Marcelo Carvalho

Modelos-σ Supersimétricos em Espaços de Atiyah-Ward.

Tese de Doutorado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Novembro de 1996

"En plenitud de vida y de sendero

dió el paso hacia la muerte porque El quiso.

Mirad de par en par el paraíso abierto

por la fuerza de un cordero."

(Catedral de Avila, Julho de 1996)

A memória de

Marcos Carvalho,

com uma profunda reverência.

Agradecimentos

- A José A. Helayël-Neto, pelo trabalho de orientação da tese e pelo muito que me ensinou.
- A Oswaldo del Cima e a Marco Antônio de Andrade por tudo que me ensinaram sobre supersimetria em D=(2+2).
- A L.C.Q.Vilar pela co-autoria em um dos trabalhos em que se baseou essa tese.
- A Maurício J. Werneck pela co-autoria em um outro trabalho e também pelas inúmeras discussões, sem as quais não teria sido possível fazer a extensão N=2 do modelo.
- A Sebastião Alves Dias pelas discussões ao longo desses seis anos de CBPF.
- A Míriam Simões pela paciência ao longo desses seis anos.
- A todos meus amigos aqui do CBPF e de outros lugares deixo um singelo: MUITO OBRIGADO.
- Ao CBPF, pela formação que eu obtive.
- A Capes, pela bolsa de doutorado.
- A Huan-Min Wang: "wǒ ài nǐ!"

Resumo

São apresentadas as formulações N=1 e N=2 de modelos-σ supersimétricos em um espaço-tempo de Atiyah-Ward, onde se realiza, também, o gauging das isometrias e estuda-se, em detalhes, que tipos de variedades complexas podem surgir em conexão com tais classes de modelos.

Abstract

We present the N=1 and N=2 formulation of a supersymmetric non linear-σ-model in the space-time of Atiyah-Ward and perform the gauging of the isometries. It is shown in details the type of complex manifolds that arise in these models.

Índice

1 Supersimetria e Variedades Complexas. **4**

1.1 Variedades Complexas. 4

1.2 A Álgebra das Supersimetrias N=2,3,4. 15

2 Modelos-σ N=1-Supersimétricos no Espaço de AW. **17**

2.1 O Modelo no Superespaço. 18

2.2 Isometrias. 22

2.3 Gauging das Isometrias. 25

3 Supersimetria-N=2 no Espaço de AW. **30**

3.1 A Extensão N=2-Supersimétrica do Modelo. 31

3.2 Variedades de hyperKähler e a Extensão N=2-Supersimétrica. 33

3.3 O Multipleto Vetorial Kähleriano em D=(2+2). 42

3.4 O Modelo-N=2 com o Gauging das Isometrias. 44

A Notações gerais e convenções para D=2+2. **48**

B Vetores de Killing Holomórficos. **53**

C Derivadas Covariantes, Conexões, "Field-Strengths" etc. em D=(2+2). **56**

C.1 Derivadas Covariantes, Conexões e "Field-Strengths". 56

C.2 Expansão em Componentes do Supercampo V. 57

C.3 Covariantização da Álgebra N=1. 58

Introdução

Nos últimos anos, vem-se tratando com grande interesse o problema da formulação de teorias-de-gauge, supersimétricas ou não, construídas em espaços-tempo de Atiyah-Ward. Uma das razões para isto é que se espera que, a partir de teorias de (super) Yang-Mills auto-duais, possam ser gerados novos exemplos de modelos integráveis [1, 2, 3] em dimensões inferiores a 4. Além disso, sabe-se que os espaços-tempo de Atiyah-Ward surgem em modelos de cordas com duas supersimetrias na folha-do-mundo [4]. Estes produzem, também, ações para modelos de Chern-Simons não-Abelianos supersimétricos com N=1 e N=2 em D=(2+1), por meio de uma redução dimensional apropriada [5].

Supersimetria em D=(2+2) apresenta particularidades interessantes, muitas das quais devido às propriedades dos espinores em tais espaços: podem-se definir espinores de Majorana-Weyl [6] e, contrariamente ao caso da supersimetria em D=(3+1), o vínculo de quiralidade no superespaço não é afetado pela conjugação complexa dos supercampos. Este fato mostra-se crucial na construção de ações para o setor de matéria: graus de liberdade dinâmicos aparecem apenas às custas da mistura de supercampos independentes e de quiralidades opostas [7].

Esta propriedade de misturar setores de diferentes quiralidades, e que não estejam relacionados por conjugação complexa, tem uma grande influência no acoplamento do setor de matéria aos supercampos de Yang-Mills, bem como na formulação de modelos-σ supersimétricos. A questão dos modelos-σ em supersimetria requer um tratamento especial, já que, em função da dimensionalidade do espaço-tempo de base, a presença de uma ou mais supersimetrias pode impor severas restrições sobre a geometria dos espaçosalvo associados aos modelos discutidos [8], [9], [10]. Por exemplo, em D=(5+1), modelos-σ supersimétricos só podem ser construídos para variedades complexas do tipo hyperKähler [11]. Já em D=(3+1), tais modelos existem também para variedades menos restritas, tais como os espaços de Kähler. Neste caso, as variedades de hyperKähler aparecem apenas no caso do modelo-σ apresentar supersimetria estendida [9], a saber, N=2.

Uma outra razão de importância substancial para o estudo de modelos-σ no âmbito das teorias supersimétricas é que, ao se acoplar teorias-de-gauge com a supergravidade em D=(3+1), o setor de matéria resulta descrito por um modelo-σ com geometria associada do tipo Kähler [12]. O acoplamento de modelos-σ com campos de gauge através do gauging de isometria já foi extensivamente estudado tanto para modelos bosônicos quanto supersimétricos (incluindo aqui os modelos bi-dimensionais com supersimetria do tipo (p,q) e com termo de Wess-Zumino) [13].

Tendo em mente explorar novas propriedades de teorias supersimétricas definidas nos espaços de Atiyah-Ward, propõe-se, nesta tese, analisar as propriedades geométricas das variedades que surgem na construção de modelos-σ supersimétricos definidos em D=(2+2), reconsiderando para este caso a conexão existente entre variedades complexas e supersimetria, na mesma linha adotada no caso de D=(3+1) [9, 10, 19, 14, 15]. Contudo, o tratamento no espaço-tempo de Atiyah-Ward trar-nos-á novas particularidades, até então não discutidas. Por exemplo, na construção do modelo-σ-N=1 em termos de uma variedade de Kähler, devemos tomá-la como sendo uma variedade 4n-dimensional, e o seu potencial de Kähler deve admitir uma decomposição holomórfica especial [21]. Isto restringe nossa variedade a uma subclasse das variedades de Kähler mais gerais. Os resultados apresentados em nosso estudo dos modelos-σ definidos em D=(2+2) revelam uma série de novidades na conexão entre supersimetria e geometria complexa via teoria dos mapeamentos harmônicos; tais fatos são intrinsicamente ligados às peculiaridades dos campos de matéria dos modelos supersimétricos definidos no espaço de Atiyah-Ward.

Esta tese é organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, são apresentadas definições e resultados sobre variedades complexas e mostra-se a conexão existente entre as estruturas complexas de uma variedade quaterniônica e a extensão N=2,3,4 da álgebra de supersimetria. O material aí encontrado constitui uma rápida revisão de assuntos já discutidos e publicados previamente [15], [16],[17] e [18]. No Capítulo 2, seção 2.1, constroi-se a ação do modelo-σ N=1 em D=(2+2). Na seção 2.2 são analisadas as isometrias do modelo e são encontradas condições acerca da presença de obstruções ao "gauging" das isometrias. Na seção 2.3 realiza-se o "gauging" das isometrias, o que resulta no acoplamento do modelo-σ ao setor de Yang-Mills-N=1 em D=(2+2). Os resultados aí discutidos e apresentados são contribuições originais ao tópico dos modelos-σ supersimétricos em D=(2+2) [21]. No Capítulo 3, faz-se a extensão N=2 do modelo. Nessa construção, utilizam-se as estruturas complexas para se escrever a forma da supersimetria N=2. O procedimento adotado nos Capítulos 2 e 3 segue estritamente aquele exposto na ref.[9], [27]. Também, o conteúdo do capítulo 3 constitui-se numa série de resultados novos no que diz respeito à formulação de modelos-σ supersimétricos no espaço de Atiyah-Ward. No Apêndice A, são apresentadas as convenções e são coletadas relações algébricas úteis para o cálculo espinorial em D=(2+2). No Apêndice B, é analisada uma condição para se ter vetores de Killings holomórficos. Finalmente, no Apêndice C, são expostas as expressões das derivadas covariantes, conexões e "field-strengths" em D=(2+2).

Capítulo 1

Supersimetria e Variedades Complexas.

1.1 Variedades Complexas.

O material apresentado aqui reúne algumas definições e resultados das refs. [15] e [17], e tem por objetivo apenas estabelecer algumas propriedades das variedades complexas. Não se pretende, assim, dar demonstrações dos resultados enunciados, o que pode ser encontrado nas referências matemáticas tradicionais.

Def.1:Estrutura Complexa

Seja V um R-espaço vetorial de dimensão n. Uma estrutura complexa em V é, por definição, uma transformação linear $I : V \rightarrow V$ tal que se tem $I^2 = -1$ (1 denota a transformação identidade em V).

Se V admite uma estrutura complexa, então V é de dimensão par e existe uma base, $\{e_i, e'_i; i = 1, ..., n\}$, satisfazendo: $Ie_i = e'_i$ e $Ie'_i = -e_i$.

Def.2: Variedade Complexa

Diz-se que $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ é uma variedade complexa de dimensão complexa n, se:

(i) $\mathcal{M}$ for um espaço de Hausdorff;

(ii)O atlas $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ for um recobrimento aberto de $\mathcal{M}$, isto é $\mathcal{M} = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$;

(iii)ψ_α são homeomorfismos de $\mathcal{U}_\alpha$ em um conjunto aberto $D \subset \mathcal{C}^n$ satisfazendo: $\forall \mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{U}_\beta$ com $\mathcal{U}_\alpha \bigcap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, tem-se as funções $f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \bigcap \mathcal{U}_\beta) \to \psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \bigcap \mathcal{U}_\beta)$ e $f_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \bigcap \mathcal{U}_\beta) \to \psi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \bigcap \mathcal{U}_\beta)$ ambas holomórficas.

Numa variedade complexa diz-se que o atlas $\mathcal{U} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ define um sistema de vizinhanças de coordenadas holomórficas em $\mathcal{M}$.

Dados $\mathcal{U}$, um conjunto aberto de $\mathcal{M}$, e ψ, um homeomorfismo de $\mathcal{U}$ em um aberto $D \subset \mathcal{C}^n$, diz-se que $(\mathcal{U}, \psi)$ é uma vizinhança de coordenadas holomórficas de $\mathcal{M}$ se satisfizer à condição: $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$, então as funções $\psi \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}_\alpha) \to \psi(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}_\alpha)$ e $\psi_\alpha \circ \psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}_\alpha) \to \psi_\alpha(\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}_\alpha)$ são holomórficas.

Se identificarmos $\mathcal{C}^n$ com $\mathcal{R}^{2n}$ (fazendo $z^i = x^i + ix^{\bar{i}}$), podemos parametrizar a variedade complexa com um sistema de coordenadas reais. Assim, dada a vizinhança de coordenadas holomórficas $(\mathcal{U}, \psi)$, um ponto $p \in \mathcal{U}$ é parametrizado como $\psi(p) = (z^i(p))$ ou, também, $\psi(p) = (x^i(p), x^{\bar{i}}(p))$. As funções holomórficas $f_{\alpha\beta}$, entre abertos de $\mathcal{C}^n$, consideradas como funções entre abertos de $\mathcal{R}^{2n}$ são, então, analíticas, pois as partes real e imaginária de uma função holomórfica são analíticas. Tem-se, assim, que uma variedade complexa n-dimensional é uma variedade real analítica 2n-dimensional. Seja (z^i) um sistema local de coordenadas complexas na vizinhança $\mathcal{U}$ de um ponto $p \in \mathcal{M}$. Adotando o sistema local de coordenadas reais $(x^i, x^{\bar{i}})$, tem-se $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p, (\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}})_p\}$ como base de $T_p(\mathcal{M})$ e $\{(dx^i)_p, (dx^{\bar{i}})_p\}$ como base de $T_p^*(\mathcal{M})$.

Def.3:<u>Estrutura Quase-Complexa</u>

(i)Consideremos $\mathcal{M}$ uma variedade 2n-dimensional (não necessariamente complexa) e que, a cada ponto $p \in \mathcal{M}$, tenhamos definida uma estrutura complexa $\mathcal{I}_p$ em $T_p(\mathcal{M})$, satisfazendo à seguinte condição: sendo $(x^1, ..., x^{2n})$ um arbitrário sistema de coordenadas reais em uma vizinhança aberta $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$ e, dado $p \in \mathcal{U}$, seja a representação matricial de $\mathcal{I}_p$ escrita como $\mathcal{I}_p(\frac{\partial}{\partial x^i})_p = \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{I}_i^k(p)(\frac{\partial}{\partial x^k})_p$ onde as funções $\mathcal{I}_i^k(p)$ são de classe C^∞.

Diz-se, então, que a correspondência $p \to \mathcal{I}_p$ é uma estrutura quase-complexa em $\mathcal{M}$. Uma variedade onde se tem definida uma estrutura quase-complexa é dita uma variedade quase-complexa.

(ii)Se $\mathcal{M}$ for uma variedade complexa então, dado o sistema local de coordenadas complexas (z^i) na vizinhança de $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, tem-se o sistema de coordenadas reais associado, $(x^i, x^{\bar{i}})_{i=1,\ldots 2n}$, em relação ao qual se escreve a transformação $\mathcal{I}_p$ na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_p((\frac{\partial}{\partial x^i})_p) &= (\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}})_p \\ \mathcal{I}_p((\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}})_p) &= -(\frac{\partial}{\partial x^i})_p \quad , \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde se pode mostrar que essa definição independe do sistema de coordenadas utilizado. No caso de uma variedade complexa, tem-se, portanto, que podemos escolher um sistema de coordenadas reais $(x^i)_{i=1,\ldots,2n}$, tal que as funções $\mathcal{I}_i^k(p)$ sejam constantes, o que constitui um caso particular da definição geral dada em (i). Em termos do sistema de coordenadas complexos (z^i), pode-se estender a transformação $\mathcal{I}_p$ a T_p^c (a complexificação de T_p), definindo

$$\mathcal{I}_p(\frac{\partial}{\partial z^k})_p = i(\frac{\partial}{\partial z^k})_p \quad e \quad \mathcal{I}_p(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k})_p = -i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k})_p \quad , \quad com\ k = 1, ..., n. \tag{1.2}$$

<u>Obs.</u>:

É neste sentido que se diz que, numa variedade complexa, a existência de um sistema de vizinhanças complexas define uma estrutura complexa em $\mathcal{M}$ ([16] pag. 49). No item (ii) acima, vemos como as coordenadas complexas locais (z^i) fornecem-nos uma base natural, $((\frac{\partial}{\partial x^i})_p, (\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}})_p)$ (via $z^i \to x^i + i x^{\bar{i}}$) para $T_p(\mathcal{M})$, relativa à qual escrevemos a transformação $\mathcal{I}_p$ conforme a eq.(1.1) com $\mathcal{I}_p^2 = -1$ (essa é a base mencionada na def.1). Além disso, a independência da transformação, relativa ao sistema de coordenadas complexo adotado, permite definitivamente caracterizar $\mathcal{I}_p$ como uma estrutura complexa.

<u>Obs.</u>:

Outro ponto que deve ser observado é que, numa variedade quase-complexa 2n-dimensional, não se dispõe, necessariamente, de um sistema de coordenadas $(x^i, x^{\bar{i}})_{i=1,\ldots,n}$ relativo ao qual se possa escrever a eq.(1.1). O que se tem é, por definição, tão somente a condição do item (i). O resultado a seguir permite caracterizar quando uma variedade 2n-dimensional, admitindo uma estrutura quase-complexa, é uma variedade complexa.

Resultado 1:

Considere uma variedade 2n-dimensional, $\mathcal{M}$, munida de uma estrutura quase-complexa, $\mathcal{I}$. Se existir um recobrimento aberto, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$, de $\mathcal{M}$ satisfazendo à seguinte condição: existe um sistema de coordenadas locais, $(x^i, x^{\bar{i}})$, em cada aberto $\mathcal{U}_\alpha$ de $\mathcal{U}$ tal que, para cada $p \in \mathcal{U}_\alpha$, tem-se as equações (1.1), então a variedade $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa e $\mathcal{I}$ é a estrutura quase-complexa associada a $\mathcal{M}$ ([17] pag.115).

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade quase-complexa e $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ o espaço dos campos vetoriais em $\mathcal{M}$. A estrutura quase-complexa $\mathcal{I}$ define uma transformação linear em $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, $X \to \mathcal{I}X$ definida por $(\mathcal{I}X)_p \equiv \mathcal{I}_p X_p$ e satisfazendo $\mathcal{I}^2(X) = -X, \ \ \forall X \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$.

Seja, agora, $\mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ a complexificação de $\mathcal{H}(\mathcal{M})$. Então, um elemento genérico $A \in \mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ é expresso de maneira única na forma $A = X + iY$ com $X, Y \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ e o valor de A em cada ponto $p \in \mathcal{M}$ é dado por $A_p = X_p + iY_p \in T_p^c(\mathcal{M})$.

Consideremos agora a extensão de $\mathcal{I}$ de $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ a $\mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ dada por $\mathcal{I}(X + iY) = \mathcal{I}X + i\mathcal{I}Y$.

Assim, um vetor arbitrário $A \in \mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ pode ser escrito, também, como $A = A^+ + A^-$ onde $A^+ = \frac{A - i\mathcal{I}A}{2}$ e $A^- = \frac{A + i\mathcal{I}A}{2}$. Aqui tem-se $\mathcal{I}A^+ = iA^+$ e $\mathcal{I}A^- = -iA^-$, e diz-se que A^+ é do tipo holomórfico e A^- é do tipo anti-holomórfico.

Denotando-se $\mathcal{H}^+(\mathcal{M})$, $\mathcal{H}^-(\mathcal{M}) \subset \mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ respectivamente, os conjuntos dos vetores do tipo holomórfico e anti-holomórfico de $\mathcal{H}^c(\mathcal{M})$, tem-se que $\mathcal{H}^c(\mathcal{M}) = \mathcal{H}^+(\mathcal{M}) \oplus \mathcal{H}^-(\mathcal{M})$.

