

**Tese de Doutorado**

**Aspectos Geométricos e Propriedades de Renormalização  
de Campos Tensoriais de Matéria**

Ricardo Renan

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS**  
Rio de Janeiro, dezembro de 1996

**Tese de Doutorado**

**Aspectos Geométricos e Propriedades de Renormalização  
de Campos Tensoriais de Matéria**

Ricardo Renan

Tese submetida ao Departamento de Campos e Partículas  
como requisito para obtenção do grau  
de doutor em Física.

Orientador  
Silvio P. Sorella

*Aos Meus Pais  
e  
à minha querida  
Mara*

## Agradecimentos

- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq pelo suporte financeiro, que tornou possível a realização deste trabalho.
- Ao Professor Giambiagi, que tanto lutou pela melhoria do departamento, tornando o ambiente de trabalho mais agradável.
- Ao Professor José Helayël-Neto pelos inestimáveis apoios aos estudantes recém chegados ao departamento, e pela sua incansável luta na formação de futuros mestres e doutores.
- Ao Professor Silvio Sorella que com paciência e dedicação, conduziu-me para a realização dos trabalhos que deram origem à esta tese.
- Ao Professor e amigo Tião pelo apoio e pela sincera amizade.
- Aos colegas do DCP e do CBPF.
- Aos funcionários do DCP que sempre estão prontos a nos ajudar.

## Resumo

Analisa-se os aspectos geométricos e as propriedades de renormalizabilidade de campos tensoriais anti-simétricos de matéria. Com relação aos aspectos geométricos foi obtido o interessante resultado de que o modelo pode ser formulado como uma teoria  $\lambda\varphi^4$  para um campo "auto-dual complexo" no espaço-tempo de Minkowski. Isto possibilitou a generalização não-abeliana do modelo de forma simples e elegante. Quanto às propriedades de renormalizabilidade, verificou-se a existência de duas anomalias, sendo uma a usual anomalia de calibre e a outra uma pura anomalia de matéria, contendo apenas campos espinoriais e tensoriais, cuja existência é devido ao fato do campo anti-simétrico ser um campo de matéria e não de calibre. Apresenta-se um mecanismo para a eliminação desta última anomalia.

## Abstract

An analysis about the geometrical aspects and the renormalization properties of antisymmetric tensor matter fields is performed. For what it concerns the geometrical aspects, we have found the interesting result that the tensor matter invariant lagrangian can be seen as a kind of a  $\lambda\varphi^4$  theory for a complex antisymmetric field satisfying a "complex self-dual" condition in Minkowski space-time. Considering now the renormalizability, two anomalies have been found. The first one is the ordinary gauge axial anomaly, always present in the case of axial couplings. The second anomaly turns out to be a purely matter anomaly, depending only on the spinors and the tensor matter fields. Conditions for the absence of the matter anomaly are discussed.

# Índice

Agradecimentos . . . . .	i
Resumo . . . . .	ii
Abstract . . . . .	iii
Índice . . . . .	iv
Trabalhos Publicados Referentes à Tese . . . . .	vi
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Campos tensoriais anti-simétricos</b>	<b>4</b>
1.1 O campo tensorial de gauge abeliano no espaço-tempo de Minkowski . . . . .	5
1.2 O campo tensorial de matéria no espaço-tempo de Minkowski . . . . .	7
1.2.1 O modelo de Avdeev-Chizhov . . . . .	7
1.2.2 A Liberdade Assintótica . . . . .	10
1.2.3 Análise clássica da hamiltoniana . . . . .	11
<b>2 Interpretação geométrica do campo tensorial de matéria</b>	<b>16</b>
2.1 O campo tensorial autodual complexo no espaço-tempo de Minkowski . . . . .	17
2.2 Construindo uma ação para o campo autodual complexo . . . . .	19
2.3 Acoplamento do campo autodual complexo com férmions de Dirac . . . . .	22
2.4 O modelo tensorial de matéria como uma teoria $\lambda\varphi^4$ . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Propriedades ultravioletas do modelo: Caracterização algébrica dos contra-</b>	
	<b>termos invariantes</b>	<b>27</b>
3.1	Simetrias do modelo . . . . .	28
3.1.1	Fixação de gauge . . . . .	29
3.1.2	Identidade de Ward . . . . .	30
3.2	Caracterização algébrica dos contratermos . . . . .	31
3.3	Reabsorção dos contratermos invariantes de gauge . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Análise das anomalias do modelo</b>	<b>41</b>
4.1	Propriedades do operador de Ward $\mathcal{W}(x)$ . . . . .	42
4.2	Condição de consistência de Wess-Zumino . . . . .	43
4.3	Solução da condição de Wess-Zumino do modelo . . . . .	44
4.4	Resumo . . . . .	52
4.5	Anomalia de Calibre . . . . .	52
4.6	Anomalia de matéria . . . . .	53
4.7	Conclusão . . . . .	55
<b>A</b>	<b>Algumas identidades úteis</b>	<b>57</b>
A.1	Notações e convenções . . . . .	57
A.1.1	Espaço-Tempo de Minkowski . . . . .	57
A.1.2	Matrizes e espinores de Dirac . . . . .	59
A.2	Tensores anti-simétricos . . . . .	61
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>



## Trabalhos Publicados Referentes à Tese

Para facilitarmos a compreensão dos resultados obtidos que deram origem a esta tese, segue a lista dos trabalhos publicados e submetidos:

- Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “*Algebraic Renormalization of Antisymmetric Tensor Matter Fields*” *Phys. Lett.* B344 (1995) 158;
- Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “ $\varphi_4^4$ –*Theory For Antisymmetric Tensor Matter Fields*” *Phys. Lett.* B352 (1995) 37;
- Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “*Renormalization of Nonabelian Gauge Theories With Tensor Matter Fields*” (Aceito para publicação em *Physics Letters B*)
- Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “*Nonabelian Lagrangean for Spinor and Antissymmetric Tensor Matter Fields*” (em preparação)

# Introdução

Os campos tensoriais anti-simétricos surgiram em meados de 1967 como uma generalização natural dos campos vetoriais de gauge [1]. O campo de gauge usual é visto como uma 1-forma,  $A = A_\mu dx^\mu$ . Sua transformação de gauge é uma forma exata  $\delta A = d\omega$ , sendo  $\omega$  uma 0-forma. O campo tensorial anti-simétrico é construído como sendo uma  $p$ -forma,  $T = \frac{1}{p!} T_{\mu_1 \dots \mu_p} dx_1^\mu \wedge \dots \wedge dx_p^\mu$ , cuja transformação é, por analogia com o campo  $A$ , uma forma exata,  $\delta T = d\Lambda_{p-1}$ , sendo agora  $\Lambda_{p-1}$  uma  $(p-1)$ -forma,  $\Lambda_{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} \Lambda_{\mu_1 \dots \mu_{p-1}} dx_1^\mu \wedge \dots \wedge dx_{p-1}^\mu$ . Estes campos são conhecidos como campos anti-simétricos de gauge.

Os campos anti-simétricos de gauge foram introduzidos em modelos de teorias de supergravidade [2], além de aparecerem de forma natural nas atuais teorias de cordas [3]. Foi mostrado ainda que os campos anti-simétricos de gauge abelianos podem gerar massa topológica em quatro dimensões para os campos de gauge vetoriais [4], através de um mecanismo similar ao do termo de Chern-Simons em três dimensões.

Os campos tensoriais anti-simétricos de gauge possuem ainda um papel fundamental na construção de teorias topológicas. De fato, estes são responsáveis por uma grande classe de modelos topológicos do tipo Schwarz, conhecidos como modelos BF [5, 6]. Estes modelos podem ser formulados em um espaço-tempo de dimensão arbitrária e representam uma generalização do modelo de Chern-Simons para espaços-tempos de dimensões ímpares. Obtem-se ainda invariantes topológicos que generalizam o "linking-number" tridimensional [7]. Além disso, os modelos BF são um

exemplo de teorias de campos completamente finitas [8], ou seja, livres de qualquer tipo de divergência ultravioleta.

Devido ao elevado número de aplicações que estes campos possibilitam, é natural questionarmos se não haveria uma forma de construir uma teoria com campos tensoriais anti-simétricos que não fossem campos de gauge. Em 1994 Avdeev e Chizov [9] propuseram, pela primeira vez, um modelo abeliano em que campos tensoriais anti-simétricos de segunda ordem foram introduzidos como sendo campos de matéria. O modelo contém termos de interação destes campos tensoriais com férmions quirais e com o campo de gauge abeliano  $A_\mu$ , possuindo ainda uma interação quártica puramente tensorial. Estes tipos de interações são bem diferentes das construídas com os campos tensoriais anti-simétricos de gauge. O modelo exhibe uma importante propriedade que até então não tinha sido observada nas teorias de campos abelianas: o da liberdade assintótica da constante de acoplamento de gauge. Isto é devido ao fato de que a contribuição dos campos tensoriais é negativa, como foi mostrado explicitamente pelos autores [9] com o cálculo da função  $\beta$  de gauge a um loop.

Esta interessante propriedade nos levou a estudar alguns aspectos teóricos do modelo como, por exemplo, suas propriedades de renormalizabilidade [10]. Para isto, usamos o método da renormalização algébrica, que é independente da escolha de regularização [11]. O uso do método algébrico foi motivado pelo fato de que o modelo do campo tensorial de matéria contém explicitamente a matriz  $\gamma_5$  e o tensor de Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . É conhecido que, nestes casos, não há regularizações que preservem todas as simetrias do modelo [11].

Sendo o campo abeliano do tipo axial, teríamos de antemão a anomalia de gauge axial conhecida como anomalia de Adler-Bardeen [12]. Porém, os resultados obtidos [10] mostraram que, além da anomalia de Adler-Bardeen, havia uma segunda anomalia que dependia apenas dos campos tensoriais de matéria e dos espinores. A

anomalia de gauge axial pôde ser eliminada a um loop introduzindo-se novos campos na ação com cargas de gauge opostas aos dos campos originais e, pelo teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen [13], eliminada da teoria de uma vez por todas.

O caso da anomalia de matéria é totalmente diferente, devido à ausência de um teorema de não-renormalização do tipo Adler-Bardeen. Neste caso, a anomalia de matéria só pôde ser eliminada com a introdução de uma simetria discreta extra [10]. Entretanto esta simetria impede a interação férmion-tensor.

Com o intuito de obter a generalização não-abeliana do modelo, até então desconhecida, investigamos as propriedades geométricas do campo tensorial de matéria. O resultado interessante obtido [14] é que o campo tensorial de matéria pode ser visto como sendo a componente real de um campo anti-simétrico complexo que satisfaz uma condição de "auto-dualidade complexa" no espaço-tempo de Minkowski

$$\varphi_{\mu\nu} = i\tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \quad \tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}.$$

Este resultado [14] nos levou a interpretar o modelo abeliano como uma teoria do tipo  $\lambda\varphi^4$  de um campo "autodual complexo". Desta maneira obtivemos a generalização não-abeliana de forma bem simples. A importância de generalizarmos o modelo abeliano para o não-abeliano consiste no fato de que, fenomenologicamente, devido à incerteza dos dados experimentais, há lugar para uma eventual inclusão de interações tensoriais nos processos de decaimento semi-leptônico do pion  $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu} \gamma$  [15]. O modelo não-abeliano sem a interação com os férmions mostrou-se renormalizável [16]. A interação férmion-tensor foi analisada em [17].

A tese é organizada como segue. No primeiro capítulo, faremos um breve resumo das propriedades dos campos tensoriais anti-simétricos e dos aspectos clássicos do modelo tensorial de matéria. No segundo capítulo, discutiremos as características geométricas do modelo. Finalmente, no terceiro e quarto capítulo, analisaremos a

renormalizabilidade do modelo em todas as ordens da teoria perturbativa.

# Capítulo 1

## Campos tensoriais anti-simétricos

Os campos tensoriais anti-simétricos foram introduzidos na literatura em 1968 por V. I. Ogievetsky e I. V. Polubarinov [1], e foram amplamente utilizados em teorias de supergravidade [2]. Mais recentemente, os campos tensoriais foram estudados sob o ponto de vista topológico, sendo obtidos invariantes topológicos que generalizam o “linking-number” tridimensional [7]. Outros resultados interessantes são o da geração de massa topológica para os campos de gauge abelianos sem o mecanismo de Higgs [4] e o de que os campos tensoriais não-abelianos possuem uma estrutura supersimétrica [8]. Entretanto estes campos possuem uma particularidade: são campos de gauge. Se for dada uma dinâmica para estes campos, o propagador não é definido, isto é, possuem modos zeros e é necessário usar uma fixação de gauge da mesma maneira que se faz para a teoria de Yang-Mills, por exemplo.

Em 1994, L. V. Avdeev e M. V. Chizhov apresentaram um modelo de teoria de campo formulado no espaço-tempo de Minkowski, em que os campos tensoriais anti-simétricos aparecem, pela primeira vez, como campos de matéria. Uma das propriedades importantes deste modelo é que a constante de acoplamento de calibre adquire liberdade assintótica, isto é, sua função  $\beta$  é negativa, resultado até então desconhecido para teorias abelianas [18]. Esta propriedade relevante nos motivou a investigar o

modelo do campo tensorial de matéria e alguns resultados interessantes foram obtidos [14, 10, 16, 17].

Este capítulo é dividido como segue. Na primeira seção, faremos uma exposição a nível clássico sobre o campo tensorial de gauge abeliano livre em quatro dimensões. Na segunda seção, faremos um resumo dos resultados obtidos por L. V. Avdeev e M. V. Chizhov sobre o campo tensorial de matéria.

## 1.1 O campo tensorial de gauge abeliano no espaço-tempo de Minkowski

O ponto de partida na construção da ação livre do campo tensorial de gauge abeliano no espaço-tempo de Minkowski é fazer uma analogia com a ação do campo de gauge abeliano  $A_\mu$ . O campo  $A_\mu$  é substituído por um campo anti-simétrico de segunda ordem  $B_{\mu\nu}$  e a curvatura  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  é estendida a uma curvatura completamente anti-simétrica de três índices  $H_{\mu\nu\sigma} = \partial_{[\mu} B_{\nu\sigma]}$ . Usando o fato de que  $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ , podemos generalizar a simetria de gauge do campo  $A_\mu$  ao campo  $B_{\mu\nu}$ :

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (1.1)$$

onde  $\Lambda_\mu$  é um parâmetro vetorial local. A ação do campo  $B_{\mu\nu}$ , renormalizável por “power-counting” e invariante sob a transformação de gauge (1.1), é dada por [4]:

$$S_B = \int d^4x \frac{1}{6} H_{\mu\nu\sigma} H^{\mu\nu\sigma}, \quad (1.2)$$

que é a generalização do termo de Maxwell da eletrodinâmica usual.

