

Tese de Doutorado

**Pares condensados de elétrons na QED₃ com
simetria de paridade em $D=1+2$**

Oswaldo Monteiro Del Cima

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 1996

Tese de Doutorado

Pares condensados de elétrons na QED_3 com simetria de
paridade em $D=1+2$

Oswaldo Monteiro Del Cima

Tese submetida ao Departamento de Teoria de Campos e Partículas
como requisito para obtenção do grau
de Doutor em Física.

Orientadores

Prof. J. A. Helayël-Neto e Prof. O. Piguet

*A minha esposa
Zilda Cristina, à
minha filha Vittoria,
à minha mãe
Victoria e ao meu
pai Oswaldo (in
memorian).*

*Ao meu tio Antônio
(in memorian), um
grande soldado, e à
minha tia Esmeralda
(in memorian).*

*A um grande
homem, Albert Sabin
(1906-1993).*

Agradecimentos

Aos meus amigos, Prof. José Abdalla Helayel-Neto e Prof. Olivier Piguet, pela orientação e dedicação. José e Olivier, muito obrigado por tudo que fizeram por mim !!!

Aos meus amigões do peito e irmãos camaradas Daniel (Dr. D.H.T. Franco) e Marquinho (Dr. M.A. De Andrade), pois sem vocês teria sido impossível a realização deste trabalho, valeu mesmo !!!

Ao grande amigo Tião (Dr. S.A. Dias), um abraço, valeu cara !!!

Ao Prof. Silvio Paolo Sorella, por todo o seu apoio, obrigado Silvio !!!

Ao Roman (Dr. R. Paunov), pela força !!!

À turma de *gladiadores* do DCP, meus sinceros agradecimentos, sejam fortes, *sobrevivam* !!! *Senta a Púa* pessoal !!!

Ao Prof. J.J. Giambiagi (*in memoriam*), por todos os momentos de *guerra e paz* que passávamos, como também, quando comigo esbravejava: “ *you tem que assistir os seminários* !!! ”

Aos Profs. Mario e Myriam Giambiagi, por todo o companheirismo e amizade.

Ao Prof. Caride, por todo o seu apoio e companheirismo.

À Rosângela e à Elisabeth, pela amizade e carinho, um beijão para vocês !!!

À Myriam, pela atenção e carinho com que sempre me recebeu à CFC, um beijão !!!

À Denise da Biblioteca, um beijão !!!

Às *meninas* do CDI, Valéria e Socorro, obrigado e beijões !!!

Ao CNPq, pelas bolsas concedidas desde a minha graduação.

Índice

Agradecimentos	i
Índice	iii
Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	v
Introdução	1
1 Pares condensados de elétrons na QED₃ com simetria de paridade	4
1.1 Introdução	4
1.2 QED ₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar	5
1.3 Potenciais de espalhamento	9
1.4 Discussões e conclusões gerais	14
2 Renormalização Algébrica da QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar-I: regime simétrico	17
2.1 Introdução	17
2.2 Ação no regime simétrico	18
2.3 Simetria e operadores de BRS	20
2.4 Estabilidade do modelo no regime simétrico	22
2.5 Anomalia	24
3 Renormalização Algébrica da QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar-II: regime de quebra	28
3.1 Introdução	28

3.2	Ação no regime de quebra espontânea	28
3.3	Simetria e operadores BRS	30
3.4	Estabilidade do modelo no regime de quebra espontânea	33
3.5	Anomalia	35
4	Perspectivas futuras	39
A	Algumas propriedades dos espinores de Dirac em $D=1+2$	41

Lista de Figuras

1-1	Diagramas de Feynman para espalhamentos $e^- - e^-$	11
1-2	Diagramas de Feynman para a aproximação <i>quenched ladder</i> da equação de Bethe-Salpeter	16

Lista de Tabelas

2.1	Dimensões UV e IR, números de ghost e paridades de Grassmann dos campos e fontes no regime simétrico	20
3.1	Dimensões UV e IR, números de ghost e paridades de Grassmann dos campos e fontes no regime com quebra	31

Introdução

Desde o final da década de 70, as teorias quânticas de campo em 3 dimensões espaço-temporais [1] vem desempenhando um papel fundamental na tentativa de se descrever alguns problemas em Física da Matéria Condensada [2, 3, 4].

No início dos anos 80, a Eletrodinâmica Quântica (QED) em 3 dimensões estabeleceu-se como fundamentação teórica para uma maior compreensão de processos físicos quase-planares, envolvendo elétrons e fótons. Já na década atual, uma das possibilidades mais relevantes de aplicação dá-se no âmbito de modelos visando o uso de uma formulação de campos, mais especificamente a Eletrodinâmica Quântica, para o entendimento de alguns fenômenos em Matéria Condensada, tais como a Supercondutividade a Altas Temperaturas Críticas [5] e o Efeito Hall Quântico [6].

No estudo desses fenômenos, duas versões da Eletrodinâmica Quântica com simetria de paridade são usadas como modelo: a QED_3 e a $\tau_3 QED_3$ [3, 4]. A principal diferença entre elas está no *gauging* de duas simetrias globais. Na QED_3 , o *gauging* de uma simetria global $U_e(1)$ está associado à carga elétrica, onde o campo de gauge é o fóton (A_m). No caso da $\tau_3 QED_3$, o *gauging* é feito a partir de uma simetria global $U_{\tau_3}(1)$ associada ao spin, sendo o campo de gauge o campo estatístico (a_m).

Uma das propriedades interessantes do espaço-tempo $D=1+2$ surge na QED_3 com simetria de paridade no estudo do spin de elétrons. A simetria de paridade implica diretamente na presença de um par de férmions de Dirac com termos de massa de sinais opostos na ação, o que resulta em sinais opostos de spins [7, 8].

O confinamento de férmions massivos em 3 dimensões revela mais uma interessante peculiaridade deste espaço-tempo. Recentemente, vem-se estudando o problema do confinamento através da QED_3 via métodos não-perturbativos, pois este é um efeito de

natureza essencialmente não-perturbativa. É interessante notar que, em se tratando de um modelo Abelian, um efeito como o confinamento mostra o quanto este espaço tem de surpresas ainda por serem reveladas. Verificou-se que o confinamento aparece apenas no caso de férmions massivos em interação com campos de gauge de massa nula, devido a um potencial do tipo logarítmico. Já no caso de férmions de massa nula, o potencial de interação é do tipo Coulomb [9].

O problema de estados ligados entre elétrons e pósitrons (*positronium*) em 3 dimensões foi também amplamente estudado, utilizando-se as equações de Bethe-Salpeter e Dyson-Schwinger da QED₃ com simetria de paridade, nas aproximações *quenched ladder* e *rainbow*, respectivamente [10].

Portanto, pelo que foi parcialmente exposto nesta Introdução a respeito das peculiaridades das 3 dimensões espaço-temporais, torna-se clara a motivação em se dedicar alguma atenção às peculiaridades da dinâmica de campos em $D=1+2$.

Esta tese tem como objetivo o estudo semi-clássico [8] e quântico [11, 12] da QED₃ com simetria de paridade e quebra espontânea de uma simetria local $U(1)$. Esta quebra é realizada através de um potencial do tipo φ^6 .

O estudo semi-clássico é realizado calculando-se potenciais de interação em processos de espalhamento envolvendo elétrons em interação mediada pelo bóson vetorial massivo e pelo escalar de Higgs. Mostra-se que, no caso do espalhamento de elétrons com polarizações de spin opostas, o potencial de interação é atrativo, tanto no caso da mediação ser feita pelo bóson vetorial quanto pelo Higgs. Mas, no caso de elétrons com a mesma polarização de spin, o potencial devido à interação mediada pelo bóson vetorial é repulsiva, enquanto que a mediação pelo Higgs permanece com caráter atrativo. Portanto, conclui-se que o spin em $D=1+2$ tem um caráter determinante na natureza das interações envolvidas em processos de espalhamento [8].

Para estudo do comportamento quântico do modelo proposto, o esquema de renormalização escolhido, denominado Renormalização Algébrica, é completamente independente de qualquer esquema de regularização. [13, 14, 15]. Esta abordagem algébrica é baseada no formalismo de BRS [13], em concomitância com o Princípio de Ação Quântica [16]. A renormalização algébrica do modelo é realizada nos regimes simétrico e com quebra

espontânea da simetria de gauge. A estabilidade do modelo frente às correções quânticas, e a possível presença de anomalias são questões analisadas em ambos os regimes [11, 12].

Os Capítulos que seguem a esta Introdução estão organizados de tal forma que, no Capítulo 1, são abordadas questões de caráter semi-clássico da QED₃ com simetria de paridade e quebra espontânea de simetria. No Capítulo 2, a Renormalização Algébrica é apresentada no regime simétrico, enquanto que no Capítulo 3, no regime com a quebra espontânea de simetria. Finalmente, são apresentadas algumas Perspectivas Futuras de investigação como consequência natural dos problemas tratados na presente tese. Em seguida, propõe-se um Apêndice onde são discutidas algumas propriedades inerentes aos férmions de Dirac em $D=1+2$, as quais foram utilizadas no desenvolvimento do Capítulo 1.

Capítulo 1

Pares condensados de elétrons na QED₃ com simetria de paridade

1.1 Introdução

O objetivo deste Capítulo é mostrar que elétrons em processos de espalhamento podem experimentar uma interação mútua atrativa, dependendo de seus estados de spin. O potencial de espalhamento atrativo vem de processos onde os elétrons estão correlacionados no espaço dos *momenta* e com polarizações de spin opostas (estado de onda s). No caso de espalhamentos entre elétrons de mesma polarização (estado de onda p), um potencial atrativo pode surgir devido à interação mediada pelo Higgs, isto se algumas condições forem fixadas sobre os parâmetros do modelo [17]. Este último tipo de processo deve ser estudado em casos onde altos campos magnéticos externos sejam aplicados, pois suspeita-se que a resistência do estado supercondutor em presença de campos magnéticos intensos possa ser explicada por emparelhamento de elétrons em estado de onda p [18]. Os bósons mediadores das interações são o méson vetorial massivo e o scalar de Higgs, com massas que resultam da quebra espontânea da simetria local $U(1)$. A quebra é realizada por um potencial do tipo φ^6 e, a partir daí, são estabelecidas condições a serem satisfeitas pelos parâmetros, de maneira a se evitar estados de vácuo meta-estáveis.

O método empregado no cálculo dos potenciais de espalhamento é baseado em uma série de trabalhos de Sucher *et al.* [19]. O comportamento dos potenciais de interação

relativos ao méson vetorial e ao Higgs são analisados no caso do espalhamento de elétrons com polarizações opostas (estado de onda s). A atração entre estes elétrons motiva um estudo não-perturbativo do modelo proposto. Através da análise das equações de Bethe-Salpeter [20, 10], pode-se inferir a respeito da existência ou não de estados ligados. Aborda-se, também, o problema do confinamento de férmions massivos na QED₃ [9].

Este Capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 1.2, propõe-se o modelo da QED₃ com simetria de paridade e discute-se a quebra espontânea da simetria $U(1)$ no gauge R_ζ ; na Seção 1.3, são apresentados e analisados os cálculos a *tree-level* das amplitudes e dos potenciais nos processos de espalhamento do tipo s e do tipo p ; finalmente, na Seção 1.4, discutem-se os resultados obtidos e propostas para trabalhos futuros são apresentadas.

1.2 QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar

A ação da QED₃¹ com simetria de paridade e quebra espontânea da simetria $U(1)$ é dada por :

$$S_{\text{QED}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + i\bar{\psi}_+ \not{D}\psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{D}\psi_- - y(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-)\varphi^*\varphi + D^m\varphi^* D_m\varphi - V(\varphi^*\varphi) \right\} , \quad (1.1)$$

com o potencial $V(\varphi^*\varphi)$ tomado como

$$V(\varphi^*\varphi) = \mu^2\varphi^*\varphi + \frac{\zeta}{2}(\varphi^*\varphi)^2 + \frac{\lambda}{3}(\varphi^*\varphi)^3 , \quad (1.2)$$

onde as dimensões de massa dos parâmetros μ , ζ , λ e y são respectivamente 1, 1, 0 e 0.

¹A métrica adotada neste trabalho é $\eta_{mn} = (+, -, -)$; $m, n=(0,1,2)$. Os objetos *slashed* significam contrações com as matrizes γ . Estas são tomadas como $\gamma^m = (\sigma_x, i\sigma_y, -i\sigma_z)$.

As derivadas covariantes são definidas a seguir :

$$D\psi_{\pm} \equiv (\not{\partial} + iqq\not{A})\psi_{\pm} \quad \text{e} \quad D_m\varphi \equiv (\partial_m + iQgA_m)\varphi \quad , \quad (1.3)$$

onde g é a constante de acoplamento com dimensão de massa $(\text{mass})^{\frac{1}{2}}$, enquanto q e Q são as cargas- $U(1)$ dos férmions e do escalar, respectivamente. Na ação (1.1), F_{mn} é o field-strength do campo de gauge A_m , ψ_+ and ψ_- são dois tipos de férmions de Dirac (os subscritos \pm referem-se aos respectivos sinais de spin [7]: ver Apêndice) e φ é um escalar complexo.

A ação da QED₃² (1.1) é invariante sob a simetria de paridade, P , cuja ação é dada por :

$$x_m \xrightarrow{P} x_m^P = (x_0, -x_1, x_2) \quad , \quad (1.4)$$

$$\psi_{\pm} \xrightarrow{P} \psi_{\pm}^P = -i\gamma^1\psi_{\mp} \quad , \quad \bar{\psi}_{\pm} \xrightarrow{P} \bar{\psi}_{\pm}^P = i\bar{\psi}_{\mp}\gamma^1 \quad , \quad (1.5)$$

$$A_m \xrightarrow{P} A_m^P = (A_0, -A_1, A_2) \quad , \quad (1.6)$$

$$\varphi \xrightarrow{P} \varphi^P = \varphi \quad . \quad (1.7)$$

Deve-se ressaltar que a transformação (1.6) é imposta de forma a manter a ação invariante por paridade e reversão temporal.

