

TESE DE
MESTRADO

Sólitons e
a simetria de vestimento
na equação sine-Gordon

GUILLERMO SANTIAGO CUBA CASTILLO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, JULHO DE 1996

...a large solitary elevation, a rounded, smooth and well defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed... . Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon.

Russell (1838)

a Pamela Cristina.

AGRADEÇO

À CAPES, pela bolsa recebida no mestrado.

A Roman Paunov, meu orientador; sem sua ajuda, não teria sido possível realizar esta tese.

A J.A.Helayel-Neto, por sua valiosa ajuda ao ler e corrigir esta tese; também, por sua orientação quando cheguei ao CBPF.

A Myriam Simões Coutinho, pela amabilidade com que nos atende na CFC.

Ao pessoal da biblioteca, pela ajuda na procura de livros e papers, e pela gentileza com que nos tratam; em geral, a todos os funcionarios do CBPF.

A Cláudio Sasaki, pela sua ajuda na organização desta tese; sem o seu auxílio, até agora teria que estar aprendendo LATEX.

Aos professores do CBPF, pelos conhecimentos que me transmitiram.

Ao pessoal do DCP em geral.

Aos meus amigos Ada Lopez, Armando Bernui, German Gomero, Gino Janampa, Humberto Belich, Javier Solano, Julio Pessanha, Marco Flores, Rodolfo Casana, Roger Metzger, Susana Petrick....

A Carla e Pamela, pelos momentos felizes que me deram ao vir me visitar.

Aos meus pais e irmãos, por seu constante apoio.

Resumo

Usando o método do espalhamento inverso, são encontradas as soluções solitônicas do modelo sine-Gordon . Vê-se que, para garantir a invariância dos parênteses de Poisson sob a ação do grupo de vestimento, além do parêntese de Semenov-Tian-Shansky, deve-se levar em conta a forma de seus elementos. Para soluções monosolitônicas, obtém-se o parêntese de Semenov-Tian-Shansky, após uma redução Hamiltoniana.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo em português	iii
Índice	iii
Introdução	1
1 “O método do espalhamento inverso e as soluções solitônicas”	5
1.1 A equação de sine–Gordon e a condição de curvatura zero. Transformações espectrais direta e inversa.	6
1.2 A evolução dos dados espectrais	15
1.3 Soluções solitônicas e a colisão dos sólitons e ”breathers”	18
2 Grupos de Lie–Poisson e as transformações de vestimento	31
2.1 Grupos de Lie–Poisson e o ”double” de Drinfeld	32
2.2 O grupo de vestimento. Aplicação para o modelo de sine–Gordon	46
3 A estrutura simplética no grupo de vestimento	56
3.1 Os elementos do grupo de vestimento que geram N –sólitons a partir do vácuo	57
3.2 O espaço de fases dos N sólitons e o parêntese $\{g \otimes g\}$	63
3.3 A relação entre o parêntese $\{g \otimes g\}$ do caso monosolitônico e o parêntese de Semenov–Tian–Shansky	70

Conclusão

79

Referências

81

Introdução

Em 1965, Zabusky e Kruskal [1] descobriram que as soluções pulsantes da equação de Korteweg-de-Vries (KdV) apresentam uma interessante propriedade: a interação entre elas é elástica. Isto quer dizer que, após a colisão, estas ondas separam-se sem mudar de velocidade, e o único efeito da interação resulta em uma mudança de fases. Por este motivo, estas soluções foram chamadas sólitons. Gardner, Green, Kruskal e Miura [2] desenvolveram um método para resolver a equação KdV, com o auxílio da teoria de colisão direta e inversa.

Ficou claro, graças aos trabalhos de Lax [3], e de Zakharov e Shabat [4], que o mesmo método pode ser usado para resolver outras equações não-lineares fisicamente interessantes. Usando estas idéias, Ablowitz, Knaup, Newell e Segur [5, 6] formularam o método de espalhamento inverso e encontraram uma vasta classe de equações não-lineares que podem ser resolvidas com auxílio do mesmo. A característica comum das equações não-lineares integráveis é que possuem uma estrutura surpreendentemente simples e, por causa disto, podem ser resolvidas através de métodos lineares. Mais precisamente, a evolução do sistema corresponde à deformação isoespectral de um operador linear diferencial, chamado operador de Lax. A idéia principal do método do espalhamento inverso é resolver as equações de movimento para os dados de colisão deste operador e após, através da transformação espectral inversa, voltar às quantidades originais. Nesta linguagem, os sólitons aparecem quando se impõe a condição de que o coeficiente de reflexão do problema linear auxiliar seja igual a zero.

Atualmente, o método de espalhamento inverso constitui-se num procedimento já

bastante desenvolvido e se mostra poderoso na resolução do problema de Cauchy para equações de evolução não-lineares [7, 8]. O fato de que as equações de movimento para os dados espectrais são lineares é consequência da integrabilidade do modelo. Isto quer dizer que existe um número de cargas conservadas em involução e este é igual ao número de graus de liberdade do sistema descrito. Este fato, segundo o teorema de Liouville, garante a existência de variáveis de ação-ângulo. A importância do método do espalhamento inverso é que a transformação espectral direta realiza a passagem para as variáveis de ação-ângulo.

Esta tese é centrada no estudo das soluções solitônicas para o modelo sine-Gordon. Esta equação tem várias aplicações, em problemas matemáticos e físicos. Por exemplo, a equação de sine-Gordon descreve a inclusão de uma superfície com curvatura constante negativa no espaço tridimensional Euclidiano. Esta equação foi usada, também, como base teórica no estudo de diferentes problemas da Física da Matéria Condensada: o movimento de deslocamentos num cristal, ondas superficiais em membranas, fluxo magnético em linhas de Josephson, movimento de paredes de Bloch em cristais magnéticos [9].

Além disso, sine-Gordon é uma teoria de campo integrável em $(1 + 1)$ -dimensões. Por causa disto, pode-se interpretar este modelo como uma teoria de partículas elementares em duas dimensões. A consistência do modelo é ligada ao fato de que o mesmo permanece integrável também a nível quântico, como foi demonstrado no trabalho de Sklyanin, Takhtajan e Faddeev [10].

A teoria sine-Gordon quântica possui várias propriedades interessantes. Em primeiro lugar, além das partículas fundamentais, ligadas ao espectro contínuo do problema linear auxiliar, existem partículas que pertencem ao espectro discreto do problema. Estas últimas partículas, chamadas sólitons quânticos, geram contribuições não-perturbativas [11]. Uma outra característica da teoria sine-Gordon quântica, esclarecida por Dashen, Hasslacher e Neveu [12], é que as partículas não-perturbativas são resultado do acoplamento de um sóliton a um antisóliton que se movimenta com a mesma velocidade. Também, o espectro dos estados constrangidos, na aproximação quase-clássica, já é ex-

ato. Posteriormente, foi esclarecido por Coleman [13] que o sine-Gordon é equivalente ao modelo de Thirring, e existe uma dualidade interessante: as partículas fundamentais de um dos modelos transformam-se em sólitons do outro, e vice-versa.

A integrabilidade quântica do sine-Gordon foi usada por Zamolodchikov e Zamolodchikov [14]. A integrabilidade quântica implica que a matriz de espalhamento quântica, \hat{S} , pode ser expressa como um produto de fatores que levam em conta as interações entre duas partículas solitônicas. Mais tarde, ficou claro que o modelo sine-Gordon é uma deformação integrável [15] dos modelos conformes minimais em duas dimensões [16].

Voltando à teoria clássica dos modelos integráveis, notamos que existe um caminho alternativo ao método do espalhamento inverso: trata-se da simetria de vestimento. Este método foi descoberto pelo grupo de Kyoto [17]. Em linhas gerais, a idéia básica é a seguinte: a partir de uma equação diferencial não-linear, que admite representação de Lax, são efetuadas transformações de calibre que não mudam a forma da conexão. Isto, em particular, quer dizer que, através de uma tal transformação, gera-se uma outra solução da mesma equação. Esta simetria das equações não-lineares que admitem a representação de Lax é chamada simetria de vestimento (dressing symmetry).

É mérito de Bernard e Le Clair [18] a compreensão da importância da simetria de vestimento numa teoria quântica de campos. Ficou claro também, graças aos trabalhos de Babelon e Bernard [19], que a simetria para o grupo de vestimento nos modelos de Toda é o limite quase-clássico da simetria quântica do modelo integrável. Tendo em conta este fato, na ref. [19], foi lançada a proposta seguinte: *tentar reduzir a teoria clássica, ou quântica, a uma teoria de representações de um grupo*. Esta proposta é fruto também dos trabalhos de Semenov-Tian-Shansky [20], onde foi esclarecido que, para garantir a covariância da estrutura simplética com respeito à ação do grupo de vestimento, é preciso introduzir um parêntese não-trivial neste grupo.

A presente tese é dedicada ao estudo dos elementos do grupo de vestimento que geram sólitons a partir do vácuo mediante a aplicação de transformações de vestimento. O nosso objetivo é verificar, a partir da estrutura de fase no espaço de N sólitons em sine-Gordon

[7, 8, 21], se a ação do grupo de vestimento é uma ação de Poisson–Lie, o que quer dizer verificar a hipótese de Semenov–Tian–Shansky.

Descrevemos a seguir, o conteúdo desta tese: o Capítulo 1 é dedicado a uma revisão crítica do método do espalhamento inverso. Apesar de quase todo o material deste capítulo já existir nos livros clássicos, incluímo-lo por dois motivos. Primeiro, na literatura existente dá-se preferência à equação KdV e ao modelo não-linear de Schrödinger, o sine–Gordon sendo considerado como um caso particular. Segundo, conseguimos uma demonstração do fato de que o método de espalhamento inverso produz (no caso sem reflexão) *o mesmo conjunto de soluções solitônicas* que o procedimento puramente algébrico proposto por Date [22]. Neste último trabalho, foram usadas as simetrias do sistema diferencial linear para obter soluções solitônicas.

Uma grande parte do Segundo Capítulo é, também, uma revisão sobre os grupos de Poisson–Lie e o chamado "double" de Drinfeld [23]. A contribuição original deste capítulo é que, quando se passa da álgebra afim de Kac–Moody à algebra dos laços, o parêntese de Semenov–Tian–Shansky torna-se idêntico ao parêntese de Sklyanin [24].

O Capítulo 3 é completamente original [30]. Primeiramente, conseguimos uma derivação alternativa à ref. [25] para a forma explícita do elemento do grupo de vestimento que gera soluções solitônicas a partir do vácuo. A diferença é que partimos do método de espalhamento inverso, em vez de usar equações diferenciais, como foi feito em [25]. No segundo capítulo, usando os parênteses no espaço de fases de N sólitons [7, 8, 21], conseguimos uma expressão para o parêntese $\{g \otimes g\}$. A este ponto, notamos que, apesar de nosso resultado parecer bastante grosseiro, as variáveis que adotamos foram aplicadas com sucesso num recente trabalho [26]. Visto que o parêntese N -solitônico $\{g \otimes g\}$ não resulta igual ao parêntese de Semenov–Tian–Shansky, na seção 3 deste capítulo, aplicamos o formalismo dos sistemas vinculados de Dirac para obter a relação do grupo de vestimento com a estrutura simplética de Poisson–Lie.

Capítulo 1

“O método do espalhamento inverso e as soluções solitônicas”

O método do espalhamento inverso (“Inverse Scattering Method”–ISM) teve seu início no final da década de 60 [2]. Atualmente, é um método completamente desenvolvido para resolver o problema de Cauchy para equações de evolução integráveis. Estas últimas possuem uma propriedade comum : existe um operador linear, chamado operador de Lax, cujo espectro não depende do tempo. A idéia básica do “Inverse Scattering Method” é considerar a evolução do sistema como a evolução dos dados espectrais do operador de Lax. A vantagem deste procedimento é que a dependência temporal destes dados é simples. Para depois reconstruir o operador de Lax, é necessário usar a transformação espectral inversa, que consiste em resolver as equações de Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM), ou em resolver o problema de Riemann. As soluções solitônicas correspondem ao caso em que o coeficiente de reflexão ligado ao operador de Lax é igual a zero.

1.1 A equação de sine–Gordon e a condição de curvatura zero. Transformações espectrais direta e inversa.

A equação de sine–Gordon ,

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- \varphi &= m^2 \sin \varphi , & \partial_{\pm} &= \frac{\partial}{\partial x^{\pm}} \\ x^{\pm} &= x \pm t , & \partial_+ \partial_- &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) , \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

pode ser, equivalentemente, escrita como uma condição de curvatura zero,

$$F_{+-} = \partial_+ U_- + \partial_- U_+ - [U_+, U_-] = 0, \quad (1.1.2)$$

para a conexão com componentes

$$\begin{aligned} U_+ &= i\lambda H + \frac{i}{2} \partial_+ \varphi (E^+ + E^-), \\ U_- &= \frac{-im^2}{4\lambda} \left(\cos \varphi H - i \sin \varphi (E^+ - E^-) \right), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

onde λ é um parâmetro complexo chamado parâmetro espectral, e

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

são os geradores da álgebra de Lie $sl(2)$:

$$[H, E^{\pm}] = \pm 2E^{\pm} , \quad [E^+, E^-] = H \quad (1.1.5)$$

A equação (1.1.2) implica, também, que o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\partial_+ F &= U_+ F \\ \partial_- F &= U_- F\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

é integrável. Na última equação, $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ é um vetor-coluna bidimensional.

Após multiplicação à direita pelo fator matricial iH , a equação (1.1.6) transforma-se num problema de auto-vetores e auto-valores:

$$LF = \lambda F ,\tag{1.1.7}$$

onde L é um operador diferencial de primeira ordem:

$$L = -iH\partial_+ - \frac{1}{2}\partial_+\varphi(E^+ - E^-).\tag{1.1.8}$$

O fato do auto-valor λ não depender de x^+ e x^- significa que o espectro do operador L (1.1.8) não depende de x^- . Isto quer dizer que a evolução de L na direção x^- é isoespectral. A consistência de (1.1.7) com a condição de curvatura zero da conexão (1.1.3) pode ser verificada diretamente. Para fazer isto, calculamos a derivada ∂_- de ambas partes de (1.1.7). Do sistema linear (1.1.6) e de $\partial_- \lambda = 0$, obtemos que

$$(\partial_- L + [L, U_-])F = 0.\tag{1.1.9}$$

Lembrando agora que, graças à eq. (1.1.8), $L = -iH\partial_+ + iHU_+$, o membro esquerdo da última equação pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\partial_- L + [L, U_-] &= iH\partial_- U_+ - i[H(\partial_+ - U_+), U_-] \\ &= iH(\partial_- U_+ - \partial_+ U_- - [U_-, U_+]) + [H, U_-]H(L - \lambda) \\ &= [H, U_-]H(L - \lambda),\end{aligned}\tag{1.1.10}$$

e, com isso, chegamos à conclusão de que (1.1.7) e (1.1.9) concordam com (1.1.3) e (1.1.6).

A idéia básica do "ISM" é fazer a transformação espectral direta e estudar as equações de movimento dos dados espectrais (ou dados de colisão) deste operador. Para voltar às variáveis originais, que em nosso caso significa reconstruir o campo de sine-Gordon a partir dos dados espectrais, precisamos fazer a transformação espectral inversa.

Estudaremos a teoria espectral do operador (1.1.8), e obteremos um sistema de equações cuja solução determina a dependência dos coeficientes deste operador como função dos dados de colisão.

Ao invés de trabalhar com o problema espectral (1.1.7)-(1.1.8), vamos usar as primeiras equações de (1.1.6), onde a matriz U_+ foi introduzida através de (1.1.3). Em outras palavras, consideramos o problema auxiliar linear

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^+} &= U(x^+, \lambda) \mathcal{F}(x^+, \lambda), & U(x^+, \lambda) &= i\lambda H + U_0(x^+) \\ U_0(x^+) &= i \begin{pmatrix} 0 & p(x^+) \\ p(x^+) & 0 \end{pmatrix}, & p(x^+) &= \frac{1}{2} \partial_+ \varphi. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Vamos, também, supor que o campo de sine-Gordon tem o comportamento assintótico seguinte:

$$\varphi(x^+, x^-) \longrightarrow 0 \pmod{2\pi}, \quad \text{quando } x^+ \longrightarrow \pm\infty, \quad (1.1.12)$$

o que está de acordo com a equação de sine-Gordon (1.1.1). Por causa de (1.1.12), o problema linear auxiliar possui soluções matriciais, $\mathcal{F}_\pm(x^+, \lambda)$, caracterizadas pelas condições de fronteira:

$$\mathcal{F}_\pm(x^+, \lambda) \longrightarrow e^{i\lambda x^+ H} + o(1), \quad \text{quando } x^+ \longrightarrow \pm\infty \quad (1.1.13)$$

Estas duas soluções são chamadas soluções de Jost, e satisfazem às equações integrais:

$$\mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) = e^{i\lambda x^+ H} + \int_{\pm\infty}^{x^+} e^{i\lambda(x^+-y)H} U_0(y) \mathcal{F}_{\pm}(y, \lambda) dy. \quad (1.1.14)$$

Para cada matriz (2×2) \mathcal{F} , usaremos a seguinte notação: $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{(1)}, \mathcal{F}^{(2)})$, onde $\mathcal{F}^{(1)}$ e $\mathcal{F}^{(2)}$ são os vetores que formam a primeira e segunda coluna de \mathcal{F} , respectivamente. Com o auxílio de (1.1.14), pode-se demonstrar que

$$\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda)e^{-i\lambda x^+} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_-^{(2)}(x^+, \lambda)e^{+i\lambda x^+} \quad (1.1.15)$$

possuem continuação analítica no semi-plano complexo superior do parâmetro espectral λ ($\text{Im}\lambda > 0$) [7, 8], enquanto

$$\mathcal{F}_-^{(1)}(x^+, \lambda)e^{-i\lambda x^+} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_+^{(2)}(x^+, \lambda)e^{+i\lambda x^+} \quad (1.1.16)$$

têm continuação analítica no semi-plano complexo inferior ($\text{Im}\lambda < 0$). Além disto, de (1.1.14), seguem as expansões

$$\mathcal{F}_{\pm}^{(1)}(x^+, \lambda)e^{-i\lambda x^+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \longrightarrow \infty, \quad \pm\text{Im}\lambda > 0 \quad (1.1.17a)$$

$$\mathcal{F}_{\pm}^{(2)}(x^+, \lambda)e^{+i\lambda x^+} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \longrightarrow \infty, \quad \pm\text{Im}\lambda < 0. \quad (1.1.17b)$$

A matriz $U(x^+, \lambda)$, que aparece em (1.1.11), tem traço igual a zero. Por esta razão, o determinante de Wronski dos dois vetores f_1 e f_2 , que satisfazem à eq. (1.1.11),

$$\mathcal{W}(f_1, f_2) = \det(f_1, f_2), \quad (1.1.18)$$

não depende de x^+ . Em particular, levando em conta (1.1.13), obtemos

$$\mathcal{W}(\mathcal{F}_+^{(1)}, \mathcal{F}_+^{(2)}) = \mathcal{W}(\mathcal{F}_-^{(1)}, \mathcal{F}_-^{(2)}) = 1. \quad (1.1.19)$$

Os vetores $\mathcal{F}_+^{(1)}$ e $\mathcal{F}_+^{(2)}$ por um lado, e $\mathcal{F}_-^{(1)}$ e $\mathcal{F}_-^{(2)}$ por outro lado (veja (1.1.13)), formam duas bases de soluções independentes do problema (1.1.11). Por isto, estas duas bases são ligadas através de uma transformação linear, independente de x^+ :

$$\mathcal{F}_-(x^+, \lambda) = \mathcal{F}_+(x^+, \lambda)\Theta(\lambda) \quad (1.1.20)$$

$$\det \Theta(\lambda) = 1,$$

onde a matriz $\Theta(\lambda)$ é chamada matriz de transição. A segunda destas equações foi deduzida de (1.1.19). Aproveitando as expressões (1.1.18) e (1.1.20), obtemos que

$$\begin{aligned} \Theta_{11}(\lambda) &= \mathcal{W}(\mathcal{F}_-^{(1)}(x^+, \lambda), \mathcal{F}_+^{(2)}(x^+, \lambda)) \\ \Theta_{22}(\lambda) &= \mathcal{W}(\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda), \mathcal{F}_-^{(2)}(x^+, \lambda)). \end{aligned} \quad (1.1.21)$$

Destas expressões, e das propriedades analíticas com respeito a λ dos vetores (1.1.15) e (1.1.16), chegamos à conclusão de que $\Theta_{11}(\lambda)$ é analítica para $\text{Im } \lambda > 0$ e $\Theta_{22}(\lambda)$ é analítica para $\text{Im } \lambda < 0$. Além disso, graças às eqs. (1.1.17a) e (1.1.17b), temos que:

$$\begin{aligned} \Theta_{11}(\lambda) &= 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda > 0 \\ \Theta_{22}(\lambda) &= 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \text{Im } \lambda < 0 \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

A matriz de conexão, $U(x, \lambda)$ (veja 1.1.11), possui a simetria

$$\begin{aligned} U(x^+, -\lambda) &= \sigma_1 U(x^+, \lambda) \sigma_1 \\ \sigma_1 &= E^+ + E^-, \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

e, por esta razão, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\pm}(x^+, -\lambda) &= \sigma_1 \mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) \sigma_1 \\ \Theta(-\lambda) &= \sigma_1 \Theta(\lambda) \sigma_1.\end{aligned}\tag{1.1.24}$$

A segunda destas identidades é conseqüência da primeira e de (1.1.20). Usando (1.1.24), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\pm}^{(1)}(x^+, -\lambda) &= \sigma_1 \mathcal{F}_{\pm}^{(2)}(x^+, \lambda) \\ \Theta(\lambda) &= \begin{pmatrix} \alpha(-\lambda) & \beta(\lambda) \\ \beta(-\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.1.25}$$

Os vetores $\mathcal{F}_+^{(i)}(x^+, \lambda)$ e $\mathcal{F}_-^{(i)}(x^+, \lambda)$, $i = 1, 2$, são autovetores do operador (1.1.8). Por isto e de (1.1.13), concluímos que o espectro contínuo deste operador coincide com o eixo real R . Cada ponto do espectro contínuo tem degenerescência dupla: cada par $\mathcal{F}_+^{(i)}$ ou $\mathcal{F}_-^{(i)}$ pode ser escolhido como base de auto-vetores independentes. Levando em conta as propriedades analíticas dos vetores (1.1.15) e (1.1.16), e da primeira das equações (1.1.25), chegamos à conclusão de que o espectro discreto contém os pontos $\pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_N$ ($\text{Im}\lambda_i > 0$ $i = 1, \dots, N$), para os quais são satisfeitas as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_-^{(2)}(x^+, \lambda_n) &= \beta_n \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_n), \\ \mathcal{F}_-^{(1)}(x^+, -\lambda_n) &= \beta_n \mathcal{F}_+^{(2)}(x^+, -\lambda_n), \\ n = 1, \dots, N \quad \text{Im}\lambda_n &> 0.\end{aligned}\tag{1.1.26}$$

Com (1.1.21) e (1.1.25), obtemos que o espectro discreto no semi-plano complexo superior coincide com o conjunto de zeros da função $\alpha(\lambda)$. Daí para frente, vamos supor que todos os zeros desta função sejam simples.

