Tese de Doutorado

Aspectos Quânticos de Teorias de Calibre Não-Abelianas com Campos de Matéria Tensoriais

Vitor E. R. Lemes

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, março de 1996

Aos Meus Pais
e
Tânia Gláucia,
minha esposa,
fonte e destino de
meu amor.

Agradecimentos

- Ao CNPq pela bolsa de Doutorado.

- À Rosângela e à Beth, pela simpatia e eficiência com que nos atendem, aguentando nossas súbitas entradas atrás de café ou de alguma coisa ou alguém.

- À Vera, ao Sergio Velho, á Denise, ao Baiano e ao Ronaldo pela paciência em relevar meus atrasos na Biblioteca.

- À Mirian, pela solução das "Zebras" que freqüentemente trazemos a CFC.

- Ao Prof Aníbal Omar Caride e a Prof Suzana Caride, pelo auxílio com as "dores de cabeça" para alterar *hardware* de micros e, claro, pelo humor do prof Caride que levanta o astral nos dias mais cinzentos.

- Aos camaradas por tudo, desde discussões sobre os mais complexos assuntos de Física até, e principalmente, as conversas de pura "abobrinha": Oswaldo, Marquinhos, Luiz Cláudio (Pitágoras), Cláudio e Daniel Sasaki, Marcelo (balão murcho),Álvaro (e parceiro supersimétrico), Marcelo (MNP), Marcony, Ozemar, André, Mauro, Carmen, Cristine, Maurício, Isaías, Velasco, Martha (dona Martha), Gentil, Flávio, e mais uma lista telefônica de nomes de amigos.

- Ao Prof Camarada Tião, que além de ser sempre uma mão estendida para ajudar, ainda colabora ativamente na hora da abobrinha e cerveja depois do trabalho.

- Ao parceirão Renan (Cartan) Landin (aquele cearence que todo mundo conhece por chumbinho Pb), tudo que posso dizer é que se tivesse prêmio Nobel pro melhor parceiro e amigo faz tudo, sabe tudo, este cearence já tinha ganho o prêmio várias vezes.

- Ao Prof, Mestre e Amigo, José Abdalla Helayël-Neto. Por todos os conhecimentos em física, Humanidade e Humildade que todos nós alunos, do DCP e de outros locais, recebemos de você.

- Ao Prof e Orientador Silvio Paolo Sorella, que além de me orientar em física, me demonstrou que perseverança, dedicação, caráter e principalmente insistência são qualidades que invariávelmente levam você e os outros a sua volta a progredir sempre.

- Ao meu sogro e sogra, Hachid e Dalva, que me incentivam sempre e tratam tal qual um filho, minha amizade e carinho.

- Aos meus pais Emanuel e Nilda, assim como aos meus irmãos Cláudio e Luciana e minha Avó Tereza, toda a afeição que não pode ser medida ou quantizada.

- A Tânia, minha companheira, esposa, amante e fonte de carinho, afeição e amor.

- Ao meu pequenino herdeiro ou herdeira, que vem por ai, meu amor incondicional de pai.

Resumo

Formulamos, por meio de um tensor antissimétrico com uma condição de autodualidade complexa, uma ação entre campos de matéria tensoriais reais e campos de gauge. O modelo é analisado em níveis clássico e quântico. A renormalizabilidade é analisada pelo método algébrico de BRS. Apresentamos também o modelo com acoplamento de férmions quirais, onde obtemos uma anomalia de matéria, envolvendo os férmions e o tensor de matéria.

Abstract

We formulate, by the use of an antisymmetric tensor with a complex self-duality condition, an action between real matter tensor and gauge fields. This model is analised at classical and quantum level. The renormalisability is analised by the use of the BRS algebraic method. We also present the model with quiral férmions coupling where we obtained one matter anomaly involving férmions and matter tensor.

Índice

Lista de Publicações

- Vitor Lemes, Alvaro Noguira e J. A. Helayël-Neto - *"Supersymmetric Generalization of the Tensor Matter Fields"* , preprint CBPF, CBPF-NF-054/95 hep-th/9508049.

- Vitor Lemes, Ricardo Renan e S.P.Sorella - *"$\phi_4{}^4$-Theory for Antisymmetric Tensor Matter Fields in Minkowski Space-Time " - Phys. Lett. B* 352(1995)37-42,

- Vitor Lemes, Ricardo Renan e S.P.Sorella - *"Algebraic Renormalization of Antisymmetric Tensor Matter Fields " - Phys. Lett. B* 344(1995)158-163,

- Vitor Lemes, Ricardo Renan e S. P. Sorella - *" Renormalization Of Nonabelian Gauge Theories With Tensor Matter Fields "-To appear in Physics Letters B.*

- Vitor Lemes, Ricardo Renan e S. P. Sorella - *"Nonabelian Lagrangean for Spinor and Antisymmetric tensor matter fields" - Redação Final.*

Introdução

O modelo padrão tem-se apresentado como a melhor forma de se descrever interações, desde quarks pesados até o decaimento fraco de hádrons. Todavia, os recentes resultados experimentais envolvendo o decaimento $\pi^- \rightarrow \overline{e}\,\overline{\nu}\gamma$ e $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ levaram à hipótese de que se pudesse incluir ao modelo padrão usual um outro tipo de interação, com vistas a melhorar o acordo entre os resultados obtidos pela teoria e experimentos. Com base nisso, foi introduzido por Chizhov [7], de forma fenomenológica, uma ação não-abeliana efetiva de tipo corrente-corrente, que descreve uma interação entre tensores antissimétricos de matéria e os campos do modelo padrão usual. Posteriormente visando estudar a teoria sob um ponto de vista formal, foi construído um modelo com campos tensoriais de matéria interagindo com campos de gauge Abelianos. A análise deste modelo, feita por Avdeev e Chizhov [10], revelou interessantes propriedades tais quais a renormalizabilidade por "power counting" e, segundo cálculos realizados pelos próprios autores a 1 loop, a liberdade assintótica da constante de acoplamento de calibre abeliana. Todavia, os autores não tinham uma generalização não-abeliana deste modelo, sendo que esta generalização era essêncial para que as implicações fenomenológicas discutidas em artigos anteriores de Chizhov [7, 8] pudessem ser analisadas de maneira consistente. Com isto iniciamos um programa de entendimento do modelo, que consistiu em análisar possíveis anomalias não usuais que porventura o modelo abeliano possui-se, desenvolver o entendimento geométrico do modelo, visando uma generalização não abeliana, e realizar o estudo dos aspectos quânticos da extenção não abeliana, inclusive quando em interação com férmions.

O modelo abeliano foi analisado pelo método de BRS, visando determinar a sua renormalizabilidade, obtendo-se que este possui uma anomalia de matéria diferente das usuais anomalias de gauge. Esta anomalia de matéria não pode ser eliminada através do teorema de Adler-Bardeen, logo teve de ser acrescido ao modelo uma simetria que cancele a anomalia. O modelo Abeliano é apresentado no primeiro capítulo, e sua análise quântica pode ser encontrada na referência [18] e, detalhadamente, na tese de doutoramento de Ricardo Renan [24].

No segundo capítulo, é desenvolvida a generalização do modelo não-Abeliano, obtida no trabalho [19]. A generalização do modelo é conseguida com a introdução do tensor $\varphi_{\mu\nu}$ antissimétrico complexo, sujeito a uma condição de auto-dualidade complexa $\varphi_{\mu\nu} = i\widetilde{\varphi}_{\mu\nu}$. Com isto obtemos o modelo não-Abeliano de uma ação tipo $\lambda\varphi^4$ para campos tensoriais complexos, que ao ser escrita em suas componentes reais produz a ação desejada. Verificamos que a generalização do modelo leva ao aparecimento de termos na interação quártica $(AATT)$ que apresentam explicitamente o tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, ao contrário do modelo abeliano que não apresenta esta característica. Os aspéctos clássicos deste modelo não-Abeliano são apresentados e as equações necessárias à análise quântica são obtidas.

Os capítulos três e quatro são dedicados a determinação algébrica da renormalizabilidade do modelo, tal qual apresentado na referência [20]. Verificando que é possível estender perturbativamente a teoria clássica ao nível quântico. Com este método determinamos os contratermos invariantes, obtendo as renormalizações, tanto dos campos, como dos parâmetros do modelo. Logo após no quarto capítulo, demostra-se, com o uso das equações obtidas no terceiro capítulo, que o modelo é isento de novas anomalias, possuindo apenas a anomalia de gauge não-Abeliana usual que, uma vez eliminada a um loop, não aparece a ordens superiores, devido ao teorema de não-renormalização de

Adler-Bardeen.

O quinto capítulo apresenta uma generalização não-Abeliana do modelo de forma a introduzir férmions. Estes férmions são do tipo quiral, tal qual apresentado no modelo fenomenológico de interação entre férmions e tensores de matéria original, proposto por Chizhov na referência [11]. Os diversos aspectos clássicos da introdução de férmions são discutidos. Em particular demonstra-se que, em completa analogia com o caso abeliano, a introdução de férmions induz, a nível quântico, uma anomalia de matéria.

Capítulo 1

O Modelo Tensorial de Matéria

Campos tensoriais não são novos na literatura; diversos trabalhos abordam o assunto, desde a década de setenta. Estes campos foram introduzidos como campos de calibre, primeiramente nos modelos de gravitação e supergravidade [1]. O interesse despertado por estas teorias levou os modelos com campos tensoriais a se difundirem na década de 80, sendo, ainda, objeto de relevantes pesquisas, como nos trabalhos sobre modelos topológicos [2, 3]. Em 1994, contudo, foi introduzido por Avdeev e Chizhov [11] um campo tensorial de caráter diferente dos anteriores, que visa descrever matéria, ao contrário dos exemplos apontados.

Neste capítulo, iniciamos buscando a origem destes campos tensoriais, analisando as motivações fenomenológicas lançadas nos trabalhos de Avdeev e Chizhov. Tais motivações levaram à posterior formulação de um modelo Abeliano para campos tensoriais de matéria. Este modelo foi analisado pelos autores acima em nível perturbativo, e tal procedimento forneceu resultados interessantes que serão mais detalhados no decorrer desta exposição.

Buscando um entendimento das características geométricas do modelo proposto, que, devido às simetrias apresentadas não possui massa, concentramo-nos inicialmente, nas interações entre campos de gauge e tensores de matéria. Esta abordagem sugeriu uma nova interpretação do modelo, baseado em uma condição de auto-dualidade complexa, resultando daí, então, a construção de uma ação para campos tensoriais complexos auto-duais, que se mostrou explicitamente igual ao modelo de Avdeev-Chizhov sem férmions. Esta linha de raciocínio permitiu, ainda, a generalização não-Abeliana, que será discutida no segundo capítulo desta tese.

1.1 A ação de Avdeev-Chizhov

Os resultados obtidos com o modelo padrão na descrição de interações de quarks pesados, bem como nas descrições de decaimento fraco de hádrons, suscitaram a publicação de vários trabalhos que abordam o assunto das interações envolvendo mesons π^- e K, a maioria buscando obter maior precisão na solução dos problemas relacionados à interação forte, sem mudar, porém, a base das interações fracas do tipo V- A.

Segundo Chizhov [7] e outros autores anteriores [4],[5],[6], os recentes resultados experimentais do decaimento, $\pi^- \to \overline{e}\,\overline{\nu}\gamma$ e $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu$, mostram que as predições não têm, ao menos no presente momento, a precisão de outros resultados para decaimentos radiativos descritos pela teoria eletrofraca. Segundo estes autores, nos resultados experimentais obtidos, ainda persistem algumas diferenças em relação aos valores calculados com auxílio do modelo de interações fracas. Podemos, então, formular duas hipóteses de trabalho: a primeira relaciona-se a questão do refinamento da medida, tratando as disparidades detectadas nos trabalhos a que Chizhov se refere como se devendo basicamente às limitações e dificuldades (várias, tanto técnicas quanto teóricas) em medidas deste tipo. A outra hipótese, porém, é a de que o modelo das interações eletrofracas admite a possibilidade de outras modalidades de interações [7], sem destruir a qualidade dos resultados já obtidos, e melhorando-os em relação medidas como os decaimentos $\pi^- \to \overline{e}\,\overline{\nu}\gamma$ e $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu$.

A segunda hipótese foi a escolhida por Chizhov que, analisando do ponto de vista fenomenológico, propôs a possibilidade de interação não apenas entre campos de gauge, espinores e escalares, mas entre estes e o campo tensorial de matéria. Foi assim introduzida, de forma fenomenológica, uma ação não-Abeliana efetiva do tipo corrente-corrente que descreve uma interação entre os tensores antissimétricos e os campos do modelo eletrofraco usual.

O modelo imaginado consiste na introdução de um par ou dubleto, tensorial, que teria com os férmions uma interação tipo Yukawa. Em trabalho posterior[8], Chizhov estudou as implicações fenomenológicas deste modelo com base em dados experimentais obtidos mais recentemente [9], chegando à conclusão de que o modelo é compatível com resultados experimentais dos decaimentos do tipo dos káons, embora não se possa afirmar ainda, que os campos tensoriais sejam capazes de dar conta de todos os novos dados experimentais, de forma a melhorar o acordo entre teoria e experimento, obtidos atualmente na pesquisa da teoria eletrofraca.

Com isto, surge a necessidade de realizar um estudo sob o ponto de vista de teoria perturbativa, analisando a renormalizabilidade do modelo sob correções radiativas.

O caminho escolhido foi cauteloso. Ao invés de se estudar a renormalizabilidade sobre um modelo não-Abeliano, do qual não se tem controle completo, Avdeev e Chizhov se propuseram a estudar um modelo Abeliano, que servia como uma primeira abordagem no desenvolvimento e entendimento do problema. Sendo assim, em 1994, Avdeev e Chizhov (ref do anti abeliano) apresentaram a ação Abeliana para campos tensoriais de matéria e sua interação com férmions quirais. A ação Abeliana proposta neste trabalho foi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{int} = & \int d^4x \Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \Big) \\
& + \int d^4x \Big(h\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu A_\mu\psi + y\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\psi \Big) \\
& + \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 \Big) \\
& + \int d^4x\, 4hA_\mu \Big(T^{\mu\nu}\partial_\lambda \widetilde{T}^\lambda{}_\nu - \widetilde{T}^{\mu\nu}\partial_\lambda T^\lambda{}_\nu \Big) \\
& + \int d^4x\, 4h^2 \Big(\frac{1}{2}(A_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(A^\mu T_{\mu\nu})^2 \Big) \\
& - \int d^4x\, \frac{q}{4} \Big(2T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 \Big) ,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

onde $F_{\mu\nu}$ é a curvatura de gauge, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, h é a constante de acoplamento de gauge, q é a constante do acoplamento quártico tensorial puro e y é a constante de acoplamento entre os tensores antissimétricos e os férmions quirais. As matrizes γ^5 e $\sigma_{\mu\nu}$, e o tensor dual $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ são definidos por:

$$
\begin{aligned}
(\gamma_5)^2 & = 1, \quad \gamma_5 = \gamma^5, \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\
\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} & = \gamma_5\sigma_{\mu\nu}, \quad \widetilde{T}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \\
Tr(\gamma_5\gamma_{\mu 1}\cdots\gamma_{\mu 4}) & = -4i\varepsilon_{\mu 1\ldots\mu 4}, \quad \widetilde{\widetilde{T}}_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Esta ação acopla espinores quirais, campos de gauge e tensores de matéria. A simetria de gauge desta ação é:

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu = \partial_\mu w \qquad \delta\psi = -ihw\gamma_5\psi \qquad \delta\overline{\psi} = -ihw\overline{\psi}\gamma_5 \\
\delta T_{\mu\nu} = -2hw\widetilde{T}_{\mu\nu} \qquad \delta\widetilde{T}_{\mu\nu} = 2hwT_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

onde w é o parâmetro de gauge $U(1)$ local.

Neste mesmo trabalho, e em outro posterior [10, 11], foi feita uma análise clássica dos propagadores livres. Esta análise consistia na determinação dos graus de liberdade propagados pela ação livre, bem como na verificação da positividade da Hamiltoniana. Foram observados certos problemas quanto à propagação de graus de liberdade e quanto à positividade da Hamiltoniana. Embora os cálculos usados para a determinação da positividade da Hamiltoniana livre sejam simples, são bastante extensos, tendo sido os problemas revelados por eles, novamente apreciados, de forma bastante cuidadosa, na tese [23], e sua possível solução, para o caso Abeliano, desenvolvida na tese de doutorado de Ricardo Renan.

Concentremo-nos, neste momento, na análise feita, a 1 loop [11], para a ação dos campos tensoriais. Para isto, precisamos dos propagadores causais livres, obtidos para o modelo de campos tensoriais de matéria, que são, no espaço dos momenta,

$$
\begin{aligned}
\langle T_{\mu\nu}(-p)\; T_{\alpha\beta}(p)\rangle &= \frac{1}{p^2}\Pi_{\mu\nu\,\alpha\beta}(p), \\
\Pi_{\mu\nu\,\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right) \\
&\quad -\frac{\left(g_{\mu\alpha}p_\nu p_\beta + g_{\nu\beta}p_\mu p_\alpha - g_{\mu\beta}p_\nu p_\alpha - g_{\nu\alpha}p_\mu p_\beta\right)}{p^2}, \\
\Pi_{\mu\nu\,\rho\sigma}(p)\Pi_{\rho\sigma\,\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right),
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

onde $\Pi_{\mu\nu\,\alpha\beta}$ é escrito em termos dos projetores para campos antissimétricos.

De posse dos propagadores livres, foram obtidas as regras de Feynmann e analisado o power-counting para os termos de interação presentes na ação, e, embora por power-counting a ação seja renormalizável, é sabido que uma ação com campos de gauge em interação com espinores quirais pode apresentar uma anomalia do tipo de Adler-Bell-Jackiw, que destrói a invariância de gauge e a renormalizabilidade. Além disso, por ser um modelo envolvendo campos com características novas, os campos tensoriais, não se pode afirmar, em princípio, a inexistência de outros tipos de anomalia.