O potencial de sexta ordem, V , é o responsável pela quebra espontânea da simetria local $U(1)$. É o potencial mais geral renormalizável por *power-counting* em 3 dimensões.

Analisando-se o potencial (1.2), e impondo que este gere apenas vácuos estáveis, são obtidas as condições a serem satisfeitas pelos parâmetros μ , ζ e λ :

$$\lambda > 0 \quad , \quad \zeta < 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 \leq \frac{3}{16} \frac{\zeta^2}{\lambda} \quad . \quad (1.8)$$

O valor esperado no vácuo de φ é $\langle\varphi\rangle=v$, tal que, o ponto de mínimo absoluto, $\langle\varphi^*\varphi\rangle$,

²Para maiores detalhes sobre a QED₃ e a τ_3 QED₃, assim como suas aplicações e peculiaridades em $D=1+2$, ver refs.[1, 3, 4].

do potencial V , é escolhido como :

$$\langle \varphi^* \varphi \rangle = v^2 = -\frac{\zeta}{2\lambda} + \left[\left(\frac{\zeta}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (1.9)$$

onde a condição de mínimo é

$$\mu^2 + \zeta v^2 + \lambda v^4 = 0 . \quad (1.10)$$

O campo escalar complexo, φ , tem como parametrização

$$\varphi = v + H + i\theta , \quad (1.11)$$

onde θ é o *would-be Goldstone boson* e H é o escalar de Higgs, ambos com valores esperados no vácuo nulos. É interessante ressaltar que a parametrização dada pela eq.(1.11) é escolhida apropriadamente para se evitar o aparecimento de interações não-renormalizáveis [21], ao contrário do caso da parametrização utilizada para o gauge unitário [22].

Substituindo-se a parametrização (1.11) do campo escalar complexo, φ , na ação (1.1), a seguinte ação livre é obtida :

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{QED}}^{\text{free}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + \frac{1}{2} M_A^2 A^m A_m + \bar{\psi}_+ (i\not{\partial} - m) \psi_+ + \bar{\psi}_- (i\not{\partial} + m) \psi_- + \right. \\ \left. + \partial^m H \partial_m H - M_H^2 H^2 + \partial^m \theta \partial_m \theta + 2vQg A^m \partial_m \theta \right\} , \quad (1.12) \end{aligned}$$

onde os parâmetros M_A^2 , m e M_H^2 são dados por

$$M_A^2 = 2v^2 Q^2 g^2 , \quad m = yv^2 \quad \text{e} \quad M_H^2 = 2v^2 (\zeta + 2\lambda v^2) . \quad (1.13)$$

As condições (1.8) e (1.10) implicam no seguinte limite inferior (ver eq.(1.13)) para a massa do Higgs :

$$M_H^2 \geq \frac{3\zeta^2}{4\lambda} . \quad (1.14)$$

Portanto, não está presente no espectro do modelo um Higgs de massa nula (isto só ocorreria se $\mu^2 > \frac{3}{16} \frac{\zeta^2}{\lambda}$). Neste caso, os mínimos responsáveis pela quebra espontânea de

simetria não seriam absolutos, o que levaria a *ground states* meta-estáveis. Estados de uma partícula decairiam com uma pequena taxa de decaimento, se comparada a um mínimo absoluto.

De forma a se preservar a renormalizabilidade manifesta do modelo, adota-se o gauge de 't Hooft [23] :

$$\hat{S}_{R\xi}^{\text{gf}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2\xi} \left(\partial^m A_m - \sqrt{2\xi} M_A \theta \right)^2 \right\} , \quad (1.15)$$

onde ξ é um parâmetro de gauge adimensional.

Pela substituição de (1.11) na ação (1.1), adotando-se o gauge de 't Hooft (1.15), é obtida a seguinte ação invariante por paridade :

$$\begin{aligned} S_{\text{QED}}^{\text{SSB}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + \frac{1}{2} M_A^2 A^m A_m + \bar{\psi}_+ (i\rlap{/}\partial - m) \psi_+ + \bar{\psi}_- (i\rlap{/}\partial + m) \psi_- + \right. \\ + \partial^m H \partial_m H - M_H^2 H^2 + \partial^m \theta \partial_m \theta - M_\theta^2 \theta^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^m A_m)^2 + \\ - qg \bar{\psi}_+ \not{A} \psi_+ - qg \bar{\psi}_- \not{A} \psi_- - y (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) (2vH + H^2 + \theta^2) + \\ + Q^2 g^2 A^m A_m (2vH + H^2 + \theta^2) + 2Qg A^m (H \partial_m \theta - \theta \partial_m H) + \\ - c_3 H^3 - c_4 H^4 - c_5 H^5 - c_6 H^6 - c_7 \theta^4 - c_8 \theta^6 - c_9 H \theta^2 - c_{10} H^2 \theta^2 + \\ \left. - c_{11} H^3 \theta^2 - c_{12} H^4 \theta^2 - c_{13} H \theta^4 - c_{14} H^2 \theta^4 \right\} , \quad (1.16) \end{aligned}$$

onde as constantes M_θ^2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , c_7 , c_8 , c_9 , c_{10} , c_{11} , c_{12} , c_{13} e c_{14} são definidas por

$$\begin{aligned} M_\theta^2 = \xi M_A^2 , \quad c_3 = 2v \left(\zeta + \frac{10}{3} \lambda v^2 \right) , \quad c_4 = \frac{\zeta}{2} + 5\lambda v^2 , \quad c_5 = 2\lambda v , \\ c_6 = \frac{\lambda}{3} , \quad c_7 = \frac{\zeta}{2} + \lambda v^2 , \quad c_8 = \frac{\lambda}{3} , \quad c_9 = 2v \left(\zeta + 2\lambda v^2 \right) , \\ c_{10} = \zeta + 6\lambda v^2 , \quad c_{11} = 4\lambda v , \quad c_{12} = \lambda , \quad c_{13} = 2\lambda v \quad \text{e} \quad c_{14} = \lambda . \quad (1.17) \end{aligned}$$

Os espalhamentos de Møller que serão analisados são aqueles cujas interações são mediadas pelo campo de gauge e pelo Higgs (A_m and H). Os processos de espalhamento a serem estudados envolvem elétrons com polarização de spin opostas ($e_{(\pm)}^-$ and $e_{(\mp)}^-$), assim como os de mesma polarização ($e_{(\pm)}^-$ and $e_{(\pm)}^-$).

O estudo do espalhamento de elétrons com polarizações opostas é motivado pelo fato

de que, em 4 dimensões espaço-temporais, o par de Cooper (estado de onda s) [24] é formado pelo emparelhamento de elétrons correlacionados no espaço de fase, como também no espaço de estados de spin. As interações que contribuem para a formação do par de Cooper são: a eletromagnética e a interação devido aos fônons. A interação eletromagnética é repulsiva, enquanto que aquela mediada pelos fônons é atrativa. A natureza oposta dessas duas interações é o ponto forte do modelo BCS [25] para supercondutores de acoplamento fraco, pois para temperaturas abaixo da crítica (T_c), a interação mediada pelos fônons (atrativa) é dominante sobre a eletromagnética (repulsiva). Já para temperaturas acima de T_c , a interação efetiva entre elétrons é repulsiva, o que leva ao desaparecimento da fase supercondutora.

Por outro lado, o emparelhamento de elétrons em estado de onda p pode estar relacionado à fenomenologia de supercondutores de altos campos magnéticos críticos, bem como, ao efeito *re-entrant*. Suspeita-se que tais emparelhamentos possam ser os responsáveis pela resistência da fase supercondutora em presença de campos magnéticos intensos.

O modelo analisado nesta tese (ver ref.[8]) tem como objetivo um maior entendimento da dinâmica de elétrons em $D=1+2$, em especial, o espalhamento de elétrons com polarização de spin opostas. Uma das questões a serem respondidas é se existe, ou não, uma atração efetiva entre elétrons em espalhamento tipo s ($e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$) mediados pelo campo de gauge e pelo Higgs. Um outro ponto interessante a ser analisado diz respeito à possível influência das polarizações de spin (+ e -) na natureza dinâmica desses processos de espalhamento.

1.3 Potenciais de espalhamento

Para se calcular as amplitudes de espalhamento, será necessário obter as regras de Feynman para os propagadores e os vértices de interação envolvendo os férmions, o campo de gauge e o Higgs. A partir da ação (1.16), as seguintes regras de Feynman são obtidas :

1. propagadores dos férmions e do Higgs :

$$\langle \bar{\psi}_+ \psi_+ \rangle = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} , \quad \langle \bar{\psi}_- \psi_- \rangle = i \frac{\not{k} - m}{k^2 - m^2} \quad \text{e} \quad \langle HH \rangle = \frac{i}{2} \frac{1}{k^2 - M_H^2} ; \quad (1.18)$$

2. propagador do campo de gauge :

$$\langle A_m A_n \rangle = -i \left[\frac{1}{(k^2 - M_A^2)} \left(\eta_{mn} - \frac{k_m k_n}{M_A^2} \right) + \frac{1}{M_A^2} \left(\frac{k_m k_n}{k^2 - \xi M_A^2} \right) \right] ; \quad (1.19)$$

3. regras de Feynman dos vértices :

$$\mathcal{V}_{+H+} = 2iyv , \quad \mathcal{V}_{-H-} = -2iyv , \quad \mathcal{V}_{+A+}^m = iqq\gamma^m \quad \text{e} \quad \mathcal{V}_{-A-}^m = iqq\gamma^m . \quad (1.20)$$

A convenção adotada, \mathcal{V}_{+H+} , refere-se à regra de Feynman para o termo de interação, $\bar{\psi}_+ H \psi_+$. Esta notação é também adotada para os outros vértices acima.

As amplitudes do canal- s para os espalhamentos $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ e $e_{(\pm)}^- - e_{(\pm)}^-$, envolvendo o campo de gauge e o Higgs (ver Fig.1-1), estão dispostas abaixo :

1. amplitude de espalhamento por A_m :

$$-i\mathcal{M}_{\pm A \mp} = \bar{u}_{\pm}(p_1) [iqg\gamma_{(\pm)}^m] u_{\pm}(p'_1) \left\{ -i \frac{\eta_{mn}}{k^2 - M_A^2} \right\} \bar{u}_{\mp}(p_2) [iqg\gamma_{(\mp)}^n] u_{\mp}(p'_2) ; \quad (1.21)$$

$$-i\mathcal{M}_{\pm A \pm} = \bar{u}_{\pm}(p_1) [iqg\gamma_{(\pm)}^m] u_{\pm}(p'_1) \left\{ -i \frac{\eta_{mn}}{k^2 - M_A^2} \right\} \bar{u}_{\pm}(p_2) [iqg\gamma_{(\pm)}^n] u_{\pm}(p'_2) ; \quad (1.22)$$

2. amplitude de espalhamento por H :

$$-i\mathcal{M}_{\pm H \mp} = \bar{u}_{\pm}(p_1) [\pm 2iyv] u_{\pm}(p'_1) \left\{ \frac{i}{2} \frac{1}{k^2 - M_H^2} \right\} \bar{u}_{\mp}(p_2) [\mp 2iyv] u_{\mp}(p'_2) ; \quad (1.23)$$

$$-i\mathcal{M}_{\pm H \pm} = \bar{u}_{\pm}(p_1) [\pm 2iyv] u_{\pm}(p'_1) \left\{ \frac{i}{2} \frac{1}{k^2 - M_H^2} \right\} \bar{u}_{\pm}(p_2) [\pm 2iyv] u_{\pm}(p'_2) , \quad (1.24)$$

onde $k^2 = (p_1 - p'_1)^2$ é o *momentum* invariante quadrático transferido. Os espinores de Dirac, u_+ e u_- , são soluções de energia positiva das equações de Dirac para ψ_+ e ψ_- (ver

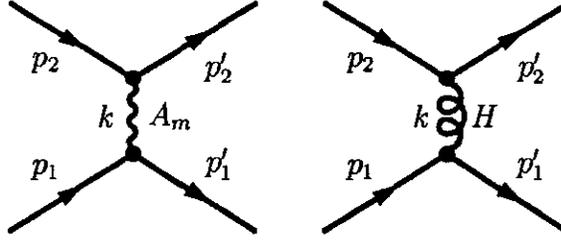


Figura 1-1: Diagramas de Feynman do canal s para espalhamentos $e^- - e^-$ mediados por A_m e H .

Apêndice), e cujas normalizações são dadas por :

$$\bar{u}_+(p)u_+(p) = 1 \quad \text{e} \quad \bar{u}_-(p)u_-(p) = -1 \quad . \quad (1.25)$$

Os cálculos dos potenciais de espalhamento nos processos $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ e $e_{(\pm)}^- - e_{(\pm)}^-$ são baseados nos trabalhos de Sucher *et al.* [19], onde o conceito de potencial em teoria quântica de campos e em processos de espalhamento é minuciosamente discutido.

Os potenciais de espalhamento serão calculados no referencial do centro-de-massa, pois neste referencial, os elétrons espalhados estão correlacionados no espaço dos *momenta*.

