, vemos que

$$Q = \int d^2x j^+ = 2a \int dx^1 [A_1(x^- = \infty, x^1) - A_1(x^- = -\infty, x^1)]. \quad (2.16)$$

## 2.2 Implementação dos vínculos. Parênteses de Dirac

É imediato, das eqs. 2.5, 2.6 e 2.7, que temos um sistema vinculado, e os vínculos são dados por

$$\pi^+ \approx 0 \quad (2.17)$$

$$\chi^i \equiv \pi^i - a\epsilon^{+ij} A_j \approx 0 \quad i, j = -, 1 \quad (2.18)$$

$$\chi \equiv \pi - \tilde{\mathcal{D}}_- \phi^* \approx 0 \quad (2.19)$$

$$\chi^* \equiv \pi^* - \mathcal{D}_- \phi \approx 0. \quad (2.20)$$

Então, a hamiltoniana canônica pode ser obtida da maneira usual [2]:

$$H_c = \int d^2x \left[ (\mathcal{D}_1\phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1\phi^*) - A_+\Omega \right], \quad (2.21)$$

onde

$$\Omega = i(\pi\phi - \pi^*\phi^*) + a\epsilon^{1ij}\partial_i A_j + \partial_i\pi^i. \quad (2.22)$$

Usamos as eq. 2.5, 2.6 e 2.7, e deixamos de lado termos de superfície proporcionais a  $[\partial_-(A_+A_1) - \partial_1(A_1A_+)]$ , de acordo com as condições de contorno discutidas acima: estes termos, depois de integrados, são proporcionais a um produto de dois campos de gauge no infinito, por exemplo  $A_+(x^- = \infty, x^1)A_1(x^- = \infty, x^1) - A_+(x^- = -\infty, x^1)A_1(x^- = -\infty, x^1) = 0$ .

Notemos que o último e o penúltimo termos de  $\Omega$  são iguais se levarmos em conta a definição de  $\pi^i$ , e poderiam ter sido somados. Escolhemos da forma acima para que, adiante, ao usar o método de Dirac (Apêndice A), não seja necessário fazer combinações lineares entre os vínculos para achar todos os de primeira classe: veremos que  $\Omega$ , assim escrito, já é de primeira classe, e gera transformações de calibre, ou seja, usando os parênteses de Poisson 2.27 e 2.26 definidos abaixo,

$$\delta A_i \equiv \{A_i(x), \int d^2y \alpha(y)\Omega(y)\} = -\partial_i\alpha(x) \quad (2.23)$$

$$\delta\phi \equiv \{\phi(x), \int d^2y \alpha(y)\Omega(y)\} = i\alpha(x)\phi(x), \quad (2.24)$$

o que corresponde a uma transformação de calibre infinitesimal. (Expressões correspondentes são encontradas para os momentos, visto que os campos e os momentos aparecem em  $\Omega$  de forma simétrica.)

Construimos então a hamiltoniana preliminar como sendo

$$H' = H_c + \int d^2x [u\chi + u^*\chi^* + u_i\chi^i + u_+\pi^+], \quad (2.25)$$

onde  $u, u^*, u^i, u_+$  são campos multiplicadores de Lagrange. Postulamos inicialmente *parên-*

teses de Poisson a 'tempos'  $x^+ = \tau$  iguais entre os campos e seus momentos, copiando o formalismo usado a tempos iguais (como se  $\tau = x^+$  fosse um tempo, no sentido de Minkowsky):

$$\begin{aligned} & \{\pi(\tau, x^-, x^1), \phi(\tau, y^-, y^1)\} = \\ & = \{\pi^*(\tau, x^-, x^1), \phi^*(\tau, y^-, y^1)\} = -\delta^2(x - y) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\{\pi^\mu(\tau, x^-, x^1), A_\nu(\tau, y^-, y^1)\} = -\delta^\mu_\nu \delta^2(x - y), \quad (2.27)$$

todos os restantes se anulando. Destes, obtemos que os parênteses de Poisson não-nulos entre os vínculos são dados por (abreviando a dependência nas coordenadas conforme a convenção)

$$\{\chi^i, \chi^j\} = -2a\epsilon^{+ij}\delta^2(x - y) \quad (2.28)$$

$$\{\chi^i, \chi\} = -i\delta^i_- \phi^* \delta^2(x - y) \quad (2.29)$$

$$\{\chi^i, \chi^*\} = i\delta^i_- \phi \delta^2(x - y) \quad (2.30)$$

$$\{\chi, \chi^*\} = -2\tilde{D}_-^x \delta^2(x - y). \quad (2.31)$$

Notemos que  $\pi^+$  tem parênteses nulos com todos os outros, ou seja, é de primeira classe.

Exigindo a persistência em  $\tau$  de  $\pi^+ \approx 0$ , obtemos que

$$\partial_+ \pi^+(x) \equiv \dot{\pi}^+(x) = \{\pi^+(x, \tau), H'(\tau)\} \approx \Omega(x, \tau), \quad (2.32)$$

dado pela eq. 2.22, e portanto obtivemos um vínculo secundário,

$$\Omega \approx 0. \quad (2.33)$$

Extendemos a hamiltoniana para englobar este novo vínculo:

$$H'' = H' + \int d^2x v \Omega \quad (2.34)$$

e não obtemos nenhum novo vínculo secundário no processo:  $\{\Omega, H''\} \approx 0$  com os vínculos que já temos.  $\pi^+ \approx 0$  e  $\Omega \approx 0$  são de primeira classe e geram transformações de gauge, e os outros 4,  $\chi^i, \chi, \chi^*$ , são de segunda classe.

Poderíamos adicionar mais 2 vínculos para torná-los todos de segunda classe, como em [2], mas adicionaremos apenas um, já citado:

$$A_- \approx 0. \quad (2.35)$$

$\Omega$  é promovido a segunda classe, pois  $\{\Omega, A_-\} \neq 0$ . O preço a pagar será que  $\pi^+ \approx 0$  permanecerá de primeira classe. Com isto, implementaremos todos os outros vínculos, menos este, como descrito no Apêndice A. É claro que em algum momento, posteriormente, iremos implementá-lo.

Começamos pelo par  $\Omega \approx 0$ ,  $A_- \approx 0$ . Definimos os parênteses preliminares como sendo (cf. A. 4)

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \int d^2u d^2v \{f, \Gamma_m(u)\} C_{mn}^{-1}(u, v) \{\Gamma_n(v), g\} \quad (2.36)$$

onde  $m, n = 1, 2$ ,  $\Gamma_1 = A_-$ ,  $\Gamma_2 = \Omega$  e  $C_{ij} = \{\Gamma_i, \Gamma_j\}$ . As eq. 2.27 e 2.22 fornecem

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} [-\partial_-^x \delta^2(x - y)]. \quad (2.37)$$

Esta é uma matriz que tem índices discretos (usuais) e índices contínuos (a dependência em  $x$  e  $y$ ). A inversa de uma tal matriz é apropriadamente definida como sendo

$$\int d^2z C_{ik}(x, z) C_{kj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij} \delta^2(x - y), \quad (2.38)$$

o que fornece

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} 2K(x - y) \quad (2.39)$$

onde  $K(x - y)$  é a distribuição definida no Apêndice B:

$$K(x - y) = -\frac{1}{4}\epsilon(x^- - y^-)\delta(x^1 - y^1) \quad (2.40)$$

$$\partial_-^x K(x - y) = -\frac{1}{2}\delta^2(x - y). \quad (2.41)$$

Agora implementaremos os vínculos  $T_1 \equiv \chi^-$ ,  $T_2 \equiv \chi^1$ ,  $T_3 \equiv \chi$ ,  $T_4 \equiv \chi^*$ . A matriz  $D_{ij} = \{T_i, T_j\}^*$  é, usando 2.28 e seguintes, e o fato de  $\Omega$  ser de primeira classe em relação ao conjunto dos  $T_i$ ,

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & i\phi^* & i\phi \\ 2a & 0 & 0 & 0 \\ i\phi^* & 0 & 0 & -2\partial_-^x \\ -i\phi & 0 & -2\partial_-^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x - y). \quad (2.42)$$

Verifica-se, com a eq. 2.38, que

$$D^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -4a\partial_-^x & 0 & 0 \\ 4a\partial_-^x & [\phi^*(x)\phi(y) + \phi(x)\phi^*(y)] & 2ai\phi(x) & -2ai\phi^*(x) \\ 0 & 2ai\phi(y) & 0 & (2a)^2 \\ 0 & -2ai\phi^*(y) & (2a)^2 & 0 \end{pmatrix} \frac{K(x - y)}{(2a)^2}. \quad (2.43)$$

(No Apêndice D é fornecido um método para obter rapidamente esta inversa, através de um exemplo do Capítulo 3) Os parênteses de Dirac são então dados por

$$\{f, g\}_D = \{f, g\}^* - \int d^2u d^2v \{f, T_m(u)\}^* D_{mn}^{-1}(u, v) \{T_n(v), g\}^* \quad (2.44)$$

Para dar uma forma mais útil à eq. 2.44, eliminaremos os parênteses preliminares. Calculamos, usando as eqs. 2.36, 2.26 e 2.27, e novamente o fato de  $\Omega$  ser de primeira



classe em relação aos  $T_i$ ,

$$\begin{aligned} \{f, T_m\}^* &= \{f, T_m\} - 2 \int d^2u d^2v K(u-v) [\{f, A_-\} \{\Omega, T_m\} - \{f, \Omega\} \{A_-, T_m\}] = \\ &= \{f, T_m\} - 2\delta_m^1 \int d^2u K(u-y) \{f(x), \Omega(u)\}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

e analogamente

$$\{T_n, g\}^* = \{T_n, g\} - 2\delta_n^1 \int d^2u K(u-x) \{\Omega(u), g(y)\}. \quad (2.46)$$

Usando isto, e as eqs. 2.36 e 2.39 obtemos, após algumas manipulações,

$$\begin{aligned} \{f, g\}_D &= \{f, g\} - \int d^2u d^2v \left\{ \{f, T_m\} D_{mn}^{-1} \{T_n, g\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{K(u-v)}{a} [\{f, \pi^1 - aA_-\} \{\Omega, g\} + \{f, \Omega\} \{\pi^1 - aA_-, g\}] \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

É fácil ver que a eq. 2.47 é equivalente ao que se obtém implementando todos os vínculos de uma só vez, como em [2]. No nosso caso, a obtenção das inversas das matrizes foi facilitada pelo procedimento em passos, que usou uma matriz  $2 \times 2$  e outra  $4 \times 4$ , em vez de uma só  $6 \times 6$ , ao preço de uma manipulação algébrica que se mostrou simples para obter a eq. 2.47.

Os parênteses de Dirac têm, por construção, a propriedade de se anularem se  $f$  ou  $g$  forem um dos vínculos do conjunto  $\{\Gamma_i, T_j\}$ . Portanto, podemos agora fazer  $\Gamma_i = 0$  e  $T_i = 0$ , como igualdades válidas fortemente, e as equações de Hamilton agora envolvem os parênteses de Dirac.

Falta ainda implementar o vínculo  $\pi^+ = 0$ . Observando que o campo  $A_+$ , que não aparece nos vínculos, também desaparece de  $H_c$  (eq. 2.21), pois  $\Omega = 0$ , vemos que  $\pi^+$  se desacopla e podemos escolher

$$u^+ = 0 \quad (2.48)$$

para eliminar  $\pi^+$  e  $A_+$ . Diz-se que tais variáveis formam um par trivial.

Como  $A_- = \pi^1 = 0$ ,  $\pi = \partial_- \phi^*$ ,  $\pi^* = \partial_- \phi$ ,  $\pi^- = aA_1$  temos que  $\pi^1, \pi^-, \pi, \pi^*, A_-$ , além de  $\pi^+$  e  $A_+$ , são eliminados. Além disto,  $\Omega = 0$ , ou, alternativamente, a equação de Lagrange 2.13, dá  $A_1$  em função de  $\phi$  e  $\phi^*$ :

$$A_1 = \frac{1}{4a} \int d^2 y \epsilon(x^- - y^-) \delta(x^1 - y^1) j^+(y). \quad (2.49)$$

Não por acaso, o peso da integral de  $j^+(y)$  é precisamente a distribuição  $K(x - y)$ . Ela aparece porque, dentre todas as soluções da eq. 2.13, a que satisfaz as condições de contorno anti-periódicas em  $x^-$  é esta. Como iremos ver, este fato determina todo o comportamento da teoria na frente de onda.