Para solucionar a questão da anomalia de gauge foram introduzidos outros campos tensoriais $U_{\mu\nu}$ de carga oposta, de modo que tenhamos o cancelamento do coeficiente da anomalia a um loop e, conseqüentemente, devido ao teorema de Adler-Bardeen, que trata de anomalias de gauge, possamos afirmar que a anomalia estava cancelada a todas as ordens.

A ação adicionada para cancelar a anomalia de gauge é

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{add} = \int d^4x \Bigg(\quad & z\overline{\chi}\sigma^{\mu\nu}U_{\mu\nu}\chi + \tfrac{1}{4}r\Big(\frac{1}{2}tr^2U^2 - 2trU^4\Big) + \frac{1}{2}str^2\Big(TU\Big) \\
& +v\Big(\frac{1}{4}trT^2trU^2 - tr(T^2U^2)\Big) + w\Big(\frac{1}{4}trT^2trU^2 - tr(TUTU)\Big)\Bigg) \qquad (1.5) \\
& +S_{inv}(U),
\end{aligned}$$

onde χ é um espinor quiral de carga oposta a ψ, $S_{inv}(U)$ é uma ação, como (1.1), construída para o tensor U e o espinor χ, e as constantes de acoplamento z, r, têm mesmo caráter de y, q. As outras constantes são ajustadas pela interação entre os campos tensoriais T e U.

Com base na ação total livre de anomalia de gauge, que é definida como $\mathcal{S}_{int} + \mathcal{S}_{add}$, e de posse das regras de Feynmann para os acoplamentos, Avdeev e Chizhov obtiveram, por meios computacionais, as funções beta relevantes. Os resultados obtidos foram generalizados ao caso da teoria possuir um conjunto de n campos espinoriais $(\psi^i;\ i = 1, .., n)$. Para as funções beta, calculadas a um loop, os resultados mais relevantes são.

$$\begin{aligned}
16\pi^2\beta_{y^2} &= \Big(\frac{10}{3}h^2 + (\frac{4}{3}n - 12)y^2\Big)y^2, \\
16\pi^2\beta_{z^2} &= \Big(\frac{10}{3}h^2 + (\frac{4}{3}n - 12)z^2\Big)z^2, \qquad (1.6) \\
16\pi^2\beta_{h^2} &= 16\pi^2\gamma_A h^2 = (\tfrac{8}{3}n - 6)h^4,
\end{aligned}$$

onde o sub-índice especifica a constante de acoplamento a que se refere a função-beta.

O fato mais interessante que estas equações demonstram, é que para $n = 1$ e $n = 2$, obtemos liberdade assintótica, como mostra a substituição destes valores na expressão da função β_{h^2} acima. Isto é, as contribuições negativas, geradas pela presença dos tensores antissimétricos no modelo, possibilita, para $n = 1$ e $n = 2$, a compensação das contribuições devidas aos férmions que, como sabemos, são sempre positivas.

Podemos, então, ver que o modelo apresenta propriedades incomuns, antes mesmo de obtermos qualquer resultado que permita um entendimento das características geométricas do modelo. A motivação fornecida pela liberdade assintótica nos induz, então, à busca deste entendimento de forma a obtermos as simetrias globais e interações locais de modo fundamentalmente geométrico, com a posterior identificação desta abordagem com o modelo original de Avdeev e Chizhov. Com a geometria do modelo, entendida a partir da introdução de tensores auto-duais complexos, passamos a ser capazes de realizar a generalização não-Abeliana, bem como de entender características deste modelo que parecem assemelhá-lo a $\lambda\varphi^4$, tanto a forma de seus termos de auto-interação, quanto na forma da interação com os campos de gauge.

1.2 Campos auto-duais complexos no espaço-tempo de Minkowski

É uma propriedade geométrica bem conhecida, (que corresponde à definicao de dual de uma dada dois-forma) que, no espaço Euclideano, o dual (ou anti-dual) de um campo auto-dual de rank-2 é dado por:

$$\varphi_{\mu\nu} = \widetilde{\varphi}_{\mu\nu} \ , \qquad \widetilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma} \ , \tag{1.7}$$

$\varphi_{\mu\nu}$ sendo um campo tensorial antissimétrico e $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ a densidade de Levi-Civita, que é normalizada da forma

$$\varepsilon_{1234} = 1 \qquad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = 2(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}). \tag{1.8}$$

Lembrando que, ao passarmos do espaço Euclideano para o espaço-tempo de Minkowski, as condições de normalização passam a ser

$$\varepsilon_{0123} = 1 \qquad \varepsilon^{0123} = -1 \qquad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = -2(\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\rho}_{\alpha}\delta^{\sigma}_{\beta}), \tag{1.9}$$

é fácil verificar que tomando-se o dual do dual do tensor, obtém-se:

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_{\mu\nu} = (detg)\varphi_{\mu\nu}, \tag{1.10}$$

onde $detg$ é o determinante da métrica, que em 4 dimensões Euclideanas é igual a 1 e no espaço-tempo Minkowskiano igual a -1. Temos, então, que a condição de auto-dualidade real só é válida para espaços Euclideanos.

Todavia, se substituirmos a condição de auto dualidade real por uma condição complexa, envolvendo um campo tensorial complexo $\varphi_{\mu\nu}$, de tal forma que a equação complexa seja compativel com a normalização de Minkowski para a contração das densidades tensoriais de Levi-Civita, obteremos

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \tag{1.11}$$

onde a condição complexa compensa o sinal menos proveniente da contração de Levi-Civita no espaço-tempo de Minkowski.

Resta verificar se esta equação é auto-consistente, bem como qual é a solução de $\varphi_{\mu\nu}$ em termos de componentes que esta equação fornece. Tomando-se o dual desta equação, obtemos

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = i\tilde{\tilde{\varphi}}_{\mu\nu} = -i\varphi_{\mu\nu} \tag{1.12}$$

que é perfeitamente compatível com a condição de campo auto-dual complexo definido anteriormente. Esta condição pode ser facilmente solucionada em termos de tensores reais antissimétricos.

Separando o campo complexo $\varphi_{\mu\nu}$ em suas partes real e imaginária,

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + iR_{\mu\nu}, \tag{1.13}$$

utilizando a condição de auto-dualidade complexa tem-se trivialmente que

$$R_{\mu\nu} = \widetilde{T}_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

isto, é o campo complexo tem como parte real um tensor antissimétrico, e como componente imaginário, o dual de sua parte real. Com isto temos um tensor antissimétrico complexo que obedece a uma condição de auto-dualidade complexa consistente, e que pode ser escrito em termos de um campo tensorial real e seu dual.

1.3 Construção de uma Ação Clássica para o campo Complexo $\varphi_{\mu\nu}$

Uma vez definida uma condição consistente de auto-dualidade no espaço-tempo de Minkowski, deve-se passar à definição de uma ação para o campo tensorial que seja única e possua uma simetria Abeliana global, com vistas a interação com campos de gauge Abelianos. A simetria global para os campos de matéria auto-duais complexos é dada por

$$\begin{aligned} \delta\varphi_{\mu\nu} &= i\theta\varphi_{\mu\nu} \\ \delta\varphi^{\dagger}_{\mu\nu} &= -i\theta\varphi^{\dagger}_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde θ é um parâmetro global, U(1).

O passo seguinte mais natural é definir uma ação invariante U(1) global; Ignora-se, por enquanto, a estrutura de índices com as possíveis contrações de Lorentz e busca-se uma ação com termo cinético e de auto-interação para campos bosônicos de matéria. Em outras palavras, prova-se que a condição de auto-dualidade define univocamente uma tal ação. Certamente quem satisfaz a todas estas condições é uma ação do tipo $\lambda\varphi^4$, ou

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(\partial\varphi^\dagger\partial\varphi + \varphi^\dagger\mathcal{M}\varphi - \frac{q}{8}(\varphi^\dagger\varphi)^2\right) \tag{1.16}$$

É necessário, agora, definir as contrações possíveis para o termo cinético, bem como se a propriedade de quiralidade dos campos tensoriais complexos é suficiente para eliminar as redundâncias nesta ação. Analisando o termo de massa, $\varphi^{\mu\nu}\mathcal{M}\varphi^\dagger_{\mu\nu}$, é fácil ver que, usando a condição de auto-dualidade obtém-se uma inconsistência:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mu\nu}\mathcal{M}\varphi^\dagger_{\mu\nu} &= (i\tilde{\varphi}^{\mu\nu})\mathcal{M}(-i\tilde{\varphi}^\dagger_{\mu\nu}) \\
&= \tilde{\varphi}^{\mu\nu}\mathcal{M}\tilde{\varphi}^\dagger_{\mu\nu} \\
&= -\varphi^{\mu\nu}\mathcal{M}\varphi^\dagger_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Logo a ação para estes campos quirais não pode possuir massa.

É interessante notar que a dedução acima não se aplica apenas ao termo de massa, mas a qualquer termo que possa ser definido através de um operador escalar, o que impede a existência de um termo cinético onde as derivadas de espaço-tempo não contraiam com os campos, bem como um termo quadrático onde os conjuntos $\varphi\varphi^\dagger$ se comportem como um escalar. Relativamente ao termo cinético da ação, é obvio pelo apontado acima, que o unico bilinear invariante de Lorentz é modulo integração por partes definido por

$$\int d^4x\, \partial_\mu\varphi^{\mu\nu}\partial^\alpha\varphi^\dagger_{\alpha\nu}. \tag{1.18}$$

Falta definir o termo de auto-interação quártico. Neste caso, existem três possíveis termos, dados respectivamente por:

$$i)\ \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger}_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta};\quad ii)\ \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu};\quad iii)\ \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger}_{\nu\alpha}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}. \tag{1.19}$$

Entretanto, estes três termos são na verdade equivalentes, o que pode ser mostrado através da identidade entre as densidades de Levi-civita e um dado tensor de rank-n, qualquer, em 4 dimensões

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\Xi_{\sigma\ldots} + \varepsilon_{\sigma\alpha\beta\mu}\Xi_{\nu\ldots} + \varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta}\Xi_{\mu\ldots} + \varepsilon_{\mu\nu\sigma\alpha}\Xi_{\beta\ldots} + \varepsilon_{\beta\mu\nu\sigma}\Xi_{\alpha\ldots} = 0\ , \tag{1.20}$$

onde $\Xi_{\nu\ldots}$ denota um tensor arbitrário de rank-n maior ou igual a um. Esta equação, ou identidade, advém do fato de que em D dimensões a antissimetrização em relação a D +1 índices é automaticamente nula.

Como exemplo, a equivalência entre os termos $i)$ e $iii)$ tem-se que.

$$\begin{aligned}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger}{}_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} &= -i\varphi^{\dagger\mu\nu}\tilde{\varphi}^{\dagger}_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger\lambda\sigma}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta};\end{aligned} \tag{1.21}$$

todavia, antissimetrizando-se com respeito aos índices $(\mu, \nu, \lambda, \sigma, \alpha)$, que correspondem, respectivamente, à contração entre a densidade de Levi-Civita e os tensores e, a contração entre tensores, tem-se que:

$$\begin{aligned}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger}{}_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} = &\ \frac{1}{2}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger\lambda\sigma}\varphi^{\alpha\beta}\Big(\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\varphi_{\sigma\beta} + \varepsilon_{\sigma\alpha\mu\nu}\varphi_{\lambda\beta}\Big) \\ &+\frac{1}{2}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger\lambda\sigma}\varphi^{\alpha\beta}\Big(\varepsilon_{\lambda\sigma\alpha\mu}\varphi_{\nu\beta} + \varepsilon_{\nu\lambda\sigma\alpha}\varphi_{\mu\beta}\Big) \\ = &\ 4\,\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\dagger}{}_{\nu\alpha}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}\ ,\end{aligned} \tag{1.22}$$

que mostra a equivalência entre os termos quárticos $i)$ e $iii)$.

Logo a condição de auto-dualidade é suficientemente forte para definir univocamente a estrutura de Lorentz da ação invariante.

Para proceder á interação com o campo eletromagnético, basta tornar o parâmetro global θ (equação 1.15) da simetria $\mathcal{U}(1)$ da ação em um parâmetro local e introduzir um campo de gauge cuja simetria é $\delta A_\mu = \partial_\mu \theta$.

A interação com o campo de calibre é feita por meio do acoplamento mínimo usual (derivada covariante),

$$\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu} = \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu} - iA_\sigma \varphi_{\mu\nu}, \tag{1.23}$$

cuja simetria é dada por:

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu}) &= i\theta(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu}) \\ \delta(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^\dagger &= -i\theta(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^\dagger . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Para se definir a ação com invariância $U(1)$ local, basta apenas proceder a troca das derivadas comuns pela derivada covariante e incluir o termo de cinética dos campos de gauge. Com isto a ação invariante fica escrita em forma compacta, como:

$$\begin{aligned} S_{inv} = & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & -\int d^4x \left((\nabla_\mu \varphi^{\mu\nu})(\nabla_\sigma \varphi^\sigma{}_\nu)^\dagger + \frac{q}{8}(\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}) \right) . \end{aligned} \tag{1.25}$$

1.4 A Ação de Avdeev-Chizhov Abeliana

Como demontrado no início da subseção anterior, a equação (1.10) de auto-dualidade complexa tem como solução, $\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\widetilde{T}_{\mu\nu}$, para o campo auto-dual complexo descrita em termos de tensores de rank-2 reais.

Analisando a transformação de gauge e abrindo a transformação do campo auto-dual (1.15) em parte real e imaginária, as transformações obtidas para os campos reais $T_{\mu\nu}$ e seu dual são exatamente as mesmas definidas por Avdeev e Chizhov em seu trabalho original:

$$\delta T_{\mu\nu} = -\theta \widetilde{T}_{\mu\nu} \qquad \delta \widetilde{T}_{\mu\nu} = \theta T_{\mu\nu} \tag{1.26}$$

Analogamente, para a derivada covariante tem-se

$$\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu} = \nabla_\sigma T_{\mu\nu} + i \nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu}, \tag{1.27}$$

onde a derivada covariante sobre os tensores reais é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T_{\mu\nu} &= \partial_\sigma T_{\mu\nu} + A_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu} \\ \nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu} &= \partial_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu} - A_\sigma T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Estas derivadas foram, obviamente, construídas de forma a serem covariantes, ou seja:

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\sigma T_{\mu\nu}) &= -\theta \nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu} \\ \delta(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu}) &= \theta \nabla_\sigma T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Com isto, a ação escrita em termos dos campos auto-duais complexos passa a ser escrita em termos de tensores reais e suas derivadas covariantes, da forma:

$$\begin{aligned} S_{inv} &= -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &- \int d^4x \biggl((\nabla_\mu T^{\mu\nu})(\nabla_\sigma T^\sigma{}_\nu) + (\nabla_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu})(\nabla_\sigma \widetilde{T}^\sigma{}_\nu) \\ &- \frac{q}{4}\Bigl(2T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 \Bigr) \biggr) \end{aligned} \tag{1.30}$$

ou, explicitamente, abrindo as derivadas covariantes nos campos componentes:

$$
\begin{aligned}
= \quad & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
& +\int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 \right) \\
& +2\int d^4x\, A_\mu \left(T^{\mu\nu}\partial_\lambda \widetilde{T}^{\lambda}{}_{\nu} - \widetilde{T}^{\mu\nu}\partial_\lambda T^{\lambda}{}_{\nu} \right) \\
& +\int d^4x \left(\frac{1}{2}(A_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(A^\mu T_{\mu\nu})^2 \right) \\
& -\int d^4x\, \frac{q}{4}\left(2T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu} - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 \right) ,
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

com a ação invariante segundo as simetrias (1.29):

$$
\delta S_{inv} = 0 \ . \tag{1.32}
$$

A expressão anterior nada mais é que a ação original proposta por Avdeev e Chizhov, sem interação com férmions. Vê-se que, tal qual referido no título deste capítulo, o modelo para campos tensoriais de matéria pode ser obtido de uma teoria tipo $\lambda\varphi^4$ para campos tensoriais que obedecem à condição de auto-dualidade complexa.

Com isto, já podemos tirar algumas conclusões parciais. Ou seja o modelo de Avdeev e Chizhov tem, além da propriedade básica buscada originalmente de ser um primeiro modelo para as correções à interação de kaons, propriedades de liberdade assintótica. Tal propriedade é dada por uma função-beta positiva, que não é obtida com a introdução de outro tipo de campo de matéria. Obtivemos, ainda, um mecanismo geométrico que permite não só entender a origem mais fundamental do modelo, como também uma generalização não-Abeliana, que será apresentada no próximo capítulo.

Capítulo 2

O modelo Não-Abeliano

2.1 A Generalização Não-Abeliana

Desde que o modelo Abeliano de Avdeev e Chizhov foi proposto com o intuito de compreender, do ponto de vista teórico, o modelo fenomenológico introduzido por Chizhov [7], que, por sua vez, pretende analisar, sob a ótica de novas interações, os recentes dados experimentais e os resultados teóricos previstos pelo modelo padrão (para os decaimentos de pions e kaons), faz-se necessário, como uma seguinte etapa da questão, desenvolver uma versão não-Abeliana do modelo de campo tensorial de matéria.