Estas propriedades, e o comportamento assintótico $\alpha(\lambda) \longrightarrow 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $\lambda \longrightarrow$

∞ , $\text{Im}\lambda > 0$, determinam $\alpha(\lambda)$ univocamente [7, 8]:

$$\alpha(\lambda) = \prod_{j=1}^N \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - \bar{\lambda}_j} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + \beta(\mu)\beta(-\mu))}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right). \quad (1.1.27)$$

Assim, introduzimos a transformação espectral direta, \mathcal{S} , que consiste em construir os dados de colisão: a matriz de transição $\Theta(\lambda)$ (1.1.25) para valores reais de λ , o espectro discreto $\{\pm\lambda_i, i = 1, \dots, N\}$ e os coeficientes $\beta_i, \bar{\beta}_i$, que aparecem nas expressões (1.1.26). Toda esta construção provém do operador (1.1.8) ou, o que é mesmo, a partir do problema linear:

$$\mathcal{J} : (p(x^+) = \frac{1}{2} \partial_+ \varphi(x^+)) \longmapsto \mathcal{S} = (\beta(\lambda), \lambda_n, \bar{\lambda}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n). \quad (1.1.28)$$

Nesta expressão, excluimos o coeficiente $\alpha(\lambda)$ (veja (1.1.25)) do conjunto dos dados espectrais \mathcal{S} , já que esta não é uma quantidade independente, em razão de (1.1.27).

Agora, vamos discutir a transformação espectral inversa. Antes de tudo, observemos que, para a solução $\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda)$ (eq. (1.1.13)), temos que

$$\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda) = e^{i\lambda x^+} \left\{ e_1 + \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{2i} \int_{\mathbb{R}} (\partial_+ \varphi(y))^2 dy \\ \partial_+ \varphi(x^+) \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right\},$$

$$\lambda \longrightarrow \infty, \quad \text{Im}\lambda > 0$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.29)$$

Além disto, supondo que $\varphi(-\infty, x^-) = 0$, $\varphi(\infty, x^-) = 2\pi q$, onde q é um número inteiro, chamado carga topológica, obtemos

$$\mathcal{F}_+(x^+, 0) = (-1)^q \begin{pmatrix} \cos \frac{q}{2} & i \sin \frac{q}{2} \\ i \sin \frac{q}{2} & \cos \frac{q}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_-(x^+, 0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{q}{2} & i \sin \frac{q}{2} \\ i \sin \frac{q}{2} & \cos \frac{q}{2} \end{pmatrix} \quad (1.1.30)$$

Esta última expressão diz-nos que

$$\alpha(0) = (-1)^q, \quad \beta(0) = 0. \quad (1.1.31)$$

Para obter as equações de transformação espectral inversa, introduzimos a função

$$f(x^+, \lambda) = \begin{cases} \mathcal{F}_-^{(2)}(x^+, \lambda)e^{i\lambda x^+} / \alpha(\lambda) & \text{Im}\lambda > 0 \\ \mathcal{F}_+^{(2)}(x^+, \lambda)e^{i\lambda x^+}, & \text{Im}\lambda < 0 \end{cases} \quad (1.1.32)$$

que é uma função analítica no plano complexo fora do eixo real, no qual sofre o salto (veja (1.1.20) e (1.1.25))

$$f(x^+, \lambda + i0) - f(x^+, \lambda - i0) = \rho(\lambda)\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda)e^{i\lambda x^+}, \quad (1.1.33)$$

$$\rho(\lambda) = \frac{\beta(\lambda)}{\alpha(\lambda)},$$

e fora dos pontos do espectro discreto $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (que são os zeros de $\alpha(\lambda)$), no semi-plano complexo superior, tem pólos simples com resíduos:

$$\text{res}_{\lambda_j} f(x^+, \lambda) = c_j \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_j)$$

$$c_j = \frac{\beta_j}{\alpha'(\lambda_j)}, \quad \alpha'(\lambda) = \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda), \quad j = 1, \dots, N. \quad (1.1.34)$$

Para obter a última equação, além de (1.1.32), a relação (1.1.26) foi usada. Além disto temos que

$$f(x^+, \lambda) = e_2 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \lambda \longrightarrow \infty, \quad (1.1.35)$$

graças às eqs. (1.1.17a), (1.1.17b) e (1.1.22). A função $\rho(\lambda)$ (para $\lambda \in R$), que aparece em (1.1.33), é chamada na teoria da colisão de coeficiente de reflexão. Aplicando

o teorema de Cauchy à função (1.1.32), obtemos

$$f(x^+, \lambda) = e_2 + \sum_{j=1}^N \frac{c_j e^{i\lambda_j x^+}}{\lambda - \lambda_j} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\lambda') e^{i\lambda' x^+}}{\lambda' - \lambda} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda') d\lambda' \quad (1.1.36)$$

Esta última identidade, junto às eqs. (1.1.24), leva-nos ao sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda) &= e^{i\lambda x^+} \sigma_1 \times \\ &\times \left[e_2 - \sum_{j=1}^N \frac{c_j e^{i\lambda_j x^+}}{\lambda + \lambda_j} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\lambda') e^{i\lambda' x^+}}{\lambda' + \lambda} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda') d\lambda' \right], \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

onde $\text{Im}\lambda > 0$, o qual define a transformação espectral inversa. Na verdade, imaginamos que conhecemos a solução de (1.1.37). Isto quer dizer que sabemos $\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda)$, para $\text{Im}\lambda > 0$, como função dos dados espectrais \mathcal{S} (1.1.28).

Lembrando agora (1.1.29) e (1.1.30), obtemos

$$\partial_+ \varphi = -4 \sum_{j=1}^N c_j e^{i\lambda_j x^+} \mathcal{F}_{+1}^{(1)}(x^+, \lambda_j) + \frac{2}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda') e^{i\lambda' x^+} \mathcal{F}_{+1}^{(1)}(x^+, \lambda') d\lambda', \quad (1.1.38a)$$

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\varphi}{2} + i\pi q} &= 1 - \sum_{j=1}^N \frac{c_j e^{i\lambda_j x^+}}{\lambda_j} \left(\mathcal{F}_{+1}^{(1)}(x^+, \lambda_j) + \mathcal{F}_{+2}^{(1)}(x^+, \lambda_j) \right) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\lambda') e^{i\lambda' x^+}}{\lambda' + i0} \left(\mathcal{F}_{+1}^{(1)}(x^+, \lambda') + \mathcal{F}_{+2}^{(1)}(x^+, \lambda') \right) d\lambda', \end{aligned} \quad (1.1.38b)$$

onde $\mathcal{F}_+^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{+1}^{(1)} \\ \mathcal{F}_{+2}^{(1)} \end{pmatrix}$.

Estas últimas expressões mostram, também, que as contribuições dos espectros discretos e contínuos separam-se.

No final desta seção, discutiremos as condições sob as quais o campo de sine-Gordon é real. Introduzindo esta condição, de (1.1.11), obtemos

$$\begin{aligned} \bar{U}(x^+, \lambda) &= \sigma_2 U(x^+, \bar{\lambda}) \sigma_2 \\ \bar{\mathcal{F}}_{\pm}(x^+, \lambda) &= \sigma_2 \mathcal{F}_{\pm}(x^+, \bar{\lambda}) \sigma_2 \\ \bar{\Theta}(\lambda) &= \sigma_2 \Theta(\bar{\lambda}) \sigma_2 \end{aligned} \quad (1.1.39)$$

onde σ_2 é uma das matrizes de Pauli, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i(E^- - E^+)$.

Destas equações, e de (1.1.25), fica claro que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_{\pm}^{(1)}(x^+, \lambda) &= i\sigma_2 \mathcal{F}_{\pm}^{(2)}(x^+, \bar{\lambda}), \\ \overline{\alpha}(\bar{\lambda}) &= \alpha(-\lambda) \quad \text{Im}\lambda > 0, \\ \overline{\beta}(\lambda) &= -\beta(-\lambda) \quad \lambda \in R. \end{aligned} \tag{1.1.40}$$

Combinando estas últimas identidades com (1.1.26), observamos que o espectro discreto é simétrico em relação ao eixo imaginário. Isto quer dizer que existe uma permutação σ , dos números $1, \dots, N$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_j &= -\lambda_{\sigma(j)}, \\ \bar{\beta}_j &= -\beta_{\sigma(j)}, \\ \bar{c}_j &= c_{\sigma(j)}. \end{aligned} \tag{1.1.41}$$

Aos pontos λ_i ($\text{Im}\lambda > 0$) puramente imaginários do espectro discreto são associadas partículas relativísticas sem estrutura, chamadas sólitons. Os valores $\lambda_i = -\bar{\lambda}_j$ ($i \neq j$) correspondem às partículas, que além da velocidade e do centro de inércia, possuem graus de liberdade internos. Este assunto vai ser discutido na seção 3

1.2 A evolução dos dados espectrais

À primeira vista, parece que o formalismo desenvolvido na seção precedente não simplifica em nada o problema de Cauchy ligado à equação de sine-Gordon (1.1.1). Vamos demonstrar que, na verdade, não é assim. Mais precisamente, veremos que a transformação espectral (1.1.28), \mathcal{J} , faz a passagem para as variáveis de ângulo-ação. Nestas variáveis, como vamos demonstrar, o fluxo do sistema na direção x^- é bastante simples.

Iniciamos, mais uma vez, com o problema linear

$$\partial_+ \Psi(x^+, y^+; \lambda) = U_+(x^+, \lambda) \Psi(x^+, y^+; \lambda), \quad (1.2.42)$$

onde $\Psi(x^+, y^+; \lambda)$ é uma matriz 2×2 e a conexão $U_+(x^+, \lambda)$ foi introduzida em (1.1.3). Além de (1.2.42), esta matriz satisfaz à condição inicial :

$$\Psi(x^+, x^+; \lambda) = 1. \quad (1.2.43)$$

A matriz $\Psi(x^+, y^+; \lambda)$ é fixada univocamente das equações (1.2.42) e (1.2.43). Usaremos agora o fato de que a curvatura da conexão com componentes U_+ e U_- é zero. Isto dá a possibilidade de determinar a dependência de $\Psi(x^+, y^+; \lambda)$ na variável x^- . Calculando a derivada $\partial_- = \frac{\partial}{\partial x^-}$ de ambos os membros de (1.2.42), obtemos que

$$\begin{aligned} \partial_- \partial_+ \Psi &= \partial_- U_+ \Psi + U_+ \partial_- \Psi \\ &= (\partial_+ U_- - U_+ U_- + U_- U_+) \Psi + U_+ \partial_- \Psi \\ &= \partial_+ U_- \Psi + U_- \partial_+ \Psi + U_+ (\partial_- \Psi - U_- \Psi) \\ &= \partial_+ (U_- \Psi) + U_+ (\partial_- - U_-) \Psi, \end{aligned}$$

e, por causa disto, obtemos que além de Ψ , $(\partial_- - U_-) \Psi$ também é solução de (1.2.42).

Isto quer dizer que

$$\partial_- \Psi(x^+, y^+; \lambda) = U_-(x^+, \lambda) \Psi(x^+, y^+; \lambda) - \Psi(x^+, y^+; \lambda) C,$$

onde C é uma matriz que não depende de x^+ . Com (1.2.43), chega-se a

$$\partial_- \Psi(x^+, y^+; \lambda) = U_-(x^+, \lambda) \Psi(x^+, y^+; \lambda) - \Psi(x^+, y^+; \lambda) U_-(y^+, \lambda) \quad (1.2.44)$$

Consideremos agora as matrizes :

$$\mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Psi(x^+, y^+; \lambda) e^{i\lambda y^+ H}. \quad (1.2.45)$$

É claro que \mathcal{F}_{\pm} são soluções do problema linear (1.2.42). Da condição (1.2.43), concluímos que estas matrizes têm o comportamento assintótico (1.1.13). Combinando (1.1.3) e (1.2.42) com (1.2.44), chegamos às equações :

$$\partial_- \mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) = U_-(x^+, \lambda) \mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) + \frac{im^2}{4\lambda} \mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) H.$$

Usando a equação acima e (1.1.15), obtemos finalmente

$$\partial_- \Theta(\lambda) = \frac{im^2}{4\lambda} [\Theta(\lambda), H]. \quad (1.2.47)$$

Como consequência de (1.1.25), a matriz de transição tem a forma seguinte :

$$\Theta(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha(-\lambda) & \beta(\lambda) \\ \beta(-\lambda) & \alpha(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.2.48)$$

para valores de λ reais. Deste resultado e de (1.2.47), concluímos que

$$\begin{aligned} \partial_- \alpha(\lambda) &= 0, \\ \partial_- \beta(\lambda) &= -\frac{im^2}{2\lambda} \beta(\lambda). \end{aligned} \quad (1.2.49)$$

Na seção precedente foi demonstrado que o espectro discreto no semi-plano complexo superior ($\text{Im } \lambda_n > 0$) coincide com o conjunto de zeros de $\alpha(\lambda)$. Deste fato e da primeira equação (1.2.49), decorre que o espectro discreto não depende de x^- :

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial x^-} = \frac{\partial \bar{\lambda}_n}{\partial x^-} = 0. \quad (1.2.50)$$

Para obter a dependência em x^- dos coeficientes β_n que aparecem em (1.1.24), sub-

stituimos esta última equação em (1.2.46). O resultado é

$$\partial_- \beta_n = -\frac{im^2}{2\lambda_n} \beta_n. \quad (1.2.51)$$

Notamos também que este fluxo é compatível com (1.1.25) e (1.1.40). Para completar esta seção, faremos um comentário importante: as equações (1.2.49) e (1.2.51) são resolvidas imediatamente :

$$\begin{aligned} \alpha(x^-, \lambda) &= \alpha(\lambda, 0), \\ \beta(x^-, \lambda) &= e^{-\frac{im^2}{2\lambda} x^-} \beta(0, \lambda), \\ \beta_n(x^-) &= e^{-\frac{im^2}{2\lambda} x^-} \beta_n. \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

Isto quer dizer que é extremamente fácil resolver as equações de movimento em termos dos dados espectrais $\mathcal{S} = (\beta(\lambda), \lambda_n, \bar{\lambda}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n)$. Para reconstruir o campo de sine-Gordon, basta efetuar a transformação espectral inversa : ou seja, resolver o sistema (1.1.37).

1.3 Soluções solitônicas e a colisão dos sólitons e "breathers"

De um ponto-de-vista físico, os sólitons são soluções que correspondem a configurações de campo localizáveis e com energia finita. O "ISM", que é uma teoria desenvolvida para resolver equações não-lineares integráveis, trata as soluções solitônicas de uma maneira diferente: parte-se dos dados espectrais (1.1.28) e impõe-se que o problema linear (1.1.11) seja tal que o coeficiente de reflexão deste (veja (1.1.33)) seja igual a zero. Isto quer dizer que a matriz de transição (1.1.20), (1.1.25) é diagonal para valores reais do parâmetro espectral

$$\beta(\lambda) = 0, \quad \lambda \in R. \quad (1.3.53)$$

Voltando atrás, observamos, graças a (1.1.38a) e (1.1.38b), que o campo de sine-Gordon só depende dos valores da solução de Jost $\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda)$ (1.1.13) nos pontos do espectro discreto. Além disto, a equação (1.1.37) que realiza a transformação espectral inversa, transforma-se numa equação algébrica linear. Em suma, para encontrar as soluções solitônicas, temos que resolver a equação :

$$\mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_n) = e^{-i\lambda_n x^+} e_1 - \sum_{j=1}^N \frac{c_j e^{i(\lambda_j + \lambda_n)x^+}}{\lambda_n + \lambda_j} \sigma_1 \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_j). \quad (1.3.54)$$

Iterando esta última expressão, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_n) - \sum_{j=1}^N W_{nj}^2 \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda_j) &= e^{i\lambda_n x^+} e_1 - \sum_{j=1}^N W_{nj} e^{i\lambda_j x^+} e_2, \\ W_{nj} &= \frac{c_j e^{i(\lambda_n + \lambda_j)x^+}}{\lambda_n + \lambda_j}. \end{aligned} \quad (1.3.55)$$

Resolvendo estas últimas equações, obtemos as soluções

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_+^{(1)}{}_1(x^+, \lambda_n)\| &= \frac{1}{2} \left[(1 + W)^{-1} + (1 - W)^{-1} \right] \|e^{i\lambda_n x^+}\| \\ \|\mathcal{F}_+^{(1)}{}_2(x^+, \lambda_n)\| &= -\frac{1}{2} \left[(1 + W)^{-1} + (1 - W)^{-1} \right] \|e^{i\lambda_n x^+}\|, \end{aligned} \quad (1.3.56)$$

que manifestam o fato de que o problema de procurar soluções solitônicas reduz-se a um problema de inverter uma matriz de $N \times N$ de forma especial (veja a segunda equação de (1.3.55)). Substituindo as soluções (1.3.56) em (1.1.38a), chegamos ao resultado

$$\begin{aligned} \partial_+ \varphi &= -4 \sum_{j=1}^N c_j e^{i\lambda_j x^+} \mathcal{F}_+^{(1)}{}_1(x^+, \lambda_j) \\ &= -2 \sum_{j,k=1}^N c_j e^{i(\lambda_j + \lambda_k)x^+} \left[(1 + W)_{jk}^{-1} + (1 - W)_{jk}^{-1} \right] \\ &= 2i \sum_{j,k=1}^N \partial_+ W_{kj} \left[(1 + W)_{jk}^{-1} + (1 - W)_{jk}^{-1} \right] \\ &= 2i \operatorname{tr} \left[\partial_+ (1 + W)(1 + W)^{-1} - \partial_+ (1 - W)(1 - W)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (1.3.57)$$

onde o traço é num espaço de N dimensões. Lembramos, também, que $\text{tr}(\partial_+ U(x^+) \cdot U^{(-1)}(x^+))$ é invariante de calibre, o que quer dizer que não muda de valor após a transformação $U(x^+) \longrightarrow g(x^+)U(x^+)g^{-1}(x^+)$. Esta observação, junto ao fato de que a matriz W (1.3.55) é diagonalizável (porque é conjugada a uma matriz simétrica), leva-nos à conclusão de que

$$\partial_+ \varphi = 2i \partial_+ \ln \frac{\det(1+W)}{\det(1-W)}. \quad (1.3.58)$$

Esta última equação determina o campo de sine-Gordon a menos de um fator que depende só de x^- :

$$\exp \left\{ -i \frac{\varphi(x^+, x^-)}{2} \right\} = f(x^-) \frac{\det(1+W)}{\det(1-W)}. \quad (1.3.59)$$

Para determinar este fator, usaremos a relação (1.1.38b), que junto à relação (1.3.55), conduz à expressão:

$$\begin{aligned} e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi N)} &= 1 - \sum_{n,k=1}^N \frac{c_n e^{i(\lambda_n + \lambda_k)x^+}}{\lambda_n} (1+W)_{nk}^{-1} \\ &= 1 - \text{tr} [(W\Lambda + \Lambda W) \cdot \Lambda^{-1} \cdot (1+W)^{-1}], \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

Introduzimos os vetores N -dimensionais $|i\rangle$, que têm a i -ésima componente igual a um e todas as demais nulas. Usando as formas exatas das matrizes W (1.3.55) e Λ (1.3.60), observamos que

$$\begin{aligned} W\Lambda + \Lambda W &= |e\rangle\langle\tilde{e}|, \\ |e\rangle &= \sum_{k=1}^N e^{i\lambda_k x^+} |k\rangle, \quad \langle\tilde{e}| = \sum_{k=1}^N c_k e^{i\lambda_k x^+} \langle k|. \end{aligned} \quad (1.3.61)$$

Após a diagonalização da matriz W :

$$W = U^{-1}.Q.U$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_N \end{pmatrix} \quad (1.3.62)$$

obtemos, usando (1.3.61) a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \text{tr} [(W.\Lambda + \Lambda.W)\Lambda^{-1}.(1+W)^{-1}] &= \text{tr} [|e\rangle\langle\tilde{e}|\Lambda^{-1}.(1+W)^{-1}] \\ &= \text{tr} [|x\rangle\langle y|L^{-1}.(1+Q)^{-1}] \\ |x\rangle &= U|e\rangle \quad \langle y| = \langle\tilde{e}|U^{-1} \\ L &= U.\Lambda.U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.3.63)$$

Além disto, a cada vetor $|x\rangle = \sum_{i=1}^N x_i|i\rangle$, vamos associar uma matriz diagonal, X , segundo a relação

$$|x\rangle \longrightarrow X$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_N \end{pmatrix}$$

As relações de comutação (1.3.61) ajudam-nos a calcular os elementos da matriz L (1.3.63):

$$L = X.\tilde{L}.Y$$

$$\tilde{L}_{ij} = \frac{1}{Q_i + Q_j}, \quad (1.3.64)$$

onde X e Y são diagonais. Substituindo esta expressão em (1.3.63), obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[|x\rangle\langle y| L^{-1} \cdot (1 + Q)^{-1} \right] &= \sum_{i,j=1}^N \text{tr} \left[|i\rangle\langle j| \tilde{L}^{-1} \cdot (1 + Q)^{-1} \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^N \frac{\tilde{L}_{ij}^{-1}}{1 + Q_j}. \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