Em contrapartida à ação do campo de gauge  $A_\mu$ , que descreve dois graus de liberdade físicos, a ação (1.2) descreve apenas um grau de liberdade [4]. Para vermos

isso, notemos que  $H_{\mu\nu\sigma}$  tem  $\binom{4}{3} = 4$  componentes independentes. Como conseqüência, podemos escrever  $H_{\mu\nu\sigma}$  em termos de um vetor quadrimensional  $h_\rho$

$$H_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} h^\sigma, \quad (1.3)$$

onde  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  é o tensor de Levi-Civita. Como  $H_{\mu\nu\sigma} = \partial_{[\mu} B_{\nu\sigma]}$ , obtemos para o campo  $h_\mu$ :

$$h_\sigma = -\frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu B^{\nu\rho}, \quad (1.4)$$

onde usamos o fato de que  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} = -6\delta_\alpha^\sigma$ .<sup>1</sup> Tomando a divergência de  $h_\sigma$  na equação (1.4), temos  $\partial^\sigma h_\sigma = 0$ . Por outro lado, a equação de movimento do campo  $B_{\mu\nu}$ ,

$$\partial^\sigma H_{\mu\nu\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \partial^\sigma h^\rho = 0, \quad (1.5)$$

nos diz que, devido ao teorema de Poincaré, o campo  $h_\mu$  pode ser escrito como  $h_\mu = \partial_\mu \phi$ , e como  $h_\mu$  tem divergência nula, isto implica que  $\partial^2 \phi = 0$ . Isto mostra que a ação do campo de gauge tensorial livre (1.2) descreve partículas sem massa e com um grau de liberdade dado pelo campo escalar  $\phi$ .

No caso geral, sendo  $B$  um campo anti-simétrico de ordem  $P$  em  $D$  dimensões, o número de graus de liberdade para o caso livre é dado por  $\binom{D-2}{P}$ . Por exemplo para  $P = 1$  e  $D = 4$  (que corresponde ao campo  $A_\mu$ ) temos  $\binom{2}{1} = 2$  graus de liberdade. No caso em que o campo  $B$  interage com outros campos, este não possui mais somente um grau de liberdade. Devido aos termos de acoplamentos, o campo  $B$  passa a ter três graus de liberdade [4]. Citamos, por exemplo, o acoplamento do campo  $B_{\mu\nu}$  com o tensor de curvatura de gauge  $F_{\mu\nu}$  sem o termo cinético, isto é

$$\int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>No apêndice A expomos as notações, convenções e todas as identidades usadas no decorrer da tese.



Esta ação, conhecida como teoria  $BF$ , possui propriedades topológicas e foi amplamente estudada nos últimos anos [6, 8].

## 1.2 O campo tensorial de matéria no espaço-tempo de Minkowski

### 1.2.1 O modelo de Avdeev-Chizhov

Ao invés de iniciarmos com a ação livre para o campo tensorial de matéria, mostraremos diretamente o modelo originariamente proposto por Avdeev-Chizhov [9]. O modelo consiste de um campo tensorial anti-simétrico de segunda ordem acoplado ao campo de gauge abeliano axial  $A_\mu$  e a campos espinoriais de Dirac, sendo um acoplamento do tipo Yukawa com estes espinores. A ação total do modelo originariamente proposto é [9]:

$$\begin{aligned}
 S_{inv} = \int d^4x \left( -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 \right. \\
 \left. - 2(\partial^\mu T_{\mu\nu})^2 + 4A_\mu (T^{\mu\nu}\partial^\lambda \tilde{T}_{\lambda\nu} - \tilde{T}^{\mu\nu}\partial^\lambda T_{\lambda\nu}) \right. \\
 \left. + 4\left(\frac{1}{2}(A_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2(A^\mu T_{\mu\nu})^2\right) + y\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\psi \right. \\
 \left. + \frac{q}{4}\left(\frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 - 2T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu}\right) \right), \tag{1.7}
 \end{aligned}$$

onde  $(g, y, q)$  são constantes de acoplamentos e  $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$  é um tensor de segunda ordem anti-simétrico. Observa-se que o acoplamento dos spinores com o campo  $A_\mu$  é do tipo chiral devido à presença da matriz  $\gamma_5$ . Temos ainda a presença do tensor de Levi-Civita num dos termos de acoplamento de  $A$  com  $T$ . O tensor dual  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  é definido

como

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}T^{\rho\sigma}, \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{T}^{\rho\sigma} &= -T_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

A ação (1.7) é invariante sob as transformações de gauge [9]

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \partial_\mu\omega, \\ \delta\psi &= -i\omega\gamma_5\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= -i\omega\bar{\psi}\gamma_5, \\ \delta T_{\mu\nu} &= -2\omega\tilde{T}_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{1.9}$$

e pelas transformações discretas de paridade  $\mathcal{P}$  e de conjugação de carga  $\mathcal{C}$  [23, 24]:

*i)* Paridade  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}x &\rightarrow x_p = (x^0, -x^i), \quad i = 1, 2, 3 \\ \psi &\rightarrow \psi^p = \gamma^0\psi, \\ A_0 &\rightarrow A_0^p = -A_0, \quad A_i \rightarrow A_i^p = A_i, \\ T_{0i} &\rightarrow T_{0i}^p = -T_{0i}, \quad T_{ij} \rightarrow T_{ij}^p = T_{ij}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

*ii)* Conjugação de carga  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad C = i\gamma^0\gamma^2, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = A_\mu, \\ T_{\mu\nu} &\rightarrow T_{\mu\nu}^c = -T_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Note que as transformações de paridade dos campos são do tipo axial devido a presença do tensor  $\varepsilon$  e da matriz  $\gamma_5$  na ação 1.7

O termo cinético do campo tensorial  $T_{\mu\nu}$  não é degenerado, pois o propagador

$\langle T_{\mu\nu}(-p) T_{\alpha\beta}(p) \rangle$  pode ser facilmente calculado e não requer a introdução de termos apropriados de fixação de calibre para  $T_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu}(-p) T_{\alpha\beta}(p) \rangle &= \frac{i}{p^2} \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p), \\ \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \\ &\quad - \frac{g_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta + g_{\nu\beta} p_\mu p_\alpha - g_{\mu\beta} p_\nu p_\alpha - g_{\nu\alpha} p_\mu p_\beta}{p^2}, \\ \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}(p) \Pi_{\rho\sigma\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}).\end{aligned}$$

Esta propriedade mostra que o campo anti-simétrico  $T_{\mu\nu}$  da ação de Avdeev-Chizhov (1.7), é realmente um campo tensorial de matéria. Observando a forma do propagador, conclui-se que o campo  $T_{\mu\nu}$  tem dimensão ultravioleta 1. Mostramos na tabela abaixo as dimensões dos campos e das constantes de acoplamentos do modelo:

	$A_\mu$	$\psi$	$T_{\mu\nu}$	$g$	$y$	$q$
dim	1	3/2	1	0	0	0

Tabela 1.1: Dimensão dos campos e das constantes de acoplamento

Como podemos ver da tabela 1.1, o modelo é renormalizável por “power-counting”<sup>2</sup>. Entretanto devido ao fato do campo  $A_\mu$  ser axial e devido à presença do tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ , é preciso, em primeiro lugar, eliminar a anomalia axial de calibre  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma$ . Como é bem conhecido, o teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen [13] garante que se a anomalia axial for cancelada à primeira ordem (1-loop), ela será automaticamente ausente a todas as outras ordens. Para cancelar a anomalia a um loop introduz-se, seguindo um procedimento padrão, outro campo tensorial anti-simétrico de matéria

<sup>2</sup>Um modelo é renormalizável por power-counting se as constantes de acoplamento possuírem dimensões de massa não-negativa, limitada pela dimensão do espaço-tempo.

$U_{\mu\nu}$  com carga  $-2g$  e outro espinor  $\chi$  com carga  $-g$ , opostas às dos campos  $T_{\mu\nu}$  e  $\psi$  respectivamente. O termo mais geral que pode ser adicionado à ação (1.7) sem quebrar as simetrias de gauge, de paridade e de conjugação de carga é [9]:

$$S_{\text{ad.}} = \int d^4x \left( z \bar{\chi} \sigma_{\mu\nu} U_{\mu\nu} \chi + \frac{r}{4} \left( \frac{1}{2} (U_{\mu\nu} U^{\mu\nu})^2 - 2 U_{\mu\nu} U^{\nu\rho} U_{\rho\lambda} U^{\lambda\mu} \right) \right. \\ \left. + \frac{v}{4} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} U_{\rho\sigma} U^{\rho\sigma} - 4 T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} U_{\rho\lambda} U^{\lambda\mu} \right) + \frac{s}{2} (T_{\mu\nu} U^{\mu\nu})^2 \right. \\ \left. + \frac{w}{4} \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} U_{\rho\sigma} U^{\rho\sigma} - 4 T_{\mu\nu} U^{\nu\rho} T_{\rho\lambda} U^{\lambda\mu} \right) \right), \quad (1.12)$$

onde expomos apenas os termos de interações. Os termos cinéticos e os termos que envolvem a interação com o campo de gauge  $A_\mu$  são os mesmos de (1.7) mudando  $T_{\mu\nu}$  por  $U_{\mu\nu}$ ,  $\psi$  por  $\chi$  e o sinal do campo  $A_\mu$ .

É conveniente pôr os espinores com índices isotópicos tomando valores de 1 a  $n$ , de modo a tornar visível a sensibilidade do modelo com respeito a adição de férmions. Isto ficará mais claro na seção seguinte.

Concluimos esta seção observando que, se por um lado a introdução de mais campos tensoriais e espinoriais de cargas opostas às dos campos  $T_{\mu\nu}$  e  $\psi$ , garante a ausência da anomalia axial, por outro lado não pode ser excluído que o modelo apresente outros tipos de anomalias, devido a introdução de um novo tipo de campo de matéria, ou seja,  $T_{\mu\nu}$ . De fato, como será visto em detalhes no capítulo 4, a introdução do campo de matéria tensorial  $T_{\mu\nu}$ , torna possível a existência de uma segunda anomalia, a qual não depende do campo de calibre  $A_\mu$ , contendo apenas os campos de matéria  $T_{\mu\nu}$  e  $\psi$ . No capítulo 4 serão analisados os critérios para que esta nova anomalia seja ausente, garantindo assim a renormalizabilidade do modelo.

## 1.2.2 A Liberdade Assintótica

O modelo do campo tensorial de matéria possui uma propriedade muito importante, que é a liberdade assintótica da constante de acoplamento de calibre  $g$ . Este resultado é surpreendente, pois sabemos que uma teoria com campos de matéria espinoriais e escalares renormalizável só admite liberdade assintótica no caso não-abeliano [18]. O modelo de Avdeev-Chizhov aparece então como o primeiro modelo abeliano com liberdade assintótica. Calculando a função  $\beta$  a um loop (Figura 1-1) para a constante de acoplamento  $g$ , obtemos o seguinte resultado [9]:

$$\beta_{g^2} = \gamma_A g^2 = (16 \pi^2)^{-1} \left( \frac{8}{3}n - 6 \right) g^4. \quad (1.13)$$

O termo  $8n/3$  que aparece em (1.13) é a contribuição dos férmions. O termo  $-6$  vem da contribuição dos campos tensoriais. Vemos que, para  $n = 1$  e  $n = 2$  a função  $\beta_{g^2}$  é negativa, adquirindo liberdade assintótica.

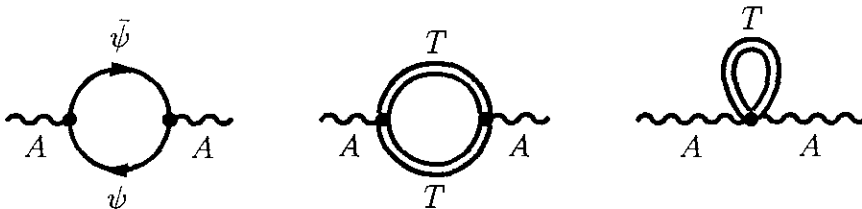


Figura 1-1: Contribuição fermiônica e tensorial para a função beta do campo de gauge a um loop

## 1.2.3 Análise clássica da hamiltoniana

Nesta seção faremos um resumo sobre a positividade da hamiltoniana livre do modelo do campo tensorial de matéria, proposto por Avdeev-Chizhov [9], a nível clássico. O

hamiltoniano da parte livre da ação (1.7) é dado por:

$$H = \int d^4x \left[ (\partial_0 \mathbf{A})^2 - (\partial_i \mathbf{A})^2 + 2(\partial_i A_i)^2 + (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) \right], \quad (1.14)$$

onde o tensor  $T_{\mu\nu}$  foi decomposto em um vetor tridimensional  $A_i = T_{0i}$  e um pseudo-vetor  $B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}T_{jk}$ . Para tornar mais explícitas as partes transversais e longitudinais que contribuirão para a hamiltoniana, é conveniente usar a representação de momentum. Fazemos então uma transformada de Fourier nas componentes  $A_i$  e  $B_i$  do campo tensorial  $T_{\mu\nu}$ :

$$\mathbf{A}(x) = \int d^4x e^{ikx} \mathbf{A}(k), \quad \mathbf{B}(x) = \int d^4x e^{ikx} \mathbf{B}(k). \quad (1.15)$$

Escolhemos um sistema de referência mutuamente ortogonal  $e_i$ , onde o versor  $e_3$  é tomado na direção longitudinal,  $e_3 = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ . Neste sistema específico de coordenadas  $\mathbf{A}(k) = a_i(k)e_i$ , e  $\mathbf{B}(k) = b_i(k)e_i$ . Usando esta decomposição a parte livre da ação (1.7) fica:

$$\begin{aligned} S = 2\pi \int d^4k \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[ a_i^*(k)(k_0^2 + \mathbf{k}^2)a_i(k) + b_i^*(k)(k_0^2 + \mathbf{k}^2)b_i(k) \right] \right. \\ \left. + 2k_0 |\mathbf{k}| \left[ a_1^*(k) b_2(k) + b_2^*(k) a_1(k) - a_2^*(k) b_1(k) - b_1^*(k) a_2(k) \right] \right. \\ \left. + a_3^*(k)(k_0^2 - \mathbf{k}^2)a_3(k) + b_3^*(k)(k_0^2 - \mathbf{k}^2)b_3(k) \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Fazendo as seguintes transformações nas amplitudes  $a_i$  e  $b_i$ :

$$\begin{aligned} a_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[c_1(k) + d_2(k)], & a_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[c_2(k) + d_1(k)], & a_3(k) &= c_3(k); \\ b_1(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[d_1(k) - c_2(k)], & b_2(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[d_2(k) - c_1(k)], & b_3(k) &= d_3(k) \quad , \end{aligned}$$

obtemos uma expressão diagonalizada de (1.16):

$$S = 2\pi \int d^4k \left[ c_1^*(k)(k_0 - |\mathbf{k}|)^2 c_1(k) + c_2^*(k)(k_0 + |\mathbf{k}|)^2 c_2(k) \right]$$

$$+ c_3^*(k)(k_0 - |k|)(k_0 + |k|)c_3(k) + (c \rightarrow d) \Big]. \quad (1.17)$$

A variação da ação (1.17) nos leva às seguintes equações de movimento para os coeficientes  $(c_i, d_i)$

$$\begin{aligned} (k_0 - |k|)^2 c_1(k_0, \mathbf{k}) &= 0, & (k_0 + |k|)^2 c_2(k_0, \mathbf{k}) &= 0, \\ (k_0 - |k|)(k_0 + |k|) c_3(k_0, \mathbf{k}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

com mesmas soluções para  $d_i(k)$ . As soluções mais gerais de (1.18) são

$$\begin{aligned} c_1(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 - |k|) c_1(\mathbf{k}) + \delta'(k_0 - |k|) \tilde{c}_1(\mathbf{k}), \\ c_2(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 + |k|) c_2(\mathbf{k}) + \delta'(k_0 + |k|) \tilde{c}_2(\mathbf{k}), \\ c_3(k_0, \mathbf{k}) &= \delta(k_0 - |k|) \bar{c}_3(\mathbf{k}) + \delta(k_0 + |k|) c_3(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde a derivada da função delta que aparece em (1.19) é tomada com respeito a  $k_0$ . Os coeficientes de (1.19) não são todos independentes, devido à restrição dos campos  $A(x)$  e  $B(x)$  serem reais. Pode-se mostrar que  $\bar{c}_3$  e  $\tilde{d}_3$  e todas as amplitudes com índice 2 não são independentes.