A hamiltoniana na frente de onda, obtida substituindo os vínculos de segunda classe e a condição 2.48 em  $H''$ , é então

$$H^{l.f.} = \int d^2 x (\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*), \quad (2.50)$$

com  $A_1$  dado em termos de  $\phi$  e  $\phi^*$  pela eq. 2.49. Notamos que ela é mais simples que a hamiltoniana a tempos iguais, por exemplo, a da ref. [8], ou a que será citada na seção 2.4. Entretanto, agora temos não localidade devido a 2.49.

Concluimos que sobram apenas os campos  $\phi$  e  $\phi^*$  como variáveis independentes, em termos dos quais a dinâmica de todos os outros é descrita.

## 2.3 Alguns parênteses básicos e auto-consistência

Das eqs. 2.47 e 2.43 calcula-se facilmente os parênteses

$$\{\phi, \phi\}_D = \{\phi^*, \phi^*\}_D = 0 \quad (2.51)$$

$$\{\phi, \phi^*\}_D = \{\phi^*, \phi\}_D = K(x - y) \quad (2.52)$$

$$\{\pi, \phi\}_D = \{\pi^*, \phi^*\}_D = -\frac{1}{2} \delta^2(x - y), \quad (2.53)$$

que reconhecemos como sendo os parênteses de Dirac na frente de onda obtidos por um argumento geral na eq. 1.8 e na ref. [3]. Outros parênteses úteis são

$$\{\pi, A_1\}_D = -\frac{i}{4a}[-4\pi(x)K(x-y) + \phi^*\delta^2(x-y)] \quad (2.54)$$

$$\{\phi, A_1\}_D = \frac{i}{2a}[\phi(y) - 2\phi(x)]K(x-y) \quad (2.55)$$

$$\{A_1, A_1\}_D = \frac{1}{(2a)^2}[\phi(x)\phi^*(y) + \phi^*(x)\phi(y)]K(x-y), \quad (2.56)$$

assim como aqueles obtidos por conjugação complexa destes.

Agora, iremos reobter a eq. 2.11 como uma das equações de Hamilton, checando assim a auto-consistência da teoria:

$$\begin{aligned} \partial_{\mp}(\partial_{\pm}\phi) &= \partial_{\pm}\pi^* = \{\pi^*(x), H(\tau)\}_D \\ &= \{\pi^*, H\} - \int d^2u d^2v [\{\pi^*, T_3\} (D_{32}^{-1}\{T_2, H\} + D_{34}^{-1}\{T_4, H\}) - \\ &\quad - \frac{1}{a}K(u-v)\{\pi^*, \Omega\}\{\pi^1, H\}] = \\ &= \frac{1}{2}\{\pi^*, H\} - \frac{i}{a}\partial_{\pm}\phi(x) \int d^2v K(x-v)\{\pi^1(v), H\} - \frac{i}{4a}\phi(x)\{\pi^1(x), H\}. \end{aligned}$$

Usando que

$$\{\pi^*, H\} = \mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\phi \quad (2.57)$$

$$\{\pi^1, H\} = i(\phi^*\mathcal{D}_1\phi - \phi\tilde{\mathcal{D}}_1\phi^*) = -j^1 \quad (2.58)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{\pm}\partial_{\pm}\phi &= \frac{1}{2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\phi - \frac{i}{a}\partial_{\pm}\phi \int d^2y K(x-y)j^1(y) + \frac{i}{4a}\phi j^1 = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\phi - i\mathcal{A}_{\pm}\partial_{\pm}\phi - \frac{i}{2}\phi\partial_{\pm}\mathcal{A}_{\pm}, \end{aligned}$$

onde definimos a quantidade

$$\mathcal{A}_+ \equiv -\frac{1}{4a} \int d^2y \epsilon(x^- - y^-) \delta(x^1 - y^1) j^1(y). \quad (2.59)$$

Observando que a definição acima é essencialmente a eq. de Lagrange 2.15, com as condições de contorno anti-periódicas implicitamente assumidas, identificamos que  $\mathcal{A}_+ = A_+$  e obtivemos então a eq. de Lagrange 2.11.

## 2.4 O campo multivalente $\hat{\phi}$ e o caráter anyônico da teoria

Olhando a expressão para  $A_1$ , 2.49, vemos que este é um gauge puro, isto é, é uma derivada de uma função em relação a  $x^1$ . De fato, definindo

$$\Lambda(x) = \frac{1}{8a} \int d^2y \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1) j^+(y) \quad (2.60)$$

é imediato ver que  $A_1 = \partial_1 \Lambda$ . Fazendo uma transformação de gauge, então, é possível eliminar  $A_1$ , que era o único campo de gauge a comparecer na hamiltoniana 2.50 (fornecendo uma auto-interação complicada para  $\phi$ ; o potencial é de ordem  $\phi^6$  e não-local). O preço, como é usual, é uma fase no campo de matéria  $\phi$ . Deste modo,

$$\hat{A}_1 = A_1 - \partial_1 \Lambda = 0 \quad (2.61)$$

$$\hat{\phi} = e^{i\Lambda} \phi \quad (2.62)$$

$$\hat{\phi}^* = e^{-i\Lambda} \phi^* \quad (2.63)$$

o que resulta em

$$H = \int d^2x (\partial_1 \hat{\phi})(\partial_1 \hat{\phi}^*), \quad (2.64)$$

uma hamiltoniana livre para o campo  $\hat{\phi}$ .

Na teoria a tempos iguais[4, 8, 5], podemos analogamente definir um  $\hat{\phi}^{e.t.}$ , com

$$\Lambda^{e.t.}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi a} \int d^2y \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) j^0(y), \quad (2.65)$$

onde  $\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  é o ângulo entre o vetor  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  e o eixo dos  $x^1$ , no plano  $(x^1, x^2)$ , cf. eq. 1.12. Mas notemos que  $\Theta$  é multivalente, e por este motivo na integração temos que escolher um ramo, fazendo um corte. Este corte se traduz como uma descontinuidade em  $\Theta$ , e para comutar derivadas em relação a  $x$  e integrais em  $y$  no intuito de provar que a hamiltoniana é livre, obtemos um termo não desejado. Há controvérsia na literatura sobre este ponto [8, 11, 10].

Obtém-se, usando  $j^0 = i(\phi^* \pi^* - \phi \pi)$ , que, já a nível de operadores,

$$[\phi, \Lambda] = -\frac{1}{4\pi a} \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(x). \quad (2.66)$$

Usando a identidade entre operadores (fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff)

$$B e^A = e^A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n, \quad (2.67)$$

onde

$$c_n = \underbrace{[A, \dots [A, [A, B]] \dots]}_{n \text{ vezes}}, \quad (2.68)$$

com  $A = i\Lambda$  e  $B = \phi$ , obtemos da eq. 2.66 que

$$c_n = \left[ -\frac{i\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4\pi a} \right]^n \phi(x) \quad (2.69)$$

e portanto

$$\phi(x) e^{i\Lambda(y)} = \exp \left[ -\frac{i\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{4\pi a} \right] e^{i\Lambda(y)} \phi(x). \quad (2.70)$$

Então

$$\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) = e^{i\Lambda(x)} \phi(x) e^{i\Lambda(y)} \phi(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left\{ -\frac{i}{4\pi a} [\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \Theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \right\} e^{i\Lambda(\mathbf{y})} \phi(\mathbf{y}) e^{i\Lambda(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{x}) = \\
 &= \exp \left\{ -\frac{i}{4\pi a} [\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \Theta(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \right\} \hat{\phi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{y}) - e^{\frac{i}{4\pi a} \Delta} \hat{\phi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.71}$$

onde  $\Delta = \Theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \pi \bmod 2n\pi$  ( $n$  inteiro), e, de maneira análoga se obtém,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{\pi}(\mathbf{y}) - e^{\frac{i}{4\pi a} \Delta} \hat{\pi}(\mathbf{y}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) = i\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{2.72}$$

que são as conhecidas relações de comutação graduadas, com o fator de fase multivalente  $\Delta$  [8]. O que temos a tempos iguais é uma **descrição dual da teoria**:

- campos univalentes, com interações complicadas na hamiltoniana e estatística convencional (aqui, bosônica), ou
- campos multivalentes, com hamiltoniana livre (?), mas estatística fracionária.

A discussão que se segue, envolvendo a conexão entre spin e estatística, spin anômalo, e a segunda quantização, com a construção do espaço de Fock e análise dos estados assim obtidos é direta e pode ser encontrada nas referências [4, 8, 5, 7, 9] e várias outras.

Todo o parágrafo acima se refere à teoria formulada a tempos iguais. O nosso objetivo agora é verificar se esta estrutura pode ser reproduzida na versão **sobre a frente de onda**. De início, notamos que na eq. 2.60 o fator que multiplica  $j^+$  não gera problemas: ele é monovalente e a derivada em relação a  $x^1$  na eq. 2.61 é corretamente comutada com a integral em  $y$ , produzindo a eq. 2.64.

Poder-se-ia pensar que esta distribuição produto dos  $\epsilon$  é uma outra maneira de representar o ângulo  $\Theta$  (obtido na forma instantânea), apenas mudando o nome das coordenadas, já que as derivadas das duas expressões são essencialmente deltas (cf. B. 11 e B. 12). Mas é demonstrado no apêndice de [9] que elas coincidem apenas para uma classe

restrita de funções teste. Elas diferem nas condições de contorno no infinito que impomos aos campos de calibre: a tempos iguais, nulas, ou seja, usamos a eq. B. 10; na frente de onda, anti-periódicas, e usamos a eq. B. 12.

Entretanto, ocorre que  $[\phi, \phi^*] \neq 0$  e  $[\Lambda, \Lambda] \neq 0$ , o que torna as relações de comutação graduadas mais complicadas quando tentamos escrevê-las na frente de onda. Usando a eq. 2.55, obtemos (já na versão segundo-quantizada da teoria)

$$[\phi, \Lambda] = \frac{1}{16a} \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1) [2\phi(x) - \phi(y^-, x^1)] \quad (2.73)$$

e usando a identidade que se demonstra da eq. 2.67

$$[e^A, B] = e^A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} c_n \quad (2.74)$$

com  $c_n$  dado pela 2.68, e  $A$  e  $B$  como antes (exceto que agora  $\Lambda$  é o da frente de onda, eq. 2.60), obtemos

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{8a} \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1) \right\}^n [2\phi(x) - \phi(y^-, x^1)] \quad (2.75)$$

e portanto

$$[\phi(x), e^{i\Lambda(y)}] = \frac{1}{2} e^{i\Lambda(y)} \left\{ \exp \left[ -\frac{i}{8a} \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1) \right] - 1 \right\} [2\phi(x) - \phi(y^-, x^1)]. \quad (2.76)$$

Finalmente,

$$\phi(x) e^{i\Lambda(y)} = e^{i\Lambda(y)} \left[ e^{\alpha(x,y)} \phi(x) - \frac{1}{2} (e^{\alpha(x,y)} - 1) \phi(y^-, x^1) \right], \quad (2.77)$$

onde

$$\alpha(x, y) = -\frac{i}{8a} \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1). \quad (2.78)$$

Reconhecemos o primeiro termo do lado direito como análogo a 2.70, mas agora temos ou-

tros termos, devidos, em última análise, às condições de contorno e relações de comutação diferentes que encontramos na frente de onda. Disto obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y) &= e^{[\alpha(x,y)-\alpha(y,x)]}\hat{\phi}(y)\hat{\phi}(x) + e^{\alpha(x,y)}[e^{i\Lambda(x)}, e^{i\Lambda(y)}]\phi(x)\phi(y) + \\ &+ \frac{1}{2} [e^{i\Lambda(x)}e^{i\Lambda(y)}\phi(y^-, x^1)\phi(y)(1 - e^{\alpha(x,y)}) - (x \leftrightarrow y)] \end{aligned} \quad (2.79)$$

onde o último termo é igual ao penúltimo com  $x$  e  $y$  permutados. Notemos que o primeiro termo do lado direito é análogo à relação de comutação graduada da versão a tempos iguais, eq. 2.71, mas as funções que aparecem nos expoentes têm propriedades de simetria bastante distintas. Ao contrário daquele caso, que tinha  $\Theta(x - y) = \Theta(y - x) + (2n + 1)\pi$  ( $n$  inteiro), temos  $\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ . Logo, a fase desaparece do primeiro termo, e além disto, restam os outros termos que não existiam antes, os quais ainda escondem o caráter anyônico da teoria, se houver. Além disto,  $\Theta$  é multivalente, o que não acontece com  $\alpha$ . Isto ocorre porque as condições de contorno anti-periódicas das eqs. 2.13 introduziram as distribuições  $\epsilon$ . Podemos, ainda, reescrever o resultado acima como

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] &= e^{\alpha(x,y)}[e^{i\Lambda(x)}, e^{i\Lambda(y)}]\phi(y)\phi(x) + \\ &\frac{1}{2} [e^{i\Lambda(x)}e^{i\Lambda(y)}\phi(y^-, x^1)\phi(y)(1 - e^{\alpha(x,y)}) - (x \leftrightarrow y)] \end{aligned} \quad (2.80)$$

$\neq 0$

o que, pelo menos, mostra que o campo  $\hat{\phi}$  não tem estatística convencional porque tem comutador não-nulo consigo mesmo.