No intuito de obter a generalização não-Abeliana da ação invariante (1.25), procede-se, como anteriormente, não buscando resolver o modelo diretamente sobre os campos $T_{\mu\nu}$, mas através de um campo tensorial antissimétrico $\varphi_{\mu\nu}$ complexo. Impõe se que este campo de matéria pertença a uma certa representação de um grupo de Lie compacto G, suposto como semi-simples, com representação dada por $(\lambda^a)_{ij}$, onde o índice a enumera os geradores de G e os índices (ij) especificam a representação. Como ficará claro mais adiante, a representação identificada pelas matrizes hermitianas $(\lambda^a)_{ij}$ é requerida como sendo uma representação complexa, isto é,

$$\lambda^a = \lambda_R^a + i\lambda_I^a, \tag{2.1}$$

onde λ_R^a e λ_I^a representam, respectivamente, parte real e imaginária de λ^a. Como dito anteriormente, o grupo de Lie G é compacto e semi-simples, logo, as matrizes da representação escolhida obedecem a conhecida relação de comutação,

$$\left[\lambda^a, \lambda^b\right] = if_{abc}\lambda^c. \tag{2.2}$$

Utilizando-se a separação em parte real e imaginária definida anteriormente, é fácil obter, por meio da relação de comutação (2.2), as relações de comutação entre parte real e imaginária da matriz do grupo:

$$\begin{aligned} \left[\lambda_R^a, \lambda_R^b\right] - \left[\lambda_I^a, \lambda_I^b\right] &= -f_{abc}\lambda_I^c \\ \left[\lambda_R^a, \lambda_I^b\right] - \left[\lambda_I^a, \lambda_R^b\right] &= f_{abc}\lambda_R^c. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Lembrando que as matrizes λ^a são hermitianas, ($\lambda^a = \lambda^{a\dagger}$), obtemos, assim, que as matrizes reais são simétricas nos índices da representação e as matrizes imaginárias são antissimétricas nos mesmos índices

$$\begin{aligned} (\lambda_R^a)_{ij} &= (\lambda_R^a)_{ji} \\ (\lambda_I^a)_{ij} &= -(\lambda_R^a)_{ji}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como a ação com simetria U(1) já foi definida, tanto na versão com simetria global quanto na extensão ao caso local Abeliano, no capítulo anterior, passaremos diretamente à generalização não-Abeliana para o grupo G, acoplando com campos de gauge e analisando diretamente as transformações de BRS dos campos, o que naturalmente implica que a ação será definida já sobre um gauge fixing.

Supondo, então, esta forma de abordar o problema, procedemos à análise do acoplamento entre o campo não-Abeliano complexo auto-dual, $\varphi^i_{\mu\nu}$, e os campos de Yang-Mills A^a_μ. A forma da invariância escolhida deve ser tal que esta seja uma generalização direta da escolhida para o caso Abeliano, ou, dito de outra maneira, que o caso Abeliano deve ser um caso particular da simetria não abeliana. Desta forma, fixamos as transformações de BRS sobre $\varphi_{\mu\nu}$, tal qual um campo de matéria usual, como por exemplo, campo escalar complexo [12]. As outras transformações de BRS escolhidas são as usuais para campos de gauge e ghosts, e têm a forma seguinte

$$
\begin{aligned}
sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a + f^{abc} A^b_\mu c^c \ , \\
s\varphi^i_{\mu\nu} &= i c^a (\lambda^a)^{ij} \varphi^j_{\mu\nu} \ , \\
s{\varphi^\dagger}^i_{\mu\nu} &= -i c^a {\varphi^\dagger}^j_{\mu\nu} (\lambda^a)^{ji} \ , \\
sc^a &= -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \ , \qquad s^2 = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Mantendo-se a analogia com o caso Abeliano desenvolvido anteriormente, novamente buscamos a generalização não abeliana da derivada covariante com relação as transformações de BRS. O que nos leva à seguinte definição da derivada covariante:

$$
(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i = \partial_\sigma \varphi^i_{\mu\nu} - i A^a_\sigma (\lambda^a)^{ij} \varphi^j_{\mu\nu} \ . \tag{2.6}
$$

Desta definição, vê-se que a derivada covariante é dada em uma representação, visto que os índices ij especificam a representação do grupo. Fazendo-se uso das transformações de BRS para os ghosts, o campo de gauge e o campo auto dual, torna-se simples verificar que esta definição de derivada é covariante com respeito as transformações de BRS, isto é

$$
\begin{aligned}
s(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^i &= ic^a(\lambda^a)^{ij}(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^j \ , \\
s(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^{\dagger i} &= -ic^a(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^{\dagger j}(\lambda^a)^{ji} \ .
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

De posse destas generalizações para o campo não-Abeliano, e relembrando que as propriedades de auto dualidade, apresentadas no capítulo anterior, definem um único termo cinético, assim como o termo quártico, tal qual mostrado na segunda seção do primeiro capítulo, podemos, então, definir uma ação não abeliana cuja forma é:

$$
\begin{aligned}
S = & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\
& -\int d^4x \left((\nabla_\mu\varphi^{\mu\nu})^i(\nabla_\sigma\varphi^\sigma{}_\nu)^{\dagger i} + \frac{q}{8}(\varphi^{\dagger\mu\nu i}\varphi^i_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta j}\varphi^j_{\beta\mu}) \right) ,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

onde g é a constante de acoplamento de gauge, q é a constante de acoplamento para o termo quártico. Esta ação é deixada invariante (2.5), ou seja

$$
sS = 0. \tag{2.9}
$$

Devemos, porém, ter em mente que o objetivo desta ação com campos auto-duais é fornecer uma formulação geométrica clara para a teoria fenomenológica de Avdeev-Chizhov, tal qual aparece em [7, 8]. Os tensores antissimétricos são introduzidos neste modelo como tensores reais, visando solucionar o problema da diferença na massa dos kaons. Logo, o estudo da simetria de BRS deve ser feito em nível de campos reais de forma a verificar a estrutura de campo auto-dual como compatível com a estrutura de um grupo semi-simples.

Considerando a transformação de BRS (2.6) para os campos autoduais, e separando em partes real e imaginária, obtém-se as simetrias de BRS reais:

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= \partial_\mu c^a + f^{abc} A_\mu^b c^c = (D_\mu c)^a \ , \\
sT_{\mu\nu}^i &= -c^a \Big((\lambda_R^a)^{ij} \widetilde{T}_{\mu\nu}^j + (\lambda_I^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j \Big) \ , \\
s\widetilde{T}_{\mu\nu}^i &= c^a \Big((\lambda_R^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j - (\lambda_I^a)^{ij} \widetilde{T}_{\mu\nu}^j \Big) \\
sc^a &= -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \ , \qquad s^2 = 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Estas relações, embora nilpotentes, não são tão simples quanto o caso Abeliano, pois vê-se que há uma mistura de tal forma que a simetria de um tensor vai, não apenas no seu dual, mas em uma combinação entre o próprio tensor e seu dual. Esta mistura é particularmente importante no caso não-Abeliano, pois, se observarmos as condições de comutação entre os componentes real e imaginário de λ^a dado em (2.1), vemos que não faz sentido uma representação sem parte imaginária (2.3), bem como uma representação sem parte real levará a resultados triviais.

As etapas que se seguem são semelhantes ao que já foi feito para o caso Abeliano, expande-se a derivada covariante em parte real e imaginária:

$$(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i = (\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^i + i(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^i \ , \tag{2.11}$$

com

$$\begin{aligned}
(\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma T_{\mu\nu}^i + A_\sigma^a (\lambda_I^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j + A_\sigma^a (\lambda_R^a)^{ij} \widetilde{T}_{\mu\nu}^j \ , \\
(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu}^i + A_\sigma^a (\lambda_I^a)^{ij} \widetilde{T}_{\mu\nu}^j - A_\sigma^a (\lambda_R^a)^{ij} T_{\mu\nu}^j \ .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A diferença aqui é que a simetria de BRS das derivadas covariantes dos tensores reais possui também uma mistura. Tal fato já era esperado, se levarmos em conta os resultados obtidos para a simetria de BRS dos tensores reais. Resta expressar, em suas partes real e imáginária, a simetria complexa das derivadas covariantes que atuam sobre os campos auto-duais complexos. Com isto, obtemos as seguintes simetrias de BRS sobre as derivadas covariantes dos tensores reais:

$$
\begin{aligned}
s(\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^i &= -c^a\Big((\lambda_R^a)^{ij}(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^j + (\lambda_I^a)^{ij}(\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^j\Big) \\
s(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^i &= c^a\Big((\lambda_R^a)^{ij}(\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^j - (\lambda_I^a)^{ij}(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^j\Big) \ ,
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

que, como se pode observar, tanbém mistura a derivada covariante $\nabla_\sigma T_{\mu\nu}$ e sua dual $\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu}$.

Finalmente, a ação invariante de BRS, escrita apenas em termos das derivadas covariantes de tensores reais é:

$$
\begin{aligned}
S = \ & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\
& -\int d^4x \Big((\nabla_\mu T^{\mu\nu})^i(\nabla_\sigma T^\sigma{}_\nu)^i + (\nabla_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu})^i(\nabla_\sigma \widetilde{T}^\sigma{}_\nu)^i\Big) \\
& -\int d^4x\, \frac{q}{4}\Big(2(T^i_{\mu\nu}T^{i\nu\rho})^2 - \frac{1}{2}(T^i_{\mu\nu}T^{i\mu\nu})^2 \Big) \ ,
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

esta ação pode ainda ser aberta em termos de seus campos componentes $T^{\mu\nu}$ e seu dual $\widetilde{T}^{\mu\nu}$, ficando da forma:

$$
\begin{aligned}
S = \; & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \\
& +\int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 \right) \\
& -2\int d^4x\, A^a_\mu \Big((\partial_\sigma T^{\sigma\nu})\lambda^a_R \widetilde{T}^\mu{}_\nu - (\partial_\sigma \widetilde{T}^{\sigma\nu})\lambda^a_R T^\mu{}_\nu \Big) \\
& -2\int d^4x\, A^a_\mu \Big((\partial_\sigma T^{\sigma\nu})\lambda^a_I T^\mu{}_\nu + (\partial_\sigma T^{\mu\nu})\lambda^a_I T^\sigma{}_\nu \Big) \\
& +\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\sigma \Big(T^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_I T^\sigma{}_\nu + T^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_R \widetilde{T}^\sigma{}_\nu \Big) \qquad (2.15) \\
& -\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\sigma \Big(\widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_I T^\sigma{}_\nu + \widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_R \widetilde{T}^\sigma{}_\nu \Big) \\
& +\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\sigma \Big(\widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_I \widetilde{T}^\sigma{}_\nu - \widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_R T^\sigma{}_\nu \Big) \\
& +\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\sigma \Big(T^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_I \widetilde{T}^\sigma{}_\nu - T^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_R T^\sigma{}_\nu \Big) \\
& -\frac{q}{4}\int d^4x \left(2(T_{\mu\nu}T^{\nu\rho})^2 - \frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 \right) ,
\end{aligned}
$$

onde a notação $T\lambda^a_R\widetilde{T} = T^i(\lambda^a_R)^{ij}\widetilde{T}^j$ é usada de forma a simplificar a apresentação destes termos da ação.

A expressão (2.15) representa a generalização não-Abeliana do modelo de Avdeev-Chizhov, sem levar em conta interações com férmions. É interessante notar que, ao contrário do caso Abeliano, aqui temos termos na interação quártica (A A T T) que contêm a densidade de Levi-Civita.

Torna-se claro, pelo apresentado, que o modelo de Avdeev-Chizhov é obtido de uma ação tipo $\lambda\varphi^4$, onde φ são tensores autoduais complexos. Esta formulação tem ainda o mérito de permitir a extensão não-Abeliana, sendo que tal extensão não leva a uma ação com termos de interação estritamente iguais aos de Avdeev-Chizhov (diferenciando-se apenas na estrutura de grupo), mas sim a uma ação que possui mais termos e onde a contração é feita também usando-se as densidades tensoriais. Como ficará claro na próxima seção, é importante buscar simetrias globais e locais desta ação com vistas a estudar sua renormalizabilidade. Tais simetrias serão úteis tanto no estudo da estabilidade quanto no estudo das possíveis anomalias.

2.2 Gauge-Fixing

Antes de passar à análise das equações clássicas, que podem ser estendidas ao nível quântico, é necessário fixar o gauge dos campos A^a_μ. Embora tenhamos escolhido um gauge fixing específico para realizar a demostração da renormalizabilidade deste modelo, os resultados são independentes do gauge escolhido. Na referência [13], encontra-se a prova de que a renormalização é independente do gauge-fixing.

O gauge-fixing de Landau foi escolhido para quantizar o modelo. Para realizá-lo, é necessário a introdução de dois campos extras ao modelo, um anti-ghost $\bar{c}^a$ e um multiplicador de lagrange b^a. A ação de gauge-fixing S_{gf} tem a forma:

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \int d^4x \, s\left(\bar{c}^a \partial^\mu A^a_\mu\right) \\ &= \int d^4x \, \left(b^a \partial^\mu A^a_\mu - \bar{c}^a \partial^\mu (\partial_\mu c^a + f^{abc} A^b_\mu c^c)\right), \end{aligned} \tag{2.16}$$

sendo a atuação do operador de BRS sobre estes campos extras dada por:

$$s\bar{c}^a = b^a, \qquad sb^a = 0, \tag{2.17}$$

que, portanto, formam um dubleto de BRS e, segundo as referências [13, 22], dubletos de BRS não entram na cohomologia e, portanto, não contribuem na construção das bases para os cálculos de contratermo ou anomalias, como será mostrado nos capítulos 4 e 5. Realizada a escolha do gauge, passamos a ter uma ação invariante da forma:

$$S_{inv} = S + S_{gf}, \tag{2.18}$$

que é invariante segundo o conjunto de transformações:

$$\begin{aligned} sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a + f^{abc}A^b_\mu c^c, \qquad s\varphi^i_{\mu\nu} = ic^a(\lambda^a)_{ij}\varphi^j_{\mu\nu}, \\ sc^a &= -\tfrac{1}{2}f^{abc}c^b c^c, \qquad s\bar{c}^a = b^a, \qquad sb^a = 0, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$s^2 = 0.$$

O gauge de Landau é usado porque permite a obtenção de uma equação extra, a equação do antighost, compatível com o princípio da ação quântica. Esta equação determina que, neste gauge específico, o ghost não se renormaliza, simplificando tanto os cáculos de contratermos quanto de possíveis anomalias. Lembro, porém, que a física de qualquer modelo de gauge não depende do gauge-fixing utilizado, sendo a escolha do gauge de Landau uma pura questão de conveniência.

2.3 Aspectos Clássicos

Definida a ação quantizada, na qual foi usado o gauge de Landau para realizar o gauge-fixing dos campos de gauge, o próximo passo será a análise das simetrias clássicas presentes no modelo que podem ser estendidas ao nível quântico. As expressões (2.15), (2.16) e (2.19) são, então, o ponto de partida para esta análise. É conveniente, porém, lembrar que, ao introduzirmos o gauge fixing de Landau, acrescentamos ao conjunto definido em (2.10) um outro campo que forma com $\bar{c}$ um dubleto de BRS. Com isto, o conjunto completo de transformações é dado por:

$$
\begin{aligned}
sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a + f^{abc}A^b_\mu c^c = (D_\mu c)^a, \\
sT^i_{\mu\nu} &= -c^a\Big((\lambda^a_R)^{ij}\widetilde{T}^j_{\mu\nu} + (\lambda^a_I)^{ij}T^j_{\mu\nu}\Big)\ , \\
s\widetilde{T}^i_{\mu\nu} &= c^a\Big((\lambda^a_R)^{ij}T^j_{\mu\nu} - (\lambda^a_I)^{ij}\widetilde{T}^j_{\mu\nu}\Big)\ , \\
sc^a &= -\frac{1}{2}f^{abc}c^b c^c\ , \\
s\bar{c}^a &= b^a, \quad sb^a = 0\ , \qquad s^2 = 0\ .
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Devido ao fato de que as simetrias de BRS para os campos são, em seu caso geral, não-lineares, deve-se introduzir campos externos, ou correntes externas, acoplados a estas simetrias não lineares. Completemos, então, a ação, levando em conta termos de interação entre as simetrias de BRS não-lineares e as correntes externas da forma:

$$
\Sigma = S_{inv} + S_{ext} \tag{2.21}
$$

sendo a ação de correntes externas

$$
S_{ext} = \int d^4x\left(\Omega^a_\mu s(A^{a\mu}) + \tau^a s(c^a) + \frac{1}{2}\eta^i_{\mu\nu}s(T^{i\mu\nu})\right). \tag{2.22}
$$

Antes de apresentar a identidade de Slavnov-Taylor deste modelo, é interessante lembrar que as simetrias não-lineares são incluídas na ação devido à necessidade de se renormalizar a própria simetria, visto que esta é um produto de campos em mesmo ponto e, portanto, corresponde a uma inserção de produtos de campos em um mesmo ponto, gerando infinitos que devem ser renormalizados. Esta renormalização é implementada, do ponto de vista de análise algébrica, pela introdução de correntes que se acoplam à simetria, tornando a inserção definida através de uma relação funcional extensivel perturtabivamente.

Ainda antes de apresentar a identidade de Slavnov-Taylor, é instrutivo analisar as dimensões ultravioleta, bem como o número de ghost, dos diversos campos envolvidos no modelo. Apresentamos, então, sob a forma de tabela estes dados,

	A_μ	$\bar{c}$	c	b	$T_{\mu\nu}$	$\eta_{\mu\nu}$	Ω_μ	τ
dim.	1	2	0	2	1	3	3	4
gh. num.	0	-1	1	0	0	-1	-1	-2

Tabela1 Dimensão ultravioleta e número de ghost.

Estes dados determinam, não apenas a dimensão ultravioleta de uma dada equação compatível com o princípio da ação quântica, mas também o caráter desta equação, sendo ela comutante com número de ghost par, ou, anticomutante com número de ghost ímpar.

Um ponto importante, nesta análise clássica, são as equações que podemos obter do modelo, em nível clássico, que podem ser usadas em nível quântico. Iremos, portanto, nos concentrar nas equações clássicas, compatíveis com o princípio de ação quântica, ao qual nos referiremos a partir de agora como QAP. Este princípio, que serve de guia para todas as análises subsequentes, está desenvolvido em detalhes na referência [14]

A primeira equação clássica na qual deteremos nossa atenção é a identidade de Slavnov-Taylor. Como se sabe, esta identidade é obtida de uma variação não linear nos campos. Esta identidade em forma funcional é:

$$\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu} \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a} \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + \frac{1}{2} \frac{\delta\Sigma}{\delta T^i_{\mu\nu}} \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^{i\mu\nu}} + b^a \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a} \right) = 0 \; . \tag{2.23}$$

A identidade de Slavnov-Taylor expressa a invariância da ação, Σ, sob as transformações de BRS (2.10). O problema da renormalizabilidade, ou seja, a procura de anomalias, assim como o estudo dos contratermos invariantes, é solucionado estudando a cohomologia do operador linearizado, que é obtido da identidade de Slavnov-Taylor.