É importante analisarmos com detalhes as soluções dadas pela equação (1.19). As soluções  $c_3(k_0, \mathbf{k})$  e  $d_3(k_0, \mathbf{k})$ , que são do setor longitudinal, possuem apenas a função  $\delta$ , e levam a soluções tipos ondas planas no espaço das configurações. A hamiltoniana neste setor de soluções é positiva definida

$$H_+ = \int d^3\mathbf{k} 4k^2 (c_3^*(\mathbf{k})c_3(\mathbf{k}) + d_3^*(\mathbf{k})d_3(\mathbf{k})), \quad (1.20)$$

e portanto as soluções longitudinais possuem significado físico. As soluções trans-

versas possuem um termo com a derivada da delta. Estes tipos de soluções crescem linearmente com o tempo no espaço das configurações e, conseqüentemente não possuem interptração de ondas planas. A hamiltoniana não é positiva definida no setor transversos:

$$H_- = \int d^3\mathbf{k} \left\{ 2\tilde{c}_1^*(\mathbf{k}) \tilde{c}_1(\mathbf{k}) - 2|\mathbf{k}| [\tilde{c}_1^*(\mathbf{k}) c_1(\mathbf{k}) + c_1^*(\mathbf{k}) \tilde{c}_1(\mathbf{k})] + (c \rightarrow d) \right\}, \quad (1.21)$$

Note que se não existisse a solução em  $\delta'$ ,  $H_-$  seria nulo, e portanto a hamiltoniana seria positiva definida, sendo dependente apenas do setor longitudinal, como podemos ver de (1.20). Estas soluções, bem diferentes das ondas planas, não possuem ainda um significado físico definido. Pode-se argumentar, junto com os próprios autores, que estas soluções, por não serem limitadas no infinito temporal, não podem ser interpretadas em termos de partículas e portanto não deveriam ser consideradas. Apenas dois graus de liberdade longitudinais contribuiriam para a dinâmica do modelo. Isto levaria a quantizar somente as soluções de tipo onda plana. Sem dúvida, a correta interpretação física das soluções que crescem linearmente com o tempo necessita ainda de futuras reflexões e pesquisas.

É importante salientar as principais diferenças entre os modelos dos campos tensoriais de matéria e dos campos de gauge tensoriais [1]. Como podemos observar, o campo tensorial de matéria admite uma interação com férmions e uma auto-interação (o termo quártico em (1.7)) o que não ocorre com o campo de gauge tensorial [1]. Outro ponto importante é quanto ao termo cinético. No caso do tensor de matéria o propagador é bem definido enquanto que no caso do tensor de gauge necessita-se de uma fixação de gauge para se obter o propagador. O termo cinético da ação do campo de gauge tensorial escrito em termos do campo  $B_{\mu\nu}$  é dada por [1]



$$S_B = - \int d^4x \left( \frac{1}{4} (\partial_\lambda B_{\mu\nu}) \partial^\lambda B^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu B^{\mu\lambda}) \partial^\nu B_{\nu\lambda} \right). \quad (1.22)$$

À primeira vista, os termos cinéticos de (1.7) e (1.22) são praticamente os mesmos. Mas, como podemos observar, há um coeficiente relativo de 1/4 entre os dois termos que constituem o termo cinético para o caso de matéria e de 1/2 para o caso de gauge. Este fator é a diferença vital entre os dois modelos. A parte livre da ação (1.7) admite ainda uma invariância conforme [20].

Em contrapartida ao campo de gauge tensorial, que possui apenas um grau de liberdade on-shell, o campo tensorial de matéria tem dois graus de liberdade on-shell, que são as componentes longitudinais do vetor  $\mathbf{A}$  e do pseudovetor  $\mathbf{B}$ . Uma outra observação é que, decorrente da imposição da positividade da hamiltoniana e da simetria de gauge, o campo tensorial descreve partículas relativísticas sem massa [9].

## Capítulo 2

# Interpretação geométrica do campo tensorial de matéria

No capítulo anterior, foi apresentado um novo tipo de interação envolvendo um campo tensorial anti-simétrico de matéria, diferente do campo tensorial de gauge introduzido há alguns anos [1]. O modelo, proposto em 1994 por Avdeev-Chizhov [9], apesar de seu caráter abeliano, possui liberdade assintótica para o acoplamento de calibre. Esta importante propriedade nos motivou a estudar este modelo com mais detalhes. Neste capítulo, faremos um estudo no sentido de entendermos os aspectos matemáticos que conduzam a uma formulação puramente geométrica do modelo, a qual possibilitará a construção não-abeliana do mesmo.

A primeira observação a ser feita é que o campo tensorial  $T_{\mu\nu}$  pode ser visto como componente de um campo complexo  $\varphi_{\mu\nu}$  anti-simétrico, que satisfaz a uma condição de "autodualidade" complexa no espaço-tempo de Minkowski [14]. Com esta propriedade, que depende da assinatura do espaço-tempo em que a teoria é formulada, mostraremos que o modelo do campo tensorial de matéria pode ser reformulado como uma teoria do tipo  $\lambda\varphi^4$ . Isto possibilitou de uma maneira bem simples e elegante sua generalização não-abeliana.

O capítulo é organizado da seguinte maneira: na primeira seção introduzimos o campo autodual complexo, e logo na seção seguinte construímos uma ação para o campo autodual complexo acoplado ao campo de gauge  $A_\mu$ . Na terceira seção faremos o acoplamento com férmions de Dirac. Finalizando, mostraremos na última seção que o modelo do campo tensorial de matéria é uma teoria  $\lambda\varphi^4$  de um campo anti-simétrico autodual complexo no espaço-tempo de Minkowski.

## 2.1 O campo tensorial autodual complexo no espaço-tempo de Minkowski

Antes de entrarmos em detalhes sobre a condição de autodualidade complexa, faremos uma breve revisão sobre as propriedades e notações que serão usadas no decorrer deste capítulo (para maiores detalhes ver o apêndice A). Trabalharemos no espaço-tempo de Minkowski cuja métrica é  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ . O tensor de Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  no espaço-tempo de Minkowski tem as seguintes propriedades [24]:

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -\delta_{\mu_1}^{[\nu_1}\dots\delta_{\mu_4}^{\nu_4]}, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\tau\omega} = -2(\delta_\tau^\mu\delta_\omega^\nu - \delta_\omega^\mu\delta_\tau^\nu), \quad (2.2)$$

com a normalização

$$\varepsilon_{0123} = 1, \quad \varepsilon^{0123} = -1. \quad (2.3)$$

Para um tensor de segunda ordem anti-simétrico qualquer,  $\eta_{\mu\nu}$ , é fácil ver da equação (2.2) que

$$\tilde{\eta}_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

o que impossibilita a existência de tensores autoduais no espaço-tempo de Minkowski. A solução é estender a condição de autodualidade, interpretando-a como uma equação de autovalores do operador  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  envolvendo um tensor anti-simétrico complexo  $\varphi_{\mu\nu}$ :

$$\varphi_{\mu\nu} = \lambda \tilde{\varphi}_{\mu\nu} , \quad (2.5)$$

onde  $\lambda$  é uma constante complexa. Levando em conta a equação (2.4), vemos facilmente que  $\lambda = \pm i$ , sendo  $i$  a unidade imaginária. Portanto no espaço-tempo de Minkowski temos uma condição de autodualidade complexa<sup>1</sup>  $\varphi_{\mu\nu}$ :

$$\varphi_{\mu\nu} = i \tilde{\varphi}_{\mu\nu} , \quad (2.6)$$

A condição de autodualidade complexa (2.6) é facilmente resolvida. Escrevendo  $\varphi_{\mu\nu}$  em termos de suas componentes reais e imaginárias,

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + iR_{\mu\nu} , \quad (2.7)$$

e substituindo em (2.6), nós temos:

$$\varphi_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + i\tilde{T}_{\mu\nu} , \quad (2.8)$$

Esta equação nos mostra explicitamente que o tensor  $\varphi_{\mu\nu}$  possui seis componentes independentes, apesar de ser um tensor de segunda ordem complexo.

---

<sup>1</sup>Por convenção escolhemos o sinal positivo do autovalor  $\lambda$ . Os resultados independem desta escolha.

## 2.2 Construindo uma ação para o campo autodual complexo

Como o campo  $\varphi_{\mu\nu}$  é complexo, ou seja, um campo com carga não-nula, a ação com este campo deve ser invariante sob o grupo  $U(1)$ . Desejamos construir um modelo renormalizável com o campo autodual complexo  $\varphi_{\mu\nu}$  que permita o acoplamento com o campo de gauge abeliano  $A_\mu$ . Usaremos a transformação fundamental de um campo de matéria sob o grupo local  $U(1)$  para o campo tensorial  $\varphi_{\mu\nu}$

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = i\alpha\varphi_{\mu\nu}, \quad \delta\varphi_{\mu\nu}^\dagger = -i\alpha\varphi_{\mu\nu}^\dagger, \quad (2.9)$$

sendo  $\varphi_{\mu\nu}^\dagger$  o complexo conjugado de  $\varphi_{\mu\nu}$ . A derivada covariante é construída segundo o procedimento padrão

$$\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu} = \partial_\sigma\varphi_{\mu\nu} - iA_\sigma\varphi_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

de modo que se transforme covariantemente como (2.9)

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu}) &= i\alpha(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu}), & \delta(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^\dagger &= -i\alpha(\nabla_\sigma\varphi_{\mu\nu})^\dagger \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu\alpha. \end{aligned} \quad (2.11)$$

A ação mais geral renormalizável por power-counting e invariante pelas transformações  $U(1)$  dos campos (eq.(2.9)) deve ser da forma

$$S = \int d^4x \left( (\nabla\varphi)^\dagger(\nabla\varphi) + \frac{m^2}{4}\varphi^\dagger\varphi + \frac{g}{8}(\varphi^\dagger\varphi)^2 \right), \quad (2.12)$$

onde a estrutura de índices de Lorentz foi omitida, de modo a se compor de maneira mais geral levando em conta o caracter quiral do campo  $\varphi_{\mu\nu}$  dado pela equação (2.8).

Primeiro analisaremos o termo de massa  $\varphi^\dagger\varphi$ . Desde que nenhum índice de Lorentz deve ficar livre, a única contração possível para este termo é

$$\frac{m^2}{4}\varphi^{\mu\nu\dagger}\varphi_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

Para verificarmos se o termo de massa sobrevive à condição de autodualidade complexa do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ , usaremos uma importante propriedade que vale para qualquer tensor que seja autodual complexo no espaço-tempo de Minkowski<sup>2</sup>. Seja  $\mathcal{O}$  um operador qualquer, então,

$$\begin{aligned} \varphi^{\dagger\mu\nu}\mathcal{O}\varphi_{\mu\nu} &= \tilde{\varphi}^{\mu\nu}\mathcal{O}\tilde{\varphi}_{\mu\nu}^\dagger = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\varphi_{\alpha\beta}\mathcal{O}\varphi^{\dagger\lambda\delta} \\ &= -\varphi^{\dagger\lambda\delta}\mathcal{O}\varphi_{\lambda\delta}, \Rightarrow \varphi^{\dagger\mu\nu}\mathcal{O}\varphi_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Usando a propriedade mostrada acima com  $\mathcal{O} = 1$ , vemos que o termo de massa não existe. A mesma análise pode ser feita para o termo cinético e, devido a (2.14), o único termo não nulo é

$$\int d^4x \nabla^\mu\varphi_{\mu\nu}^\dagger\nabla_\rho\varphi^{\rho\nu}, \quad (2.15)$$

módulo integração por partes. Para finalizarmos a estrutura dos índices de Lorentz da ação (2.12), resta analisar o termo de auto-interação. Da equação (2.14) vemos que o termo  $\varphi^{\mu\nu\dagger}\varphi_{\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta\dagger}\varphi_{\alpha\beta}$  não existe. Há três termos possíveis que podem contribuir para a auto-interação. Estes são:

$$i) \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\mu\nu}^\dagger\varphi_{\alpha\beta}, \quad ii) \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\nu\alpha}^\dagger\varphi_{\beta\mu}, \quad iii) \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}. \quad (2.16)$$

---

<sup>2</sup>As propriedades para espaços mais gerais serão discutidas no Apêndice.

Entretanto estes termos são completamente equivalentes devido a (2.6) e a seguinte identidade, válida em quatro dimensões:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{T}_{\rho\dots} + \varepsilon_{\rho\alpha\beta\mu}\mathcal{T}_{\nu\dots} + \varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta}\mathcal{T}_{\mu\dots} + \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\mathcal{T}_{\beta\dots} + \varepsilon_{\beta\mu\nu\rho}\mathcal{T}_{\alpha\dots} = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\mathcal{T}_{\rho\dots}$  é um tensor qualquer. Vamos provar a equivalência entre os termos de (2.16). Consideremos os termos *i*) e *ii*):

$$\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\mu\nu}^{\dagger}\varphi_{\alpha\beta} = -i\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\tilde{\varphi}_{\mu\nu}^{\dagger}\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\lambda\sigma}^{\dagger}\varphi_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Usando a identidade (2.17) nos índices  $\mu, \nu, \lambda, \sigma$  e  $\alpha$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\mu\nu}^{\dagger}\varphi_{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\dagger\lambda\sigma}\left(\varepsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}\varphi_{\sigma\beta} + \varepsilon_{\sigma\alpha\mu\nu}\varphi_{\lambda\beta}\right) \\ &\quad + \frac{i}{2}\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\dagger\lambda\sigma}\left(\varepsilon_{\lambda\sigma\alpha\mu}\varphi_{\nu\beta} + \varepsilon_{\nu\lambda\sigma\alpha}\varphi_{\mu\beta}\right) \\ &= 4\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\nu\alpha}^{\dagger}\varphi_{\beta\mu}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A equivalência entre os termos *i*) e *iii*) é verificada usando o mesmo procedimento acima. Portanto, ficamos apenas com um termo de auto-interação

$$\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}. \quad (2.20)$$

Usando os resultados obtidos sobre a contração dos índices de Lorentz, a ação invariante do tensor autodual complexo  $\varphi_{\mu\nu}$  acoplado ao campo de gauge vetorial abeliano  $A_{\mu}$  é dada por

$$\begin{aligned} S_{inv} &= -\frac{1}{4g^2}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad - \int d^4x \left( (\nabla_{\mu}\varphi^{\mu\nu})^{\dagger}(\nabla^{\sigma}\varphi_{\sigma\nu}) + \frac{g}{8}(\varphi^{\dagger\mu\nu}\varphi_{\nu\alpha}\varphi^{\dagger\alpha\beta}\varphi_{\beta\mu}) \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde incluímos o termo de Maxwell. A ação (2.21) é invariante sob transformações  $U(1)$  locais e ainda sob a transformação discreta de paridade:

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x_p = (x^0, -x^i), & i &= 1, 2, 3 \\
 A_0^p(x_p) &= -A_0(x), & A_i^p(x_p) &= A_i(x), \\
 \varphi_{0i}^p(x_p) &= -\varphi_{0i}^\dagger(x), & \varphi_{ij}^p(x_p) &= \varphi_{ij}^\dagger(x).
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Na seção seguinte, mostraremos que o campo autodual complexo  $\varphi_{\mu\nu}$  admite um acoplamento com férmions de Dirac, compatível com a invariância local  $U(1)$ .