Considerando-se as regras de Feynman apresentadas acima (eqs.(1.18), (1.19) e (1.20)), os seguintes potenciais de espalhamento, para os processos $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ e $e_{(\pm)}^- - e_{(\pm)}^-$ mediados pelo campo de gauge e pelo Higgs, são obtidos no referencial do centro-de-massa (*c.m.*):³

1. potencial de espalhamento do campo de gauge :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\pm A \mp}^{c.m.}(\vec{r}) &= q^2 g^2 \beta_{(\pm)} \beta_{(\mp)} \gamma_{(\pm)}^m \gamma_m^{(\mp)} \int \frac{d^2 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + M_A^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \\ &= -q^2 g^2 \gamma_{(\pm)}^0 \gamma_{(\mp)}^0 \gamma_{(\pm)}^m \gamma_m^{(\mp)} K_0(M_A r) \end{aligned}$$

³No referencial *c.m.*, o *momentum* invariante quadrático transferido é dado por $k^2 = -\vec{q}^2$. As notações $\mathcal{U}_{\pm A \mp}(\vec{r})$, $\mathcal{U}_{\pm H \mp}(\vec{r})$, $\mathcal{U}_{\pm A \pm}(\vec{r})$ e $\mathcal{U}_{\pm H \pm}(\vec{r})$, com $r \equiv |\vec{r}|$, referem-se aos potenciais de espalhamento (no espaço de configurações) dos processos $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ e $e_{(\pm)}^- - e_{(\pm)}^-$, mediados por A_m e H . O produto $\beta_{(\pm)} \beta_{(\mp)}$ é um fator espinorial no espaço dos elétrons $e_{(\pm)}^-$ e $e_{(\mp)}^-$: $\beta_{(+)} = \gamma_{(+)}^0$, $\beta_{(-)} = -\gamma_{(-)}^0$ e $\vec{\alpha}_{(\pm)} \equiv \gamma_{(\pm)}^0 \vec{\gamma}_{(\pm)}$.

$$= -q^2 g^2 \left[\mathbb{1} - \vec{\alpha}_{(\pm)} \cdot \vec{\alpha}_{(\mp)} \right] K_0(M_A r) \quad ; \quad (1.26)$$

$$\mathcal{U}_{\pm A \pm}^{c.m.}(\vec{r}) = q^2 g^2 \beta_{(\pm)} \beta_{(\pm)} \gamma_{(\pm)}^m \gamma_m^{(\pm)} \int \frac{d^2 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + M_A^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$= q^2 g^2 \gamma_{(\pm)}^0 \gamma_{(\pm)}^0 \gamma_{(\pm)}^m \gamma_m^{(\pm)} K_0(M_A r)$$

$$= q^2 g^2 \left[\mathbb{1} - \vec{\alpha}_{(\pm)} \cdot \vec{\alpha}_{(\pm)} \right] K_0(M_A r) \quad ; \quad (1.27)$$

O sinal negativo na eq.(1.26) deve-se ao fato de que $\beta_{(-)} = -\gamma_{(-)}^0$. Esta peculiaridade de $D=1+2$ é devida a ψ_+ e ψ_- terem sinais opostos de massa (portanto, sinais opostos de spin [1, 7]) o que leva a termos em β com sinais opostos (ver Apêndice).

2. potencial de espalhamento do Higgs :

$$\mathcal{U}_{\pm H \mp}^{c.m.}(\vec{r}) = 2y^2 v^2 \beta_{(\pm)} \beta_{(\mp)} \int \frac{d^2 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + M_H^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$= -2y^2 v^2 \left[\gamma_{(\pm)}^0 \gamma_{(\mp)}^0 \right] K_0(M_H r) \quad , \quad (1.28)$$

$$\mathcal{U}_{\pm H \pm}^{c.m.}(\vec{r}) = -2y^2 v^2 \beta_{(\pm)} \beta_{(\pm)} \int \frac{d^2 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + M_H^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

$$= -2y^2 v^2 \left[\gamma_{(\pm)}^0 \gamma_{(\pm)}^0 \right] K_0(M_H r) \quad , \quad (1.29)$$

onde $K_0(Mr)$ é a função de Bessel modificada do segundo tipo de ordem zero :

$$\int \frac{d^2 \vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\vec{q}^2 + M^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{2\pi} K_0(Mr) \quad . \quad (1.30)$$

Esta função de Bessel apresenta o seguinte comportamento assintótico em termos do comprimento de onda de Compton ($\frac{1}{M}$) :

$$K_0(Mr) \longrightarrow \begin{cases} -\ln(Mr) \quad , & Mr \ll 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2Mr}} e^{-Mr} \quad , & Mr \gg 1 \end{cases} \quad . \quad (1.31)$$

Da eq.(1.31), conclui-se que os potenciais de espalhamento dos processos $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ são atrativos e não-confinantes. O comportamento não-confinante dos potenciais deve-se à quebra espontânea de simetria que gera massa tanto para o bóson vetorial quanto para o escalar de Higgs. No caso de elétrons em espalhamento por bósons vetoriais de massa nula, o potencial é completamente confinante [9]. Portanto, a interação efetiva causada pelo campo de gauge e pelo Higgs é atrativa quando os elétrons espalhados tem polarizações opostas de spin (espalhamento $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$). Nos espalhamentos onde há a troca do Higgs, o estado de spin dos elétrons (+ e -) não afeta o comportamento do potencial, que neste caso será sempre atrativo. Tal resultado é esperado, pois como o Higgs é uma partícula de spin zero (escalar), não *percebe* os estados de polarização dos elétrons.

É importante mencionar que, apesar das partículas envolvidas em tais processos de espalhamento possuírem a mesma carga elétrica, a polarização de spin dos elétrons é determinante no comportamento dos potenciais em espalhamentos mediados pelo campo de gauge. No espalhamento entre elétrons de polarizações opostas (sinais de massa opostos na equação de Dirac), a interação é atrativa. No entanto, para o caso de elétrons de mesma polarização (sinais de massa iguais na equação de Dirac), a interação é repulsiva.

O comprimento de coerência do par de Cooper, como determinado por Cooper para o estado ligado de dois elétrons [24], é muito maior se comparado ao comprimento de onda de Compton do elétron ($mr \gg 1$), a saber, o comprimento de coerência é da ordem de 10^4Å , e a ordem do comprimento de onda de Compton é de 10^{-2}Å . Portanto, os elétrons do par de Cooper experimentariam os seguintes potenciais de espalhamento no referencial do centro de massa :

$$\mathcal{U}_{+A-}^{c.m.}(\vec{r}) = -q^2 g^2 [\mathbf{1} - \vec{\alpha}_{(+)} \cdot \vec{\alpha}_{(-)}] \sqrt{\frac{\pi}{2M_A r}} e^{-M_A r} ; \quad (1.32)$$

$$\mathcal{U}_{+H-}^{c.m.}(\vec{r}) = -2y^2 v^2 [\gamma_{(+)}^0 \gamma_{(-)}^0] \sqrt{\frac{\pi}{2M_H r}} e^{-M_H r} , \quad (1.33)$$

onde as aproximações assintóticas, $M_A r \gg 1$ e $M_H r \gg 1$, são compatíveis com as dimensões dos pares de Cooper.

1.4 Discussões e conclusões gerais

Este Capítulo se detém no estudo da QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar, com objetivo de se entender melhor alguns aspectos peculiares da dinâmica de elétrons em $D=1+2$. A quebra espontânea de simetria desempenha um papel fundamental na dinâmica dos processos de espalhamento em 3 dimensões. A geração de massa para o campo de gauge, devido à quebra espontânea da simetria $U(1)$, evita o problema do confinamento de elétrons; a propósito, elétrons podem ser observados como partículas livres. A quebra é realizada por um potencial do tipo φ^6 com geração de massa para o bóson de gauge e para os férmions. O mecanismo de quebra espontânea de simetria é responsável pelo aparecimento de um efeito do tipo Meissner, pois o campo escalar magnético obedece a uma equação de London: $B(r)=B_0e^{-\lambda r}$, onde $\lambda=\frac{1}{M_A}$ é a distância de penetração. Portanto, como M_A depende do valor esperado no vácuo, v , conclui-se que $\lambda\rightarrow\infty$, se $v\rightarrow 0$. Isto significa que o efeito Meissner desaparece quando o campo escalar assume valor esperado no vácuo nulo, como no caso do regime simétrico.

Uma pergunta surge, naturalmente, quando se considera o teorema de Coleman-Mermin-Wagner [26]: existe uma temperatura crítica, T_c , tal que, para temperaturas acima da crítica ($T > T_c$), a simetria de gauge é restabelecida? Se for este o caso, o campo escalar assume valor esperado no vácuo nulo, o que anula a massa do campo de gauge e, como consequência disto, não há efeito Meissner. Portanto, uma transição de fase tipo supercondutora pode estar diretamente relacionada ao restabelecimento da simetria de gauge por correções quânticas a temperaturas finitas.

Um ponto interessante a ser enfatizado diz respeito à influência das polarizações de spin dos elétrons na natureza dinâmica dos processos de espalhamento. Tal característica é determinada pelo grupo de Poincaré em $D=1+2$. Uma das peculiaridades deste espaço-tempo é a interação efetiva atrativa entre elétrons com polarizações opostas em espalhamentos mediados pelo bóson de gauge massivo e pelo Higgs. O potencial de espalhamento associado à troca do bóson de gauge pode ser atrativo ou repulsivo, dependendo do estado de polarização de spin dos elétrons. No caso onde há a troca do Higgs, o potencial de espalhamento é independente do estado de spin dos elétrons, o que

era de se esperar, pois o Higgs é uma partícula de spin zero (escalar). Conclui-se, neste Capítulo, que elétrons podem se atrair mutuamente em $D=1+2$, através de processos de espalhamento mediados pelo campo de gauge massivo e pelo Higgs. Tal atração entre elétrons com spins opostos pode gerar estados ligados. Nos Capítulos 2 e 3, é abordado o comportamento quântico do modelo, que se mostra estável frente às correções radiativas e livre de anomalia, tanto no regime simétrico quanto no regime com quebra espontânea [11, 12].

É importante observar que para se identificar a existência, ou não, de estados ligados em tais espalhamentos, é aconselhável o estudo da equação de Bethe-Salpeter [20] em $D=1+2$ [10]. Tal análise é mais confiável, devido ao seu caráter intrinsecamente não-perturbativo. O resultado aqui obtido sugere que, a nível semi-clássico, uma atração efetiva entre elétrons de spins opostos possa levar à formação de estados ligados, se a equação de Bethe-Salpeter [10] for levada em consideração. Por outro lado, se há uma atração efetiva a *tree-level*, não é esperado que correções de *loop*, que produzem potências de \hbar , possam mudar a natureza da interação, tornando-a repulsiva, impossibilitando, assim, a eventual formação de pares condensados. De qualquer forma, a investigação da equação de Bethe-Salpeter é de extrema necessidade para se inferir a respeito da existência, ou não, de estados ligados de elétrons [27].

A equação integral de Bethe-Salpeter para o estado ligado $e_{(+)}^- - e_{(-)}^-$ na aproximação *quenched ladder* é dada por :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pm}(p, P) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S_{(+)}(\frac{1}{2}P + k) [iqg\gamma_{(+)}^m] \Delta_{mn}^A(p - k) [iqg\gamma_{(-)}^n] S_{(-)}(\frac{1}{2}P - k) \Gamma_{\pm}(k, P) + \\
& + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} S_{(+)}(\frac{1}{2}P + k) [2iyv] \Delta^H(p - k) [-2iyv] S_{(-)}(\frac{1}{2}P - k) \Gamma_{\pm}(k, P) + \\
& + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} S_{(+)}(\frac{1}{2}P + k + q) [iy] \Delta^H(p - k) \times \\
& \times \Delta^H(q) [-iy] S_{(-)}(\frac{1}{2}P - k - q) \Gamma_{\pm}(k, q, P) \quad , \tag{1.34}
\end{aligned}$$

onde Γ_{\pm} é o funcional de vértice *one-particle irreducible* de $e_{(+)}^- - e_{(-)}^-$, e Δ_{mn}^A e Δ^H são os propagadores de A_m e H , respectivamente. Os propagadores $S_{(+)}$ e $S_{(-)}$ dos espinores ψ_+ e ψ_- são soluções das respectivas equações de Dyson-Schwinger truncadas (propaga-

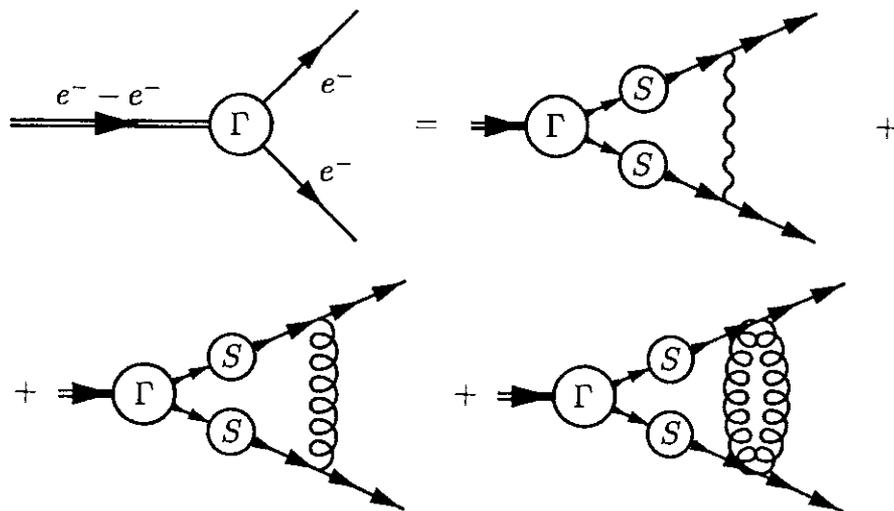


Figura 1-2: Aproximação *quenched ladder* da equação de Bethe-Salpeter.

dores *bare* do campo de gauge e do Higgs e vértices *bare*). Na Fig.1-2 está representada diagramaticamente a aproximação *quenched ladder* da equação de Bethe-Salpeter para o caso da QED₃ com simetria de paridade e quebra espontânea de simetria.