A próxima equação clássica, obtida deste modelo, é do tipo equação de movimento, sendo, porém, integrada. Esta equação possui, porém, características muito especiais, que são usadas para provar explicitamente a não renormalizabilidade do ghost, sendo que só pode ser obtida no gauge de Landau. Caso a ação, Σ, fosse construída usando um outro gauge qualquer, não seria possível obter uma equação clássica compatível com o QAP [13, 15]. Esta equação, conhecida como equação do antighost, é a responsável pelo controle da dependência do modelo com o ghost c. Sua representação em forma funcional é:

$$\mathcal{G}_a \Sigma = \Delta_a^{\text{cl}} \,, \tag{2.24}$$

com o operador funcional, $\mathcal{G}_a$, da forma:

$$\mathcal{G}_a = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta c^a} + f^{abc} \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta b^c} \right) \,, \tag{2.25}$$

sendo o termo de quebra desta equação:

$$\Delta_a^{\text{cl}} = -\int d^4x \left(f^{abc} (\tau^b c^c + \Omega_\mu^b A^{c\mu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}^i (\lambda_R^a)^{ij} \widetilde{T}^{j\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}^i (\lambda_I^a)^{ij} T^{j\mu\nu} \right) \,, \tag{2.26}$$

linear [1]nos campos quânticos, o que caracteriza o termo Δ_a^{cl} como um termo de quebra clássico que, portanto, não é afetado por correções quânticas.

A próxima equação clássica, compatível com o QAP, é a equação de movimento para o campo b^a, que fornece um termo de quebra linear, que não é afetado por correções quânticas. A forma funcional desta equação é:

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta b^a} = \partial^\mu A^{a\mu}, \tag{2.27}$$

que nada mais é do que a definição da condição de gauge-fixing para o gauge de Landau. Como dito anteriormente para a equação (2.24), se alterarmos a condição de gauge fixing,

[1]O termo de quebra da equação do antighost só é linear no gauge de Landau, possuindo termos de quebra não lineares em outros gauges quaisquer. É esta propriedade de quebra linear que faz com que os ghosts não se renormalizem no gauge de Landau, A prova algébrica destas afirmações é encontrada nas referências [13, 15]

dada acima, não teremos a equação de antighost compatível com o QAP e, segundo [13, 17], não teremos garantias quanto ao controle do ghost.

De posse destas equações, resta verificar se elas definem todos os vínculos, expressos em forma funcional, da teoria. O tratamento matemático dado a sistemas vinculados diz que, se estas equações definem completamente os vínculos, não serão geradas novas equações ao comutarmos as que nós já temos. Caso ainda existam outros vínculos, serão geradas novas equações, para dar contas destes. Trata-se de uma abordagem recursiva, ou seja, devemos, a cada nova equação obtida, testá-la novamente, até que não sejam mais obtidas novas equações.

Ao se comutar a condição de gauge fixing (2.27), equação do antighost (2.24), com a identidade de Slavnov-Taylor (2.23), obtém-se outras duas equações. A equação do ghost é

$$\overline{\mathcal{G}}_a \Sigma = 0 \ , \tag{2.28}$$

sendo o operador $\overline{\mathcal{G}}_a$

$$\overline{\mathcal{G}}_a = \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^{\mu a}} \ , \tag{2.29}$$

e a identidade de Ward que expressa a invariância rígida da ação,

$$\mathcal{W}^a_{\mathrm{rig}} \Sigma = 0 \ , \tag{2.30}$$

onde o operador $\mathcal{W}^a_{\mathrm{rig}}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^a_{\mathrm{rig}} &= \int d^4x \, f^{abc} \Big(A^b_\mu \frac{\delta}{\delta A^c_\mu} + \Omega^b_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^c_\mu} + \tau^b \frac{\delta}{\delta \tau^c} + c^b \frac{\delta}{\delta c^c} + \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} \Big) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \left((\lambda^a_R)^{ij} \Big(\widetilde{T}^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T^j_{\mu\nu}} - \widetilde{\eta}^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta^j_{\mu\nu}} \Big) - (\lambda^a_I)^{ij} \Big(T^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T^j_{\mu\nu}} - \eta^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta^j_{\mu\nu}} \Big) \right) . \end{aligned} \tag{2.31}$$

Esta identidade pode ser obtida também expressando a invariância rígida em forma funcional diretamente. O método de obtê-la pelas condições de consistência tem a vantagem de demontrar que todas as identidades funcionais formam um conjunto completo definindo, assim, o modelo.

Aplicando a consistência novamente, a única relação extra que obtemos é:

$$\left[\mathcal{W}^a_{\rm rig}, \mathcal{W}^b_{\rm rig}\right] = if_{abc}\mathcal{W}^c_{\rm rig}, \tag{2.32}$$

que é a relação de comutação do grupo de Lie expressa em termos de operadores funcionais.

Podemos, então, afirmar que possuímos todas as equações e relações, compatíveis com o QAP, úteis para a análise desta ação, tanto em nível clássico como em nível quântico.

As equações definidas anteriormente formam uma álgebra para os funcionais de número de ghost zero, cuja dimensão dos polinômios que compõem este funcional é quatro. Esta mesma álgebra pode ser generalizada para um funcional $\mathcal{F}$ qualquer, com número de ghost par. Obtemos, então, o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
&B_{\mathcal{F}}\mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 \\
&\mathcal{G}^a\mathcal{S}(\mathcal{F}) + B_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}^a\mathcal{F} - \Delta^a_{cl}) = W^a_{rig}\mathcal{F} \\
&\frac{\delta}{\delta b^b}(\mathcal{G}^a\mathcal{F} - \Delta^a_{cl}) - \mathcal{G}^a(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b^b} - \partial^\mu A^b_\mu) = 0 \\
&\mathcal{G}^a\overline{\mathcal{G}}^b\mathcal{F} + \overline{\mathcal{G}}^b(\mathcal{G}^a\mathcal{F} - \Delta^a_{cl}) = if_{abc}(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b^c} - \partial^\mu A^c_\mu) \\
&\mathcal{G}^a(\mathcal{G}^b\mathcal{F} - \Delta^b_{cl}) + \mathcal{G}^b(\mathcal{G}^a\mathcal{F} - \Delta^a_{cl}) = 0\ ,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

onde $B_{\mathcal{F}}$ é o operador linearizado de Slavnov-Taylor. A forma funcional deste operador, neste modelo, é:

$$
\begin{aligned}
B_{\mathcal{F}} = \int d^4x \Bigg(& \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega^{a\mu}} \frac{\delta}{\delta A_{a\mu}} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A^{a\mu}} \frac{\delta}{\delta \Omega_{a\mu}} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \tau^a} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta \tau^a} \\
& + b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \tfrac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta \eta^{i\mu\nu}} + \tfrac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \eta^{i\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}} \Bigg);
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

no caso em que a identidade de Slavnov-Taylor for nula, sobre este funcional $\mathcal{F}$, temos que $B_{\mathcal{F}}$ é nilpotente, ou seja:

$$
\mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0, \ \Rightarrow \ (B_{\mathcal{F}})^2 = 0. \tag{2.35}
$$

O operador de Slavnov-Taylor linearizado será útil nos estudos tanto dos contratermos quanto das possíveis anomalias deste modelo, que serão realizados no próximo capítulo. Convém, entretanto, antes de seguirmos em frente, destacar os resultados obtidos neste capítulo.

2.4 Resumo dos resultados clássicos

Com base na estrutura de campo autodual complexo apresentada no capítulo anterior, foi possível fazer uma generalização não-Abeliana para um grupo semi-simples qualquer. O modelo não-Abeliano, porém, possui termos de interação extras, além dos existentes no caso abeliano. Esta característica deve-se à forma das simetrias do campo tensorial, que mistura o campo e seu dual, de modo que, eliminar um dos termos desta simetria eliminando uma das representações do grupo, seja a real ou a imaginária, levará a inconsitências sérias no modelo.

Obtemos as equações clássicas que definem a ação, Σ, de tal forma que podemos usar estas mesmas equações para determinar a renormalizabilidade deste modelo por meios algébricos. Com o uso das equações obtidas neste capítulo obtemos os contratermos invariantes no próximo capítulo e estudamos a possibilidade de anomalias no quarto capítulo. Todavia, alguns aspectos clássicos do modelo não-Abeliano estão ainda por serem compreendidos e solucionados, sendo o principal deles, a questão da positividade da Hamiltoniana e, em nível quântico, a unitariedade da matriz S. Outra questão que não abordamos nesta análise clássica é a interação com férmions. Este ponto, em particular, analisaremos no quinto capítulo, onde nos dedicaremos à estrutura dos campos tensoriais e apresentaremos um modelo de interação férmions-tensores de matéria. Ainda no quinto capítulo obteremos as equações clássicas que definem o modelo com interação férmions-tensores de matéria, e as utilizaremos para determinar possíveis anomalias deste modelo.

Capítulo 3

Contratermos do Modelo de Campos Tensoriais de Matéria

Neste capítulo, pretende-se analisar alguns aspectos quânticos do modelo $\lambda\varphi_4^4$ tensorial; a saber: a sua estabilidade perante correções radiativas, usando como base uma abordagem algébrica. Não nos alongaremos, porém, na discussão sob o ponto de vista dos fundamentos de teoria quântica de campos, que pode ser encontrada em detalhes na ref [12], assim como a discussão sobre renormalizabilidade, sob um ponto de vista algébrico, é encontrada em [13].

Analisemos, então, a questão da estabilidade sob o ponto de vista algébrico. Verifiquemos se é possível estender perturbativamente a teoria clássica descrita pela ação (2.15) ao nível de teoria quântica descrita por um funcional de vértice $\Gamma(A, T, c, \bar{c}, \eta, \Omega, \theta)$. Este funcional deve obedecer à mesma identidade de Slavnov-Taylor (2.23), bem como as outras equações compatíveis com o QAP (2.33).

As equações mencionadas acima são implementáveis a nível quântico [13, 16], significando que, pode-se provar, para um caso sem anomalias, que as quebras devidas às inserções são nulas, logo, podemos fazer uso destas como base da análise algébrica. Como as equações são entendidas em nível perturbativo, devemos também entender a ação como uma expansão da forma:

$$\Sigma \rightarrow (\Sigma + \varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count}), \tag{3.1}$$

onde ε é um parâmetro adimensional pequeno, requerendo que a ação perturbada satisfaça, em primeira ordem em ε, ao mesmo conjunto de identidades obedecidas por Σ. A saber, as identidades de Slavnov-Taylor, gauge fixing de Landau, equações do ghost, do anti-ghost e simetria rígida. Lembrando, é claro, que a perturbação, $\widetilde{\Sigma}^{count}$, representa a construção mais geral de contratermos locais, compatíveis com as simetrias e vínculos presentes na ação, como, por exemplo, a propriedade de antissimetria de $T_{\mu\nu}$. Simetrias, como, conjugação de carga em um modelo Abeliano, ou a simetria da ação não-Abeliana sob a troca

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\rightarrow -\widetilde{T}_{\mu\nu} \\ \widetilde{T}_{\mu\nu} &\rightarrow T_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

A simetria (3.23), que é uma generalização da simetria acima incluindo-se as fontes, é uma simetria da ação S_{inv}, que foi apresentada no segundo capítulo, e será estendida à ação Σ mais adiante, podem ser introduzidas na ação, a qualquer ordem, por não gerarem novos contratermos ou anomalias.

Realizando então a substituição (3.1), nas equações que definem a ação obtidas anteriormente, (2.23)(2.24)(2.27)(2.28)(5.23), tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta(\Sigma+\varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count})}{\delta b^a} &= \partial^\mu A^{a\mu} \\
\mathcal{G}_a(\Sigma+\varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count}) &= \Delta^{\rm cl}_a \\
\mathcal{S}(\Sigma+\varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count}) &= 0 \\
\overline{\mathcal{G}}_a(\Sigma+\varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count}) &= 0 \\
\mathcal{W}^a_{\rm rig}(\Sigma+\varepsilon\widetilde{\Sigma}^{count}) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

que são as equações as quais a ação de contratermos $\widetilde{\Sigma}^{count}$ deve satisfazer, e lembrando que $\widetilde{\Sigma}^{count}$ é uma série tomada em primeira ordem em ε, ou seja:

$$
\mathcal{B}_\Sigma\widetilde{\Sigma}^{\rm count} = 0\ , \tag{3.4}
$$

$$
\frac{\delta\widetilde{\Sigma}^{\rm count}}{\delta b^a} = 0\ , \tag{3.5}
$$

$$
\mathcal{G}_a\widetilde{\Sigma}^{\rm count} = \int d^4x \left(\frac{\delta\widetilde{\Sigma}^{\rm count}}{\delta c^a} + f^{abc}\bar{c}^b\frac{\delta\widetilde{\Sigma}^{\rm count}}{\delta b^c}\right) = 0\ , \tag{3.6}
$$

$$
\frac{\delta\widetilde{\Sigma}^{\rm count}}{\delta\bar{c}^a} + \partial_\mu\frac{\delta\widetilde{\Sigma}^{\rm count}}{\delta\Omega^{\mu a}} = 0\ , \tag{3.7}
$$

e

$$
\mathcal{W}^a_{\rm rig}\widetilde{\Sigma}^{\rm count} = 0\ . \tag{3.8}
$$

Lembrando ainda que $\mathcal{B}_\Sigma$ já foi definido anteriormente como o operador de Slavnov-Taylor linearizado relativo aos diversos campos do modelo e cuja forma funcional é:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\Sigma &= \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta\Omega^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a}\frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta\Sigma}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta\tau^a} + b^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a}\right) \\
&+ \int d^4x\,\frac{1}{2}\left(\frac{\delta\Sigma}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\eta^{\imath\mu\nu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^{\imath\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}}\right)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

que, como dito anteriormente, é nilpotente, ou seja:

$$\mathcal{B}_\Sigma \mathcal{B}_\Sigma = 0. \tag{3.10}$$

Comecemos a análise das condições definidas pelas equações (3.4)-(3.8) a partir da equação (3.5):

$$\frac{\delta \widetilde{\Sigma}^{\text{count}}}{\delta b^a} = 0 \quad \to \quad \widetilde{\Sigma}^{\text{count}} \neq \widetilde{\Sigma}^{\text{count}}(b), \tag{3.11}$$

que define, a independência do contratermo $\widetilde{\Sigma}^{\text{count}}$ em relação ao multiplicador de Lagrange b. A próxima equação a ser analisada é a de ghost, que é satisfeita redefinindo-se os campos $\bar{c}$ e as correntes Ω, de tal forma que temos uma nova variável γ, que é da forma:

$$\gamma_\mu = \Omega_\mu + \partial_\mu \bar{c}. \tag{3.12}$$

Utilizando a condição (3.11), que determina que a ação de contratermo é independente de b, temos que a equação (3.6), se resume a:

$$\mathcal{G}_a \widetilde{\Sigma}^{\text{count}} = \int d^4x \left(\frac{\delta \widetilde{\Sigma}^{\text{count}}}{\delta c^a} \right) = 0 \,, \tag{3.13}$$

assim, obtemos uma restrição quanto à forma da ação de contratermos, que só pode depender do ghost c derivado $(\partial_\mu c)$. Devido ao vínculo de dimensão ultravioleta 4 e número de ghost 0, os contratermos assumem a forma:

$$\tilde{\Sigma}^{\text{count}} = \Sigma^c(A) + \Sigma^c(A,T) + \Sigma^c(T) + \beta \int d^4x \, \gamma^{a\mu} \partial_\mu c^a \,, \tag{3.14}$$

sendo β um parâmetro arbitrário e $\Sigma^c(A)$, $\Sigma^c(T)$, dependem somente dos campos de gauge A no primeiro caso e dos campos tensoriais T no segundo. O termo $\Sigma^c(A,T)$, por sua vez, representa apenas os termos de interação entre os campos de gauge e os campos tensoriais de matéria.

A condição (3.8) representa a simetria rígida de grupo na escolha dos contratermos, forçando-nos a contrair os índices de grupo com grandezas definidas dentro do grupo, como um produto de matrizes λ_R λ_I e (ou) por meio de δ_{ij} f_{abc} ou produtos destes.

Devido a redefinição (3.12), obtida da equação (3.7), passamos a nos utilizar do operador linearizado definido para a ação reduzida $\hat{\Sigma}$. Este operador, tem a forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\hat{\Sigma}} &= \int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta}{\delta\gamma^{a\mu}} + \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\gamma^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A^a_\mu} + \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\tau^a}\frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta\tau^a}\right) \\
&+ \int d^4x \, \frac{1}{2}\left(\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\eta^{i\mu\nu}} + \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\eta^{i\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta T^{\imath}_{\mu\nu}}\right),
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

sendo a corrente γ definida em termos da corrente Ω e do antighost $\bar{c}$ em (3.12). E a ação reduzida definida como:

$$
\Sigma = \hat{\Sigma} + \int d^4x \, b^a \partial_\mu A^{a\mu} \tag{3.16}
$$

A última equação a ser analisada é a aplicação do operador Slavnov-Taylor linearizado sobre os contratermos,

$$
B_{\hat{\Sigma}}\tilde{\Sigma}^{\text{count}} = B_{\hat{\Sigma}}\Sigma^c(A) + B_{\hat{\Sigma}}\Sigma^c(A,T) + B_{\hat{\Sigma}}\Sigma^c(T) + \beta\int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^{a\mu}}\partial^\mu c^a - \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a}\partial^\mu\gamma^a_\mu\right) = 0. \tag{3.17}
$$

Tal equação pode ser desdobrada em outras equações independentes. Este conjunto de equações correlaciona os coeficientes dos diversos termos da ação $\tilde{\Sigma}^{\text{count}}$.