## 2.3 Acoplamento do campo autodual complexo com férmions de Dirac

Como a dimensão de massa dos férmions de Dirac é  $3/2$ , os únicos termos renormalizáveis por “power-counting” que se podem construir com os férmions de Dirac e com o campo autodual complexo são da forma

$$\int d^4x \left( a \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu} + b \bar{\psi} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu} + c.c \right), \tag{2.23}$$

sendo  $a, b$  constantes arbitrárias e  $c.c$  o termo complexo conjugado. Podemos mostrar que o segundo termo de (2.23) é equivalente ao primeiro. Para isso, usaremos uma propriedade das matrizes  $\sigma_{\mu\nu}$  e  $\gamma_5$  válida no espaço-tempo de Minkowski [24]:

$$i\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = \gamma_5 \sigma_{\mu\nu}. \tag{2.24}$$



Como o campo  $\varphi_{\mu\nu}$  é um campo autodual complexo, isto é, obedece a eq. (2.6), temos

$$\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} = i \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \tilde{\varphi}^{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}. \quad (2.25)$$

Portanto a interação mais geral entre os férmions de Dirac e o campo autodual complexo renormalizável por power-counting é

$$\int d^4x \, a \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu} + c.c. \quad (2.26)$$

Desejamos que o termo em (2.26) seja um invariante, com o campo  $\varphi_{\mu\nu}$ , se transformando sob  $U(1)$  local (eq.(2.9)) e sob a transformação discreta (2.22). A transformação do férmion não pode ser do tipo  $\delta\psi = i\omega\psi$ , pois (2.26) não é invariante sob esta transformação. A transformação do férmion deve ser quiral, devido à natureza quiral do tensor  $\varphi_{\mu\nu}$ . Podemos escrever a transformação de  $\psi$  como

$$\delta\psi = i\omega\gamma_5\psi, \quad (2.27)$$

onde  $\omega$  é um parâmetro local. Usando (2.27) e (2.9) em (2.26) temos:

$$\delta \int d^4x \, a \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu} + c.c = \int d^4x \, a (2i\omega \bar{\psi} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu} + i\alpha \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \varphi^{\mu\nu}) + \delta(c.c) = 0. \quad (2.28)$$

Usando a identidade (2.24) é fácil ver que (2.28) se anula para  $\alpha = -2\omega$ . Portanto, (2.26) é invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} \delta\psi &= -\frac{i}{2}\alpha\gamma_5\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -\frac{i}{2}\alpha\bar{\psi}\gamma_5 \\ \delta\varphi_{\mu\nu} &= i\alpha\varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Como  $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$  é real, o termo de interação férmion-tensor real e invariante sob (2.29) e (2.22) é

$$\int d^4x \frac{1}{2} y \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi(\varphi^{\mu\nu} + \varphi^{\dagger\mu\nu}), \quad (2.30)$$

sendo  $y$  uma constante real, com dimensão de massa nula.

## 2.4 O modelo tensorial de matéria como uma teoria $\lambda\varphi^4$

Nesta seção mostraremos que a ação do campo autodual complexo é completamente equivalente à ação de Avdeev-Chizhov (1.7). Primeiro vamos escrever a ação completa para o campo  $\varphi_{\mu\nu}$  com interação com o campo de gauge  $A_\mu$  e com os férmions de Dirac

$$\begin{aligned} S_{inv} = & \int d^4x \left[ -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 A_\mu \psi \right. \\ & \left. - \int d^4x \left( (\nabla_\mu \varphi^{\mu\nu})^\dagger (\nabla^\sigma \varphi_{\sigma\nu}) + \frac{q}{8} (\varphi^{\dagger\mu\nu} \varphi_{\nu\alpha} \varphi^{\dagger\alpha\beta} \varphi_{\beta\mu}) \right) \right. \\ & \left. + \int d^4x \frac{1}{2} y \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}(\varphi^{\dagger\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu})\psi, \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

sendo invariante sob as transformações:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega, \\ \delta \psi &= -i\omega \gamma_5 \psi, \\ \delta \bar{\psi} &= -i\omega \bar{\psi} \gamma_5, \\ \delta \varphi_{\mu\nu} &= -2i\omega \varphi_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Escrevendo  $\varphi_{\mu\nu}$  em termos de suas componentes reais e imaginárias  $T_{\mu\nu}, \tilde{T}_{\mu\nu}$  e usando

as seguintes identidades

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mu\lambda}\tilde{T}^{\lambda\nu} &= T_{\mu\lambda}T^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}T_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \\ T_{\mu\lambda}\tilde{T}^{\lambda\nu} &= -\frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}T_{\alpha\beta}\tilde{T}^{\beta\alpha},\end{aligned}\tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}(\partial_{\sigma}\tilde{T}_{\mu\rho})\tilde{T}^{\sigma\rho} &= -\frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\partial_{\mu}T_{\alpha\beta} - T_{\mu\rho}\partial^{\sigma}T_{\sigma}^{\rho}, \\ \tilde{T}_{\mu\rho}\partial_{\sigma}\tilde{T}^{\sigma\rho} &= -\frac{1}{2}T^{\alpha\beta}\partial_{\mu}T_{\alpha\beta} - (\partial_{\sigma}T_{\lambda\mu})T^{\sigma\lambda},\end{aligned}\tag{2.34}$$

e

$$\tilde{T}_{\alpha\beta}\partial^2T^{\alpha\beta} = -2T_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\partial^{\beta}\tilde{T}^{\nu\alpha} - 2\tilde{T}_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\partial^{\beta}T^{\nu\alpha},\tag{2.35}$$

é fácil ver que a ação (2.31) e as transformações (2.32) se reduzem a

$$\begin{aligned}S_{inv} &= \int d^4x \left( -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5 A_{\mu}\psi + \frac{1}{2}(\partial_{\lambda}T_{\mu\nu})^2 \right. \\ &\quad - 2(\partial^{\mu}T_{\mu\nu})^2 + 4A_{\mu}(T^{\mu\nu}\partial^{\lambda}\tilde{T}_{\lambda\nu} - \tilde{T}^{\mu\nu}\partial^{\lambda}T_{\lambda\nu}) \\ &\quad + 4\left(\frac{1}{2}(A_{\lambda}T_{\mu\nu})^2 - 2(A^{\mu}T_{\mu\nu})^2\right) + y\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\psi \\ &\quad \left. + \frac{q}{4}\left(\frac{1}{2}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu})^2 - 2T_{\mu\nu}T^{\nu\rho}T_{\rho\lambda}T^{\lambda\mu}\right) \right),\end{aligned}\tag{2.36}$$

e

$$\begin{aligned}\delta A_{\mu} &= \partial_{\mu}\omega, \\ \delta\psi &= -i\omega\gamma_5\psi, \\ \delta\bar{\psi} &= -i\omega\bar{\psi}\gamma_5, \\ \delta T_{\mu\nu} &= -2\omega\tilde{T}_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{2.37}$$

que são a ação de Avdeev-Chizhov e as transformações dos campos sob a simetria de gauge, mostradas no primeiro capítulo. Como podemos ver, a ação de Avdeev-

Chizhov é completamente equivalente à ação do campo tensorial autodual complexo. A parte exclusiva do campo tensorial autodual complexo é uma teoria tipo  $\varphi^4$ . Assim o modelo do campo tensorial de matéria pode ser visto como uma teoria  $\varphi^4$  de um campo tensorial que obedece uma condição de autodualidade complexa. Esta nova interpretação do modelo possibilitou realizar a generalização não-abeliana de uma maneira bem elegante [14].

Convém citar aqui que o modelo não-abeliano do campo tensorial de matéria ainda não existia na literatura. O estudo sobre a renormalização do caso não-abeliano foi feito num trabalho em curso de publicação em Phys. Lett. B<sup>3</sup> [16].

---

<sup>3</sup>Maiores detalhes serão tratados na tese de doutorado de V. Lemes.

## Capítulo 3

# Propriedades ultravioletas do modelo: Caracterização algébrica dos contratermos invariantes

Como vimos nos capítulos anteriores, o modelo do campo tensorial de matéria possui várias propriedades importantes como a da função beta de calibre ser negativa. Além disto mostramos que o modelo tensorial de matéria pode ser visto como uma teoria tipo  $\lambda\varphi^4$  de um tensor autodual complexo no espaço-tempo de Minkowski. Estas propriedades dão ao modelo um carácter não trivial, e faz-se necessário um estudo sobre outros aspectos como a renormalização a ordens mais elevadas, por exemplo.

Um dos requisitos básicos para que uma teoria seja renormalizável a todas as ordens em  $\hbar$ , é que os contratermos que podem ser adicionados à ação clássica para cancelar as divergências oriundas das correções quânticas devem ter as mesmas simetrias da ação clássica e que estes contratermos possam ser reabsorvidos, através de redefinições das constantes de acoplamentos e das amplitudes dos campos da teoria. Outro requisito importante é que a teoria seja livre de anomalias. Este ponto será discutido no próximo capítulo.

Neste capítulo faremos um estudo sobre os possíveis contratermos que podem ser adicionados à ação clássica do modelo do campo tensorial de matéria, de modo algébrico [11]. Este procedimento não se limita à uma regularização em particular. Na primeira seção faremos uma exposição das simetrias do modelo, fixaremos o gauge para o campo  $A_\mu$  e construiremos o operador de Ward do modelo. Nas seções seguintes procederemos com a caracterização algébrica dos contratermos e mostraremos que estes contratermos podem ser absorvidos por uma redefinição das constantes de acoplamentos e amplitudes dos campos do modelo.

### 3.1 Simetrias do modelo

Para fazermos um estudo correto sobre os contratermos, é necessário construir todas as simetrias contínuas e discretas da ação. Como mencionamos no capítulo 1, a ação do campo tensorial de matéria é invariante sob as transformações de gauge:

$$\begin{aligned}
 \delta A_\mu &= \partial_\mu \omega , \\
 \delta \psi &= -i\omega \gamma_5 \psi , \\
 \delta \bar{\psi} &= -i\omega \bar{\psi} \gamma_5 , \\
 \delta T_{\mu\nu} &= -2\omega \tilde{T}_{\mu\nu} .
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

e pelas transformações discretas de paridade  $\mathcal{P}$  e conjugação de carga  $\mathcal{C}$  [23, 24]:

i) Paridade  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
 x &\rightarrow x_p = (x^0, -x^i) , & i &= 1, 2, 3 \\
 \psi &\rightarrow \psi^p = \gamma^0 \psi , \\
 A_0 &\rightarrow A_0^p = -A_0 , & A_i &\rightarrow A_i^p = A_i , \\
 T_{0i} &\rightarrow T_{0i}^p = -T_{0i} , & T_{ij} &\rightarrow T_{ij}^p = T_{ij} .
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

ii) Conjugação de carga  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi^c = C\bar{\psi}^T, & C &= i\gamma^0\gamma^2, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu^c = A_\mu, \\ T_{\mu\nu} &\rightarrow T_{\mu\nu}^c = -T_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

### 3.1.1 Fixação de gauge

É bem conhecido que o campo de gauge  $A_\mu$  não possui propagador definido, devido à simetria de gauge. Para quantizarmos corretamente uma teoria, necessitamos de um propagador bem definido visto que este é necessário no cálculo das integrais de Feynman de processos físicos relevantes.

Precisamos fixar o gauge para que o propagador seja bem definido, isto é, a simetria de gauge deve ser quebrada. Como os observáveis físicos não dependem da escolha da fixação de gauge [11], escolheremos o gauge de Feynman, pois é covariante de Lorentz e é invariante por paridade e conjugação de carga:

$$S_{fg} = -\frac{1}{2\alpha} \int d^4x (\partial A)^2,\tag{3.4}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro dimensional.

Outra importante propriedade do termo de fixação de Feynman é devida ao fato de que, no caso abeliano, o termo (3.4) produz uma quebra da simetria de gauge que é linear no campo  $A_\mu$ , isto é,

$$\delta S_{fg} = -\frac{1}{\alpha} \int d^4x (\partial^2 \omega) \partial A.\tag{3.5}$$

É bem conhecido em teoria da renormalização que quebras lineares nos campos quânticos não necessitam de renormalização [11]. Em outras palavras, estes termos de

quebras são presentes somente ao nível clássico, e não afetam a aplicabilidade das identidades de Ward correspondentes. A ação (1.7), com o termo de fixação de gauge passa a ser

$$\Sigma = S_{inv} + S_{fg}. \quad (3.6)$$

A transformação de gauge dos campos dada por (3.1), nos mostra explicitamente que a quebra da simetria de gauge é linear no campo  $A_\mu$

$$\delta\Sigma = \delta S_{fg} = -\frac{1}{\alpha} \int d^4x (\partial^2\omega)\partial A, \quad (3.7)$$

podendo ser estendida ao nível quântico.