Definimos o anti-comutador $[\ \ ,\ \ ]$ entre dois vetores $A = X + iY, B = X' + iY'$ em $\mathcal{H}^c(\mathcal{M})$ como $[A, B] = ([X, X'] - [Y, Y']) + i([X, Y'] + [Y, X'])$.

Def.4:Integrabilidade da Estrutura Complexa

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade quase complexa e $\mathcal{I}$ uma estrutura complexa em $\mathcal{M}$. Considere $\mathcal{H}^c(\mathcal{M})$. Diz-se que $\mathcal{I}$ é integrável se $\forall A, B \in \mathcal{H}^c(\mathcal{M})$, tivermos $[A, B] \in \mathcal{H}^c(\mathcal{M})$.

Considere a transformação $\mathcal{S} : \mathcal{H}(\mathcal{M}) \times \mathcal{H}(\mathcal{M}) \to \mathcal{H}(\mathcal{M})$, definida por $\mathcal{S}(U, V) = [U, V] + \mathcal{I}[\mathcal{I}U, V] + \mathcal{I}[U, \mathcal{I}V] - [\mathcal{I}U, \mathcal{I}V]$. $\mathcal{S}$ é uma forma bilinear anti-simétrica, isto é, tem-se que: $\mathcal{S}(U + U', V) = \mathcal{S}(U, V) + \mathcal{S}(U', V)$, $\mathcal{S}(U, V + V') = \mathcal{S}(U, V) + \mathcal{S}(U, V')$, $\mathcal{S}(fU, V) = \mathcal{S}(U, fV) = f\mathcal{S}(U, V)$ e $\mathcal{S}(U, V) = -\mathcal{S}(U, V)$, onde $f \in C^\infty(\mathcal{M})$.

Resultado 2:

Uma estrutura quase-complexa $\mathcal{I}$ é dita completamente integrável se e somente se $\mathcal{S}(U, V) = 0$ ([17] pag.118).

Resultado 3:

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade analítica 2n-dimensional, e seja $\mathcal{I}$ uma estrutura quase-complexa C^w em $\mathcal{M}$. Se $\mathcal{I}$ é integrável, então $\mathcal{M}$ é uma variedade complexa e $\mathcal{I}$ é uma estrutura quase-complexa associada a $\mathcal{M}$ ([17] pag.169).

Def.5:Métrica Riemmaniana

Sejam $p \in \mathcal{M}$ e $g_p : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \to \mathcal{R}$ um produto interno definido positivamente sobre $T_p(\mathcal{M})$. Dado um sistema de coordenadas locais (x^i) em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, tomam-se as funções $g_{ij} : \mathcal{U} \to \mathcal{R}$, definidas por $g_{ij}(q) \equiv g_q((\frac{\partial}{\partial x^i})_q, (\frac{\partial}{\partial x^j})_q)$, com $q \in \mathcal{U}$. Se as funções g_{ij} forem C^r, então serão C^r em qualquer sistema de coordenadas de $\mathcal{U}$. Assim, se todas as funções g_{ij} forem de classe C^r, em uma vizinhança de cada ponto de $\mathcal{M}$ diz-se que a transformação que associa a cada ponto $p \in \mathcal{M}$ um produto interno definido positivamente g_p em $T_p(\mathcal{M})$, $g : p \to g_p$, é uma métrica Riemanniana de classe C^r, e as funções g_{ij} são ditas as componentes da métrica relativamente ao sistema de coordenadas locais (x^i).

Def.6:Métrica Hermitiana

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável complexa e g uma métrica Riemanniana em $\mathcal{M}$. Dado $p \in \mathcal{M}$, consideremos, agora, a extensão de g_p à complexificação $T_p^c(\mathcal{M})$ de $T_p(\mathcal{M})$: $g_p(U + iV, U' + iV') \equiv (g_p(U, U') - g_p(V, V')) + i(g_p(U, V') + g_p(V, U'))$, $\forall U,\ V,\ U',\ V' \in T_p(\mathcal{M})$. A métrica Riemanniana g é dita Hermitiana se verificar: $g_p(\mathcal{I}_p U, \mathcal{I}_p V) = g_p(U, V)$ $\forall p \in \mathcal{M}$ e $\forall U,\ V \in T_p(\mathcal{M})$.

Consideremos um sistema de coordenadas complexas, (z^i), e ponhamos

$$
\begin{aligned}
&g_{\alpha\beta}(p) = g_p((\tfrac{\partial}{\partial z^\alpha})_p, (\tfrac{\partial}{\partial z^\beta})_p) \quad , \quad g_{\alpha\overline{\beta}}(p) = g_p((\tfrac{\partial}{\partial z^\alpha})_p, (\tfrac{\partial}{\partial z^{\overline{\beta}}})_p) \quad , \\
&g_{\overline{\alpha}\beta}(p) = g_p((\tfrac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}})_p, (\tfrac{\partial}{\partial z^\beta})_p) \quad , \quad g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(p) = g_p((\tfrac{\partial}{\partial z^{\overline{\alpha}}})_p, (\tfrac{\partial}{\partial z^{\overline{\beta}}})_p) \quad com\ \alpha,\ \beta = 1, ..., n.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

As funções $g_{\alpha\beta}$, $g_{\overline{\alpha}\beta}$, $g_{\alpha\overline{\beta}}$ e $g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}$ são as componentes da métrica relativamente a (z^i) e, em termos destas componentes, tem-se que a condição da métrica ser Hermitiana é expressa como: $g_{\alpha\beta} = g_{\overline{\alpha}\overline{\beta}} = 0$. Além disto, $g_{\overline{\alpha}\beta} = \overline{g}_{\alpha\overline{\beta}}$.

Def.7:Variedade de Kähler

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa com uma métrica Hermitiana, g. Definamos em $\mathcal{M}$ uma 2-forma fundamental w, $p \in \mathcal{M} \rightarrow w_p$, onde se tem $w_p : T_p(\mathcal{M}) \times T_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}$, definida por $w_p(U, V) \equiv g_p(U, \mathcal{I}_p V)$, $\forall U, V \in T_p(\mathcal{M})$. Diz-se que a métrica Hermitiana g é Kähleriana se tivermos a 2-forma w fechada, isto é: $dw = 0$. Neste caso, diz-se que a variedade $\mathcal{M}$ é uma variedade Kähleriana.

Nas definições dadas anteriormente, fez-se uso de uma notação implícita, onde não se precisou caracterizar nenhum objeto por meio de suas componentes. Vamos, agora, fazer o mesmo tratamento mas considerando as componentes dos objetos.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade complexa $2n$-dimensional, $p \in \mathcal{M}$, e $(X^I)_{I=1,...,2n}$ um sistema de coordenadas definido na vizinhança de $\mathcal{M}$. Aqui, (X^I) denota um arbitrário sistema de coordenadas [1]: $(X^I) = (x^i)_{i=1,...,2n}$ no caso real e $(X^I) = (z^i, \overline{z}^i)_{i=1,...,n}$ no caso complexo, e $\{\partial_I\}$ denota a base de $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, onde por $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ denota-se tanto $T_p(\mathcal{M})$ (quando se

[1]Quando não for necessário fazer referência a um sistema de coordenadas específico, entende-se que estamos usando a notação anterior.

utiliza um sistema de coordenadas reais) quanto $T_p^c(\mathcal{M})$(quando se utiliza um sistema de coordenadas complexo).

Considere a estrutura complexa $\mathcal{I}_p : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \to \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$. Ela atua em um vetor $V = V^I\partial_I$ como, $\mathcal{I}(V) = \mathcal{I}^I{}_J V^J\partial_I = V' \equiv V'^I\partial_I$. O fato de termos $\mathcal{I}^2 = -1$ implica que $\mathcal{I}^2(V) = \mathcal{I}(V'^I\partial_I) = (\mathcal{I}^I{}_K V'^K)\partial_I = \mathcal{I}^I{}_K\mathcal{I}^K{}_J V^J\partial_I = -1V = -V^I\partial_I$ o que nos dá a relação $\mathcal{I}^I{}_K\mathcal{I}^K{}_J = -\delta^I_J$.

Adotando $(z^i, \overline{z}^i)$ como um sistema de coordenadas complexas numa vizinhança de $p \in \mathcal{M}$, e sendo $\{\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial z^i}, \partial_{\bar{i}} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}^i}\}$ base de T_p^c, consideremos a definição (1.2). Seja $V \in T_p^c(\mathcal{M}), V = V^I\partial_I \equiv V^i\partial_i + V^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$. Então, de (1.2), obtem-se,

$$V' = V'^I\partial_I = \mathcal{I}_p(V) = (iV^i)\partial_i + (-iV^{\bar{i}})\partial_{\bar{i}} \tag{1.4}$$

ou, matricialmente,

$$V' = \mathcal{I}_p(V) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} V'^i \\ V'^{\bar{i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}^i_{p\,j} & \mathcal{I}^i_{p\,\bar{j}} \\ \mathcal{I}^{\bar{i}}_{p\,j} & \mathcal{I}^{\bar{i}}_{p\,\bar{j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^i \\ V^{\bar{i}} \end{pmatrix}$$

de onde se conclui:

$$\mathcal{I}_p = \begin{pmatrix} i\delta^i_j & 0 \\ 0 & -i\delta^{\bar{i}}_{\bar{j}} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Isto mostra-nos então que, dada uma estrutura complexa $\mathcal{I}$, pode-se encontrar um sistema de coordenadas relativo ao qual ela assume a forma acima. Quando escrita nessa forma, diz-se que está na forma padrão.

Seja a transformação genérica $A : T_p^c(\mathcal{M}) \to T_p^c(\mathcal{M})$, definida por $A(V) = A^I_J V^J\partial_I$, e da qual $\mathcal{I}$ é um caso particular. Essa transformação A é dita uma 1-forma vetorial. Dados A e B 1-formas vetoriais, define-se o tensor de Niejenhuis associado, $\mathcal{N}_{AB}$, como sendo uma transformação $\mathcal{N}_{AB} : T_p^c(\mathcal{M}) \times T_p^c(\mathcal{M}) \to T_p^c(\mathcal{M})$, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{AB}(U,V) \equiv {} & [AU, BV] + [BU, AV] + AB[U,V] + BA[U,V] \\ & -A[U,BV] - A[BU,V] - B[U,AV] - B[AU,V] \end{aligned} \tag{1.6}$$

A transformação $\mathcal{S}$, dada na def.(4), obtem-se a partir do tensor de Niejenhuis associado à estrutura complexa $\mathcal{I}$ como: $\mathcal{S}(U,V) = -\frac{1}{2}\mathcal{N}_{II}(U,V)$ e a condição de integrabilidade resulta $\mathcal{N}_{II}(U,V) = 0$. Adotando um sistema de coordenadas local (X^I), escreve-se, $\mathcal{N}_{AB} \equiv \mathcal{N}_{ABMN}{}^P \partial_P dX^M \wedge dX^N$, o qual, de (1.6) permite-nos obter as componentes $\mathcal{N}_{ABMN}{}^P$:

$$\begin{aligned} N_{ABMN}{}^P &= A^K_M \partial_K B^P_N - B^K_N \partial_K A^P_M + B^K_M \partial_K A^P_N - A^K_N \partial_K B^P_M \\ &\quad - A^P_K \partial_M B^K_N + A^P_K \partial_N B^K_M - B^P_K \partial_M A^K_N + B^P_K \partial_N A^K_M \quad . \end{aligned} \tag{1.7}$$

Também,

$$N_{\mathcal{I}\mathcal{I}MN}{}^P = 2(\mathcal{I}^K{}_M \partial_K \mathcal{I}^P{}_N - \mathcal{I}^K{}_N \partial_K \mathcal{I}^P{}_M - \mathcal{I}^P{}_K \partial_M \mathcal{I}^K{}_N + \mathcal{I}^P{}_K \partial_N \mathcal{I}^K{}_M) \ . \tag{1.8}$$

A condição de integrabilidade é independente da conexão e da métrica. Quando a estrutura quase-complexa é integrável, diz-se, comumente, que ela é uma estrutura complexa na variedade e uma variedade munida de uma estrutura complexa é dita uma variedade complexa, sendo isso verificado no res.(3).

Seja $p \in \mathcal{M}$ e g_p uma métrica Hermitiana. Dados $U = U^I \partial_I$ e $V = V^K \partial_K$ vetores em $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, tem-se, $g_p(\mathcal{I}_p U, \mathcal{I}_p V) = \mathcal{I}_{pJ}^{\ I} \mathcal{I}_{pL}^{\ K}\, g_{pIK}\, U^J V^L = g_p(U,V) = g_{pJL} U^J V^L$, isto é, $\mathcal{I}^I{}_J \mathcal{I}^K{}_L\, g_{IK} = g_{JL}$ expressa, em componentes, a condição da métrica ser Hermitiana.

A 2-forma fundamental da def.(7) escreve-se, também, como $w_p \equiv \frac{1}{2} w_{PIJ} dX^I \wedge dX^J$ que, atuando sobre dois vetores U e V, dá $w_{pIJ} U^I V^J$. Da sua definição, $w_P(U,V) \equiv g_p(U, \mathcal{I}_p V)$, obtém-se, $w_{pIJ} U^I V^J = g_{pIK} \mathcal{I}_{pJ}^{\ K} U^I V^J$, isto é, $w_{IJ} = g_{IK} \mathcal{I}^K{}_J \equiv \mathcal{I}_{IJ}$. Daí,

$$w \equiv \frac{1}{2} \mathcal{I}_{IJ} dX^I \wedge dX^J \quad . \tag{1.9}$$

Se esta 2-forma é fechada, tem-se: $\partial_{[I} \mathcal{I}_{JK]} = 0$.

Em termos das componentes da estrutura complexa e da métrica, caracteriza-se, então, uma variedade de Kähler como satisfazendo às três condições:

$$\mathcal{I}^I{}_K \mathcal{I}^K{}_J = -\delta^I_J \quad , \tag{1.10}$$

$$\mathcal{I}^I{}_K \mathcal{I}^J{}_L g_{IJ} = g_{KL} \quad e \tag{1.11}$$

$$\mathcal{D}\mathcal{I} \equiv \partial_{[I} \mathcal{I}_{JK]} = 0 \quad . \tag{1.12}$$

A última destas diz-nos que $\mathcal{I}$ é paralela. Estas equações garantem que $\mathcal{I}$ tem um tensor de Niejenhuis nulo e que a métrica é Kähler. Inversamente, se a 2-forma fundamental for fechada e o tensor de Niejenhuis se anular, então a estrutura complexa é paralela. A identidade de Bianchi relacionada à eq. (1.12) è escrita como,

$$\mathcal{I}^I{}_J \mathcal{R}_{LM}{}^J{}_N - \mathcal{R}_{LM}{}^I{}_J \mathcal{I}^J{}_N = 0 \quad , \tag{1.13}$$

onde $\mathcal{R}$ é o tensor de curvatura. De (1.13), e da condição de ciclicidade

$$\mathcal{R}_{IJKL} + \mathcal{R}_{IKLJ} + \mathcal{R}_{ILJK} = 0 \quad , \tag{1.14}$$

mostra-se que o tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{IJ} = \mathcal{R}_{KI}{}^K{}_J$ pode ser escrito na forma:

$$\mathcal{R}_{IJ} = \frac{1}{2}\mathcal{I}^K{}_L \mathcal{I}^M{}_J \mathcal{R}_{IM}{}^L{}_K \quad , \tag{1.15}$$

o que se verifica qualquer que seja a estrutura complexa.

Em uma variedade Kähleriana é conveniente voltarmos à notação em termos de coordenadas complexas. Neste caso, eq.(1.9) assume a forma,

$$w = \frac{1}{2} i g_{i\bar{j}} dz^i \wedge dz^{\bar{j}} \quad , \tag{1.16}$$

onde $g_{i\bar{j}}$ é Hermitiana e (z^i) são as coordenadas holomórficas associadas à estrutura complexa na forma padrão. A condição de Kähler (1.12) é dada, então, por $\partial_k g_{\bar{i}j} - \partial_j g_{\bar{i}k} = 0$, de modo que localmente, $g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K$, onde K é o potencial de Kähler. Assim, tem-se que as únicas componentes não-nulas da conexão de Christoffel são

$$\Gamma^k_{ij} = g^{k\bar{l}} \partial_i g_{j\bar{l}} \tag{1.17}$$

e seus respectivos conjugados complexos, $\Gamma^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}}$. O tensor de curvatura correspondente é dado por

$$\mathcal{R}_{i\bar{j}}{}^k{}_l = -\partial_{\bar{j}} \Gamma^k_{il} \quad , \mathcal{R}_{i\bar{j}}{}^{\bar{k}}{}_{\bar{l}} = \partial_i \Gamma^{\bar{k}}_{\bar{j}\bar{l}} \quad . \tag{1.18}$$

O fato das curvaturas não serem nulas, decorre do fato de Γ^k_{ij} não ser holomórfico. A curvatura tem as seguintes propriedades:

$$\mathcal{R}_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\mathcal{R}_{\bar{j}ik\bar{l}} = -\mathcal{R}_{i\bar{j}\bar{l}k} = \mathcal{R}_{k\bar{j}i\bar{l}} = \mathcal{R}_{i\bar{l}k\bar{j}} \quad , \tag{1.19}$$

e o tensor de Ricci $\mathcal{R}_{i\bar{j}} = \mathcal{R}_{k\bar{j}}{}^{k}{}_{i}$ é dado por

$$\mathcal{R}_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \ln det g_{k\bar{l}} \quad . \tag{1.20}$$

Vamos, agora, caracterizar uma variedade hyperKähleriana.

Uma variedade 4n-dimensional é dita quaterniônica se admite uma segunda estrutura complexa $\mathcal{J}$ tal que,

$$\mathcal{J}^2 = -1 \quad e \quad \mathcal{I}\mathcal{J} + \mathcal{J}\mathcal{I} = 0 \quad . \tag{1.21}$$

Duas estruturas quase-complexas $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ geram uma terceira estrutura complexa $\mathcal{K} = \mathcal{I}\mathcal{J}$. A variedade é quaterniônica integrável se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ forem integráveis:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}\mathcal{I}} = \mathcal{N}_{\mathcal{J}\mathcal{J}} = 0 \quad , \tag{1.22}$$

e compatíveis:

$$\mathcal{N}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = 0 \quad . \tag{1.23}$$

Def.8: Variedade hyperKähler

Uma variedade quaterniônica integrável é dita uma variedade hyperKähler.