As equações obtidas são:

$$
\int d^4x \left(-\beta(D^\nu F_{\mu\nu})^a\partial^\mu c^a + D_\mu c^a \frac{\delta\Sigma^c(A)}{\delta A^a_\mu}\right) = 0 \tag{3.18}
$$

$$\begin{aligned}\int d^4x \Big(\quad & \beta \frac{\delta S(ATT)}{\delta A^a_\mu}\partial^\mu c^a + \partial^\mu c^a \frac{\delta \Sigma^c(ATT)}{\delta A^a_\mu} \\ - \quad & \tfrac{1}{2} c^a(\lambda^a_R \widetilde{T}_{\mu\nu} + \lambda^a_I T_{\mu\nu})\frac{\delta \Sigma^c(T^2)}{\delta T_{\mu\nu}}\Big) = 0\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\int d^4x \Big(\quad & \beta \frac{\delta S(AATT)}{\delta A^a_\mu}\partial^\mu c^a + \frac{\delta \Sigma^c(AATT)}{\delta A^a_\mu}\partial^\mu c^a \\ + \quad & f_{abc}A^b_\mu c^c \frac{\delta \Sigma^c(ATT)}{\delta A^a_\mu} - \tfrac{1}{2}(\lambda^a_R \widetilde{T}_{\mu\nu} + \lambda^a_I T_{\mu\nu})\frac{\delta \Sigma^c(ATT)}{\delta T_{\mu\nu}}\Big) = 0\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\int d^4x \left(f_{abc}A^b_\mu c^c \frac{\delta \Sigma^c(ATT)}{\delta A^a_\mu} - \frac{1}{2} c^a(\lambda^a_R \widetilde{T}_{\mu\nu} + \lambda^a_I T_{\mu\nu})\frac{\delta \Sigma^c(AATT)}{\delta T_{\mu\nu}}\right) = 0 \tag{3.21}$$

$$\int d^4x \left(c^a(\lambda^a_R \widetilde{T}_{\mu\nu} + \lambda^a_I T_{\mu\nu})\frac{\delta \Sigma^c(T^4)}{\delta T_{\mu\nu}}\right) = 0. \tag{3.22}$$

Antes de determinarmos os contratermos da ação $\tilde{\Sigma}^{\text{count}}$ é conveniente determinar algumas simetrias globais, que não são quebradas em nível quântico e, também conhecer o resultado da aplicação do operador linearizado $B_{\hat{\Sigma}}$ sobre campos e correntes.

Observando a ação $\hat{\Sigma}$, bem como a identidade de Slavnov-Taylor, vemos que os campos $T_{\mu\nu}$ e as correntes $\eta_{\mu\nu}$ possuem a seguinte simetria extra:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\to -\widetilde{T}_{\mu\nu} \qquad \eta_{\mu\nu} \to \widetilde{\eta}_{\mu\nu} \\ \widetilde{T}_{\mu\nu} &\to T_{\mu\nu} \qquad \widetilde{\eta}_{\mu\nu} \to -\eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Para que se torne mais fácil observar o funcionamento do método algébrico sobre o modelo, fornece-se abaixo a atuação do operador linearizado sobre campos e correntes:

$$
\begin{aligned}
B_{\hat{\Sigma}}(A^a_\mu) &= \partial_\mu c^a + f^{abc} A^b_\mu c^c \, , \\
B_{\hat{\Sigma}}(T^i_{\mu\nu}) &= -c^a \Big((\lambda^a_R)^{ij} \widetilde{T}^j_{\mu\nu} + (\lambda^a_I)^{ij} T^j_{\mu\nu} \Big) \, , \\
B_{\hat{\Sigma}}(\widetilde{T}^i_{\mu\nu}) &= c^a \Big((\lambda^a_R)^{ij} T^j_{\mu\nu} - (\lambda^a_I)^{ij} \widetilde{T}^j_{\mu\nu} \Big) \\
B_{\hat{\Sigma}}(c^a) &= -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \\
B_{\hat{\Sigma}}(\gamma^a_\mu) &= \frac{\delta \Sigma}{\delta A^{a\mu}} \\
B_{\hat{\Sigma}}(\eta^a_{\mu\nu}) &= \frac{\delta \Sigma}{\delta \eta^{a\mu\nu}} \\
B_{\hat{\Sigma}}(\tau^a) &= \frac{\delta \Sigma}{\delta c^a},
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

que representam a generalização da simetria de BRS, apresentada pelos campos, também as fontes, colocando-as em pé de igualdade com os campos, ao menos sob o ponto de vista da simetria.

Uma vez que a equação (3.18) determina a renormalização do contratermo da ação de Yang-Mills puro, e que este caso é muito bem desenvolvido nas referências [13, 14], não serão dados detalhes dos cálculos. Também, apresentarei diretamente o resultado da aplicação das equações (3.4) a (3.8) ao cálculo da ação de contratermo devido a extensão dos mesmos. A ação de contratermos é ,então,

$$
\begin{aligned}
\Sigma^c(A) &= -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \left((\rho - 2\beta) F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} - 2\beta f_{abc} F^{a\mu\nu} A^b_\mu A^c_\nu \right) \\
\Sigma^c(T) &= -\frac{\delta}{2} \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\alpha T_{\mu\nu})^2 - 2(\partial_\mu T^{\mu\nu})^2 \right) \\
&\quad - \frac{(\alpha - \delta)}{4} \int d^4x \left(2(T_{\mu\nu} T^{\nu\rho})^2 - \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma^c(A,T) = \quad & (2\beta+\delta)\int d^4x\, A^a_\mu\Big((\partial_\alpha T^{\alpha\nu})\lambda^a_R\widetilde{T}^\mu{}_\nu - (\partial_\alpha\widetilde{T}^{\alpha\nu})\lambda^a_R T^\mu{}_\nu\Big) \\
& +(2\beta+\delta)\int d^4x\, A^a_\mu\Big((\partial_\alpha T^{\alpha\nu})\lambda^a_I T^\mu{}_\nu + (\partial_\alpha\widetilde{T}^{\alpha\nu})\lambda^a_I\widetilde{T}^\mu{}_\nu\Big) \\
& -(2\beta+\frac{\delta}{2})\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\alpha\Big(T^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_I T^\alpha{}_\nu + T^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_R\widetilde{T}^\alpha{}_\nu\Big) \\
& +(2\beta+\frac{\delta}{2})\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\alpha\Big(\widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_I T^\alpha{}_\nu + \widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_R\widetilde{T}^\alpha{}_\nu\Big) \\
& -(2\beta+\frac{\delta}{2})\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\alpha\Big(\widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_I\widetilde{T}^\alpha{}_\nu - \widetilde{T}^{\mu\nu}\lambda^a_I\lambda^b_R T^\alpha{}_\nu\Big) \\
& -(2\beta+\frac{\delta}{2})\int d^4x\, A^a_\mu A^b_\alpha\Big(T^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_I\widetilde{T}^\alpha{}_\nu - T^{\mu\nu}\lambda^a_R\lambda^b_R T^\alpha{}_\nu\Big)\ ,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

onde $(\rho, \alpha, \delta, \beta)$ são coeficientes arbitrários.

A ação de contratermo invariante mais geral contém quatro parâmetros arbitrários, que correspondem à renormalização das constantes de acoplamento, dos campos e das amplitudes das correntes de BRS. Resta determinar como os campos e parâmetros reabsorvem estas variações.

Definindo as variações nos campos e parâmetros na forma:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (1+\varepsilon z_g)g \ , & q_0 &= (1+\varepsilon z_q)q \ , \\
A_0^\mu &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_A)A^\mu \ , & \Omega_0^\mu &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_\Omega)\Omega^\mu \ , \\
\bar{c}_0 &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_{\bar{c}})\bar{c} \ , & b_0 &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_b)b \ , \\
T_0^{\mu\nu} &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_T)T^{\mu\nu} \ , & \eta_0^{\mu\nu} &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_\eta)\eta^{\mu\nu} \ , \\
c_0 &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_c)c \ , & \tau_0 &= (1+\varepsilon \mathcal{Z}_\tau)\tau \ ,
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

e aplicando à ação Σ, igualamos o primeiro termo da expansão em ε com a ação de contratermo, de forma

$$
\Sigma(\phi(1+\varepsilon\mathcal{Z}_\phi), v(1+\varepsilon z_v)) = \Sigma + \varepsilon\tilde{\Sigma}^{count}, \tag{3.27}
$$

onde $\phi(1+\varepsilon\mathcal{Z}_\phi)$ representa todos os campos redefinidos acima, e $v(1+\varepsilon z_v)$ são os parâmetros redefinidos.

De fato, ao igualarmos os termos em primeira ordem no parâmetro ε, obtemos as redefinições para os campos e parâmetros, ou constantes de interação, do modelo como sendo relacionados pela forma:

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (1-\varepsilon\frac{\rho}{2})g \ , & q_0 &= (1+\varepsilon\alpha)q \ , \\
A_0^\mu &= (1-\varepsilon\beta)A^\mu \ , & \Omega_0^\mu &= (1+\varepsilon\beta)\Omega^\mu \ , \\
\bar{c}_0 &= (1+\varepsilon\beta)\bar{c} \ , & b_0 &= (1+\varepsilon\beta)b \ , \\
T_0^{\mu\nu} &= (1-\varepsilon\frac{\delta}{4})T^{\mu\nu} \ , & \eta_0^{\mu\nu} &= (1+\varepsilon\frac{\delta}{4})\eta^{\mu\nu} \ , \\
c_0 &= c \ , & \tau_0 &= \tau \ ,
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

sendo, então, possível reescrever a ação e seu contratermo da forma

$$
\Sigma + \varepsilon\tilde{\Sigma}^{\text{count}} = \Sigma(g_0, q_0, A_0, c_0, \bar{c}_0, b_0, T_0, \Omega_0, \eta_0, \tau_0) + O(\varepsilon^2) \ . \tag{3.29}
$$

É importante notar que a não renormalização do ghost c e sua fonte de BRS τ é devida às equações de gauge fixing e à equação de anti-ghost [13, 15], que existem somente no gauge de Landau.

A equação(3.29) diz-nos que o contratermo invariante de BRS pode ser reabsorvido por meio de redefinições dos parâmetros, campos e fontes da ação inicial, o que é justamente o caso das correções quânticas, demonstrando, então, de forma algébrica a renormalizabilidade da ação estudada. Além disto, a prova algébrica, por não fazer uso de qualquer mecanismo de regularização ou renormalização específico, permite que este resultado seja válido em qualquer ordem da série perturbativa.

Capítulo 4

Estudo de Anomalias do Modelo de Campos Tensoriais de Matéria

O problema a ser resolvido neste estágio de nossa análise quântica do modelo é a possibilidade de existirem anomalias, que afetam a identidade de Slavnov-Taylor em nível quântico.

Em princípio, deveríamos estudar a possibilidade de termos de quebra nas simetrias, dadas pelas equações de antighost (2.24), ghost (2.28), fixação de gauge (2.27) e invariância rígida (5.23); porém, é fato conhecido, que estas equações não são quebradas em nível quântico [13]. Como o método pelo qual estudaremos a possibilidade de anomalias é algébrico, a cohomologia do setor de número de ghost 1 é independente das correntes de BRS externas. A prova desta afirmação é dada nas referências [13, 22], e, é válida para qualquer grupo de gauge semi-simples.

Devido ao princípio da ação quântica (QAP), a atuação do operador de Slavnov-Taylor sobre Γ só pode produzir um termo de quebra que seja uma inserção local integrada, de numero de ghost 1 e dimensão ultravioleta 4. Tomando este resultado perturbativamente temos:

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \Delta \cdot \Gamma = \Delta^1 + O(\hbar), \tag{4.1}$$

onde Γ, obedece às condições ditadas pelas equações (2.24),(2.27),(2.28) e (5.23) Levando Δ^1 a obedecer aos seguintes vínculos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta^1}{\delta b^a} &= 0, \quad \frac{\delta \Delta^1}{\delta \overline{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Delta^1}{\delta \Omega^{a\mu}} = 0, \\ \mathcal{G}_a \Delta^1 &= 0, \quad \mathcal{W}^a_{rig} \Delta^1 = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

a propriedade de nilpotência, de B_Γ traduz-se perturbativamente como:

$$B_\Gamma = B_{\hat{\Sigma}} + O(\hbar), \tag{4.3}$$

fornecendo, então, a condição

$$B_{\hat{\Sigma}} \Delta^1 = 0. \tag{4.4}$$

Esta condição sobre a quebra é que determina qual o possível termo de quebra, Δ^1. Tal termo, porém, só será uma anomalia se não puder ser reabsorvido como uma variação BRS de um dado polinômio integrado de número de ghost 0 e dimensão ultravioleta 4. Podemos ver, por meio das equações (4.2), que Δ^1 é independente de b e depende do campo $\overline{c}$ e da corrente Ω_μ apenas na combinação (3.12). A equação do antighost, apresentada explicitamente,

$$\int d^4x \, \frac{\delta \Delta^1}{\delta c^a} = 0, \tag{4.5}$$

leva a que, o ghost c só apareça em Δ^1, derivado, ou seja, $\Delta^1(c) \equiv \Delta^1(\partial c)$.

Com base, nestas restrições aos campos, que podem entrar na determinação das bases para Δ^1, temos que , Δ^1 só pode ser parametrizado, da forma:

$$\Delta^1 = \Delta^1(A,c) + \Delta^1(T,c) + \Delta^1(A,T,c), \tag{4.6}$$

onde $\Delta^1(A,c)$depende somente, do campo de gauge e do ghost c, que como dito anteriormente só aparece derivado, $\Delta^1(T,c)$ depende do tensor de matéria antissimétrico e do ghost, e $\Delta^1(A,T,c)$ depende do campo de gauge, do tensor de matéria e do ghost c.

A equação (4.4) desdobra-se em três equações, que são:

$$\int d^4x \left((D_\mu c^a) \frac{\delta \Delta^1(A,c)}{\delta A^a_\mu} - \frac{1}{2} f_{abc} c^b c^c \frac{\delta \Delta^1(A,c)}{\delta c^a} \right) = 0 \ , \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \int d^4x \Bigg(& \tfrac{1}{2} f_{abc} c^b c^c \frac{\delta \Delta^1(T,c)}{\delta c^a} + \partial_\mu c^a \frac{\delta \Delta^1(A,T,c)}{\delta A^a_\mu} \\ & - \tfrac{1}{2} c^a \frac{\delta \Delta^1(T,c)}{\delta T^{\mu\nu}} \left(\lambda^a_R \widetilde{T}^{\mu\nu} + \lambda^a_I T^{\mu\nu} \right) \Bigg) = 0 \ , \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \int d^4x \Bigg(& f_{abc} A^b_\mu c^c \frac{\delta \Delta^1(A,T,c)}{\delta A^a_\mu} - \tfrac{1}{2} f_{abc} c^b c^c \frac{\delta \Delta^1(A,T,c)}{\delta c^a} \\ & - \tfrac{1}{2} c^a \frac{\delta \Delta^1(A,T,c)}{\delta T^{\mu\nu}} \left(\lambda^a_R \widetilde{T}^{\mu\nu} + \lambda^a_I T^{\mu\nu} \right) \Bigg) = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.9}$$

A equação (4.7) é a condição de consistência, para a anomalia de gauge, usual de uma ação de Yang-Mills pura. $\Delta^1(A,c)$ difere da anomalia usual de gauge apenas por termos que são variações de BRS de um polinômio integrado qualquer de dimensão ultravioleta 4 e número de ghost 0. O estudo da anomalia de gauge puro já é bem conhecido, sendo os trabalhos fundamentais do assunto encontrados em [21] e sua prova algébrica, é encontrada na referência [13]. A anomalia de gauge não-Abeliana é, a menos de uma variação de BRS:

$$\Delta^1(A,c) = r\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\int d^4x\, c^a\partial^\mu\left(d^{abc}\partial^\nu A^{b\alpha}A^{c\beta} + \frac{D^{abcd}}{12}A^{b\nu}A^{c\alpha}A^{d\beta}\right), \tag{4.10}$$

onde r é calculado a partir de parâmetros da teoria, d_{abc} é o tensor invariante completamente simétrico de 3 índices, e D_{abcd} é construído a partir de d_{abc} ou seja:

$$\begin{aligned} d_{(abc)} &= \tfrac{1}{2}Tr(\tau_a\{\tau_b,\tau_c\}), \\ D_{abcd} &= d^m{}_{ab}f_{mcd} + d^m{}_{ac}f_{mdb} + d^m{}_{ad}f_{mbc}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Com a escolha de uma representação conveniente para a matéria, $d_{(abc)}$ anula-se, anulando a anomalia a 1 loop. E, pelo teorema de Adler-Bardeen, temos que para uma anomalia de gauge que se anula a 1 loop, esta é nula a todas as ordens.

As equações (4.8) e (4.9) permitem o estudo de $\Delta^1(T,c)$ e $\Delta^1(A,T,c)$ que, diferente da anomalia de gauge, não contam com nenhum teorema de não renormalização, como o teorema de Adler-Bardeen, sendo, então, necessário que, ou sejam nulos, ou uma variação de BRS. Temos o vínculo adicional que Δ^1 tem de ser invariante por:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &\to -\widetilde{T}_{\mu\nu} \\ \widetilde{T}_{\mu\nu} &\to T_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

assim como é a ação Σ.