### 3.1.2 Identidade de Ward

As transformações infinitesimais dos campos sob o grupo  $U(1)$  local, dada pela eq. (3.1), podem ser escritas em termos de um operador funcional<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int d^4x \left( -\omega \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} - i\omega \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_5 \psi - i\omega \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \omega \tilde{T}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}} \right), \quad (3.8) \\ \mathcal{W}A_\mu &= \partial_\mu \omega, \\ \mathcal{W}\psi &= -i\omega \gamma_5 \psi, \\ \mathcal{W}\bar{\psi} &= -i\omega \bar{\psi} \gamma_5, \quad \mathcal{W}T_{\mu\nu} = -2\omega \tilde{T}_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde usamos as definições de derivadas funcionais

$$\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\nu(y)} = \delta_\mu^\nu \delta(x-y) \quad (3.9)$$

$$\frac{\delta \psi(x)}{\delta \psi(y)} = \delta(x-y) \quad (3.10)$$

---

<sup>1</sup>Por definição a derivada espinorial  $\frac{\delta}{\delta \psi}$  atua da direita para a esquerda.



$$\frac{\delta\bar{\psi}(x)}{\delta\psi(y)} = \delta(x-y) \quad (3.11)$$

$$\frac{\delta T_{\mu\nu}(x)}{\delta T_{\rho\sigma}(y)} = (\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\sigma}\delta_{\nu}^{\rho})\delta(x-y) \quad (3.12)$$

Atuando com o operador  $\mathcal{W}$  na ação (3.6), temos a identidade de Ward para o modelo tensorial de matéria:

$$\mathcal{W}\Sigma = -\frac{1}{\alpha}\int d^4x (\partial^2\omega)\partial A. \quad (3.13)$$

Como  $\omega$  é um parâmetro arbitrário local, a identidade acima pode ser escrita sob a forma

$$\mathcal{W}(x)\Sigma = -\frac{1}{\alpha}\partial^2\partial A(x), \quad (3.14)$$

onde  $\mathcal{W}(x)$  é o operador de Ward local

$$\mathcal{W}(x) = -\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}} - i\frac{\delta}{\delta\psi}\gamma_5\psi - i\bar{\psi}\gamma_5\frac{\delta}{\delta\psi} - \tilde{T}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}}. \quad (3.15)$$

## 3.2 Caracterização algébrica dos contratermos

Uma questão importante a ser levantada sobre o modelo do campo tensorial de matéria é se há possibilidade de construir um funcional quântico renormalizado

$$\Gamma = \Sigma + \hbar\Gamma^{(1)} + \hbar^2\Gamma^{(2)} + \dots, \quad (3.16)$$

que satisfaça a mesma identidade de Ward da ação clássica, isto é,

$$\mathcal{W}(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}\partial^2\partial A(x). \quad (3.17)$$

Se pudermos construir um funcional  $\Gamma$  renormalizado que obedeça a (3.17) e as simetrias discretas de paridade e conjugação de carga, então a simetria pode ser es-

tendida ao nível quântico. Entretanto, para construirmos tal funcional, precisamos eliminar os infinitos da teoria gerados por correções quânticas. Este processo gera ambigüidades, pois qualquer solução  $\tilde{\Sigma}$  local, invariante de Lorentz, e por conjugação de carga e paridade tal que

$$\mathcal{W}(x)\tilde{\Sigma} = 0, \quad (3.18)$$

e que tenha os mesmos números quânticos da ação, pode ser adicionada livremente ao funcional  $\Gamma$ . O funcional resultante,  $\Gamma + \tilde{\Sigma}$ , ainda satisfaz a equação (3.17). Estas ambigüidades podem ser removidas se pudermos reabsorvê-las na ação clássica, redefinindo-se os campos, as constantes de acoplamento do modelo e impondo condições de normalizações adequadas sobre os parâmetros físicos da teoria.

Vamos supor que (3.17) não seja quebrada pelos processos de subtrações e vamos caracterizar algebricamente os contratermos invariantes de gauge que podem ser adicionados livremente à ação ordem por ordem em  $\hbar$ , isto é, os contratermos que satisfazem a eq. (3.18). Estes contratermos devem ser reabsorvidos na ação clássica redefinindo-se os campos e constantes de acoplamentos ordem por ordem em  $\hbar$

$$\begin{aligned} \Sigma + \hbar^n \tilde{\Sigma} &= \Sigma(\phi_R, g_R) + O(\hbar^{n+1}) \\ \phi_R &= (1 + \hbar^n Z_\phi)\phi + O(\hbar^{n+1}) \\ g_R &= (1 + \hbar^n Z_g)g + O(\hbar^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\phi$  e  $g$  representam os campos e as constantes de acoplamentos respectivamente, e  $Z_g, Z_\phi$  são fatores de renormalização.

Para resolvermos a equação (3.18), vamos separar  $\tilde{\Sigma}$  em dois termos independentes. Um contendo apenas os campos de gauge e os espinores e um outro termo envolvendo inclusive o campo  $T_{\mu\nu}$ :

$$\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}(A, \psi) + \tilde{\Sigma}(A, \psi, T). \quad (3.20)$$



Como o operador de Ward  $\mathcal{W}(x)$  é linear, a equação (3.18) se separa em duas:

$$\mathcal{W}(x)\tilde{\Sigma}(A, \psi) = 0, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{W}(x)\tilde{\Sigma}(A, \psi, T) = 0. \quad (3.22)$$

Primeiro vamos resolver a equação (3.21). Como o campo  $A$  tem dimensão 1, os termos que dependem exclusivamente de  $A$ , podem possuir no máximo três derivadas, isto é,

$$\tilde{\Sigma}(A) = \int d^4x \left( a \partial^3 A + b \partial^2 A^2 + c \partial A^3 + d A^4 \right), \quad (3.23)$$

onde omitimos as contrações de Lorentz. Devido ao fato de que não podemos ter nenhum índice de Lorentz livre, o termo com três derivadas é uma derivada total e pode ser excluído,  $\partial^3 = \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu$ .

Vamos analisar as contrações possíveis do termo com duas derivadas. Podemos ter contrações entre duas derivadas ou a contração entre uma derivada e um  $A$ . Ainda há uma terceira possibilidade que é a contração com o tensor de Levi-Civita, devido a presença deste tensor e da matriz  $\gamma_5$  na teoria.

$$\partial^2 A^2 = \partial^\mu A_\mu \partial_\nu A^\nu, \quad \partial^\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu, \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma. \quad (3.24)$$

Entretanto, devido estes termos serem integrados na eq. (3.23), o termo com o tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  se anula. Logo apenas os dois primeiros termos de (3.24) contribuem para os termos com duas derivadas. Estes dois termos satisfazem as simetrias discretas de paridade e conjugação de carga.

O termo com uma derivada deve ser excluído, pois um número ímpar de vetores axiais não satisfaz a simetria de paridade. O termo sem nenhuma derivada só pode

ter uma contração possível, ou seja,

$$A^4 = (A^\mu A_\mu)^2. \quad (3.25)$$

Vamos proceder com a análise dos termos que envolve os espinores e o campo de gauge. Os termos possíveis são

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi\partial &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \\ \bar{\psi}\psi A &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned} \quad (3.26)$$

O primeiro termo de (3.26) que depende só dos espinores é um termo presente na ação, logo é invariante sob paridade e conjugação de carga. O termo  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  não é invariante sob paridade devido à matriz  $\gamma_5$  e  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$  não é invariante sob paridade pois  $A_\mu$  é um pseudovetor e  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  é um vetor. Finalizando, o termo  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi A_\mu$  é invariante sob paridade e conjugação de carga, pois é um termo presente na ação.

Portanto, o polinômio local mais geral invariante sob paridade e conjugação de carga que se pode construir com os férmions e com o campo de gauge é dado por

$$\tilde{\Sigma}(A, \psi, \bar{\psi}) = \int d^4x \left( a \partial^\mu A_\mu \partial_\nu A^\nu + b \partial^\mu A_\nu \partial_\mu A^\nu + c \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + d \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi A_\mu \right). \quad (3.27)$$

Substituindo esta expressão na equação (3.21), temos

$$\tilde{\Sigma}(A, \psi) = \int d^4x \left( -\frac{\rho}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sigma \left( i \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 A_\mu\psi \right) \right), \quad (3.28)$$

onde  $\rho$  e  $\sigma$  são parâmetros arbitrários.

A solução de (3.22) requer um certo cuidado, pois devido à estrutura de índices de Lorentz do tensor  $T_{\mu\nu}$ , muitos termos aparentemente diferentes são, na verdade, equivalentes, ou por uma integração por partes, ou via uma identidade envolvendo

o tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . O termo  $\tilde{\Sigma}(A, T, \psi)$  pode ser separado em três outros termos independentes:

$$\tilde{\Sigma}(A, T, \psi) = \tilde{\Sigma}(T) + \tilde{\Sigma}(A, T) + \tilde{\Sigma}(\psi, T), \quad (3.29)$$

onde  $\tilde{\Sigma}(T)$  depende somente do tensor  $T$ , etc. A equação (3.22) pode ser aberta em outras equações

$$\mathcal{W}(x)(\tilde{\Sigma}(T) + \tilde{\Sigma}(A, T)) = 0 \quad (3.30)$$

$$\mathcal{W}(x)\tilde{\Sigma}(\psi, T) = 0. \quad (3.31)$$

Para resolvermos as equações (3.30) e (3.31), precisamos construir os contratermos mais gerais possíveis. Vamos considerar primeiro os contratermos que dependem exclusivamente do tensor  $T_{\mu\nu}$ .  $\tilde{\Sigma}(T)$  deve ter dimensão canônica 4 ser invariante por conjugação de carga e paridade e ser um escalar de Lorentz. Podemos ter a priori termos do tipo<sup>2</sup>:

*i)* Duas derivadas e dois tensores  $\partial\partial T T$ ;

*ii)* Quatro tensores  $T T T T$ ,

onde omitimos os índices de Lorentz e a contração com o tensor de Levi-Civita. Devido à paridade, não podemos ter um número ímpar do dual  $\tilde{T}$  nos termos *i)* e *ii)*.

Vamos analisar a estrutura dos índices de Lorentz de *i)*. Podemos ter as duas derivadas contraindo os índices entre si, e a contração destas com os dois tensores  $TT$ , mais o termo correspondente ao dual  $\tilde{T}$ :

$$\int d^4x \left( a \partial^2 T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + b \partial_\rho T^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + c \partial^2 \tilde{T}^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} + d \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\sigma \tilde{T}_{\sigma\mu} \right), \quad (3.32)$$

onde  $a, b, c, d$  são constantes. Podemos mostrar que os termos que envolvem o dual  $\tilde{T}$  são equivalentes aos termos em  $T$ . De fato, usando as seguintes identidades, válidas

---

<sup>2</sup>Os termos com número ímpar de índices de Lorentz não dão escalares, pois sempre se contraem números pares de índices para se construir escalares de Lorentz.

no espaço-tempo de Minkowski,

$$\partial_\sigma \tilde{T}^{\sigma\nu} \partial^\alpha \tilde{T}_{\alpha\nu} = -\frac{1}{2} \partial^\alpha T^{\rho\mu} \partial_\alpha T_{\rho\mu} - \partial^\sigma T^{\alpha\mu} \partial_\alpha T_{\mu\sigma} \quad (3.33)$$

e

$$\partial^2 \tilde{T}^{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu\nu} = -\partial^2 T^{\mu\nu} T_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

vemos diretamente a equivalência. Portanto (3.32) se reduz a

$$\int d^4x \left( a \partial^2 T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} + b \partial_\rho T^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} \right). \quad (3.35)$$

Vamos analisar agora as contrações de *ii*). Podemos contrair todos os índices entre dois tensores  $T$ , ou apenas dois índices mais os correspondentes termos com  $\tilde{T}$ . O termo com quatro tensores mais geral é dado por:

$$\int d^4x \left( c T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + d T^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} + e \tilde{T}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \tilde{T}_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + f \tilde{T}^{\mu\sigma} \tilde{T}_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} + g \tilde{T}^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} \tilde{T}^{\nu\rho} T_{\rho\mu} + h \tilde{T}^{\mu\sigma} \tilde{T}_{\sigma\nu} \tilde{T}^{\nu\rho} \tilde{T}_{\rho\mu} \right). \quad (3.36)$$

Podemos mostrar que os termos em  $\tilde{T}$  são equivalentes aos termos em  $T$ . Por exemplo, tomemos o termo  $\tilde{T}^{\mu\sigma} \tilde{T}_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu}$ . Fazendo o uso da identidade

$$\tilde{T}_{\mu\sigma} \tilde{T}^{\sigma\nu} = T_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} + \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (3.37)$$

temos

$$\tilde{T}^{\mu\sigma} \tilde{T}_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} = T^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} + \frac{1}{2} T^{\nu\rho} T_{\rho\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (3.38)$$

mostrando a equivalência. A equivalência entre os outros termos segue o mesmo procedimento. Portanto, o contratermo mais geral dependente exclusivamente do tensor

$T$  é dado por:

$$\tilde{\Sigma}(T) = \int d^4x \left( a (\partial_\sigma T_{\mu\nu})^2 + b (\partial^\rho T_{\rho\mu})^2 + c (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 + d T^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} \right) \quad (3.39)$$

Agora faremos a análise dos termos que envolve interação de  $A$  com  $T$ . Podemos ter termos com uma derivada, ou nenhuma derivada. A derivada pode contrair índice com o campo  $A$  ou com o campo  $T$ . Lembrando que no modelo do campo tensorial de matéria,  $A$  é um pseudovetor, então devido a invariância sob paridade, os termos que contêm um vetor  $A$  deve ter apenas um dual  $\tilde{T}$ . Listamos abaixo os termos possíveis com  $A$  e  $T$ :

$$\tilde{\Sigma}(A, T) = \int d^4x \left( e \partial A T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} + m A_\mu T^{\mu\nu} \partial^\lambda \tilde{T}_{\lambda\nu} + n A_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} \partial^\lambda T_{\lambda\nu} + p (A^\mu T_{\mu\nu})^2 + u (A_\mu T_{\lambda\nu})^2 \right). \quad (3.40)$$

Finalizando, a parte que envolve termos com  $\psi$  e  $T$ , admite somente um termo. Devido a paridade e conjugação de carga temos

$$\tilde{\Sigma}(\psi, T) = \int d^4x v \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \psi. \quad (3.41)$$

Substituindo as expressões de  $\tilde{\Sigma}(T)$ ,  $\tilde{\Sigma}(A, T)$  e de  $\tilde{\Sigma}(\psi, T)$  nas equações (3.30) e (3.31), obtemos o contratermo mais geral  $\tilde{\Sigma}(A, \psi, T)$ , satisfazendo as simetrias discretas de paridade e conjugação de carga, solução da equação (3.22):

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(A, \psi, T) = \int d^4x \left( c \left( \frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial^\mu T_{\mu\nu})^2 + 4 A_\mu T^{\mu\nu} \partial^\lambda \tilde{T}_{\lambda\nu} \right. \right. \\ \left. \left. - 4 A_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} \partial^\lambda T_{\lambda\nu} + 4 \left( \frac{1}{2} (A_\mu T_{\lambda\nu})^2 - 2 (A^\mu T_{\mu\nu})^2 \right) \right) \\ \left. + a \left( \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 - 2 T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\lambda} T^{\lambda\mu} \right) + v \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \psi \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

O contratermo  $\tilde{\Sigma}(A, \psi, T)$  mais o contratermo da  $QED$  (3.28), nos mostra que o contratermo mais geral local invariante de gauge possui cinco parâmetros independentes  $(\rho, \sigma, c, a, v)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}(A, \psi, \bar{\psi}, T) = & \int d^4x \left( c \left( \frac{1}{2} (\partial_\lambda T_{\mu\nu})^2 - 2 (\partial^\mu T_{\mu\nu})^2 + 4 A_\mu T^{\mu\nu} \partial^\lambda \bar{T}_{\lambda\nu} \right. \right. \\ & \left. \left. - 4 A_\mu \bar{T}^{\mu\nu} \partial^\lambda T_{\lambda\nu} + 4 \left( \frac{1}{2} (A_\mu T_{\lambda\nu})^2 - 2 (A^\mu T_{\mu\nu})^2 \right) \right) \\ & + a \left( \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} T^{\mu\nu})^2 - 2 T_{\mu\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\lambda} T^{\lambda\mu} \right) + v \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \psi \\ & \left. - \frac{\rho}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sigma \left( i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu \psi \right) \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

### 3.3 Reabsorção dos contratermos invariantes de gauge

Nesta seção mostraremos que os cinco parâmetros independentes dos contratermos invariantes de gauge, dados pela equação (3.43), podem ser reabsorvidos na ação clássica  $\Sigma$ , numa redefinição dos campos e das constantes de acoplamentos ordem por ordem em  $\hbar$ , isto é,

$$\begin{aligned} \Sigma + \hbar^n \tilde{\Sigma} &= \Sigma(\phi_R, g_R) + O(\hbar^{n+1}) \\ \phi_R &= (1 + \hbar^n Z_\phi) \phi + O(\hbar^{n+1}) \\ g_R &= (1 + \hbar^n Z_g) g + O(\hbar^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde  $\phi$  e  $g$  representam os campos  $A_\mu, T_{\mu\nu}, \psi, \bar{\psi}$  e as constantes de acoplamentos  $g, q, y$  respectivamente. Os parâmetros  $Z_\phi$  e  $Z_g$  refletem a renormalização dos campos e das constantes de acoplamentos.