Uma última questão a ser analisada diz respeito ao *approach* de temperatura finita para a equação de Bethe-Salpeter. Seria interessante verificar se há uma transição de fase do par condensado $e_{(+)}^- - e_{(-)}^-$ em alguma temperatura crítica, T_c , acima da qual deixaria de existir qualquer correlação entre os elétrons que formariam o par. Isto refletir-se-ia como uma ausência de pólos do tipo $k^2 = 4m^2$ nas soluções da equação de Bethe-Salpeter para temperaturas acima da crítica ($T > T_c$). Portanto, a simetria de gauge seria restabelecida, e os elétrons de spins opostos não mais formariam estados ligados. O campo de gauge voltaria a ter massa nula e o efeito tipo Meissner desapareceria por completo, caracterizando-se, assim, uma transição de fase tipo supercondutora.

Capítulo 2

Renormalização Algébrica da QED_3 com simetria de paridade acoplada à matéria escalar-I: regime simétrico

2.1 Introdução

Como uma continuação imediata do Capítulo 1, propõe-se estudar, pelo método de Renormalização Algébrica, o modelo [8] no regime de quebra espontânea da simetria $U(1)$ [11]. No entanto, este Capítulo será dedicado à análise de um caso mais simples, o da fase simétrica [11], onde o campo escalar assume valor esperado no vácuo nulo. Nesta fase, o bóson de gauge tem massa nula, e o mesmo acontece com os férmions, pois no regime de quebra espontânea as massas dos férmions são geradas somente através do mecanismo de Higgs.

Tendo em vista que férmions de massa nula possam gerar divergências infra-vermelhas devido à presença de vértices super-renormalizáveis envolvendo campos também de massa nula, são adicionados termos de massa para os férmions, de forma a se evitar tal problema. Como no caso fisicamente interessante da quebra espontânea de simetria os férmions e o bóson de gauge são massivos, não se corre o risco da presença de divergências infra-vermelhas.

O método de Renormalização Algébrica [13, 14, 15] tem como base o formalismo de BRS [13], juntamente com o Princípio de Ação Quântica [16], o que leva a um método completamente independente de qualquer esquema de regularização.

Após uma breve introdução do modelo no regime simétrico, estuda-se a estabilidade do modelo por correções radiativas, como também a presença, ou não, de anomalias.

O estudo da renormalizabilidade do modelo no regime de quebra espontânea [12] será desenvolvido no Capítulo 3.

2.2 Ação no regime simétrico

A ação invariante de gauge para a QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar no regime simétrico, $\langle \varphi \rangle = 0$, é dada por :

$$\begin{aligned} \Sigma_{inv} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + i\bar{\psi}_+ \not{D}\psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{D}\psi_- - m_0(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-) + \right. \\ \left. - y(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-)\varphi^*\varphi + D^m\varphi^* D_m\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\zeta}{2}(\varphi^*\varphi)^2 - \frac{\lambda}{3}(\varphi^*\varphi)^3 \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde as dimensões de massa dos parâmetros m_0 , μ , ζ , λ e y são respectivamente 1, 1, 1, 0 e 0. A forma do potencial é escolhida de tal forma a assegurar o regime simétrico, onde $\langle \varphi \rangle = 0$. Impondo-se que o potencial tenha vácuos estáveis, são obtidas as seguintes condições sobre os parâmetros μ , ζ e λ :

$$\lambda > 0, \quad \zeta < 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 > \frac{3}{16} \frac{\zeta^2}{\lambda} . \quad (2.2)$$

As derivadas covariantes são definidas como no Capítulo 1 :

$$\not{D}\psi_{\pm} \equiv (\not{\partial} + iqqA)\psi_{\pm} \quad \text{e} \quad D_m\varphi \equiv (\partial_m + iQgA_m)\varphi . \quad (2.3)$$

É importante mencionar que, na ação (2.1), um termo de massa invariante por paridade para ψ_+ e ψ_- foi adicionado à ação (1.1) do Capítulo 1, de tal forma a se evitar possíveis divergências infra-vermelhas que podem ser causadas por interações super-renormalizáveis.

A ação completa, Σ , escreve-se como :

$$\Sigma = \Sigma_{inv} + \Sigma_{gf} + \Sigma_{ext} \quad , \quad (2.4)$$

onde Σ_{gf} é a ação do *gauge-fixing* e Σ_{ext} é a ação para as fontes externas :

$$\Sigma_{gf} = \int d^3x \left\{ B \partial^m A_m + \frac{\xi}{2} B^2 + \bar{c} \square c \right\} \quad , \quad (2.5)$$

$$\Sigma_{ext} = \int d^3x \left\{ \bar{\Omega}_+ s\psi_+ - \bar{\Omega}_- s\psi_- - s\bar{\psi}_+ \Omega_+ + s\bar{\psi}_- \Omega_- + \rho^* s\varphi + s\varphi^* \rho \right\} \quad . \quad (2.6)$$

A condição de gauge, a equação de ghost e a equação de anti-ghost [28], obtidas a partir de (2.4), estão listadas abaixo :

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta B} = \partial^m A_m + \xi B \quad , \quad (2.7)$$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} = \square c \quad , \quad (2.8)$$

$$-i \frac{\delta \Sigma}{\delta c} = \Delta_{class} \quad , \quad \text{com:} \quad (2.9)$$

$$\Delta_{class} = i \square \bar{c} + q \bar{\Omega}_+ \psi_+ - q \bar{\Omega}_- \psi_- + q \bar{\psi}_+ \Omega_+ - q \bar{\psi}_- \Omega_- - Q \rho^* \varphi - Q \varphi^* \rho \quad .$$

Δ_{class} não se renormalizará, visto que é linear nos campos quânticos. A ação da QED₃ (2.4) é invariante pela simetria de paridade, P , cuja atuação sobre os campos e fontes externas é dada a seguir :

$$\begin{aligned} x_m & \xrightarrow{P} x_m^P = (x_0, -x_1, x_2) \quad , \\ \psi_{\pm} & \xrightarrow{P} \psi_{\pm}^P = -i\gamma^1 \psi_{\mp} \quad , \quad \bar{\psi}_{\pm} \xrightarrow{P} \bar{\psi}_{\pm}^P = i\bar{\psi}_{\mp} \gamma^1 \quad , \\ A_m & \xrightarrow{P} A_m^P = (A_0, -A_1, A_2) \quad , \\ \phi & \xrightarrow{P} \phi^P = \phi \quad , \quad \phi = \varphi, c, \bar{c}, B \quad , \\ \Omega_{\pm} & \xrightarrow{P} \Omega_{\pm}^P = -i\gamma^1 \Omega_{\mp} \quad , \quad \bar{\Omega}_{\pm} \xrightarrow{P} \bar{\Omega}_{\pm}^P = i\bar{\Omega}_{\mp} \gamma^1 \quad , \\ \rho & \xrightarrow{P} \rho^P = \rho \quad . \end{aligned} \quad (2.10)$$

As dimensões ultra-violeta (UV) e infra-vermelha (IR)¹, d e r respectivamente, assim como os números de ghost, $\Phi\Pi$, e as paridades de Grassmann, GP , de todos os campos e fontes estão apresentados na Tabela 2.1.

	A_m	φ	ψ_{\pm}	c	\bar{c}	B	ρ	Ω_{\pm}
d	1/2	1/2	1	0	1	3/2	5/2	2
r	1/2	3/2	3/2	0	1	3/2	5/2	2
$\Phi\Pi$	0	0	0	1	-1	0	-1	-1
GP	0	0	1	1	1	0	1	0

Tabela 2.1: Dimensões UV e IR, d e r , números de ghost, $\Phi\Pi$, e paridades de Grassmann, GP .

2.3 Simetria e operadores de BRS

As transformações de BRS são definidas por :

$$\begin{aligned}
s\varphi &= iQc\varphi \quad , \quad s\varphi^* = -iQc\varphi^* \quad , \\
s\psi_{\pm} &= iq_c\psi_{\pm} \quad , \quad s\bar{\psi}_{\pm} = -iq_c\bar{\psi}_{\pm} \quad , \\
sA_m &= -\frac{1}{g}\partial_m c \quad , \quad sc = 0 \quad , \\
s\bar{c} &= \frac{1}{g}B \quad , \quad sB = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde c é o ghost, \bar{c} é o anti-ghost e B é o campo multiplicador de Lagrange.

A invariância de BRS da ação (2.4) é expressa na forma funcional pela identidade de Slavnov-Taylor

$$S(\Sigma) = 0 \quad , \tag{2.12}$$

onde o operador de Slavnov-Taylor S , atuando sobre um funcional arbitrário \mathcal{F} , é definido

¹Devido a presença de campos massivos e de massa nula no modelo, foi utilizado um esquema de subtração de tal forma que as divergências UV ao serem subtraídas não introduzem singularidades IR. Tal esquema, de Lowenstein e Zimmermann, é apresentado nas refs.[29, 14]. As divergências UV e IR aqui mencionadas são aquelas envolvidas neste formalismo. Os termos da ação, assim como os contra-termos, devem ter dimensão UV ≤ 3 e dimensão IR ≥ 3 .

por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathcal{F}) = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{g} \partial^m c \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A^m} + \frac{1}{g} B \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi_+} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\Omega}_-} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi_-} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}_+} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\Omega}_-} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}_-} + \right. \\ \left. + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi^*} \right\} . \end{aligned} \quad (2.13)$$

O correspondente operador de Slavnov-Taylor linearizado le-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{g} \partial^m c \frac{\delta}{\delta A^m} + \frac{1}{g} B \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta}{\delta \psi_+} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\Omega}_-} \frac{\delta}{\delta \psi_-} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi_+} \frac{\delta}{\delta \bar{\Omega}_+} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi_-} \frac{\delta}{\delta \bar{\Omega}_-} + \right. \\ \left. - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_+} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\Omega}_-} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_-} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}_+} \frac{\delta}{\delta \Omega_+} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}_-} \frac{\delta}{\delta \bar{\Omega}_-} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho^*} \frac{\delta}{\delta \varphi} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi} \frac{\delta}{\delta \rho^*} + \right. \\ \left. - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \rho} \frac{\delta}{\delta \varphi^*} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varphi^*} \frac{\delta}{\delta \rho} \right\} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Os dois operadores de Slavnov-Taylor, $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$, definidos acima, satisfazem as seguintes identidades de nilpotência

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 , \quad \forall \mathcal{F} , \quad (2.15)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = 0 \quad \text{se} \quad \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0 . \quad (2.16)$$

Em particular :

$$(\mathcal{S}_{\Sigma})^2 = 0 , \quad (2.17)$$

pois a ação Σ obedece à identidade de Slavnov-Taylor (2.12). A atuação de \mathcal{S}_{Σ} sobre os campos e fontes externas são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\Sigma} \phi &= s\phi , \quad \phi = \psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm}, \varphi, \varphi^*, A_m, c, \bar{c} \text{ e } B , \\ \mathcal{S}_{\Sigma} \bar{\Omega}_+ &= \frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_+} , \quad \mathcal{S}_{\Sigma} \bar{\Omega}_- = -\frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_-} , \\ \mathcal{S}_{\Sigma} \Omega_+ &= -\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}_+} , \quad \mathcal{S}_{\Sigma} \Omega_- = \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}_-} , \\ \mathcal{S}_{\Sigma} \rho^* &= \frac{\delta \Sigma}{\delta \varphi} , \quad \mathcal{S}_{\Sigma} \rho = -\frac{\delta \Sigma}{\delta \varphi^*} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4 Estabilidade do modelo no regime simétrico

Para o estudo da estabilidade [13] da ação (2.4) por correções radiativas, deve-se procurar o contra-termo mais geral possível, Σ^c , que satisfaça à seguinte condição de invariância de BRS :

$$S_{\Sigma}\Sigma^c = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Σ^c é um polinômio local e integrado nos campos e derivadas destes, com dimensão UV ≤ 3 , dimensão IR ≥ 3 e com número de ghost zero. Este contra-termo tem que ser invariante pela paridade, P , definida nas eqs.(2.10), e também satisfazer as condições abaixo

$$\frac{\delta\Sigma^c}{\delta B} = 0 \quad , \quad \frac{\delta\Sigma^c}{\delta\bar{c}} = 0 \quad , \quad \frac{\delta\Sigma^c}{\delta c} = 0 \quad , \quad (2.20)$$

que são obtidas a partir das condições (2.7 – 2.9). Além disso,

$$W_{\text{rigid}}\Sigma^c = 0 \quad , \quad (2.21)$$

onde W_{rigid} é o operador de Ward da simetria rígida definido por

$$W_{\text{rigid}} = \int d^3x \left\{ q\psi_+ \frac{\delta}{\delta\psi_+} + q\psi_- \frac{\delta}{\delta\psi_-} - q\bar{\psi}_+ \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_+} - q\bar{\psi}_- \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_-} + Q\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi} - Q\varphi^* \frac{\delta}{\delta\varphi^*} + \right. \\ \left. + q\Omega_+ \frac{\delta}{\delta\Omega_+} + q\Omega_- \frac{\delta}{\delta\Omega_-} - q\bar{\Omega}_+ \frac{\delta}{\delta\bar{\Omega}_+} - q\bar{\Omega}_- \frac{\delta}{\delta\bar{\Omega}_-} + Q\rho \frac{\delta}{\delta\rho} - Q\rho^* \frac{\delta}{\delta\rho^*} \right\} . \quad (2.22)$$