Fazendo uso destas simetrias discretas, ao qual o termo de anomalia também deve obedecer, obtemos que a forma do cociclo $\Delta^1(T,c)$ e $\Delta^1(A,T,c)$ é dada pelo seguinte polinômio integrado:

$$\Delta^1(T,c)+\Delta^1(A,T,c) = \int d^4x\, \partial_\mu c^a \Big(\partial^\nu \widetilde{T}_{\nu\beta} a^a T^{\beta\mu} - \partial^\nu T_{\nu\beta} a^a \widetilde{T}^{\beta\mu}$$
$$+\partial^\nu T_{\nu\beta} b^a T^{\beta\mu} + \partial^\nu \widetilde{T}_{\nu\beta} b^a \widetilde{T}^{\beta\mu}$$
$$+A_\nu^b T^{\mu\alpha} M_1^{ab} T_\alpha{}^\nu + A_\nu^b \widetilde{T}^{\mu\alpha} M_1^{ab} \widetilde{T}_\alpha{}^\nu \qquad (4.13)$$
$$+A_\nu^b \widetilde{T}^{\mu\alpha} M_2^{ab} T_\alpha{}^\nu - A_\nu^b T^{\mu\alpha} M_2^{ab} \widetilde{T}_\alpha{}^\nu \Big) ,$$

onde as matrizes a^a e b^a obedecem à relações,

$$[\lambda_I^a, a^b] - [\lambda_R^a, b^b] - f_{abc} a^c = 0 ,$$
$$[\lambda_R^a, a^b] + [\lambda_I^a, b^b] - f_{abc} b^c = 0 , \qquad (4.14)$$

e as matrizes M_1^{ab} e M_2^{ab} são, respectivamente, iguais a:

$$M_1^{ab} = \Big(\lambda_R^a a^b + \lambda_I^a b^b \Big) ,$$
$$M_2^{ab} = \Big(\lambda_I^a a^b - \lambda_R^a b^b \Big) . \qquad (4.15)$$

Desta forma, temos que $\Delta^1(T,c)$ e $\Delta^1(A,T,c)$, dados por (4.13), representam um candidato a uma anomalia de matéria. Todavia, ainda falta verificar se $\Delta^1(T,c)$ e $\Delta^1(A,T,c)$ podem ser escritos como uma variação de BRS. De fato, a soma $\Delta^1(T,c)+\Delta^1(A,T,c)$ pode ser escrita como uma variação de BRS da forma:

$$\Delta^1(T,c)+\Delta^1(A,T,c) = B_\Sigma \hat{\Delta}, \qquad (4.16)$$

onde $\hat{\Delta}$ é da forma:

$$\hat{\Delta} = \int d^4x\, A_\mu^a \Big(\partial^\nu \widetilde{T}_{\nu\beta} a^a T^{\beta\mu} - \partial^\nu T_{\nu\beta} a^a \widetilde{T}^{\beta\mu} + \partial^\nu T_{\nu\beta} b^a T^{\beta\mu} + \partial^\nu \widetilde{T}_{\nu\beta} b^a \widetilde{T}^{\beta\mu} \Big) , \qquad (4.17)$$

significando que $\Delta^1(T,c)$ e $\Delta^1(A,T,c)$ podem ser reabsorvidos como contratermos, e, portanto, não existem anomalias de matéria para o modelo constituído de campos de gauge e tensores antissimétricos.

Capítulo 5

Inclusão de Férmions no Modelo de Campos Tensoriais de Matéria

5.1 Definição da Ação de Interação Férmions - Tensores de Matéria

Como apresentado no primeiro capítulo, o modelo de campos tensoriais de matéria foi desenvolvido com o propósito de ser uma alternativa para a descrição de certas interações, como por exemplo os decaimentos $\pi^- \to \overline{e}\,\overline{\nu}\gamma$ e $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu$, cujas predições até o presente momento ainda não têm a mesma precisão de outros resultados descritos pela teoria. Como o modelo orinalmente proposto por Avdeev e Chizhov é constituído por um dubleto tensorial, que teria com os férmions uma interação tipo Yukawa, a primeira generalização, logicamente, deve ser a introdução de férmions no modelo de campos tensoriais não-Abeliano. A interação com férmions aqui apresentada, é do tipo buscado originalmente por Avdeev e Chizhov, para melhorar os dados de decaimento estudados mais detalhadamente, do ponto de vista fenomenológico, por estes autores em [8]

Dois tipos de férmions diferentes, de chiralidades opostas, são introduzidos no modelo, um férmion right (R) descrito no grupo U(1) e férmions left (L^i), onde i especifica a representação, nos grupos SU(2) e U(1). A transformação de BRS proposta para estes férmions é então da forma:

$$\begin{aligned} sR &= -\tfrac{i}{2}cR \\ sL^i &= ic^a(\lambda^a)_{ij}L^j + \tfrac{i}{2}cL^i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como fica claro pela apresentação desta transformação de BRS, acrescentamos ao modelo interação com campos de gauge Abelianos além da interação com campos não-Abelianos apresentada, em (2.6), no segundo capítulo. Utilizando um gauge tipo Landau para a fixar a simetria U(1), da mesma forma como foi feito para o caso não-Abeliano, temos então a transformação de BRS dos campos do modelo estendido, da forma:

$$\begin{aligned} s\varphi^{\dagger i}_{\mu\nu} &= -ic^a\varphi^{\dagger j}_{\mu\nu}(\lambda^a)_{ji} - ic\varphi^{\dagger i}_{\mu\nu} \\ s\varphi^i_{\mu\nu} &= ic^a(\lambda^a)_{ij}\varphi^j_{\mu\nu} + ic\varphi^i_{\mu\nu} \\ sB_\mu &= \partial_\mu c \\ sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a + f_{abc}A^b_\mu c^c \\ sR &= -\tfrac{i}{2}cR \qquad s\overline{R} = \tfrac{i}{2}\overline{R}c \\ sL^i &= ic^a(\lambda^a)_{ij}L^j + \tfrac{i}{2}cL^i \qquad s\overline{L}^i = -i\overline{L}^j(\lambda^a)_{ji}c^a - \tfrac{i}{2}\overline{L}^i c \\ sc &= 0 \quad s\overline{c} = b \quad sb = 0 \\ sc^a &= -\tfrac{1}{2}f_{abc}c^bc^c \quad s\overline{c}^a = b^a \quad sb^a = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Esta transformação de BRS permite definir uma derivada covariante sobre os campos tensoriais auto-duais complexos, $\varphi_{\mu\nu}$, da forma:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma \varphi^i_{\mu\nu} - i\Big(B_\sigma \varphi^i_{\mu\nu} + (\lambda^a)_{ij} A^a_\sigma \varphi^j_{\mu\nu}\Big) \\
(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger i} &= \partial_\sigma \varphi^{\dagger i}_{\mu\nu} + i\Big(B_\sigma \varphi^{\dagger i}_{\mu\nu} + A^a_\sigma \varphi^{\dagger j}_{\mu\nu} (\lambda^a)_{ji}\Big),
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

que são covariantes segundo a transformação de BRS, de tal forma que:

$$
\begin{aligned}
s(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= ic^a (\lambda^a)_{ij} (\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^j + ic(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i \\
s(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger i} &= -ic^a (\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger j} (\lambda^a)_{ji} - ic(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^{\dagger i}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Tal qual apresentado no segundo capítulo, em que definimos esta separação para os casos Abeliano e não-Abeliano, realiza-se agora a separação da derivada covariante sobre o campo auto dual complexo, obtendo a atuação da derivada covariante sobre os tensores reais, $T_{\mu\nu}$ e $\widetilde{T}_{\mu\nu}$, da forma:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\sigma \varphi_{\mu\nu})^i &= (\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^i + i(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^i \\
(\nabla_\sigma T_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma T^i_{\mu\nu} + B_\sigma \widetilde{T}^i_{\mu\nu} + (\lambda^a_I)_{ij} A^a_\sigma T^j_{\mu\nu} + (\lambda^a_R)_{ij} A^a_\sigma \widetilde{T}^j_{\mu\nu} \\
(\nabla_\sigma \widetilde{T}_{\mu\nu})^i &= \partial_\sigma \widetilde{T}^i_{\mu\nu} - B_\sigma T^i_{\mu\nu} + (\lambda^a_I)_{ij} A^a_\sigma \widetilde{T}^j_{\mu\nu} - (\lambda^a_R)_{ij} A^a_\sigma T^j_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

obtemos então a transformação de BRS sobre os campos reais do modelo, estas representam a soma das transformações abeliana e não abeliana e se apresentam como:

$$
\begin{aligned}
sT^i_{\mu\nu} &= -c^a(\lambda^a_I)_{ij}T^j_{\mu\nu} - c^a(\lambda^a_R)_{ij}\widetilde{T}^j_{\mu\nu} - c\widetilde{T}^i_{\mu\nu} \\
s\widetilde{T}^i_{\mu\nu} &= c^a(\lambda^a_R)_{ij}T^j_{\mu\nu} - c^a(\lambda^a_I)_{ij}\widetilde{T}^j_{\mu\nu} + cT^i_{\mu\nu} \\
sB_\mu &= \partial_\mu c \\
sA^a_\mu &= \partial_\mu c^a + f_{abc}A^b_\mu c^c \\
sR &= -\tfrac{i}{2}cR \qquad s\overline{R} = \tfrac{i}{2}\overline{R}c \\
sL^i &= ic^a(\lambda^a)_{ij}L^j + \tfrac{i}{2}cL^i \qquad s\overline{L}^i = -i\overline{L}^j(\lambda^a)_{ji}c^a - \tfrac{i}{2}\overline{L}^i c \\
sc &= 0 \quad s\overline{c} = b \quad sb = 0 \\
sc^a &= -\tfrac{1}{2}f_{abc}c^bc^c \quad s\overline{c}^a = b^a \quad sb^a = 0.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Resta, antes de passar à construção de uma ação invariante sob as simetrias apresentadas em (5.6), apresentar as derivadas covariantes sobre os espinores R e L^i, respectivamente, o férmion de quiralidade "direita"e os férmios de qiralidade "esquerda". [1] Estas são da forma:

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu R &= \partial_\mu R + \tfrac{i}{2}B_\mu R \\
(\nabla_\mu L)^i &= \partial_\mu L^i - iB_\mu L^i - i(\lambda^a)_{ij}A^a_\mu L^j.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

De posse da transformação do conjunto dos campos, assim como tendo definido as derivadas covariantes dos tensores $T_{\mu\nu}$, $\widetilde{T}_{\mu\nu}$ e dos espinores quirais R e L^i, podemos apresentar a ação invariante, que tal qual dito anteriormente tem um termo de gauge-

[1] A quiralidade dos férmions é definida pelas condições

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)L^i &= L^i, \quad \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)R = 0 \\
\tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)R &= R, \quad \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)L^i = 0,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

tal qual na pode ser encontrado na referência [12] fixing de Landau. A forma da ação invariante é:

$$
\begin{aligned}
S_{inv} = \; & -\frac{1}{4g^2}\int d^4x\, F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \int d^4x\, \left(b^a\partial^\mu A^a_\mu - \bar{c}^a\partial^\mu(D_\mu c)^a\right) \\
& -\frac{1}{4e^2}\int d^4x\, B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \int d^4x\, \left(b\partial^\mu B_\mu - \bar{c}\partial^\mu(\partial_\mu c)\right) \\
& -\int d^4x \left((\nabla_\mu T^{\mu\nu})^i(\nabla_\sigma T^\sigma{}_\nu)^i + (\nabla_\mu \widetilde{T}^{\mu\nu})^i(\nabla_\sigma \widetilde{T}^\sigma{}_\nu)^i \right) \\
& -\int d^4x\, \frac{q}{4}\left(2(T^i_{\mu\nu}T^{i\nu\rho})^2 - \frac{1}{2}(T^i_{\mu\nu}T^{i\mu\nu})^2 \right), \\
& +i\int d^4x \left(\overline{L}^i\gamma^\mu(\nabla_\mu L)^i + \overline{R}\gamma^\mu\nabla_\mu R \right) \\
& +\int d^4x \left(\left(f\overline{L}^i\sigma^{\mu\nu}R + f^*\overline{R}\sigma^{\dagger\mu\nu}L^i \right) T^i_{\mu\nu} \right),
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

onde g é a constante de acoplamento do campo não-Abeliano, e é a constante de acoplamento do campo Abeliano, q é constante de acoplamento tensorial puro e f e f^* são respectivamente a constante de acoplamento do tensor com os férmions e seu conjugado complexo. As curvaturas de gauge são respectivamente:

$$
\begin{aligned}
F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \\
B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

e as matrizes $\sigma^{\mu\nu}$ são as mesmas apresentadas em (1.2).

Temos uma ação invariante de BRS, que acopla tensores antissimétricos de matéria a espinores quirais; tal escolha de acoplamento foi feita no sentido de obtermos uma ação com interações semelhantes as apresentadas pela ação proposta fenomenológicamente por Avdeev-Chizhov. Falta, agora, obtermos as equações que definem esta ação de forma a realizarmos o processo de análise algébrica, visando saber se os férmions deste modelo também possuem anomalias, tal qual o modelo Abeliano quando acoplado a férmions. Na próxima seção, será apresentado então todo o conjunto de equações, que define esta ação.

5.2 Aspéctos Clássicos da Ação com Interação Férmions-Tensores de Matéria

De posse da ação quantizada e do conjunto completo de transformações (5.6) dos campos presentes no modelo, deve-se, agora, obter as simetrias clássicas estensíveis ao nível quântico, tal qual foi feito para o modelo sem férmions na seção 2.1. Antes de apresentar as simetrias ao qual este modelo está sujeito, é conveniente lembrar que para tratar convenientemente os campos cujas simetrias são não-lineares, estas simetrias devem ser acrescentadas a ação acopladas a correntes externas, de tal forma que a ação estendida Σ é dada pela soma da ação invariante (5.9) e por uma ação de correntes, da forma:

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= S_{inv} + S_{ext} \\
S_{ext} &= \int d^4x \left(\Omega^a_\mu s(A^{a\mu}) + \tau^a s(c^a) + \frac{1}{2}\eta^i_{\mu\nu} s(T^{i\mu\nu}) \right) \\
&+ \int d^4x \left(\overline{Y}^i s(L^i) - s(\overline{L}^i) Y^i + \overline{\rho} s(R) - s(\overline{R})\rho \right).
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Como as diversas identidades, tais como a identidade de Slavnov-Taylor, são dadas pela atuação de operadores funcionais sobre a ação estendida Σ, é conveniente saber as dimensões ultravioletas e número de ghost dos diversos campos do modelo. A tabela abaixo apresenta, então, estes dados. Convém lembrar que os campos de dimensão fracionária são férmions, e possuem caráter anticomutante , assim como os ghosts.

	A_μ	B_μ	R	L^i	$\bar{c}$	c	b	$\bar{c}^a$	c^a	b^a	$T_{\mu\nu}$	$\eta_{\mu\nu}$	Ω_μ	$\overline{Y}^i$	$\overline{\rho}$	τ
dim.	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	0	2	2	0	2	1	3	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	4
gh. num.	0	0	0	0	-1	1	0	-1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-2

Tabela2 Dimensão ultravioleta e número de ghost.

Com a ação Σ e as dimensões e número de ghost dos campos do modelo, podemos passar às identidades e ou equações que definem este modelo. A primeira equação clássica, que analisaremos é a identidade de Slavnov-Taylor, que possui a forma funcional abaixo

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\Sigma) &= \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta A^a_\mu}\frac{\delta\Sigma}{\delta\Omega^{a\mu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\tau^a}\frac{\delta\Sigma}{\delta c^a} + \frac{1}{2}\frac{\delta\Sigma}{\delta T^i_{\mu\nu}}\frac{\delta\Sigma}{\delta\eta^{i\mu\nu}} + \frac{\delta\Sigma}{\delta Y^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{L}^i} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{Y}^i}\frac{\delta\Sigma}{\delta L^i}\right) \\ &+ \int d^4x \left(\frac{\delta\Sigma}{\delta\rho}\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{R}} - \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\rho}}\frac{\delta\Sigma}{\delta R} + \partial_\mu c\frac{\delta\Sigma}{\delta B_\mu} + b\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + b^a\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}^a}\right) = 0\ .\end{aligned} \tag{5.12}$$

As próximas equações a serem obtidas, são as equações do antighost para os ghosts Abeliano e não-Abeliano. Derivando funcionalmente a ação Σ em relação ao ghost Abeliano, c, obtemos duas equações [2] compatíveis com o princípio de ação quântica da forma:

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = \partial_\mu\partial^\mu\bar{c} - \frac{i}{2}\overline{Y}^i L^i + \frac{i}{2}\overline{L}^i Y^i + \frac{i}{2}\overline{\rho}R - \frac{i}{2}\overline{R}\rho - \frac{1}{2}\eta^i_{\mu\nu}\widetilde{T}^{i\mu\nu}, \tag{5.13}$$

$$\int d^4x\, \frac{\delta\Sigma}{\delta c} = \int d^4x \left(-\frac{i}{2}\overline{Y}^i L^i + \frac{i}{2}\overline{L}^i Y^i + \frac{i}{2}\overline{\rho}R - \frac{i}{2}\overline{R}\rho - \frac{1}{2}\eta^i_{\mu\nu}\widetilde{T}^{i\mu\nu}\right). \tag{5.14}$$

Estas equações possuem um termo de quebra linear nos campos, logo são boas equações para controle do ghost Abeliano também no nível quântico assim como no nível clássico. A próxima equação de antighost é referente ao ghost não Abeliano e possui a forma:

[2] Apesar da segunda equação ser a primeira integrada no espaço tempo, esta equação integrada será mais útil para facilitar o cálculo de anomalias pois pela condição de consistência, que será apresentada mais adiante, obtemos uma identidade de Ward para a simetria $U(1)$ global.

$$\mathcal{G}_a\Sigma = \Delta_a^{cl}, \tag{5.15}$$

com o operador funcinal $\mathcal{G}_a$ da forma:

$$\mathcal{G}_a = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta c^a} + f^{abc}\bar{c}^b \frac{\delta}{\delta b^c} \right) . \tag{5.16}$$

Sendo o termo de quebra desta equação:

$$\begin{aligned} \Delta_a^{\rm cl} &= -\int d^4x \left(f^{abc}(\tau^b c^c + \Omega_\mu^b A^{c\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}^{1}(\lambda_R^a)^{ij}\widetilde{T}^{j\mu\nu} \right) \\ &-\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}^{i}(\lambda_I^a)^{ij}T^{j\mu\nu} - \overline{Y}^i(\lambda^a)_{ij}L^j + \overline{L}^j(\lambda^a)_{ji}Y^i \right) , \end{aligned} \tag{5.17}$$

linear nos campos quânticos, o que caracteriza o termo $\Delta_a^{\rm cl}$ como um termo de quebra clássico que, portanto, não é afetado por correções quânticas. Estas duas equações realizam o controle dos ghosts Abeliano e não-Abeliano, tanto em nível de funcional de número de ghost zero quanto de ghost um.