A conclusão é que, na frente de onda, não se pode obter  $\Lambda$  multivalente tal que a hamiltoniana seja livre e  $\hat{\phi}$  obedeça uma relação de comutação graduada como a eq. 2.71, devido às condições de contorno.



## 2.5 O vácuo clássico e o espaço de Fock

Para obtermos o vácuo clássico, não é correto minimizarmos a hamiltoniana na frente de onda, eq. 2.50. Minimizar a hamiltoniana fornece o vácuo clássico para a classe dos sistemas de referência conectados por transformações de Lorentz, o que não é o nosso caso: o sistema da frente de onda é um referencial com a velocidade da luz, e nada nos garante que os resultados de nossas experiências, todas realizadas em referenciais com velocidades inferiores à da luz, continuem valendo num tal sistema. Tudo que sabemos é que devemos minimizar a hamiltoniana a tempos iguais  $H^{e.t.}$ . Além disto, as coordenadas da frente de onda da luz dependem das coordenadas de Lorentz das quais partimos. Por exemplo, se fizermos um *boost* de Lorentz com velocidade  $\beta = v/c$  em  $x^0$  e  $x^2$ , as coordenadas da frente de onda sofrem uma transformação de escala:

$$x^{\pm'} = \left( \frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta} \right)^{\frac{1}{2}} x^{\pm}. \quad (2.81)$$

Em particular, para obter uma prescrição para o vácuo clássico, traduziremos a afirmação de que minimizamos a hamiltoniana a tempos iguais para minimizarmos a componente 0 do quadrivetor energia-momento, a qual se escreve em termos de grandezas definidas na frente de onda como:

$$H^{e.t.} = P^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^+ + P^-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^+ + H^{l.f.}), \quad (2.82)$$

e, portanto, o vácuo na frente de onda da luz tem que ser compatível com

$$\frac{\delta H^{e.t.}}{\delta \phi_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\delta}{\delta \phi_c} (P^+ + H^{l.f.}) = 0 \quad (2.83)$$

O tensor densidade de energia-momento canônico é calculado da maneira usual e é dado por [25]

$$\theta_c^{\mu\nu} = (\tilde{D}^\mu \phi^*)(\partial^\nu \phi) + (D^\mu \phi)(\partial^\nu \phi^*) + a\epsilon^{\sigma\mu\rho} A_\sigma \partial^\nu A_\rho - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.84)$$

sendo que

$$H^{l.f.} = \int d^2x \theta_c^{+-}, \quad (2.85)$$

$$P^+ = \int d^2x \theta_c^{++}. \quad (2.86)$$

Resulta que

$$\begin{aligned} \theta_c^{+-} &= (\tilde{\mathcal{D}}^+ \phi^*)(\partial^- \phi) + (\mathcal{D}^+ \phi)(\partial^- \phi^*) + a\epsilon^{\sigma\rho} A_\sigma \partial^- A_\rho - (\mathcal{D}_\mu \phi)(\tilde{\mathcal{D}} \phi^*) - a\epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = \\ &= (\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*) + iA_+(\phi^* \partial_- \phi - \phi \partial_- \phi^*) - a(A_+ \partial_- A_1 - A_1 \partial_- A_+) = \\ &= (\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*) + a\partial_-(A_+ A_1), \end{aligned} \quad (2.87)$$

que é a densidade de hamiltoniana encontrada anteriormente, eq. 2.50, a menos do termo de superfície, desprezado em vista das condições de contorno discutidas no início da seção 2.2, e

$$\begin{aligned} \theta_c^{++} &= (\tilde{\mathcal{D}}^+ \phi^*)(\partial^+ \phi) + (\mathcal{D}^+ \phi)(\partial^+ \phi^*) = \\ &= \partial_- \phi^* \partial_- \phi + \partial_- \phi \partial_- \phi^* = 2\pi\pi^*. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Então

$$H^{e.t.} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2x \left[ (\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*) + 2\pi\pi^* \right] \quad (2.89)$$

e a derivada funcional em relação a  $\phi^*$  dá

$$\begin{aligned} \frac{\delta H^{e.t.}}{\delta \phi_c^*} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2y \left\{ \left[ \tilde{\mathcal{D}}_1^\nu \delta^2(y-x) - i\phi^*(y) \frac{\delta A_1(y)}{\delta \phi^*(x)} \right] \mathcal{D}_1 \phi(y) + i\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi^*(y) \phi(y) \frac{\delta A_1(y)}{\delta \phi^*(y)} + \right. \\ &\quad \left. + 2\partial_- \phi(y) \partial_-^\nu \delta^2(y-x) \right\} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 \phi(x) + 2a \int d^2y \left( \partial_- A_+ \frac{\delta A_1(y)}{\delta \phi^*(x)} \right) + 2\partial_- \partial_- \phi(x) \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 \phi(x) - \int d^2y \left( A_+ \frac{\delta}{\delta \phi^*(x)} \partial_- A_1(y) \right) + 2\partial_- \partial_- \phi(x) \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 \phi - 2iA_+ \partial_- \phi - i\phi \partial_- A_+ + 2\partial_- \partial_- \phi(x)] = \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{2}(\partial_+\partial_- + \partial_-\partial_+)\phi_c = 0. \quad (2.90)$$

Usando o pacote PDEtools do Maple V release 3, (ou outro método qualquer), obtemos facilmente a forma da solução, que é prontamente verificada:

$$\phi_c(x^+, x^-, x^1) = \phi_1(x^+, x^1) + \phi_2(x^+ - x^-, x^1). \quad (2.91)$$

Mantendo  $x^+$  constante e fazendo  $x^- \rightarrow \infty$ ,

$$\phi_c = \phi_1(x^+, x^1) + \phi_2(-\infty, x^1) = 0, \quad \phi_1 = \phi_1(x^1), \quad (2.92)$$

o que finalmente resulta em

$$\phi_c = \phi_c(x^+ - x^-, x^1), \quad (2.93)$$

que é, justificadamente, uma função apenas de  $x^1$  e  $x^2$ , ou seja, independente do tempo  $x^0$ . No referencial da frente de onda, esta é uma onda plana se movimentando na direção de  $x^-$  positivo. Então, o vácuo que gostaríamos de obter é uma solução das equações de movimento que tenha a forma acima.

Agora tentaremos encontrar o exemplo mais simples possível de um tal sistema. Seguindo [7], tentamos um *ansatz* do tipo partícula puntiforme na origem,

$$j^+ = \delta(x^1)\delta(x^+ - x^-) \quad (2.94)$$

$$j^i = 0, \quad (2.95)$$

mas chegamos a uma contradição: ocorre que, para

$$j^+ = P(x^1)Q(x^+ - x^-), \quad (2.96)$$

onde  $P$  e  $Q$  são funções pares de seus argumentos, a eq. 2.13 fornece

$$A_1 = P(x^1)R(x^+ - x^-) \quad (2.97)$$

onde  $R$  é ímpar, e, devido à 2.14,

$$A_+ = S(x^1)T(x^+ - x^-) \quad (2.98)$$

onde  $S$  é ímpar, mas  $T$  é par, o que contradiz as condições de contorno. Assim, o problema de obter o vácuo clássico é dificultado por não haver separação em produto.

Para construir o espaço de Fock, usamos 2.51 e 2.52. Com a quantização, os campos tornam-se operadores, o ordenamento escrito na hamiltoniana acima é assumido, e em caso de ambigüidade usa-se o ordenamento de Weyl. Com a prescrição  $\{f, g\} \rightarrow -i[f, g]$ , onde  $f$  e  $g$  no comutador representam operadores, as relações de comutação na frente de onda se escrevem

$$[\phi, \phi^*] = iK(x - y) \quad (2.99)$$

$$[\phi, \phi] = 0. \quad (2.100)$$

Para satisfazê-las, usaremos as expansões no espaço dos momentos [3]

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int d^2k \frac{\theta(k^+)}{\sqrt{2k^+}} \left[ a(k^+, k^1; \tau) e^{-i(k^+ x^- - k^1 x^1)} + b^\dagger(k^+, k^1; \tau) e^{i(k^+ x^- - k^1 x^1)} \right] \quad (2.101)$$

$$\phi^* = \frac{1}{2\pi} \int d^2k \frac{\theta(k^+)}{\sqrt{2k^+}} \left[ a^\dagger(k^+, k^1; \tau) e^{i(k^+ x^- - k^1 x^1)} + b(k^+, k^1; \tau) e^{-i(k^+ x^- - k^1 x^1)} \right] \quad (2.102)$$

onde  $d^2k = dk^+ dk^1$  e  $\theta$  é a função degrau de Heaviside. Temos a álgebra

$$[a(k), a^\dagger(k')]_{\tau=\tau'} = [b(k), b^\dagger(k')]_{\tau=\tau'} = \delta^2(k - k') = \delta(k^+ - k'^+) \delta(k^1 - k'^1), \quad (2.103)$$

todos os outros se anulando, e onde a dependência em  $(k^+, k^1)$  e  $\tau$  foi abreviada, por simplicidade. É fácil verificar que esta expansão satisfaz as relações 2.99 e 2.100, bastando

para isto usar a álgebra e algumas relações entre distribuições fornecidas no Apêndice B.

Nota-se que as relações de comutação entre os operadores de criação e destruição revelam estatística usual (bosônica), e que anteriormente, na seção 2.4, mostramos que na frente de onda não podemos obter (pelo menos, não tão facilmente como a tempos iguais) um operador multivalente  $\hat{\phi}$  que tenha estatística manifestamente anyônica e hamiltoniana livre.

# Capítulo 3

## Formulação hamiltoniana da teoria fermiônica

Neste capítulo tentaremos repetir a análise do capítulo anterior para o caso de campos fermiônicos.

### 3.1 Matrizes gama e espinores de Dirac em $(2 + 1)$ dimensões

Em  $(2 + 1)$  dimensões, as matrizes gama da equação de Dirac podem ser representadas por matrizes de dimensão 2. Devido à álgebra que estas possuem, podemos então representá-las essencialmente pelas matrizes de spin de Pauli:

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\gamma^1 = i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\gamma^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Definimos então

$$\gamma^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 + \gamma^2) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\gamma^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 - \gamma^2) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Serão úteis os projetores

$$\Lambda^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\Lambda^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^0\gamma^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

e é fácil ver que

$$(\Lambda^+ + \Lambda^-) = 1 \quad (3.8)$$

$$(\Lambda^\pm)^2 = \Lambda^\pm. \quad (3.9)$$

Também usaremos as relações

$$\gamma^0\gamma^1 = -i\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = i. \quad (3.11)$$

Notemos estas 3 matrizes juntamente com a identidade formam uma base para as matrizes  $2 \times 2$ . Em (3+1) dimensões, este espaço teria dimensão 16, ao passo que aqui esta dimensão é 4. Logo, não podemos definir um objeto como  $\gamma^5$ , pois este se reduziria à eq. 3.11

O campo  $\psi$  é um espinor de massa nula de 2 componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^* \ \psi_2^*), \quad (3.13)$$

e define-se

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_2^* \ \psi_1^*), \quad (3.14)$$

como usual, mas iremos preferencialmente usar as componentes do espinor e seus conjugados, com os índices espinoriais variando de 1 a 2. Iremos usar  $\gamma^0$  na frente de onda sem problemas, pois as matrizes gama não dependem de coordenadas:  $\gamma^0$  é apenas uma notação para a matriz dada pela eq. 3.1.