A eq.(2.21) vem da invariância rígida $U(1)$ da ação ² :

$$W_{\text{rigid}}\Sigma = 0 \quad . \quad (2.23)$$

O contra-termo invariante mais geral possível, Σ^c , a saber, o polinômio mais geral, nos campos e derivadas, com dimensões UV e IR, $d \leq 3$ e $r \geq 3$, respectivamente, com número

²A invariância rígida surge através da equação de anti-ghost (2.9) e da indentidade de Slavnov-Taylor (2.12).

de ghost zero, invariante por P (2.10), e que satisfaça às condições dadas pelas eqs.(2.19), (2.20) e (2.21), é obtido como uma combinação linear dos seguintes termos :

$$\left\{ F^{mn} F_{mn} , i(\bar{\psi}_+ \not{D} \psi_+ + \bar{\psi}_- \not{D} \psi_-) , (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) , \right. \\ \left. (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \varphi^* \varphi , D^m \varphi^* D_m \varphi , \varphi^* \varphi , (\varphi^* \varphi)^2 , (\varphi^* \varphi)^3 \right\} . \quad (2.24)$$

A condição de consistência de BRS no setor de número de ghost zero, dada pela eq.(2.19), consiste em um problema de cohomologia, devido à nilpotência (2.17) do operador de Slavnov-Taylor linearizado (2.14). A solução pode ser sempre escrita como a soma de um elemento trivial, $\mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Sigma}$, onde $\widehat{\Sigma}$ tem número de ghost -1 , e de um outro elemento não-trivial, Σ_{phys} , pertencente à cohomologia de \mathcal{S}_Σ (2.14) no setor de número de ghost 0 :

$$\Sigma^c = \Sigma_{\text{phys}} + \mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Sigma} . \quad (2.25)$$

A partir da base (2.24) para contra-termos invariantes, admitindo-se a representação (2.25), obtém-se que

$$\Sigma_{\text{phys}} = z_g \left(g \frac{\partial}{\partial g} - N_A + N_B - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Sigma + z_{m_0} m_0 \frac{\partial \Sigma}{\partial m_0} + \\ + z_y y \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + z_{\mu^2} \mu^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \mu^2} + z_\zeta \zeta \frac{\partial \Sigma}{\partial \zeta} + z_\lambda \lambda \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda} , \quad (2.26)$$

$$\mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Sigma} = \mathcal{S}_\Sigma \int d^3x \left[z_\psi (\bar{\psi}_+ \Omega_+ - \bar{\Omega}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \Omega_- + \bar{\Omega}_- \psi_-) + z_\varphi (\rho^* \varphi - \varphi^* \rho) \right] \\ = z_\psi (N_{\psi_+} + N_{\bar{\psi}_+} + N_{\psi_-} + N_{\bar{\psi}_-} - N_{\Omega_+} - N_{\bar{\Omega}_+} - N_{\Omega_-} - N_{\bar{\Omega}_-}) \Sigma \\ + z_\varphi (N_\varphi + N_{\varphi^*} - N_\rho - N_{\rho^*}) \Sigma , \quad (2.27)$$

onde os operadores de contagem são definidos por

$$N_\phi = \int d^3x \phi \frac{\delta}{\delta \phi} , \quad \phi = \psi_\pm, \bar{\psi}_\pm, \Omega_\pm, \bar{\Omega}_\pm, \varphi, \varphi^*, \rho, \rho^*, A_m \text{ e } B . \quad (2.28)$$

Esta forma de se escrever o contra-termo torna explícita a separação entre os contra-termos físicos, que correspondem à renormalização das massas físicas e constantes de acoplamento $m_0, \mu, g, y, \zeta, \lambda$, e os triviais, que dizem respeito à renormalização não-

física das amplitudes dos campos ψ_{\pm} and φ , pois as renormalizações dos outros campos não são independentes.

Conclui-se, portanto, que a ação clássica Σ (2.4), invariante por paridade (2.10) e solução das identidades funcionais que expressam as diversas simetrias do modelo ((2.7), (2.8), (2.9), (2.12) e (2.23)), é estável por correções quânticas. Isto deve-se ao fato de que qualquer solução geral em uma vizinhança de Σ pode ser obtida através de redefinições dos campos e parâmetros iniciais do modelo.

2.5 Anomalia

Ao nível quântico, a função de vértice, Γ , que coincide com a ação clássica (2.4) à ordem \hbar^0 :

$$\Gamma = \Sigma + \mathcal{O}(\hbar) \quad , \quad (2.29)$$

deve satisfazer às seguintes condições

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \partial^m A_m + \xi B \quad , \quad (2.30)$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}} = \square c \quad , \quad (2.31)$$

$$-i \frac{\delta\Gamma}{\delta c} = \Delta_{\text{class}} \quad , \quad (2.32)$$

$$W_{\text{rigid}}\Gamma = 0 \quad , \quad (2.33)$$

onde W_{rigid} já foi definido em (2.22) e as eqs.(2.30 – 2.32) são as extensões quânticas das eqs.(2.7 – 2.9).

De acordo com o Princípio de Ação Quântica [15, 16], a identidade de Slavnov-Taylor (2.12) adquire uma quebra quântica

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \Delta \cdot \Gamma = \Delta + \mathcal{O}(\hbar\Delta) \quad , \quad (2.34)$$

onde Δ é um funcional local integrado com número de ghost 1.

A identidade de nilpotência (2.15), em conjunto com

$$\mathcal{S}_\Gamma = \mathcal{S}_\Sigma + \mathcal{O}(\hbar) \quad , \quad (2.35)$$

implica na seguinte condição de consistência para a quebra quântica Δ :

$$\mathcal{S}_\Sigma \Delta = 0 \quad . \quad (2.36)$$

Outras condições a serem satisfeitas por Δ são obtidas a partir das equações (2.30 – 2.33) e da álgebra não-linear apresentada abaixo :

$$\frac{\delta \mathcal{S}(\mathcal{F})}{\delta B} - \mathcal{S}_\mathcal{F} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta B} - \partial^m A_m - \xi B \right) = \frac{1}{g} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} - \square c \right) \quad , \quad (2.37)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}(\mathcal{F})}{\delta \bar{c}} + \mathcal{S}_\mathcal{F} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} = 0 \quad , \quad (2.38)$$

$$-i \int d^3 x \frac{\delta}{\delta c} \mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_\mathcal{F} \int d^3 x \left(-i \frac{\delta}{\delta c} \mathcal{F} - \Delta_{\text{class}} \right) = W_{\text{rigid}} \mathcal{F} \quad , \quad (2.39)$$

$$W_{\text{rigid}} \mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_\mathcal{F} W_{\text{rigid}} \mathcal{F} = 0 \quad , \quad (2.40)$$

(\mathcal{F} é um funcional arbitrário com número de ghost zero) .

A seguir, são apresentados os vínculos a serem satisfeitos pela quebra Δ :

$$\frac{\delta \Delta}{\delta B} = 0 \quad , \quad (2.41)$$

$$\frac{\delta \Delta}{\delta \bar{c}} = 0 \quad , \quad (2.42)$$

$$\int d^3 x \frac{\delta}{\delta c} \Delta = 0 \quad , \quad (2.43)$$

$$W_{\text{rigid}} \Delta = 0 \quad . \quad (2.44)$$

A condição de consistência de Wess-Zumino (2.36) constitui também um problema de cohomologia, assim como no caso do contra-termo, que pertence ao setor de número de ghost zero (2.19). A solução pode sempre ser escrita como uma soma de um cociclo trivial, $\mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Delta}^{(0)}$, onde $\widehat{\Delta}^{(0)}$ tem número de ghost 0, e elementos não-triviais, pertencentes

à cohomologia de \mathcal{S}_Σ (2.14) no setor de número de ghost 1 :

$$\Delta^{(1)} = \widehat{\Delta}^{(1)} + \mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Delta}^{(0)} \quad , \quad (2.45)$$

onde $\Delta^{(1)}$ tem que ser par por paridade e obedecer às condições impostas pelas eqs.(2.41 – 2.44). O cociclo trivial $\mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Delta}^{(0)}$ pode ser absorvido no funcional de vértice Γ , como um contra-termo local, integrado e não-invariante $-\widehat{\Delta}^{(0)}$. Por outro lado, um termo $\Delta^{(1)}$ não-nulo representaria uma anomalia.

Através da condição (2.43), mostra-se que a quebra quântica $\Delta^{(1)}$ (2.45) pode ser escrita como a seguir

$$\Delta^{(1)} = \int d^3x K_m^{(0)} \partial^m c \quad , \quad (2.46)$$

onde $K_m^{(0)}$ é um polinômio local nos campos, não integrado, e com número de ghost zero.

Pela análise do operador de Slavnov-Taylor \mathcal{S}_Σ (2.14), e da condição de consistência de Wess-Zumino (2.36), são fixados os seguintes limites dimensionais UV e IR para a quebra $\Delta^{(1)}$, $d \leq \frac{7}{2}$ e $r \geq 2$. Portanto, as dimensões UV e IR de $K_m^{(0)}$ são limitadas, respectivamente, por $d \leq \frac{5}{2}$ e $r \geq 1$. A partir da eq.(2.36) e das eqs.(2.41 – 2.42) obtém-se duas condições que $K_m^{(0)}$ deve satisfazer

$$\frac{\delta K_m^{(0)}}{\delta B} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\delta K_m^{(0)}}{\delta \bar{c}} = 0 \quad . \quad (2.47)$$

Agora, reescrevendo-se $K_m^{(0)}$ como uma combinação linear

$$K_m^{(0)} = \sum_{i=1}^7 a_i K_m^{(0)i} \quad , \quad (2.48)$$

onde

$$\begin{aligned} K_m^{(0)1} &= A_m A^n A_n \quad , \quad K_m^{(0)2} = A_m (A^n A_n)^2 \quad , \quad K_m^{(0)3} = A_m (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \quad , \\ K_m^{(0)4} &= A_m A^n A_n \varphi^* \varphi \quad , \quad K_m^{(0)5} = A_m (\varphi^* \varphi)^2 \quad , \quad K_m^{(0)6} = A_m \varphi^* \varphi \quad , \\ K_m^{(0)7} &= \bar{\psi}_+ \gamma_m \psi_+ + \bar{\psi}_- \gamma_m \psi_- \quad , \end{aligned} \quad (2.49)$$

e levando em conta as eqs.(2.18) e todas as condições satisfeitas por $K_m^{(0)}$, mostra-se a

existência de funcionais locais $\widehat{\Delta}^{(0)i}$ tais que

$$\int d^3x K_m^{(0)i} \partial^m c = \mathcal{S}_\Sigma \widehat{\Delta}^{(0)i}, \quad i = 1, \dots, 7. \quad (2.50)$$

Isto significa que $\widehat{\Delta}^{(1)}=0$ em (2.45), o que implica na implementação da identidade de Slavnov-Taylor a cada ordem perturbativa, através da absorção do contra-termo não-invariante $-\sum_i a_i \widehat{\Delta}^{(0)i}$.

É claro que contra-termos invariantes podem ser arbitrariamente adicionados a cada ordem; entretanto, a discussão à respeito da estabilidade da ação clássica mostra que tais contra-termos correspondem à renormalização dos parâmetros físicos da teoria. Os coeficientes destes contra-termos tem que ser fixados por condições de normalização apropriadas.

Finalmente, conclui-se, neste Capítulo, a demonstração da renormalizabilidade e da ausência de anomalia de gauge na QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar no regime simétrico. Vistas estas propriedades de consistência, o modelo apresentado pode ser considerado como uma proposta viável de se efetuar cálculos a ordens mais altas em \hbar , o que poderia, eventualmente, ser de interesse em conexão com o estudo de fenômenos planares em condutores a temperaturas muito baixas.

Capítulo 3

Renormalização Algébrica da QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar-II: regime de quebra

3.1 Introdução

Este Capítulo, como mencionado na Introdução ao Capítulo 2, será dedicado ao estudo, pelo método de Renormalização Algébrica [13, 14, 15], da QED₃ com simetria de paridade no regime de quebra espontânea [8, 12], onde o campo escalar assume valor esperado não-nulo no vácuo. Nele, estuda-se a estabilidade por correções radiativas do modelo no regime de quebra assim como a presença ou não de anomalias.

3.2 Ação no regime de quebra espontânea

Como apresentada nos Capítulos 1 e 2, a ação invariante de gauge para a QED₃ com simetria de paridade le-se :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{inv}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + i\bar{\psi}_+ \not{D}\psi_+ + i\bar{\psi}_- \not{D}\psi_- - m_0(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-) + \right. \\ \left. - y(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-)\varphi^*\varphi + D^m\varphi^* D_m\varphi - \mu^2\varphi^*\varphi - \frac{\zeta}{2}(\varphi^*\varphi)^2 - \frac{\lambda}{3}(\varphi^*\varphi)^3 \right\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

onde as dimensões de massa dos parâmetros m_0 , μ , ζ , λ e y são respectivamente 1, 1, 1, 0 e 0.

As derivadas covariantes são as já definidas nos Capítulos 1 e 2 :

$$D\psi_{\pm} \equiv (\not{\partial} + iqqA)\psi_{\pm} \quad \text{e} \quad D_m\varphi \equiv (\partial_m + iQgA_m)\varphi \quad . \quad (3.2)$$

Para que seja assegurado o regime de quebra espontânea, onde $\langle\varphi\rangle=v$, e que o potencial tenha vácuos estáveis, são impostas as seguintes condições sobre os parâmetros μ , ζ e λ :

$$\lambda > 0 \quad , \quad \zeta < 0 \quad \text{e} \quad \mu^2 \leq \frac{3}{16} \frac{\zeta^2}{\lambda} \quad . \quad (3.3)$$

O valor esperado no vácuo do produto $\varphi^*\varphi$, v^2 , é escolhido como a solução

$$\langle\varphi^*\varphi\rangle = v^2 = -\frac{\zeta}{2\lambda} + \left[\left(\frac{\zeta}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (3.4)$$

da equação

$$\mu^2 + \zeta v^2 + \lambda v^4 = 0 \quad , \quad (3.5)$$

que representa a condição de mínimo do potencial. O campo escalar complexo, φ , é parametrizado por

$$\varphi = v + H + i\theta \quad , \quad (3.6)$$

onde θ é o *would-be Goldstone boson* e H é o escalar de Higgs, ambos com valores esperados no vácuo nulos.