Expandindo os dois lados da equação (3.44) e comparando os termos equivalentes, temos as seguintes equações que relacionam cinco parâmetros dos contratermos com



os fatores de renormalização

$$\begin{aligned}2Z_A - 2Z_g &= g^2\rho \\Z_\psi + Z_{\bar{\psi}} &= \sigma \\Z_\psi + Z_{\bar{\psi}} + Z_A &= \sigma \\2Z_T &= c \\2Z_T + Z_A &= c \\2Z_A + 2Z_T &= c \\Z_y + Z_\psi + Z_{\bar{\psi}} + Z_T &= v \\Z_q + 2Z_T &= 4a \\Z_\alpha &= -2Z_A\end{aligned}\tag{3.45}$$

Resolvendo estas equações temos

$$\begin{aligned}Z_A &= 0 \\Z_\psi &= \frac{1}{2}\sigma \\Z_{\bar{\psi}} &= \frac{1}{2}\sigma \\Z_T &= \frac{1}{2}c \\Z_y &= v - \frac{1}{2}c - \sigma \\Z_q &= 4a - c \\Z_g &= -\frac{1}{2}g^2\rho \\Z_\alpha &= 0\end{aligned}\tag{3.46}$$

estas serão usadas na solução da condição de consistência de Wess-Zumino. Na segunda seção introduzimos a condição de consistência de Wess-Zumino. Nas seções seguintes procedemos com o estudo das possíveis anomalias do modelo.

## 4.1 Propriedades do operador de Ward $\mathcal{W}(x)$

No capítulo anterior, tínhamos obtido o operador de Ward local  $\mathcal{W}(x)$ ,

$$\mathcal{W}(x) = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} - i \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_5 \psi - i \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \tilde{T}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}}, \quad (4.1)$$

que representa a simetria infinitesimal do grupo  $U(1)$  local, no espaço funcional dos campos  $A_\mu, \psi, \bar{\psi}, T_{\mu\nu}$ .

Vamos analisar como se transforma o operador  $\mathcal{W}(x)$  com respeito à paridade, eq (1.10) e à conjugação de carga, eq (1.11). Para fazermos isto, precisamos analisar cada termo do operador  $\mathcal{W}(x)$ . Faremos uma análise detalhada para a paridade. O mesmo procedimento pode ser usado para a conjugação de carga. Sob paridade, os termos de  $\mathcal{W}(x)$  se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} &\rightarrow \partial_0 \frac{\delta}{-\delta A_0} - \partial_j \frac{\delta}{\delta A_j} = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} \\ i \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} &\rightarrow i \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi} \gamma_0} = -i \bar{\psi} \gamma_5 \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \\ i \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_5 \psi &\rightarrow i \frac{\delta}{\delta \gamma_0 \psi} \gamma_5 \gamma_0 \psi = -i \frac{\delta}{\delta \psi} \gamma_5 \psi \\ \tilde{T}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}} &\rightarrow \tilde{T}_{0i} \frac{\delta}{-\delta T_{0i}} - \tilde{T}_{ij} \frac{\delta}{\delta T_{ij}} = -\tilde{T}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}} \end{aligned}$$

portanto,  $\mathcal{W}(x) \rightarrow -\mathcal{W}(x)$  sob paridade. Sob conjugação de carga, pode-se mostrar que  $\mathcal{W}(x)$  é invariante.

Como o operador de Ward  $\mathcal{W}(x)$  representa a simetria do grupo  $U(1)$  na forma

e as redefinições dos campos e constantes de acoplamentos ficam

$$\begin{aligned}
 A_R &= A \\
 \psi_R &= (1 + \hbar^n \frac{1}{2} \sigma) \psi \\
 \bar{\psi}_R &= (1 + \hbar^n \frac{1}{2} \sigma) \bar{\psi} \\
 T_R &= (1 + \hbar^n \frac{1}{2} c) T \\
 g_R &= (1 - \hbar^n \frac{1}{2} g^2 \rho) g \\
 q_R &= (1 + 4\hbar^n a - \hbar^n c) q \\
 y_R &= (1 + \hbar^n v - \hbar^n \frac{1}{2} c - \hbar^n \sigma) y \\
 \alpha_R &= \alpha.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Como podemos ver, os cinco parâmetros  $\rho, \sigma, c, a, v$  podem ser reabsorvidos nas redefinições dos campos  $A, T, \psi, \bar{\psi}$  e das constantes de acoplamentos  $g, y, q$ . Portanto, usando condições de normalização apropriadas, as ambigüidades são eliminadas.

Temos, também, que a não-renormalização do campo de calibre  $A_\mu$  e do parâmetro de fixação de gauge  $\alpha$  é devida à parametrização escolhida pela ação  $S_{inv}$  na expressão (1.7), ou seja, ao fato da constante de acoplamento de calibre  $g$  ter sido colocada junto ao termo invariante de Maxwell  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  e não no termo de interação  $\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 A_\mu \psi$ .

Para mostrarmos que a teoria é renormalizável em todas as ordens da teoria perturbativa, nos resta provar que as correções radiativas não induzem anomalias na identidade de Ward, isto é, que a equação (3.17) continue válida. Faremos uma análise detalhada desta questão no próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Análise das anomalias do modelo

No capítulo anterior foi feito o estudo sobre os contratermos invariantes, supondo que a identidade de Ward não seria quebrada a nível quântico. Neste capítulo, iniciaremos o estudo sobre a existência de possíveis anomalias do modelo do campo tensorial de matéria, usando o método algébrico baseado na condição de consistência de Wess-Zumino [22] e no princípio da ação quântica [11].

Como havíamos dito no primeiro capítulo, a presença do tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  e da matriz  $\gamma_5$  dá origem à anomalia axial de Adler-Bardeen [12]. Este tipo de anomalia é controlável, pois devido ao teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen [13], eliminando a anomalia a um loop, esta não aparecerá mais na teoria.

Entretanto, o modelo do campo tensorial de matéria, envolve novos tipos de interações que até então não tinham sido estudados. As interações entre os campos tensoriais de matéria  $T_{\mu\nu}$  com o campo  $A_\mu$  e com os férmions podem gerar novas anomalias. Este é um sério problema, visto que até o momento não existe um teorema que nos garanta que estas anomalias aparecerão somente num número finito de loops e que possam ser removidas. Isto prejudicaria a renormalizabilidade do modelo.

Este capítulo é organizado do seguinte modo: na primeira seção faremos uma exposição sobre as propriedades do operador de Ward local  $\mathcal{W}(x)$ , tendo em vista que

infinitesimal local, ele deve satisfazer a álgebra de Lie do grupo abeliano  $U(1)$ :

$$[\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(y)] = \mathcal{W}(x)\mathcal{W}(y) - \mathcal{W}(y)\mathcal{W}(x) = 0. \quad (4.2)$$

## 4.2 Condição de consistência de Wess-Zumino

A nível quântico, a ação  $\Sigma$  é substituída pelo funcional  $\Gamma$

$$\Gamma = \Sigma + \hbar\Gamma^{(1)} + \hbar^2\Gamma^{(2)} + \dots, \quad (4.3)$$

e, devido ao processo de renormalização, a identidade de Ward dada pela equação (3.14), pode ser quebrada, isto é

$$\mathcal{W}(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}\partial^2\partial A + \mathcal{A}(x), \quad (4.4)$$

onde  $\mathcal{A}(x)$  representa uma possível quebra induzida pelas correções quânticas. De acordo com o princípio da ação quântica [11], esta quebra é um polinômio local nos campos e suas derivadas, tendo dimensão quatro e possuindo os mesmos números quânticos do operador  $\mathcal{W}(x)$ .

Devido às propriedades do operador de Ward apresentadas na primeira seção, o polinômio  $\mathcal{A}(x)$  deve ser ímpar sobre paridade e par sobre conjugação de carga. Outra restrição sobre o polinômio  $\mathcal{A}(x)$  pode ser obtida observando que a álgebra do operador  $\mathcal{W}$ , dada por (4.2), deve ser satisfeita ao ser aplicada em qualquer funcional:

$$[\mathcal{W}(x), \mathcal{W}(y)]\Gamma = \mathcal{W}(x)\mathcal{W}(y)\Gamma - \mathcal{W}(y)\mathcal{W}(x)\Gamma = 0. \quad (4.5)$$

Substituindo a equação (4.4) na identidade acima, temos a condição de consistência

de Wess-Zumino [22] sobre o polinômio  $\mathcal{A}(x)$ :

$$\mathcal{W}(x)\mathcal{A}(y) - \mathcal{W}(y)\mathcal{A}(x) = 0. \quad (4.6)$$

Devido a (4.2), se  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{W}(x)\hat{A}$ , onde  $\hat{A}$  é um polinômio integrado nos campos e derivadas dos campos, podemos ver que esta solução satisfaz a condição de consistência de Wess-Zumino. Estes tipos de soluções são conhecidos como soluções triviais, pois podem ser reabsorvidas na ação como contratermos locais não-invariantes. Na seção seguinte, resolveremos a equação (4.6) excluindo soluções triviais. As soluções não-triviais de (4.6) são as anomalias do modelo [11].

### 4.3 Solução da condição de Wess-Zumino do modelo

Para resolvermos a condição de consistência de Wess-Zumino para o modelo do campo tensorial de matéria, primeiro observemos que devido a derivações funcionais,  $\mathcal{W}(x)\mathcal{A}(y)$  é um polinômio não-integrado nos campos e derivadas dos campos que envolve as distribuições  $\delta(x - y)$  e  $\partial_\mu\delta(x - y)$ . Portanto necessitamos da teoria das distribuições para obtermos as soluções corretas da equação (4.6).

Há outra maneira de resolvermos a equação (4.6) com polinômios locais integrados. Introduzimos um parâmetro local grassmanniano  $\eta(x)$ , isto é,<sup>1</sup>

$$\eta(x)\eta(y) = -\eta(y)\eta(x), \quad \eta(x)^2 = 0, \quad (4.7)$$

e definimos um operador  $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = \int d^4x \eta(x)\mathcal{W}(x), \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>Apesar de  $\eta$  ser um parâmetro de Grassmann, podemos escolher por convenção que este comute com os espiniores.

onde  $\mathcal{W}(x)$  é o operador de Ward local e o polinômio  $\mathcal{A}(x)$  é substituído por um polinômio integrado  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \int d^4x \eta(x) \mathcal{A}(x). \quad (4.9)$$

Mostraremos, em seguida, que a equação (4.2) e a condição de Wess-Zumino são equivalentes às seguintes condições

$$\mathcal{S}^2 = 0, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = 0. \quad (4.11)$$

De fato,

$$\mathcal{S}^2 = \int d^4x \eta(x) \mathcal{W}(x) \int d^4y \eta(y) \mathcal{W}(y) = \int d^4x d^4y \eta(x) \eta(y) \mathcal{W}(x) \mathcal{W}(y),$$

e usando o caráter grassmanniano de  $\eta$ , temos

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \eta(x) \eta(y) (\mathcal{W}(x) \mathcal{W}(y) - \mathcal{W}(y) \mathcal{W}(x)) = 0.$$

Como  $\eta$  é arbitrário, segue que

$$\mathcal{W}(x) \mathcal{W}(y) - \mathcal{W}(y) \mathcal{W}(x) = 0,$$

que é a equação (4.2). A condição (4.11) nos dá

$$\int d^4x \eta(x) \mathcal{W}(x) \int d^4y \eta(y) \mathcal{A}(y) = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \eta(x) \eta(y) (\mathcal{W}(x) \mathcal{A}(y) - \mathcal{W}(y) \mathcal{A}(x)) = 0,$$

logo, por consequência temos

$$\mathcal{W}(x) \mathcal{A}(y) - \mathcal{W}(y) \mathcal{A}(x) = 0.$$

Portanto, a análise sobre a existência de anomalias do modelo, se reduz ao problema de cohomologia do operador  $\mathcal{S}$ :

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A} \neq \mathcal{S}\hat{\mathcal{A}}, \quad (4.12)$$

com  $\mathcal{S}^2 = 0$ , e  $\hat{\mathcal{A}}$  sendo um polinômio integrado de dimensão quatro, simétrico por paridade e conjugação de carga. A ação do operador  $\mathcal{S}$  nos campos é obtida de (4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}A_\mu &= \partial_\mu\eta, \\ \mathcal{S}\psi &= -i\eta\gamma_5\psi, \\ \mathcal{S}\bar{\psi} &= -i\eta\bar{\psi}\gamma_5, \\ \mathcal{S}T_{\mu\nu} &= -2\eta\tilde{T}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Este operador é conhecido na literatura como operador *BRS* [11].

Vamos resolver a equação (4.12). Para isto, separamos  $\mathcal{A}$  em duas partes

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1(A, \psi) + \mathcal{A}_2(A, \psi, T), \quad (4.13)$$

onde  $\mathcal{A}_1(A, \psi)$  depende somente de  $(A, \psi, \bar{\psi})$  e  $\mathcal{A}_2(A, \psi, T)$  inclui a dependência do campo tensorial. Substituindo (4.13) em (4.12), obtemos duas equações independentes

$$\mathcal{S}\mathcal{A}_1 = 0, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{S}\mathcal{A}_2 = 0, \quad (4.15)$$

onde  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são dados por

$$\mathcal{A}_1 = \int d^4x \eta(x) \mathcal{A}_1(x), \quad (4.16)$$



$$\mathcal{A}_2 = \int d^4x \eta(x) \mathcal{A}_2(x), \quad (4.17)$$

sendo  $\mathcal{A}_1(x)$  e  $\mathcal{A}_2(x)$  os polinômios locais de dimensão quatro, ímpar por paridade, par por conjugação de carga, construídos com os campos  $(A, \psi, \bar{\psi})$  e  $(A, \psi, \bar{\psi}, T)$ , e suas derivadas, respectivamente.

Procederemos agora com a solução não-trivial de (4.14), isto, é as soluções que não podem ser escritas como  $S\hat{A}$ . Primeiro iniciaremos com os termos que dependem somente do campo  $A$ . Devido a restrição do polinômio  $\mathcal{A}_1$  ser ímpar por paridade, não podemos ter termos com um número par de campos  $A$ , pois este é um vetor axial. A única exceção é quanto ao termo que envolva o tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Logo, o polinômio mais geral possível que depende apenas do campo  $A$  ímpar por paridade é dado por

$$\int d^4x \eta \left( a_1 \partial^2 \partial A + a_2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + a_3 \partial A A^2 + a_4 A^\sigma \partial_\sigma A_\mu A^\mu \right), \quad (4.18)$$

onde  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$  são constantes.