## 3.2 Formulação da teoria e equações de Lagrange

Nossa densidade de lagrangeana será agora dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left[ \psi_\alpha^* (\gamma^0 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{D}_\mu \psi_\beta - \tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi_\alpha^* (\gamma^0 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta \right] + a \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \quad (3.15)$$

onde  $\mathcal{D}_\mu$  e  $\tilde{\mathcal{D}}_\mu$  são definidos por 2.2 e 2.3 e os momentos canonicamente conjugados são

$$\pi_\alpha = \frac{i}{2} \psi_\beta^* (\gamma^0 \gamma^\dagger)_{\beta\alpha} \quad (3.16)$$

$$\pi_\alpha^* = -\frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^\dagger)_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad (3.17)$$

$$\pi^\mu = a \epsilon^{\dagger\mu\nu} A_\nu. \quad (3.18)$$

As equações de movimento são facilmente obtidas:

$$(\tilde{\mathcal{D}}_\mu \psi_\alpha) (\gamma^0 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.19)$$

$$(\gamma^0 \gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\mathcal{D}_\mu \psi_\beta) = 0 \quad (3.20)$$





$$2a\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = j^\mu = \psi_\alpha^*(\gamma^0\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta. \quad (3.21)$$

A corrente de Noether  $j^\mu$  é conservada e as condições de contorno são as mesmas do campo escalar: os campos de calibre têm condições de contorno no infinito anti-periódicas em  $x^-$  e nulas em  $x^1$ , e os campos de matéria têm condições de contorno no infinito nulas em ambas as direções espaciais (vide eq. 2.16).

No calibre  $A_- \approx 0$ , resulta que as equações de movimento são bem mais simples que no caso anterior. Usando as eqs. 3.6, 3.7 e 3.10, obtemos

$$\sqrt{2}\partial_-\psi_1 - i\mathcal{D}_1\psi_2 = 0 \quad (3.22)$$

$$\sqrt{2}\partial_-\psi_1^* + i\tilde{\mathcal{D}}_1\psi_2^* = 0 \quad (3.23)$$

$$\sqrt{2}\mathcal{D}_+\psi_2 + i\mathcal{D}_1\psi_1 = 0 \quad (3.24)$$

$$\sqrt{2}\tilde{\mathcal{D}}_+\psi_2^* - i\tilde{\mathcal{D}}_1\psi_1^* = 0 \quad (3.25)$$

$$2a(\partial_-A_1) = j^+ = \sqrt{2}\psi_2^*\psi_2 \quad (3.26)$$

$$2a(\partial_1A_+ - \partial_+A_1) = j^- = \sqrt{2}\psi_1^*\psi_1 \quad (3.27)$$

$$-2a(\partial_-A_+) = j^1 = i(\psi_1\psi_2^* - \psi_1^*\psi_2). \quad (3.28)$$

Notemos que, como antes, as três últimas equações eliminam os campos de gauge em termos das correntes de Noether, mas agora as expressões para as correntes estão mais simples, conseqüência de termos uma lagrangeana linear em derivadas dos campos.

Além disto, as duas primeiras equações não envolvem derivadas temporais dos campos  $\psi$  e  $\psi^*$ , de maneira que devemos esperar que elas surjam no formalismo hamiltoniano como um par de vínculos, sendo um o conjugado do outro. Estes vínculos acabam por eliminar o campo  $\psi_1$  e seu conjugado (cujas derivadas temporais não aparecem) em termos de  $\psi_2$ ,  $\psi_2^*$  e  $A_1$  que já foi eliminado em termos dos dois primeiros. As duas equações restantes é que dão efetivamente a dinâmica dos campos  $\psi_2$  e  $\psi_2^*$ . A conclusão é que apesar de, aparentemente, termos aqui mais graus de liberdade, temos também mais vínculos, que os reduzem a apenas dois.

### 3.3 Implementação dos vínculos. Parênteses de Dirac

A hamiltoniana canônica é então

$$H_c = \int d^2x \left\{ \frac{i}{2} [(\tilde{\mathcal{D}}_i \psi_\alpha^*)(\gamma^0 \gamma^i)_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\alpha^*(\gamma^0 \gamma^i)_{\alpha\beta} (\mathcal{D}_i \psi_\beta)] - A_+ \Omega \right\} \quad (3.29)$$

onde

$$\Omega = i(\pi_\alpha \psi_\alpha - \pi_\alpha^* \psi_\alpha^*) + a\epsilon^{+ij} \partial_i A_j + \partial_i \pi^i \quad (3.30)$$

como antes, exceto que agora temos somas nos índices espinoriais dos termos entre parênteses.

Da eq. 3.16 e seguintes, obtemos os vínculos primários:

$$\chi_\alpha \equiv \pi_\alpha - \frac{i}{2} \psi_\beta^* (\gamma^0 \gamma^+)_{\beta\alpha} \approx 0 \quad (3.31)$$

$$\chi_\alpha^* \equiv \pi_\alpha^* + \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^+)_{\alpha\beta} \psi_\beta \approx 0 \quad (3.32)$$

$$\pi^+ \approx 0 \quad (3.33)$$

$$\chi^i \equiv \pi^i - a\epsilon^{+ij} A_j \approx 0. \quad (3.34)$$

Nossa convenção é que os vínculos e momentos referentes ao campo de gauge têm índices em cima, que vão de  $-$  a  $1$ , enquanto que aqueles referentes aos campos de matéria têm índices embaixo que assumem valores de  $1$  a  $2$ . A seguir, postulamos os parênteses de Poisson entre os campos e seus momentos:

$$\{\pi^\mu, A_\nu\} = -\delta^\mu_\nu \delta^2(x-y) \quad (3.35)$$

$$\{\pi_\alpha, \psi_\beta\} = \{\pi_\alpha^*, \psi_\beta^*\} = -\delta_{\alpha\beta} \delta^2(x-y), \quad (3.36)$$

os outros se anulando. Os parênteses de Poisson não-nulos entre os vínculos primários são facilmente obtidos:

$$\{\chi^i, \chi^j\} = -2a\epsilon^{+ij} \delta^2(x-y) \quad (3.37)$$

$$\{\chi_\alpha, \chi_\beta^*\} = -i(\gamma^0 \gamma^+)_{\alpha\beta} \delta^2(x - y). \quad (3.38)$$

A hamiltoniana preliminar é então

$$H' = H_c + \int d^2x \left[ \chi_\alpha u_\alpha + \chi_\alpha^* u_\alpha^* + \chi^i u_i + \pi^+ u_+ \right], \quad (3.39)$$

onde  $u_\alpha, u_\alpha^*, u_i$  e  $u_+$  são campos multiplicadores de Lagrange.

Impondo a persistência no tempo de  $\pi^+ \approx 0$ , encontramos o vínculo secundário

$$\Omega \approx 0 \quad (3.40)$$

da mesma maneira que na seção 2.2. Além disto, porém, impondo a consistência de  $\chi_\alpha$  no tempo obtemos mais vínculos secundários, devido à presença do projetor  $\Lambda^+$  na eq. 3.38:

$$\{\chi_\alpha, H'\} \approx -i(\tilde{\mathcal{D}}_i \psi_\beta^*)(\gamma^0 \gamma^i)_{\beta\alpha} - i u_\beta^* (\gamma^0 \gamma^+)_{\beta\alpha} \approx 0, \quad (3.41)$$

que, abrindo as somas e usando as eqs. 3.6, 3.7 e 3.10, fornece

$$\Sigma^* \equiv \sqrt{2} \tilde{\mathcal{D}}_- \psi_1^* + i \tilde{\mathcal{D}}_1 \psi_2^* \approx 0 \quad (3.42)$$

$$-i \tilde{\mathcal{D}}_1 \psi_1^* + \sqrt{2} u_2^* \approx 0. \quad (3.43)$$

A segunda equação fornece o multiplicador  $u_2^*$ , mas a primeira, devido à presença do projetor multiplicando  $u_\alpha^*$  na eq. 3.41, não envolve multiplicadores de Lagrange. Portanto, este é mais um vínculo secundário, o qual, fixando o calibre com  $A_- \approx 0$  é exatamente a equação de movimento de Lagrange 3.23, conforme foi previsto anteriormente. O mesmo argumento para a persistência no tempo de  $\chi_\alpha^*$  fornece a equação que determina  $u_2$  e o vínculo conjugado, que vem a ser a eq. 3.22:

$$\Sigma \equiv \sqrt{2} \mathcal{D}_- \psi_1 - i \mathcal{D}_1 \psi_2 \approx 0 \quad (3.44)$$

$$i \mathcal{D}_1 \psi_1 + \sqrt{2} u_2 \approx 0. \quad (3.45)$$

A conservação dos vínculos restantes, referentes aos campos de calibre, apenas fornece equações que determinam seus multiplicadores  $u_-$  e  $u_1$ .

Extendemos então a hamiltoniana para englobar estes novos vínculos:

$$H'' = H' + \int d^2x [\omega\Omega + v\Sigma + v^*\Sigma^*], \quad (3.46)$$

e o requerimento de persistência para os vínculos secundários não gera novos vínculos secundários. Temos então, que os parênteses de Poisson não-nulos entre os vínculos, além de 3.37 e 3.38, são

$$\{\chi_1, \Sigma\} \approx \sqrt{2} \partial_-^x \delta^2(x-y) \quad (3.47)$$

$$\{\chi_2, \Sigma\} \approx i\bar{D}_1^x \delta^2(x-y) \quad (3.48)$$

$$\{\chi^-, \Sigma\} \approx -i\sqrt{2} \psi_1 \delta^2(x-y) \quad (3.49)$$

$$\{\chi^1, \Sigma\} \approx i\psi_2 \delta^2(x-y) \quad (3.50)$$

$$\{\Sigma, \Omega\} \approx (-i\sqrt{2} A_- \psi_1 + iA_1 \psi_2) \delta^2(x-y), \quad (3.51)$$

além de seus conjugados.

Poder-se-ia pensar, devido à ultima equação acima, que agora  $\Omega$  não é mais de primeira classe, e não precisamos mais fixar o calibre para torná-lo de segunda classe. Mas esta conclusão é falsa: a matriz dos parênteses de Poisson entre os vínculos de segunda classe (todos exceto  $\pi^1$ ) ainda é singular. Isto se deve ao fato de ainda termos, entre os de segunda classe, uma combinação linear de primeira classe. A fixação de calibre  $A_- \approx 0$  usada antes resolve este problema, sem que tenhamos que identificar qual combinação linear é de primeira classe. Resulta que a matriz com esta fixação de calibre incluída é inversível.

Então temos que implementar os vínculos  $T_1 \equiv \chi_1, T_2 \equiv \chi_2, T_3 \equiv \chi_1^*, T_4 \equiv \chi_2^*, T_5 \equiv \chi^-, T_6 \equiv \chi^1, T_7 \equiv \Sigma, T_8 \equiv \Sigma^*, T_9 \equiv A_-$  e  $T_{10} \equiv \Omega$ . A matriz a inverter é

$$C(x, y) =$$

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \partial_-^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & i\tilde{\mathcal{D}}_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \partial_-^x & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\mathcal{D}_1^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a & -i\sqrt{2} \psi_1 & i\sqrt{2} \psi_1^* & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & i\psi_2 & -i\psi_2^* & 0 & 0 \\ \sqrt{2} \partial_-^x & -i\mathcal{D}_1^x & 0 & 0 & i\sqrt{2} \psi_1 & -i\psi_2 & 0 & 0 & 0 & iA_1\psi_2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \partial_-^x & i\tilde{\mathcal{D}}_1^x & -i\sqrt{2} \psi_1^* & i\psi_2^* & 0 & 0 & 0 & -iA_1\psi_2^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -iA_1\psi_2 & iA_1\psi_2^* & -\partial_-^x & 0 \end{array} \right) \times \quad (3.52)$$

uma matriz  $10 \times 10$ , ou seja, 100 elementos, que, com a simetria da matriz, se reduzem a 55. Para não sermos forçados a resolver um sistema de equações a 55 incógnitas, usamos o método exposto no Apêndice D, que se aproveita do fato de que vários elementos são nulos. Notemos, ainda, que não são necessários todos os elementos da inversa, mas apenas aqueles que figurem nos parênteses de Dirac que queremos calcular. Usaremos os elementos de  $C^{-1}$  obtidos no Apêndice D.

Obtida a inversa, definimos então os parênteses de Dirac,

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \int d^2u d^2v \{f, T_m(u)\} C_{mn}^{-1}(u, v) \{T_n(v), g\}. \quad (3.53)$$

Os mesmos comentários do capítulo anterior se aplicam, e agora os vínculos valem fortemente.  $\pi^+$  e  $A_+$  se desacoplam, e são eliminados escolhendo-se  $u^+ = 0$ , como antes.