De (1.23), tem-se que $\mathcal{K}$ também é integrável porque

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}\mathcal{K}LM}{}^{N} = -\mathcal{N}_{\mathcal{I}\mathcal{J}PQ}{}^{N}(\mathcal{I}^{P}{}_{L}\mathcal{J}^{Q}{}_{M} - \mathcal{I}^{P}{}_{M}\mathcal{J}^{Q}{}_{L}) - \mathcal{K}^{N}{}_{P}\mathcal{N}_{\mathcal{I}\mathcal{J}QR}{}^{P}(\mathcal{I}^{Q}{}_{L}\mathcal{I}^{R}{}_{M} - \mathcal{J}^{Q}{}_{L}\mathcal{J}^{R}{}_{M}) \quad . \tag{1.24}$$

Se $\mathcal{I}$ estiver na sua forma padrão diagonal, então $\mathcal{J}$ e $\mathcal{K}$ assumem uma forma anti-diagonal:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : X^i \to X'^i &= iX^i \quad , \\ \mathcal{J} : X^i \to X'^i &= \mathcal{J}^i{}_{\bar{j}} X^{\bar{j}} \quad , \\ \mathcal{K} : X^i \to X'^i &= \mathcal{K}^i{}_{\bar{j}} X^{\bar{j}} \quad , \\ onde \;\; \mathcal{K}^i{}_{\bar{j}} = i\mathcal{J}^i{}_{\bar{j}} \quad e \quad & X^I = (X^i, X^{\bar{i}}) \quad . \end{aligned} \tag{1.25}$$

Usando a eq.(1.23), com $\mathcal{I}$ substituído por $\mathcal{K} = \mathcal{I}\mathcal{J}$, temos que

$$\mathcal{R}_{LM} \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{K}^{N}{}_{P}\mathcal{K}^{Q}{}_{M}\mathcal{R}_{LQ}{}^{P}{}_{N}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathcal{I}^N{}_R\mathcal{J}^R{}_P\mathcal{K}^Q{}_M\mathcal{R}_{LQ}{}^P{}_N \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{I}^N{}_R\mathcal{J}^P{}_N\mathcal{K}^Q{}_M\mathcal{R}_{LQ}{}^R{}_P \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{K}^P{}_R\mathcal{K}^Q{}_M\mathcal{R}_{LQ}{}^R{}_P \\
&= -\mathcal{R}_{LM} \quad , \qquad (1.26)
\end{aligned}
$$

de modo que, em uma variedade hyperKähler, o tensor de Ricci anula-se. Na obtenção de (1.26), utilizou-se (1.13) para $\mathcal{J}$. Em uma variedade hyperKähler há três equações do tipo (1.13) para $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}$ e o grupo de holonomia é $Sp(n)$. Em notação complexa, o fato de

$$
\mathcal{R}_{i\bar{j}} = -\partial_{\bar{j}}\Gamma^k_{ik} \qquad (1.27)
$$

se anular implica que Γ^k_{ik} é holomórfico. Inversamente, uma variedade de Kähler 4n-dimensional com tensor de Ricci nulo é uma variedade hyperKähler.

Resumindo, uma variedade com duas estruturas complexas linearmente independentes, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$, e com $\mathcal{K}$ dado por $\mathcal{K} = \mathcal{I}\mathcal{J}$ ou, equivalentemente, uma variedade com três estruturas complexas I_A, $A = 1, 2, 3$, satisfazendo:

$$
\begin{aligned}
\{\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B\} &= -2\delta_{AB} \quad , \qquad (1.28) \\
\mathcal{I}_A\, g\, \mathcal{I}_A{}^t &= g \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

e

$$
\mathcal{D}\mathcal{I}_A = 0 \quad , \qquad (1.30)
$$

é uma variedade hyperKähler. Usualmente, existe uma infinidade de estruturas complexas parametrizadas pela esfera S_2, todas elas admitindo, contudo, uma estrutura comum:

$$
\mathcal{J} = a\mathcal{I} + b\mathcal{J} + c\mathcal{K} \quad , \qquad (1.31)
$$

satisfazendo

$$
\mathcal{J}^2 = -1 \qquad (1.32)
$$

quando $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Neste caso, pode-se definir três formas de Kähler do tipo (1.9).

Se $\mathcal{I}$ estiver na forma padrão, eq.(1.5), a segunda forma de Kähler é dada por

$$w^{\mathcal{J}} = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{ij} dz^i \wedge dz^j \quad , \tag{1.33}$$

onde $\mathcal{J}_{ij} = g_{i\bar{k}} \mathcal{J}^{\bar{k}}{}_j$ é holomórfico.

1.2 A Álgebra das Supersimetrias N=2,3,4.

A supersimetria usual, N=1, é definida pela sua ação linear sobre um supercampo Φ de acordo com:

$$\delta\Phi = i(\epsilon Q - \bar{\epsilon}\overline{Q})\Phi \quad , \tag{1.34}$$

enquanto as supersimetrias adicionais escrevem-se como

$$\delta_A \Phi = i\mathcal{I}_A(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi \quad , A = 1, 2, 3 \tag{1.35}$$

onde ϵ_A são três parâmetros Grassmannianos, e se supõe que não haja soma nos índices repetidos A. As supersimetrias adicionais comutam com a supersimetria N=1.

Faremos, agora, o cálculo do fechamento da álgebra N=4-supersimétrica usando supercampos reais N=1. As estruturas complexas, $\mathcal{I}_A$, serão tratadas todas da mesma forma, sem nenhuma referência à forma padrão. Deseja-se mostrar o resultado,

$$[\delta_A, \delta_B]\Phi = -\{\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B\}(\epsilon_A \epsilon_B D^2 + \bar{\epsilon}_A \bar{\epsilon}_B \overline{D}^2)\Phi + [\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B](\epsilon_A \bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_A \epsilon_B)\nabla\overline{D}\Phi \quad . \tag{1.36}$$

Para provar a eq.(1.36), faz-se uso das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi &= -(\epsilon_B \epsilon_A D^2 + \bar{\epsilon}_B \bar{\epsilon}_A \overline{D}^2)\Phi + (\epsilon_B \bar{\epsilon}_A - \bar{\epsilon}_B \epsilon_A) D\overline{D}\Phi && (1.37)\\
\delta_A \mathcal{I}^M_{B\ N} &= (\partial_P \mathcal{I}^M_{B\ N})\mathcal{I}^P_{A\ Q}(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi^Q \quad , && (1.38)\\
(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\mathcal{I}^M_{A\ N} &= (\partial_P \mathcal{I}^M_{A\ N})(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi^P \quad , && (1.39)
\end{aligned}$$

onde $\partial_M \equiv \frac{\partial}{\partial \Phi^M}$. Além disto, usa-se o fato de que as estruturas $\mathcal{I}_A$ são paralelas, o que se expressa como

$$\partial_M \mathcal{I}^N_{A\ P} + \Gamma^N_{AQ}\mathcal{I}^Q_{A\ P} - \Gamma^Q_{AP}\mathcal{I}^N_{A\ Q} = 0 \quad . \tag{1.40}$$

O cálculo segue como,

$$\begin{aligned}
[\delta_A, \delta_B]\Phi &= \delta_A \delta_B \Phi - \delta_B \delta_A \Phi \\
&= i\delta_A[\mathcal{I}_B(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi] - i\delta_B[\mathcal{I}_A(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi] \\
&= i(\delta_A \mathcal{I}_B)(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi - \mathcal{I}_B[(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\mathcal{I}_A](\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi \\
&- \mathcal{I}_B \mathcal{I}_A(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi - (A \rightleftharpoons B) \\
&= \{\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B\}(\epsilon_A \epsilon_B D^2 + \bar{\epsilon}_A \bar{\epsilon}_B \overline{D}^2)\Phi + [\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B](\epsilon_A \bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_A \epsilon_B) D\overline{D}\Phi \\
&\quad -(\delta_A \mathcal{I}_B)(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi + (\delta_B \mathcal{I}_A)(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi \qquad (1.41) \\
&\quad +\mathcal{I}_B[(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\mathcal{I}_A](\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi - \mathcal{I}_A[(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\mathcal{I}_B](\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi \quad ,
\end{aligned}$$

onde se usou a eq.(1.37). Das eqs.(1.38) e (1.39), encontra-se:

$$\begin{aligned}
[\delta_A, \delta_B]\Phi^M &= -\{\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B\}^M{}_N(\epsilon_A \epsilon_B D^2 + \bar{\epsilon}_A \bar{\epsilon}_B \overline{D}^2)\Phi^N - [\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B]^M{}_N(\epsilon_A \bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_A \epsilon_B) D\overline{D}\Phi^N \\
&\quad +L_{ABNP}{}^M[(\epsilon_A D - \bar{\epsilon}_A \overline{D})\Phi^N][(\epsilon_B D - \bar{\epsilon}_B \overline{D})\Phi^P] \quad , \qquad (1.42)
\end{aligned}$$

onde

$$L_{ABNP}{}^M = \mathcal{I}_A{}^Q{}_N \partial_Q \mathcal{I}_B{}^M{}_P - \mathcal{I}_B{}^Q{}_P \partial_Q \mathcal{I}_A{}^M{}_N + \mathcal{I}_B{}^M{}_Q \partial_P \mathcal{I}_A{}^Q{}_N - \mathcal{I}_A{}^M{}_Q \partial_N \mathcal{I}_B{}^Q{}_P \quad . \qquad (1.43)$$

De (1.40), tem-se que

$$L_{ABNP}{}^M = -\Gamma^Q_{NP}[\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_B]^M{}_Q \quad . \qquad (1.44)$$

Finalmente, inserindo (1.44) na eq.(1.42) e usando $\Gamma^M_{NP} = \Gamma^M_{PN}$, obtém-se (1.36).

Assim, provou-se que a álgebra N=4-supersimétrica exibe fechamento, desde que os supercampos satisfaçam às suas equações de movimento.

Vistas as propriedades gerais das variedades complexas que se mostram relevantes no estudo de modelos-σ supersimétricos, proceder-se-á, no capítulo sucessivo, à consideração explícita de modelos-σ N=1-supersimétricos formulados em um espaço-tempo do tipo D=(2+2).

Capítulo 2

Modelos-σ N=1-Supersimétricos no Espaço de AW.

Tendo em vista as potencialidades dos modelos-de-gauge construídos sobre o espaço de AW no que diz respeito à elaboração de teorias integráveis em 2 e 3 dimensões, propõe-se, neste capítulo, construir e discutir as propriedades de modelos-σ definidos neste espaço-tempo. Uma série de resultados peculiares emerge da construção, enriquecendo, assim, a associação, já conhecida de D=(1+1) e D=(3+1), entre supersimetria e variedades complexas via modelos-σ não-lineares.

Partindo dos resultados obtidos na referência [7] para o estudo da supersimetria simples no espaço-tempo D=(2+2), apresenta-se, nas três seções deste capítulo, a formulação no superespaço de modelos-σ não-lineares acoplados ao setor de Yang-Mills através do gauging das isometrias das variedades-alvo. Procurar-se-á, em todos os passos da construção, ressaltar as particularidades inerentes ao espaço de AW, como, por exemplo, a possibilidade de construir modelos-σ reais com espaço-alvo apresentando estrutura muito semelhante aos espaços de Kähler. Todo o material aqui apresentado constitui uma contribuição original ao tópico em questão [21].

2.1 O Modelo no Superespaço.

Na construção do modelo, seguiremos o método usado por Zumino [19] para gerar uma ação de um modelo-σ supersimétrico em D=(3+1) dimensões. Aqui, os campos escalares que definem o modelo-σ são as componentes mais baixas de um conjunto de supercampos quirais e antiquirais, (Φ^i, Ξ^i) $(i = 1...n)$, que, em D=(2+2), são convenientemente escritos como (nós adotamos as notações e convenções de [7])

$$\Phi^i = A^i + i\theta\psi^i + i\theta^2 F^i + i\tilde{\theta}\tilde{\partial\!\!\!/}\theta A^i + \frac{1}{2}\theta^2\tilde{\theta}\tilde{\partial\!\!\!/}\psi^i - \frac{1}{4}\theta^2\tilde{\theta}^2\Box A^i \quad , \tag{2.1}$$

$$\Xi^i = B^i + i\tilde{\theta}\tilde{\chi}^i + i\tilde{\theta}^2 G^i + i\theta\partial\!\!\!/\tilde{\theta} B^i + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^2\theta\partial\!\!\!/\tilde{\chi}^i - \frac{1}{4}\theta^2\tilde{\theta}^2\Box B^i \quad , \tag{2.2}$$

onde A, B são campos escalares complexos, ψ, $\tilde{\chi}$ são espinores de Weil e F, G são campos escalares auxiliares complexos. Deve-se observar que, contrariamente ao caso D=(3+1), a conjugação complexa não muda a quiralidade dos supercampos,

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^i = 0 \quad &\text{e} \quad \widetilde{D}_{\dot{\alpha}}\Phi^{*i} = 0 \ , \\ D_\alpha \Xi^i = 0 \quad &\text{e} \quad D_\alpha \Xi^{*i} = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.3}$$

com

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\tilde{\theta}^{\dot{\alpha}} \quad \text{e} \quad \widetilde{D}_{\dot{\alpha}} = \tilde{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\tilde{\partial}_{\dot{\alpha}\alpha}\theta^\alpha \quad , \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \{D_\alpha, \widetilde{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\,\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\,\partial_\mu \ , \ \{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\widetilde{D}_{\dot{\alpha}}, \widetilde{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \ , \\ [D_\alpha, \partial_\mu] &= [\widetilde{D}_{\dot{\alpha}}, \partial_\mu] = 0 \ , \end{aligned}$$

$\Phi^{*i}(\Xi^{*i})$ sendo o conjugado complexo de $\Phi^i(\Xi^i)$. Seguindo Zumino, nós tomamos por ação supersimétrica [1]

$$\mathcal{S} \ = \ 2\int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta}\ K(\Phi^i, \Xi^i; \Phi^{*i}, \Xi^{*i}) \quad , \tag{2.5}$$

onde o potencial K é uma função real. É imediato de (2.5) que a variedade gerada pelos campos escalares deve ser 4n-dimensional uma vez que termos envolvendo apenas uma

[1] $\int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta} \equiv \frac{1}{16}\int d^4x D^\alpha \widetilde{D}^{\dot{\alpha}} \widetilde{D}_{\dot{\alpha}} D_\alpha$

quiralidade, por exemplo funções de Φ^i e Φ^{*i} ou Ξ^i e Ξ^{*i}, não produziriam o termo cinético para o modelo-σ. Da expansão em componentes de (2.5), nós obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 2\int d^4x \left(\frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial B^j}\partial_\mu A^i \partial^\mu B^j + \frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial B^{*j}}\partial_\mu A^i \partial^\mu B^{*j} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 K}{\partial A^{*i} \partial B^j}\partial_\mu A^{*i} \partial^\mu B^j + \frac{\partial^2 K}{\partial A^{*i} \partial B^{*j}}\partial_\mu A^{*i} \partial^\mu B^{*j} + termos \ \ de \ \ inter. \right) \end{aligned} \quad ,(2.6)$$

onde, nessa última expressão, nós escrevemos apenas o termo cinético da ação, que nos dá a métrica da variedade como sendo,

$$g_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial B^j} & 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial B^{*j}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial B^i \partial A^j} & 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial B^i \partial A^{*j}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial A^{*i} \partial B^j} & 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial A^{*i} \partial B^{*j}} \\ \frac{\partial^2 K}{\partial B^{*i} \partial A^j} & 0 & \frac{\partial^2 K}{\partial B^{*i} \partial A^{*j}} & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.7}$$

onde

$$\begin{gathered} \mathcal{I} \equiv (I, \bar{I}) = (i, \hat{i}, \bar{i}, \bar{\hat{i}}), \quad I \equiv (i, \hat{i}) \ \ ; \ \ \hat{i} = i + n, \ \ \bar{i} = i + 2n, \ \ \bar{\hat{i}} = i + 3n \ \ , \\ \mathcal{I} = 1, ..., 4n \ \ e \ \ i = 1, ..., n \end{gathered} \quad . (2.8)$$

Equação (2.7) nos mostra que, em um espaço-tempo 4-dimensional com assinatura $(+,-,-,+)$ não é necessário que o modelo-σ supersimétrico esteja associado a uma variedade de Kähler, contrariamente ao que acontece em D=(3+1). A condição para termos uma métrica do tipo Kähler é que $g_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ seja híbrido [16] o que só será obtido se K admitir uma decomposição do tipo:

$$K(\Phi^i, \Xi^i; \Phi^{*i}, \Xi^{*i}) \ \ = \ \ H(\Phi^i, \Xi^{*i}) \ \ + \ \ H^*(\Phi^{*i}, \Xi^i) \quad . \tag{2.9}$$

Consequentemente, nesse caso, a métrica assume a forma

$$g_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & g_{I\bar{J}} \\ g_{\bar{I}J} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 H}{\partial A^i \partial B^{*j}} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 H^*}{\partial B^i \partial A^{*j}} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 H^*}{\partial A^{*i} \partial B^j} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial B^{*i} \partial A^j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.10}$$

Na expressão anterior de g_{IJ}, conseguimos exibir explicitamente o cárater anti-diagonal, que caracteriza a métrica de variedades de Kähler [16]. Essa variedade não é, contudo, a mais geral devido a ausência dos termos diagonais em cada bloco $g_{I\bar{J}}$. É interessante observar que o fato da variedade ser 4n-dimensional já nos assinala, neste estágio, a possibilidade de termos uma variedade hyperKähler, pois estes espaços têm esta dimensionalidade. Entretanto, tal formulação requer que tenhamos definidas três estruturas complexas na variedade, com as quais se faz a extensão supersimétrica do modelo (ver seção (3.2)).