Como o termo  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  é um vetor, o termo  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$  é ímpar por paridade e tem dimensão quatro. Este é o único termo de dimensão quatro e ímpar sobre paridade com os espiniores e o campo de gauge. O mesmo argumento pode ser usado, e os únicos termos que dependem somente dos espiniores com dimensão quatro e ímpar por paridade são da forma

$$\int d^4x \eta \left( b_1 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \psi + b_2 \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \right), \quad (4.19)$$

em que  $b_1$  e  $b_2$  são constantes.

Finalmente, a restrição aos termos acima de que sejam invariantes sob conjugação de carga nos dá o polinômio mais geral de dimensão quatro invariante sob conjugação

de carga e ímpar sobre paridade, que depende dos campos  $A, \psi, \bar{\psi}$ :

$$\mathcal{A}_1 = \int d^4x \eta \left( a_1 \partial^2 \partial A + a_2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + a_3 \partial A A^2 + a_4 A^\sigma \partial_\sigma A_\mu A^\mu + b_1 \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \right) \quad (4.20)$$

Vamos verificar se há termos triviais na expressão acima, antes de substituirmos na equação (4.14). Primeiro observemos que  $\mathcal{S}(\partial A) = \partial^2 \eta$ , logo podemos escrever o primeiro termo de (4.20) como

$$\int d^4x \eta \left( a_1 \partial^2 \partial A \right) = -\frac{1}{2} a_1 \mathcal{S} \int d^4x (\partial A)^2, \quad (4.21)$$

sendo portanto um termo trivial e pode ser desprezado. O termo que envolve os espinores também pode ser escrito com

$$\int d^4x \eta \left( b_1 \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \right) = -b_1 \mathcal{S} \int d^4x A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi, \quad (4.22)$$

que é trivial.

Substituindo o polinômio (4.20) sem estes dois termos triviais na equação (4.14), obtemos a solução

$$\mathcal{A}_1 = \int d^4x \eta \left( a_2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right) - \frac{1}{4} a_3 \mathcal{S} \int d^4x (A^2)^2. \quad (4.23)$$

Conseqüentemente a condição de Wess-Zumino possui uma solução não-trivial dada por

$$\mathcal{A}_1(x) = r \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma, \quad (4.24)$$

sendo  $r$  uma constante.

Para resolvermos a equação (4.15), vamos iniciar a construção dos polinômios mais gerais, com os termos que dependem apenas do tensor  $T$ . Sendo o polinômio ímpar

por paridade, isto implica que os termos bilineares em  $T$ , devem ter a presença de um tensor  $\tilde{T}$ . A base bilinear em  $T$  mais geral é dada por

$$\int d^4x \eta \left( a \partial^2 \tilde{T}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + b \partial_\sigma \tilde{T}_{\mu\nu} \partial^\sigma T^{\mu\nu} + c \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + d \partial_\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\rho T_{\sigma\mu} \right) + \int d^4x \eta \left( e \tilde{T}^{\rho\mu} \partial_\rho \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + f \partial_\rho \partial^\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} T_{\sigma\mu} \right). \quad (4.25)$$

Fazendo uso das identidades

$$\begin{aligned} \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + \partial^\sigma T^{\rho\mu} \partial_\rho \tilde{T}_{\sigma\mu} &= \frac{1}{2} \partial_\sigma T_{\alpha\beta} \partial^\sigma \tilde{T}^{\alpha\beta} \\ \partial^\sigma \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} T_{\sigma\mu} + \partial^\sigma \partial_\rho T^{\rho\mu} \tilde{T}_{\sigma\mu} &= \frac{1}{2} \partial^2 T_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

o polinômio (4.25) se reduz a

$$\int d^4x \eta \left( a_1 \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + a_2 \partial_\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\rho T_{\sigma\mu} + a_3 \tilde{T}^{\rho\mu} \partial_\rho \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + a_4 \partial_\rho \partial^\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} T_{\sigma\mu} \right). \quad (4.27)$$

O polinômio quártico em  $T$ , admite apenas dois termos devido à imposição de ser ímpar sob paridade. Isto é devido ao fato de que o produto de três tensores  $\varepsilon$  é equivalente a um tensor  $\varepsilon$ . O polinômio quártico em  $T$  mais geral, ímpar sob paridade é dado por

$$\int d^4x \eta \left( e \tilde{T}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + f \tilde{T}^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} T^{\nu\rho} T_{\rho\mu} \right). \quad (4.28)$$

Podemos mostrar que o segundo termo da equação acima é equivalente ao primeiro.

Usando a identidade

$$T_{\mu\sigma} \tilde{T}^{\sigma\nu} = \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu T_{\alpha\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta}, \quad (4.29)$$

o polinômio (4.28) se reduz a um único termo,

$$\int d^4x \eta \left( e \tilde{T}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \right). \quad (4.30)$$

Podemos mostrar ainda que este termo é trivial, isto é,

$$\int d^4x \eta \left( e \tilde{T}_{\mu\nu} T^{\mu\nu} T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \right) = -\frac{e}{8} \mathcal{S} \int d^4y \left( T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \right)^2, \quad (4.31)$$

de modo que pode ser reabsorvido como um contratermo não-invariante.

Construiremos agora os termos que envolvem dependência do tensor  $T$  com o campo  $A$ . Devido às dimensões dos campos, podemos ter termos com dois tensores  $T$ , um campo  $A$  e uma derivada, e dois tensores  $T$  e dois campos  $A$

$$\int d^4x \eta \left( A T T \partial, A A T T \right). \quad (4.32)$$

A restrição de que os termos acima sejam ímpares por paridade nos diz que nos termos com um  $A$ , não pode haver um tensor  $\tilde{T}$  e nos termos com dois  $A$  deve haver um  $\tilde{T}$ . Listamos abaixo os termos mais gerais satisfazendo estes requisitos

$$\begin{aligned} & \int d^4x \eta \left( b_1 \partial A T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + b_2 \partial^\sigma A^\mu T_{\sigma\beta} T_\mu^\beta + b_3 A_\mu T_{\alpha\beta} \partial^\mu T^{\alpha\beta} \right) \\ & + \int d^4x \eta \left( b_4 A_\mu T_{\sigma\alpha} \partial^\sigma T^{\mu\alpha} + b_5 A^\mu T_{\mu\alpha} \partial^\sigma T^{\sigma\alpha} + d_1 A^2 T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Como  $\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi$  é um tensor, o único termo ímpar por paridade construído com os espiniores e com o tensor  $T$  é

$$\int d^4x \eta \left( \lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \tilde{T}^{\mu\nu} \right) = \int d^4x \eta \left( \lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi T^{\mu\nu} \right) \quad (4.34)$$

Portanto, o polinômio local integrado mais geral de dimensão quatro, ímpar por paridade e simétrico por conjugação de carga que se pode construir com dependência no

campo tensorial de matéria é

$$\begin{aligned}
A_2 = & \int d^4x \eta \left( a_1 \partial_\rho \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + a_2 \partial_\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} \partial^\rho T_{\sigma\mu} + a_3 \tilde{T}^{\rho\mu} \partial_\rho \partial^\sigma T_{\sigma\mu} + a_4 \partial_\rho \partial^\sigma \tilde{T}^{\rho\mu} T_{\sigma\mu} \right) \\
& + \int d^4x \eta \left( b_1 \partial A T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + b_2 \partial^\sigma A^\mu T_{\sigma\beta} T_\mu^\beta + b_3 A_\mu T_{\alpha\beta} \partial^\mu T^{\alpha\beta} + b_4 A_\mu T_{\sigma\alpha} \partial^\sigma T^{\mu\alpha} \right) \\
& + \int d^4x \eta \left( b_5 A^\mu T_{\mu\alpha} \partial^\sigma T^{\sigma\alpha} + d_1 A^2 T_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} + \lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi T^{\mu\nu} \right),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

onde excluímos o termo trivial (4.31). Substituindo a expressão acima na equação (4.15), obtemos as seguintes relações entre os coeficientes

$$\begin{aligned}
b_1 &= -a_3 \\
b_2 &= -2a_3 + 2a_4 \\
b_3 &= -2a_3 - a_1 - a_2 \\
b_4 &= 2a_1 + 2a_3 - 2a_4 - 2a_2 \\
b_5 &= 2a_2 + 2a_3 - 2a - 1 - 2a_4 \\
d_1 &= -a_1 - a_2 - a_3 - a_4
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Substituindo estas equações na equação (4.35), obtemos

$$A_2 = \int d^4x \eta (\lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi T^{\mu\nu}) + S \hat{A}, \tag{4.37}$$

onde  $\hat{A}$  é dado por

$$\begin{aligned}
\hat{A} = & \int d^4x \left\{ \frac{1}{8} (a_4 - a_1 - a_2 - a_3) (\partial_\alpha T_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4} (a_1 + a_2 + 3a_3 - a_4) (\partial^\mu T_{\mu\nu})^2 \right. \\
& + \frac{1}{4} a_2 \partial A T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - (a_3 + a_1) A^\mu T_{\mu\sigma} \partial^\sigma \tilde{T}^{\sigma\nu} + (a_2 + a_3) A^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} \partial^\sigma T^{\sigma\nu} \\
& \left. + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) A^\mu A_\nu T_{\mu\beta} T^{\nu\beta} \right\}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Portanto, solução da condição de Wess-Zumino admite outro termo não-trivial

$$\mathcal{A}_2(x) = \lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi T^{\mu\nu}. \quad (4.39)$$

## 4.4 Resumo

A solução da condição de consistência de Wess-Zumino, nos mostra que o modelo do campo tensorial de matéria possui anomalias, isto é a simetria de gauge dada pela identidade de Ward, é quebrada a nível quântico

$$\mathcal{W}(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha} \partial^2 \partial A + \mathcal{A}(x) + O(\hbar^2), \quad (4.40)$$

onde  $\mathcal{A}(x)$  foi obtida na seção anterior

$$\mathcal{A}(x) = r \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \lambda \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi T^{\mu\nu}. \quad (4.41)$$

O primeiro termo é a anomalia axial, também conhecida na literatura como anomalia de Adler-Bardeen [12] e só depende do campo de gauge  $A_\mu$ . O termo seguinte é uma anomalia de matéria, pois depende somente dos campos de matéria espinoriais e tensorial. Nas seções seguintes, faremos uma análise sobre estes dois tipos de anomalias e as suas conseqüências na renormalizabilidade do modelo do campo tensorial de matéria.

## 4.5 Anomalia de Calibre

Nesta seção, faremos uma análise sobre a anomalia de calibre, para vermos se é possível removê-la de modo que a identidade de Ward seja preservada a nível quântico.

O coeficiente  $r$  da anomalia de calibre que aparece na expressão (4.41) está relacio-

nado, a um loop, aos diagramas da função de três pontos  $\Gamma_{AAA}^{(1)}$ . Isto pode ser visto atuando com o operador teste

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)} \frac{\delta}{\delta A_\sigma(z)} \quad (4.42)$$

na equação (4.40) e colocando todos os campos iguais a zero. Mostramos, na figura 4-1, as contribuições a um loop para a constante  $r$ . Como podemos ver, o gráfico é de ordem  $g^3$ , sendo  $g$  a constante de acoplamento de gauge. Esta anomalia pode ser eliminada introduzindo campos com carga de gauge opostas, como foi mostrado no primeiro capítulo. O teorema de Adler-Bardeen [13] nos garante que se esta anomalia for eliminada a um loop, esta não aparecerá mais na teoria. Portanto, a identidade de Ward ficaria livre da anomalia de calibre.

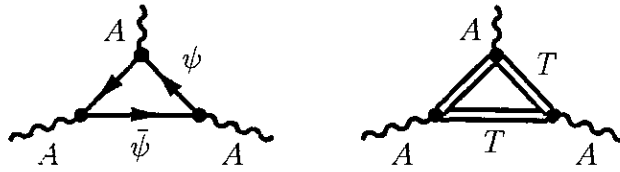


Figura 4-1: Contribuição a um loop para anomalia de calibre

## 4.6 Anomalia de matéria

Vamos analisar o termo da anomalia que possui somente campos de matéria. Para analisarmos que tipos de gráficos contribuem para esta anomalia ao menos a um loop, procedemos como na seção anterior, atuando com outro operador teste

$$\frac{\delta}{\delta \psi(y)} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(z)} \frac{\delta}{\delta T_{\mu\nu}(u)}, \quad (4.43)$$

na equação (4.40) e pondo todos os campos iguais a zero. Podemos ver que  $\lambda$  na ordem mais baixa, está relacionado a dois tipos de diagramas  $\Gamma_{A\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$  e  $\Gamma_{\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$ . Vemos que os

gráficos que contribuem para  $\Gamma_{A\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$ , mostrados na figura 4-2, são proporcionais a  $g^3y$ ,  $gy^3$  e  $g^3y$  e os gráficos que contribuem para  $\Gamma_{\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$ , da figura 4-3, proporcionais a  $g^3$ ,  $g^2y$  e  $g^2y$ , respectivamente. Os dois termos em  $g^2y$  não são cancelados com a adição dos campos com carga de gauge opostas. Mesmo que fosse possível eliminar a anomalia de matéria a um loop, não há garantia de que este coeficiente sendo nulo a um loop, o modelo estaria livre deste tipo de anomalia. Isto é um sério problema para a renormalização do modelo. Uma solução alternativa é impormos uma nova simetria ao modelo de modo a proibir este tipo de anomalia. Isto pode ser facilmente resolvido, impondo a simetria discreta a ação clássica

$$T_{\mu\nu} \rightarrow -T_{\mu\nu}, \quad (4.44)$$

a qual elimina o termo de interação entre os férmions e o tensor de matéria. Portanto o modelo do campo tensorial de matéria é livre de anomalias sem a interação férmion-tensor.