$\pi^- = aA_1$ ,  $\pi^1 = -aA_- = 0$ ,  $\pi_1 = \pi_1^* = 0$ ,  $\pi_2 = (i/\sqrt{2})\psi_2^*$ ,  $\pi_2^* = (-i/\sqrt{2})\psi_2$ ,  $\Omega = 0$ , ou a eq. 3.26, elimina  $A_1$  em termos dos campos de matéria:

$$A_1(x) = -\frac{\sqrt{2}}{a} \int d^2y K(x-y)\psi_2(y)\psi_2^*(y) \quad (3.54)$$

e  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  eliminam  $\psi_1$  e  $\psi_1^*$ :

$$\psi_1 = -i\sqrt{2} \int d^2y K(x-y)\mathcal{D}_1^y\psi_2(y) \quad (3.55)$$

$$\psi_1^* = i\sqrt{2} \int d^2y K(x-y)\tilde{\mathcal{D}}_1^y\psi_2^*(y), \quad (3.56)$$

com  $A_1$  dado pela eq. 3.54.

Os únicos campos independentes que sobram são  $\psi_2$  e  $\psi_2^*$  e, novamente, a distribuição  $K(x-y)$  aparece devido às condições de contorno.

A hamiltoniana na frente de onda então fica sendo

$$H^{l.f.} = \frac{1}{2} \int d^2x [\psi_2^*(\mathcal{D}_1\psi_1) + (\tilde{\mathcal{D}}_1\psi_1^*)\psi_2], \quad (3.57)$$

que também pode ser escrita como

$$H^{l.f.} = \frac{1}{2} \int d^2x [\psi_2^*(\partial_1\psi_1) + (\partial_1\psi_1^*)\psi_2 - 2aA_1\partial_-A_+], \quad (3.58)$$

onde agora se reconhece claramente que o último termo é o termo de Chern-Simons, com a condição  $A_- = 0$ , a menos de uma integração por partes. De novo, a hamiltoniana tem um aparência mais simples que a de tempos iguais, mas é não-local e tem um potencial de sexta potência (devido ao fato de  $\Sigma$  eliminar  $\psi_1$  em termos de uma expressão que contém  $\psi_2$  três vezes, eq. 3.55, e isto multiplicar  $A_1$ , que contém duas, eq. 3.54, e o próprio  $\psi_2$  na hamiltoniana).

### 3.4 Alguns parênteses básicos e auto-consistência

Podemos agora calcular os parênteses de Dirac entre os campos:

$$\{\psi_2, \psi_2\}_D = \{\psi_2^*, \psi_2^*\}_D = 0 \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \{\psi_2, \psi_2^*\}_D &= - \int d^2u d^2v \{\psi_2, T_2\} C_{24}^{-1} \{T_4, \psi_2^*\} = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \delta^2(x-y) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\{\psi_2, \pi_2\}_D = \frac{1}{2} \delta^2(x-y) \quad (3.61)$$

$$\{\psi_2, j^+\}_D = -i\psi_2 \delta^2(x-y) \quad (3.62)$$

$$\{\psi_2, A_1\}_D = -\frac{i}{a} \psi_2(x) K(x-y) \quad (3.63)$$

$$\{j^+, j^+\}_D = 0 \quad (3.64)$$

$$\{A_1, A_1\}_D = 0. \quad (3.65)$$

Notemos que a densidade de carga comuta com ela mesma, e que a eq. 3.60 fornece um comutador local, contrastando com que vimos anteriormente para bósons. O campo  $\hat{\psi}_2$  é definido da mesma maneira que  $\hat{\phi}$  no Capítulo anterior, ou seja

$$\hat{\psi}_2 = e^{i\Lambda} \psi_2 \quad (3.66)$$

$$\hat{\psi}_2^* = e^{-i\Lambda} \psi_2^* \quad (3.67)$$

$$\Lambda(x) = \frac{1}{8a} \int d^2y \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(x^1 - y^1) j^+(y) \quad (3.68)$$

e  $j^+$  vem da eq. 3.26. Então a eq. 3.64 muda a forma da eq. 2.80 para

$$[\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2]_{\pm} = e^{i\Lambda(x)} [\psi_2, \psi_2]_{\pm}(y) - (x \leftrightarrow y) \quad (3.69)$$

onde  $[f, g]_{\pm}$  denotam comutador ou anti-comutador (estamos quantizando um sistema de campos fermiônicos, e os parênteses de Dirac devem corresponder a estes últimos).

Usando a eq. 3.62 e a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, obtemos que

$$[\hat{\psi}_2, \hat{\psi}_2]_+ = 0, \quad (3.70)$$

o que se fosse obtido a tempos iguais seria inequivocamente o anticomutador de um campo fermiônico. Aqui, este resultado não é conclusivo, pois não sabemos que estatística significa um anti-comutador igual a zero *na frente de onda*.

Mostraremos agora a auto-consistência calculando a equação de Hamilton para  $\psi_2$ :

$$\begin{aligned} \partial_+ \psi_2 &= \{\psi_2, H\}_D = \\ &= - \int d^2 u d^2 v \left[ \{\psi_2, \pi_2\} \left( C_{23}^{-1} \{\pi_1^*, H\} + C_{24}^{-1} \{\pi_2^*, H\} \right) \right. \\ &\quad \left. + \{\psi_2, \Omega\} \left( C_{101}^{-1} \{\pi_1, H\} + C_{103}^{-1} \{\pi_1^*, H\} + C_{106}^{-1} \{\pi^1, H\} \right) \right]. \end{aligned}$$

Usando

$$\{\pi_1, H\} = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{D}}_1 \psi_2^*(x) = i\sqrt{2} \partial_- \psi_1(x) \quad (3.71)$$

$$\{\pi_2^*, H\} = -\frac{1}{2} \mathcal{D}_1 \psi_1(x) \quad (3.72)$$

$$\{\pi^1, H\} = \frac{1}{2} j^1(x) = -a \partial_- A_+(x) \quad (3.73)$$

e os elementos de  $C^{-1}$  do Apêndice D, obtemos

$$\partial_+ \psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_1 \psi_1 - i A_+ \psi_2, \quad (3.74)$$

que reproduz a eq. 3.24.



### 3.5 Algumas relações de invariância relativística

O tensor densidade de energia-momento canônico é obtido da densidade de lagrangeana da maneira usual:

$$\theta_c^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\psi_\beta^*(\gamma^0\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\partial^\nu\psi_\alpha - \frac{i}{2}\psi_\beta(\gamma^0\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\partial^\nu\psi_\alpha^* + a\epsilon^{\sigma\mu\rho}A_\sigma\partial^\nu A_\rho - g^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (3.75)$$

As componentes na frente de onda correspondentes à densidade de momento são

$$\theta_c^{++} = \pi_2\partial_-\psi_2 + \pi_2^*\partial_-\psi_2^* = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_2^*\partial_-\psi_2 - \psi_2\partial_-\psi_2^*) \quad (3.76)$$

$$\theta_c^{+1} = -\pi_2\partial_1\psi_2 - \pi_2^*\partial_1\psi_2^* = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_2^*\partial_1\psi_2 - \psi_2\partial_1\psi_2^*) \quad (3.77)$$

$$\theta_c^{+-} = \frac{1}{2}[\psi_2^*(\mathcal{D}_1\psi_1) + (\bar{\mathcal{D}}_1\psi_1^*)\psi_2] = \mathcal{H}, \quad (3.78)$$

onde na última eq. desprezamos um termo de superfície. Os geradores

$$P^\mu = \int d^2x\theta_c^{+\mu} \quad (3.79)$$

são conservados e é fácil mostrar (fazendo integrações por partes, usando as condições de contorno, os vínculos e os parênteses já obtidos) que eles geram as translações:

$$\{\psi_2, P_\mu\}_D = \partial_\mu\psi_2 \quad (3.80)$$

$$\{\psi_2^*, P_\mu\}_D = \partial_\mu\psi_2^* \quad (3.81)$$

A invariância da Langrangeana por transformações de Lorentz resulta na corrente (conservada na camada de massa)

$$J^{\mu\rho\sigma} = (x^\rho\theta_c^{\mu\nu} - x^\sigma\theta_c^{\mu\rho}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(\Sigma^{\rho\sigma})_\lambda^\nu A^\lambda - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha)}(\Pi^{\rho\sigma})_{\alpha\beta}\psi_\beta - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_\alpha^*)}(\Pi^{\rho\sigma})_{\alpha\beta}\psi_\beta^* \quad (3.82)$$

onde o termo envolvendo  $A^\lambda$  (ou  $\psi$  e  $\psi^*$ ) resulta das propriedades deste vetor (ou espinor) por transformações de Lorentz, sendo as matrizes envolvidas dadas por (vide por exemplo [41])

$$(\Sigma_{\rho\sigma})_{\nu\lambda} = (g_{\rho\lambda}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\lambda}) \quad (3.83)$$

$$(\Pi^{\rho\sigma})_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)_{\alpha\beta}. \quad (3.84)$$

Podemos então calcular os geradores das transformações de Lorentz na frente de onda:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu} &\equiv \int d^2x J^{+\mu\nu} = \\ &= \int d^2x \left\{ (x^\mu\theta_c^{+\nu} - x^\nu\theta_c^{+\mu}) - (A^\mu\pi^\nu - A^\nu\pi^\mu) - \frac{i}{4\sqrt{2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\psi_2^*(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)_{2\beta}\psi_2 - c.c.] \right\}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

os quais no calibre do cone de luz se escrevem

$$M^{-1} = \int d^2x \left[ x^-\theta_c^{+1} - x^1\theta_c^{+-} - aA_1^2 + \frac{1}{4}(\psi_2^*\psi_1 + \psi_1^*\psi_2 + 2\psi_2\psi_2^*) \right] \quad (3.86)$$

$$M^{+1} = x^+P^1 - \int d^2x x^1\theta_c^{++} \quad (3.87)$$

$$M^{+-} = x^+P^- - \int d^2x x^-\theta_c^{++}. \quad (3.88)$$

Com estes geradores calculados, podemos verificar explicitamente o fechamento da álgebra, dada por (ver por exemplo [33, 34, 35])

$$\{P_\mu, P_\nu\}_D = 0 \quad (3.89)$$

$$\{M_{\mu\nu}, P_\rho\}_D = g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu \quad (3.90)$$

$$\{M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\}_D = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \quad (3.91)$$

O cálculo é direto porém longo, sendo a álgebra finalmente verificada. Como mostramos que as equações de Lagrange estão contidas no formalismo hamiltoniano, podemos usá-las

livremente, assim como as condições de contorno. Alguns resultados intermediários úteis são

$$\begin{aligned} \{\theta_c^{++}, \theta_c^{+1}\}_D &= \frac{i}{2\sqrt{2}} \left\{ [\partial_- \psi_2(x) \psi_2^*(y) - \partial_- \psi_2^*(x) \psi_2(y)] \partial_1^y \delta^2(x-y) \right. \\ &\quad + [\psi_2(x) \partial_1 \psi_2^*(y) - \psi_2^*(x) \partial_1 \psi_2(y)] \partial_-^x \delta^2(x-y) \\ &\quad + [\partial_- \psi_2^*(x) \partial_1 \psi_2(y) - \partial_- \psi_2(x) \partial_1 \psi_2^*(y)] \delta^2(x-y) \\ &\quad \left. + [\psi_2^*(x) \psi_2(y) - \psi_2(x) \psi_2^*(y)] \partial_-^x \partial_1^y \delta^2(x-y) \right\} \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\{\theta_c^{++}, \theta_c^{+-}\}_D = \frac{1}{4} \left\{ \mathcal{D}_1 \psi_1(y) \partial_-^x [\psi_2^*(x) \delta^2(x-y)] + c.c. \right\} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \{\theta_c^{++}, \theta_c^{++}\}_D &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \left\{ [\partial_- \psi_2^*(x) \psi_2(y) - \partial_- \psi_2(x) \psi_2^*(y)] \partial_-^x \delta^2(x-y) \right. \\ &\quad + [\psi_2^*(x) \partial_- \psi_2(y) - \psi_2(x) \partial_- \psi_2^*(y)] \partial_-^y \delta^2(x-y) \\ &\quad + [\partial_- \psi_2^*(x) \partial_- \psi_2(y) - \partial_- \psi_2(x) \partial_- \psi_2^*(y)] \delta^2(x-y) \\ &\quad \left. + [\psi_2^*(x) \psi_2(y) - \psi_2(x) \psi_2^*(y)] \partial_-^x \partial_-^y \delta^2(x-y) \right\} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\{\theta^{++}, A_1^2\}_D = 2A_1(y) \partial_- A_1(x) K(x-y). \quad (3.95)$$

# Conclusões

Foram estudados campos relativísticos em  $(2+1)$  dimensões com termo de Chern-Simons de calibre minimamente acoplado a um campo escalar ou a um campo espinorial, ambos sem massa, nas coordenadas da frente de onda, onde 4 (e não 3 como na forma instantânea) dos 6 geradores do grupo de Poincaré são cinemáticos e onde o estado de vácuo de uma teoria muitas vezes corresponde ao vácuo perturbativo. Resulta que na frente de onda sempre temos um sistema vinculado, e usamos então o método de Dirac, descrito no apêndice A. Além das observações sobre o método da seção A.2, há o problema prático de se inverter a matriz dos parênteses de Poisson entre os vínculos, o qual é tratado no Apêndice D.