O próximo conjunto de equações são precisamente as equações de movimento para os multiplicadores b e b^a, que são da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta b^a} &= \partial^\mu A_\mu^a \\ \frac{\delta\Sigma}{\delta b} &= \partial^\mu B_\mu, \end{aligned} \tag{5.18}$$

que representam a definição do gauge-fixing para os campos não-Abelianos A_μ^a e Abeliano B_μ, assim como permitem a definição da ação reduzida $\hat{\Sigma}$, que tem a forma

$$\hat{\Sigma} = \Sigma - \int d^4x \, b\partial_\mu B^\mu + b^a\partial_\mu A^{a\mu}. \tag{5.19}$$

Estas equações são vínculos apresentados por este modelo. Para determinar se estes são todos os vínculos, procedemos à comutação entre os mesmos. Caso ainda tenhamos outros vínculos, estes serão obtidos dos já existentes; em caso contrário, a comutação não irá gerar vínculos novos. Ao comutarmos as equações de gauge fixing com a identidade de Slavnov-taylor, obtemos as seguntes equações:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_a\Sigma &= 0 \\ \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} &= -\partial_\mu\partial^\mu c, \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde o operador $\bar{\mathcal{G}}_a$ é o mesmo definido na equação (2.29) e tem a forma:

$$\overline{\mathcal{G}}_a = \frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} + \partial_\mu\frac{\delta}{\delta\Omega^{\mu a}} \; . \tag{5.21}$$

esta equação permite definir a corrente γ da forma:

$$\gamma_\mu = \Omega_\mu + \partial_\mu\bar{c} \tag{5.22}$$

A próxima equação que se obtém por meio de condição de consistência é a identidade de Ward, que expressa a invariância ŕigida da ação

$$\mathcal{W}^a_{\text{rig}}\Sigma = 0 \; , \tag{5.23}$$

onde o operador $\mathcal{W}^a_{\rm rig}$ é dado por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^a_{\rm rig} &= \int d^4x \, f^{abc}\Big(A^b_\mu \frac{\delta}{\delta A^c_\mu} + \Omega^b_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega^c_\mu} + \tau^b \frac{\delta}{\delta \tau^c} + c^b \frac{\delta}{\delta c^c} + \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta \bar{c}^c} \Big) \\
&+ \frac{1}{2}\int d^4x \left((\lambda^a_R)^{ij} \Big(\widetilde{T}^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T^j_{\mu\nu}} - \widetilde{\eta}^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta^j_{\mu\nu}} \Big) \right) \\
&- \frac{1}{2}\int d^4x \left((\lambda^a_I)^{ij} \Big(T^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T^j_{\mu\nu}} - \eta^i_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta^i_{\mu\nu}} \Big) \right) \\
&+ \int d^4x \left(- \frac{\vec{\delta}}{\delta Y^i} (\lambda^a)_{ij} Y^j + \frac{\vec{\delta}}{\delta \overline{L}_i} \overline{L}_j (\lambda^a)_{ji} \right) \\
&+ \int d^4x \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \overline{Y}_i} \overline{Y}_j (\lambda^a)_{ji} - \frac{\vec{\delta}}{\delta L_i} (\lambda^a)_{ij} L_j \right),
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

sendo que o vetor sobre as derivadas funcionais, denota que estas só atuam sobre o funcional em que se aplica $\mathcal{W}^a_{\rm rig}$. Novamente, aplicando-se a consistência, a condição que se obtém é a relação de comutação de grupo de Lie em forma funcional, que é da forma

$$
\left[\mathcal{W}^a_{\rm rig}, \mathcal{W}^b_{\rm rig} \right] = i f_{abc} \mathcal{W}^c_{\rm rig}. \tag{5.25}
$$

Resta verificar a consistência entre a identidade de Slavnov-Taylor e as equações de antighost Abeliano local e integrado. A comutação entre a equação (5.13) e a identidade de Slavnov-Taylor fornece a identidade de Ward local abeliana, cuja forma é:

$$
\mathcal{W}(x)\Sigma = \partial^\mu \partial_\mu b, \tag{5.26}
$$

sendo o operador $\mathcal{W}(x)$ da forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(x) = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta B_\mu} + &\ \tfrac{i}{2}\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta L^i} L^i - \overline{L}^i \frac{\delta}{\delta \overline{L}^i} - \frac{\vec{\delta}}{\delta R} R + \overline{R} \frac{\delta}{\delta R} \right) \\
+ &\ \tfrac{i}{2}\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta Y^i} Y^i - \overline{Y}^i \frac{\delta}{\delta Y^i} - \frac{\vec{\delta}}{\delta \rho} \rho + \overline{\rho} \frac{\delta}{\delta \overline{\rho}} \right) \\
- &\ \tfrac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta_{\mu\nu}} + T_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}} \right).
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

A comutação deste operador fornece, por consistência, a invariância $U(1)$ local:

$$
[\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(y)] = 0. \tag{5.28}
$$

A equação integrada (5.14) fornece a identidade global, cuja forma funcional é:

$$
U\Sigma = 0, \tag{5.29}
$$

sendo o operador U nada mais do que a integral da identidade de ward da simetria abeliana, e possui a forma:

$$
\begin{aligned}
U = &\ \int d^4x \, \frac{i}{2}\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta L^i} L^i - \overline{L}^i \frac{\delta}{\delta \overline{L}^i} - \frac{\vec{\delta}}{\delta R} R + \overline{R} \frac{\delta}{\delta R} \right) \\
+ &\ \int d^4x \, \frac{i}{2}\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta Y^i} Y^i - \overline{Y}^i \frac{\delta}{\delta Y^i} - \frac{\vec{\delta}}{\delta \rho} \rho + \overline{\rho} \frac{\delta}{\delta \overline{\rho}} \right) \\
- &\ \tfrac{1}{2}\int d^4x \left(\eta_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \eta_{\mu\nu}} + T_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}} \right).
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

Estas equações formam uma álgebra para os funcionais de número de ghost zero, cuja dimensão dos polinômios que compõem este funcional é quatro. Esta álgebra generalizada para um funcional de número de ghost par e dimensão qualquer é dada pelo conjunto de equações:

$$
\begin{aligned}
&B_{\mathcal{F}}\mathcal{S}(\mathcal{F})=0 \\
&\mathcal{G}^a\mathcal{S}(\mathcal{F})+B_{\mathcal{F}}(\mathcal{G}^a\mathcal{F}-\Delta^a_{cl})=W^a_{rig}\mathcal{F} \\
&\frac{\delta}{\delta c}\mathcal{S}(\mathcal{F})+B_{\mathcal{F}}\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c}-\partial_\mu\partial^\mu\bar{c}+\frac{i}{2}\left(\overline{Y}^iL^i-\overline{L}^iY^i-\overline{\rho}R+\overline{R}\rho\right)+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\widetilde{T}^{\mu\nu}\right)=(\mathcal{W}(x)\mathcal{F}-\partial_\mu\partial^\mu b) \\
&\left[\mathcal{W}(x),\mathcal{W}(y)\right]\mathcal{F}=0 \\
&\frac{\delta}{\delta b}(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{c}}+\partial_\mu\partial^\mu c)-\frac{\delta}{\delta\bar{c}}(\frac{\delta}{\delta b}-\partial_\mu B^\mu)=0 \\
&\frac{\delta}{\delta b^b}(\mathcal{G}^a\mathcal{F}-\Delta^a_{cl})-\mathcal{G}^a(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b^b}-\partial_\mu A^{a\mu})=0 \\
&\mathcal{G}^a\overline{\mathcal{G}}^b\mathcal{F}+\overline{\mathcal{G}}^b(\mathcal{G}^a\mathcal{F}-\Delta^a_{cl})=if_{abc}(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta b^c}-\partial_\mu A^{a\mu}) \\
&\mathcal{G}^a(\mathcal{G}^b\mathcal{F}-\Delta^b_{cl})+\mathcal{G}^b(\mathcal{G}^a\mathcal{F}-\Delta^a_{cl})=0\ ,
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

onde $B_{\mathcal{F}}$ é o operador linearizado reduzido de Slavnov-Taylor. A forma funcional deste operador, neste modelo, é:

$$
\begin{aligned}
B_{\mathcal{F}}\ &=\int d^4x\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Omega^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A_{a\mu}}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta\Omega_{a\mu}}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\tau^a}\frac{\delta}{\delta c^a}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c^a}\frac{\delta}{\delta\tau^a}+\partial_\mu c\frac{\delta}{\delta B_\mu}+b\frac{\delta}{\bar{c}}\right) \\
&+\int d^4x\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\rho}\frac{\delta}{\delta\bar{R}}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{R}}\frac{\delta}{\delta\rho}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{\rho}}\frac{\delta}{\delta R}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta R}\frac{\delta}{\delta\bar{\rho}}\right) \\
&+\int d^4x\left(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\bar{L}_i}+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{L}_i}\frac{\delta}{\delta Y_i}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{Y}_i}\frac{\delta}{\delta L_i}-\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta L_i}\frac{\delta}{\delta\bar{Y}_i}\right) \\
&+\int d^4x\left(b^a\frac{\delta}{\delta\overline{c}^a}+\frac{1}{2}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta T^i_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\eta^{i\mu\nu}}+\frac{1}{2}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\eta^{i\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta T^i_{\mu\nu}}\right).
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

No caso em que a identidade de Slavnov-Taylor for nula sobre este funcional $\mathcal{F}$, temos que $B_{\mathcal{F}}$ é nilpotente, ou seja:

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0, \;\Rightarrow\; (\hat{B}_{\mathcal{F}})^2 = 0. \tag{5.33}$$

De posse da álgebra que define um funcional $\mathcal{F}$, podemos passar às análises algébricas do modelo quantizado. Antes porém é conveniente lembrar que iremos realizar os cálculos tendo por base ação reduzida e conseqêntemente o operador linearizado reduzido, que édado como:

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{\mathcal{F}} &= \int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\gamma^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta A_{a\mu}} + \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta A^{a\mu}}\frac{\delta}{\delta\gamma_{a\mu}} + \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\tau^{a}}\frac{\delta}{\delta c^{a}} + \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta c^{a}}\frac{\delta}{\delta\tau^{a}} + \partial_\mu c\frac{\delta}{\delta B_\mu} \right) \\
&+ \int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\rho}\frac{\delta}{\delta\bar{R}} + \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\bar{R}}\frac{\delta}{\delta\rho} - \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\bar{\rho}}\frac{\delta}{\delta R} - \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta R}\frac{\delta}{\delta\bar{\rho}} \right) \\
&+ \int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\bar{L}_i} + \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\bar{L}_i}\frac{\delta}{\delta Y_i} - \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\bar{Y}_i}\frac{\delta}{\delta L_i} - \frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta L_i}\frac{\delta}{\delta\bar{Y}_i} \right) \\
&+ \int d^4x \left(b^a\frac{\delta}{\delta\bar{c}^a} + \frac{1}{2}\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta T^i_{\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta\eta^{i\mu\nu}} + \frac{1}{2}\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta\eta^{i\mu\nu}}\frac{\delta}{\delta T^i_{\mu\nu}} \right),
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde $\hat{\mathcal{F}}$ é definido tal qual ação reduzida, o conjunto de equações deste funcional reduzido é:

$$\begin{aligned}
&\hat{B}_{\hat{\mathcal{F}}}\mathcal{S}(\hat{\mathcal{F}}) = 0 \\
&\mathcal{G}^a\mathcal{S}(\hat{\mathcal{F}}) + B_{\hat{\mathcal{F}}}(\mathcal{G}^a\hat{\mathcal{F}} - \Delta^a_{cl}) = W^a_{rig}\hat{\mathcal{F}} \\
&\frac{\delta}{\delta c}\mathcal{S}(\hat{\mathcal{F}}) + B_{\hat{\mathcal{F}}}\left(\frac{\delta\hat{\mathcal{F}}}{\delta c} + \frac{i}{2}\left(\overline{Y}^i L^i - \overline{L}^i Y^i - \overline{\rho}R + \overline{R}\rho \right) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\widetilde{T}^{\mu\nu} \right) = (\mathcal{W}(x)\hat{\mathcal{F}}) \\
&[\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(y)]\,\hat{\mathcal{F}} = 0
\end{aligned} \tag{5.35}$$

esta redefinição é apenas um artifício de cálculo, servindo apenas para tornar mais simples a análise, não acrescentando ou postergando nada a álgebra obtida em (5.31).

Como este modelo é uma extenção do modelo desenvolvido nos capítulos 2, 3 e 4, trataremos apenas da obtenção das possíveis anomalias para este modelo, não estudando sua estabilidade sobre correções radiativas. Fazemos isto pois como dito nos capítulos 1 e 2, queremos saber para este modelo apenas quais as anomalias que este apresenta, supondo pois que este modelo seja estável, pois não é possível construir contratermos diferentes dos termos que a ação já apresenta.

5.3 Anomalias da Ação com Interação Férmions-Tensores de Matéria

Tal qual apresentamos no capítulo 4, temos que a atuação do operador de Slavnov-Taylor sobre o funcional Γ tem como único resultado possível, um termo de quebra Δ^1 que é uma inserção local integrada de numero de ghost 1 e dimensão ultravioleta 4. Perturbativamente, este resultado apresenta-se como:

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= \Delta \cdot \Gamma \\ &\downarrow \\ S(\Sigma) &= \Delta^1 + O(\hbar). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Aplicando às condições de consistência (5.31) a Δ^1, temos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Delta^1}{\delta b^a} &= 0, \quad \frac{\delta\Delta^1}{\delta\bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta\Delta^1}{\delta\Omega^{a\mu}} = 0, \\ \mathcal{G}_a\Delta^1 &= 0, \quad \mathcal{W}^a_{rig}\Delta^1 = 0 \\ \int d^4x \, \frac{\delta\Delta^1}{\delta c} &= \int d^4x \, \mathcal{A}, \quad \frac{\delta\Delta^1}{\delta b} = 0, \quad \frac{\delta\Delta^1}{\delta\bar{c}} = 0, \end{aligned} \tag{5.37}$$

a propriedade de nilpotência de B_Γ, se traduz perturbativamente, fornecendo a condição:

$$\hat{B_\Sigma}\Delta^1 = 0. \tag{5.38}$$

Diferentemente do caso não-Abeliano puro apresentado no capítulo 4, neste modelo para acoplar os férmions foi introduzida uma invariância $U(1)$ que pode apresentar uma anomalia abeliana associada à identidade de Ward (5.26), da forma:

$$\mathcal{W}(x)(\Gamma) = \Delta \cdot \Gamma \to \mathcal{W}(x)(\Sigma) = \mathcal{A} + O(\hbar). \tag{5.39}$$

Com a condição de consistência $[\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(y)]\,\mathcal{F} = 0$, temos que a anomalia abeliana obedece a condição:

$$\mathcal{W}(x)\mathcal{A}(y) - \mathcal{W}(y)\mathcal{A}(x) = 0. \tag{5.40}$$

Estas duas anomalias estão ligadas por uma equação que é obtida ao se levar em conta a condição obtida da consistência entre identidade de Slavnov-Taylor e equação de antighost Abeliano, para um funcional $\mathcal{F}$, da forma:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta c}\Big(\mathcal{S}(\mathcal{F}) - \Delta^1\Big) \quad &+ \hat{B_\mathcal{F}}\bigg(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta c} + \frac{i}{2}\Big(\overline{Y}^i L^i - \overline{L}^i Y^i - \overline{\rho} R + \overline{R}\rho\Big) + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\widetilde{T}^{\mu\nu}\bigg) \\ &= (\mathcal{W}(x)\mathcal{F} - \mathcal{A}(x)), \end{aligned} \tag{5.41}$$

que leva à equação que víncula as anomalias abeliana e não-Abeliana da forma:

$$\frac{\delta \Delta^1}{\delta c(x)} = \mathcal{A}(x). \tag{5.42}$$

Como as duas anomalias estão vinculadas pela equação acima, ao analisar a anomalia não-Abeliana estaremos obtendo a possível anomalia Abeliana indiretamente devido ao vínculo (5.42) acima. Esta equação possui um importante papel no cálculo das anomalias Abeliana e não-Abeliana, pois ao relacionar as duas anomalias faz com que não se tenha de controlar duas anomalias independentes permitindo, do ponto de vista de cálculo, simplificar o problema.