Para calcular os elementos da matriz \tilde{L}^{-1} , usaremos a identidade (veja por exemplo a eq.(8.49), Capítulo II de [7]):

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right) = \prod_{i(j)} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{a_i + b_j}, \quad (1.3.66)$$

de onde, chegamos à expressão

$$\tilde{L}_{ij}^{-1} = \frac{1}{Q_i + Q_j} \cdot \frac{\prod_{a=1}^N (Q_a + Q_i) \prod_{a=1}^N (Q_a + Q_j)}{\prod_{a \neq i} (Q_i - Q_a) \prod_{a \neq j} (Q_j - Q_a)}, \quad (1.3.67)$$

que, substituída em (1.3.65) e com auxílio das identidades

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{Q_i + Q_j} \cdot \frac{\prod_a (Q_a + Q_j)}{\prod_{a \neq j} (Q_j - Q_a)} = 1$$

$$\prod_a \frac{1 - Q_a}{1 + Q_a} = 1 - \sum_{j=1}^N \frac{1}{1 + Q_j} \cdot \frac{\prod_a (Q_a + Q_j)}{\prod_{a \neq j} (Q_j - Q_a)}, \quad (1.3.68)$$

levam-nos ao resultado:

$$\text{tr} \left[(W \cdot \Lambda + \Lambda \cdot W) \Lambda^{-1} \cdot (1 + W)^{-1} \right] = -1 + \prod_i \frac{1 - Q_i}{1 + Q_i}. \quad (1.3.69)$$

Esta identidade, junto a (1.3.60), conduz à expressão

$$e^{i\frac{\varphi}{2}} = (-1)^N \frac{\det(1 - W)}{\det(1 + W)}. \quad (1.3.70)$$

Para incluir a dependência em x^- , temos que levar em conta (1.2.52). Além disto, de (1.3.55) e (1.3.60) segue que o campo φ depende de x^- só através dos coeficientes c_j (1.1.34), que têm a dependência simples a seguir:

$$c_j(x^-) = c_j e^{-\frac{im^2}{2\lambda_n} x^-}. \quad (1.3.71)$$

Discutiremos, agora, um caminho alternativo para a construção das soluções solitônicas que foi desenvolvido no trabalho [22]. Este caminho é baseado na observação de que, no caso sem reflexão, a função $f(x^+, \lambda)$ com valores vetoriais (1.1.32), considerada como função de λ é uma função meromórfica sobre a esfera de Riemann CP^1 . Está claro que o número de pólos desta função coincide com o número de sólitons. Introduzimos agora os vetores

$$\chi^{(1)}(x^+, \lambda) = \begin{cases} \prod_j (\lambda + \lambda_j) \mathcal{F}_+^{(1)}(x^+, \lambda) e^{-i\lambda x^+} & \text{Im}\lambda > 0 \\ \prod_j (\lambda - \lambda_j) \mathcal{F}_-^{(1)}(x^+, \lambda) e^{-i\lambda x^+} & \text{Im}\lambda < 0 \end{cases}$$

$$\chi^{(2)}(x^+, \lambda) = \begin{cases} \prod_{j=1}^N (\lambda + \lambda_j) \mathcal{F}_-^{(2)}(x^+, \lambda) e^{i\lambda x^+} & \text{Im}\lambda > 0 \\ \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j) \mathcal{F}_+^{(2)}(x^+, \lambda) e^{i\lambda x^+} & \text{Im}\lambda < 0 \end{cases}, \quad (1.3.72)$$

que, graças ao fato de estarmos no caso sem reflexão, são duas funções meromórficas. De (1.1.17a) e (1.1.17b), obtemos o comportamento assintótico

$$\chi^{(i)}(x^+, \lambda) = \lambda^N \left(e_i + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad \lambda \longrightarrow \infty. \quad (1.3.73)$$

Com auxílio de (1.1.25), chegamos a

$$\chi^{(1)}(x^+, -\lambda) = (-1)^N \sigma_1 \chi^{(2)}(x^+, \lambda). \quad (1.3.74)$$

Usando mais uma vez (1.1.25), concluímos que os vetores (1.3.72) satisfazem às equações

$$\begin{aligned}\chi^{(1)}(x^+, -\lambda_n)e^{-i\lambda_n x^+} &= (-1)^N \beta_n \sigma_1 \chi^{(1)}(x^+, \lambda_n)e^{i\lambda_n x^+} \\ \chi^{(2)}(x^+, -\lambda_n)e^{i\lambda_n x^+} &= \frac{(-1)^N}{\beta_n} \sigma_1 \chi^{(2)}(x^+, \lambda_n)e^{-i\lambda_n x^+}\end{aligned}\quad (1.3.75)$$

A segunda destas equações é consequência da primeira e de (1.3.74). Introduzindo os vetores:

$$\omega^{(i)}(x^+, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \chi^{(i)}(x^+, \lambda), \quad (1.3.76)$$

as equações (1.3.75) transformam-se em

$$\begin{aligned}\omega^{(1)}(x^+, -\lambda_n)e^{-i\lambda_n x^+} &= (-1)^N \beta_n H \omega^{(1)}(x^+, \lambda_n)e^{i\lambda_n x^+} \\ \omega^{(2)}(x^+, -\lambda_n)e^{i\lambda_n x^+} &= \frac{(-1)^N}{\beta_n} H \omega^{(2)}(x^+, \lambda_n)e^{-i\lambda_n x^+}.\end{aligned}\quad (1.3.77)$$

As componentes dos vetores $\omega^{(i)}$ são funções meromórficas do parâmetro espectral sobre a esfera de Riemann. Através de (1.3.72) e (1.3.76), observamos que $\omega^{(i)}$ não tem pólos para valores finitos do parâmetro espectral, e só tem pólos de ordem N no ponto $\lambda = \infty$ (veja (1.3.73)). Por isto, as componentes dos $\omega^{(i)}$'s são polinômios de grau N . Isto, junto às expressões (1.3.77) e ao comportamento assintótico, determinam univocamente os vetores $\omega^{(i)}$. Para especificar a dependência do tempo, temos que trocar $\beta_n \rightarrow e^{-\frac{im^2}{2\lambda_n} x^-} \beta_n$ (veja (1.2.52)) em (1.3.77).

Agora, vamos analisar as soluções solitônicas (1.3.70) com um e dois sólitons. No caso em que se tem um só sóliton, o único ponto do espectro discreto (no semi-plano complexo superior) tem que pertencer ao eixo imaginário. Quando $N = 2$, existem duas possibilidades para a colocação dos dois pontos, λ_1 e λ_2 , do espectro discreto ($\text{Im}\lambda_i > 0$): primeiro, estes pontos são simétricos com respeito ao eixo imaginário, $\lambda_1 = -\bar{\lambda}_2$; segundo, λ_1 e λ_2 são puramente imaginários, $\lambda_k = i\mu_k$, $k = 1, 2$. Estas restrições seguem da

condição de que o campo de sine-Gordon , φ , é real, que, traduzida na linguagem dos dados espectrais, impõe as relações (1.1.41).

No caso em que o número de sólitons é um, de (1.3.55), (1.3.70) e (1.3.71), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= 4\epsilon \arctan \exp \left[\frac{m(x - vt - x_0)}{\sqrt{1 - v^2}} \right], \\ v &= \frac{m^2 - 4\mu^2}{m^2 + 4\mu^2}, \quad \lambda_1 = i\mu, \quad \mu > 0 \\ x_0 &= \frac{\sqrt{1 - v^2}}{m} \ln \left| \frac{c}{2\mu} \right|, \quad \epsilon = \text{sign } c,\end{aligned}\tag{1.3.78}$$

onde as coordenadas (x, t) estão ligadas às coordenadas do cone de luz através de (1.1.1). Além disto, notamos que o coeficiente c (1.1.34) tem que ser real (veja (1.1.41)). Esta solução descreve uma partícula com massa m , velocidade v e o centro de inércia x_0 . Além das variáveis contínuas: v e x_0 , o sóliton possui uma carga discreta, que é a carga topológica $Q = \text{sign } c = \frac{\varphi(\infty, t) - \varphi(-\infty, t)}{2\pi}$.

Prosseguindo com as soluções bisolitônicas, iniciamos com o primeiro caso notado anteriormente, $\lambda_1 = -\bar{\lambda}_2$.

A solução assume a forma seguinte:

$$\begin{aligned}\varphi &= 4 \arctan \left\{ \frac{\mu}{\nu} \frac{\sin \left[\frac{2\nu m}{|\lambda_1|} \cdot \frac{vx-t}{\sqrt{1-v^2}} - \arg \frac{c_1}{\lambda_1} \right]}{\cosh \left[\frac{2m\mu}{|\lambda_1|} (x - vt - x_0) \right]} \right\} \\ \lambda_1 &= -\bar{\lambda}_2 = \nu + i\mu, \quad \nu > 0 \\ v &= \frac{m^2 - 4|\lambda_1|^2}{m^2 + 4|\lambda_1|^2} \quad x_0 = \frac{|\lambda_1| \sqrt{1 - v^2}}{2\mu} \ln \frac{|\nu c_1|}{\mu |\lambda_1|},\end{aligned}\tag{1.3.79}$$

que descreve uma partícula relativística com graus de liberdade internos. Esta solução , chamada "breather", tem carga topológica igual a zero.

Finalmente, consideramos o caso em que

$$\begin{aligned}\lambda_k &= i\mu_k, \\ \bar{c}_k &= c_k, \quad k = 1, 2 ,\end{aligned}$$

que corresponde à solução

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\frac{c_1}{2\mu_1} e^{-\frac{2m(x-v_1 t)}{\sqrt{1-v_1^2}}} + \frac{c_2}{2\mu_2} e^{-\frac{2m(x-v_2 t)}{\sqrt{1-v_2^2}}}}{1 - \frac{c_1 c_2}{4\mu_1 \mu_2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 e^{-\frac{2m(x-v_1 t)}{\sqrt{1-v_1^2}} - \frac{2m(x-v_2 t)}{\sqrt{1-v_2^2}}}} \right\}$$

$$v_i = \frac{m^2 - 4\mu_i^2}{m^2 + 4\mu_i^2}. \quad (1.3.80)$$

Esta descreve a colisão elástica de duas ondas solitônicas. Para demonstrar este resultado, vamos supor que $v_2 > v_1$ ($\mu_1 < \mu_2$). De (1.3.80) segue que, para $t \rightarrow \pm\infty$, esta solução é a superposição de duas soluções monosolitônicas (1.3.78) espacialmente separadas:

$$\varphi(x, t) \rightarrow \varphi_1^\pm(x, t) + \varphi_2^\pm(x, t), \quad \text{quando } t \rightarrow \pm\infty, \quad (1.3.81)$$

com parâmetros $c_i^{(\pm)}$ determinados através das relações

$$c_1^{(+)} = c_1, \quad c_1^{(-)} = c_1 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2$$

$$c_2^{(+)} = c_2 \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2, \quad c_2^{(-)} = c_2, \quad (1.3.82)$$

de onde concluímos que, após a interação, os dois sólitons não mudam de velocidades e o único efeito da interação é a mudança dos centros de inércia:

$$\Delta x_{01} = x_{01}^{(+)} - x_{01}^{(-)} = 2 \frac{\sqrt{1-v_1^2}}{m} \ln \left| \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right|,$$

$$\Delta x_{02} = x_{02}^{(+)} - x_{02}^{(-)} = 2 \frac{\sqrt{1-v_2^2}}{m} \ln \left| \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right|. \quad (1.3.83)$$

Para estudar o problema da colisão de N -sólitons escreveremos o problema linear (1.1.3)-

(1.1.5) em coordenadas (x, t) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U_x \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = U_t \Psi \quad (1.3.84)$$

$$U_x = U_+ + U_- = i\lambda H + \frac{i}{4}(\partial_x \varphi + \partial_t \varphi)(E^+ + E^-) + \frac{m^2}{4i\lambda} (\cos \varphi H - i \sin \varphi (E^+ - E^-))$$

$$U_t = U_+ - U_- = i\lambda H + \frac{i}{4}(\partial_x \varphi - \partial_t \varphi)(E^+ + E^-) - \frac{m^2}{4i\lambda} (\cos \varphi H - i \sin \varphi (E^+ - E^-)).$$

Considerando a componente x deste sistema como um novo problema linear (compare com (1.1.11)), fica claro que, graças à invariância relativística, as condições de contorno correspondem a

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &\longrightarrow 0 \pmod{2\pi} \quad \text{quando } x \longrightarrow \pm\infty, \\ \partial_x \varphi(x, t) &\longrightarrow 0 \quad \text{quando } x \longrightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (1.3.85)$$

Como na seção 2, usando estes comportamentos assintóticos, o problema linear

$$\frac{\partial \Psi(x, \lambda)}{\partial x} = U_x(x, \lambda) \Psi(x, \lambda) \quad (1.3.86)$$

possui soluções de Jost, caracterizadas pelos comportamentos

$$\Psi_{\pm}(x, \lambda) \longrightarrow e^{i(\lambda - \frac{m^2}{4\lambda})Hx} \quad \text{quando } x \longrightarrow \pm\infty, \quad (1.3.87)$$

que, em completa analogia com (1.1.20), são ligadas através da relação :

$$\Psi_-(x, \lambda) = \Psi_+(x, \lambda) T(\lambda), \quad (1.3.88)$$

onde $T(\lambda)$ ($\det T(\lambda) = 1$) é a matriz de transição ligada ao problema linear (1.3.86).

Notemos que, entre as soluções $\mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda)$ (1.1.13) do problema (1.1.11) e as soluções

$\Psi_{\pm}(x, \lambda)$ (1.3.87) do problema (1.3.86), existe a relação [7, 8]:

$$\mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda) = \Psi_{\pm}(x, \lambda) \exp\left(i\lambda t + i\frac{m^2}{4\lambda}x\right) H. \quad (1.3.89)$$

Para demonstrar esta equação, observamos que, a partir da equação (1.3.85), resulta que o membro esquerdo satisfaz a (1.1.11). Além disto, o lado direito de (1.3.89) tem o comportamento assintótico correto (1.1.13), quando $x^+ \rightarrow \pm\infty$ com x^- fixo. Isto completa a demonstração de (1.3.89). Combinando (1.3.88) e (1.3.89), obtemos a relação :

$$\mathcal{F}_-(x^+, \lambda) = \mathcal{F}_+(x^+, \lambda).e^{-i\frac{m^2 x^-}{4\lambda}} adH.T(\lambda). \quad (1.3.90)$$

Desta expressão e de (1.2.47), segue que as matrizes de transição $\Theta(\lambda)$ (1.1.20) e $T(\lambda)$ (1.3.88) são iguais

$$T(\lambda) = \Theta(\lambda). \quad (1.3.91)$$

A relação (1.3.89) também demonstra que as colunas das $\Psi_{\pm}(x, \lambda)$ têm propriedades analíticas similares às propriedades analíticas das colunas análogas das matrizes $\mathcal{F}_{\pm}(x^+, \lambda)$. Em particular, os espectros discretos dos dois problemas coincidem e, usando (1.1.26), (1.2.52) e (1.3.89), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_-^{(2)}(x, \lambda_n) &= \beta_n(t)\Psi_+^{(1)}(x, \lambda_n) \\ \Psi_-^{(1)}(x, -\lambda_n) &= \beta_n(t)\Psi_+^{(2)}(x, -\lambda_n) \\ \beta_n(t) &= e^{2i(\lambda_n + \frac{m^2}{4\lambda_n})t}.\beta_n \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.3.92)$$

Também, é fácil verificar que

$$\overline{U_x(x, \lambda)} = \sigma_2 U_x(x, \bar{\lambda}) \sigma_2$$

$$U_x(x, -\lambda) = \sigma_1 U_x(x, \lambda) \sigma_1. \quad (1.3.93)$$

Por esta razão, o problema linear (1.3.86) tem as mesmas simetrias discretas que o problema (1.1.11) (veja (1.1.24) e (1.1.39)). Desta forma, os dados espectrais dos dois problemas lineares são idênticos. Com (1.3.89) e (1.2.52), podemos escrever (1.1.37) como equação da transformação espectral inversa para o problema (1.3.86).

Suponhamos, agora, que $\varphi(x, t)$ seja uma solução com N -sólitons. Isto quer dizer que, à solução φ , corresponde o conjunto dos dados espectrais (1.1.28) $\mathcal{S} = (\beta(\lambda) = 0, \lambda_n, \bar{\lambda}_n, \beta_n, \bar{\beta}_n)$; a parte do espectro discreto que pertence ao semi-plano complexo superior contém N pontos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Como conseqüência de (1.1.41), podemos dividir os pontos $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ em classes: a primeira contém pontos que estão no eixo imaginário $\lambda_k = i\mu_k$ ($\mu_k > 0$), e a segunda contém o resto dos pontos: $\bar{\lambda}_i = -\lambda_j$ ($i \neq j$).

Para simplificar a nossa análise, vamos supor que $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ cada vez que $\bar{\lambda}_i \neq -\lambda_j$, e introduzimos o ordenamento $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_N|$. Isto quer dizer que as velocidades $v_i = \frac{m^2 - 4|\lambda_i|^2}{m^2 + 4|\lambda_i|^2}$ satisfazem a $|v_1| \geq \dots \geq |v_N|$ e $v_i \neq v_j$ cada vez que $\lambda_i \neq -\bar{\lambda}_j$. Agora, suponhamos que, para um tempo bastante remoto ou bastante no futuro $t \rightarrow \pm\infty$, a solução geral com N -sólitons seja a superposição de monosólitons (1.3.79) separados no espaço e "breathers" (1.3.80):

$$\varphi(x, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varphi_i^\pm(x, t) + \sum_{i=1, \sigma(i)=i+1}^N \varphi_{i+1}^\pm(x, t), \quad (1.3.94)$$

onde usamos a notação introduzida em (1.1.41): $\bar{\lambda}_i = -\lambda_{\sigma(i)}$ para uma certa permutação e ordenamento, já mencionada em precedência. Nesta última expressão, $\varphi_i^\pm(x, t)$ são monosólitons (1.3.79) ligados aos pontos puramente imaginários $\bar{\lambda}_i = -\lambda_i$ do espectro discreto e $\varphi_{i+1}^\pm(x, t)$ são os breathers (1.3.80) que correspondem aos pontos $\bar{\lambda}_i = -\lambda_{i+1}$ do espectro discreto. Denotaremos por β_i^\pm os coeficientes de transição (1.1.26) para o espectro discreto que corresponde ao problema linear (1.3.86), com $\varphi = \varphi_i^\pm$ para os monosólitons e $\varphi = \varphi_{i+1}^\pm$ ($\bar{\beta}_{i+1}^\pm = -\beta_i^\pm$) para os "breathers".

Neste caso, sabe-se [7] [8] que existe a relação entre estes coeficientes e os coeficientes

β_i ligados à solução com N - sólitons (1.3.70) (1.3.71) :

$$\beta_k = \beta_k^{(\pm)} \prod_{|\lambda_i| < |\lambda_k|} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right)^{\mp 1} \cdot \prod_{|\lambda_i| > |\lambda_k|} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right)^{\pm 1}. \quad (1.3.95)$$

Agora, lembramos que β_k e $\beta_k^{(\pm)}$ têm a mesma evolução (1.3.92) no tempo. Por isto, as relações (1.3.95) permanecem válidas para qualquer valor do tempo. Isto quer dizer que a solução geral (1.3.70) descreve a colisão elástica de k sólitons e m breathers (o número de sólitons é $N = k + 2m$). Após a interação, os sólitons e os breathers movimentam-se com as mesmas velocidades que tinham antes da interação e só mudam os centros de inércia e fases (1.3.79). Estas mudanças podem ser calculadas usando (1.3.95); obtém-se que

$$\beta_k^{(+)} = \beta_k^{(-)} \prod_{|\lambda_i| > |\lambda_k|} \left(\frac{\lambda_k + \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \right)^2 \prod_{|\lambda_i| < |\lambda_k|} \left(\frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right)^2, \quad (1.3.96)$$

de onde segue

$$\Delta x_{ok} = x_{ok}^{(+)} - x_{ok}^{(-)} = 2 \frac{\sqrt{1 - v_k^2}}{m} \left(\sum_{|\lambda_i| < |\lambda_k|} - \sum_{|\lambda_i| > |\lambda_k|} \right) \ln \left| \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right| \quad (1.3.97)$$

para os sólitons (1.3.78), e

$$\begin{aligned} \Delta x_{ok} &= \frac{|\lambda_k| \sqrt{1 - v_k^2}}{2\mu_k m} \left(\sum_{|\lambda_i| < |\lambda_k|} - \sum_{|\lambda_i| > |\lambda_k|} \right) \ln \left| \frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right| \\ \Delta \varphi_k &= 2 \arg \left(\sum_{|\lambda_i| < |\lambda_k|} - \sum_{|\lambda_i| > |\lambda_k|} \right) \arg \left(\frac{\lambda_k - \lambda_i}{\lambda_k + \lambda_i} \right) \end{aligned} \quad (1.3.98)$$

para os breathers.

Uma propriedade importante da colisão dos sólitons é que a interação é fatorizável em interações entre duas partículas (1.3.96). Este fato é consequência da integrabilidade do modelo e permanece válido para a matriz quântica de colisão [14]

Capítulo 2

Grupos de Lie–Poisson e as transformações de vestimento

Os grupos de transformações para equações solitônicas foram introduzidas pelo grupo de Kyoto [17] e, atualmente, são conhecidas como transformações de vestimento. Estas transformações formam um grupo de simetria do espaço de fases do modelo integrável. A principal característica do grupo de vestimento é que este opera através de transformações de calibre sobre as componentes da conexão de Lax, U_{\pm} , e não mudam a forma desta. Isto quer dizer que, assim como as equações de movimento são equivalentes à condição de curvatura nula, o grupo de vestimento é uma simetria do espaço de soluções da teoria.