Obtidos os parênteses de Dirac, os campos de calibre são completamente eliminados da teoria, restando apenas os campos de matéria. No caso do campo espinorial, sobra apenas uma de duas componentes e sua conjugada. A Hamiltoniana em termos destes campos é não local e o potencial de auto-interação é de sexta potência. Foi mostrada a auto-consistência da teoria, a partir do que podemos usar as eqs. de Lagrange livremente.

Para o campo escalar, tentamos obter indícios de estatística não usual (anyônica), a qual é naturalmente proposta em 2 dimensões espaciais. Não foi possível obtê-los, o que não quer dizer que não estejam presentes ou que na frente de onda não possam ser obtidos de alguma outra maneira. Há na literatura a tempos iguais uma controvérsia sobre a validade deste método: a construção a tempos iguais [8, 12] citada na seção 2.4 não leva a uma Hamiltoniana sem interação para o campo transformado  $\hat{\phi}$ , ao contrário do que é afirmado, porque há no integrando uma função multivalente. Para integrarmos, devemos fazer um corte, e deste corte vêm termos indesejáveis proporcionais à delta [10, 11]. Já na frente de onda, a Hamiltoniana é livre, cf. eq. 2.64, mas não encontramos o fator de fase multivalente que alegadamente daria origem à estatística fracionária.

Ainda para o campo escalar, foi derivada uma equação para o vácuo clássico, 2.90, cuja forma da solução foi facilmente obtida, 2.93. Pelo argumento que se segue, não conseguimos encontrar uma solução baseada num *ansatz* simples. Além disto, fornecemos as expansões em momentos para os operadores de campo escalar na frente de onda, e as relações de comutação existentes entre os operadores de criação e destruição que figuram nestas expansões. No Apêndice C, mostramos a abordagem invariante de calibre, que evita algumas dificuldades vindas da fixação de calibre.

Para o campo espinorial persistem os problemas acima. Além disto, é encontrada na ref. [10] a observação de que o conceito de helicidade degenera em 2+1 dimensões e portanto todas as partículas massivas são escalares. De fato, das duas componentes do espinor encontramos que apenas uma participa da dinâmica do sistema. Checamos a invariância relativística para os geradores obtidos na seção 3.5, na forma das relações de fechamento do grupo de Poincaré, 3.89 e seguintes.

Faltaria ainda investigar soluções tipo vórtice, que são encontradas na literatura, a tempos iguais, como possuindo estatística fracionária. Uma vez obtido o vácuo clássico, poder-se-ia quantizar o sistema introduzindo flutuações quânticas e checar se já no vácuo clássico temos embutidos os anyons.

Nas referências encontramos afirmações de que o campo  $\hat{\phi}$  é apenas um artifício matemático, que a interação de longo alcance do tipo Aharonov-Bohm [30] é intrínseca à Física em 2 dimensões espaciais e não possui relação com a estatística quântica *a priori*, que a estatística fracionária não aparece de forma natural numa teoria de campos relativística porque a exclusão de pontos do espaço de configurações é artificial [10], que existe anomalia rotacional independente de anyons [6], e que esta é apenas um artefato de calibre [2]. Entretanto, é prematuro concluir sobre a existência ou não de anyons, pois a teoria é não-linear e não-local e há muito pouco estabelecido sobre o assunto.

# Apêndice A

## Método de Dirac para sistemas vinculados

Para tratar sistemas de campos vinculados usando quantização canônica, é preciso usar algum método que evite o problema de se ter uma ou mais relações entre os campos e os momentos canonicamente conjugados, confinando a evolução dinâmica do sistema a uma dada região do espaço de fase. Numa abordagem mais ingênua [38, 39, 40], eliminam-se os campos com tais problemas simplesmente substituindo o vínculo na hamiltoniana e eliminando o campo da teoria, escrevendo-o em função dos outros campos e momentos, e estudando a evolução do sistema na região em que ela ocorre.

O tratamento completo [32, 33, 34, 35] consiste numa extensão do método dos multiplicadores de Lagrange para o formalismo de parênteses de Poisson. O objetivo do método é definir novos parênteses que forneçam a dinâmica do sistema no espaço de fase com graus de liberdade suprimidos pelos vínculos, de maneira que estes sejam obedecidos automaticamente.

## A.1 Descrição do método e definição dos parênteses de Dirac

De maneira resumida, o método é o seguinte: escrevemos uma hamiltoniana preliminar como

$$H' = H_c + \int d^3x u^i \chi_i \quad (\text{A.1})$$

onde  $H_c$  é a hamiltoniana canônica obtida pelo procedimento padrão,  $\chi_i$  são  $M$  vínculos (chamados de vínculos primários) e  $u^i$  são campos multiplicadores de Lagrange. A seguir, definimos os parênteses de Poisson *sem levar em conta os vínculos* (em outras palavras: os vínculos são *fracamente nulos*, o que se denota por  $\chi_i \approx 0$ ; dizer que uma quantidade é fracamente nula é dizer que somente na presença dos vínculos ela se anula) e exigimos que os vínculos primários sejam constantes no tempo, isto é, que

$$\dot{\chi}_i = \{\chi_i, H'(t)\} \approx 0. \quad (\text{A.2})$$

Isto pode gerar  $N$  novos vínculos (secundários)  $\Omega_i$ . Definimos

$$H'' = H' + \int d^3x v^i \Omega_i \quad (\text{A.3})$$

e repetimos o procedimento até não gerarmos mais vínculos. De todos os vínculos (primários ou secundários), os que têm parênteses de Poisson nulos com todos os outros são chamados de primeira classe, enquanto os restantes são de segunda classe. A existência de vínculos de primeira classe reflete simetrias da teoria: o sistema linear que determina os multiplicadores de Lagrange não tem solução única (diz-se que há liberdade de calibre, ou ainda, a matriz que determina este sistema linear é singular). Seria desejável que tivesse, para que pudéssemos obter resultados práticos (precisaremos de  $C^{-1}$  adiante). Isto aconteceria se todos os vínculos fossem de segunda classe, o que corresponde escolher uma solução do sistema linear, eliminando a liberdade de calibre. Adicionamos um novo



vínculo para cada um dos  $P$  vínculos de primeira classe encontrados (*vínculo de fixação de calibre*, denotado por  $\Gamma_i$ ), de maneira a fazer com que todos se tornem de segunda classe em relação ao novo conjunto de vínculos. Embora a teoria tenha simetrias no espaço de fase, escolhemos um calibre determinado para obter resultados práticos. Finalmente, definimos os *parênteses de Dirac* como sendo

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \int d^3u d^3v \{f, \Xi_i(u)\} C_{ij}^{-1}(u, v) \{\Xi_j(v), g\} \quad (\text{A.4})$$

onde  $\Xi_i$  é um vínculo qualquer do conjunto

$$\{\chi_j, j = 1, \dots, M; \Omega_k, k = 1, \dots, N; \Gamma_l, l = 1, \dots, P\} \quad (\text{A.5})$$

(primário, secundário, ou fixação de calibre), e  $C_{ij}^{-1}$  é a inversa (a qual sabemos que existe, por construção) da matriz dada por

$$C_{ij} = \{\Xi_i, \Xi_j\} \quad (\text{A.6})$$

Estes parênteses são construídos propositadamente para que

$$\{f, \Xi_i\}_D = 0, \quad (\text{A.7})$$

para qualquer quantidade dinâmica  $f$ , ou seja, para todos os efeitos práticos, para que possamos fazer  $\Xi_i = 0$  fortemente. As equações de Hamilton agora envolvem parênteses de Dirac em vez dos de Poisson, e devemos, como requerimento de auto-consistência, recuperar as equações de movimento de Lagrange. Usa-se os parênteses de Dirac, e não os de Poisson, para proceder à quantização canônica, da maneira usual.

## A.2 Comentários sobre o método

Neste trabalho, é relevante o fato de que podemos implementar vínculos em passos. Podemos definir parênteses intermediários:

$$\{f, g\}^* = \{f, g\} - \int d^3u d^3v \{f, \Theta_i(u)\} C_{ij}^{-1}(u, v) \{\Theta_j(v), g\}, \quad (\text{A.8})$$

e a seguir, definimos novos parênteses baseados nos parênteses intermediários:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\}^* - \int d^3u d^3v \{f, \Sigma_i(u)\}^* D_{ij}^{-1}(u, v) \{\Sigma_j(v), g\}^*. \quad (\text{A.9})$$

O cálculo de  $C$  é restrito a alguns vínculos ( $\Theta_i$ ) e o de  $D$  é restrito aos restantes ( $\Sigma_i$ ), e verifica-se diretamente que os parênteses finais são idênticos aos que se obtêm num só passo. A generalização para um número qualquer de passos é imediata. Isto é útil porque, na prática, freqüentemente os vínculos eliminam pares de campos e momentos canonicamente conjugados, ou conjuntos destes pares, e, eventualmente, os parênteses modificados para algum vínculo coincidem com os parênteses de Poisson (vínculo trivial). Desta forma, escolhendo cautelosamente a implementação dos vínculos obteremos resultados relacionados a simetrias do espaço de fase da teoria, e de maneira menos trabalhosa.

Podemos, ainda, fazer um formalismo misto entre o método de Dirac acima e o método *naïve* citado no início deste Apêndice: implementamos alguns vínculos pelo método de Dirac e quanto aos outros, que permanecem de primeira classe, restringimos o espaço de Fock da versão quantizada da teoria ao setor em que as componentes de Fourier de freqüências positivas destes vínculos, aplicados a estados fisicamente aceitáveis, sejam nulos:

$$(\Lambda_i)^+ |phys\rangle = 0, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\Lambda_i$  denota os vínculos que foram deixados de lado. Ou seja, em valores esperados,

obtemos que

$$\langle \Lambda_i \rangle = 0 \tag{A.11}$$

respeitando assim o princípio de equivalência (método de Gupta-Bleuler). Para detalhes sobre isto, ver por exemplo [37] e também [24]

# Apêndice B

## Comentários sobre distribuições

Neste trabalho assumimos, sem provar, vários fatos sobre distribuições. Iremos neste apêndice definir de maneira consistente algumas distribuições e fornecer uma motivação para estes fatos. Não daremos uma abordagem matemática completa e não distinguiremos os conceitos de função e distribuição a não ser que se faça necessário. Estaremos supondo familiaridade com as propriedades da função delta de Dirac,  $\delta(x)$ , e com a função degrau de Heaviside,  $\theta(x)$ .

### B.1 Definições e relações úteis

A delta de Dirac pode ser escrita na forma complexa como

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha e^{-i\alpha x}. \quad (\text{B.1})$$

Usaremos as abreviações

$$\delta^2(\mathbf{x}) \equiv \delta(x^1)\delta(x^2) \quad (\text{B. 2})$$

$$\delta^2(x) \equiv \delta(x^-)\delta(x^1). \quad (\text{B. 3})$$

A distribuição  $\epsilon(x)$ , também chamada de função sinal (*signum*) é dada por

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

$\epsilon(x)$  também pode ser escrita na forma complexa

$$\epsilon(x) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-i\alpha x}, \quad (\text{B.5})$$

onde  $\mathcal{P}$  denota valor principal da integral. Notemos que a escolha de  $\epsilon(0)$  é relevante quando manipulamos certas integrais com integração por partes e condições de contorno. A  $\epsilon(x)$  assim definida é uma função ímpar e se relaciona com a delta, que é par, através de

$$2\delta(x) = \frac{d\epsilon(x)}{dx}. \quad (\text{B.6})$$

$\epsilon(x)$  também pode ser escrita em termos da função degrau como

$$\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x) \quad (\text{B.7})$$

$$\theta(x) = \frac{1 + \epsilon(x)}{2}. \quad (\text{B.8})$$

São úteis para o formalismo a **tempos iguais** as relações no plano  $(x^1, x^2)$

$$\Theta(\mathbf{x}) \equiv \arctan(x_2/x_1) \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_i \Theta(\mathbf{x}) = -\epsilon_{ij} \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\epsilon_{ij} \partial_i \partial_j \Theta(\mathbf{x}) = \pi \delta^2(\mathbf{x}) \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_1 \partial_2 [\epsilon(x^1) \epsilon(x^2)] = 4\delta^2(\mathbf{x}) \quad (\text{B.12})$$

$$\nabla^2 \ln(|\mathbf{x}|^2) = 4\pi \delta^2(\mathbf{x}) \quad (\text{B.13})$$

$$\nabla \ln(|\mathbf{x}|^2) = 2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \quad (\text{B.14})$$

onde usamos a notação vetorial convencional e  $i, j = 1, 2$ . Notemos as várias maneiras de representar a delta, nem todas equivalentes entre si, diferindo por termos que desaparecem nas derivadas, os quais correspondem a diferentes condições de contorno para as funções representadas por cada uma delas.