Com essa escolha do potencial K (2.9), e usando as equações de movimento para eliminar os campos auxiliares, nós obtemos de (2.5) a ação total na forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; \int d^4x \Big(& \; 2\, h_{i\bar{\hat{j}}} \partial_\mu A^i \partial^\mu B^{*j} + 2\, h^*_{\bar{i}\hat{j}} \partial_\mu A^{*i} \partial^\mu B^j - \frac{1}{2} i\, h_{i\bar{\hat{j}}} \tilde{\chi}^{cj} \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^i \\
& -\frac{1}{2} i\, h_{i\bar{\hat{j}}} \psi^i \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{\chi}^{cj} - \frac{1}{2} i\, h^*_{\bar{i}\hat{j}} \tilde{\chi}^j \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^{ci} - \frac{1}{2} i\, h^*_{\bar{i}\hat{j}} \psi^{ci} \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \tilde{\chi}^j \\
& -\frac{1}{8} \big(h^{k\bar{\hat{l}}} \partial_{\bar{\hat{i}}} h_{k\bar{\hat{j}}} \partial_m h_{n\bar{\hat{l}}} - \partial_m \partial_{\bar{\hat{i}}} h_{n\bar{\hat{j}}} \big) \tilde{\chi}^{ci} \tilde{\chi}^{cj} \psi^m \psi^n \\
& -\frac{1}{8} \big(h^{*\bar{k}\hat{l}} \partial_{\hat{i}} h^*_{\bar{k}\hat{j}} \partial_{\bar{m}} h^*_{\bar{n}\hat{l}} - \partial_{\bar{m}} \partial_{\hat{i}} h^*_{\bar{n}\hat{j}} \big) \tilde{\chi}^i \tilde{\chi}^j \psi^{cm} \psi^{cn} \Big) \quad ,
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

onde nós denotamos

$$
h_{i\bar{\hat{j}}} = \frac{\partial^2 H}{\partial A^i \partial B^{*j}} \quad , \quad h^*_{\bar{i}\hat{j}} = \frac{\partial^2 H^*}{\partial B^i \partial A^{*j}} \quad , \tag{2.12}
$$

e as derivadas covariantes para os férmions são dadas por:

$$
\begin{cases}
\mathcal{D}_\mu \psi^i = \partial_\mu \psi^i + h^{i\bar{\hat{l}}} \partial_k h_{j\bar{\hat{l}}} \psi^k \partial_\mu A^j \quad , \\
\mathcal{D}_\mu \tilde{\chi}^{ci} = \partial_\mu \tilde{\chi}^{ci} + h^{\bar{\hat{i}}l} \partial_{\bar{\hat{k}}} h_{l\bar{\hat{j}}} \tilde{\chi}^{ck} \partial_\mu B^{*j} \quad , \\
\mathcal{D}_\mu \psi^{ci} = \partial_\mu \psi^{ci} + h^{*\bar{i}\hat{l}} \partial_{\bar{k}} h^*_{\bar{j}\hat{l}} \psi^{ck} \partial_\mu A^{*j} \quad , \\
\mathcal{D}_\mu \tilde{\chi}^i = \partial_\mu \tilde{\chi}^i + h^{*\hat{i}\bar{l}} \partial_{\hat{k}} h^*_{\bar{l}\hat{j}} \tilde{\chi}^k \partial_\mu B^j \quad .
\end{cases}
$$

Nas expressões anteriores $\psi^{\mathrm{c}} \equiv i\sigma_z \psi^*$ e $\tilde{\chi}^{\mathrm{c}} \equiv i\sigma_z \tilde{\chi}^*$ [7]. Usando-as, nós obtemos:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} i\, h_{i\bar{\hat{j}}} \tilde{\chi}^{cj} \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^i - \frac{1}{2} i\, h^*_{\bar{i}\hat{j}} \tilde{\chi}^j \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^{ci} &= 2Re\Big\{ -\frac{1}{2} i\, h_{i\bar{\hat{j}}} \tilde{\chi}^{cj} \tilde{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^i \Big\} \\
\Big(\tilde{\chi}^{ci} \tilde{\chi}^{cj} \psi^m \psi^n \Big)^* &= \chi^i \chi^j \psi^{cm} \psi^{cn}
\end{aligned}
$$

das quais se conclui que a ação é de fato real.

Tem-se uma expressão muito simplificada para a ação se introduzirmos [2]

$$\Psi^I_A = \begin{pmatrix} \psi^i_\alpha \\ \tilde{\chi}^i_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad \Psi^{\bar I}_A = \begin{pmatrix} \psi^{ci}_\alpha \\ \tilde{\chi}^{ci}_{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad Z^I = \begin{pmatrix} A^i \\ B^i \end{pmatrix}, \quad Z^{\bar I} = \begin{pmatrix} A^{*i} \\ B^{*i} \end{pmatrix} \quad , \tag{2.13}$$

e a matriz

$$\gamma^\mu_{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} \\ \tilde\sigma^\mu_{\dot\alpha\beta} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (A = \{\alpha, \dot\alpha\}, \quad B = \{\beta, \dot\beta\}) \quad . \tag{2.14}$$

Assim, a ação (2.11) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int d^4x \left(2g_{I\bar J}\, \partial_\mu Z^I \partial^\mu Z^{\bar J} - \frac{i}{2} g_{\bar I J}\, \Psi^{\bar I}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi^J - \frac{i}{2} g_{I\bar J}\, \Psi^I \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi^{\bar J} \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} R_{I\overline{M}J\overline{N}}\, \Psi^{\overline{M}}\Psi^{\overline{N}}\Psi^I\Psi^J \right) \quad , \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \Psi^{IA} &= \partial_\mu \Psi^{IA} + g^{I\bar L}\, \partial_K\, g_{J\bar L}\, \Psi^{KA} \partial_\mu Z^J \quad , \\ R_{I\overline{M}J\overline{N}} &= \partial_I \partial_{\overline{M}}\, g_{J\overline{N}} - g^{\overline{K}L}\, \partial_I\, g_{\overline{K}J}\, \partial_{\overline{M}}\, g_{\overline{N}L} \quad . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Esta expressão tem uma forma similar àquela obtida em [19].

É interessante observar que em D=(2+2), pode-se formular também um modelo-σ supersimétrico usando supercampos quirais e antiquirais sujeitos a condição de realidade ($\Phi^i = \Phi^{*i}$, $\Xi^i = \Xi^{*i}$). Aqui, nós tomamos o potencial K como uma função de (Φ^i, Ξ^i) e a ação na forma usual

$$\mathcal{S} = 2\int d^4x d^2\theta d^2\tilde\theta\; K(\Phi^i, \Xi^i) \quad . \tag{2.17}$$

Nós obtemos então

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(2g_{i\hat j}\partial_\mu Z^i \partial^\mu Z^{\hat j} - \frac{i}{2} g_{\hat i j}\Psi^{\hat i}\tilde\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi^j - \frac{i}{2} g_{i\hat j}\Psi^i \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi^{\hat j} + \frac{1}{8} R_{i\hat m j\hat n}\Psi^{\hat m}\Psi^{\hat n}\Psi^i\Psi^j \right) \quad , \tag{2.18}$$

[2]Usaremos, também, Z^I denotando $Z^I = (\Phi^i, \Xi^i)$.

onde empregou-se uma notação análoga a (2.13), com o símbolo ^ denotando "conjugados quirais", isto é, $(Z^i, Z^{\hat{i}}) \equiv (A^i, B^i)$ e $(\Psi^i, \Psi^{\hat{i}}) \equiv (\psi^i, \tilde{\chi}^i)$. A métrica tem por componente não nula apenas

$$g_{i\hat{j}} = \frac{\partial^2 K}{\partial A^i \partial B^j} \ ,$$

e as derivadas covariantes e o tensor de curvatura de Riemann são análogos à (2.16)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu \Psi^i &= \partial_\mu \Psi^i + g^{i\hat{l}} \partial_k \, g_{r\hat{l}} \, \Psi^k \partial_\mu Z^r \\
\mathcal{D}_\mu \Psi^{\hat{i}} &= \partial_\mu \Psi^{\hat{i}} + g^{\hat{i}l} \partial_{\hat{k}} \, g_{l\hat{r}} \, \Psi^{\hat{k}} \partial_\mu Z^{\hat{r}} \\
R_{\hat{i}m\hat{j}n} &= \partial_{\hat{i}} \partial_m g_{\hat{j}n} - g^{k\hat{l}} \partial_{\hat{r}} g_{k\hat{j}} \partial_m g_{n\hat{l}}
\end{aligned}$$

A métrica desse espaço não é Hermitiana, e, portanto, o espaço não é Kähler. Entretanto, é interessante notar que ele possui algumas propriedades de um espaço de Kähler como, por exemplo, o caráter híbrido da métrica (em termos das coordenadas quirais/antiquirais) e, consequentemente, o fato de só existirem componentes do tensor de Christoffel com todos os índices do mesmo tipo. Esta classe de modelos-σ é uma característica da assinatura (2+2) do espaço-tempo sobre o qual nós construímos a supersimetria. Embora não esteja associado à uma variedade de Kähler ele tem a interessante propriedade de ser formulado a partir de um potencial K.

2.2 Isometrias.

Na seção anterior, impôs-se a decomposição (2.9) afim de termos manifesta a estrutura Kähleriana do espaço. De (2.10), nós vemos que as transformações para o potencial K, permitidas pela invariância da métrica, são da forma

$$K \longrightarrow K' = K + F(Z^I) + F^*(Z^{\bar{I}}) \ . \tag{2.19}$$

Estas são transformações holomórficas em uma variedade de Kähler genérica. No entanto, elas não deixam a ação invariante, o que só será obtido se considerarmos a decomposição

$F = \eta(\Phi) + \theta(\Xi)$, o que dá

$$K \longrightarrow K' = K + \eta(\Phi) + \eta^*(\Phi^*) + \theta(\Xi) + \theta^*(\Xi^*) \ . \tag{2.20}$$

Isso tem uma consequência imediata nas possíveis transformações de coordenadas permitidas na variedade. Aqui, as transformações holomórficas são decompostas em um sub-grupo mais restrito, nas quais, coordenadas associadas a quiralidades distintas não se misturam [3]

$$\Phi^i \longrightarrow \Phi'^i(\Phi^j) \quad , \quad \Xi^i \longrightarrow \Xi'^i(\Xi^j) \quad \text{e seus conjugados complexos.} \tag{2.21}$$

Se tivéssemos permitido que uma coordenada Φ^i fosse em Ξ^i, teríamos gerado termos fora da anti-diagonal na métrica (2.10), o que nos levaria a um espaço que não seria Kähler. As transformações (2.21) são geradas por vetores de Killing holomórficos

$$\mathcal{K}_a^I = \begin{pmatrix} \kappa_a^i(\Phi) \\ \tau_a^i(\Xi) \end{pmatrix} \ , \ \mathcal{K}_a^{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \kappa_a^{*i}(\Phi^*) \\ \tau_a^{*i}(\Xi^*) \end{pmatrix} \ . \tag{2.22}$$

A possibilidade de tratar com vetores de Killing holomórficos é devido ao fato da métrica não conter as componentes $g_{i\bar{j}}$, $g_{\hat{i}\bar{\hat{j}}}$, $g_{\bar{i}j}$, $g_{\bar{\hat{i}}\hat{j}}$ (ver apêndice B). Por uma isometria global, as coordenadas da variedade de Kähler se transformam como

$$Z'^I = \exp(L_{\lambda\cdot\mathcal{K}})Z^I \rightarrow \begin{cases} \Phi'^i = \exp(L_{\lambda\cdot\kappa})\Phi^i \\ \Xi'^i = \exp(L_{\lambda\cdot\tau})\Xi^i \end{cases} \quad e\ c.c. \ , \tag{2.23}$$

onde L_X é a derivada de Lie ao longo da direção definida pelo campo vetorial X e λ é um parâmetro global. Os vetores de Killing geram a álgebra do grupo de isometria da variedade, isto é, $[\mathcal{K}_a, \mathcal{K}_b] = f_{ab}^c \, \mathcal{K}_c$. As isometrias induzem transformações no potencial K, que se escrevem como

$$\delta K = \lambda^a\Big(\frac{\partial K}{\partial Z^I}\mathcal{K}_a^I + \frac{\partial K}{\partial Z^{\bar{I}}}\mathcal{K}_a^{\bar{I}}\Big) = \lambda^a\frac{\partial H}{\partial \Phi^i}\kappa_a^i + \lambda^a\frac{\partial H^*}{\partial \Xi^i}\tau_a^i + \lambda^a\frac{\partial H^*}{\partial \Phi^{*i}}\kappa_a^{*i} + \lambda^a\frac{\partial H}{\partial \Xi^{*i}}\tau_a^{*i} \ . \tag{2.24}$$

[3]Daqui por diante, o termo holomórfico irá se referir a uma separação não apenas em termos de conjugação complexa mas também à termos de diferentes quiralidades.

Comparando eq.(2.24) com eq.(2.20), que é também uma invariância da métrica, se obtem

$$\begin{aligned}
\eta_a(\Phi) &= \frac{\partial H(\Phi,\Xi^*)}{\partial \Phi^i}\,\kappa_a^i(\Phi) + Y_a(\Phi,\Xi^*) \ , \\
\theta_a(\Xi) &= \frac{\partial H^*(\Xi,\Phi^*)}{\partial \Xi^i}\,\tau_a^i(\Xi) - Y_a^*(\Xi,\Phi^*) \ , \\
\eta_a^*(\Phi^*) &= \frac{\partial H^*(\Xi,\Phi^*)}{\partial \Phi^{*i}}\,\kappa_a^{*i}(\Phi^*) + Y_a^*(\Xi,\Phi^*) \ , \\
\theta_a^*(\Xi^*) &= \frac{\partial H(\Phi,\Xi^*)}{\partial \Xi^{*i}}\,\tau_a^{*i}(\Xi^*) - Y_a(\Phi,\Xi^*) \ .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

A introdução da função complexa Y_a se faz necessária de modo que nenhuma outra restrição é imposta ao potencial H. As funções Y_a estão naturalmente relacionadas a estrutura dos vetores de Killing em um espaço de Kähler. Para mostrar isto, nós devemos começar pela derivação da primeira equação em (2.25) com relação à Ξ^*:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^i \partial \Xi^{*j}}\,\kappa_a^i(\Phi) = -\frac{\partial Y_a}{\partial \Xi^{*j}} \ , \tag{2.26}$$

ou derivando θ_a com relação à Φ^*:

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial \Xi^i \partial \Phi^{*j}}\,\tau_a^i(\Xi) = \frac{\partial Y_a^*}{\partial \Phi^{*j}} \ . \tag{2.27}$$

Estas equações e seus conjugados podem ser escritos em uma forma compacta em termos de um potencial real $\mathcal{Y}_a = iY_a^*(\Xi,\Phi^*) - iY_a(\Phi,\Xi^*)$,

$$g_{I\bar{J}}\,\mathcal{K}_a^I = -i\,\frac{\partial \mathcal{Y}_a}{\partial Z^{\bar{J}}} \quad e\ c.c.\ . \tag{2.28}$$

Esta equação é exatamente a restrição imposta pela equação de Killing,

$$\nabla_I\,\mathcal{K}_{\bar{J}} + \nabla_{\bar{J}}\,\mathcal{K}_I = 0 \ , \tag{2.29}$$

sobre a forma dos vetores de Killing, os quais são descritos pelo potencial $\mathcal{Y}_a$.

A determinação deste potencial é crucial para o processo do gauging, como nós devemos ver adiante. Para determiná-lo, nós seguiremos o método exposto em [9]. Contraindo eq.(2.28) com $\mathcal{K}_b^{\bar{J}}$ e seu conjugado com $\mathcal{K}_b^J$, e comparando-os se obtem a identidade

$$\mathcal{K}_b^I\,\frac{\partial \mathcal{Y}_a}{\partial Z^I} + \mathcal{K}_a^{\bar{I}}\,\frac{\partial \mathcal{Y}_b}{\partial Z^{\bar{I}}} = 0 \ . \tag{2.30}$$

Agora, por uma isometria, $\mathcal{Y}_a$ transforma-se como

$$\delta \mathcal{Y}_a \;=\; \lambda^b \left(\frac{\partial \mathcal{Y}_a}{\partial Z^I} \mathcal{K}_b^I \;+\; \frac{\partial \mathcal{Y}_a}{\partial Z^{\bar{I}}} \mathcal{K}_b^{\bar{I}} \right) \;, \tag{2.31}$$

que, em virtude de (2.30), pode ser escrito como

$$\delta \mathcal{Y}_a \;=\; \frac{\lambda^b}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{Y}_{[a}}{\partial Z^I} \mathcal{K}_{b]}^I \;+\; \frac{\partial \mathcal{Y}_{[a}}{\partial Z^{\bar{I}}} \mathcal{K}_{b]}^{\bar{I}} \right) \;. \tag{2.32}$$

Com a ajuda das equações (2.24 - 2.28), se obtem a relação

$$\mathcal{K}_{[a}^I \frac{\partial \xi_{b]}}{\partial Z^I} \;+\; \mathcal{K}_{[a}^{\bar{I}} \frac{\partial \xi_{b]}^*}{\partial Z^{\bar{I}}} \;=\; f_{ab}^c \left(\xi_c \;+\; \xi_c^* \right) \;, \tag{2.33}$$

onde $\xi_a \;=\; \eta_a + \theta_a$ e f_{ab}^c são as constantes de estrutura do grupo de isometria. Em componentes, esta última equação assume a forma

$$\begin{aligned} \kappa_{[a}^i \frac{\partial \eta_{b]}}{\partial \Phi^i} \;&=\; f_{ab}^c \, \eta_c \;+\; c_{ab} \\ \tau_{[a}^i \frac{\partial \theta_{b]}}{\partial \Xi^i} \;&=\; f_{ab}^c \, \theta_c \;-\; c_{ab} \qquad e \;\; c.c. \;, \end{aligned} \tag{2.34}$$

onde $c_{ab} \;=\; -\, c_{ba}$ são constantes complexas. Finalmente, de (2.32 - 2.34) se obtem

$$\delta Y_a \;=\; \lambda^b \left(\frac{\partial Y_a}{\partial \Phi^i} \kappa_b^i \;+\; \frac{\partial Y_a}{\partial \Xi^{*i}} \tau_b^{*i} \right) \;=\; -\, \lambda^b \, f_{ab}^c \, Y_c \;-\; \lambda^b \, c_{ab} \quad e \; c.c. \;. \tag{2.35}$$

Neste ponto, nós vemos que, para tornar explícita a forma dos potenciais Y_a em termos dos vetores de Killing, nós devemos restringir o grupo de isometria ao caso de um grupo semi-simples. Isto se torna claro quando combinamos (2.28) em (2.35):

$$Y_a \;=\; 2 \, f_{ab}^c \, \kappa_d^i \, \tau_c^{*j} \frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^i \partial \Xi^{*j}} \, g^{bd} \;+\; f_{ab}^c \, c_{dc} \, g^{bd} \quad e \; c.c. \;. \tag{2.36}$$

Para definir Y_a é preciso que as constantes $c_{ab}{}'s$ possam ser anuladas. No caso de grupos semi-simples isso pode ser feito redefinindo Y_a: $Y_a \;\to\; Y_a^{'} \;=\; Y_a \;-\; f_{ab}^c c_{dc} g^{bd}$.