Do conjunto de equações (5.37), temos que Δ^1 depende do ghost Abeliano, e é independente de seu antighost, assim como também é independente dos multiplicadores b e b^a. Observando-se a equação do antighost $\mathcal{G}^a\Delta^1 = 0$ e do multiplicador b^a, vemos que o ghost c^a só pode aparecer derivado, como se vê pela equação do antighost, com o vínculo da equação do multiplicador b^a, abaixo:

$$\int d^4x \frac{\delta \Delta^1}{\delta c^a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta^1(c^a) \equiv \Delta^1(\partial c^a). \tag{5.43}$$

Sabendo quais os campos que não podem entrar na construção de uma base para a anomalia, devemos-nos fixar na construção de uma base de polinômios integrados de número de ghost 1 e dimensão ultravioleta 4, lembrando porém que estamos interessados apenas nas possíveis anomalias de matéria que envolvem os férmions e tensores de matéria do modelo, observando a tabela 2 da página 60 temos que as fontes férmiônicas não entram nesta base assim como as fontes bosônicas, devido ao seu número de ghost negativo e dimensão alta, o que impede a construção de qualquer elemento de base com estes. Desta forma, Δ^1 é parametrizado sob a forma:

$$\Delta^1 = \Delta^1(A, B, T, \partial_\mu c, \partial_\mu c^a) + \Delta^1(\bar{R}, R, \bar{L}, L, c, T_{\mu\nu}, \partial_\mu c^a), \tag{5.44}$$

que nada mais é do que a anomalia devida aos campos bosônicos acrescida de um termo dos férmions. Assim, analisando apenas o termo de férmions, tenos a condição:

$$B_\Sigma \Delta^1(\bar{R}, R, \bar{L}, L, c, T_{\mu\nu}, \partial_\mu c^a) = 0, \tag{5.45}$$

que, em forma explicita lê-se:

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\tau^a}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta c^a} + \frac{1}{2}\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\eta_{\mu\nu}}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta T^{\mu\nu}}\right) \\
+ &\int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta y}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta\bar{R}} - \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\bar{y}}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta R}\right) \\
+ &\int d^4x \left(\frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta x^i}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta\bar{L}^i} - \frac{\delta\hat{\Sigma}}{\delta\bar{x}^i}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta L^i}\right).
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Lembrando que as derivadas funcionais de $\hat{\Sigma}$ em relação às fontes fornece a invariância de BRS dos seus campos associados, temos a equação:

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x \left(-\frac{1}{2}f_{abc}c^b c^c\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta c^a}\right) \\
+ &\int d^4x \left(\frac{i}{2}\bar{R}c\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta\bar{R}}\right) \\
+ &\int d^4x \left(-\frac{i}{2}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta R}cR\right) \\
- &\int d^4x \left(i\Big(\bar{L}^j(\lambda^a)_{ji}c^a + \frac{1}{2}\bar{L}^i c\Big)\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta\bar{L}^i}\right) \\
+ &\int d^4x \left(i\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta L^i}\Big(c^a(\lambda^a)_{ij}L^j + \frac{1}{2}cL^i\Big)\right) \\
+ &\int d^4x \,\frac{1}{2}\left(sT^{\mu\nu}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)}{\delta T^{\mu\nu}}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

que determina as anomalias de matéria, não-Abelianas, que envolvem férmions. Lembrando que a anomalia não-Abeliana $\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)$ possui dimensão 4 e número de ghost 1, usando a tabela de dimensões e número de ghost dada na página 60, temos que a base para o cálculo desta anomalia tem a forma:

$$
\begin{aligned}
\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a) &= \int d^4x \left((\alpha^a)_{ij}\partial_\mu c^a \overline{L}^i \gamma^\mu L^j \right) \\
&+ \int d^4x \left(\beta \partial_\mu c \overline{R} \gamma^\mu R + \varepsilon \partial_\mu c \overline{L}^i \gamma^\mu L^i \right) \\
&+ \int d^4x \left(\theta_1 c \overline{R} \sigma^{\mu\nu} T^i_{\mu\nu} L^i + \theta_2 c \overline{L}^i \sigma^{\mu\nu} R T^i_{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

A equação (5.47) fornece a condição que a matriz (α^a) deve satisfazer, que é:

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha^a, \lambda^b\right] &= i f^{abc} \alpha^c \\
\lambda^a &= \lambda^a_R + i\lambda^a_I,
\end{aligned} \tag{5.49}
$$

esta condição sob as matrizes α^a nos diz que estas matrizes são proporcionais a λ^a, da forma:

$$
(\alpha^a) = \alpha(\lambda^a), \tag{5.50}
$$

onde α sem índice representa um coeficiente numérico, por enquanto arbitrário. Com isto, obtemos para a anomalia não-Abeliana $\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a)$, após o uso da equação (5.47), a forma:

$$
\begin{aligned}
\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,T_{\mu\nu},c,\partial_\mu c^a) &= \int d^4x \left(\alpha(\lambda^a)_{ij}\partial_\mu c^a \overline{L}^i \gamma^\mu L^j \right) \\
&+ \int d^4x \left(\beta \partial_\mu c \overline{R} \gamma^\mu R + \varepsilon \partial_\mu c \overline{L}^i \gamma^\mu L^i \right) \\
&+ \int d^4x \left(\theta_1 c \overline{R} \sigma^{\mu\nu} T^i_{\mu\nu} L^i + \theta_2 c \overline{L}^i \sigma^{\mu\nu} R T^i_{\mu\nu} \right).
\end{aligned} \tag{5.51}
$$

Para realizar o tratamento algébrico da Anomalia abeliana, ao invés de definir uma base para esta anomalia usaremos a equação (5.42) que permite obter a anomalia Abeliana, como a derivada funcional da anomalia não abeliana em relação ao ghost Abeliano. Realizando-se esta derivação, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Delta^1(\bar{R},R,\bar{L},L,\partial_\mu c,\partial_\mu c^a)}{\delta c} &= -\partial_\mu\Big(\beta\overline{R}\gamma^\mu R+\varepsilon\overline{L}^i\gamma^\mu L^i\Big)\\ &+\Big(\theta_1\overline{R}\sigma^{\mu\nu}T^i_{\mu\nu}L^i+\theta_2\overline{L}^i\sigma^{\mu\nu}RT^i_{\mu\nu}\Big)\end{aligned}\tag{5.52}$$

que nos leva a ter a forma mais geral da anomalia Abeliana como:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= -\partial_\mu\Big(\beta\overline{R}(x)\gamma^\mu R(x)+\varepsilon\overline{L}^i(x)\gamma^\mu L^i(x)\Big)\\ &+\Big(\theta_1\overline{R}\sigma^{\mu\nu}T^i_{\mu\nu}L^i+\theta_2\overline{L}^i\sigma^{\mu\nu}RT^i_{\mu\nu}\Big).\end{aligned}\tag{5.53}$$

Para determinar quais os coeficientes desta possível anomalia Abeliana, fazemos uso da equação (5.40), que é a condição que permite obter as relações entre os coeficientes β e ε. Como esta é uma equação local aplicada a uma anomalia também local, com vistas a simplificar o cálculo, faremos uso de um operador global construído a partir da identidade de Ward local da forma:

$$\mathcal{K}=\int d^4x\, u(x)\mathcal{W}(x),\tag{5.54}$$

onde o campo u é um campo anticomutante. A condição de comutação da identidade de Ward local escrita em termos do operador global é dada por:

$$[\mathcal{W}(x),\mathcal{W}(y)]=0 \quad\rightarrow\quad \mathcal{K}^2=0.\tag{5.55}$$

Este operador atuando sobre os férmios, o tensor de matéria e sobre o campo anticomutante u fornece:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}R &= -\tfrac{i}{2}uR \\
\mathcal{K}\overline{R} &= \tfrac{i}{2}u\overline{R} \\
\mathcal{K}\overline{L}^i &= -\tfrac{i}{2}u\overline{L}^i \\
\mathcal{K}L^i &= \tfrac{i}{2}uL^i \\
\mathcal{K}T^i_{\mu\nu} &= -u\widetilde{T}^i_{\mu\nu} \\
\mathcal{K}u &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

Para escrever a condição (5.40), como uma equação integrada, falta apenas apresentar a anomalia abeliana de forma integrada, isto é feito integrando-se a anomalia local (5.53) com o campo anticomutante u da forma:

$$
\mathcal{A} = \int d^4x\, u(x)\mathcal{A}(x), \tag{5.57}
$$

com a anomalia integrada e o operador $\mathcal{K}$, que expressa a identidade de Ward global, a condição (5.40) passa a ser:

$$
\mathcal{K}\mathcal{A} = 0. \tag{5.58}
$$

Esta condição não fornece nenhum dado novo, permanecendo os coeficientes β e ε livres. Desta forma a possível anomalia Δ^1 possui seu resultado dado em (5.52). Para verificar se este resultado corresponde a uma verdadeira anomalia, devemos verificar se $\Delta^1(\bar{R}, R, \bar{L}, L, T_{\mu\nu}, c, \partial_\mu c^a)$, pode ser escrito como uma variação de BRS de um dado cociclo qualquer, pois se a anomalia Δ^1 puder ser escrita da forma:

$$
\Delta^1 = s(\hat{\Delta}), \tag{5.59}
$$

segue que esta pode ser reabsorvida e portanto não é uma verdadeira anomalia. De fato para os termos de interação entre férmions puros, sem interação com os campos tensoriais, a variação BRS do cociclo:

$$
s\int d^4x\left(\mathcal{X}\overline{L}^i\gamma^\mu\partial_\mu L^i+\mathcal{Y}\overline{L}^i\gamma^\mu B_\mu L^i+\mathcal{Z}\overline{R}\gamma^\mu\partial_\mu R\right), \tag{5.60}
$$

fornece um cociclo de número de ghost um cuja forma é:

$$
\int d^4x\left(i\mathcal{X}\partial_\mu c^a(\lambda^a)_{ij}\overline{L}^i\gamma^\mu L^j+\left(\frac{i}{2}\mathcal{X}+\mathcal{Y}\right)\partial_\mu c\overline{L}^i\gamma^\mu L^i+\frac{i}{2}\mathcal{Z}\overline{R}\gamma^\mu\partial_\mu R\right), \tag{5.61}
$$

comparando-se este resultado com o obtido para a forma da anomalia não abeliana, ve-se que os coeficientes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ estão relacionados com os coeficientes α, ε e β da forma:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} &= -i\alpha \\
\mathcal{Y} &= \varepsilon-\tfrac{\alpha}{2} \\
\mathcal{Z} &= -2i\beta.
\end{aligned} \tag{5.62}
$$

sendo que não existe um cociclo que dê conta do termo na anomalia com interação entre tensores de matéria e férmions. Com isto temos que o modelo possui anomalia não abeliana, sendo que esta é induzida pela anomalia abeliana, tal qual no modelo com férmions Abeliano originalmente proposto por Avdeev-Chizhov, o modelo não Abeliano sofre de uma anomalia basicamente causada pelo setor Abeliano do modelo. A forma final das anomalias não-Abeliana e Abeliana respectivamente são:

$$
\begin{aligned}
\Delta^1 &= \int d^4x\left(\theta_1 c\overline{R}\sigma^{\mu\nu}T^i_{\mu\nu}L^i+\theta_2 c\overline{L}^i\sigma^{\mu\nu}RT^i_{\mu\nu}\right) \\
\mathcal{A}(x) &= \left(\theta_1\overline{R}\sigma^{\mu\nu}T^i_{\mu\nu}L^i+\theta_2\overline{L}^i\sigma^{\mu\nu}RT^i_{\mu\nu}\right).
\end{aligned} \tag{5.63}
$$

Os resultados que obtemos permitem concluir que o modelo de campos tensoriais em interação com férmions quirais possui anomalias associadas basicamente com a invariância abeliana presente no modelo, como tanto o modelo Abeliano quanto o não-Abeliano sem interação com férmions já foi estudado nos capítulos anteriores, e foi obtido que não existem anomalias para estes casos, tomamos que o modelo com interação férmions-tensores possui anomalias não devidas propriamente aos tensores de matéria, mas sim devidas à forma como os tensores de matéria se acoplam com férmions via interação abeliana.

Conclusão

O modelo apresentado por Chizhov, primeiramente como um modelo fenomenológico para melhorar o acordo entre a teoria e os dados experimentais obtidos dos decaimentos $\pi^- \to \overline{e}\,\overline{\nu}\gamma$ e $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu$, apresenta, na sua versão abeliana, propriedade de liberdade assintótica dada por uma função-beta negativa. Sucessivamente a ação de Avdeev-Chizhov foi entendida geométricamente como um modelo de tipo $\lambda\varphi^4$ para campos tensoriais complexos, sujeitos a uma condição de auto dualidade complexa. Através desta construção geométrica, este modelo foi generalizado para o caso não-Abeliano, sem férmions. Verificamos que o modelo não-Abeliano possui termos de interação extras, não presentes no caso Abeliano. O modelo não-Abeliano sem férmions é renormalizavel e sem anomalias. É importante ressaltar que a não renormalização do ghost c e sua fonte de BRS τ édevida às equações de gauge fixing e à equação de anti-ghost, que existem somente no gauge de Landau, estes resultados porém são gerais, sendo a prova desta afirmação encontrada na referência [13] e é obtida com o uso de BRS estendido.

A introdução de férmions quirais no modelo leva ao aparecimento de uma anomalia de matéria, semelhante à presente no modelo Abeliano, causada basicamente pela invariância Abeliana presente no modelo.

Além deste resultado, negativo quanto a introdução de férmions quirais, este modelo apresenta ainda outros dados à serem analisados, como por exemplo sua unitáriedade.Este problema em particular está ligado a positividade da Hamiltoniana em nível clássico e em nível quântico, com a unitariedade da Matriz S. Como para os propósitos fenomenológicos aos quais Avdeev e Chizhov desenvolveram este modelo, se faz necessário a introdução de férmions, temos aqui um campo aberto para uma possível investigação futura.

Quanto a questão das anomalias presentes ao se introduzir férmions uma possível solução seria estender o teorema de Adler-Bardeen para as anomalias de matéria. Este ponto, consideravelmente difícil e técnico, foi deixado para possibilidade de estudos futuros.

Bibliografia

[1] S. Deser, H. S. Tsao. P. V. Nieuwenhuisen *Phys. Rev. Lett.* D10 (1974) 3337;
D. Z. Freemann, P. V. Nieuwenhuisen *Phys. Rev. Lett.* D14 (1976) 912;

[2] E. Guadagnini, N. Maggiore e S. P. Sorella, *Phys. Lett.* B255 (1991) 65;
C.Lucchessi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B395 (1993) 325;

[3] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* 117 (1988) 353; *Comm. Math. Phys.* 118 (1988) 411;
I. A. Batalin, M. Blau, M. Rakowsky e G. Thompson, *Phys. Reports* 209 (1991) 129;

[4] V. N. Bolotov et al., *Phys. Lett.* B243 (1990) 308;

[5] S. A. Akimenko et al., *Phys. Lett.* B259 (1991) 225;

[6] H.Stainer et al., *Phys. Lett.* B36 (1971) 521;

[7] M. V. Chizhov., $hep-th$ 9407237

[8] M. V. Chizhov., $hep-ph$ 9511287

[9] L. E. Piilonen et al., *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986) 1402;
S. Egly et al., *Phys. Lett.* B175 (1986) 97;
S. Egly et al., *Phys. Lett.* B222 (1989) 533;
A. A. Poblaguev *Phys. Lett.* B286 (1992) 169;

[10] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *Phys. Lett.* B321 (1994) 212;

L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *A queer reduction of degrees of freedom*, preprint $JINR$ Dubna, $hep-th/9407067$;

[11] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *Mod. Phys. Lett.* A8 (1993) 2753;

[12] C. Itzkson e J. B. Zuber., "Quantum Field Theory"

P. Ramond., "Field Theory: a Modern Primer".

[13] O. Piguet e S. P. Sorella., "Algebraic Renormalization

Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies".

[14] J. H. Lowenstein., *Phys. Rev.* D4 (1971) 2281;

J. H. Lowenstein., *Comm. Math. Phys.* 24 (1971) 1;

J. H. Lowenstein., "Seminars on Renormalization Theory vol II"

Techn.. Rep. N^o 73-068 (1972).

J. H. Lowenstein., "BPHZ renormalization", em

"Renormalization Theory".

O. Piguet., "Renormalisation en théorie quantique des champs"e

"Renormalisation des théories de jauge".

[15] A. Blasi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B346 (1990) 313;

A. Blasi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B356 (1991) 154;

[16] J. Dixon *Comm. Math. Phys.* 139 (1991) 495;

[17] O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B381 (1992) 373;

[18] Vitor Lemes, Ricardo Renan e S.P.Sorella - *"Algebraic Renormalization of Antisymmetric Tensor Matter Fields "* - *Phys. Lett. B* 344(1995)158-163

[19] Vitor Lemes, Ricardo Renan e S.P.Sorella - "$\phi_4{}^4$-*Theory for Antisymmetric Tensor Matter Fields in Minkowski Space-Time* " - *Phys. Lett. B* 352(1995)37-42,

[20] Vitor Lemes, Ricardo Renan e S. P. Sorella - " *Renormalization Of Nonabelian Gauge Theories With Tensor Matter Fields "-To appear in Physics Letters B*

[21] S. L. Adler, *Phys. Rev.* 117 (1969) 2426;
J. S. Bell e R. Jackiw, *Nuovo Cim.* 60 (1969) 47;
W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* 184 (1969) 1848;
S. L. Adler e W. Bardeen, *Phys. Rev.* 182 (1969) 1517;

[22] G. Barnich e M. Henneaux., *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994) 1588;
G. Barnich, M. Henneaux e F.Brand., "Local BRST cohomology in the antifield formalism I and II"Preprints ULB-TH-94/06,07 ($hep-th$ 9405109 e 9405194);

[23] " Matéria Tensorial em Teorias de Gauge Supersimétricas"
Tese de mestrado de Alvaro de Almeida Nogueira, orientador: J. A. Hellayël;
V. Lemes, A. Nogueira e J. A. Hellayël, *Supersymmetric Generalization of the Tensor Matter Fields*, preprint CBPF. CBPF-NF-054/95 hep-th/9508049;

[24] "Aspéctos Geométricos e Propriedades de Renormalização de
Campos Tensoriais de Matéria" Tese de doutorado de Ricardo Renan Landim, orientador: Silvio. P. Sorella.

"ASPECTOS QUÂNTICOS DE TEORIAS DE CALIBRE NÃO ABELIANAS COM CAMPOS DE MATÉRIA TENSORIAIS"

VITOR EMANUEL RODINO LEMES

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Silvio Paolo Sorella - Presidente

João Barcelos Neto

José Abdalla Helayël-Neto

Roman Raykov Paunov

Sebastião Alves Dias

Francisco Caruso Neto - Suplente

Rio de Janeiro, 26 de fevereiro de 1997