Por substituição da eq.(3.6) na ação (3.1), obtém-se a seguinte expressão para a ação no regime de quebra :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{inv}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + i\bar{\psi}_+ D\psi_+ + i\bar{\psi}_- D\psi_- - m_0(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-) + \right. \\ \left. - y(\bar{\psi}_+\psi_+ - \bar{\psi}_-\psi_-)((v+H)^2 + \theta^2) + \partial^m H \partial_m H + \partial^m \theta \partial_m \theta + \right. \\ \left. + 2vQgA^m \partial_m \theta + 2QgA^m (H \partial_m \theta - \theta \partial_m H) + Q^2 g^2 A^m A_m ((v+H)^2 + \theta^2) + \right. \\ \left. - \mu^2((v+H)^2 + \theta^2) - \frac{\zeta}{2}((v+H)^2 + \theta^2)^2 - \frac{\lambda}{3}((v+H)^2 + \theta^2)^3 \right\} \quad . \quad (3.7) \end{aligned}$$

Da ação (3.7) obtêm-se as massas para ψ_{\pm} , A_m e H , que são respectivamente $m=m_0+yv^2$, $M_A^2=2v^2Q^2g^2$ e $M_H^2=2v^2(\zeta + 2\lambda v^2)$.

3.3 Simetria e operadores BRS

Para a quantização do modelo (3.7), introduz-se o termo de *gauge-fixing* Σ_{gf} (ξ -*gauge*) e a ação Σ_{ext} , que acopla as transformações de BRS não-lineares às fontes externas :

$$\Sigma_{\text{gf}} = \int d^3x \left\{ B\partial^m A_m + \frac{\xi}{2}B^2 + \bar{c}\square c \right\} \quad , \quad (3.8)$$

$$\Sigma_{\text{ext}} = \int d^3x \left\{ \bar{\Omega}_+ s\psi_+ - \bar{\Omega}_- s\psi_- - s\bar{\psi}_+ \Omega_+ + s\bar{\psi}_- \Omega_- + s\theta \Theta + sH \Xi \right\} \quad . \quad (3.9)$$

As transformações de BRS são dadas por :

$$\begin{aligned} sH &= -Qc\theta \quad , \quad s\theta = Qc(v + H) \quad , \\ s\psi_{\pm} &= iqc\psi_{\pm} \quad , \quad s\bar{\psi}_{\pm} = -iqc\bar{\psi}_{\pm} \quad , \\ sA_m &= -\frac{1}{g}\partial_m c \quad , \quad sc = 0 \quad , \\ s\bar{c} &= \frac{1}{g}B \quad , \quad sB = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde c é o ghost, \bar{c} é o anti-ghost e B é o campo multiplicador de Lagrange.

A ação completa, Σ , escreve-se como :

$$\Sigma = \Sigma_{\text{inv}} + \Sigma_{\text{gf}} + \Sigma_{\text{ext}} \quad . \quad (3.11)$$

A ação da QED₃ (3.11) é invariante pela simetria de paridade, P , cuja atuação sobre

os campos e fontes externas é dada a seguir :

$$\begin{aligned}
x_m &\xrightarrow{P} x_m^P = (x_0, -x_1, x_2) \ , \\
\psi_{\pm} &\xrightarrow{P} \psi_{\pm}^P = -i\gamma^1 \psi_{\mp} \ , \quad \bar{\psi}_{\pm} \xrightarrow{P} \bar{\psi}_{\pm}^P = i\bar{\psi}_{\mp} \gamma^1 \ , \\
A_m &\xrightarrow{P} A_m^P = (A_0, -A_1, A_2) \ , \\
\phi &\xrightarrow{P} \phi^P = \phi \ , \quad \phi = H, \theta, c, \bar{c}, B \ , \\
\Omega_{\pm} &\xrightarrow{P} \Omega_{\pm}^P = -i\gamma^1 \Omega_{\mp} \ , \quad \bar{\Omega}_{\pm} \xrightarrow{P} \bar{\Omega}_{\pm}^P = i\bar{\Omega}_{\mp} \gamma^1 \ , \\
\Theta &\xrightarrow{P} \Theta^P = \Theta \ , \quad \Xi \xrightarrow{P} \Xi^P = \Xi \ .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

As dimensões ultra-violeta (UV) e infra-vermelha (IR), d e r respectivamente, assim como os números de ghost, $\Phi\Pi$, e as paridades de Grassmann, GP , de todos os campos e fontes estão apresentados na Tabela 3.1.

	A_m	H	θ	ψ_{\pm}	c	\bar{c}	B	Θ	Ξ	Ω_{\pm}
d	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2
r	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2
$\Phi\Pi$	0	0	0	0	1	-1	0	-1	-1	-1
GP	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

Tabela 3.1: Dimensões UV e IR, d e r , números de ghost, $\Phi\Pi$, e paridades de Grassmann, GP .

A invariância de BRS da ação (3.11) é expressa na forma funcional pela identidade de Slavnov-Taylor

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Sigma) = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{g} \partial^m c \frac{\delta \Sigma}{\delta A^m} + \frac{1}{g} B \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Omega}_+} \frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_+} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\Omega}_-} \frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_-} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_+} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}_+} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \Omega_-} \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}_-} \right. \\
\left. - \frac{\delta \Sigma}{\delta \Theta} \frac{\delta \Sigma}{\delta \theta} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \Xi} \frac{\delta \Sigma}{\delta H} \right\} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Em complementação à identidade de Slavnov-Taylor (3.13), seguem-se a condição de gauge, a equação de ghost e a equação de anti-ghost [28] :

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta B} = \partial^m A_m + \xi B \ ; \tag{3.14}$$

$$\frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{c}} = \square c \ ; \tag{3.15}$$

$$-i \frac{\delta \Sigma}{\delta c} = i \square \bar{c} - i \frac{\delta \Sigma_{\text{ext}}}{\delta c} \ . \tag{3.16}$$

Os lados direitos das equações (3.14 – 3.16) não se renormalizarão, pois são lineares nos campos quânticos.

A solução das equações (3.14 – 3.15) é dada por :

$$\Sigma = \bar{\Sigma}(\psi_{\pm}, H, \theta, A_m, c, \Omega_{\pm}, \Theta, \Xi) + \int d^3x \left\{ B \partial^m A_m + \frac{\xi}{2} B^2 + \bar{c} \square c \right\} . \quad (3.17)$$

Pela substituição de (3.17) em (3.13), obtém-se a seguinte identidade de Slavnov-Taylor para $\bar{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \bar{S}(\bar{\Sigma}) = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{g} \partial^m c \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta A^m} + \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \psi_+} - \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Omega_-} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \psi_-} - \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \bar{\psi}_+} + \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Omega_-} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \bar{\psi}_-} + \right. \\ \left. - \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Theta} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \theta} - \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta \Xi} \frac{\delta \bar{\Sigma}}{\delta H} \right\} = 0 . \end{aligned} \quad (3.18)$$

O correspondente operador de Slavnov-Taylor linearizado para um funcional qualquer $\bar{\mathcal{F}}$ le-se

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\bar{\mathcal{F}}} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{g} \partial^m c \frac{\delta}{\delta A^m} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta}{\delta \psi_+} - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Omega_-} \frac{\delta}{\delta \psi_-} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \psi_+} \frac{\delta}{\delta \Omega_+} - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \psi_-} \frac{\delta}{\delta \Omega_-} + \right. \\ \left. - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Omega_+} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_+} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Omega_-} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_-} - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \bar{\psi}_+} \frac{\delta}{\delta \Omega_+} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \bar{\psi}_-} \frac{\delta}{\delta \Omega_-} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Theta} \frac{\delta}{\delta \theta} + \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \theta} \frac{\delta}{\delta \Theta} + \right. \\ \left. - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \Xi} \frac{\delta}{\delta H} - \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta H} \frac{\delta}{\delta \Xi} \right\} . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Valem as seguintes identidades de nilpotência para os operadores de Slavnov-Taylor, $\bar{S}(\bar{\mathcal{F}})$ e $\bar{S}_{\bar{\mathcal{F}}}$, acima definidos

$$\bar{S}_{\bar{\mathcal{F}}} \bar{S}(\bar{\mathcal{F}}) = 0 , \quad \forall \bar{\mathcal{F}} ; \quad (3.20)$$

$$\bar{S}_{\bar{\mathcal{F}}} \bar{S}_{\bar{\mathcal{F}}} = 0 \quad \text{se} \quad \bar{S}(\bar{\mathcal{F}}) = 0 . \quad (3.21)$$

A atuação de $\bar{S}_{\bar{\Sigma}}$ sobre os campos e fontes externas são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\bar{\Sigma}} \phi = s \phi , \quad \phi = \psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm}, H, \theta, A_m, c, \bar{c} \text{ e } B , \\ \bar{S}_{\bar{\Sigma}} \bar{\Omega}_+ = \frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_+} , \quad \bar{S}_{\bar{\Sigma}} \bar{\Omega}_- = -\frac{\delta \Sigma}{\delta \psi_-} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\Omega_+ &= -\frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\psi}_+} , & \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\Omega_- &= \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\psi}_-} , \\ \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\Theta &= -\frac{\delta\Sigma}{\delta\theta} , & \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\Xi &= -\frac{\delta\Sigma}{\delta H} .\end{aligned}\quad (3.22)$$

3.4 Estabilidade do modelo no regime de quebra espontânea

Para se estudar a estabilidade da ação (3.11) por correções radiativas, perturba-se a ação clássica por um funcional local integrado, Σ^c , com os mesmos números quânticos de $\bar{\Sigma}$:

$$\bar{\Sigma} \longrightarrow \bar{\Sigma}' = \bar{\Sigma} + \epsilon\Sigma^c , \quad (3.23)$$

onde ϵ é um parâmetro infinitesimal. Portanto, exigindo que a ação perturbada $\bar{\Sigma}'$ satisfaça às mesmas condições que $\bar{\Sigma}$, obtém-se que :

$$\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\Sigma^c = 0 , \quad (3.24)$$

$$\frac{\delta\Sigma^c}{\delta B} = 0 , \quad \frac{\delta\Sigma^c}{\delta\bar{c}} = 0 , \quad \frac{\delta\Sigma^c}{\delta c} = 0 , \quad (3.25)$$

que são obtidas a partir da identidade de Slavnov (3.18) e das condições (3.14 – 3.16). Além disso,

$$W_{\text{rigid}}\Sigma^c = 0 , \quad (3.26)$$

onde W_{rigid} é o operador de Ward da simetria rígida $U(1)$ definido por

$$\begin{aligned}W_{\text{rigid}} = \int d^3x \left\{ q\psi_+ \frac{\delta}{\delta\psi_+} + q\psi_- \frac{\delta}{\delta\psi_-} - q\bar{\psi}_+ \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_+} - q\bar{\psi}_- \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_-} - iQ(v + H) \frac{\delta}{\delta\theta} + iQ\theta \frac{\delta}{\delta H} + \right. \\ \left. + q\Omega_+ \frac{\delta}{\delta\Omega_+} + q\Omega_- \frac{\delta}{\delta\Omega_-} - q\bar{\Omega}_+ \frac{\delta}{\delta\bar{\Omega}_+} - q\bar{\Omega}_- \frac{\delta}{\delta\bar{\Omega}_-} - iQ\Xi \frac{\delta}{\delta\Theta} + iQ\Theta \frac{\delta}{\delta\Xi} \right\} .\end{aligned}\quad (3.27)$$



A eq.(3.26) vem da invariância rígida $U(1)$ da ação ¹ :

$$W_{\text{rigid}}\Sigma = 0 \quad . \quad (3.28)$$

A condição de consistência de BRS no setor de número de ghost zero, dada pela eq.(3.24), consiste em um problema de cohomologia devido à nilpotência (3.21) do operador de Slavnov-Taylor linearizado (3.19). A solução pode ser sempre escrita como a soma de um elemento trivial $\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\hat{\Sigma}$, onde $\hat{\Sigma}$ tem número de ghost -1 , e de um outro elemento não-trivial Σ_{phys} pertencente à cohomologia de $\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}$ (3.19) no setor de número de ghost 0 :

$$\Sigma^c = \Sigma_{\text{phys}} + \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\hat{\Sigma} \quad , \quad (3.29)$$

onde o elemento trivial $\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\hat{\Sigma}$ corresponde à renormalização dos campos, portanto, é não-físico. Por outro lado, a perturbação não-trivial, Σ_{phys} , corresponde às redefinições dos parâmetros físicos do modelo, como as constantes de acoplamento e as massas. Explicatamente, é possível mostrar que a solução para a equação (3.29), pode ser apresentada na forma abaixo :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{phys}} &= z_g \left(g \frac{\partial}{\partial g} - N_A + N_B - 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Sigma + z_m m \frac{\partial \Sigma}{\partial m} + \\ &\quad + z_y y \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + z_{M_H^2} M_H^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial M_H^2} + z_{\zeta} \zeta \frac{\partial \Sigma}{\partial \zeta} + z_{\lambda} \lambda \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda} \quad , \quad (3.30) \\ \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma}\hat{\Sigma} &= \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma} \int d^3x \left\{ z_{\psi} (\bar{\psi}_+ \Omega_+ - \bar{\Omega}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \Omega_- + \bar{\Omega}_- \psi_-) + z_H [\theta \Theta + (v + H)\Xi] \right\} \\ &= z_{\psi} (N_{\psi_+} + N_{\bar{\psi}_+} + N_{\psi_-} + N_{\bar{\psi}_-} - N_{\Omega_+} - N_{\bar{\Omega}_+} - N_{\Omega_-} - N_{\bar{\Omega}_-}) \Sigma \\ &\quad + z_H (N_{\theta} + \widehat{N}_H - N_{\Theta} - N_{\Xi}) \Sigma \quad , \quad (3.31) \end{aligned}$$

onde os operadores de contagem são definidos por

$$\begin{aligned} N_{\phi} &= \int d^3x \phi \frac{\delta}{\delta \phi} \quad , \quad \phi = \psi_{\pm}, \bar{\psi}_{\pm}, \theta, \Omega_{\pm}, \bar{\Omega}_{\pm}, \Theta, \Xi, A_m \text{ e } B \quad , \\ \widehat{N}_H &= \int d^3x (v + H) \frac{\delta}{\delta H} \quad . \quad (3.32) \end{aligned}$$

¹A invariância rígida surge através da equação de anti-ghost (3.16) e da identidade de Slavnov-Taylor (3.13).