2.3 Gauging das Isometrias.

As transformações de isometria das coordenadas de uma variedade de Kähler foram dadas na eq.(2.23). Agora, nós podemos fazer esta simetria local tomando o parâmetro constante

λ como um par de supercampos de quiralidades definidas e opostas. Em termos de supercampos estas transformações se escrevem como,

$$\begin{aligned} \Phi \longrightarrow \Phi' &= \exp(L_{\Lambda\cdot\kappa})\Phi \\ \Xi \longrightarrow \Xi' &= \exp(L_{\Gamma\cdot\tau})\Xi \quad e \ c.c. \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Os supercampos Λ e Γ são respectivamente quirais e anti-quirais. No entanto, em D=(2+2) isto não traz nenhuma restrição quanto a realidade dos supercampos. Já em D=(3+1) eles deveriam ser necessariamente conjugados complexos um dos outros. Vamos então tomar $\Lambda = \Lambda^*$, $\Gamma = \Gamma^*$. Aqui, as isometrias locais assumem a forma

$$\begin{aligned} \delta\Phi^i &= \Lambda^a k_a^i \\ \delta\Xi^i &= \Gamma^a \tau_a^i \quad e \ c.c. \ , \end{aligned} \tag{2.38}$$

e o potencial de Kähler transforma-se como

$$\delta K = \Lambda^a\Big(\frac{\partial H}{\partial\Phi^i}\kappa_a^i + \frac{\partial H^*}{\partial\Phi^{*i}}\kappa_a^{*i}\Big) + \Gamma^a\Big(\frac{\partial H^*}{\partial\Xi^i}\tau_a^i + \frac{\partial H}{\partial\Xi^{*i}}\tau_a^{*i}\Big) \ . \tag{2.39}$$

Afim de termos uma transformação que possa ser comparada com (2.20), todos os supercampos devem se transformar com os mesmos parâmetros. Isto pode ser obtido se introduzirmos um supercampo vetorial real V, o qual, em D=(2+2) assume a forma,

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\tilde\theta) = {} & C(x) + i\theta\zeta(x) + i\tilde\theta\tilde\eta(x) + \frac{1}{2}i\theta^2 M(x) + \frac{1}{2}i\tilde\theta^2 N(x) + \\ & + \frac{1}{2}i\theta\sigma^\mu\tilde\theta A_\mu(x) - \frac{1}{2}\tilde\theta^2\theta\lambda(x) - \frac{1}{2}\theta^2\tilde\theta\tilde\rho(x) - \frac{1}{4}\theta^2\tilde\theta^2 D(x) \ , \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde C, M, N e D são escalares reais, ζ, $\tilde\eta$, λ e $\tilde\rho$ são espinores de Majorana-Weyl e A_μ é um campo vetorial. Agora nós substituímos os supercampos Ξ^i [24] por

$$\tilde\Xi^i \equiv \exp(L_{V\cdot\tau})\Xi^i \quad e \quad c.c. \ , \qquad (L_{V\tau} \equiv V^a\tau_a^i\frac{\partial}{\partial\Xi^i}) \tag{2.41}$$

de modo que $\tilde\Xi^i$ se transforme como

$$\tilde\Xi'^i = \exp(L_{\Lambda\cdot\tau})\tilde\Xi^i \ . \tag{2.42}$$

Isto requer então que o supercampo vetorial se transforme como

$$\exp\left(L_{V'\cdot\mathcal{T}}\right) \;=\; \exp\left(L_{\Lambda\cdot\mathcal{T}}\right)\exp\left(L_{V\cdot\mathcal{T}}\right)\exp\left(-L_{\Gamma\cdot\mathcal{T}}\right) \;. \qquad (2.43)$$

Uma vez que os parâmetros Λ e Γ são reais, nós temos de (2.43) que V se transforma na verdade como um supercampo vetorial real. Infinitesimalmente, as isometrias tem a forma

$$\begin{aligned} \delta\Phi^i &= \Lambda^a k_a^i \\ \delta\tilde{\Xi}^i &= \Lambda^a \tau_a^i \qquad e \;\; c.c. \;, \end{aligned} \qquad (2.44)$$

e a transformação (2.39) apresenta uma forma comparável à (2.20), com as substituições $\{\Xi,\ \Xi^*\} \longrightarrow \{\tilde{\Xi},\ \tilde{\Xi}^*\}$. Agora, sendo o parâmetro Λ um supercampo quiral, não se tem mais a ação invariante por isometrias locais:

$$\mathcal{S} \;\longrightarrow\; \mathcal{S}' \;=\; 2\int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta}\;\Lambda^a\left(\theta_a(\tilde{\Xi}) \,+\, \theta_a^*(\tilde{\Xi}^*)\right) \;\neq\; 0 \;. \qquad (2.45)$$

Contudo, a invariância da ação pode ser reobtida se introduzirmos um supercampo quiral e o seu conjugado complexo, v e v^*, se transformando como

$$\begin{aligned} \delta v &= \lambda^a\theta_a\;(\Xi), \\ \delta v^* &= \lambda^a\theta_a^*(\Xi^*) \;. \end{aligned} \qquad (2.46)$$

Assim, nós tomamos a ação na forma

$$\mathcal{S}_v \;=\; 2\int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta}\left(H(\Phi,\Xi^*) \,+\, H^*(\Phi^*,\Xi) \,-\, v \,-\, v^*\right) \;. \qquad (2.47)$$

Esta ação é globalmente invariante pela forma infinitesimal das transformações (2.23) e (2.46), e, uma vez que v e v^* são anti-quirais, tem-se também $S_v = S$. Estes supercampos devem ser pensados como coordenadas extras que extendem a variedade [9]. Desse modo, escrevem-se dois novos vetores de Killing

$$\tau_a(\Xi) \;\longrightarrow\; \tau_a'(\Xi) \;=\; \tau_a^i(\Xi)\frac{\partial}{\partial\Xi^i} \,+\, \theta_a(\Xi)\frac{\partial}{\partial v} \quad e \quad c.c. \;, \qquad (2.48)$$

onde o novo potencial de Kähler $K' = K - v - v^*$ é invariante pela ação deles. Finalmente, o gauging das isometrias é simplesmente implementado substituindo $\Xi \longrightarrow \tilde{\Xi}$, $v \longrightarrow \tilde{v}$ and c.c. em (2.47). Agora, usando o resultado

$$\begin{aligned} K(\Phi, \tilde{\Xi}, \Phi^*, \tilde{\Xi}^*) &= K(\Phi, \Xi, \Phi^*, \Xi^*) + 2Re\left\{\frac{\exp(L')-1}{L'} V^a\Big(\theta_a(\Xi) + Y_a^*(\Phi^*, \Xi)\Big)\right\} , \\ \tilde{v} &= v + \frac{\exp(L')-1}{L'} V^a \theta_a(\Xi) , \\ L' &\equiv L_{V \cdot \mathcal{T}'} , \end{aligned} \tag{2.49}$$

nós ficamos com a ação, que acopla o modelo-σ à campos de Yang-Mills através do gauge das isometrias, dada por:

$$\mathcal{S} = 2 \int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta} \left(H(\Phi, \Xi^*) + H^*(\Phi^*, \Xi) + 2Re\left\{\frac{\exp(L)-1}{L} V^a\, Y_a^*(\Phi^*, \Xi)\right\}\right) . \tag{2.50}$$

Pode-se ainda derivar uma expressão mais simplificada para essa ação se adotarmos o gauge de Wess-Zumino, $V^3 = 0$, (ver por exemplo [24]). Aqui, faz-se uso também das eqs.(2.22) e (2.28). Desta forma, a ação (2.50) é reescrita na forma simplificada

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = 2 \int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta} \Big(& H(\Phi, \Xi^*) + H^*(\Phi^*, \Xi) + V^a\, Y_a^* + V^a\, Y_a \\ & - \frac{1}{2} V^a\, V^b\, \mathcal{K}_a^I\, g_{I\bar{J}}\, \mathcal{K}_b^{\bar{J}}\Big) . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Assim, vemos como o potencial Y_a, determinado na eq.(2.36) para grupos de isometrias semi-simples, acoplam-se ao supercampo vetorial V^a na ação invariante por isometrias locais. Conforme se discutiu no fim da seção 3, fatores Abelianos presentes no grupo de isometria podem levar a ocorrência de constantes arbitrárias no potencial Y_a. Estas irão se acoplar ao supercampo vetorial gerando os termos de Fayet-Iliopoulos [9, 20]. No caso geral de grupos não semi-simples, como acontece em D=(3+1) dimensões, o potencial Y_a pode não ser determinado, e isto representa uma obstrução ao gauging do modelo-σ. Seria interessante considerar a possibilidade de se trabalhar com supercampos Λ and Γ, que não fossem reais. Isto nos levaria a introduzir uma família de supercampos vetoriais complexos afim de realizar o gauging. Contudo, a ocorrência de mais de um multipleto de Yang-Mills no gauging do grupo de isometria está além do objetivo do presente trabalho.

É interessante observar que ação de um modelo de Yang-Mills supersimétrico é obtido como o caso limite da ação (2.50), quando se toma o caso de uma variedade plana e o gauging do grupo de isotropia.

Capítulo 3

Supersimetria-N=2 no Espaço de AW.

O propósito deste capítulo é encontrar os meios para se formular uma segunda supersimetria no espaço de AW, em termos do superespaço da supersimetria simples previamente apresentada. Tal programa envolve algumas complicações de caráter técnico, tais como a não-linearidade da supersimetria extra, as condições para o fechamento da álgebra estendida e a elaboração dos chamados hipermultipletes constituídos em termos dos supercampos associados à supersimetria-N=1. No que concerne à construção das teorias de Yang-Mills, será estudado aqui o hipermultiplete de gauge, e o seu acoplamento aos modelos-σ com supersimetria N=2 será o objetivo final deste estudo, uma vez que a redução dimensional destes modelos conduzirá a teorias-de-gauge com supersimetria estendida em (1+1) e (2+1). No processo de redução, chegar-se-á a modelos com N=1,2 ou 4, mas, devido à necessidade de se eliminar modos não-físicos inerentes ao espaço de AW [7], os modelos mais interessantes serão aqueles com N=1,2 em dimensões inferiores. Também, o presente capítulo constitui uma contribuição original ao problema da formulação de modelos supersimétricos no espaço-tempo de Atiyah-Ward [27].

3.1 A Extensão N=2-Supersimétrica do Modelo.

Para construirmos a extensão N=2 do modelo, seguimos o mesmo procedimento desenvolvido na ref. [9]. Assim, escrevemos a segunda supersimetria na forma,

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^i &= \widetilde{D}^2(\epsilon\,\Omega^i) \\
\delta\Xi^i &= D^2(\zeta\,\Upsilon^i) \\
\delta\Phi^{*i} &= -\widetilde{D}^2(\epsilon^*\,\Omega^{*i}) \\
\delta\Xi^{*i} &= -D^2(\zeta^*\,\Upsilon^{*i})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde ϵ e ζ são, por ora, supercampos escalares, e Ω^i e Υ^i são funções de $X^{\mathcal{I}} \equiv (Z^I, Z^{\bar{I}})$. O fechamento dessa álgebra de supersimetria-N=2 (daqui por diante será simplesmente abreviada por $\tilde{\delta}$),

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]\Phi^i = \partial\!\!\!/\Phi^i \qquad ,$$

$$[\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2]\Xi^i = \partial\!\!\!/\Xi^i \qquad \textit{e suas respectivas conjugadas complexas},$$

dá-nos as seguintes relações,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}^2\epsilon = D_\alpha\epsilon = \partial_\mu\epsilon = 0 \qquad , \\
&D^2\zeta = \widetilde{D_{\dot{\alpha}}}\zeta = \partial_\mu\zeta = 0 \qquad ;
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\widetilde{D}^2\Omega^i = 0 \quad , \quad D^2\Upsilon^i = 0 \quad ; \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega^i{}_{,j[\hat{k}}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}]} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\hat{j}[k}\,\Upsilon^j{}_{,r]} = 0 \\
&\Omega^i{}_{,j[\hat{k}}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}]} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\hat{j}[k}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}]} = 0 \\
&\Omega^i{}_{,j[\bar{\hat{k}}}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}]} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\hat{j}[\bar{k}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}]} = 0 \qquad ;
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
&\Omega^i{}_{,\bar{j}\hat{k}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{\hat{j}}k}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r} = 0 \\
&\Omega^i{}_{,\bar{j}\hat{k}}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{\hat{j}}k}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}} = 0 \\
&\Omega^i{}_{,\bar{j}\bar{\hat{k}}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{\hat{j}}\bar{k}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r} = 0 \\
&\Omega^i{}_{,\bar{j}\bar{\hat{k}}}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{\hat{j}}\bar{k}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}} = 0 \qquad ;
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega^i{}_{,\hat{j}\hat{k}}\,\Upsilon^j{}_{,r}+\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,r\hat{k}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,jk}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}}+\Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}k}=0\\
&\Omega^i{}_{,\hat{j}\hat{k}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}}+\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}\hat{k}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,jk}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}}+\Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}k}=0\\
&\Omega^i{}_{,\hat{j}\bar{\hat{k}}}\,\Upsilon^j{}_{,r}+\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,r\bar{\hat{k}}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,j\bar{k}}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}}+\Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}\bar{k}}=0\\
&\Omega^i{}_{,\hat{j}\bar{\hat{k}}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}}+\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}\bar{\hat{k}}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,j\bar{k}}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}}+\Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\overline{\hat{r}k}}=0 \qquad ;
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}\hat{k}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r}+\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r\hat{k}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{j}k}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}}+\Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}k}=0\\
&\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}\hat{k}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}}+\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}\hat{k}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{j}k}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}}+\Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}k}=0\\
&\Omega^i{}_{,\overline{\hat{j}\hat{k}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r}+\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r\bar{\hat{k}}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\overline{jk}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}}+\Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}\bar{k}}=0\\
&\Omega^i{}_{,\overline{\hat{j}\hat{k}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}}+\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}\bar{\hat{k}}}=0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\overline{jk}}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}}+\Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\overline{\hat{r}k}}=0 \qquad ;
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,\bar{r}}=0 &\qquad \Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}}=0\\
\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}}=0 &\qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\bar{\hat{r}}}=0\\
\Omega^i{}_{,\hat{j}}\,\Upsilon^j{}_{,r}=0 &\qquad \Upsilon^i{}_{,j}\,\Omega^j{}_{,\hat{r}}=0\\
\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\,\Upsilon^{*j}{}_{,r}=-\delta^i_r &\qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\,\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}}=-\delta^{\hat{i}}_{\hat{r}}\ .
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

As relações (3.2) implicam em se ter os parâmetros da transformação como supercampos de quiralidades definidas e independentes do espaço-tempo.

As transformações (3.1) devem ser, também, invariância da ação. Isto é obtido se impusermos:

$$\left.\begin{aligned} K_{i\bar{\hat{j}}k}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{r}}} + K_{i\bar{\hat{j}}}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{r}}k} &= 0 \\ K_{i\bar{\hat{j}}}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{r}}} + K_{i\bar{\hat{r}}}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}} &= 0 \\ K_{i\overline{\hat{j}\hat{k}}}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{r}}} + K_{i\bar{\hat{r}}}\Omega^i{}_{,\overline{\hat{j}\hat{k}}} &= 0 \\ K_{\hat{i}\bar{j}\hat{k}}\Upsilon^i{}_{,\bar{r}} + K_{\hat{i}\bar{j}}\Upsilon^i{}_{,\bar{r}\hat{k}} &= 0 \\ K_{\hat{i}\bar{j}}\Upsilon^i{}_{,\bar{r}} + K_{\hat{i}\bar{r}}\Upsilon^i{}_{,\bar{j}} &= 0 \\ K_{\hat{i}\overline{jk}}\Upsilon^i{}_{,\bar{r}} + K_{\hat{i}\bar{r}}\Upsilon^i{}_{,\overline{jk}} &= 0 \\ \Omega^i &= \Omega^i(\Phi,\Xi^*) \\ \Upsilon^i &= \Upsilon^i(\Phi^*,\Xi) \end{aligned}\right\} + \textit{respectivas conjugadas complexas} \quad . \tag{3.9}$$

As duas últimas equações são compatíveis com (3.5); assim, tomando esta forma para as funções Ω e Υ temos que as equações (3.4), (3.6), (3.7) e (3.8) assumem a forma:

$$\begin{gathered} \Omega^i{}_{,j[\bar{\hat{k}}}\Omega^j{}_{,\bar{\hat{r}}]} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\hat{j}[\bar{k}}\Upsilon^j{}_{,\bar{r}]} = 0 \\ \Omega^i{}_{,\overline{\hat{j}\hat{k}}}\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}} + \Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\Upsilon^{*j}{}_{,\bar{r}\bar{\hat{k}}} = 0, \qquad \Upsilon^i{}_{,\overline{jk}}\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}} + \Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}\bar{k}} = 0 \\ \Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}}\Upsilon^{*j}{}_{,r} = -\delta^i_r \qquad \Upsilon^i{}_{,\bar{j}}\Omega^{*j}{}_{,\hat{r}} = -\delta^{\hat{i}}_{\hat{r}} \ . \end{gathered} \tag{3.10}$$

Nas transformações (3.1), foram introduzidas as funções Ω e Υ. Estas guardam uma íntima conexão com as estruturas complexas definidas na variedade. Para verificar isso vamos, inicialmente, fazer uma análise das estruturas complexas definidas em uma variedade hyperKähleriana. Para uma análise mais detalhada sobre o assunto, deve-se consultar [22].

3.2 Variedades de hyperKähler e a Extensão N=2-Supersimétrica.

Apesar de se ter apresentado uma série de propriedades das variedades de hyperKähler no Cap.1, deveremos, na presente seção, retomar alguns pontos referentes a estas variedades complexas, pela simples razão de que, por estarmos tratando de modelos supersimétricos em espaços de AW, a sua formulação requer um número dobrado de coordenadas complexas quando comparada ao caso da supersimetria em espaços com assinatura do tipo (3+1). Por este motivo, cabe, aqui, retomar a discussão das variedades hyperKählerianas.