Na frente de onda, encontramos a distribuição  $K(x)$ , no plano  $x \equiv (x^-, x^1)$ , é dada por

$$K(x) = -\frac{1}{4}\epsilon(x^-)\delta(x^1). \quad (\text{B.15})$$

Segue das relações acima que

$$\partial_- K(x) = -\frac{1}{2}\delta^2(x). \quad (\text{B.16})$$

## B.2 Expansões no espaço dos momentos

Iremos obter 2.55, já na forma de comutador, usando a expansão da versão quantizada de  $\phi$ , eq. 2.101. Usando-as e a definição de  $\Lambda$  em termos de integrais de  $j^+$ , 2.60, obtemos após o ordenamento normal

$$\begin{aligned} \Lambda(x) = & -\frac{1}{16\pi^2 a} \int d^2 k \int d^2 k' \theta(k^+) \theta(k'^+) \left\{ \left[ b^\dagger(k) b(k') - a^\dagger(k) a(k') \right] \frac{e^{i[(k^+ - k'^+)x^- - (k^1 - k'^1)x^1]}}{(k^+ - k'^+)(k^1 - k'^1)} \right. \\ & \left. + \left[ a(k) b(k') - b(k) a(k') \right] \frac{e^{-i[(k^+ + k'^+)x^- - (k^1 + k'^1)x^1]}}{(k^+ + k'^+)(k^1 + k'^1)} \right\} + c.c., \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

onde *c.c.* denota o conjugado hermitiano do termo anterior. Após longa porém direta manipulação, comutando operadores, resolvendo algumas integrais e reconhecendo definições de distribuições conhecidas, B. 1 e B. 5, chega-se a

$$\begin{aligned} [\phi, \Lambda] &= -\frac{1}{32\pi a} \epsilon(x^1 - y^1) \epsilon(x^- - y^-) \int d^2 k \frac{\theta(k^+)}{\sqrt{2k^+}} \left[ a(k) e^{-i(k^+ y^- - k^1 x^1)} + b^\dagger(k) e^{i(k^+ y^- - k^1 x^1)} \right. \\ & \quad \left. + 2 \left( a(k) e^{-i(k^+ x^- - k^1 x^1)} + b^\dagger(k) e^{i(k^+ x^- - k^1 x^1)} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{16a} \epsilon(x^1 - y^1) \epsilon(x^- - y^-) [\phi(y^-, x^1) - 2\phi(x)], \quad (\text{B.18}) \end{aligned}$$

e, tomando a derivada parcial em relação a  $y^1$  da expressão acima, obtemos o comutador que resulta de 2.55. Isto confirma a eq. 2.55 e nossas suposições sobre o comportamento das distribuições envolvidas no cálculo.

# Apêndice C

## Abordagem invariante de calibre para bósons

Seguindo o trabalho de Banerjee [13], vamos abrir mão da fixação de calibre, eq. 2.35, na tentativa de obter efeitos anyônicos numa abordagem invariante de calibre. A tempos iguais, sabemos que isto tem a vantagem de tornar explícito o que é artefato de calibre e o que não é, esclarecendo a questão dos anyons.

Neste caso, os vínculos de segunda classe são  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , apenas. A matriz dos parênteses de Poisson é a própria eq. 2.42, com a ressalva de que agora não podemos usar  $A_- \approx 0$ :

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2a & i\phi^* & i\phi \\ 2a & 0 & 0 & 0 \\ i\phi^* & 0 & 0 & -2\tilde{D}_-^x \\ -i\phi & 0 & -2D_-^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x - y). \quad (\text{C.1})$$

A presença de derivadas covariantes dificulta a obtenção da inversa, mas não a impossibilita. Usaremos o mesmo método do Cap. 3, detalhado no Apêndice D, para obtê-la com o mínimo de cálculos possível.

Iremos nos aproveitar do fato que vários elementos são nulos (ou seja, a matriz é esparsa). Usando o pacote *linalg* do Maple 5 release 3, ou mesmo calculando à mão, podemos



calcular a inversa *da parte discreta* da matriz acima. Ou seja, no sentido convencional, da álgebra linear, e não segundo a definição 2.38. Este passo intermediário nos permite, então, saber quais elementos da inversa que procuramos são nulos: são os mesmos que são nulos na inversa convencional.

Adicionando a esta informação a simetria da matriz, podemos, portanto, concluir que a inversa  $D^{-1}$  tem a forma

$$D^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & a(x, y) & 0 & 0 \\ -a(y, x) & b(x, y) & c(x, y) & d(x, y) \\ 0 & -c(y, x) & 0 & e(x, y) \\ 0 & -d(y, x) & -e(y, x) & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

e conseguimos reduzir de 16 para 5 o número de funções desconhecidas. O resto segue como usual: usando a definição, multiplicamos a matriz pela inversa, integramos e igualamos à identidade vezes a delta de Dirac, donde obtemos equações para as 5 funções. (Este método é especialmente útil no caso de férmions, onde mais graus de liberdade aumentam a dimensão da matriz a ser invertida, apesar dela continuar a ser esparsa, o que reduz de 55 para 19 o número de elementos a calcular(vide Apêndice D).)

Do cálculo acima, resulta que a inversa é dada por

$$D^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -4a\partial_-^x & 0 & 0 \\ 4a\partial_-^x & [\phi^*(x)\phi(y)e^{\beta(y,x)} + \phi(x)\phi^*(y)e^{\beta(x,y)}] & 2ai\phi(x)e^{\beta(x,y)} & -2ai\phi^*(x)e^{-\beta(x,y)} \\ 0 & 2ai\phi(y)e^{-\beta(x,y)} & 0 & (2a)^2 e^{-\beta(x,y)} \\ 0 & -2ai\phi^*(y)e^{\beta(x,y)} & (2a)^2 e^{\beta(x,y)} & 0 \end{pmatrix} \frac{K(x-y)}{(2a)^2}, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$\beta(x, y) = 2i \int d^2z [K(y-z) - K(x-z)] A_-(z). \quad (\text{C.4})$$

Notemos que, na presença do vínculo  $A_- \approx 0$ , temos que  $\beta(x, y) = 0$ , e a inversa é exatamente 2.43, o que confirma nossos cálculos.

Calculamos então os parênteses de Dirac não-nulos:

$$\{\phi, \phi^*\}_D = e^{\beta(x,y)} K(x-y) \quad (\text{C. 5})$$

$$\{\phi, \pi\}_D = \frac{1}{2} \delta^2(x-y) \quad (\text{C. 6})$$

$$\{\phi, A_1\}_D = \frac{i}{2a} \phi(y) e^{-\beta(x,y)} K(x-y) \quad (\text{C. 7})$$

$$\{\phi, \pi^-\}_D = \frac{i}{2} \phi(y) e^{-\beta(x,y)} K(x-y) \quad (\text{C. 8})$$

$$\{\pi, \pi^*\}_D = \frac{1}{2} \tilde{D}_-^x \delta^2(x-y) \quad (\text{C. 9})$$

$$\{\pi^*, A_1\}_D = \frac{i}{4a} \delta^2(x-y) \phi(y) \quad (\text{C. 10})$$

$$\{A_-, A_1\}_D = \frac{1}{2a} \delta^2(x-y) \quad (\text{C. 11})$$

$$\{A_1, A_1\}_D = \frac{1}{(2a)^2} [\phi^*(x) \phi(y) e^{\beta(y,x)} + \phi(x) \phi^*(y) e^{\beta(x,y)}] K(x-y), \quad (\text{C. 12})$$

e outros obtidos destes por conjugação. Notemos que os parênteses C. 6, que são essencialmente o comutador na frente de onda da ref. [3], os quais dão a dinâmica do sistema, não se alteraram (vide eq. 2.53).

A Hamiltoniana, após a implementação destes vínculos é

$$H = \int d^2x [(\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi) - A_+ \Omega + u_+ \pi^+ + v \Omega], \quad (\text{C.13})$$

e obtemos os multiplicadores  $v$  e  $u_+$  simplesmente calculando as equações de Hamilton para  $A_+$  e  $A_-$ , e comparando com a eq. de Lagrange

$$\partial_+ A_- - \partial_- A_+ = \frac{1}{2a} j^1 \quad (\text{C.14})$$

Obtemos que

$$\{A_+, H\}_D = \partial_+ A_+ = u_+ \quad (\text{C.15})$$

e

$$\{A_-, H\}_D = \partial_+ A_- = \partial_- A_+ + \frac{1}{2a} j^1 - \partial_- v \quad (\text{C.16})$$

e portanto

$$v = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$u^+ = \partial_+ A_+, \quad (\text{C.18})$$

e agora a Hamiltoniana se escreve

$$H = \int d^2x \left[ (\mathcal{D}_1 \phi)(\tilde{\mathcal{D}}_1 \phi) - A_+ \Omega + \pi^+ \partial_+ A_+ \right]. \quad (\text{C.19})$$

Deste ponto em diante, seguiríamos a discussão a tempos iguais: na ref [13] é construído o espaço de Fock, onde são verificados estados multivalentes com estatística fracionária e Hamiltoniana livre. Mas, na frente de onda, incorremos em dificuldades análogas às da tentativa com fixação de calibre (vide Cap. 2). A abordagem invariante de calibre não melhora este problema.

# Apêndice D

## Inversão de matrizes esparsas com índices contínuos

Iremos neste Apêndice mostrar os detalhes do método de obtenção da inversa da matriz 3.52. O método se aproveita da matriz ser esparsa (ou seja, a maior parte de seus elementos são zero), da simetria da matriz, e dos métodos de computação algébrica disponíveis até o momento.

### D.1 Definição do problema

Usando o Maple 5 release 3, com o pacote linalg, podemos apenas calcular a matriz ‘inversa’ da 3.52. Esta inversa não é a que queremos, pois ela só leva em conta os índices discretos, aqueles convencionais da álgebra linear. A inversa que queremos é definida pela eq. 2.38, e temos que considerar, além das somas, as integrações envolvidas, mas não existe, nesta linguagem, comandos prontos para obter a inversa que queremos.

Por outro lado, é possível, em princípio, obter da máquina o que queremos: basta implementar rotinas que façam o trabalho que faríamos à mão, ou seja, multiplicar a inversa pela matriz, fazer as integrações, igualar à identidade, e resolver o sistema para os elementos da inversa. Mas o problema aqui é o tamanho da matriz: se, no Capítulo 2, as matrizes podiam ser invertidas à mão, agora uma matriz  $10 \times 10$  é virtualmente

impossível de inverter, pois iria resultar num sistema de de equações a 100 incógnitas. A propriedade de antissimetria da matriz,

$$C_{ij}^{-1}(x, y) = -C_{ji}^{-1}(y, x) = \delta_{ij}\delta^2(x - y), \quad (\text{D.1})$$

apenas reduz este número para 55, mas ainda não é suficiente. Na prática, uma tentativa de obter estes 55 elementos usando a ‘força bruta’ mostra que um computador rápido nos padrões atuais levaria vários dias para obtê-los, pois isto requer os cálculos da álgebra linear de uma matriz grande, com os cálculos funcionais desta mesma matriz aninhados em cada elemento, envolvendo integrais. Ou seja, na máquina não é muito melhor que à mão. Devemos, portanto, dar mais algum tratamento aos nossos dados de entrada.