A prova da estabilidade significa, a nível quântico, a renormalizabilidade multiplicativa do modelo: todos os possíveis contra-termos induzidos por correções radiativas correspondem a redefinições dos parâmetros da ação clássica de partida. Os parâmetros $z_g, z_m, z_y, z_{M_H^2}, z_\zeta, z_\lambda, z_H$ e z_ψ são, neste caso, constantes de renormalização, que serão fixadas pelas seguintes condições de normalização expressas em termos do funcional de vértice Γ , que coincide no limite clássico com a ação clássica Σ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{HH}(p^2)\Big|_{p^2=M_H^2} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{HH}(p^2)\Big|_{p^2=\kappa^2} = 1 \quad , \\
\Gamma_{HHHH}(p)\Big|_{p=\bar{p}(\kappa)} &= -\zeta \quad , \quad \Gamma_{HHHHHH}(p)\Big|_{p=\bar{p}(\kappa)} = -\lambda \quad , \\
\Gamma_{\bar{\psi}_\pm\psi_\pm}(\not{p})\Big|_{\not{p}=\pm m} &= 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \not{p}}\Gamma_{\bar{\psi}_\pm\psi_\pm}(\not{p})\Big|_{\not{p}=\kappa} = 1 \quad , \\
\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{A^T A^T}(p^2)\Big|_{p^2=\kappa^2} &= 1 \quad , \quad \Gamma_{\bar{\psi}_\pm\psi_\pm HH}(p)\Big|_{p=\bar{p}(\kappa)} = \mp y \quad , \quad (3.33)
\end{aligned}$$

onde κ é uma escala de energia e $\bar{p}(\kappa)$ é um conjunto de 4-momenta referente a esta escala.

3.5 Anomalia

Para se completar a prova da renormalizabilidade do modelo no regime de quebra, deve-se mostrar que todas as simetrias que definem o modelo podem ser estendidas a nível quântico, para o funcional de vértice Γ

$$\Gamma = \Sigma + \mathcal{O}(\hbar) \quad . \quad (3.34)$$

Agora, é simples verificar que a solução das equações (3.14 – 3.15), que são lineares nos campos quânticos, é dada por :

$$\Gamma = \bar{\Gamma}(\psi_\pm, H, \theta, A_m, c, \Omega_\pm, \Theta, \Xi) + \int d^3x \left\{ B\partial^m A_m + \frac{\xi}{2}B^2 + \bar{c}\square c \right\} \quad . \quad (3.35)$$

Como consequência, $\bar{\Gamma}$, definido a partir de Γ similarmente como em (3.17), deve satisfazer

às seguintes condições :

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta B} = 0 \quad ; \quad (3.36)$$

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \bar{c}} = 0 \quad ; \quad (3.37)$$

$$-i \frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta c} = -i \frac{\delta \Sigma_{\text{ext}}}{\delta c} \quad ; \quad (3.38)$$

$$W_{\text{rigid}} \bar{\Gamma} = 0 \quad , \quad (3.39)$$

onde W_{rigid} já foi definido em (3.27) e a eq.(3.38) é a extensão quântica da eq.(3.16).

De acordo com o Princípio de Ação Quântica [15, 16], a identidade de Slavnov-Taylor (3.13) ganha um termo de quebra quântica

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \bar{\mathcal{S}}(\bar{\Gamma}) = \Delta \cdot \Gamma = \Delta + \mathcal{O}(\hbar \Delta) \quad , \quad (3.40)$$

onde Δ é um funcional local integrado com número de ghost 1.

A identidade de nilpotência (3.20) em conjunto com

$$\bar{\mathcal{S}}_{\Gamma} = \bar{\mathcal{S}}_{\Sigma} + \mathcal{O}(\hbar) \quad , \quad (3.41)$$

implica na seguinte condição de consistência para a quebra quântica Δ :

$$\bar{\mathcal{S}}_{\Sigma} \Delta = 0 \quad . \quad (3.42)$$

Para que sejam encontradas novas condições a serem satisfeitas pela quebra quântica, Δ , recorre-se às seguintes relações algébricas válidas para qualquer funcional $\bar{\mathcal{F}}$ com número de ghost zero :

$$\frac{\delta \bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathcal{F}})}{\delta B} - \bar{\mathcal{S}}_{\bar{\mathcal{F}}} \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta B} = 0 \quad ; \quad (3.43)$$

$$\frac{\delta \bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathcal{F}})}{\delta \bar{c}} + \bar{\mathcal{S}}_{\bar{\mathcal{F}}} \frac{\delta \bar{\mathcal{F}}}{\delta \bar{c}} = 0 \quad ; \quad (3.44)$$

$$-i \int d^3x \frac{\delta}{\delta c} \bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathcal{F}}) + \bar{\mathcal{S}}_{\bar{\mathcal{F}}} \int d^3x \left(-i \frac{\delta}{\delta c} \bar{\mathcal{F}} + i \frac{\delta \Sigma_{\text{ext}}}{\delta c} \right) = W_{\text{rigid}} \bar{\mathcal{F}} \quad ; \quad (3.45)$$

$$W_{\text{rigid}} \bar{\mathcal{S}}(\bar{\mathcal{F}}) - \bar{\mathcal{S}}_{\bar{\mathcal{F}}} W_{\text{rigid}} \bar{\mathcal{F}} = 0 \quad . \quad (3.46)$$

Através das equações (3.36 – 3.39) e (3.40), e adotando $\tilde{\mathcal{F}}=\tilde{\Gamma}$ nas eqs.(3.43 – 3.46), leem-se as seguintes condições para Δ :

$$\frac{\delta\Delta}{\delta B} = 0 \quad ; \quad (3.47)$$

$$\frac{\delta\Delta}{\delta \bar{c}} = 0 \quad ; \quad (3.48)$$

$$\int d^3x \frac{\delta}{\delta c} \Delta = 0 \quad ; \quad (3.49)$$

$$W_{\text{rigid}}\Delta = 0 \quad . \quad (3.50)$$

A condição de consistência de Wess-Zumino (3.42) constitui um problema de cohomologia, como no caso do regime simétrico analisado no Capítulo 2. A solução pode sempre ser escrita como uma soma de um cociclo trivial $\mathcal{S}_\Sigma \hat{\Delta}^{(0)}$, onde $\hat{\Delta}^{(0)}$ tem número de ghost 0, e elementos não-triviais pertencentes à cohomologia de \mathcal{S}_Σ (3.19) no setor de número de ghost 1 :

$$\Delta^{(1)} = \hat{\Delta}^{(1)} + \mathcal{S}_\Sigma \hat{\Delta}^{(0)} \quad , \quad (3.51)$$

onde $\Delta^{(1)}$ tem que ser par por paridade e obedecer às condições impostas pelas eqs.(3.47 – 3.50). Já, o cociclo trivial $\mathcal{S}_\Sigma \hat{\Delta}^{(0)}$ pode ser absorvido no funcional de vértice Γ como um contra-termo local, integrado e não-invariante $-\hat{\Delta}^{(0)}$.

Agora, pela condição (3.49), conclui-se que

$$\Delta^{(1)} = \int d^3x K_m^{(0)} \partial^m c \quad , \quad (3.52)$$

onde $K_m^{(0)}$ é um polinômio local nos campos, não integrado, e com número de ghost zero.

Analisando-se o operador de Slavnov-Taylor $\tilde{\mathcal{S}}_\Sigma$ (3.19) e a condição de Wess-Zumino (3.42), os seguintes limites dimensionais UV e IR para a quebra $\Delta^{(1)}$ são obtidos, $d \leq \frac{7}{2}$ e $r \geq 2$. Logo, as dimensões UV e IR de $K_m^{(0)}$ estão limitadas por $d \leq \frac{5}{2}$ e $r \geq 1$.

Reescrevendo $K_m^{(0)}$ como uma combinação linear,

$$K_m^{(0)} = \sum_{i=1}^8 a_i K_m^{(0)i} \quad , \quad (3.53)$$

onde os elementos da base $K_m^{(0)i}$ são dados por

$$\begin{aligned}
K_m^{(0)1} &= A_m \ , \ K_m^{(0)2} = A_m A^n A_n \ , \\
K_m^{(0)3} &= A_m (A^n A_n)^2 \ , \ K_m^{(0)4} = A_m (\bar{\psi}_+ \psi_+ - \bar{\psi}_- \psi_-) \ , \\
K_m^{(0)5} &= A_m A^n A_n ((v + H)^2 + \theta^2) \ , \ K_m^{(0)6} = A_m ((v + H)^2 + \theta^2) \ , \\
K_m^{(0)7} &= A_m ((v + H)^2 + \theta^2)^2 \ \text{e} \ K_m^{(0)8} = \bar{\psi}_+ \gamma_m \psi_+ + \bar{\psi}_- \gamma_m \psi_- \ , \quad (3.54)
\end{aligned}$$

pode-se mostrar, com a ajuda das eqs.(3.22) e das condições satisfeitas por $K_m^{(0)}$, a existência de funcionais locais $\hat{\Delta}^{(0)i}$ tais que

$$\int d^3x \ K_m^{(0)i} \partial^m c = S_{\Sigma} \hat{\Delta}^{(0)i} \ , \ i = 1, \dots, 8 \ . \quad (3.55)$$

Este resultado mostra que $\hat{\Delta}^{(1)} = 0$ na eq.(3.51), o que leva à implementação da identidade de Slavnov-Taylor a cada ordem perturbativa através da absorção do contra-termo não-invariante $-\sum_i a_i \hat{\Delta}^{(0)i}$.

Portanto, o método algébrico de renormalização permite mostrar que o modelo é renormalizável perturbativamente, a todas as ordens. O estudo dos possíveis contra-termos leva à conclusão de que o modelo é renormalizável multiplicativamente, a saber, os contra-termos podem ser reabsorvidos por redefinições dos parâmetros iniciais do modelo. Finalmente, é provada a ausência de anomalias. Deve-se ressaltar que a análise algébrica usada não envolve qualquer esquema de regularização, como também nenhum cálculo diagramático. Apesar de se ter verificado explicitamente, já se poderia esperar que, como os resultados obtidos no Capítulo 2 a respeito das propriedades do modelo no regime simétrico, anomalias não deveriam ser desenvolvidas após a quebra espontânea da simetria de gauge.

Capítulo 4

Perspectivas futuras

Este breve Capítulo tem como objetivo discutir alguns pontos ainda a serem estudados em relação ao modelo proposto nesta tese [8, 11, 12]. A QED₃ com simetria de paridade acoplada à matéria escalar mostrou-se um modelo consistente, conforme as análises feitas nos Capítulos anteriores, e que deve ser explorado no sentido de um maior entendimento dos fenômenos envolvendo elétrons em $D=1+2$.

Este trabalho teve como principal objetivo o estudo do espalhamento de elétrons em $D=1+2$, onde se obteve como interessante resultado a possibilidade de haver uma interação efetiva atrativa entre elétrons com estados opostos de polarização [8]. Em se tratando do caso de elétrons com a mesma polarização certas condições devem ser impostas sobre os parâmetros, de tal forma que o potencial resultante das interações mediadas, pelo bóson de *gauge* e pelo Higgs, seja atrativo [17].

Recentemente, verificou-se a existência de estados ligados de *positronium* na QED₃ com simetria de paridade [10]. Este resultado motiva o estudo do modelo aqui proposto [8, 11, 12] através de métodos não perturbativos, como por exemplo, a equação de Bethe-Salpeter, visto que poder-se-ia analisar casos que envolvam elétrons fortemente acoplados. Tal estudo terá como objetivo a verificação da existência, ou não, de estados ligados de elétrons na QED₃ com simetria de paridade no regime de quebra espontânea de simetria [27]. Os estados ligados se refletiriam nas soluções da equação de Bethe-Salpeter como pólos do tipo $k^2 = 4m^2$. Se através das soluções da equação de Bethe-Salpeter para $T = 0$ existirem estados ligados, deve-se, portanto, investigar a possibilidade, ou não, de haver

uma temperatura crítica T_c , tal que, para temperaturas acima da crítica ($T > T_c$) as soluções da equação de Bethe-Salpeter não mais exibiriam pólos do tipo $k^2 = 4m^2$ [30]. O que, de acordo com o teorema de Coleman-Mermin-Wagner [26], estaria diretamente ligado ao restabelecimento da simetria de gauge.