Como para toda simetria, esperar-se-ia que as transformações de vestimento preservassem a estrutura simplética; Semenov–Tian–Shansky demonstraram que não é assim. Para garantir a covariância dos parênteses de Poisson com respeito à ação do grupo de vestimento, é necessário introduzir um parêntese não-trivial sobre o grupo de vestimento. Este último, junto com este parêntese, transforma-se num grupo de Lie–Poisson. O estudo do grupo de vestimento é importante porque a simetria de vestimento é o limite quasiclássico da simetria quântica do modelo integrável.

2.1 Grupos de Lie–Poisson e o "double" de Drinfeld

Nesta seção, discutiremos a situação em que um grupo de Lie G é dotado de uma estrutura simplética (ou de um parêntese de Poisson), que se transforma covariantemente com respeito à multiplicação no grupo.

Antes de prosseguir com os detalhes, introduziremos certas notações. A cada grupo de Lie, G , associa-se uma álgebra de Lie, que vamos denotar por \mathcal{G} . Os elementos desta álgebra são as transformações infinitesimais do grupo G e satisfazem à identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Como \mathcal{G} é um espaço linear, associaremos à álgebra de Lie \mathcal{G} um espaço dual, \mathcal{G}^* , que contém todos os funcionais lineares que operam sobre \mathcal{G} . Lembraremos, também, as ações adjuntas do grupo G e da álgebra sobre \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g.X &= gXg^{-1}, \\ \text{ad}Y.X &= [Y, X], \quad g \in G, \quad X, Y \in \mathcal{G}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

A segunda destas relações permite-nos introduzir a ação coadjunta como segue:

$$\ell([X, Y]) = \text{ad}^*X.\ell(Y), \tag{2.1.2}$$

para cada $\ell \in \mathcal{G}^*$ e cada par $X, Y \in \mathcal{G}$. Vamos, ainda, precisar dos campos vetoriais definidos através das seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{tX}.x) |_{t=0} &= X.x = \partial_X^R x \\ \frac{d}{dt} (x.e^{tX}) |_{t=0} &= x.X = \partial_X^L x \\ X \in \mathcal{G}, \quad x \in G. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Notemos que a derivada ∂_X^R é invariante com respeito às multiplicações pela direita:

$g \rightarrow gh$ com $h \in G$, e a derivada ∂_X^L não muda quando multiplicamos à esquerda a segunda equação (2.1.3): $g \rightarrow hg$. Vamos, também, usar uma abreviação: $\partial_i^R = \partial_{X_i}^R$, $\partial_i^L = \partial_{X_i}^L$ onde X_1, X_2, \dots, X_{d_G} formam uma base da álgebra \mathcal{G} (d_G é a dimensão do grupo G).

Em geral, um parêntese no grupo G é introduzido através da expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \{f(x), g(x)\} &= \sum_{i,j=1}^{d_G} \eta^{ij}(x) \partial_i^R f(x) \partial_j^R g(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^{d_G} df(x) X_i \otimes dg(x) X_j \eta^{ij}(x) \\ &= df(x) \otimes dg(x) (\eta(x)) \\ \eta(x) &= \eta^{ij}(x) X_i \otimes X_j, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

para cada par de funções definidas sobre o grupo G . Desta última expressão, deduzimos também que a estrutura simplética no grupo G depende de um tensor anti-simétrico, $\eta^{ij}(x) = -\eta^{ji}(x)$, ou equivalentemente, de um elemento do produto externo $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$:

$$\{f(x), g(x)\} = df(x) \otimes dg(x) \cdot \eta(x). \tag{2.1.5}$$

Substituindo esta última expressão em (2.1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \{x \otimes x\}, \\ x_1 &= x \otimes 1, \quad x_2 = 1 \otimes x. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

As derivadas ∂_X^R e ∂_X^L não são independentes:

$$\partial_X^R f(x) = \frac{d}{dt} f(xe^{tX}) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(e^{tX} X x^{-1} x) \Big|_{t=0} = \partial_{\mathbb{A} d_x X}^L f(x). \tag{2.1.7}$$

Se a multiplicação num grupo, considerada como um mapeamento $m : G \times G \rightarrow G$, sendo $m(x, y) = x \cdot y$ um mapeamento de Poisson, então este grupo se chama grupo de



Poisson–Lie. O parêntese de Poisson no produto Cartesiano $G \times G$ é introduzido de maneira natural:

$$\{x_1 y_1, x_2 y_2\}_{G \times G} = \{x_1, x_2\}_G y_1 y_2 + x_1 x_2 \{y_1, y_2\}_G. \quad (2.1.8)$$

Para cada função f sobre G , $f \in \mathcal{F}(G)$, através do mapeamento m , definimos uma função $m^* f$ sobre $G \times G$, $m^* f \in \mathcal{F}(G \times G)$ através da equação $m^* f(x, y) = f(x \cdot y)$.

Usando esta notação, escrevemos a condição para que m seja um mapeamento de Poisson como:

$$\{m^* f, m^* g\}_{G \times G} = m^* \{f, g\}_G. \quad (2.1.9)$$

É claro que $\mathcal{F}(G \times G) \simeq \mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G)$ e, por isto, $f(x \cdot y) = \sum_j f_j^{(1)}(x) f_j^{(2)}(y)$, $g(x \cdot y) = \sum_j g_j^{(1)}(x) g_j^{(2)}(y)$. Substituindo as últimas expansões em (2.1.4), e levando em conta (2.1.7) e (2.1.8), chegamos à expressão seguinte:

$$\begin{aligned} \{f(xy), g(xy)\}_{G \times G} &= \sum_{j,k} \{f_j^{(1)}(x), g_k^{(1)}(x)\} f_j^{(2)}(y) g_k^{(2)}(y) + \\ &\quad + \sum_{j,k} f_j^{(1)}(x) g_k^{(1)}(x) \{g_j^{(2)}(y), g_k^{(2)}(y)\} \\ &= df(xy) \otimes dg(xy) (\eta(x) + x \cdot \eta(y)) \\ x \cdot \eta(y) &= \text{Ad} x \otimes \text{Ad} x \cdot \eta(y). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Para o membro direito de (2.1.9), temos

$$\{f(xy), g(xy)\}_G = df(xy) \otimes dg(xy) \cdot \eta(xy); \quad (2.1.11)$$

desta, e de (2.1.9) e (2.1.10), concluímos que para que um grupo de Lie seja um grupo de Poisson–Lie, é necessário e suficiente que a equação

$$\eta(xy) = \eta(x) + x \cdot \eta(y) \quad (2.1.12)$$

seja satisfeita. Isto quer dizer que $\eta(x)$ é um cociclo de G com valores em $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$. O operador de cobordo foi introduzido por Hochschild e Serre [27]

$$\begin{aligned} \delta_G \eta(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot \eta(x_2, \dots, x_{n+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \eta(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} \eta(x_1, \dots, x_n) \\ x_1 \cdot \eta(x_2, \dots, x_{n+1}) &= \text{Ad} x_1 \otimes \dots \otimes \text{Ad} x_1 \cdot \eta(x_2, \dots, x_{n+1}) \\ \delta_G^2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Usando (2.1.13), observamos que (2.1.12) assume a forma seguinte:

$$\delta_G \eta(xy) = 0 \tag{2.1.14}$$

Lembramos que o dual, \mathcal{G}^* , da álgebra \mathcal{G} coincide com o espaço cotangente ao grupo G no ponto e , onde e é a identidade em G . O parêntese de Poisson em G pode ser usado para introduzir o parêntese de Lie em \mathcal{G}^* (o dual a \mathcal{G}):

$$\begin{aligned} [d_e f, d_e g]_* &= d_e \{f, g\}, \\ d_e f &= df(e) \quad f \in \mathcal{F}(G). \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Usando (2.1.12), observamos que $\eta(e) = 0$ e, assim, temos:

$$[d_e f, d_e g]_* = d_e f \otimes d_e g (d_e \eta). \tag{2.1.16}$$

É, também, claro que $[\ ,]_*$ satisfaz à identidade de Jacobi, graças ao fato de que o parêntese (2.1.4) satisfaz a esta identidade. Introduzindo a base $\{\ell^i\}$ em \mathcal{G}^* , dual à base $\{X_i\}$:

$$\ell^i(X_j) = \delta_j^i,$$

o diferencial de qualquer função pode ser escrito como $d_e f = \partial_i^R f(e) \ell^i = \partial_i^L f(e) \ell^i$ e, por

isto, de (2.1.16) obtemos

$$[\ell^i, \ell^j]_* = \partial_k^R \eta^{ij}(e) \ell^k. \quad (2.1.17)$$

A álgebra de Lie \mathcal{G} de um grupo de Poisson–Lie é uma biálgebra. Isto quer dizer que \mathcal{G}^* é uma álgebra de Lie (veja (2.1.15) e (2.1.16)). Além disto, o parêntese $[\ ,]_*$ em \mathcal{G}^* , considerado como co-comutador ϕ em \mathcal{G}

$$[L_1, L_2]_*(X) = L_1 \otimes L_2 \cdot \phi(X), \quad L_i \in \mathcal{G}^*, X \in \mathcal{G}, \phi: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} \wedge \mathcal{G}, \quad (2.1.18)$$

é um cociclo de \mathcal{G} com valores em $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \phi([X, Y]) &= X \cdot \phi(Y) - Y \cdot \phi(X), \\ X \cdot Y \otimes Z &= [X \otimes 1 + 1 \otimes X, Y \otimes Z]. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

De (2.1.16), segue que, para grupos de Poisson–Lie, o co-comutador é o seguinte

$$\phi(X) = d_e \eta(X) = \partial_X^R \eta^{ij}(e) X_i \otimes X_j. \quad (2.1.20)$$

Para demonstrar que esta expressão é um cociclo, usaremos (2.1.12) com $x = e^{tX}$, $y = e^{tY}$:

$$\eta(e^{tX} e^{tY}) - \eta(e^{tY} e^{tX}) = t^2 (X \cdot d_e \eta(Y) - Y \cdot d_e \eta(X)) + O(t^3),$$

de onde (2.1.19) aparece como conseqüência imediata, em vista do fato de que o membro esquerdo desta expansão é proporcional a $t^2 (d_e \eta([X, Y]) + O(t))$.

Do mesmo modo, podemos interpretar o parêntese de Lie em \mathcal{G} como co-comutador em \mathcal{G}^* :

$$L([X, Y]) = \psi(L) X \otimes Y$$

$$\psi : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^* \wedge \mathcal{G}^*. \quad (2.1.21)$$

Com auxílio de (2.1.18) e (2.1.21), obtemos :

$$\begin{aligned} L \otimes K. (\phi ([X, Y])) &= [L, K]_{*}. ([X, Y]) = \psi ([L, K]_{*}). X \otimes Y \\ L \otimes K. ([X \otimes 1, \phi(Y)]) &= [\psi(L), 1 \otimes K]_{*}. (X \otimes Y) = -[\psi(L), K \otimes 1]_{*}. (Y \otimes X) \\ L \otimes K. ([1 \otimes X, \phi(Y)]) &= -[\psi(K), 1 \otimes L]_{*}. (X \otimes Y) = [\psi(K), L \otimes 1]_{*}. (Y \otimes X) \\ L, K \in \mathcal{G}^*, \quad X, Y &\in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Destas identidades, segue que a co-multiplicação $\psi : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}^* \wedge \mathcal{G}^*$ é também um 1-cociclo:

$$\psi ([L, K]_{*}) = L.\psi(K) - K.\psi(L). \quad (2.1.23)$$

Denotaremos por G^* o grupo de Lie com álgebra de Lie \mathcal{G}^* . Já foi esclarecido que a estrutura simplética em G induz um parêntese de Lie em \mathcal{G}^* . Da mesma maneira, o cociclo ψ que determina o parêntese de Lie na álgebra \mathcal{G} pode ser usado para definir um parêntese de Poisson no grupo G^* :

$$[d_{e^*}f, d_{e^*}g] = d_{e^*}\{f, g\}_{G^*}, \quad (2.1.24)$$

onde f e g são duas funções definidas em G^* e e^* é a identidade de G^* . Esta expressão é análoga a (2.1.16).

Suponhamos que o um-cociclo, $\eta(x)$, que determina o parêntese (2.1.4) seja um cobordo. Isto quer dizer, em vista de (2.1.13), que existe um elemento $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tal que

$$\eta(x) = r - x \cdot r, \quad r = r^{ij} X_i \otimes X_j. \quad (2.1.25)$$

Este elemento r é chamado de matriz r clássica. Por meio de (2.1.20) e (2.1.25), obtemos a expressão para o co-comutador ϕ :

$$\phi(X) = [r, X \otimes 1 + 1 \otimes X]. \quad (2.1.26)$$

Combinando (2.1.6) e a última equação, reproduzimos o parêntese de Sklyanin [24]:

$$\{x_1, x_2\} = [r, x_1 x_2]. \quad (2.1.27)$$

Da anti-simetria deste parêntese, obtemos a relação

$$\begin{aligned} \text{Ad}x \otimes \text{Ad}x (r_{12} + r_{21}) &= r_{12} + r_{21} \\ r_{12} &= r^{ij} X_i \otimes X_j, \quad r_{21} = r^{ij} X_j \otimes X_i, \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

e, como consequência da identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned} \text{Ad}x \otimes \text{Ad}x \otimes \text{Ad}x B &= B, \\ B &= [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}], \\ r_{12} &= r^{ij} X_i \otimes X_j \otimes 1, \\ r_{13} &= r^{ij} X_i \otimes 1 \otimes X_j, \\ r_{23} &= r^{ij} 1 \otimes X_i \otimes X_j. \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

No caso em que $B = 0$, a equação para a matriz r clássica chama-se a equação de Yang-Baxter clássica.

Se a álgebra \mathcal{G} possui um produto escalar (\cdot, \cdot) invariante e não-degenerado, introduzimos o operador

$$\begin{aligned} R(X) &= r^{ij} X_i (X_j, X) \\ (X, [Y, Z]) &= ([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Com auxílio do produto escalar, podemos identificar \mathcal{G}^* com \mathcal{G} . Em particular, para o comutador em \mathcal{G}^* ((2.1.15), (2.1.16)), obtemos:

$$\begin{aligned} [L_1, L_2]_* &= [R^a L_1, L_2] + [L_1, R^a L_2] \\ R^a &= \frac{R - R^t}{2}, \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

e a transposição é com respeito ao produto escalar $(\ , \)$:

$$(X, RY) = (R^t X, Y).$$

Seguindo Drinfeld [23], introduziremos o chamado "double". A partir de uma álgebra de Lie, \mathcal{G} , construímos uma biálgebra de Lie, D , que sendo um espaço vetorial, implica que o "double" de Drinfeld é uma soma direta de duas álgebras de Lie duais: $D = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$. No "double" de Drinfeld, existe um produto escalar natural:

$$\langle (X_1, L_1), (X_2, L_2) \rangle = L_1(X_2) + L_2(X_1). \tag{2.1.32}$$

Suponhamos, também, que \mathcal{G} e \mathcal{G}^* sejam duas subálgebras de D , com os parênteses de Lie introduzidos antes: em \mathcal{G} naturalmente, e em \mathcal{G}^* , através de (2.1.15) e (2.1.16).

Suponhamos, ainda, que o produto escalar $\langle \ , \ \rangle$, introduzido em (2.1.32), seja uma forma invariante com respeito à ação adjunta. Estes dados, agora, são suficientes para dotar D de uma estrutura de álgebra de Lie. Para demonstrar este fato, basta garantir que as identidades

$$\begin{aligned} \langle [X, L], Y \rangle &= -L(\langle X, Y \rangle) \\ \langle [X, L], K \rangle &= \langle X, [L, K] \rangle = [L, K]_*(X) \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

sejam satisfeitas.

Para demonstrá-las, primeiramente voltaremos à expressão (2.1.32). Usando esta

definição e a invariância do produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle [(X, 0), (0, L)], (Y, 0) \rangle &= -\langle (0, L), [(X, 0), (Y, 0)] \rangle = \\ -\langle (0, L), ([X, Y], 0) \rangle &= -L([X, Y]) = -\text{ad}^* X.LY. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

De maneira análoga, chega-se a:

$$\begin{aligned} \langle [X, L], K \rangle &= \langle [(X, 0), (0, L)], (0, K) \rangle \\ &= \langle (X, 0), [(0, L), (0, K)] \rangle \\ &= [L, K]_{\star}(X) = L \otimes K.\phi(X). \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Levando em conta de (2.1.34) e (2.1.35), obtemos o comutador (na álgebra "double" de Drinfeld)

$$[X, L] = -\text{ad}^* X.L + L \otimes 1.\phi(X). \quad (2.1.36)$$

O primeiro termo deste comutador pertence à subálgebra \mathcal{G}^* , e o segundo a \mathcal{G} .

Agora, resta-nos demonstrar as identidades de Jacobi:

$$[X, [Y, L]] + [Y, [L, X]] + [L, [X, Y]] = 0, \quad (2.1.37a)$$

$$[L, [K, X]] + [K, [X, L]] + [X, [L, K]] = 0, \quad (2.1.37b)$$

$$X, Y \in \mathcal{G}, \quad K, L \in \mathcal{G}^*.$$

Iniciamos com (2.1.37a). Claramente,

$$\begin{aligned} [X, [Y, L]] &= -[X, \text{ad}^* YL] + [X, (L \otimes 1).\phi(Y)] \\ &= \text{ad}^* X.\text{ad}^* Y.L - L \otimes 1([Y \otimes 1, \phi(X)] - [1 \otimes X, \phi(Y)]) \\ [Y, [L, X]] &= \text{ad}^* Y.\text{ad}^* X.L + L \otimes 1([X \otimes 1, \phi(Y)] - [1 \otimes Y, \phi(X)]) \\ [L, [X, Y]] &= \text{ad}^* [X, Y].L - L \otimes 1.\phi([X, Y]). \end{aligned}$$

Agora, usando a identidade $\text{ad}^* [X, Y] = [\text{ad}^* Y, \text{ad}^* X]$, obtemos

$$\begin{aligned} & [X, [Y, L]] + [Y, [L, X]] + [L, [X, Y]] = \\ & L \otimes 1 ([1 \otimes X + X \otimes 1, \phi(Y)] - [1 \otimes Y + Y \otimes 1, \phi(X)] - \phi([X, Y])) = 0, \end{aligned}$$

graças a (2.1.19). Para demonstrar a segunda identidade de Jacobi, basta usar a dualidade entre as álgebras \mathcal{G} e \mathcal{G}^* .

Finalizaremos esta seção notando que, se $\{X_i\}$ é uma base de \mathcal{G} e $\{L^i\}$ é uma base de \mathcal{G}^* , dual a $\{X_i\}$,

$$L^i(X_j) = \delta_j^i,$$

então o elemento

$$r = \sum_i X_i \otimes L^i \tag{2.1.38}$$

é solução da equação clássica de Yang–Baxter.

Daqui para frente, vamos supor que a álgebra de Lie \mathcal{G} possui um produto escalar $(,)$ que é não-degenerado e invariante (veja (2.1.30)).

Além disto, suponhamos que, sobre o grupo G , seja definido o parêntese de Sklyanin (2.1.27), com duas possibilidades para escolher a matriz $r \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ que aparece no lado direito de (2.1.27):

$$\begin{aligned} r_{12}^\pm &= r_\pm^{ij} X_i \otimes X_j \\ r_{21}^\pm &= r_\pm^{ij} X_j \otimes X_i = P_{12} r_{12}^\pm P_{12}, \end{aligned} \tag{2.1.39}$$

onde P_{12} é o operador de permutação dos dois fatores tensoriais, $P_{12} X \otimes Y P_{12} = Y \otimes X$. Lembramos, também, a eq. (2.1.28), de onde segue que os operadores $r_{12}^\pm + r_{21}^\pm$ são tensores

de Casimir. Suponhamos que:

$$r_{21}^{\pm} = -r_{12}^{\mp}, \quad (2.1.40)$$

e que $C = r_{12}^{+} - r_{12}^{-}$, considerado como um operador que atua sobre $\mathcal{G} : X \longrightarrow (C, X \otimes 1)$ seja a identidade.

Além disto, suponhamos que as matrizes r^{\pm} (2.1.39) sejam soluções da equação clássica de Yang–Baxter:

$$[r_{12}^{\pm}, r_{13}^{\pm}] + [r_{12}^{\pm}, r_{23}^{\pm}] + [r_{13}^{\pm}, r_{23}^{\pm}] = 0. \quad (2.1.41)$$

Isto é suficiente para que o parêntese (2.1.27) satisfaça à identidade de Jacobi. Com auxílio das matrizes $r^{\pm} = r_{12}^{\pm}$, definiremos os operadores R^{\pm} em analogia a (2.1.30):

$$R^{\pm} X = r_{\pm}^{ij} X_i (X_j, X). \quad (2.1.42)$$

Graças a (2.1.40), temos

$$(R^{\pm})^t = -R^{\mp}, \quad (2.1.43)$$

onde a transposição é com respeito à forma $(,)$.

Tem-se ainda que

$$R^{+} - R^{-} = 1. \quad (2.1.44)$$

Voltamos, agora, à equação de Yang–Baxter. Através do produto escalar invariante, e levando em conta a definição (2.1.42), podemos escrever (2.1.41) como uma equação para os operadores R^{\pm} . Um simples cálculo, que se vale apenas da invariância da forma $(,)$

(2.1.30), mostra que a equação de Yang–Baxter é equivalente a:

$$[R^\pm X, R^\pm Y] = R^\pm [X, Y]_* , \quad (2.1.45)$$

onde $[,]_*$ é o parêntese de Lie (2.1.31). Lembrando (2.1.44), notamos que este parêntese pode ser escrito como:

$$[X, Y]_* = [R^\pm X, Y] + [X, R^\pm Y] . \quad (2.1.46)$$

É fácil verificar que a identidade de Jacobi para este parêntese é consequência da equação de Yang–Baxter (2.1.45).