## D.2 O método

Baseados na experiência do Capítulo 2, ou de qualquer cálculo deste tipo feito à mão, notamos que a inversa tem vários elementos nulos, pois a matriz inicial também tinha. Se conseguirmos saber quais são nulos, reduzimos o número de elementos a calcular. Agora usamos a informação de que dispúnhamos no começo: a ‘inversa’ do início do Apêndice tem os zeros nas mesmas posições que os zeros da inversa que queremos, pois a parte dos índices discretos foi feita corretamente pelo Maple. Apenas as expressões para os elementos é que estão incorretas. Então usamos como incógnita uma inversa esparsa, que o Maple fornece, bastando para isto definir uma matriz com os zeros nas mesmas posições que os da ‘inversa’. Esta matriz é, em expressão gerada pelo Maple (com a notação

$b = C^{-1}$ ),

$$\begin{bmatrix}
 b_{1,1} & 0 & b_{1,3} & b_{1,4} & b_{1,5} & b_{1,6} & b_{1,7} & 0 & b_{1,9} & b_{1,10} \\
 0 & 0 & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 & b_{3,5} & b_{3,6} & 0 & b_{3,8} & b_{3,9} & b_{3,10} \\
 b_{4,1} & b_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_{5,1} & 0 & b_{5,3} & 0 & 0 & b_{5,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_{6,1} & 0 & b_{6,3} & 0 & b_{6,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{6,10} \\
 b_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_{8,1} & 0 & b_{8,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_{9,1} & 0 & b_{9,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{9,10} \\
 b_{10,1} & 0 & b_{10,3} & 0 & 0 & b_{10,6} & 0 & 0 & b_{10,9} & 0
 \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

Ainda no Maple, multiplicamos esta matriz pela 3.52, integramos, subtraímos a identidade, e igualamos a zero. O Maple faz este trabalho em minutos, e o resultado é uma matriz  $10 \times 10$  de equações diferenciais para os  $b_{ij}$ ; não nulos, que, descontando os antisimétricos, são 19 independentes. Poderíamos resolvê-las no Maple, mas estas são bastante simples:

- várias são  $0 = 0$ : são aqueles elementos que eliminamos de saída;
- algumas envolvem apenas um dos elementos e têm solução imediata;
- outras envolvem 2 a 6 elementos, todos menos um saído de uma equação do caso acima, ou seja, são igualmente fáceis de resolver;
- umas poucas envolvem vários elementos dos dois casos acima, e a expressão do elemento da matriz que resulta é um pouco complicada;
- além disto, várias equações são conjugadas, bastando resolver apenas uma delas e tomar o conjugado para ter a solução da outra. Outras são iguais a menos de fatores

numéricos. Isto reduz para 10 o número de equações que iremos efetivamente resolver

Estas equações podem ser facilmente identificadas, resolvidas e checadas à mão em poucas horas, bem menos tempo do que a máquina faria pelo método da 'força bruta'.

### D.3 Os elementos da inversa

Notemos que não são todos os elementos necessários para os cálculos subsequentes. Resulta que apenas os mais simples serão usados. Por completeza, listaremos todos os elementos obtidos por este método. Como previsto, vários são pares de conjugados ou diferem por um fator numérico. Os elementos restantes são obtidos destes usando D. 1

$$b_{11}(x, y) = \frac{2}{a} \int d^2 z d^2 z' K(x-z) K(z-z') K(z'-y) \psi_2(z') \psi_2(z) \times [A_1(z) + A_1(z')] \quad (D. 3)$$

$$b_{13}(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{a} \int d^2 z \left\{ [i a \mathcal{D}_1^z \mathcal{D}_1^z K(y-z)] K(x-z) + i K(x-z) K(y-z) j^1(z) + \sqrt{2} \int d^2 z' K(x-z') K(z'-z) K(z-y) \psi_2(z') \psi_2^*(z) \right\} \times [A_1(z) + A_1(z')] \quad (D. 4)$$

$$b_{14}(x, y) = -\tilde{\mathcal{D}}_1^y K(x-y) \quad (D. 5)$$

$$b_{15}(x, y) = \frac{i}{a\sqrt{2}} K(x-y) \psi_2(y) \quad (D. 6)$$

$$b_{16}(x, y) = \frac{i}{a} \left\{ K(x-y) \psi_1(y) + \sqrt{2} \int d^2 z K(x-z) K(y-z) A_1(z) \psi_2(z) \right\} \quad (D. 7)$$

$$b_{17}(x, y) = -\sqrt{2} K(x-y) \quad (D. 8)$$

$$b_{19}(x, y) = 2i\sqrt{2} \int d^2 z K(x-z) K(y-z) A_1(z) \psi_2(z) \quad (D. 9)$$

$$b_{110}(x, y) = -\frac{i\sqrt{2}}{a} \int d^2 z K(x-z) K(y-z) \psi_2(z) \quad (D. 10)$$

$$b_{23}(x, y) = \mathcal{D}_1^x K(x-y) \quad (D. 11)$$

$$b_{24}(x, y) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \delta^2(x-y) \quad (D. 12)$$

$$b_{33}(x, y) = \frac{2}{a} \int d^2 z d^2 z' K(x-z) K(z-z') K(z'-y) \psi_2^*(z') \psi_2^*(z) \times [A_1(z) - A_1(z')] \quad (D. 13)$$

$$\times [A_1(z) - A_1(z')] \quad (D. 14)$$

$$b_{35}(x, y) = -\frac{i}{a\sqrt{2}}K(x-y)\psi_2^*(y) \quad (\text{D. 15})$$

$$b_{36}(x, y) = \frac{-i}{a} \left\{ K(x-y)\psi_1^*(y) + \sqrt{2} \int d^2z K(x-z)K(y-z)A_1(z)\psi_2^*(z) \right\} \quad (\text{D. 16})$$

$$b_{38}(x, y) = -\sqrt{2} K(x-y) \quad (\text{D. 17})$$

$$b_{39}(x, y) = -2i\sqrt{2} \int d^2z K(x-z)K(y-z)A_1(z)\psi_2^*(z) \quad (\text{D. 18})$$

$$b_{310}(x, y) = \frac{i\sqrt{2}}{a} \int d^2z K(x-z)K(y-z)\psi_2^*(z) \quad (\text{D. 19})$$

$$b_{56}(x, y) = \frac{1}{2a}\delta^2(x-y) \quad (\text{D. 20})$$

$$b_{610}(x, y) = -\frac{1}{a}K(x-y) \quad (\text{D. 21})$$

$$b_{910}(x, y) = 2K(x-y) \quad (\text{D. 22})$$



# Referências

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* 21, 392 (1949)
- [2] P. P. Srivastava, Light-Front Quantization of Dynamical Systems With Chern-Simons Term, ICTP-Trieste preprint, IC-305/94, [hep-th@xxx.lanl.gov/9412239](mailto:hep-th@xxx.lanl.gov); ver também *Europhys. Letts.* (1995)
- [3] S.J. Brodsky e H.C. Pauli, Schlading Lectures, SLAC-PUB- 5558/91; K.G. Wilson, *Nucl. Phys. B (proc. suppl.)* 17 (1990); P.P. Srivastava, Lectures, Proceedings XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, pgs. 154-192 (1993), *Soc. Bras. Fis.*; [hep-th@xxx.lanl.gov/9312064](mailto:hep-th@xxx.lanl.gov) e 9412204, 9412205; P. Srivastava, Quantum Field Theory on the Light-Front: an introduction (Monografia CBPF-MO-003/93); Light-Front Quantization of Field Theory, palestra dada no Simpósio de Física Teórica em comemoração ao 70 aniversário de Paulo Leal Ferreira no IFT, UNESP, São Paulo, agosto de 1995, IF-UERJ-63
- [4] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* 48, 975 (1982); *Ann. Phys.* 140, 372 (1982)
- [5] C. R. Hagen, *Ann. Phys.* 157, 342 (1984)
- [6] C. R. Hagen, *Phys. Rev. D* 31, 2135 (1985)
- [7] R. Mackenzie e F. Wilczek, *Int. J. Mod. Phys. A* 3, 2827 (1988)
- [8] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* 61, 517 (1988); G. W. Semenoff e P. Sodano, *Nucl. Phys. B*328, 753 (1989)

- [9] M. S. Swanson, Phys. Rev. D42, 552 (1990)
- [10] P. S. Gerbert, Int. J. Mod. Phys. A 6, 173 (1991)
- [11] S. Forte, Rev. Mod. Phys. 64, 193 (1992)
- [12] M. Carvalho, Quantização de Dirac da QED(2+1)d. com o Termo de Chern-Simons, Tese de Mestrado, CBPF, julho de 1992
- [13] R. Banerjee, Nuc. Phys. B390, 681 (1992)
- [14] K. Haller e E. Lim-Lombridás, Phys. Rev. D46, 1737 (1992)
- [15] K. Haller e E. Lim-Lombridás, hep-th/9407090
- [16] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 51, 605 (1983)
- [17] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983)
- [18] X. G. Wen, Phys. Rev. B 41 12838 (1990)
- [19] X. G. Wen, Phys Rev. Lett. 64 2206 (1990)
- [20] B. Blok e X. G. Wen, Phys. Rev B 43 8337 (1991)
- [21] M. Stone, Phys. Rev. B 42, 8399 (1990)
- [22] M. Stone, Int. J. Mod. Phys. B 5, 509 (1991)
- [23] S. Ouvry, Ideal Anyons, Mesoscopic Quantum Physics - Les Houches, Session LXI, 1994 - editores E. Akkermans, G. Montambaux e J.-L. Pichard, North-Holland, Amsterdam, PACS numbers: 03.65.-w, 05.30.-d, 11.10.-z, 05.70.Ce, IPNO/TH 94-76
- [24] P. P. Srivastava e N. A. Lemos, Phys. Rev. D15, 3568 (1977)
- [25] ver, por exemplo, P. P. Srivastava, Nuc. Phys. B16, 608 (1990)

- [26] P. P. Srivastava, On a Gauge Theory of Self-Dual Field and its Quantization, Phys. Lett. B234, 93 (1990); P. P. Srivastava e K. Tanaka, Self-Duality Condition in Chern-Simons Higgs in Classical and Quantum Systems: Foundation and Symetries, Proc. Second Intl. Wigner Symposium, Goslar, Alemanha, ed. H. B. Hoebner et al., World Scientific, Singapore, 1993.
- [27] P. P. Srivastava e K. Tanaka, On the Self-Duality condition in Chern-Simons Systems, preprint CERN-TH-5934/90; Phys. Lett. B234, 44 (1990); Phys. Lett. B256, 427 (1991)
- [28] R. Jackiw, K. Lee e E. J. Weinberg, Phys. Rev. D42, 3488 (1990)
- [29] R. Jackiw, High-temperature QCD, palestra dada no XVI Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu, MG, outubro de 1995, a ser publicado
- [30] ver por exemplo H. A. Wilson, Phys. Rev. 75, 309 (1949); A. S. Goldhaber, Phys. Rev. Lett. 36, 1122 (1976); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48, 1144 (1982); R. Jackiw, Phys. Rev. D29, 2375 (1984)
- [31] P. van Nieuwenhuizen, Canonical methods in quantized gauge field theories, Teylers lectures, Leyden University, junho de 1992
- [32] P. A. M. Dirac, Lectures in Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1964
- [33] S. A. Dias, Notas do curso de Eletromagnetismo ministrado no CBPF, no primeiro semestre de 1994
- [34] M. Henneaux e C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems, Princeton University Press, NJ, 1992; Hanson, Regge, Teitelboim, Constrained Hamiltonian System, Acad. Naz. dei Licei, Roma, 1976 ; K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Lecture Notes in Physics 169, Springer-Verlag, Berlin, 1982
- [35] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, Classical Dynamics: A Modern Perspective, John Wiley & Sons, New York, 1974

- [36] Gupta, Proc. Roy. Soc. (London) 63, 681 (1950); K. Bleuler, Helv. Phys. Acta, 23, 567, (1950)
- [37] S. S. Schweber, An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, Harper and Row, Inc., New York, 1962
- [38] J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, Inc., 1965
- [39] T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood, Chur, 1982
- [40] Nishijima,
- [41] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, Interscience, New York, 1959
- [42] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, M. B. Monagan e S. M. Watt, First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple, Watcom, Waterloo, 1988; Ibid., Maple Reference Manual, Watcom, Waterloo, 1988.

**“SOBRE O MODELO DE CHERN-SIMONS NA  
FRENTE DE ONDA DA LUZ”**

*Leon Ricardo Ururahy Manssur*

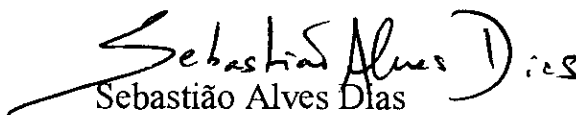
Tese de Mestrado apresentada no Cen-  
Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Con-  
selho Nacional de Desenvolvimento Ci-  
entífico e Tecnológico, fazendo parte da  
Banca Examinadora os seguintes profes-  
sores:



Prem Prakash Srivastava - Presidente



Bruto Max Pimentel Escobar



Sebastião Alves Dias



José Abdalla Helayel-Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 09 de abril de 1996