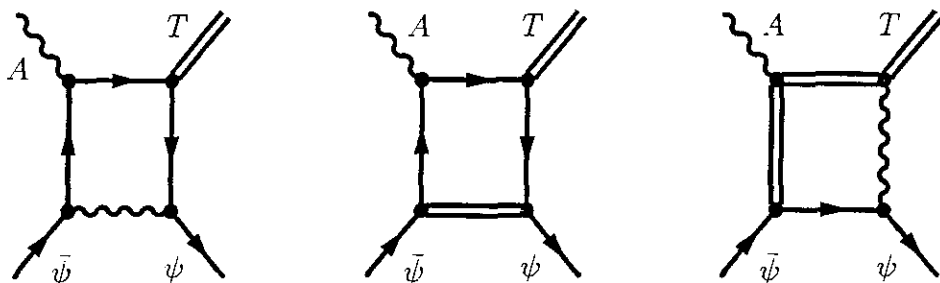


Figura 4-2: Contribuição a um loop para  $\Gamma_{A\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$



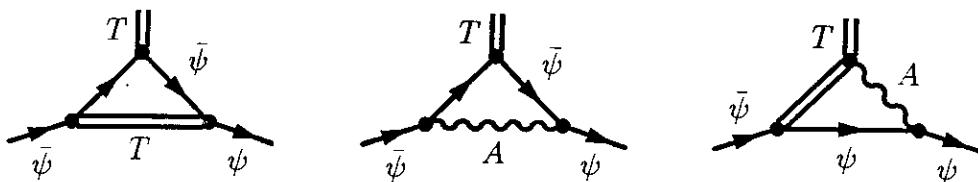


Figura 4-3: Contribuição a um loop para  $\Gamma_{\psi\bar{\psi}T}^{(1)}$

## 4.7 Conclusão

O modelo do campo tensorial de matéria apresenta dois tipos de anomalias: uma é a usual anomalia de calibre e outra é uma anomalia que depende dos campos espinoriais e do tensor de matéria, sendo então uma anomalia de matéria. Vimos que é possível eliminarmos a anomalia de calibre introduzindo campos tensoriais e espinoriais com cargas opostas, visto com detalhes no primeiro capítulo. Quanto ao outro tipo de anomalia, mesmo que conseguíssemos anular a anomalia a um loop, não teríamos garantia que em ordens superiores a anomalia não apareceria mais na teoria. Isto prejudica a renormalizabilidade do modelo.

Entretanto, podemos eliminar a anomalia de matéria, se impusermos uma simetria discreta que proíba a interação dos espinores com o campo tensorial. Isto é resolvido impondo que a ação clássica seja invariante com o  $T \rightarrow -T$ . Sendo assim, a identidade de Ward pode ser implementada a nível quântico

$$\mathcal{W}(x)\Gamma = -\frac{1}{\alpha}\partial^2\partial A. \quad (4.45)$$

Logo, o modelo do campo tensorial de matéria abeliano será renormalizável sem o termo de interação férmion-tensor.

O estudo feito sobre o caso não-abeliano mostrou que o sem o termo de interação férmion-tensor, o modelo é renormalizável [16], e que a presença desta interação

também gera novas anomalias [17]. Isto é um problema, pois o modelo não-abeliano perderia o status de candidato a explicar o decaimento do pion. O que pode ser feito, é calcular explicitamente os gráficos que contribuem para anomalias no caso não-abeliano em várias ordens da teoria perturbativa, ou estender de alguma maneira o teorema de Adler-Bardeen para anomalias de matéria. Estes pontos serão tratados em estudos futuros.

# Apêndice A

## Algumas identidades úteis

Neste apêndice apresentamos as identidades e relações usadas no decorrer desta tese. Algumas demonstrações serão omitidas para não tornar o apêndice muito volumoso.

### A.1 Notações e convenções

#### A.1.1 Espaço-Tempo de Minkowski

Métrica:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

As coordenadas contravariante e covariante tem as representações usuais  $x^\mu$  e  $x_\mu$ ,

respectivamente,

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu. \quad (\text{A.2})$$

A derivada com respeito a coordenadas contravariante e covariante são abreviadas por

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (\text{A.3})$$

Um vetor tridimensional é representado em negrito

$$\mathbf{A} = \{A^i, i = 1, 2, 3\}, \quad (\text{A.4})$$

e um quadrivetor

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = (A^0, -\mathbf{A}). \quad (\text{A.5})$$

O operador d'alembertiano tem a notação

$$\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2, \quad (\text{A.6})$$

e o operador quadri-momentum tem a forma

$$p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial^0, -i\nabla). \quad (\text{A.7})$$

No espaço-tempo de Minkowski, o tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita é dado por:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ for uma permutação par de } \{0, 1, 2, 3\} \\ -1 & \text{se for uma permutação ímpar} \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

O tensor  $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  satisfaz as seguintes identidades

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ \varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} &= -\det\left(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}\right), \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \\ \varepsilon^{\alpha\beta\mu_1\mu_2}\varepsilon_{\alpha\beta\nu_1\nu_2} &= -2\left(\delta_{\nu_1}^{\mu_1}\delta_{\nu_2}^{\mu_2} - \delta_{\nu_2}^{\mu_1}\delta_{\nu_1}^{\mu_2}\right)\end{aligned}\tag{A.9}$$

### A.1.2 Matrizes e espinores de Dirac

Todas as matrizes de Dirac seguem a representação de Dirac:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.10}$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  são as matrizes de Pauli e  $\mathbb{1}$  a matriz identidade  $2 \times 2$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{A.11}$$

As matrizes  $\gamma$  satisfazem a álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.\tag{A.12}$$

As matrizes  $\gamma^i$  são anti-hermitianas e  $\gamma^0$  é hermitiana. Introduz-se uma nova matriz

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5\tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}\gamma_5^2 &= \mathbb{1} \\ \{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= 0\end{aligned}\tag{A.14}$$

Define-se uma outra matriz em termos do comutador das matrizes  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] &= 0,\end{aligned}\tag{A.15}$$

que satisfaz a importante identidade

$$\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}\tag{A.16}$$

A matriz de conjugação de carga de espinores é definida por

$$C = i\gamma^2\gamma^0,\tag{A.17}$$

tendo as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}C\gamma_\mu C &= \gamma_\mu^T \\ C\gamma_5 C &= -\gamma_5^T \\ C\sigma_{\mu\nu} C &= -\sigma_{\mu\nu}^T \\ C(\gamma_5\gamma_\mu) C &= -(\gamma_5\gamma_\mu)^T\end{aligned}\tag{A.18}$$

## A.2 Tensores anti-simétricos

Um tensor anti-simétrico covariante<sup>1</sup> de ordem  $r$  num espaço  $D$ -dimensional é definido como

$$T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} = \text{sig}(P) T_{P(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r)} \{ \mu_j = 1, \dots, D; j = 1, \dots, r \}, \quad (\text{A.19})$$

onde  $P$  é a permutação dos índices  $\{\mu_1 \dots \mu_r\}$  e  $\text{sig}(P) = -1, 1$  se a permutação for ímpar, par, respectivamente. Desta definição segue que um tensor antissimétrico de ordem  $(D + 1)$  em um espaço  $D$ -dimensional é identicamente nulo. O tensor de Levi-Civita em um espaço  $D$ -dimensional é um tensor anti-simétrico de ordem  $D$  onde  $\varepsilon_{12\dots D} = 1$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} &= g^{-1} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \\ \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_D} &= g^{-1} \det(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}), \quad (i, j = 1, 2, \dots, D) \\ \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_D} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \nu_D} &= g^{-1} k! \det(\delta_{\nu_j}^{\mu_i}), \quad (i, j = k + 1, k + 2, \dots, D), \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . O dual de um tensor anti-simétrico de ordem  $r$  é um tensor de ordem  $(D - r)$  definido por:

$$\tilde{T}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{(D-r)}} = \frac{\sqrt{|g|}}{r!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{(D-r)} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r}. \quad (\text{A.21})$$

Um tensor anti-simétrico  $T$  é autodual se

$$\tilde{T} = T. \quad (\text{A.22})$$

---

<sup>1</sup>A anti-simetria só pode ser definida para mesmo tipo de índices (contravariantes ou covariantes).

Isto implica que apenas espaços de dimensões pares admite a autodualidade. Aplicando a operação de dualidade duas vezes a um tensor anti-simétrico  $T$ , temos:

$$\tilde{\tilde{T}} = (-1)^{r(D-r)} \text{sig}(g) T, \quad \text{sig}(g) = \frac{|g|}{g} \quad (\text{A.23})$$

Logo temos auto-dualidade se  $(-1)^{r^2} \text{sig}(g) = 1$ .

Para variedades riemannianas ( $\text{sig}(g) = 1$ ), temos tensores autoduais de ordem  $r = 2, 4, \dots$  em  $D = 4, 8, \dots$ , e para variedades lorentzianas ( $\text{sig}(g) = -1$ ), temos tensores autoduais de ordem  $r = 1, 3, \dots$  em  $D = 2, 6, \dots$

Um tensor é autodual complexo se  $\tilde{T} = -iT$ , sendo  $i$  a unidade imaginária e  $T$  um tensor anti-simétrico complexo. Desta definição resulta que temos a autodualidade complexa se  $(-1)^{r^2} \text{sig}(g) = -1$ . Logo, temos tensores autoduais complexos de ordem  $r = 2, 4, \dots$  em variedades lorentzianas de dimensões  $D = 4, 8, \dots$  e de ordem  $r = 1, 3, \dots$  em variedades riemannianas de dimensões  $D = 2, 6, \dots$

Listamos abaixo algumas identidades úteis no espaço de Minkowski para tensores de segunda ordem anti-simétricos <sup>2</sup>

$$\tilde{B}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu} = -B_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{B}^{\mu\nu} \tilde{A}_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} \delta_{\sigma}^{\mu} B^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} + A^{\mu\nu} B_{\nu\sigma} \quad (\text{A.25})$$

$$\partial_{\rho} \tilde{A}^{\rho\mu} \partial^{\sigma} B_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} \partial_{\sigma} A_{\alpha\beta} \partial^{\sigma} \tilde{B}^{\alpha\beta} - \partial_{\sigma} A_{\rho\mu} \partial^{\rho} \tilde{B}^{\sigma\mu} \quad (\text{A.26})$$

$$\partial^{\sigma} \partial_{\rho} \tilde{A}^{\rho\mu} = \frac{1}{2} \partial^2 A_{\alpha\beta} \tilde{B}^{\alpha\beta} - \partial_{\sigma} \partial^{\rho} A_{\rho\mu} \tilde{B}^{\sigma\mu} \quad (\text{A.27})$$

---

<sup>2</sup>Para uma variedade com  $D = 4$  lorentziana com métrica afim, todas as identidades são válidas com a derivada ordinária sendo substituída pela derivada covariante.



# Bibliografia

- [1] V. I. Ogievetsky and I. V. Polubarinov, *Yad. Fiz.* 4 (1968) 210;
- [2] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, *Phys. Lett.* B85 (1979) 47;  
B. de Wit and J. W. Van Holyen, *Nucl. Phys.* B155 (1979) 530;
- [3] S. Deser, *Phys. Rev.* 178 (1969) 1931;  
J. Kalb and P. Ramond, *Phys. Rev.* D9 (1974) 2273;  
Y. Nambu, *Phys. Reports* 23 (1976) 250;
- [4] Theodore J. Allen, Mark J. Bowick and Amitabha Lahiri, *M. Physics. Letters.* A6 (1991) 559;
- [5] A. S. Schwarz, *Baku Intern. Topological Conf. Abstracts*, Vol. 2, (1987) 345;
- [6] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski and G. Thompson,  
*Phys. Reports* 209 (1991) 129;
- [7] G. T. Horowitz, *Comm. Math. Phys.* 125 (1989) 417;  
G. T. Horowitz and M. Srednicki, *Comm. Math. Phys.* 130 (1990) 83;  
M. Blau and G. Thompson, *Ann. Phys. (N.Y.)* 205 (1991) 130;
- [8] E. Guadagnini, N. Maggiore and S. P. Sorella, *Phys. Lett.* B255 (1991) 65;  
C. Lucchesi, O. Piguet and S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B395 (1993) 325;

- [9] L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *Phys. Lett.* B321 (1994) 212;  
L. V. Avdeev and M. V. Chizhov, *A queer reduction of degrees of freedom*, preprint  
*JINR Dubna, hep – th/9407067*;
- [10] Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, *Phys. Lett.* B344 (1995) 158;
- [11] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Lecture notes in Physics,  
Monograph series m. 28, Springer-Verlag, Berlin, 1995;
- [12] S. L. Adler, *Phys. Rev.* 117 (1969) 2426;  
J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cim.* 60 (1969) 47;  
W. A. Bardeen, *Phys. Rev.* 184 (1969) 1848;
- [13] S. L. Adler and W. Bardeen, *Phys. Rev.* 182 (1969) 1517;
- [14] Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, *Phys. Lett.* B352 (1995) 37;
- [15] V. N. Bolotov et al., *Phys. Lett.* B243 (1990) 308;
- [16] Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “*Renormalization of Nonabelian Gauge Theories With Tensor Matter Fields*” (Aceito para publicação em *Physics Letters B*);
- [17] Vitor Lemes, Ricardo Renan and S. P. Sorella, “*Nonabelian Lagrangean for Spinor and Antisymmetric Tensor Matter Fields*” (em preparação);
- [18] S. Coleman and D. J. Gross, *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 851;
- [19] A. A. Poblaguev, *Phys. Lett.* B238 (1990) 108;
- [20] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* B110 (1981) 117;
- [21] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Comm. Math. Phys.* 42 (1975) 127;  
C. Becchi, A. Rouet and R. Stora *Ann. Phys. (N.Y.)* 98 (1976) 287;  
O. Piguet and A. Rouet, *Phys. Reports* 76 (1981) 1;

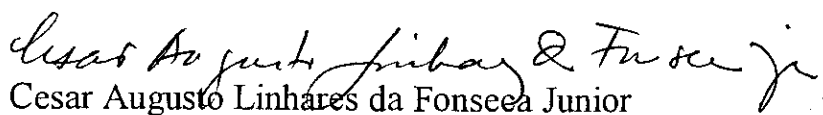
- [22] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.* B49 (1974) 52;
- [23] O. Piguet, "Renormalisation en théorie quantique des champs" and "Renormalisation des théories de jauge", lectures of the "Troisième cycle de la physique en Suisse Romande" (1982-1983);
- [24] C. Itzykson and J.-B. Zuber, "Quantum field theory", McGraw-Hill 1985;
- [25] Y. M. P. Lam, *Phys. Rev.* D6 (1972) 2145;  
Y. M. P. Lam, *Phys. Rev.* D6 (1972) 2161;  
T. E. Clark and J. H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* B113 (1976) 109;
- [26] A. Zee, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 1198;  
J. H. Lowenstein and B. Schroer, *Phys. Rev.* D7 (1975) 1929;  
G. Costa, J. Julve, T. Marinucci and M. Tonin, *Nuovo Cim.* 38A (1977) 373;  
G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi and R. Collina, *Comm. Math. Phys.* 72 (1980) 239;  
O. Piguet and S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B381 (1992) 373;  
O. Piguet and S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* B395 (1993) 661;

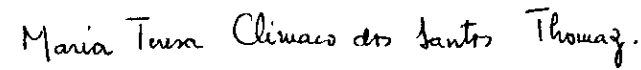
**“ASPECTOS GEOMÉTRICOS E PROPRIEDADES DE  
RENORMALIZAÇÃO DE CAMPOS TENSORIAIS  
DE MATÉRIA”**

***Ricardo Renan Landim de Carvalho***

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

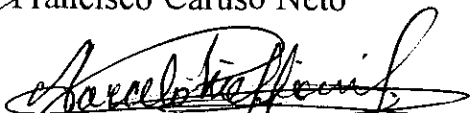
  
Silvio Paolo Sorella - Presidente

  
Cesar Augusto Linhares da Fonseca Junior

  
Maria Teresa Climaco dos Santos Thomaz

  
José Abdalla Helayël-Neto

  
Francisco Caruso Neto

  
Marcelo Chiapparini - Suplente

Rio de Janeiro, 20 de dezembro de 1996