Como já notamos, usando o produto escalar invariante, podemos identificar \mathcal{G}^* (considerada como um espaço linear) com \mathcal{G} . A estrutura de álgebra de Lie em $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ é introduzida através de (2.1.46). Consideremos os operadores R^\pm como dois mapeamentos de $\mathcal{G}^* \simeq \mathcal{G}$ em \mathcal{G} . O significado das equações (2.1.45) é que $R^\pm : \mathcal{G}^* \longrightarrow \mathcal{G}$ são dois homomorfismos da álgebra de Lie \mathcal{G}^* em \mathcal{G} . Denotaremos por \mathcal{G}_\pm as imagens $R^\pm \mathcal{G}^* \simeq R^\pm \mathcal{G}$. Lembrando (2.1.40), observamos que

$$r^\pm \in \mathcal{G}_\pm \otimes \mathcal{G}_\mp . \quad (2.1.47)$$

Graças a (2.1.45), \mathcal{G}_\pm são subálgebras de \mathcal{G} . O grupo dual a \mathcal{G}^* e sua subálgebra de Lie, \mathcal{G}^* , são associados a um problema de fatorização em G que é específica dos operadores R^+ e R^- . Para esclarecer isto, consideremos primeiramente \mathcal{G}^* . Com (2.1.44), observamos que cada elemento $X \in \mathcal{G}$ possui uma única decomposição :

$$X = X_+ - X_- , \quad X_\pm = R^\pm X \in \mathcal{G}_\pm . \quad (2.1.48)$$

Em termos das componentes X_\pm de X , o comutador $[,]_*$ (2.1.46) assume a forma

seguinte:

$$[X, Y]_* = [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-], \quad (2.1.49)$$

o que quer dizer que as componentes do tipo + comutam com as componentes do tipo -. Denotemos por G^* a exponencial desta álgebra de Lie. É claro que G^* é feito das cópias (g_-, g_+) , $g_{\pm} = e^{X_{\pm}}$ e a regra de multiplicação é

$$(g_-, g_+).(h_-, h_+) = (g_-h_-, g_+h_+). \quad (2.1.50)$$

Assim como \mathcal{G}^* e \mathcal{G} são isomórficos como espaços lineares, G^* e G são difeomorfos como variedades:

$$\begin{aligned} (g_-, g_+) &\longrightarrow g = g_-^{-1}g_+, \\ (g_-, g_+) &\in G^*, \quad g \in G. \end{aligned} \quad (2.1.51)$$

Como já notamos anteriormente, o comutador na álgebra de Lie \mathcal{G} pode ser escrito através do co-comutador ψ em \mathcal{G}^* (veja (2.1.21)). Foi, também, esclarecido que este co-comutador introduz uma estrutura simplética no grupo G^* . Tentaremos escrever explicitamente esta estrutura. Em analogia com (2.1.6), e levando em conta (2.1.51), podemos escrever:

$$\{g \otimes g\}_{G^*} = g_-^{-1} \otimes g_-^{-1} \cdot \nu(g) \cdot g_+ \otimes g_+, \quad (2.1.52)$$

onde $\nu(g)$ é um 1-cociclo do grupo G^* com valores em $\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ (veja (2.1.12) e (2.1.14)). Trocando G com G^* em (2.1.15), observamos que este cociclo é ligado à comultiplicação através da relação

$$\psi(X) = \left. \frac{d}{dt} \nu(e^{tX}) \right|_{t=0},$$

$$X = X_+ - X_- \in \mathcal{G}^*. \quad (2.1.53)$$

De acordo com (2.1.21), decorre que temos que resolver a equação

$$(Z, [X, Y]) = (\psi(Z), X \otimes Y). \quad (2.1.54)$$

Lembrando da decomposição (2.1.48) para o lado esquerdo desta equação, obtemos:

$$(Z, [X, Y]) = (Z, [X_+, Y_+]) + (Z, [X_-, Y_-]) - (Z, [X_+, Y_-]) - (Z, [X_-, Y_+]). \quad (2.1.55)$$

Com auxílio de (2.1.18), (2.1.26), (2.1.43), (2.1.45) e (2.1.46), deduz-se que

$$\begin{aligned} (Z, [X_{\pm}, Y_{\pm}]) &= (Z, R^{\pm} [X, Y]_{*}) = - (R^{\mp} Z, [X, Y]_{*}) = - (\phi(Z_{\mp}), X \otimes Y) \\ &= - ([r^{\alpha}, Z_{\mp} \otimes 1 + 1 \otimes Z_{\mp}], X \otimes Y). \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

Além disto, usando (2.1.30) e (2.1.40), conclui-se que

$$\begin{aligned} ([r^{\pm}, Z_{\pm} \otimes 1], X \otimes Y) &= (Z_{\pm}, [X, Y_{\pm}]), \\ ([r^{\pm}, 1 \otimes Z_{\mp}], X \otimes Y) &= (Z_{\mp}, [X_{\mp}, Y]). \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

Substituindo (2.1.56), (2.1.57) e (2.1.55), e lembrando (2.1.18) e (2.1.43), obtemos que o cocomutador ψ , que aparece em (2.1.54), tem a forma seguinte:

$$\begin{aligned} \psi(Z) &= - [r^{\pm}, Z_+ \otimes 1 + 1 \otimes Z_+] - [r^{\pm}, Z \otimes 1 + 1 \otimes Z_-] + \\ &+ [r^+, Z_+ \otimes 1 + 1 \otimes Z_-] + [r^-, Z_- \otimes 1 + 1 \otimes Z_+] = [r^- - r^+, 1 \otimes Z], \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

de onde, para o tensor $\nu(g)$ (2.1.52), que define o parêntese de Poisson sobre o grupo G^* , obtém-se a forma seguinte:

$$\nu(g) = g_+ \otimes g_+ \cdot r^{\pm} \cdot g_+^{-1} \otimes g_+^{-1} + g_- \otimes g_- \cdot r^{\mp} \cdot g_-^{-1} \otimes g_-^{-1} +$$

$$-g \otimes 1.r^+.1 \otimes g - 1 \otimes g.r^-.g \otimes 1, \quad (2.1.59)$$

onde a decomposição $g = g_-^{-1}g_+$ foi introduzida através de (2.1.51). De (2.1.52) e (2.1.59), obtemos os parênteses de Semenov–Tian–Shansky:

$$\begin{aligned} \{g_+ \otimes g_+\}_{G^*} &= -[r^\pm, g_+ \otimes g_+], \\ \{g_- \otimes g_-\}_{G^*} &= -[r^\pm, g_- \otimes g_-], \\ \{g_+ \otimes g_-\}_{G^*} &= -[r^+, g_+ \otimes g_-], \\ \{g_- \otimes g_+\}_{G^*} &= -[r^-, g_- \otimes g_+]. \end{aligned} \quad (2.1.60)$$

Como esperávamos, o grupo G^* , junto a estes parênteses, é um grupo de Poisson–Lie

2.2 O grupo de vestimento. Aplicação para o modelo de sine–Gordon

As transformações de vestimento são simetrias especiais das equações solitônicas que admitem a representação de Lax [3]. Para introduzir estas transformações, consideramos um sistema de equações diferenciais para um conjunto de campos $\Phi(x, t)$, que podem ser escritas como condição de curvatura zero:

$$[D_\mu(\Phi), D_\nu(\Phi)] = 0, \quad \mu, \nu = x, t, \quad (2.2.61)$$

para uma conexão $D_\mu(\Phi) = \partial_\mu - A_\mu(\Phi)$ que depende dos campos Φ . A conexão A_μ , usualmente chamada de conexão de Lax, pertence a uma álgebra de Lie \mathcal{G} . Como no Capítulo 1, de (2.2.61) podemos deduzir que esta condição de curvatura zero é a condição de compatibilidade do sistema linear (compare por exemplo com (1.1.6)):

$$(\partial_\mu - A_\mu)\mathcal{F}(x, t) = 0, \quad (2.2.62)$$

onde a "função de onda" toma valores no grupo de Lie G (\mathcal{G} é a álgebra de Lie deste grupo).

Como foi explicado na seção precedente, as matrizes $r^\pm \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ (2.1.39), que são soluções da equação clássica de Yang-Baxter, definem, através de (2.1.30) e (2.1.42), duas subálgebras, \mathcal{G}_+ e \mathcal{G}_- , de \mathcal{G} . Lembramos, também, a decomposição em \mathcal{G} : $X = X_+ - X_-$, e a correspondente fatorização em G : $g = g_-^{-1}g_+$, $g_\pm = e^{X_\pm}$. Levando em conta este resultado, introduzimos uma transformação de vestimento que, para cada $g = g_-^{-1}g_+ \in G$, transforma a solução $\mathcal{F}(x, t)$ de (2.2.62) em

$$\mathcal{F}^g(x, t) = g_\pm(x, t) \cdot \mathcal{F}(x, t) \cdot g_\pm^{-1}, \quad g_\pm(x, t) \in G_\pm, \quad (2.2.63)$$

de onde segue que os elementos $g_\pm(x, t)$ são uma solução do problema de fatorização :

$$g_-^{-1}(x, t)g_+(x, t) = \mathcal{F}(x, t)g\mathcal{F}(x, t)^{-1}. \quad (2.2.64)$$

Notemos, também, que as transformações de vestimento não mudam a condição de normalização : se $\mathcal{F}(x_0, t_0) = 1$, então segue que também $\mathcal{F}^g(x_0, t_0) = 1$. Além disto, de (2.2.63), fica claro que as transformações de vestimento induzem transformações de calibre sobre a conexão de Lax:

$$A_\mu = \partial_\mu \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} \longrightarrow A_\mu^g = \partial_\mu \mathcal{F}^g \cdot (\mathcal{F}^g)^{-1};$$

mais explicitamente, temos

$$A_\mu^g(x, t) = \partial_\mu (g_\pm(x, t)) \cdot g_\pm^{-1}(x, t) + g_\pm(x, t)A_\mu(x, t)g_\pm^{-1}(x, t). \quad (2.2.65)$$

Há mais uma exigência [17, 19] sobre o problema da fatorização (2.2.63): esta deve ser construída de maneira tal que a forma da conexão de Lax, A_μ , não muda após a transformação de calibre (2.2.65). Substancialmente, esta é a principal característica das transformações de vestimento. Em particular, isto quer dizer que o grupo de vestimento

é uma simetria (usualmente chamada simetria escondida) das equações solitônicas.

Tentaremos ver qual é a regra de multiplicação no grupo de vestimento. Tomemos dois elementos do grupo G , $g = g_-^{-1}g_+$ e $h = h_-^{-1}h_+$, e, aplicando sucessivamente duas transformações de vestimento (2.2.63): $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^g \longrightarrow (\mathcal{F}^g)^h$ como segue de (2.2.63) e (2.2.64), conclui-se que

$$(\mathcal{F}^g)^h(x, t) = h_{\pm}(x, t) \cdot \mathcal{F}^g(x, t) \cdot h_{\pm}^{-1} = h_{\pm}(x, t) \cdot g_{\pm}(x, t) \mathcal{F}(x, t) g_{\pm}^{-1} h_{\pm}^{-1}. \quad (2.2.66)$$

Isto significa que a multiplicação no grupo de vestimento é a mesma que no grupo dual G^* (veja (2.1.50)):

$$(h_-, h_+) \cdot (g_-, g_+) = (h_-g_-, h_+g_+).$$

A ação de um grupo de Poisson-Lie, G , sobre uma variedade simplética, M , é uma ação de Poisson-Lie se os parênteses de Poisson transformam-se covariantemente. Isto é equivalente a dizer que, para cada duas funções f_1 e f_2 em M , vale a relação

$$\begin{aligned} \{f_1(gx), f_2(gx)\}_{G \times M} &= \{f_1, f_2\}_M(gx) \\ x \in M \quad , \quad g \in G, & \end{aligned} \quad (2.2.67)$$

onde a estrutura simplética em $G \times M$ é a estrutura do produto direto.

Vamos, agora, ver agora como introduzir o grupo de vestimento no modelo de sine-Gordon (1.1.11). Em vez de trabalhar com a conexão (1.1.3), façamos as redefinições $m \longrightarrow 2m$, $\varphi \longrightarrow 2\varphi$, e a transformação de calibre constante do sistema linear (1.1.6) (compare com (1.3.76)):

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathcal{O}\mathcal{F}, \\ \mathcal{O} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de onde após a mudança $\lambda \rightarrow im\lambda$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}
\partial_{\pm}\Omega &= -\mathcal{V}_{\pm}\Omega, \\
\mathcal{V}_+ &= 2\partial_+\Phi + m\lambda(E^+ + E^-), \\
\mathcal{V}_- &= \frac{m}{\lambda}e^{-2\text{ad}\Phi}(E^+ + E^-), \\
\Phi &= \frac{1}{2}\varphi H.
\end{aligned} \tag{2.2.68}$$

Vamos, também, usar um outro sistema linear que se pode obter de (2.2.68) após a transformação de calibre $\Omega = e^{-\Phi}T$:

$$\begin{aligned}
\partial_{\pm}T &= -A_{\pm}T, \\
A_{\pm} &= \pm\partial_{\pm}\Phi + m\lambda^{\pm 1}e^{\pm\text{ad}\Phi}(E^+ + E^-).
\end{aligned} \tag{2.2.69}$$

Antes de prosseguir, introduziremos certas notações da teoria das álgebras e grupos de Lie. A cada álgebra de Lie clássica, \mathcal{G} , há associada uma álgebra dos laços $\tilde{\mathcal{G}}$, os elementos da qual são os polinômios de Laurent, $X(\lambda)$, com coeficientes que pertencem a \mathcal{G} . O comutador em $\tilde{\mathcal{G}}$ é o mesmo que em \mathcal{G} : $[X(\lambda), Y(\lambda)]$. É claro que $\tilde{\mathcal{G}} = C \otimes \mathcal{G}$. Além disto, para os geradores $X_n = \lambda^n X$, temos as regras de comutação:

$$\begin{aligned}
[X_n, Y_m] &= [X, Y]_{n+m} \\
n, m &\in Z.
\end{aligned} \tag{2.2.70}$$

A álgebra $\tilde{\mathcal{G}}$ possui extensão central, chamada álgebra afim, que, além dos geradores X_n ($X \in \mathcal{G}, n \in Z$), possui mais dois elementos: a derivada \hat{d} e a carga central \hat{c} . O elemento $\hat{d} = \lambda \frac{d}{d\lambda}$ conta o grau de homogeneidade com respeito ao parâmetro espectral λ :

$$[\hat{d}, X(\lambda)] = \lambda \frac{dX(\lambda)}{d\lambda},$$

$$[\hat{d}, X_n] = nX_n. \quad (2.2.71)$$

A carga central, \hat{c} , comuta com todos os geradores. Em vez dos comutadores (2.2.70), na álgebra de Lie $\hat{\mathcal{G}}$, temos

$$[X_n, Y_m] = [X, Y]_{n+m} + \frac{\hat{c}}{2} n \delta_{n+m,0} \text{tr}(XY). \quad (2.2.72)$$

Este comutador satisfaz à identidade de Jacobi, já que o termo proporcional à carga central é um 1-cociclo da álgebra dos laços $\tilde{\mathcal{G}}$. É claro que as conexões (1.1.3), (2.2.68) e (2.2.69) pertencem a álgebra dos laços $\tilde{\mathfrak{sl}}(2)$.

Consideremos a equação de curvatura nula da conexão (2.2.69) na álgebra afim $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$ com

$$\Phi = \frac{1}{2}\varphi H + \eta \hat{d} + \frac{1}{4}\zeta \hat{c}, \quad (2.2.73)$$

onde η e ζ são dois campos auxiliares.

Levando em conta (2.2.71) e (2.2.72), obtemos que a equação de curvatura nula da conexão (2.2.69) é equivalente ao sistema de equações :

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- \varphi &= m^2 e^{2\eta} (e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}), \\ \partial_+ \partial_- \eta &= 0, \\ \partial_+ \partial_- \zeta &= m^2 e^{2\eta} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}), \end{aligned} \quad (2.2.74)$$

das quais se sabe que possuem invariância conforme.

Notemos, também, que na dita gradação principal, a álgebra $\hat{\mathfrak{sl}}(2)$, excluindo-se \hat{c} e \hat{d} , tem como geradores os elementos $E_{2n+1}^\pm = \lambda^{2n+1} E^\pm$, $H_{2n} = \lambda^{2n} H$, $n \in \mathbb{Z}$. É fácil ver que estes elementos, juntos à carga central e à derivada, fecham a álgebra de Lie.

Uma representação de $\widehat{sl}(2)$ de peso maximal é definida através das equações

$$\begin{aligned} E_{2n+1}^{\pm}|\Lambda\rangle &= 0 \quad n = 0, 1, \dots, \\ H_{2n}|\Lambda\rangle &= 0 \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$H|\Lambda\rangle = \Lambda(H)|\Lambda\rangle \quad \widehat{d}|\Lambda\rangle = \Lambda(\widehat{d})|\Lambda\rangle \quad \widehat{c}|\Lambda\rangle = \Lambda(\widehat{c})|\Lambda\rangle, \quad (2.2.75)$$

onde $|\Lambda\rangle$ é o vetor de peso maximal. Lembremos, também, a decomposição de Cartan:

$$\widehat{sl}(2) = \widehat{\mathcal{G}} = \widehat{\mathcal{G}}_+ \oplus \widehat{\mathcal{G}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{G}}_-, \quad (2.2.76)$$

onde $\widehat{\mathcal{G}}_+$ ($\widehat{\mathcal{G}}_-$) é gerada dos elementos $E_{2n+1}^{\pm}, \geq 0$ ($E_{-2n-1}^{\pm}, \geq 0$) e $H_{2n}, n > 0$ ($H_{-2n}, n > 0$), e a subálgebra de Cartan, $\widehat{\mathcal{G}}_0$, tem três geradores: $H = H_0$, \widehat{c} e \widehat{d} .

Introduzimos, ainda, as subálgebras de Borel: $\mathcal{B}_{\pm} = \widehat{\mathcal{G}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{G}}_{\pm}$. Notemos que a decomposição de Cartan é válida para a álgebra dos laços $\widetilde{sl}(2)$; contudo, a subálgebra de Cartan é gerada a partir do elemento H .

Na álgebra $\widehat{sl}(2)$ existe um produto escalar não-degenerado e invariante:

$$\begin{aligned} (E_n^+, E_m^-) &= \delta_{n+m,0}, \\ \langle H_n, H_m \rangle &= 2\delta_{n+m,0}, \\ \langle \widehat{c}, \widehat{d} \rangle &= 2. \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

e todos os outros produtos são iguais a zero.

Nos trabalhos [28], foi demonstrado que os parênteses de Poisson canônicos são equivalentes ao parêntese da componente espacial da conexão de Lax (2.2.69):

$$\begin{aligned} \{A_x(x, \lambda) \otimes A_y(y, \zeta)\} &= -[\widehat{r}^{\pm}, A_x(x, \lambda) \otimes 1 + 1 \otimes A_y(y, \zeta)] \delta(x - y) \quad (2.2.78a) \\ \widehat{r}^{\pm} &= \pm \frac{1}{4} (H \otimes H + \widehat{c} \otimes \widehat{d} + \widehat{d} \otimes \widehat{c}) \pm \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} H_{\pm 2n} \otimes H_{\mp 2n} \pm \end{aligned}$$

$$\pm \sum_{n=0}^{\infty} \left(E_{\pm 2n \pm 1}^+ \otimes E_{\mp 2n \mp 1}^- + E_{\pm 2n \pm 1}^- \otimes E_{\mp 2n \mp 1}^+ \right) \quad (2.2.78b)$$

$$A_x = A_+ + A_-$$

As matrizes \hat{r}^{\pm} satisfazem a equação clássica de Yang–Baxter (2.1.41) assim como a relação (2.1.44) onde os operadores R^{\pm} (2.1.30) são introduzidos com a ajuda da forma invariante (2.2.77).

Suponhamos que $T(x, \lambda)$ seja uma solução normalizada do problema linear auxiliar (veja (2.2.69))

$$\begin{aligned} \partial_x T(x, \lambda) &= -A_x(x, \lambda)T(x, \lambda) \\ T(0, \lambda) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

De (2.2.78a), obtemos o parêntese [7, 28] :

$$\begin{aligned} \{T(x, \lambda) \otimes T(y, \zeta)\} = & \\ -\theta(x - y)T(x, \lambda) \otimes T(y, \zeta) & \left(r - T^{-1}(y, \lambda) \otimes T^{-1}(y, \zeta) \cdot r \cdot T(y, \lambda) \otimes T(y, \zeta) \right) \\ -\theta(y - x)T(x, \lambda) \otimes T(y, \zeta) & \left(r - T^{-1}(x, \lambda) \otimes T^{-1}(x, \zeta) \cdot r \cdot T(x, \lambda) \otimes T(x, \zeta) \right), \end{aligned} \quad (2.2.80)$$

onde θ é a função de Heviside e $r = \hat{r}^{\pm}$ (veja (2.2.78b)).