Dada uma variedade complexa $\mathcal{M}$, tem-se que uma estrutura complexa, J, em $\mathcal{M}$ é um mapeamento $J : \mathcal{T}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ ($\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ é o espaço tangente à variedade $\mathcal{M}$) tal que $J^2 = -I$. Uma variedade complexa admite naturalmente tal mapeamento pois isto é uma conseqüência direta da existência de um sistema de vizinhanças cujas funções de transição são holomórficas [16]. Utilizando-se coordenadas holomórficas, $Z^{\mathcal{I}} = \{Z^I, Z^{\bar{I}}\}$, em cada vizinhança $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M}$, temos que podemos escrever esta estrutura complexa na forma

$$J_{\mathcal{I}}^{(1)\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} i\delta_I^J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\delta_{\bar{I}}^{\bar{J}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\delta_{\hat{i}}^{\hat{j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\delta_{\bar{i}}^{\bar{j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta_{\bar{\hat{i}}}^{\bar{\hat{j}}} \end{pmatrix} . \tag{3.11}$$

Em uma variedade hyperKähleriana, tem-se definidas, além de (3.11), mais duas outras estruturas complexas, $J_{\mathcal{I}}^{(2)\mathcal{J}}$ e $J_{\mathcal{I}}^{(3)\mathcal{J}}$, que satisfazem a uma álgebra de SU(2): $[J^M, J^N] = \epsilon^{MNT} J^T$. Assim, em termos das coordenadas holomórficas (que deixam J^1 na forma diagonal), temos que as outras, devendo satisfazer a uma álgebra de SU(2), assumem uma forma anti-diagonal

$$J_{\mathcal{I}}^{(2)\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & J_I^{\bar{J}} \\ J_{\bar{I}}^J & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{3.12}$$

$$J_{\mathcal{I}}^{(3)\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & iJ_I^{\bar{J}} \\ -iJ_{\bar{I}}^J & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \tag{3.13}$$

Uma variedade hyperKähleriana deve ter, também, uma métrica Hermitiana relativamente às três estruturas complexas,

$$J_{\mathcal{I}}^{(M)\mathcal{K}} J_{\mathcal{J}}^{(M)\mathcal{L}} g_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = g_{\mathcal{I}\mathcal{J}} , \tag{3.14}$$

e cada estrutura complexa, $J_{\mathcal{I}}^{(M)\mathcal{J}}$, deve ser covariantemente constante:

$$\nabla_K J_{\mathcal{I}}^{(M)\mathcal{J}} = 0 . \tag{3.15}$$

Em geral, uma variedade hyperKähleriana não é dotada de uma métrica dada algebricamente pela relação $g_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \partial^2 K/\partial X^{\mathcal{I}}\partial X^{\mathcal{J}}$ [23]; entretanto, as variedades hyperKählerianas tratadas aqui serão consideradas como variedades de Kähler com certas propriedades adicionais [9]. Assim, da forma da métrica dada em (2.10) e de (3.14) e (3.15), tem-se que:

$$J_{\mathcal{I}}^{(2)\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & J_i^{\bar{\hat{j}}} \\ 0 & 0 & J_{\hat{i}}^{\bar{j}} & 0 \\ 0 & J_{\bar{i}}^{\hat{j}} & 0 & 0 \\ J_{\bar{\hat{i}}}^{j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{3.16}$$

$$J_{\mathcal{I}}^{(3)\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & iJ_i^{\bar{\hat{j}}} \\ 0 & 0 & iJ_{\hat{i}}^{\bar{j}} & 0 \\ 0 & -iJ_{\bar{i}}^{\hat{j}} & 0 & 0 \\ -iJ_{\bar{\hat{i}}}^{j} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.17}$$

De $J_{\mathcal{I}}^{(M)\mathcal{J}}$, formamos os tensores (2,0) e (0,2): $J_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{(M)} = g_{\mathcal{J}\mathcal{K}} J_{\mathcal{I}}^{(M)\mathcal{K}} \equiv \omega_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ e $J^{(M)\mathcal{I}\mathcal{J}} = g^{\mathcal{I}\mathcal{K}} J_{\mathcal{K}}^{(M)\mathcal{J}} \equiv \gamma^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. De (3.15), temos também que $J_{\mathcal{I}\mathcal{J}}^{(M)}$ e $J^{(M)\mathcal{I}\mathcal{J}}$ são covariantemente constantes. Daí, conclui-se que (onde por simplificação se entende que isso vale para qualquer valor de M) $J_{ij} = J_{ij}(\Phi)$, $J_{\hat{i}\hat{j}} = J_{\hat{i}\hat{j}}(\Xi)$, $J_{\bar{i}\bar{j}} = J_{\bar{i}\bar{j}}(\Phi^*)$, $J_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}} = J_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}}(\Xi^*)$ e $J^{ij} = J^{ij}(\Phi)$, $J^{\hat{i}\hat{j}} = J^{\hat{i}\hat{j}}(\Xi)$, $J^{\bar{i}\bar{j}} = J^{\bar{i}\bar{j}}(\Phi^*)$, $J^{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}}(\Xi^*)$. De (3.14), segue-se que $J_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = -J_{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ e, analogamente, $J^{\mathcal{I}\mathcal{J}} = -J^{\mathcal{J}\mathcal{I}}$. A condição (3.14) dá explicitamente as equações

$$\begin{aligned} K_{\bar{\hat{j}}k}\Omega^k_{\bar{\hat{i}}} + K_{\bar{\hat{i}}k}\Omega^k{}_{,\bar{\hat{j}}} &= 0 \\ K_{\bar{j}\hat{k}}\Upsilon^k_{\bar{i}} + K_{\bar{i}\hat{k}}\Upsilon^k_{\bar{j}} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{3.18}$$

que, também, podem ser escritas como

$$\begin{aligned} (K^{-1})^{j\bar{\hat{k}}}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{k}}} + (K^{-1})^{i\bar{\hat{k}}}\Omega^j{}_{,\bar{\hat{k}}} &= 0 \\ (K^{-1})^{\hat{j}\bar{k}}\Upsilon^i{}_{,\bar{k}} + (K^{-1})^{\hat{i}\bar{k}}\Upsilon^j{}_{,\bar{k}} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pretende-se, agora, relacionar a extensão supersimétrica do modelo com as estruturas complexas não-canônicas. Definimos

$$\Omega^i \equiv J^{ji} K_j$$

$$\Upsilon^i \equiv J^{\hat{j}\hat{i}} K_{\hat{j}} \quad e\ conjugados\ complexos. \tag{3.20}$$

Então, tomando derivações dessas expressões, obtém-se

$$\begin{aligned} \Omega^i &= \Omega^i(\Phi, \Xi^*), \quad \Omega^i{}_{,\bar{\hat{k}}} = J^i_{\bar{\hat{k}}} \\ \Upsilon^i &= \Upsilon^i(\Xi, \Phi^*), \quad \Upsilon^i{}_{,\bar{k}} = J^{\hat{i}}_{\bar{k}} \quad , \end{aligned} \tag{3.21}$$

o que nos permite identificar as estruturas complexas com as funções utilizadas na construção da segunda supersimetria. A determinação das funções Ω e Υ corresponde, então, à determinação da estrutura complexa não-canônica da variedade. Da definição de Ω e de J^{ij}, tem-se

$$K_i \Omega^i = 0, \qquad K_{\hat{i}} \Upsilon^i = 0 \quad , \tag{3.22}$$

como se vê rapidamente, usando (3.19):

$$\begin{aligned} K_i \Omega^i &= K_i K_j (K^{-1})^{j\bar{\hat{k}}} \Omega^i{}_{,\bar{\hat{k}}} \\ &= \frac{1}{2} K_i K_j ((K^{-1})^{j\bar{\hat{k}}} \Omega^i{}_{,\bar{\hat{k}}} + (K^{-1})^{i\bar{\hat{k}}} \Omega^j{}_{,\bar{\hat{k}}}) \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Tem-se, também, de (3.15) que

$$\nabla_i \Omega^i = 0, \qquad \nabla_{\hat{i}} \Upsilon^i = 0 \quad . \tag{3.23}$$

As eqs. (3.22) e (3.23) permitem determinar facilmente, em alguns casos, a forma das estruturas complexas [9].

Um vetor de Killing tri-holomórfico deve satisfazer à condição

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} J^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} \equiv \nabla_{\mathcal{I}} \mathcal{K}^{\mathcal{M}} J^{\mathcal{J}}_{\mathcal{M}} - \nabla_{\mathcal{M}} \mathcal{K}^{\mathcal{J}} J^{\mathcal{M}}_{\mathcal{I}} = 0 \quad . \tag{3.24}$$

Lembrando a forma, $\mathcal{K}^{\mathcal{I}} = (\mathcal{K}^I, \mathcal{K}^{\bar{I}})$, do vetor de Killing holomórfico (eq. (2.22)), obtém-se de (3.24) as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \nabla_i k^m \Upsilon^{*j}{}_{,m} - \nabla_{\bar{\hat{m}}} \tau^{*j} \Upsilon^{*m}{}_{,i} = 0 \\ \nabla_{\hat{i}} \tau^m \Omega^{*\bar{j}}{}_{,\hat{m}} - \nabla_{\bar{m}} k^{*j} \Omega^{*m}{}_{,\hat{i}} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Sendo $\mathcal{K}^{\mathcal{I}}$ um vetor de Killing, chega-se a

$$K_{\bar{\hat{j}}m}\nabla_i k^m + K_{i\bar{\hat{m}}}\nabla_{\bar{\hat{j}}}\tau^{*m} = 0 \quad , \tag{3.26}$$

o que também pode ser escrito como

$$(K^{-1})^{m\bar{\hat{j}}}\nabla_m k^i + (K^{-1})^{i\bar{\hat{m}}}\nabla_{\bar{\hat{m}}}\tau^{*j} = 0 \quad . \tag{3.27}$$

Usando (3.27), a definição de $\gamma^{\mathcal{IJ}}$ e contraindo-se $(K^{-1})^{\mathcal{IT}}$ com o índice $\mathcal{I}$ da eq. (3.25), obtém-se

$$\begin{aligned} k^{[j}{}_{;m}\,\gamma^{i]m} &= 0 \\ \tau^{[\hat{j}}{}_{;\hat{m}}\,\gamma^{\hat{i}]\hat{m}} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando, agora, a eq. (3.26), a definição de $\omega_{\mathcal{IJ}}$ e contraindo–se a métrica $K_{\mathcal{TJ}}$ com o índice $\mathcal{J}$ da eq. (3.25), obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_{m[j}k^m{}_{;i]} &= 0 \\ \omega_{\hat{m}[\hat{j}}\tau^m{}_{;\hat{i}]} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.29}$$

Novamente, tomando a eq. (3.25) e contraindo os seus dois índices com $J^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}$, obtém-se

$$k^i{}_{;i} - \tau^{*i}{}_{;\bar{\hat{i}}} = 0 \quad . \tag{3.30}$$

Contraindo os dois índices da eq. (3.26) com $(K^{-1})^{\mathcal{IJ}}$, conclui-se que

$$k^i{}_{;i} + \tau^{*i}{}_{;\bar{\hat{i}}} = 0 \quad , \tag{3.31}$$

do que, com o auxílio de (3.29) e (3.30), pode-se deduzir que

$$k^i{}_{;i} = 0, \qquad \tau^i{}_{;\hat{i}} = 0 \quad . \tag{3.32}$$

Deve-se notar que estas condições são, exatamente, o que nos garante poder-se tratar com vetores de Killing holomórficos (ver Apêndice B).

Dadas as três estruturas complexas, $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, de uma variedade hyperKähleriana, consideremos as três formas simpléticas ω_p $(p = \{1,2,3\})$ $(\omega_p) = (-gJ^{(1)}, -gJ^{(2)}, -gJ^{(3)})$. Definimos agora

$$\omega^{(\pm)} \equiv \omega_2 \mp i\omega_3 \quad , \tag{3.33}$$

o que nos dá

$$\omega^{(+)}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} -2\omega_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_{\hat{i}\hat{j}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \omega^{(-)}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_{\bar{i}\bar{j}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.34}$$

Em coordenadas holomórficas, $X^{\mathcal{I}} \equiv (Z^I, Z^{\bar{I}}) = (\Phi^i, \Xi^i, \Phi^{*i}, \Xi^{*i})$, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \omega^{(+)} &\equiv \omega^{(+)}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} dX^{\mathcal{I}} \wedge dX^{\mathcal{J}} = \omega^{(+)}_{ij}(\Phi) d\Phi^i \wedge d\Phi^j + \omega^{(+)}_{\hat{i}\hat{j}}(\Xi) d\Xi^i \wedge d\Xi^j \\ \omega^{(-)} &\equiv \omega^{(-)}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} dX^{\mathcal{I}} \wedge dX^{\mathcal{J}} = \omega^{(-)}_{\bar{i}\bar{j}}(\Phi^*) d\Phi^{*i} \wedge d\Phi^{*j} + \omega^{(-)}_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}}(\Xi^*) d\Xi^{*i} \wedge d\Xi^{*j} \quad . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Aqui, só foi possível separar $\omega^{(+)}$ e $\omega^{(-)}$ em uma dependência respectivamente em Z^I e $Z^{\bar{I}}$. Entretanto, o mais importante é que cada uma das 2-formas se apresenta como uma soma de dois termos holomórficos. Agora, $\omega^{(\pm)}$ é forma fechada, pois ω_2 e ω_3 o são. Além disso, tem-se também que $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}\omega^{\pm} = 0$. Daí, pode-se definir globalmente um potencial $P^{(\pm)}$ tal que [18] (onde a dependência de P é, por enquanto, a mais geral possível)

$$\mathcal{K}^{\mathcal{I}} \omega^{(\pm)}_{\mathcal{I}\mathcal{J}} = -P^{(\pm)},_{\mathcal{J}} \quad , \tag{3.36}$$

e que nos dá as equações,

$$\begin{aligned} k^i \omega^{(+)}_{ij} &= -P^{(+)},_j \\ \tau^i \omega^{(+)}_{\hat{i}\hat{j}} &= -P^{(+)},_{\hat{j}} \\ k^{*i} \omega^{(-)}_{\bar{i}\bar{j}} &= -P^{(-)},_{\bar{j}} \\ \tau^{*i} \omega^{(-)}_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}} &= -P^{(-)},_{\bar{\hat{j}}} \quad . \end{aligned} \tag{3.37}$$

Das eqs. (2.22) e (3.34), deduz-se que $P^{(+)},_i = P^{(+)},_i(\Phi)$, $P^{(+)},_{\hat{i}} = P^{(+)},_{\hat{i}}(\Xi)$, $P^{(-)},_{\bar{i}} = P^{(-)},_{\bar{i}}(\Phi^*)$, $P^{(-)},_{\bar{\hat{i}}} = P^{(-)},_{\bar{\hat{i}}}(\Xi^*)$. Tomando o conjugado complexo em (3.37) das eqs. envolvendo $\omega^{(+)}_{IJ}$, obtém-se que $P^{(+)*} = P^{(-)}$. Assim, as eqs. (3.37) permitem-nos escrever

$P^{(+)}$ e $P^{(-)}$ como

$$P^{(+)} = F(\Phi) + G(\Xi), \quad P^{(-)} = P^{(+)*} \quad . \tag{3.38}$$

Deve-se notar que $P^{(+)}$ é definido a menos de uma constante arbitrária.

Contrariamente ao resultado obtido em [9], temos que as funções $P^{(+)}$ e $P^{(-)}$ não são completamente holomórficas, pois $P^{(+)} = P^{(+)}(\Phi, \Xi)$. Entretanto, não se tem uma mistura entre a parte dependente de Φ e Ξ, e isto vai permitir então determinar $P^{(+)}$. De (3.37), e da definição de $\omega^{(+)}$ e $\omega^{(-)}$, chega-se às relações:

$$\begin{aligned}
P^{(+)}_{a,j}\Omega^{j}{}_{,\bar{\hat{i}}} = -2Y_{a,\bar{\hat{i}}} \quad &\rightleftharpoons \quad P^{(+)}_{a,i} = 2Y_{a,\bar{\hat{j}}}\Upsilon^{*j}{}_{,i} \\
P^{(+)}_{a,\hat{j}}\Upsilon^{j}{}_{,\bar{i}} = 2Y^{*}_{a,\bar{i}} \quad &\rightleftharpoons \quad P^{(+)}_{a,\hat{i}} = -2Y^{*}_{a,\bar{j}}\Omega^{*j}{}_{,\hat{i}} \\
P^{(-)}_{a,\bar{j}}\Omega^{*j}{}_{,\hat{i}} = -2Y^{*}_{a,\hat{i}} \quad &\rightleftharpoons \quad P^{(-)}_{a,\bar{i}} = 2Y^{*}_{a,\hat{j}}\Upsilon^{j}{}_{,\bar{i}} \\
P^{(-)}_{a,\bar{\hat{j}}}\Upsilon^{*j}{}_{,i} = 2Y_{a,i} \quad &\rightleftharpoons \quad P^{(-)}_{a,\bar{\hat{i}}} = -2Y_{a,j}\Omega^{j}{}_{,\bar{\hat{i}}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Para determinarmos os potenciais $P^{(+)}$ e $P^{(-)}$ define-se a função complexa U

$$U = P^{(-)} - P^{(+)} - 2iY + 2iY^{*} \tag{3.40}$$

tal que de (2.28) e (3.37) obtém-se:

$$\begin{aligned}
(\partial_i + iJ_i^{\bar{\hat{j}}}\partial_{\bar{\hat{j}}})U &= 0 \\
(\partial_{\hat{i}} + iJ_{\hat{i}}^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}})U &= 0 \\
(\partial_{\bar{i}} - iJ_{\bar{i}}^{\hat{j}}\partial_{\hat{j}})U^{*} &= 0 \\
(\partial_{\bar{\hat{i}}} - iJ_{\bar{\hat{i}}}^{j}\partial_{j})U^{*} &= 0
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Seja a primeira das equações de (3.41). Tem-se: $(\partial_i + iJ_i^{\bar{\hat{j}}}\partial_{\bar{\hat{j}}})U = (\delta_i^{\mathcal{J}} + iJ_i^{\mathcal{J}})\partial_{\mathcal{J}}U = 2\mathcal{P}_i^{(+)\mathcal{J}}U_{,\mathcal{J}} = 0$, isto é, $\mathcal{P}_i^{(+)\mathcal{J}}U_{,\mathcal{J}} = 0$, onde $\mathcal{P}^{(+)} \equiv (1 + i\mathcal{J}^{(2)})$. Analogamente, da segunda equação de (3.41) tem-se $\mathcal{P}_{\hat{i}}^{(+)\mathcal{J}}U_{,\mathcal{J}} = 0$. Voltando à primeira equação, e fatorando o termo $iJ_i^{\bar{\hat{j}}}$, reescrevemo-la como $(\partial_i + iJ_i^{\bar{\hat{j}}}\partial_{\bar{\hat{j}}})U = iJ_i^{\bar{\hat{j}}}(\partial_{\bar{\hat{j}}} + iJ_{\bar{\hat{j}}}^{t}\partial_t)U = 0$, que nos dá $(\partial_{\bar{\hat{j}}} + iJ_{\bar{\hat{j}}}^{t}\partial_t)U = 2\mathcal{P}_{\bar{\hat{j}}}^{(+)\mathcal{T}}U_{,\mathcal{T}} = 0 \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{\hat{j}}}^{(+)\mathcal{T}}U_{,\mathcal{T}} = 0$. Também, da segunda equação de (3.41), tem-se que $\mathcal{P}_{\bar{j}}^{(+)\mathcal{T}}U_{,\mathcal{T}} = 0$. Assim, podemos escrever que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}^{(+)\mathcal{J}}U_{,\mathcal{J}} = 0 \quad . \tag{3.42}$$

Analogamente,

$$\mathcal{P}^{(-)\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} U^*{}_{,\mathcal{J}} = 0 \quad , \tag{3.43}$$

onde $\mathcal{P}^{(-)} \equiv (1 - i\mathcal{J}^{(2)})$. $\mathcal{P}^{(+)}$ e $\mathcal{P}^{(-)}$ são projetores associados à estrutura complexa $\mathcal{J}^{(2)}$.