Apêndice A

Algumas propriedades dos espinores de Dirac em $D=1+2$

Este Apêndice é dedicado à algumas propriedades dos espinores de Dirac em $D=1+2$. Estudam-se as soluções de energia positiva e negativa da equação de Dirac referentes aos espinores ψ_+ e ψ_- . É apresentada também em detalhe, a conexão entre massa e spin para se elucidar algumas peculiaridades dos espalhamentos de elétrons em $D=1+2$. A última seção deste Apêndice tem como objetivo a análise do Hamiltoniano associado aos espinores ψ_+ e ψ_- .

Soluções de energia positiva e negativa para ψ_+ e ψ_-

Considerando-se u_+ e v_+ , u_- e v_- , respectivamente, como as soluções de energia positiva e negativa das equações de Dirac para ψ_+ e ψ_- , devem portanto, satisfazer as seguinte equações no espaço de *momentum* :

$$(\not{p} - m)u_+(p) = 0 \quad , \quad (-\not{p} - m)v_+(p) = 0 \quad ; \quad (\text{A.1})$$

$$(\not{p} + m)u_-(p) = 0 \quad , \quad (-\not{p} + m)v_-(p) = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Cujas soluções são dadas por

$$u_+(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(m+E)}} u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad v_+(p) = \frac{\not{p} - m}{\sqrt{2m(m-E)}} v_+(m, \vec{0}) \quad ; \quad (\text{A.3})$$

$$u_-(p) = \frac{\not{p} - m}{\sqrt{2m(m+E)}} u_-(m, \vec{0}) \quad , \quad v_-(p) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(m-E)}} v_-(m, \vec{0}) \quad , \quad (\text{A.4})$$

onde $u_+(m, \vec{0})$, $v_+(m, \vec{0})$, $u_-(m, \vec{0})$ e $v_-(m, \vec{0})$ são as soluções das eqs.(A.1-A.2) no referencial de repouso

$$u_+(m, \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_+(m, \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (\text{A.5})$$

$$u_-(m, \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_-(m, \vec{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.6})$$

As soluções de energia positiva e negativa dadas pelas eqs.(A.3-A.4) são normalizadas por :

$$\bar{u}_+(p)u_+(p) = 1 \quad , \quad \bar{v}_+(p)v_+(p) = -1 \quad ; \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{u}_-(p)u_-(p) = -1 \quad , \quad \bar{v}_-(p)v_-(p) = 1 \quad . \quad (\text{A.8})$$

Spin de u_+ , v_+ , u_- e v_-

Agora, considerando-se os resultados da última seção, é possível determinar o spin das soluções u_+ , v_+ , u_- e v_- . O cálculo dos spins é feito no referencial de repouso da partícula, pois tem-se em mente mostrar explicitamente o fato de que o sinal dos termos de massa fixa a polarização do férmion.

Em $D=1+2$, os geradores do grupo $\overline{SO}(1,2)$ na representação espinorial leem-se :

$$\Sigma^{kl} = \frac{1}{4} [\gamma^k, \gamma^l] \quad , \quad (\text{A.9})$$

onde as matrizes γ são tomadas como $\gamma^m = (\sigma_x, i\sigma_y, -i\sigma_z)$.

O operador de spin S^{12} é obtido a partir da eq. (A.9), e é dado por

$$S^{12} = \frac{1}{2} \sigma_x \quad . \quad (\text{A.10})$$

A atuação do operador de spin S^{12} nas funções de onda no referencial de repouso dadas pelas eqs.(A.5-A.6) é listada abaixo :

$$S^{12} u_+(m, \vec{0}) = s_+^u u_+(m, \vec{0}) \quad , \quad S^{12} v_+(m, \vec{0}) = s_+^v v_+(m, \vec{0}) \quad ; \quad (\text{A.11})$$

$$S^{12} u_-(m, \vec{0}) = s_-^u u_-(m, \vec{0}) \quad , \quad S^{12} v_-(m, \vec{0}) = s_-^v v_-(m, \vec{0}) \quad . \quad (\text{A.12})$$

Através das eqs.(A.5-A.6) e da eq.(A.10), encontram-se os seguintes resultados para os auto-valores de spin s_+^u , s_-^u , s_+^v e s_-^v :

$$s_+^u = \frac{1}{2} \quad , \quad s_-^u = -\frac{1}{2} \quad , \quad s_+^v = -\frac{1}{2} \quad , \quad s_-^v = \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{A.13})$$

Pela eq.(A.13), pode-se concluir que elétrons (u_+ and u_-) e pósitrons (v_+ and v_-) com termos de massa de sinais opostos possuem polarizações opostas de spin. É importante mencionar que este resultado está em completo acordo com a ref.[7].

Um ponto interessante a se ressaltar diz respeito à polarização de uma partícula (u) e a correspondente anti-partícula (v) pertencentes ao mesmo espinor de Dirac (ψ). Como um resultado típico de $D=1+2$, se uma partícula tiver spin s , a anti-partícula correspondente terá spin $-s$.

Hamiltoniano para ψ_+ e ψ_-

Nesta seção, a relação entre termos de massa de sinais opostos e os sinais opostos das matrizes β , relativas aos espinores ψ_+ e ψ_- , torna-se clara ao se calcular o Hamiltoniano livre H_0 .

Para um espinor genérico de Dirac massivo, χ , o operador Hamiltoniano livre no espaço de *momentum*, H_0 , é dado por :

$$H_0 \chi \equiv (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \chi \quad , \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} \quad \text{e} \quad \beta = \gamma^0 \quad . \quad (\text{A.15})$$

Agora, considerando-se as equações de Dirac para ψ_+ e ψ_- :

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi_+ = 0 \quad \text{e} \quad (i\cancel{\partial} + m)\psi_- = 0 \quad , \quad (\text{A.16})$$

segue-se que

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_+ = \left(i\gamma_{(+)}^0 \vec{\gamma}_{(+)} \cdot \vec{\partial} + \beta_{(+)} m \right) \psi_+ \equiv H_0^{(+)} \psi_+ \quad ; \quad (\text{A.17})$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_- = \left(i\gamma_{(-)}^0 \vec{\gamma}_{(-)} \cdot \vec{\partial} + \beta_{(-)} m \right) \psi_- \equiv H_0^{(-)} \psi_- \quad . \quad (\text{A.18})$$

Portanto, no espaço de *momentum* os Hamiltonianos $H_0^{(+)}$ e $H_0^{(-)}$ leem-se

$$H_0^{(+)} \psi_+ = \left(\vec{\alpha}_{(+)} \cdot \vec{p} + \beta_{(+)} m \right) \psi_+ \quad ; \quad (\text{A.19})$$

$$H_0^{(-)} \psi_- = \left(\vec{\alpha}_{(-)} \cdot \vec{p} + \beta_{(-)} m \right) \psi_- \quad , \quad (\text{A.20})$$

onde, pela eq.(A.14), pode-se concluir que

$$\vec{\alpha}_{(+)} = \gamma_{(+)}^0 \vec{\gamma}_{(+)} \quad \text{e} \quad \beta_{(+)} = \gamma_{(+)}^0 \quad ; \quad (\text{A.21})$$

$$\vec{\alpha}_{(-)} = \gamma_{(-)}^0 \vec{\gamma}_{(-)} \quad \text{e} \quad \beta_{(-)} = -\gamma_{(-)}^0 \quad . \quad (\text{A.22})$$

As eqs.(A.21-A.22) determinam completamente o comportamento dos potenciais de espalhamento para os processos de espalhamento $e_{(\pm)}^- - e_{(\mp)}^-$ e $e_{(\pm)}^- - e_{(\pm)}^-$ mediados pelo campos de gauge e pelo Higgs. Os resultados estão em acordo com o fato de que o potencial de espalhamento do Higgs não *percebe* a polarização dos elétrons, pois o Higgs tem spin zero. Isto só é possível se as eqs.(A.21-A.22) forem satisfeitas.

Bibliografia

- [1] W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B156** (1979) 135 ; J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157 ; R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2291 ; S. Deser and R. Jackiw, *Phys. Lett.* **B139** (1984) 371 ; S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975 and *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** (1982) 372.
- [2] O. Foda, *Nucl. Phys.* **B300** (1988) 611 ; Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001 ; J. D. Lykken, *Chern-Simons and Anyonic Superconductivity*, talk given at the fourth annual Superstring Workshop, "Strings 90", Texas A & M University (Texas, March 1990).
- [3] S. Randjbar-Daemi, A. Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 403 and *Int. J. Mod. Phys.* **B5** (1991) 845 ; N. Dorey and N.E. Mavromatos, *Phys. Lett.* **B266** (1991) 163 and *Nucl. Phys.* **B386** (1992) 614.
- [4] R.D. Pisarski, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2423 ; T.W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali and L.C.R. Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 3704 ; R. Mackenzie and F. Wilczek, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 2827 ; G.W. Semenoff and P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328** (1989) 753 ; G.W. Semenoff and L.C.R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2633 ; A. Kovner and B. Rosenstein, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 2661 ; M.I. Dobroliubov, D. Eliezer, I.I. Kogan, G.W. Semenoff and R.J. Szabo, *Mod. Phys. Lett.* **A8** (1993) 2177 ; M.A. De Andrade and O.M. Del Cima, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 95 and *Int. J. Mod. Phys.* **A11** (1996) 1367 ; M.A. De Andrade, O.M. Del Cima and L.P. Colatto, *Phys. Lett.* **B370** (1996) 59 .
- [5] J.G. Bednorz and A.K. Müller, *Z. Phys.* **B64** (1986) 189.

- [6] K. Von Klitzing, G. Dorda and M. Peper, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 494 ; D. Tsui, H. Störmer and A. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1559.
- [7] B. Binegar, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1511.
- [8] M.A. De Andrade, O.M. Del Cima and J.A. Helayël-Neto, *Electron-pair condensation in parity-preserving QED₃*, hep-th/9603054. Talk given at *Quantum Systems: New Trends and Methods 96 - QS96*, Minsk, Belarus.
- [9] P. Maris, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 6087.
- [10] C.J. Burden, *Nucl. Phys.* **B387** (1992) 419 ; T.W. Allen and C.J. Burden, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5842.
- [11] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, *Algebraic renormalization of parity-preserving QED₃ coupled to scalar matter I: unbroken case*, hep-th/9611001, UGVA-DPT-1996-09-950.
- [12] O.M. Del Cima, D.H.T. Franco, J.A. Helayël-Neto and O. Piguet, *Algebraic renormalization of parity-preserving QED₃ coupled to scalar matter II: broken case*, hep-th/9611002, UGVA-DPT-1996-10-953.
- [13] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127 and *Ann. Phys. (N.Y.)* **98** (1976) 287 ; O. Piguet and A. Rouet, *Phys. Rep.* **76** (1981) 1.
- [14] O. Piguet, *Renormalisation en théorie quantique de champs* and *Renormalisation des théories de jauge*, lectures of the *Troisième cycle de la physique en Suisse Romande* (1982-1983).
- [15] O. Piguet and S.P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Lecture Notes in Physics, m28, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [16] J.H. Lowenstein, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 2281 and *Comm. Math. Phys.* **24** (1971) 1 ; Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2145 and *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2943 ; T.E. Clark and J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* **B113** (1976) 109.

- [17] M.A. De Andrade, O.M. Del Cima e J.A. Helayël-Neto, *trabalho em andamento*.
- [18] G. Boebinger, *Correlated Electrons in a Million Gauss*, *Physics Today* **49** (1996) 36 ; G. Burns, *High-Temperature Superconductivity - An Introduction*, Academic Press Inc., San Diego, 1992.
- [19] W. Johnson, P. Mohr and J. Sucher, *Relativistic, Quantum Electrodynamics, and Weak Interaction Effects in Atoms*, AIP Conference Proceedings (1989) 513p, New York (USA) ; J. Sucher, *Potentials from field theory: non-uniqueness, gauge dependence and all that*, University of California preprint, NSF-ITP-89-63 ; J. Sucher, *Phys. Rev. D***49** (1994) 4284 ; J. Sucher, *Phys. Rev. D***51** (1995) 5965 ; J. Sucher, *The concept of potential in quantum field theory*, hep-ph/9412388. Talk given at *Quantum Systems: New Trends and Methods 94 - QS94*, Minsk, Belarus.
- [20] H.A. Bethe and E.E. Salpeter, *Phys. Rev.* **82** (1951) 309 and *Phys. Rev.* **84** (1951) 1232.
- [21] O. Piguet, *comunicação privada*.
- [22] E.S. Abers and B.W. Lee, *Phys. Rep.* **9** (1973) 1.
- [23] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173 and *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167.
- [24] L.N. Cooper, *Phys. Rev.* **104** (1956) 1189.
- [25] J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
- [26] N.D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133 ; S. Coleman, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 259.
- [27] H.S. Carvalho, O.M. Del Cima, D.H.T. Franco e J.A. Helayël-Neto, *trabalho em andamento*.
- [28] A. Blasi, O. Piguet and S.P. Sorella, *Nucl Phys.* **B356** (1991) 154.
- [29] J.H. Lowenstein, *Comm. Math. Phys.* **47** (1976) 53.

[30] H.S. Carvalho, O.M. Del Cima, D.H.T. Franco e J.A. Helayël-Neto, *trabalho em andamento*.

**"PARES CONDENSADOS DE ELÉTRONS NA QED₃ COM
SIMETRIA DE PARIDADE EM D=1+2"**

Oswaldo Monteiro Del Cima

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto
José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Francisco Carlos Pinheiro Nunes
Francisco Carlos Pinheiro Nunes

A. Malbouisson
Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson

Nami Fux Svaiter
Nami Fux Svaiter

Sebastião Alves Dias
Sebastião Alves Dias

R. Paounov
Roman Raycov Paounov - Suplente

Rio de Janeiro, 16 de dezembro de 1996