Notamos que, para $x = y$, o parêntese precedente coincide com o parêntese de Sklyanin (2.1.27). Para cada solução $T(x, \lambda)$ de (2.2.79), definimos os vetores

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \langle \Lambda | e^{-\Phi(x)} T(x) \\ \bar{\chi}(x) &= T^{-1}(x) e^{-\Phi(x)} | \Lambda \rangle, \end{aligned} \quad (2.2.81)$$

onde $|\Lambda\rangle$ é o vetor de peso maximal (2.2.75). Estes vetores satisfazem às relações de

troca semiclássicas:

$$\begin{aligned}
\{\chi(x) \otimes \chi(y)\} &= -\chi(x) \otimes \chi(y)(\theta(x-y)\hat{r}^+ + \theta(y-x)\hat{r}^-), \\
\{\bar{\chi}(x) \otimes \bar{\chi}(y)\} &= -(\theta(x-y)\hat{r}^- + \theta(y-x)\hat{r}^+)\bar{\chi}(x) \otimes \bar{\chi}(y), \\
\{\chi(x) \otimes \bar{\chi}(y)\} &= \chi(x) \otimes 1.\hat{r}^-.1 \otimes \bar{\chi}(y).
\end{aligned} \tag{2.2.82}$$

Como já foi notado em precedência, as matrizes \hat{r}^\pm (2.2.78b) definem uma decomposição da álgebra $\widehat{sl}(2) : X = X_+ - X_-$, $X_\pm = R^\pm X$ (veja (2.1.42) e (2.1.44)). De (2.2.78b) e (2.2.77), segue primeiro que $X_\pm \in \widehat{\mathcal{G}}_0 \oplus \widehat{\mathcal{G}}_\pm$, onde $\widehat{\mathcal{G}}_0$ e $\widehat{\mathcal{G}}_\pm$ foram introduzidas através da decomposição de Cartan (2.2.76). Além disto, da forma explícita (2.2.78b) das matrizes \hat{r}^\pm , fica claro que X_\pm tem componentes inversas na subálgebra de Cartan. Passando da álgebra de Lie $\widehat{sl}(2)$ ao grupo $\widehat{SL}(2)$, que é a extensão central do grupo dos laços $\widetilde{SL}(2)$, obtemos a fatorização $g = g_-^{-1}g_+$, onde $g_\pm \in e^{\widehat{\mathcal{G}}_0}e^{\widehat{\mathcal{G}}_\pm}$ e os elementos g_- e g_+ têm fatores inversos no subgrupo de Cartan $e^{\widehat{\mathcal{G}}_0}$. É claro que esta fatorização é uma consequência da decomposição de Gauss:

$$\widehat{G} = \widehat{SL}(2) = e^{\widehat{\mathcal{G}}_-}e^{\widehat{\mathcal{G}}_0}e^{\widehat{\mathcal{G}}_+}. \tag{2.2.83}$$

Levando em conta a forma explícita da conexão (2.2.69), observamos que as transformações de vestimento (2.2.63) e (2.2.64) (com $\mathcal{F}(x, t) = T(x, t)$) não mudam a forma da mesma. Disto decorre que, resolvendo o problema de fatorização (ou o problema de Riemann), efetuamos uma transformação $\Phi \longrightarrow \Phi^g$ em (2.2.69):

$$\Phi^g = \Phi + (X_-)_0 = \Phi - (X_+)_0, \tag{2.2.84}$$

onde $(X_\pm)_0$ designa os componentes dos elementos X_\pm na subálgebra de Cartan. Notemos que este resultado é válido para o problema de fatorização (2.2.64) em ambos grupos, $\widetilde{SL}(2)$ e $\widehat{SL}(2)$. A única diferença é que, quando se trabalha com $\widehat{SL}(2)$, é necessário levar em conta os elementos \hat{c} e \hat{d} . As matrizes r^\pm têm a mesma forma

(2.2.78b) na álgebra dos laços $\widehat{sl}(2)$, mas os termos proporcionais a $\widehat{c} \otimes \widehat{d}$ e $\widehat{d} \otimes \widehat{c}$ são excluídos.

Quando as transformações de vestimento são ligadas ao problema de fatorização (2.2.64) no grupo $\widehat{SL}(2)$, podemos, também, estudar a ação do grupo de vestimento sobre os vetores (2.2.81); lembrando (2.2.75) e (2.2.84), obtemos [19]

$$\begin{aligned} \chi^{g(x)} &= \langle \Lambda | e^{-\Phi^g} T^g(x) = \langle \Lambda | e^{-(\Phi+(X_-)_0)} g_-(x) T(x) g_-^{-1} \\ &= \langle \Lambda | e^{-\Phi} T(x, t) g_-^{-1} = \chi(x) \cdot g_-^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.85)$$

Da mesma maneira, obtemos

$$\bar{\chi}^g(x) = g_+ \cdot \chi(x); \quad (2.2.86)$$

usando estas expressões e a identidade

$$e^{-2\Lambda(\Phi)} = \chi(x) \cdot \bar{\chi}(x), \quad (2.2.87)$$

verificamos, mais uma vez, que a multiplicação no grupo de vestimento é a multiplicação do grupo dual a $SL(2)$. Além disto, observamos que os parênteses (2.2.82) são covariantes com respeito ao grupo de vestimento, quando neste introduzimos o parêntese de Semenov-Tian-Shansky (2.1.60). Assim, concluímos que a ação do grupo de vestimento é uma ação de Poisson-Lie (2.2.67), desde que as relações (2.1.60) sejam satisfeitas.

Ainda, observamos que podemos reduzir o problema de fatorização (2.2.64) no subgrupo de $\widehat{SL}(2)$ à álgebra de Lie que contém todos os geradores de $\widehat{sl}(2)$ sem a derivada \widehat{d} . Isto significa que consideramos soluções de (2.2.74) com $\eta = 0$. Neste subgrupo, a solução de (2.2.64) coincide com a solução do mesmo problema no grupo de laços, multiplicada por um fator que pertence ao centro de $\widehat{SL}(2)$. Por causa disto, para estes elementos do grupo de vestimento, os parênteses de Semenov-Tian-Shansky têm que ser satisfeitos também no grupo de laços. Notemos que este é o grupo de vestimento do

modelo sine-Gordon.

Existe mais uma razão que motiva a importância do estudo da simetria de vestimento. Os parênteses (2.2.82) são o limite quasiclássico das relações quânticas de troca. Assim como demonstramos que o grupo de vestimento deixa estas relações invariantes, graças ao parênteses de Semenov-Tian-Shansky, concluímos que o grupo de vestimento aparece como uma versão quasiclássica da simetria quântica de um modelo integrável.

Capítulo 3

A estrutura simplética no grupo de vestimento

Neste capítulo, estudaremos os elementos do grupo de vestimento que geram N -sólitons a partir do vácuo, $\varphi = 0$, no modelo de sine-Gordon.

Assim como as soluções solitônicas correspondem ao caso em que o coeficiente de reflexão do problema linear auxiliar é igual a zero, as equações de transformação espectral inversa reduzem-se a um sistema linear algébrico. Isto permite obter expressões explícitas para os elementos do grupo de vestimento que criam sólitons a partir do estado de vácuo.

Como foi explicado no Capítulo 1, uma solução com N -sólitons no modelo sine-Gordon depende de $2N$ parâmetros reais. Isto quer dizer que os N -sólitons comportam-se como um sistema da Mecânica Clássica que possui N graus de liberdade. Este sistema é uma generalização relativística do modelo de Calogero para N -corpos [25].

O conhecimento do parêntese no espaço de fases dos N -sólitons permite calcular o parêntese de Poisson do elemento do grupo de vestimento que gera esta solução a partir do vácuo. Desta maneira, pode-se verificar diretamente o parêntese de Semenov-Tian-Shansky (2.1.60) ou, equivalentemente, responder à seguinte pergunta: é a ação do grupo de vestimento uma ação de Poisson-Lie?.

3.1 Os elementos do grupo de vestimento que geram N -sólitons a partir do vácuo

Nesta seção, vamos construir explicitamente os elementos que, através de transformações de vestimento, criam soluções solitônicas do vácuo $\varphi = 0$ (1.1.1). Este problema já foi resolvido por Babelon e Bernard na ref. [25]. Aqui, em vez de usar o caminho destes autores, usaremos os resultados obtidos no Capítulo 2. A principal observação é que, quando não há reflexão (1.3.55), a solução do sistema linear (1.1.6) é conhecida explicitamente, como função dos parâmetros dos sólitons.

Neste capítulo, como na seção 2, do capítulo precedente, vamos trabalhar com a conexão (2.2.68), em vez da conexão (1.1.3). Convém, também, lembrar que os elementos da matriz $\chi(x^+, \lambda) = \|\chi^{(1)}(x^+, \lambda), \chi^{(2)}(x^+, \lambda)\|$, onde os vetores $\chi^{(i)}(x^+, \lambda)$ ($i = 1, 2$) que foram introduzidos através de (1.3.72), são polinômios de grau N no parâmetro espectral. Em particular, segue que:

$$\partial_+ \left(\chi(x^+, im\lambda) e^{\lambda x^+ H} \right) = \left(-\partial_+ \varphi(E^+ + E^-) - m\lambda H \right) \chi(x^+, im\lambda) e^{-m\lambda x^+ H}. \quad (3.1.1)$$

Além disto, levando em conta o comportamento assintótico (1.1.17a), (1.1.17b), obtemos

$$\chi(x^+, im\lambda) e^{-mx^+ \lambda H} \mapsto \left\| \prod_j (\lambda \pm \lambda_j) e^{-mx^+ \lambda} e_1 \quad \prod_j (\lambda \mp \lambda_j) e^{mx^+ \lambda} e_2 \right\|. \quad (3.1.2)$$

Para obter a dependência na variável x^- , voltamos à equação (1.2.52), de onde segue a equação :

$$\begin{aligned} \partial_- \chi(x^+, im\lambda) &= -\frac{m}{\lambda} \left(\cosh 2\varphi H + \sinh 2\varphi (E^+ - E^-) \right) \chi(x^+, im\lambda) + \\ &+ \chi(x^+, im\lambda) \frac{m}{\lambda} H. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Combinando (3.1.1) com (3.1.3), concluímos que a matriz

$$\Omega(x^+, x^-, \lambda) = \frac{1}{(im)^N} \mathcal{O} \chi(x^+, im\lambda) e^{-m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)H} \quad (3.1.4)$$

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

é uma solução do sistema (2.2.68). Também de (1.3.77), obtemos que

$$\Omega^{(1)}(x^+, x^-, -\lambda) = (-1)^N H \Omega^{(2)}(x^+, x^-, \lambda), \quad (3.1.5)$$

onde $\Omega^{(i)}$ são as colunas da matriz Ω . Para determinar esta matriz, usamos (1.3.74).

Desta equação e da evolução em x^- dos coeficientes de transição do espectro discreto, obtemos para as colunas da matriz Ω (1.3.75):

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)}(x^+, x^-, -\mu_n) &= (-1)^N \beta_n H \Omega^{(1)}(x^+, x^-, \mu_n), \\ \Omega^{(2)}(x^+, x^-, -\mu_n) &= (-1)^N \beta_n^{-1} H \Omega^{(2)}(x^+, x^-, \mu_n), \\ \lambda_n &= im\mu_n \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ são os pontos do espectro discreto.

Notemos que estas equações são suficientes para determinar a matriz Ω . Na verdade, levando em conta a definição desta matriz (3.1.4), observamos, em vista das expansões (1.3.73), que, por exemplo, a primeira coluna $\Omega^{(1)}$ pode ser escrita da maneira seguinte:

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^+) \\ \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^-) \end{pmatrix} e^{-m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)}, \quad (3.1.7)$$

$$\epsilon_i^\pm = \epsilon_i^\pm(x^+, x^-).$$

Para obter uma expressão similar para a segunda coluna, pode-se usar a relação (3.1.5).

Combinando (3.1.6) com (3.1.7), chegamos ao sistema

$$\prod_{l=1}^N \frac{\mu_n - \epsilon_l^\pm}{\mu_n + \epsilon_l^\pm} = \pm \beta_n e^{-2m \left(\mu_n x^+ + \frac{x^-}{\mu_n} \right)} \quad (3.1.8)$$

$$n = 1, \dots, N .$$

Para obter a dependência do campo φ nas variáveis ϵ_l^\pm , usaremos (1.1.30) e (3.1.4), obtendo

$$e^{-\varphi} = (-1)^N \prod_j \frac{\epsilon_j^+}{\mu_j} = (-1)^N \prod_j \frac{\mu_j}{\epsilon_j^-} . \quad (3.1.9)$$

Observamos, também, que (3.1.8) é equivalente a

$$\sum_{l=1}^N \int_{\epsilon_l^+(0,0)}^{\epsilon_l^+(x^+,x^-)} \frac{d\lambda}{\lambda^2 - \mu_n^2} = -mx^+ - \frac{mx^-}{\mu_n^2}, \quad (3.1.10)$$

de onde chegamos às equações :

$$\sum_{l=1}^N \int_{\epsilon_l^+(0)}^{\epsilon_l^+(x)} \frac{\lambda^{2k}}{\prod_{j=1}^N (l^2 - \mu_j^2)} d\lambda = -mx^+ \delta_{k,0} + (-1)^N \frac{mx^-}{\prod_j \mu_j^2} \quad (3.1.11)$$

$$\epsilon_l^+(x) = \epsilon_l^+(x^+, x^-), \quad \epsilon_l^+(0) = \epsilon_l^+(0, 0), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 ,$$

que apresentam o problema de inversão de Jacobi na superfície $s^2 = \prod_{j=1}^N (\lambda^2 - \mu_j^2)^2$ [29]. Esta superfície é uma superfície de Riemann degenerada com gênero igual a $(2N-1)$.

É claro que a matriz (3.1.4), como uma solução do sistema linear (2.2.68), tem determinante que não depende de x^+ e x^- . Com (3.1.2) e (3.1.4), obtemos

$$\det \Omega(x^+, x^-, \lambda) = -2 \prod_{j=1}^N (\lambda_j^2 - \mu_j^2). \quad (3.1.12)$$

Lembrando (2.2.69), observamos que a matriz

$$\mathcal{T}(x^+, x^-, \lambda) = e^\Phi \Omega(x^+, x^-, \lambda) \quad (3.1.13)$$

é solução deste sistema. É claro que o determinante de \mathcal{T} é igual ao determinante de Ω (3.1.4).

Denotaremos por Ω_0 a matriz (3.1.4) associada ao vácuo $\varphi = 0$:

$$\Omega_0(x^+, x^-, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{-m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)} & e^{m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)} \\ e^{-m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)} & -e^{m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right)} \end{pmatrix}, \quad (3.1.14)$$

de onde obtemos a matriz normalizada de transporte que corresponde ao estado fundamental:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(x^+, x^-, \lambda) &= \Omega_0(x^+, x^-, \lambda) \cdot \Omega_0^{-1}(0, 0, \lambda) = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right) & -\sinh m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right) \\ -\sinh m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right) & \cosh m\left(\lambda x^+ + \frac{x^-}{\lambda}\right) \end{pmatrix} = e^{-m(\mathcal{E}_+ x^+ + \mathcal{E}_- x^-)} \\ \mathcal{E}_\pm &= \lambda^\pm (E^+ + E^-). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Da mesma maneira, obtemos a matriz normalizada de transporte, correspondente a N -sólitons:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x^+, x^-, \lambda) &= \mathcal{T}(x^+, x^-, \lambda) \cdot \mathcal{T}^{-1}(0, 0, \lambda) = \\ &= \mathcal{T}(x^+, x^-, \lambda) \mathcal{T}_0^{-1}(x^+, x^-, \lambda) \cdot \left(\mathcal{T}_0(x^+, x^-, \lambda) \mathcal{T}_0^{-1}(0, 0, \lambda) \right) \cdot \\ &= \mathcal{T}_0(0, 0, \lambda) \mathcal{T}^{-1}(0, 0, \lambda). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Isto quer dizer que o elemento

$$\begin{aligned} f(x^+, x^-, \lambda) &= \mathcal{T}(x^+, x^-, \lambda) \mathcal{T}_0^{-1}(x^+, x^-, \lambda) = \\ &= \frac{1}{2} e^{\Phi(x)} \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^+) + \prod_{i=1}^N (\lambda - \epsilon_i^+) & \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^+) - \prod_{i=1}^N (\lambda - \epsilon_i^+) \\ \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^-) - \prod_{i=1}^N (\lambda - \epsilon_i^-) & \prod_{i=1}^N (\lambda + \epsilon_i^-) + \prod_{i=1}^N (\lambda - \epsilon_i^-) \end{pmatrix}, \\ \det f &= \prod_{j=1}^N (\lambda^2 - \mu_j^2), \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

gera uma transformação de calibre que, aplicada à conexão de Lax associada ao vácuo $A_{\pm} = m\mathcal{E}_{\pm}$, produz a conexão de Lax (2.2.69) correspondente à solução (3.1.8)–(3.1.9) com N -sólitons.

Lembrando (2.2.63), concluímos que (3.1.16) e (3.1.17) apresentam uma transformação de vestimento que cria N sólitons a partir do vácuo.

Notamos, também, que o elemento $f(x^+, x^-, \lambda)$ não é univocamente determinado pela equação

$$T(x^+, x^-, \lambda) = f(x^+, x^-, \lambda)T_0(x^+, x^-, \lambda)f^{-1}(0, 0, \lambda). \quad (3.1.18)$$

A razão disto é que as matrizes

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ b(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.1.19)$$

comutam com a matriz T_0 . Deste fato, segue que, se $f(x^+, x^-, \lambda)$ é uma solução de (3.1.18), a matriz $f(x^+, x^-, \lambda)S(\lambda)$, onde $S(\lambda)$ (3.1.19) não depende de x^+ e x^- , é também solução da mesma equação. Introduzimos o elemento:

$$g(x^+, x^-, \lambda) = f(x^+, x^-, \lambda)S(\lambda) \quad (3.1.20)$$

que, além de (3.1.18), satisfaz às seguintes condições: primeiro, $g(x^+, x^-, \lambda)$ pertence ao grupo de laços $\widetilde{SL}(2)$, o que quer dizer que, em vista de (3.1.17),

$$\det S(\lambda) = a^2(\lambda) - b^2(\lambda) = \frac{1}{\prod_{j=1}^N (\lambda^2 - \mu_j^2)}. \quad (3.1.21)$$

Segundo, os elementos matriciais de (3.1.20) são funções meromórficas do parâmetro λ . Terceiro, devido ao fato de que estamos numa gradação principal, os elementos diagonais de $g(x^+, x^-, \lambda)$ são funções pares de λ , enquanto os elementos fora da diagonal são

ímpares:

$$a(\lambda) = a(-\lambda) \quad , \quad b(\lambda) = -b(-\lambda). \quad (3.1.22)$$

Escolhemos a solução

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\prod_l (\lambda - \mu_l)} + \frac{1}{\prod_l (\lambda + \mu_l)} \right), \\ b(\lambda) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\prod_l (\lambda - \mu_l)} - \frac{1}{\prod_l (\lambda + \mu_l)} \right). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Destas expressões, e de (3.1.18) e (3.1.20), obtemos o elemento

$$g(x^+, x^-, \lambda) = \frac{1}{2} e^{\Phi(x)} \begin{pmatrix} \prod_{l=1}^N \frac{\lambda + \epsilon_l^+}{\lambda - \mu_l} + \prod_{l=1}^N \frac{\lambda - \epsilon_l^+}{\lambda + \mu_l} & \prod_{l=1}^N \frac{\lambda + \epsilon_l^+}{\lambda - \mu_l} - \prod_{l=1}^N \frac{\lambda - \epsilon_l^+}{\lambda + \mu_l} \\ \prod_{l=1}^N \frac{\lambda + \epsilon_l^-}{\lambda - \mu_l} - \prod_{l=1}^N \frac{\lambda - \epsilon_l^-}{\lambda + \mu_l} & \prod_{l=1}^N \frac{\lambda + \epsilon_l^-}{\lambda - \mu_l} + \prod_{l=1}^N \frac{\lambda - \epsilon_l^-}{\lambda + \mu_l} \end{pmatrix}. \quad (3.1.24)$$

Denotaremos por g_+ e g_- as expansões do elemento acima em torno dos pontos $\lambda = 0$ e $\lambda = \infty$. De (3.1.9), obtemos

$$\begin{aligned} g_-(x^+, x^-, \lambda) &\longrightarrow e^{\Phi}, & \text{quando } \lambda \rightarrow \infty \\ g_+(x^+, x^-, \lambda) &\longrightarrow e^{-\Phi}, & \text{quando } \lambda \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Portanto, concluímos que este elemento está ligado ao problema de fatorização (2.2.64).

De (3.1.25), segue que a correspondente decomposição na álgebra de laços $\widetilde{SL}(2)$ é definida através das matrizes r^\pm (2.2.78b) sem termos proporcionais a $\widehat{c} \otimes \widehat{d}$ e $\widehat{d} \otimes \widehat{c}$. Consideramos o elemento (3.1.24) para o caso particular quando o número de sólitons é $N = 1$. Lembrando (3.1.9), da expressão geral (3.1.24), obtemos:

$$\begin{aligned} g &= e^{\varphi X_\mu^{(0)}(\lambda)} \\ X_\mu^{(0)}(\lambda) &= \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\lambda^2 - \mu^2)} H + \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} (E^+ - E^-), \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

que coincide com o resultado de Babelon e Bernard [25].

3.2 O espaço de fases dos N sólitons e o parêntese

$$\{g \otimes g\}$$

Esta seção é dedicada ao cálculo do parêntese de Poisson $\{g \otimes g\}$, onde g é uma transformação de calibre que gera um N -sóliton a partir do vácuo. Uma solução N -solitônica no modelo sine-Gordon depende de $2N$ variáveis, como se pode ver de (1.3.55) e (1.3.70). Mais precisamente: os pontos do espectro discreto são ligados às velocidades dos sólitons, e as variáveis c_j (1.1.34) descrevem (veja (1.3.78)) os centros de inercia dos sólitons. É claro que o sine-Gordon, considerado como um sistema mecânico, possui um número infinito de graus de liberdade; mas, quando só N -sólitons estão presentes, o espaço de fases tem dimensão finita, igual a $2N$.