Tem-se, também, que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(-)\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} U_{,\mathcal{J}} &= U_{,\mathcal{I}} \\ \mathcal{P}^{(+)\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} U*_{,\mathcal{J}} &= U*_{,\mathcal{I}} \quad , \end{aligned} \tag{3.44}$$

o que nos diz que $U_{,\mathcal{I}}$ e $U^*{}_{,\mathcal{I}}$ são vetores holomórficos relativos à estrutura complexa não-canônica $J^{(2)}$. Este fato será relevante no desenvolvimento a seguir. Da expressão de U, chega-se a:

$$\begin{aligned} U + U^* &= 4(-iY + iY^*) \equiv W(\Phi, \Xi, \Phi^*, \Xi^*) \\ U - U^* &= 2(P^{(-)} - P^{(+)}) \quad . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Agora, nosso objetivo é determinar os potenciais $P^{(+)}$ e $P^{(-)}$ que aparecem na segunda equação de (3.45). Para isto, é necessário determinar primeiramente as funções U e U^*, o que é feito a partir da primeira equação. O procedimento adotado é o seguinte:

(i) O fato de $U_{,\mathcal{I}}$ e $U^*{}_{,\mathcal{I}}$ serem autovetores, respectivamente, dos projetores $\mathcal{P}^{(-)}$ e $\mathcal{P}^{(+)}$ diz-nos que eles não se misturam. Assim, o mesmo vale para U e U^*. Escrevemos, então, $U = U(\tilde{Z}^I)$ e $U^* = U^*(\tilde{Z}^{\bar{I}})$, onde $\tilde{Z}^I = \tilde{Z}^I(Z^I, Z^{\bar{I}})$ corresponde, essencialmente, a uma mudança de coordenadas não-holomórficas: $(Z^I, Z^{\bar{I}}) \to (\tilde{Z}^I, \tilde{Z}^{\bar{I}})$. Sendo U e U^* holomórficos, tem-se $U = U(\tilde{Z}^I)$, $U^* = U^*(\tilde{Z}^{\bar{I}})$, ao invés de $U = U(\tilde{Z}^I, \tilde{Z}^{\bar{I}})$ que, nesse caso, poderiam se combinar. Conhecendo como devem ser as variáveis $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}^*$ faz-se então uma separação de $W(\Phi, \Xi, \Phi^*, \Xi^*)$ em funções de $\tilde{Z}$, $\tilde{Z}^*$:

$$W(\Phi, \Xi, \Phi^*, \Xi^*) = L(\tilde{Z}) + L^*(\tilde{Z}^*) \quad ,$$

daí

$$U(\tilde{Z}) + U^*(\tilde{Z}^*) = L(\tilde{Z}) + L^*(\tilde{Z}^*)$$

o que nos permite identificar U com L e U^* com L^* a menos de uma constante imaginária pura:

$$
\begin{aligned}
U(\tilde{Z}) &= L(\tilde{Z}) + ic \\
U^*(\tilde{Z}^*) &= L^*(\tilde{Z}^*) - ic \quad .
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

(ii) Tendo as formas de $U(\tilde{Z})$ e $U^*(\tilde{Z}^*)$ escreve-se a outra equação em (3.45) como

$$
2(P^{(-)}(Z^*) - P^{(+)}(Z)) = L(\tilde{Z}) - L^*(\tilde{Z}^*) + 2ic \quad . \tag{3.47}
$$

O fato de $P^{(+)}$, $P^{(-)}$ serem funções de Z e Z^* nos leva a fazer uma decomposição de $L(\tilde{Z}) - L^*(\tilde{Z}^*)$ em algo do tipo

$$
L(\tilde{Z}) - L^*(\tilde{Z}^*) = M^*(Z^*) - M(Z) \quad ,
$$

e daí

$$
2(P^{(-)}(Z^*) - P^{(+)}(Z)) = M^*(Z^*) - M(Z) + 2ic \quad .
$$

que nos permite identificar $P^{(-)}$ com $(M^* + ic)$ e $P^{(+)}$ com $(M - ic)$, a menos de uma constante real, d, isto é:

$$
\begin{aligned}
2P^{(-)}(Z^*) &= M^*(Z^*) + v^* \\
2P^{(+)}(Z) &= M(Z) + v \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

onde $v = d - ic$ é uma constante complexa arbitrária.

(iii) Vamos, agora, obter expressões para δU e δP. Da primeira equação em (3.45), e usando (2.35), tem-se:

$$
\delta U_a + \delta U_a^* = -\lambda^b f_{ab}^c (U_c + U_c^*) \quad , \tag{3.49}
$$

o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
\delta U_a &= -\lambda^b f_{ab}^c U_c + i g_a \\
\delta U_a^* &= -\lambda^b f_{ab}^c U_c^* - i g_a \quad ,
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

onde g_a é uma constante real. Da segunda equação em (3.45), e usando (3.50), conclui-se que:

$$2(\delta P_a^{(-)} - \delta P_a^{(+)}) = (-2\lambda^b f_{ab}^c P_c^{(-)} + ig_a) - (-2\lambda^b f_{ab}^c P_c^{(+)} - ig_a) \quad , \tag{3.51}$$

que nos dá

$$\begin{aligned} \delta P_a^{(+)} &= -\lambda^b f_{ab}^c P_c^{(+)} + v_a \\ \delta P_a^{(-)} &= -\lambda^b f_{ab}^c P_c^{(-)} + v_a^* \quad , \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde $v_a = \frac{1}{2}(t_a - ig_a)$ é uma constante complexa. Ponhamos, agora, $v_a = -\lambda^b \tilde{c}_{ab}$. Então, $\delta P_a^{(+)} = -\lambda^b (f_{ab}^c P_c^{(+)} + \tilde{c}_{ab})$. No caso de grupos semi-simples, e usando o fato de $P^{(\pm)}$ serem definidos a menos de uma constante arbitrária, pode-se eliminar a constante $\tilde{c}_{ab}$ (ver Apêndice C). Agora, $P^{(+)} = P^{(+)}(\Phi, \Xi)$ e então tem-se $\delta P_a^{(+)} = \lambda^b (k_b^i P_a^{(+)}{}_{,i} + \tau_b^i P_a^{(+)}{}_{,\hat{i}}) = -\lambda^b f_{ab}^c P_c^{(+)}$. Usando eq. (3.37) tem-se $f_{ab}^c P_c^{(+)} = k_b^i k_a^j \omega_{ji}^{(+)} + \tau_b^i \tau_a^j \omega_{\hat{j}\hat{i}}^{(+)}$, que nos dá, então,

$$P_a^{(+)} = f_a{}^{bc}(k_c^i k_b^j \omega_{ji}^{(+)} + \tau_c^i \tau_b^j \omega_{\hat{j}\hat{i}}^{(+)}) \quad . \tag{3.53}$$

Analogamente, de $P^{(-)} = P^{(+)*}$ tem-se

$$P_a^{(-)} = f_a{}^{bc}(k_c^{*i} k_b^{*j} \omega_{\bar{j}\bar{i}}^{-} + \tau_c^{*i} \tau_b^{*j} \omega_{\bar{\hat{j}}\bar{\hat{i}}}^{-}) \quad . \tag{3.54}$$

3.3 O Multipleto Vetorial Kähleriano em D=(2+2).

Para que possamos realizar o gauging das isometrias na presença de uma supersimetria N=2, é preciso introduzir a transformação N=2 dos campos de gauge. Isso é feito introduzindo o multipleto vetorial Kähleriano, que consiste em (S, T, V) onde S é um supercampo escalar quiral, T é um supercampo escalar antiquiral e V é o supercampo de gauge da supersimetria simples. Todos estes supercampos são tomados como reais e se transformam na representação adjunta. Antes, porém, devemos escrever a forma covariante da transformação N=1. O procedimento adotado é similar ao utilizado em [24]. A expressão dos "field-strenghts" e os detalhes desta construção são deixadas para o Apêndice C. A forma covariantizada da transformação $N=1$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2}\nabla^2(\nabla^\alpha\mathcal{U}\nabla_\alpha S) \\
\delta T &= \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^2(\tilde{\nabla}^{\dot\alpha}\mathcal{U}\tilde{\nabla}_{\dot\alpha}T) \\
\exp(-iV)\delta\exp(iV) &= -\frac{i}{2}(\nabla^\alpha\mathcal{U})\exp(-iV)W_\alpha\exp(iV) - \frac{i}{2}(\tilde{\nabla}^{\dot\alpha}\mathcal{U})\tilde{W}_{\dot\alpha} \quad . \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

A segunda supersimetria assume a forma

$$\begin{aligned}
\delta' S &= iW^\alpha D_\alpha\hat{\zeta} \quad ;\tilde{D}_{\dot\alpha}\hat{\zeta}=0 \quad ,\partial_\mu\hat{\zeta}=0 \\
\delta' T &= i\tilde{W}^{\dot\alpha}\tilde{D}_{\dot\alpha}\hat{\epsilon} \quad ,D_\alpha\hat{\epsilon}=0 \quad ,\partial_\mu\hat{\epsilon}=0 \\
\exp(-iV)\delta'\exp(iV) &= \hat{\epsilon}\exp(-iV)S\exp(iV) - \hat{\zeta}T \quad , \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

e o fechamento da álgebra fica como

$$\{\delta_1', \delta_2'\} = \delta_{\mathcal{U}_{12}} \quad , \qquad (3.57)$$

onde $\mathcal{U}_{12} \equiv 2(\hat{\epsilon}_1\hat{\zeta}_2 - \hat{\epsilon}_2\hat{\zeta}_1)$. Em D=(2+2) é necessário que os campos de matéria deste multipleto sejam reais, para que possamos fechar a álgebra. É interessante notar que o fechamento da álgebra N=2 dá-se não em uma translação pura (isto é no espaço-tempo), mas numa translação em todo o superspaço (ver Apêndice C). Definindo as transformações de gauge para os campos desse multipleto como

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= i[\Lambda, S] \\
\delta_g T &= i[\Gamma, T] \\
\exp(-iV)\delta_g\exp(iV) &= i(\exp(-iV)\Lambda\exp(iV) - \Gamma) \\
\delta_g W^\alpha = i[\Lambda, W^\alpha] \quad &; \quad \delta_g\tilde{W}^{\dot\alpha} = i[\Gamma, \tilde{W}^{\dot\alpha}] \\
\delta_g\tilde{T} = i[\Lambda, \tilde{T}] \quad &, \quad \tilde{T} \equiv \exp(iV)T\exp(-iV) \quad . \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

A ação

$$S = \int d^4x d^2\theta d^2\tilde{\theta}\, Tr(S\tilde{T}) + \frac{1}{16}\int d^4x d^2\theta\, Tr(W^\alpha W_\alpha) + \frac{1}{16}\int d^4x d^2\tilde{\theta}\, Tr(\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_a) \quad (3.59)$$

é invariante pelas transformações (3.56,3.58). É possível definir também uma forma não-mínima da ação (3.59).

3.4 O Modelo-N=2 com o Gauging das Isometrias.

As transformações (3.1) constituem-se numa invariância N=2 da ação (2.5). Ao realizarmos o gauging das isometrias, derivamos a forma (2.50) que, naturalmente, não mantinha a invariância N=2 prévia. Afim de recobrá-la, devemos modificar a transformação (3.1), e introduzir termos adicionais na ação afim de mantê-la invariante. A transformação-N=2 é dada por:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^i &= \tilde{D}^2(\hat{\epsilon}\Omega^i(\Phi, e^{2\hat{L}^*}\Xi^*)) \quad , && (3.60)\\
\delta\Xi^i &= D^2(\hat{\zeta}\Upsilon^i(e^{-2L^*}\Phi^*, \Xi)) \quad , && (3.61)\\
\delta\Phi^{*i} &= \tilde{D}^2(\hat{\epsilon}\Omega^{*i}(\Phi^*, e^{2\hat{L}}\Xi)) \quad , && (3.62)\\
\delta\Xi^{*i} &= D^2(\hat{\zeta}\Upsilon^{*i}(e^{-2L}\Phi, \Xi^*)) \quad , && (3.63)\\
\delta S^a &= 2iW^{a\alpha}D_\alpha\hat{\zeta} \quad , && (3.64)\\
\delta T^a &= 2i\tilde{W}^{a\dot{\alpha}}\tilde{D}_{\dot{\alpha}}\hat{\epsilon} \quad , && (3.65)\\
e^{-iV}\delta e^{iV} &= 2\hat{\epsilon}e^{-iV}Se^{iV} - 2\hat{\zeta}T \quad . && (3.66)\\
& && (3.67)
\end{aligned}$$

onde $\hat{L} \equiv \hat{L}_{V.\tau} = V^a\tau^i_a\partial_{\hat{i}}$ e $L \equiv L_{V.\kappa} = V^a\kappa^i_a\partial_i$. A ação invariante por estas transformações é dada por

$$\begin{aligned}
S = \;& 2\int d^4xd^2\theta d^2\tilde{\theta}\left(H(\Phi,\Xi^*) + H^*(\Phi^*,\Xi) + 2Re\left\{\tfrac{\exp(L)-1}{L}\, V^a\, Y^*_a(\Phi^*,\Xi)\right\}\right)\\
& -\int d^4xd^2\theta d^2\tilde{\theta}\, Tr(S\tilde{T}) - \tfrac{1}{16}\int d^4xd^2\theta\, Tr(W^\alpha W_\alpha) - \tfrac{1}{16}\int d^4xd^2\tilde{\theta}\, Tr(\tilde{W}^\alpha\tilde{W}_a)\\
& + \tfrac{i}{4}\int d^4xd^2\theta\, Tr\Big((F(\Phi)+F^*(\Phi^*))\, S\Big) + \tfrac{i}{4}\int d^4xd^2\tilde{\theta}\Big((G(\Xi)+G^*(\Xi^*))\, T\Big) \quad , (3.68)
\end{aligned}$$

onde F e G foram introduzidos em (3.38). A parte da ação correspondente ao multipleto Kähleriano já foi vista ser invariante pelas transformações de gauge e pelas duas supersimetrias; por isto é necessário verificar apenas as contribuições vindas do setor de matéria e dos termos adicionais: $(F+F^*)S$ e $(G+G^*)T$. Na verificação da invariância N=2, é conveniente considerarmos a ação no gauge de Wess-Zumino; a invariância no caso geral sendo decorrência da invariância de gauge. No gauge de Wess-Zumino, tem-se a transformação N=2 escrita como

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi^i &= \tilde{D}^2(\,\hat{\epsilon}\Omega^i(\Phi,\Xi^*) + 2\hat{\epsilon}V^a\tau_a^{*j}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{j}}} + 2\hat{\epsilon}V^aV^b\tau_a^{*j}\partial_{\bar{\hat{j}}}(\tau_b^{*k}\Omega^i{}_{,\bar{\hat{k}}})\,) && (3.69)\\
\delta\Xi^i &= D^2(\,\hat{\zeta}\Upsilon^i(\Phi^*,\Xi)) - 2\hat{\zeta}V^a\kappa_a^{*j}\Upsilon^i{}_{,\bar{j}} + 2\hat{\zeta}V^aV^b\kappa_a^{*j}\partial_{\bar{j}}(\kappa_a^{*k}\Upsilon^i{}_{,\bar{k}})\,) && (3.70)\\
\delta\Phi^{*i} &= \tilde{D}^2(\hat{\epsilon}\Omega^{*i}(\Phi^*,\Xi)) + 2\hat{\epsilon}V^a\tau_a^j\Omega^{*i}{}_{,\hat{j}} + 2\hat{\epsilon}V^aV^b\tau_a^j\partial_{\hat{j}}(\tau_b^k\Omega^{*i}{}_{,\hat{k}})\,) && (3.71)\\
\delta\Xi^{*i} &= D^2(\,\hat{\zeta}\Upsilon^{*i}(\Phi^*,\Xi)) - 2\hat{\zeta}V^a\kappa_a^j\Upsilon^{*i}{}_{,j} + 2\hat{\zeta}V^aV^b\kappa_a^j\partial_j(\kappa_a^k\Upsilon^{*i}{}_{,k})\,) && (3.72)\\
\delta S &= 2\tilde{D}^2(\,D_\alpha\hat{\zeta}(-iD^\alpha V + \frac{1}{2}[V, D^\alpha V])\,) && (3.73)\\
\delta T &= 2D^2(\,\tilde{D}_{\dot{\alpha}}\hat{\epsilon}(\,i\tilde{D}^{\dot{\alpha}}V + \frac{1}{2}[V, \tilde{D}^{\dot{\alpha}}V])\,) && (3.74)\\
\delta V &= -2i(\hat{\epsilon}S - \hat{\zeta}T) - [V, \hat{\epsilon}S + \hat{\zeta}T] + \frac{i}{6}[V,[V,\hat{\epsilon}S - \hat{\zeta}T]] \quad ; && (3.75)
\end{aligned}
$$

além disto, deve-se usar também as relações (2.28,2.30,2.35,3.9,3.10,3.37, 3.39).

A invariância de gauge corresponde às equações obtidas anteriormente (2.44) e (3.58). Um passo consecutivo, mas fora de nosso presente propósito, será a redução dimensional da ação apresentada acima para 2 e 3 dimensões, com a peculiaridade de efetuá-la em termos de supercampos, ou seja, realizar uma redução dimensional de superespaço a superespaço.

Conclusões Gerais

Considerou-se, nesta tese, alguns aspectos geométricos de modelos-σ supersimétricos-$N = 1$ definidos em $D = (2 + 2)$. Mostrou-se que estes modelos não são necessariamente do tipo Kähler, ainda que sejam obtidos através de um potencial K. Como exemplo explícito, construiu-se um modelo-σ supersimétrico e real, que não corresponde a uma variedade Hermitiana. Restringimos nossa análise a um tipo particular de variedades de Kähler, e estudamos os principais pontos envolvidos no processo do "gauging" das isometrias. Em particular, escolhemos os parâmetros de gauge como supercampos reais, o que não é possível em $D = (3 + 1)$. Concluímos, então, com uma ação em superespaço eq.(2.50) que é invariante por isometrias locais.