Iniciamos com uma reparametrização das soluções solitônicas gerais (1.3.70). De (1.3.71), obtemos

$$e^{-\varphi} = (-1)^N \frac{\det(1 - W)}{\det(1 + W)} \quad (3.2.27a)$$

$$W_{ij} = 2 \frac{\mu_j \beta_j}{\mu_i + \mu_j} \prod_{l \neq j} \frac{\mu_j + \mu_l}{\mu_j - \mu_l} e^{-m \left((\mu_i + \mu_j) x^+ + \frac{2x^-}{\mu_j} \right)}, \quad (3.2.27b)$$

onde, para obter a última expressão acima, usamos (1.1.27), com $\beta(\mu) = 0$, e (1.1.34):

$$c_j = 2\lambda_j \beta_j \prod_{l \neq j} \frac{\lambda_j + \lambda_l}{\lambda_j - \lambda_l} = 2im\mu_j \beta_j \prod_{l \neq j} \frac{\mu_j + \mu_l}{\mu_j - \mu_l}$$

$$\lambda_j = im\mu_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.2.28)$$

Com auxílio de (1.3.67), podemos inverter a matriz W . O resultado é o seguinte:

$$W_{ij}^{-1} = 2 \frac{\mu_j}{\beta_i(\mu_i + \mu_j)} \prod_{l \neq j} \frac{\mu_j + \mu_l}{\mu_j - \mu_l} e^{m \left((\mu_i + \mu_j) x^+ + \frac{2x^-}{\mu_j} \right)}. \quad (3.2.29)$$

Isto quer dizer que temos a expressão seguinte para o campo de sine-Gordon :

$$e^{-\varphi} = \frac{\det(1 - W^{-1})}{\det(1 + W)}. \quad (3.2.30)$$

Desta equação, e usando a notação

$$a_i = -\frac{1}{\beta_i} \prod_{l \neq i} \frac{\mu_i + \mu_l}{\mu_i - \mu_l}, \quad (3.2.31)$$

obtemos a fórmula "canônica" [21]

$$e^{-\varphi} = \frac{\det(1 + V)}{\det(1 - V)}, \quad (3.2.32a)$$

$$V_{ij} = 2 \frac{\sqrt{\mu_i \mu_j}}{\mu_i + \mu_j} \sqrt{X_i X_j}, \quad (3.2.32b)$$

$$X_i = a_i e^{2m \left(\mu_i x^+ + \frac{x^-}{\mu_i} \right)}. \quad (3.2.32c)$$

Como foi notado anteriormente, um sistema solitônico possui número finito de graus de liberdade. Isto significa que temos o mapeamento de inclusão

$$M_N \mapsto M, \quad (3.2.33)$$

onde M_N é o espaço de fases dos N -sólitons e M é o espaço de fases do modelo sine-Gordon. Denotamos por Ω a forma simplética canônica em M :

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta\pi(x) \wedge \delta\varphi(x) \\ \pi(x) &= \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

onde δ é o diferencial no espaço de fases, M . É claro que se pode introduzir uma estrutura simplética, ω_N , no espaço de fases, M_N , ligada aos N sólitons através do

”pullback” da forma canônica (3.2.34) com respeito à inclusão (3.2.33):

$$\omega_N = i_N^* \Omega = \sum_{i,j=1}^{2N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \pi(x)}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \zeta^j} dx \delta \zeta^i \wedge \delta \zeta^j, \quad (3.2.35)$$

onde $\zeta^1, \dots, \zeta^{2N}$ são variáveis que parametrizam os N -sólitons. Por exemplo, a_i e μ_i , $i = 1, \dots, N$ (3.2.32a)-(3.2.32c), podem ser escolhidos como parâmetros.

No trabalho [21], foi demonstrado que

$$\omega_N = \sum_{i=1}^N \frac{\delta a_i}{a_i} \wedge \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} + \sum_{i < j} 4 \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} \frac{\delta \mu_i}{\mu_i} \wedge \frac{\delta \mu_j}{\mu_j}, \quad (3.2.36)$$

o que implica nos parênteses

$$\begin{aligned} \{\mu_i, \mu_j\} &= 0, \\ \{a_i, \mu_j\} &= a_i \mu_j \delta_{ij}, \\ \{a_i, a_j\} &= -4 \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2 - \mu_j^2} a_i a_j. \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Usando estes parênteses e a relação (3.2.31), obtemos

$$\begin{aligned} \{\mu_i, \beta_j\} &= \mu_i \beta_j \delta_{ij}, \\ \{\beta_i, \beta_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Dos parênteses acima, concluímos que os parâmetros (μ_i, β_i) apresentam um conjunto de variáveis de tipo ação-ângulo. Na verdade, $P_i = \ln a_i$ e $Q_i = \ln \beta_i$ são variáveis canônicas. Além disto, as variáveis μ_i são integrais de movimento e a dependência do parâmetro de evolução (x^- ou t) é linear, como se pode ver de (1.2.52) e (1.3.92).

Como o nosso objetivo é calcular o parêntese de Poisson $\{g \otimes g\}$ do elemento (3.1.24) para $x^+ = x^- = 0$, seria útil, fazer uma troca de variáveis e trabalhar com (μ_i, ϵ_i^+) ,

onde, daqui para frente, $\epsilon_i^\pm = \epsilon_i^\pm(0,0)$ (veja (3.1.7)). Graças a (3.1.8), temos as relações

$$\prod_{l=1}^N \frac{\mu_l - \epsilon_l^\pm}{\mu_l + \epsilon_l^\pm} = \pm \beta_i. \quad (3.2.39)$$

Substituindo as equações acima no primeiro dos parênteses (3.2.38), chegamos aos sistemas

$$\sum_{k=1}^N A_{ik}^\pm \{\epsilon_k^\pm, \mu_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad (3.2.40a)$$

$$A_{ij}^\pm = \frac{1}{\mu_i^2 - (\epsilon_j^\pm)^2}. \quad (3.2.40b)$$

Estas equações podem ser resolvidas explicitamente, usando a identidade geral (1.3.66), de onde obtemos

$$\begin{aligned} M_{ij}^{-1} &= \frac{1}{y_i + x_j} \frac{\prod_a (x_a + y_i)(x_j + y_a)}{\prod_{a \neq j} (x_a - x_j) \prod_{a \neq i} (y_a - y_i)}, \\ M_{ij} &= \frac{1}{x_i + y_j}. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Usando a expressão acima para $x_i = \mu_i^2$, $y_i = -(\epsilon_i^\pm)^2$, de (3.2.40a) e (3.2.40b), obtemos

$$\{\epsilon_i^\pm, \mu_j\} = \frac{1}{2} \frac{\prod_a (\mu_a^2 - (\epsilon_i^\pm)^2) ((\epsilon_a^\pm)^2 - \mu_j^2)}{((\epsilon_i^\pm)^2 - \mu_j^2) \prod_{a \neq i} ((\epsilon_a^\pm)^2 - (\epsilon_i^\pm)^2) \prod_{a \neq j} (\mu_a^2 - \mu_j^2)}. \quad (3.2.42)$$

Combinando (3.2.38), (3.2.39) e (3.2.40a), chega-se a

$$\sum_{l=1}^N A_{il}^\pm \{\epsilon_l^\pm, \beta_j\} = \beta_j \delta_{ij} \sum_{l=1}^N A_{il}^\pm \epsilon_l^\pm. \quad (3.2.43)$$

Desta equação, aplicando mais uma vez (3.2.39) e (3.2.40a), conclui-se que

$$\{\epsilon_i^+, \epsilon_j^+\} = \{\epsilon_i^-, \epsilon_j^-\} = 0 \quad (3.2.44)$$

Como conseqüência de (3.2.39), as variáveis ϵ_i^- são dependentes de μ_i e ϵ_i^+ . Mais

precisamente, com auxílio de (3.2.39), obtemos as derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_i^-}{\partial \epsilon_j^+} &= \sum_{k=1}^N (A^-)^{-1}_{ik} A_{kj}^+ \\ &= \prod_{a \neq i} \frac{(\epsilon_a^-)^2 - (\epsilon_j^+)^2}{(\epsilon_a^-)^2 - (\epsilon_i^-)^2} \cdot \prod_a \frac{\mu_a^2 - (\epsilon_i^-)^2}{\mu_a^2 - (\epsilon_j^+)^2}, \end{aligned} \quad (3.2.45a)$$

$$\frac{\partial \epsilon_i^-}{\partial \mu_j} = \frac{(A^-)^{-1}_{ij}}{\mu_j} \cdot \sum_l \left(\frac{\epsilon_l^-}{\mu_j^2 - (\epsilon_l^-)^2} - \frac{\epsilon_l^+}{\mu_j^2 - (\epsilon_l^+)^2} \right). \quad (3.2.45b)$$

A partir de (3.2.44), obtemos a expressão geral (visto que $\{\epsilon_i^+, \epsilon_j^+\} = 0$):

$$\begin{aligned} \{g(\lambda) \otimes g(\zeta)\} \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) &= \\ \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial g(\lambda)}{\partial \epsilon_i^+} g^{-1}(\lambda) \otimes \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \mu_j} g^{-1}(\zeta) - \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \mu_j} g^{-1}(\lambda) \otimes \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \epsilon_i^+} g^{-1}(\zeta) \right) \{\epsilon_i^+, \mu_j\} \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Em vista da expressão acima, é necessário calcular as derivadas:

$$\begin{aligned} E_i(\lambda) &= \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \epsilon_i^+} \cdot g(\lambda)^{-1}, \\ M_i(\lambda) &= \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \mu_i} \cdot g(\lambda)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Usando a forma do elemento do grupo de vestimento (3.1.24), após certos cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \epsilon_i^+} \cdot g(\lambda)^{-1} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\epsilon_i^+} + \frac{1}{\lambda + \epsilon_i^+} \prod_l \frac{(\lambda + \epsilon_l^+)(\lambda - \epsilon_l^-)}{\lambda^2 - \mu_l^2} + (\lambda \rightarrow -\lambda) \right) \cdot H + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda^2 - (\epsilon_i^+)^2} \prod_l \frac{\lambda^2 - (\epsilon_l^+)^2}{\lambda^2 - \mu_l^2} e^\varphi E^+ + \\ &+ \sum_k \frac{\lambda}{\lambda^2 - (\epsilon_k^-)^2} \frac{\partial \epsilon_k^-}{\partial \epsilon_i^+} \prod_l \frac{\lambda^2 - (\epsilon_l^-)^2}{\lambda^2 - \mu_l^2} e^{-\varphi} E^- \end{aligned} \quad (3.2.48a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \mu_i} \cdot g(\lambda)^{-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\lambda - \mu_i} \prod_l \frac{(\lambda + \epsilon_l^+)(\lambda - \epsilon_l^-)}{\lambda^2 - \mu_l^2} + (\lambda \rightarrow -\lambda) \right) \cdot H + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu_i^2} \prod_l \frac{\lambda^2 - (\epsilon_l^+)^2}{\lambda^2 - \mu_l^2} \cdot e^\varphi E^+ \\ &+ \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu_i^2} + \sum_k \frac{\lambda}{\lambda^2 - (\epsilon_k^-)^2} \frac{\partial \epsilon_k^-}{\partial \mu_i} \right) \cdot \prod_l \frac{\lambda^2 - (\epsilon_l^-)^2}{\lambda^2 - \mu_l^2} e^{-\varphi} E^- \end{aligned} \quad (3.2.48b)$$

Para escrever na maneira mais compacta os parênteses (3.2.46), usaremos as notações :

$$\begin{aligned}
P_0^{(j)}(\lambda) &= (\lambda^2 - \mu_j^2) \prod_l (\lambda^2 - \mu_l^2) + \mu_j \left((\lambda + \mu_j) \prod_l (\lambda + \epsilon_l^+) (\lambda + \epsilon_l^-) + (\lambda \leftrightarrow -\lambda) \right) \\
P_+(\lambda) &= \prod_l (\lambda^2 - (\epsilon_l^+)^2) \\
P_-^{(j)}(\lambda) &= \prod_l (\lambda^2 - (\epsilon_l^-)^2) \left(1 + (\lambda^2 - \mu_j^2) \sum_k \frac{1}{\lambda^2 - (\epsilon_k^-)^2} \frac{\partial \epsilon_k^-}{\partial \mu_j} \right), \\
j &= 1 \dots N
\end{aligned} \tag{3.2.49}$$

que satisfazem às equações

$$\begin{aligned}
P_0^{(j)}(\mu_k) &= 2\mu_j \mu_k \prod_l (\mu_k + \epsilon_l^+) (\mu_k + \epsilon_l^-), \\
P_-^{(j)}(\mu_k) &= \prod_l (\mu_k^2 - (\epsilon_l^-)^2).
\end{aligned} \tag{3.2.50}$$

A primeira destas é uma consequência direta da definição, enquanto para obter a segunda, foram usadas as identidades (3.2.45a) e (3.2.45b).

Aplicando mais uma vez (3.2.39), (3.2.45a) e (3.2.45b), chegamos à expressão

$$\begin{aligned}
\sum_i \{ \epsilon_i^+, \mu_j \} \frac{\partial g(\lambda)}{\partial \epsilon_i^+} g(\lambda)^{-1} &= \frac{1}{2(\lambda^2 - \mu_j^2) \prod_{l \neq j} (\mu_j^2 - \mu_l^2)} \times \\
&\times \left(\frac{(\lambda^2 + \mu_j^2) P_0^{(j)}(\mu_j)}{4\mu_j^3} H + \lambda P_+(\mu_j) e^\varphi E^+ + \lambda P_-^{(j)}(\mu_j) e^{-\varphi} E^- \right)
\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

Substituindo o resultado acima na expressão geral (3.2.46), e levando em conta (3.2.47) e (3.2.48b), obtemos a expressão final seguinte:

$$\begin{aligned}
\{g(\lambda) \otimes, g(\zeta)\} \cdot g(\lambda)^{-1} \otimes g(\zeta)^{-1} &= \sum_j \frac{1}{2(\lambda^2 - \mu_j^2)(\zeta^2 - \mu_j^2) \prod_{l \neq j} (\mu_j^2 - \mu_l^2)} \times \\
&\times \left\{ \frac{P_0^{(j)}(\mu_j)}{8\mu_j^3} \left(\frac{\lambda^2 + \mu_j^2}{\prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} P_0^{(j)}(\zeta) - (\lambda \leftrightarrow -\zeta) \right) H \otimes H + \right. \\
&+ \lambda \zeta P_+(\mu_j) e^{2\varphi} \left(\frac{P_+(\zeta)}{\prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} - (\lambda \leftrightarrow \zeta) \right) E^+ \otimes E^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \zeta P_-^{(j)}(\mu_j) e^{-2\varphi} \left(\frac{P_-^{(j)}(\zeta)}{\prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} - (\lambda \leftrightarrow \zeta) \right) E^- \otimes E^- + \\
& + \frac{e^\varphi}{2} \left(\zeta \left(\frac{(\lambda^2 + \mu_j^2) P_0^{(j)}(\mu_j) P_+(\zeta)}{2\mu_j^3 \prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} - \frac{P_0^{(j)}(\lambda) P_+(\mu_j)}{\prod_l (\lambda^2 - \mu_l^2)} \right) H \otimes E^+ - (\lambda \leftrightarrow \zeta) E^+ \otimes H \right) + \\
& + \frac{e^{-\varphi}}{2} \left(\zeta \left(\frac{(\lambda^2 + \mu_j^2) P_0^{(j)}(\mu_j) P_-^{(j)}(\zeta)}{2\mu_j^3 \prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} - \frac{P_0^{(j)}(\lambda) P_-^{(j)}(\mu_j)}{\prod_l (\lambda^2 - \mu_l^2)} \right) H \otimes E^- - (\lambda \leftrightarrow \zeta) E^- \otimes H \right) + \\
& + \lambda \zeta \left(\left(\frac{P_+(\mu_j) P_-^{(j)}(\zeta)}{\prod_l (\zeta^2 - \mu_l^2)} - \frac{P_+(\lambda) P_-^{(j)}(\mu_j)}{\prod_l (\lambda^2 - \mu_l^2)} \right) E^+ \otimes E^- + (\lambda \leftrightarrow \zeta) E^- \otimes E^+ \right). \quad (3.2.52)
\end{aligned}$$

Uma simples inspeção mostra que, em geral, os parênteses de Semenov–Tian–Shansky (2.1.60) não são satisfeitos no caso geral de N -sólitos.

Daqui em diante, vamos analisar apenas o caso de uma solução monosolitônica. Neste caso, introduzimos a base

$$\begin{aligned}
X_\mu^0(\lambda) &= \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \left((\lambda^2 + \mu^2) H + 2\lambda\mu(E^+ - E^-) \right), \\
X_\mu^\pm(\lambda) &= \pm \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \left(H + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\pm 1} E^+ - \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\pm 1} E^- \right), \quad (3.2.53)
\end{aligned}$$

na qual a ação adjunta do elemento (3.1.24) para $N = 1$ (veja também (3.1.26)) é diagonal:

$$\begin{aligned}
g(\lambda) X_\mu^0(\lambda) g^{-1}(\lambda) &= X_\mu^0(\lambda), \\
g(\lambda) X_\mu^\pm(\lambda) g^{-1}(\lambda) &= e^{\pm\varphi} X_\mu^\pm(\lambda). \quad (3.2.54)
\end{aligned}$$

Neste caso, quando se gera uma solução monosolitônica através de uma transformação de vestimento, temos o parêntese

$$\begin{aligned}
& \{g(\lambda) \otimes g(\zeta)\} \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) = \\
& - \frac{1}{2} \{\ln \epsilon^+, \mu\} \frac{\lambda}{\mu(\lambda^2 - \mu^2)} \left((\mu + \epsilon^-) X_\mu^+(\lambda) + (\mu + \epsilon^+) X_\mu^-(\lambda) \right) \otimes X_\mu^0(\zeta) + \\
& + \frac{1}{2} \{\ln \epsilon^+, \mu\} \frac{\zeta}{\mu(\zeta^2 - \mu^2)} X_\mu^0(\lambda) \otimes \left((\mu + \epsilon^-) X_\mu^+(\zeta) + (\mu + \epsilon^+) X_\mu^-(\zeta) \right). \quad (3.2.55)
\end{aligned}$$

Na próxima seção, vamos comentar este resultado monosolitônico sob dois pontos-de-vista: primeiro, determinar $\{\epsilon^+, \mu\}$ para satisfazer o parêntese de Semenov–Tian–Shansky; e segundo, usar a teoria dos sistemas vinculados para ligar (3.2.55) a (2.1.60), no caso em que $g(\lambda)$ é o elemento que gera uma solução monosolitônica do vácuo através da transformação de vestimento.

3.3 A relação entre o parêntese $\{g \otimes g\}$ do caso monosolitônico e o parêntese de Semenov–Tian–Shansky

No Capítulo 2, argumentamos que o parêntese de Semenov–Tian–Shansky (2.1.60) é introduzido como uma estrutura simplética no grupo dual G^* de um grupo de Poisson–Lie G . No mesmo capítulo, observamos que, no caso do modelo $sl(2)$ CAT (2.2.74), para garantir que a ação do grupo de vestimento seja uma ação de Poisson–Lie (veja (2.2.67)), é suficiente impor os parênteses de Semenov–Tian–Shansky sobre o grupo de vestimento. Demonstramos, também, que, se em vez de trabalhar com o modelo definido através de (2.2.74), passamos ao modelo de sine–Gordon, o parêntese de Semenov–Tian–Shansky reduz-se ao parêntese de Sklyanin (2.1.27) no grupo dos laços $\widetilde{SL}(2)$ e com a matriz r clássica (2.2.78b), sem termos $\hat{c} \otimes \hat{d}$ e $\hat{d} \otimes \hat{c}$.

Apesar de conseguir descrever o parêntese de Poisson no espaço de fases de N -sólitons (3.2.42), (3.2.44), (3.2.45a) e (3.2.45b), o resultado (3.2.52) não coincide, como já foi notado, com o parêntese de Sklyanin (2.1.27). À primeira vista, isto deveria significar que a ação do grupo de vestimento *não é uma ação de Poisson–Lie*. Nesta seção, vamos demonstrar que, apesar do resultado negativo obtido antes, podemos usar o fato de que o elemento (3.1.26) que gera soluções monosolitônicas do vácuo tem forma especial. Isto quer dizer que, para obtê-lo, temos que impor vínculos sobre o grupo de vestimento. Usando esta observação, tentaremos obter o parêntese (3.2.55), do parêntese de Sklyanin com auxílio do formalismo dos sistemas vinculados.

Como já foi notado no final da seção 2, tentaremos, antes de tudo, conciliar (3.2.55) com o parêntese de Sklyanin (2.1.27). Como primeiro passo, escreveremos a matriz r clássica:

$$r = -\frac{1}{4} \frac{\lambda^2 + \zeta^2}{\lambda^2 - \zeta^2} H \otimes H - \frac{\lambda\zeta}{\lambda^2 - \zeta^2} (E^+ \otimes E^- + E^- \otimes E^+), \quad (3.3.56)$$

que é a versão somada de (2.2.78b), após se eliminar os termos proporcionais a $\hat{c} \otimes \hat{d}$ e $\hat{d} \otimes \hat{c}$.

Em particular, fazendo uma expansão na região do plano complexo $|\lambda| > |\zeta|$, obtemos a matriz r^- [28], enquanto que se expandindo para $|\lambda| < |\zeta|$, chega-se a r^+ .

Para testar a identidade

$$\begin{aligned} \{g(\lambda) \otimes g(\zeta)\} \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) &= -[r(\lambda, \zeta), g(\lambda) \otimes g(\zeta)] \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) \\ &= -r(\lambda, \zeta) + g(\lambda) \otimes g(\zeta) \cdot r(\lambda, \zeta) \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta), \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

usaremos a base (3.2.53), na qual a ação adjunta do elemento (3.1.26) é diagonal.

Na base (3.2.53), temos as identidades:

$$\begin{aligned} \text{tr}(X_\mu^0(\lambda) \cdot X_\mu^0(\lambda)) &= \frac{(\lambda^2 + \mu^2)^2}{(\lambda^2 - \mu^2)^2} \text{tr} H \cdot H + 4 \frac{\lambda^2 \mu^2}{(\lambda^2 - \mu^2)^2} \text{tr}(E^+ - E^-)(E^+ - E^-), \\ &= \frac{2}{(\lambda^2 - \mu^2)^2} ((\lambda^2 + \mu^2)^2 - 4\lambda^2 \mu^2) = 2 \end{aligned} \quad (3.3.58a)$$

$$\text{tr}(X_\mu^+(\lambda) \cdot X_\mu^-(\lambda)) = -\frac{\lambda^2 \mu^2}{(\lambda^2 - \mu^2)^2} \left(\text{tr} H \cdot H - \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right) \text{tr} E^+ E^- \right) = 1, \quad (3.3.58b)$$

onde os traços entre os elementos da álgebra $sl(2)$ foram calculados na representação fundamental. Todos os outros traços, com exceção de $\text{tr}(X_\mu^- \cdot X_\mu^+) = \text{tr}(X_\mu^+ \cdot X_\mu^-)$ são iguais a zero, graças ao fato de que o traço é um funcional que possui simetria cíclica e as propriedades (3.2.54).

Levando em conta (3.3.56), (3.3.58a) e (3.3.58b), obtemos a expressão seguinte:

$$\begin{aligned} r(\lambda, \zeta) &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda \mu}{\lambda^2 - \mu^2} (X_\mu^+(\lambda) - X_\mu^-(\lambda)) \otimes X_\mu^0(\zeta) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\zeta \mu}{\zeta^2 - \mu^2} X_\mu^0(\lambda) \otimes (X_\mu^+(\zeta) - X_\mu^-(\zeta)) + \dots, \end{aligned} \quad (3.3.59)$$

onde os termos omitidos comutam com $g(\lambda) \otimes g(\zeta)$ e, por isto, não contribuem ao comutador $[r, g \otimes g]$. Neste caso, para o cobordo (2.1.25), temos

$$\begin{aligned} r(\lambda, \zeta) - g(\lambda) \otimes g(\zeta) \cdot r(\lambda, \zeta) \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) &= \\ -\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\lambda^2 - \mu^2} ((\epsilon^- + \mu)X_\mu^+(\lambda) + (\epsilon^+ + \mu)X_\mu^-(\lambda)) \otimes X_\mu^0(\zeta) &+ \\ \frac{1}{2} \frac{\zeta}{\zeta^2 - \mu^2} X_\mu^0(\lambda) \otimes ((\epsilon^- + \mu)X_\mu^+(\zeta) + (\epsilon^+ + \mu)X_\mu^-(\zeta)) &. \end{aligned} \quad (3.3.60)$$

Apesar do fato desta expressão só ser válida no caso em que $g(\lambda)$ é um elemento que gera soluções monosolitônicas, tentamos comparar (3.3.60) com (3.2.55). Mais precisamente, queremos que seja satisfeita a equação

$$\{g(\lambda) \otimes g(\zeta)\} \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) = -r + g(\lambda) \otimes g(\zeta) \cdot r \cdot g^{-1}(\lambda) \otimes g^{-1}(\zeta) \quad (3.3.61)$$

no grupo dos laços. Neste caso, observamos que isto é impossível. Podemos fazer uma observação : se, no lado direito de (3.3.61), trocamos $g(\lambda)$ por $h(\lambda)$, onde $h(\lambda)$ tem a mesma estrutura (3.1.24) que $g(\lambda)$, mas com os sinais dos ϵ^\pm trocados ($\epsilon^\pm \rightarrow -\epsilon^\pm$), a equação acima transforma-se numa equação para o único parêntese não-trivial $\{\epsilon^+, \mu\}_*$. De (3.3.61), deduzimos

$$\{\epsilon^+, \mu\}_* = \mu \epsilon^+ \frac{\epsilon^+ - \mu}{\epsilon^+ + \mu}, \quad (3.3.62)$$

que, obviamente, é diferente do valor deste parêntese para $N = 1$ (3.2.42):

$$\{\epsilon^+, \mu\} = \frac{1}{2} (\mu^2 - (\epsilon^+)^2). \quad (3.3.63)$$

Se, em vez de usar o parêntese acima, postulamos (3.3.62) e lembrando, como segue das (3.2.32a)–(3.2.35) e (3.2.37), que as Hamiltonianas que geram os fluxos nas direções x^+ e x^- são

$$\mathcal{H}_{\pm} = 2m\mu^{\pm 1}, \quad (3.3.64)$$

obtemos que este novo parêntese (3.3.62) gera uma dinâmica que é diferente da evolução no modelo de sine–Gordon. Traduzida em termos do campo φ (3.1.9), esta dinâmica implica na equação [30]

$$\partial_+ \partial_- \varphi = -m^2 \frac{\cosh \frac{\varphi}{2}}{\sinh \frac{\varphi}{2}} \quad (3.3.65)$$

Esta não parece descrever uma teoria de campo integrável, mas, mesmo assim, possui soluções monosolitônicas induzidas das soluções monosolitônicas de sine–Gordon.

Vamos tentar um outro caminho para obter a ligação entre o parêntese (3.2.55) e o parêntese de Semenov–Tian–Shansky. Antes de tudo, observamos que as expressões (3.2.53) definem duas inclusões, já que se podem fazer expansões (em torno do ponto $\lambda = \infty$ ou em torno do ponto $\lambda = 0$) da álgebra de Lie $sl(2)$ na álgebra de laços $\tilde{sl}(2)$:

$$\begin{aligned} H &\longrightarrow X_{\mu}^0(\lambda) \\ E^{\pm} &\longrightarrow X_{\mu}^{\pm}(\lambda) \end{aligned} \quad (3.3.66)$$

Pode-se, também, introduzir uma base na representação fundamental de $sl(2)$ que, segundo (3.3.66), depende do parâmetro espectral λ :

$$e_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad e_-(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.67)$$

Na representação transposta, $\tilde{X}^0 = (X^0)^t$, $\tilde{X}^{\pm} = (X^{\mp})^t$, onde o índice t acima significa

a transposição matricial, temos a base dual a (3.3.67)

$$\tilde{e}_+(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \tilde{e}_-(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (3.3.68)$$

como se poderia esperar:

$$(\tilde{e}_a, e_b) = \tilde{e}_a^t \cdot e_b = \delta_{ab}, \quad \text{para } a, b = \pm \quad (3.3.69)$$

e

$$X^+(\lambda)e_+(\lambda) = \tilde{X}^+(\lambda)\tilde{e}_+(\lambda) = 0. \quad (3.3.70)$$

Observamos, ainda, que graças a (3.1.9) (para $N = 1$), (3.2.54) e (3.3.56), podemos escrever o parêntese (3.2.55), com $\{\epsilon^+, \mu\}$ dado por (3.3.63), na forma seguinte:

$$\{g(\lambda) \wp g(\zeta)\} = \frac{(Ad^{-1}g(\lambda) \otimes Ad^{-1}g(\zeta) - Adg(\lambda) \otimes Adg(\zeta))}{2} \cdot [r, g(\lambda) \otimes g(\zeta)]. \quad (3.3.71)$$

Este parêntese é, obviamente, diferente da expressão de Semenov–Tian–Shansky que, como já notamos, no grupo dos laços reduz-se ao parêntese de Sklyanin:

$$\{g(\lambda) \wp g(\zeta)\}_{STS} = [r(\lambda, \zeta), g(\lambda) \otimes g(\zeta)]. \quad (3.3.72)$$

Antes de prosseguir com a relação entre (3.3.71) e (3.3.72), vamos introduzir uma decomposição de tipo Gauss no grupo $\widetilde{SL}(2)$:

$$f(\lambda) = e^{a-(\lambda)X_\mu^-(\lambda)} e^{\ln \kappa(\lambda)X_\mu^0(\lambda)} e^{a+(\lambda)X_\mu^+(\lambda)}. \quad (3.3.73)$$

Notamos que nos limites $\lambda \rightarrow \infty$ e $\lambda \rightarrow 0$, acabamos com duas versões da decomposição de Gauss no grupo $SL(2)$, como é fácil deduzir de (3.2.53).

Se $f_{ij}(\lambda)$, $(i, j = 1, 2)$ são os elementos matriciais do elemento $f(\lambda) \in \widetilde{SL}(2)$, de

(3.3.66), (3.3.67) e (3.3.68), temos

$$\begin{aligned}
\kappa(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \mu^2} \left(f_{11}(\lambda) - \frac{\mu}{\lambda}(f_{12}(\lambda) - f_{21}(\lambda)) - \frac{\mu^2}{\lambda^2}f_{21}(\lambda) \right) \\
a_+(\lambda) &= \frac{f_{12}(\lambda) - \frac{\mu}{\lambda}(f_{11}(\lambda) - f_{22}(\lambda)) - \frac{\mu^2}{\lambda^2}f_{21}(\lambda)}{f_{11}(\lambda) - \frac{\mu}{\lambda}(f_{12}(\lambda) - f_{21}(\lambda)) - \frac{\mu^2}{\lambda^2}f_{21}(\lambda)} \\
a_-(\lambda) &= \frac{f_{21}(\lambda) + \frac{\mu}{\lambda}(f_{11}(\lambda) - f_{22}(\lambda)) - \frac{\mu^2}{\lambda^2}f_{12}(\lambda)}{f_{11}(\lambda) - \frac{\mu}{\lambda}(f_{12}(\lambda) - f_{21}(\lambda)) - \frac{\mu^2}{\lambda^2}f_{21}(\lambda)}.
\end{aligned} \tag{3.3.74}$$

O mapeamento inverso é o seguinte:

$$\begin{aligned}
f_{ij}(\lambda) &= (-)^i \frac{\lambda\mu}{\lambda^2 - \mu^2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{-i-j+3} \\
&\times \left((a_+(\lambda) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2j+3})(a_-(\lambda) - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2i+3})\kappa(\lambda) + \frac{1}{\kappa(\lambda)} \right).
\end{aligned} \tag{3.3.75}$$

Usando as componentes $f_{ij}(\lambda)$ da matriz $f(\lambda) \in \widetilde{SL}(2)$, observamos que (3.3.72), em vista de (3.3.59), é equivalente a :

$$\begin{aligned}
\{f_{ij}(\lambda), f_{ij}(\zeta)\}_{STS} &= 0 \\
\{f_{ii}(\lambda), f_{ij}(\zeta)\}_{STS} &= -\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 + \zeta^2}{\lambda^2 - \zeta^2} f_{ii}(\lambda) f_{ij}(\zeta) + \frac{\lambda\zeta}{\lambda^2 - \zeta^2} f_{ij}(\lambda) f_{ii}(\zeta) \\
\{f_{ii}(\lambda), f_{ji}(\zeta)\}_{STS} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 + \zeta^2}{\lambda^2 - \zeta^2} f_{ii}(\lambda) f_{ji}(\zeta) - \frac{\lambda\zeta}{\lambda^2 - \zeta^2} f_{ji}(\lambda) f_{ii}(\zeta) \\
\{f_{ij}(\lambda), f_{ji}(\zeta)\}_{STS} &= \frac{\lambda\zeta}{\lambda^2 - \zeta^2} (f_{ii}(\lambda) f_{jj}(\zeta) - f_{jj}(\lambda) f_{ii}(\zeta)) \\
\{f_{ii}(\lambda), f_{jj}(\zeta)\}_{STS} &= \frac{\lambda\zeta}{\lambda^2 - \zeta^2} (f_{ij}(\lambda) f_{ji}(\zeta) - f_{ji}(\lambda) f_{ij}(\zeta))
\end{aligned} \tag{3.3.76}$$

Como foi notado em precedência, os fluxos nas direções x^+ e x^- são gerados dos Hamiltonianos (3.3.64) (veja também a ref. [21]). Em vista da expressão (3.1.24) para $N = 1$, podemos definir a função de Hamilton "canônica"

$$h(\lambda) = \frac{f_{11}(\lambda) - f_{22}(\lambda)}{f_{12}(\lambda) - f_{21}(\lambda)}, \tag{3.3.77}$$

a qual, quando substituimos $N = 1$ em (3.1.24), assume a forma

$$h(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right) \quad (3.3.78)$$

e, por isto, pode ser chamada de "função geratriz" dos fluxos nas direções x^+ e x^- .

Denominaremos por $\tilde{\Gamma}$ o subgrupo do grupo dos laços $\widetilde{SL}(2)$ caracterizando os vínculos

$$a_+(\lambda) = a_-(\lambda) = 0 \quad (3.3.79)$$

em (3.3.73). Usando a linguagem de Dirac [31], a superfície $\tilde{\Gamma} \subset \widetilde{SL}(2)$ é determinada através dos vínculos primários

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) &= f_{12}(\lambda) + f_{21}(\lambda) = 0 \\ c_2(\lambda) &= f_{11}(\lambda) - f_{22}(\lambda) - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2\lambda\mu} (f_{12}(\lambda) - f_{21}(\lambda)) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.80)$$

Usaremos, também, a notação de Dirac: identidade fraca \approx que indica que duas quantidades são idênticas na superfície dos vínculos $\tilde{\Gamma}$. Com auxílio de (3.3.76), e lembrando as definições (3.3.77) e (3.3.80), obtemos:

$$\begin{aligned} \{h(\lambda), h(\zeta)\}_{STS} &\approx 0 \\ \{h(\lambda), c_1(\zeta)\}_{STS} &\approx \frac{1}{2} \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\zeta}{\mu f_{12}(\lambda)(\lambda^2 - \zeta^2)} \det \begin{pmatrix} \kappa(\lambda) & \kappa(\zeta) \\ \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda\mu} f_{12}(\lambda) & \frac{\zeta^2 - \mu^2}{\zeta\mu} f_{12}(\zeta) \end{pmatrix} \\ \{h(\lambda), c_2(\zeta)\}_{STS} &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.3.81)$$

e os parêntese entre os vínculos:

$$\begin{aligned} \{c_1(\lambda), c_1(\zeta)\}_{STS} &= 0 \\ \{c_1(\lambda), c_2(\zeta)\}_{STS} &\approx 4 \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\zeta}{(\lambda^2 - \zeta^2)\mu} \det \begin{pmatrix} \kappa(\lambda) & \kappa(\zeta) \\ \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda\mu} f_{12}(\lambda) & \frac{\zeta^2 - \mu^2}{\zeta\mu} f_{12}(\zeta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{c_2(\lambda), c_2(\zeta)\}_{STS} \approx 0 \quad (3.3.82)$$

Estas equações, juntamente com (3.3.80), impõem que $\{h(\lambda), c_j(\zeta)\}_{STS} \approx \{c_i(\lambda), c_j(\zeta)\}_{STS} = 0$ só e só quando o parâmetro $\kappa(\lambda)$ não depende de λ :

$$\kappa = e^{\frac{\varphi}{2}}. \quad (3.3.83)$$

Por estes motivos, seguindo o procedimento de Dirac, introduzimos o vínculo secundário

$$c_3(\lambda) = \frac{d\kappa}{d\lambda}(\lambda) = 0, \quad (3.3.84)$$

e definimos o Hamiltoniano total:

$$h_T(\lambda) = h(\lambda) + u^1(\lambda)c_1(\lambda) + u^2(\lambda)c_2(\lambda) \quad (3.3.85)$$

Daqui até o final desta análise, vamos usar a notação de identidade fraca \approx para funções que são idênticas na superfície \mathcal{F} , definida pelos vínculos primários (3.3.80) e pelo vínculo secundário (3.3.84).

Facilmente, obtemos as identidades fracas (válidas sobre \mathcal{F})

$$\begin{aligned} \{h(\lambda), \kappa(\zeta)\}_{STS} &\approx 0 \\ \{c_1(\lambda), \kappa(\zeta)\}_{STS} &\approx f_{12}(\lambda)\kappa(\zeta) \\ \{c_2(\lambda), \kappa(\zeta)\}_{STS} &\approx 0 \\ \{\kappa(\lambda), \kappa(\zeta)\}_{STS} &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.3.86)$$

Por causa das relações acima, os multiplicadores de Lagrange, u^1 e u^2 , (3.3.85) permanecem indeterminados pela equação

$$\{h_T(\lambda), c_i(\zeta)\}_{STS} \approx 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3.87)$$

Podemos, então, usar a liberdade na fixação dos multiplicadores de Lagrange, $u^1(\lambda)$ e $u^2(\lambda)$, para reproduzir o parêntese monolitônico (3.3.63). Um cálculo simples demonstra que, da equação

$$\{h_T(\lambda), \kappa(\zeta)\}_{STS} \approx \{h(\lambda), \kappa\}, \quad (3.3.88)$$

onde o parêntese à esquerda é o parêntese de Semenov–Tian–Shansky (3.3.76), $h_T(\lambda)$ foi introduzido através de (3.3.85) e o parêntese na parte direita é o parêntese monolitônico (com $h(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda} \right)$), só se pode determinar o valor de um dos multiplicadores de Lagrange, qual seja:

$$u^1(\lambda) = \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda\mu} \right)^2 (\kappa + \kappa^{-1}). \quad (3.3.89)$$

Podemos concluir que, graças ao fato de que todos os multiplicadores de Lagrange são de primeiro tipo, o parêntese "estranho" (3.3.71) pode ser obtido do parêntese de Semenov–Tian–Shansky (3.3.72), após uma fixação de gauge.

Conclusões

Esta tese é dedicada ao estudo das soluções solitônicas no modelo sine-Gordon. Este modelo, além de ser integrável como uma teoria de campo clássica, preserva a sua integrabilidade também a nível quântico. Como uma evidência da integrabilidade, podemos citar o fato de que a interação entre os sólitons é fatorizável na teoria quântica.

Babelon e Bernard fizeram a proposta de usar um caminho alternativo ao "clássico" método de espalhamento clássico ou quântico inverso. Trata-se de uma simetria típica para os modelos integráveis: o grupo de vestimento, que opera sobre as componentes da conexão de Lax, deixando-a invariante, e através de cujos elementos o modelo é definido.

Além disto, a ação deste grupo torna-se uma ação de Poisson-Lie, o que quer dizer que a estrutura simplética transforma-se de maneira covariante, se for introduzido um parêntese não-trivial no grupo de vestimento.

Este parêntese, chamado parêntese de Semenov-Tian-Shansky, induz sobre o grupo de vestimento uma estrutura de grupo de Poisson-Lie: a multiplicação é um mapeamento de Poisson. A simetria de vestimento, após quantização, torna-se uma simetria quântica do modelo integrável.

O principal problema que procuramos resolver nesta tese foi tentar derivar a simetria de vestimento a partir do método de espalhamento inverso. Neste sentido, o primeiro capítulo é uma revisão de resultados, já bem conhecidos na literatura. Um novo resultado é que se pode abandonar a exigência de que o campo de sine-Gordon seja real, e só trabalhar com as simetrias de inversão de sinal do parâmetro espectral. Um outro novo resultado é a demonstração explícita do fato de que o método de espalhamento inverso

produz o mesmo conjunto de soluções solitônicas que o caminho usado por Date [22].

No Capítulo 2, além de uma descrição do grupo de vestimento como um grupo de Poisson–Lie, argumentamos que para o modelo de sine–Gordon o parêntese de Semenov–Tian–Shansky, inicialmente postulado para o modelo $sl(2)$ –CAT, torna-se o parêntese de Sklyanin.

Finalmente, o Capítulo 3 é dedicado à resposta do problema seguinte: será que a simetria de vestimento permanece uma simetria de Poisson–Lie quando apenas sólitons estão presentes na teoria?. Apesar do fato de que, em geral, a resposta a esta pergunta parece ser negativa, foi demonstrado, no caso de soluções monosolitônicas, que a estrutura simplética no espaço de fases monosolitônico pode ser obtida de uma redução Hamiltoniana do parêntese de Semenov–Tian–Shansky no grupo de vestimento.

Além disto, as dificuldades que encontramos no tratamento do caso geral fazem-nos pensar que é necessário, desde o início, levar em conta o espectro contínuo. Este problema, que é importante para se compreender em que sentido os sólitons se separam do resto dos graus de liberdade da teoria, está em fase de estudo.

Referências

- [1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys, Rev. Lett. 15(1965) 240–243
- [2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura ,Phys Rev. Lett. 19(1967) 1095–1097 (3.3.89)

Commun. Pure Appl. Math., 27(1971) 97–133
- [3] P. D. Lax, Commun. Pure Appl. Math. 21 (1968) 467–490.
- [4] V. E. Zakharov, P. B. Shabat, Soviet Phys. JeTP 34 (1972) 62–69.
- [5] M. J. Ablowitz, D. J. Knaup, A. C. Newell and H.Segur, Phys. Rev. Lett. 31(1973) 125–127; (3.3.90)

Stud. Appl. Math. 53(1974) 249–313
- [6] M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [7] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, 1986
- [8] S. Novikov, S. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons*, Consultants Bureau, 1984.
- [9] A. Barone, F. Esposito, C. J. Magee and A. C. Scott, Riv. Nouvo Cim. 1(1971) 227.

- [10] E. K. Sklyanin, L. A. Takhtajan and L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.* 40(1980) 688–706.
- [11] L. D. Faddeev and V. E. Koperin, *Phys. Rep.* 42(1978) 1–87.
- [12] R. F. Dashen, B. Hasslascher, A. Neveu, *Phys. Rev. D* 11(1975) 3424.
- [13] S. Coleman, *Phys. Rev. D* 11(1975) 2088.
- [14] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Ann. Phys. (NY)* 120(1979)253.
- [15] A. B. Zamolodchikov, *Adv. Studies Pure Math.* 19(1989) 641.
- [16] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* B241(1984) 333–380.
- [17] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, *Transformation Groups for Soliton Equations*, in: *Non-linear integrable systems*, eds M. Jimbo and T. Miwa (World Scientific, Singapore, 1983).
- [18] D. Bernard and A. Le Clair, *Phys. Lett.* B247(1990) 309; (3.3.91)
Commun. Math. Phys. 142(1991) 99.
- [19] O. Babelon, D. Bernard, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 81, (3.3.92)
Commun. Math. Phys. **149** (1992) 279.
- [20] M. Semenov–Tian–Shansky, *Publ. RIMS* **21** (1985) 1237, (3.3.93)
M. Semenov–Tian–Shansky, *Poisson Lie Groups, Quantum Duality Principle, and the Quantum Double*, hep-th@9304042
- [21] O. Babelon, D. Bernard, *Phys Lett.* **B317** (1993) 363.
- [22] E. Date, *Osaka J. Math.* 19(1982)125
- [23] V. G. Drinfeld, *Quantum Groups*, *Proc. of Int. Congr. of Math., Berkeley* (1986).

- [24] E. K. Sklyanin, *On the complete integrability of the Landau–Lifshitz equation*, Preprint LOMI E-3-79. Leningrad 1979.
- [25] O. Babelon, D. Bernard, *Int. J. Mod. Phys. A* **8** (1993) 507.
- [26] O. Babelon, D. Bernard, and F.A.Smirnov, *Quantization of Solitons and the restricted sine–Gordon Model*, hep–th@960301, to be published in *Comm. Math. Phys.*
- [27] G. Hochschild, J.P. Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953), 110.
- [28] O. Babelon and L. Bonora, *Phys. Lett. B*244 (1990) 220 (3.3.94)
L. Bonora, *Int. J. Mod. Phys. B*6 (1992)2015.
- [29] D. Mumford, *Tata Lectures on theta*, Birkhäuser, 1983
- [30] G. Cuba and R. Paunov, *A Note on the Symplectic Structure on the Dressing Group in the sinh–Gordon Model*, hep–th/9510174, aceito para publicação em *Phys. Lett. B*.
- [31] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, N. Y., Academic Press, 1967.
(3.3.95)
M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems, Princeton University Press, N. J., 1992*