Os termos cinéticos dos campos componentes dos modelos-σ em $D = (2+2)$ são todos mistos, o que indica a presença de estados de 1-partícula com norma negativa em um espaço-tempo de Minkowski. Assim, o próximo passo deveria ser a realização de uma redução dimensional de $D = (2 + 2)$ para $D = (2 + 1)$ e $D = (1 + 1)$, onde a propagação dos campos pode ser melhor controlada em vista de ansätze que são impostos no processo de redução. Seguindo os resultados de [5] e [7], pode-se ir até dimensões mais baixas de modo que possamos truncar os modos não-físicos e os modelos-σ, acoplados a campos de Yang-Mills, possam ser de alguma relevância em conexão com teorias conformes e modelos integráveis. Esta é uma perspectiva de continuação dos resultados apresentados no Capítulo 2.

Contemplou-se, também, a possibilidade de se introduzir uma supersimetria extra, realizada não-linearmente, para os modelos-σ estudados previamente. Conclui-se que tal programa é plausível, e a geometria correspondente é do tipo hyperKähler. O gauging das isometrias foi realizado e fica aberta a questão de se verificar se a redução dimensional no modelo completo conduz a algum tipo interessante de modelo integrável.

Finalmente, uma outra perspectiva de aplicação dos resultados aqui discutidos seria o estudo de modelos-σ em 2 dimensões, com a particularidade de os formular em termos de supercampos não-vinculados, o que, certamente, aumentaria o número de graus de liberdade do setor de gauge, e poderia revelar interessantes resultados na conexão entre supersimetria estendidas e a geometria de modelos-σ com campos não-vinculados.

Apêndice A

Notações gerais e convenções para D=2+2.

Métrica: $\eta_{\mu\nu}$=diag.(+,−,−,+), μ, ν=(0,1,2,3). O espinor de Dirac, na representação de Weyl, é lido como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

onde ψ e $\tilde{\chi}$ têm as seguintes componentes: ψ^{α}, α=$(1,2)$, e $\tilde{\chi}^{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha}$=$(\dot{1},\dot{2})$. As matrizes-γ de Dirac, 4×4, satisfazem à álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \quad , \tag{A.2}$$

onde $\mathbb{1}_4$ é a matriz identidade 4×4. Valem as transformações de equivalência:

$$\gamma^{\mu\dagger} = -A\gamma^{\mu}A^{-1} \quad , \tag{A.3}$$

$$\gamma^{\mu *} = B\gamma^{\mu}B^{-1} \quad , \tag{A.4}$$

$$\gamma^{\mu T} = -C\gamma^{\mu}C^{-1} \quad , \tag{A.5}$$

onde A=$\gamma^0\gamma^3$. A matriz, B, e a matriz conjugação de carga, C, na representação para os espinores acima tomam a forma:

$$B = \begin{pmatrix} i\sigma_z & 0 \\ 0 & i\sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} , \tag{A.6}$$

onde

$$\epsilon = i\sigma_y \quad \text{e} \quad \widetilde{\epsilon} = -i\sigma_y \quad . \tag{A.7}$$

As matrizes-γ, na mesma representação, são escritas como:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \widetilde{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.8}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1\!\!1_2 & 0 \\ 0 & -1\!\!1_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.9}$$

$1\!\!1_2$ sendo a matriz identidade 2×2. As matrizes-σ de (A.8) têm suas componentes dadas por:

$$\sigma^\mu = (-i\sigma_x, \sigma_y, -\sigma_z, 1\!\!1_2) \quad , \tag{A.10}$$

$$\widetilde{\sigma}^\mu = (i\sigma_x, -\sigma_y, \sigma_z, 1\!\!1_2) \quad , \tag{A.11}$$

onde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.12}$$

são as usuais matrizes de Pauli. Os geradores de $\overline{\text{SO}}(2,2)$ para os espinores são escritos como:

$$\Sigma^{\kappa\lambda} = \tfrac{1}{4}[\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] = \begin{pmatrix} \sigma^{\kappa\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\sigma}^{\kappa\lambda} \end{pmatrix} \quad . \tag{A.13}$$

Logo, usando as eqs. (A.8) e (A.13), encontramos que:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\widetilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\widetilde{\sigma}^\mu) \quad \text{e} \quad \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\widetilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \widetilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \quad . \tag{A.14}$$

A conjugação complexa das matrizes, σ^μ, $\widetilde{\sigma}^\mu$, $\sigma^{\mu\nu}$ e $\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}$ resulta em

$$\sigma^{\mu *} = \sigma_z\sigma^\mu\sigma_z \quad \text{e} \quad \widetilde{\sigma}^{\mu *} = \sigma_z\widetilde{\sigma}^\mu\sigma_z \quad , \tag{A.15}$$

$$\sigma^{\mu\nu *} = \sigma_z\sigma^{\mu\nu}\sigma_z \quad \text{e} \quad \widetilde{\sigma}^{\mu\nu *} = \sigma_z\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}\sigma_z \quad . \tag{A.16}$$

Outras relações úteis envolvendo as matrizes-σ são dadas por:

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}\widetilde{\sigma}^{\nu}) = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \tag{A.17}$$

$$(\sigma^{\mu}\widetilde{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\widetilde{\sigma}^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\alpha}{}_{\beta} \quad , \tag{A.18}$$

$$(\widetilde{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \widetilde{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\alpha}{}_{\beta} \quad , \tag{A.19}$$

e

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\kappa\lambda}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} + \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}) \quad , \tag{A.20}$$

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}\widetilde{\sigma}^{\kappa\lambda}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}) \quad . \tag{A.21}$$

O espinor conjugado de carga, Ψ^{c}, é definido como:

$$\Psi^{c} = B\Psi^{*} = C\overline{\Psi}^{T} \, , \tag{A.22}$$

com $\overline{\Psi}$=$\Psi^{\dagger}A$. e, na representação aqui usada, é lido como:

$$\Psi^{c} = \begin{pmatrix} \psi^{c} \\ \widetilde{\chi}^{c} \end{pmatrix} \, , \tag{A.23}$$

onde $\psi^{c}\equiv i\sigma_{z}\psi^{*}$ e $\widetilde{\chi}^{c}\equiv i\sigma_{z}\widetilde{\chi}^{*}$. Pode ser visto, do Capítulo 1, que ψ^{c} e $\widetilde{\chi}^{c}$ transformam-se do mesmo modo que ψ e $\widetilde{\chi}$, respectivamente; portanto, os espinores de Weyl conjugados de carga, ψ^{c} e $\widetilde{\chi}^{c}$, devem ter como componentes $\psi^{c\alpha}$ e $\widetilde{\chi}^{c\dot{\alpha}}$. A imposição da condição de Majorana sobre Ψ resulta nos chamados espinores de Majorana-Weyl, que satisfazem a ψ^{c}=ψ e $\widetilde{\chi}^{c}$= $\widetilde{\chi}$.

Convenções de índices.

Para todos ψ, $\widetilde{\chi}$, σ^{μ}, $\widetilde{\sigma}^{\mu}$, ϵ, $\widetilde{\epsilon}$ que aparecem no texto, adotamos as seguintes convenções para a estrutura de índices: ψ^{α}, $\widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}$, $\sigma^{\mu\,\alpha}{}_{\dot{\alpha}}$, $\widetilde{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}}{}_{\alpha}$, $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Adicionalmente, consideramos os símbolos $\epsilon^{\alpha\beta}$ and $\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, tais que, $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}$=$\delta^{\alpha}{}_{\gamma}$ e, $\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\epsilon}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}$=$\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}}$, que atuam sobre os dois setores SL(2,$\mathbb{R}$) independentes. Logo os índices espinoriais são levantados e abaixados de acordo com as regras:

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \quad \text{e} \quad \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \quad , \tag{A.24}$$

$$\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} = \widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\chi}^{\dot{\beta}} \quad \text{e} \quad \widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}} = \widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\chi}_{\dot{\beta}} \quad . \tag{A.25}$$

Os espinores de Weyl conjugados de carga são dados por:

$$\psi^{c\,\alpha} = (i\sigma_z\psi^*)^{\alpha} \quad , \quad \widetilde{\chi}^{c\,\dot{\alpha}} = (i\sigma_z\widetilde{\chi}^*)^{\dot{\alpha}} \quad . \tag{A.26}$$

Adota-se uma notação compacta para os bilineares fermiônicos:

$$\psi^{\alpha}\psi_{\alpha} \equiv \psi^2 \quad \text{e} \quad \psi^{\alpha}\lambda_{\alpha} \equiv \psi\lambda = \lambda\psi \quad , \tag{A.27}$$

$$\widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} \equiv \widetilde{\chi}^2 \quad \text{e} \quad \widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\rho}_{\dot{\alpha}} \equiv \widetilde{\chi}\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}\widetilde{\chi} \quad , \tag{A.28}$$

$$\psi^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}^{\,\dot{\alpha}} \equiv \psi\sigma^{\mu}\widetilde{\chi} = -\widetilde{\chi}\widetilde{\sigma}^{\mu}\psi \quad , \tag{A.29}$$

$$\widetilde{\rho}^{\,\dot{\alpha}}\widetilde{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\lambda^{\alpha} \equiv \widetilde{\rho}\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda = -\lambda\sigma^{\mu}\widetilde{\rho} \quad . \tag{A.30}$$

A conjugação complexa resulta em:

$$(i\psi\lambda)^* = i\psi^c\lambda^c \quad , \quad (i\widetilde{\chi}\widetilde{\rho})^* = i\widetilde{\chi}^c\widetilde{\rho}^c \quad , \tag{A.31}$$

$$(i\psi\sigma^{\mu}\widetilde{\chi})^* = i\psi^c\sigma^{\mu}\widetilde{\chi}^c \quad , \quad (i\widetilde{\rho}\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda)^* = i\widetilde{\rho}^c\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda^c \quad . \tag{A.32}$$

Algumas relações úteis para os espinores de Majorana-Weyl, θ e $\widetilde{\theta}$, são dadas a seguir:

$$\theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta^2 \quad , \tag{A.33}$$

$$\theta_{\alpha}\theta_{\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta^2 \quad , \tag{A.34}$$

$$\widetilde{\theta}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\theta}^{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\theta}^2 \quad , \tag{A.35}$$

$$\widetilde{\theta}_{\dot{\alpha}}\widetilde{\theta}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\theta}^2 \quad , \tag{A.36}$$

$$\theta\sigma^{\mu}\widetilde{\theta}\;\theta\sigma^{\nu}\widetilde{\theta} = \frac{1}{2}\theta^2\widetilde{\theta}^2\eta^{\mu\nu} \quad . \tag{A.37}$$

As derivadas fermiônicas são definidas como:

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial\,\theta^{\alpha}} \quad , \tag{A.38}$$

$$\widetilde{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial\,\widetilde{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad . \tag{A.39}$$

Logo, segue que:

$$\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^{\ \beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^{\dot\beta} = \delta_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} \quad , \tag{A.40}$$

$$\partial^\alpha \theta_\beta = -\delta^\alpha_{\ \beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}_{\dot\beta} = -\delta^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta} \quad , \tag{A.41}$$

$$\partial_\alpha \theta_\beta = -\epsilon_{\alpha\beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}_{\dot\beta} = -\widetilde{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta} \quad , \tag{A.42}$$

$$\partial^\alpha \theta^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^{\dot\beta} = \widetilde{\epsilon}^{\dot\alpha\dot\beta} \quad , \tag{A.43}$$

$$\partial_\alpha \theta^2 = 2\theta_\alpha \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^2 = 2\widetilde{\theta}_{\dot\alpha} \quad , \tag{A.44}$$

$$\partial^\alpha \theta^2 = 2\theta^\alpha \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^2 = 2\widetilde{\theta}^{\dot\alpha} \quad , \tag{A.45}$$

$$\partial^2 \theta^2 = -4 \quad , \quad \widetilde{\partial}^2 \widetilde{\theta}^2 = -4 \quad . \tag{A.46}$$

As derivadas bosônicas são definidas como:

$$\not{\partial} \equiv \epsilon \sigma^\mu \partial_\mu \quad , \tag{A.47}$$

$$\widetilde{\not{\partial}} \equiv \widetilde{\epsilon} \widetilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad . \tag{A.48}$$

As medidas no superespaço adotada para o espaço de Atiyah-Ward são:

$$ds \equiv d^4x d^2\theta \quad , \quad d\widetilde{s} \equiv d^4x d^2\widetilde{\theta} \quad \text{e} \quad dv \equiv d^4x d^2\theta d^2\widetilde{\theta} \quad , \tag{A.49}$$

onde foram tomadas as seguintes condições de normalização

$$\int d^2\theta \; \theta^2 = 1 \quad \text{and} \quad \int d^2\widetilde{\theta} \; \widetilde{\theta}^2 = 1 \quad . \tag{A.50}$$

Para um supercampo genérico, $\Phi(x, \theta, \widetilde{\theta})$, pode-se, mostrar que:

$$\int d^2\theta \; \Phi = -\frac{1}{4}\partial^2\Phi = -\frac{1}{4}D^2\Phi \mid_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \quad , \quad \int d^2\widetilde{\theta} \; \Phi = -\frac{1}{4}\widetilde{\partial}^2\Phi = -\frac{1}{4}\widetilde{D}^2\Phi \mid_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \tag{A.51}$$

$$\text{e} \quad \int d^2\theta d^2\widetilde{\theta} \; \Phi = \frac{1}{16}\partial^2\widetilde{\partial}^2\Phi = \frac{1}{16}D^2\widetilde{D}^2\Phi \mid_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \quad . \tag{A.52}$$

Apêndice B

Vetores de Killing Holomórficos.

O espaço de Kähler tratado neste trabalho é do tipo $\mathcal{C}^{2n}\times\mathcal{C}^{\overline{2n}}$ com métrica (2.10), onde cada um dos blocos é uma matriz (2n x 2n) cujas componentes respectivas $g_{i\bar{j}}$, $g_{\hat{i}\bar{\hat{j}}}$, *and* $g_{\bar{i}j}$, $g_{\bar{\hat{i}}\hat{j}}$ se anulam. Uma vez que que o espaço de Kähler mais geral admitiria estas componentes tem-se conseqüentemente que o espaço tratado aqui constitui-se numa subclasse dos espaços de Kähler.

De (2.10), se obtem para as conexões

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{i}_{jk} &= g^{i\bar{\hat{r}}}\partial_{j}g_{k\bar{\hat{r}}}\ ,\\
\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}} &= g^{\hat{i}\bar{r}}\partial_{\hat{j}}g_{\hat{k}\bar{r}}\ ,\\
\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} &= g^{\bar{i}\hat{r}}\partial_{\bar{j}}g_{\bar{k}\hat{r}}\ ,\\
\Gamma^{\bar{\hat{i}}}_{\bar{\hat{j}}\bar{\hat{k}}} &= g^{\bar{\hat{i}}r}\partial_{\bar{\hat{j}}}g_{\bar{\hat{k}}r}\ ,
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

e para as curvaturas

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}^{i}_{jkL} = \partial_L\Gamma^{i}_{jk} \quad \text{com} \quad L=\{\hat{l},\bar{l},\bar{\hat{l}}\}\ , \qquad &&\mathcal{R}^{i}_{jKl} = -\partial_K\Gamma^{i}_{jl} \quad \text{com} \quad K=\{\hat{k},\bar{k},\bar{\hat{k}}\}\ ,\\
&\mathcal{R}^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}L} = \partial_L\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{k}} \quad \text{com} \quad L=\{l,\bar{l},\bar{\hat{l}}\}\ , \qquad &&\mathcal{R}^{\hat{i}}_{\hat{j}K\hat{l}} = -\partial_K\Gamma^{\hat{i}}_{\hat{j}\hat{l}} \quad \text{com} \quad K=\{k,\bar{k},\bar{\hat{k}}\}\ ,\\
&\mathcal{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}L} = \partial_L\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} \quad \text{com} \quad L=\{l,\hat{l},\bar{\hat{l}}\}\ , \qquad &&\mathcal{R}^{\bar{i}}_{\bar{j}K\bar{l}} = -\partial_K\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{l}} \quad \text{com} \quad K=\{k,\hat{k},\bar{\hat{k}}\}\ ,\\
&\mathcal{R}^{\bar{\hat{i}}}_{\bar{\hat{j}}\bar{\hat{k}}L} = \partial_L\Gamma^{\bar{\hat{i}}}_{\bar{\hat{j}}\bar{\hat{k}}} \quad \text{com} \quad L=\{l,\bar{l},\hat{l}\}\ , \qquad &&\mathcal{R}^{\bar{\hat{i}}}_{\bar{\hat{j}}K\bar{\hat{l}}} = -\partial_K\Gamma^{\bar{\hat{i}}}_{\bar{\hat{j}}\bar{\hat{l}}} \quad \text{com} \quad K=\{k,\bar{k},\hat{k}\}\ .
\end{aligned}
$$

Agora, nós devemos analisar a estrutura dos vetores de Killing mostrada na eq.(2.22).

Far-se-à aqui somente um esboço da prova que é completamente análoga àquela dada em [26], assim, ela será apenas uma pequena modificação dos teoremas 2.4 e 2.5 daquela referência.

Em um espaço de Kähler compacto, uma condição necessária e suficiente para um vetor contravariante $\mathcal{K}^I$ ser um vetor de Killing é

$$g^{JK}\nabla_J\nabla_K\mathcal{K}^I + \mathcal{R}^I_J\mathcal{K}^J = 0 \ ,$$
$$\nabla_I\mathcal{K}^I = 0 \ , \tag{B.2}$$

onde $\mathcal{R}^I_J$ é o tensor de Ricci.

Vamos supor que o vetor de Killing $\mathcal{K}^I = (k^i, k^{\hat{i}}, k^{\bar{i}}, k^{\bar{\hat{i}}})$ satisfaça

$$\nabla_i k^i = \nabla_{\hat{i}} k^{\hat{i}} = 0 \ \ e \ \ c.c. \ . \tag{B.3}$$

Então, de (B.2), tem-se também $\zeta^I = (k^i, 0, 0, 0)$, $\tau^I = (0, k^{\hat{i}}, 0, 0)$, $\lambda^I = (0, 0, k^{\bar{i}}, 0)$ e $\eta^I = (0, 0, 0, k^{\bar{\hat{i}}})$ como vetores de Killing. Isto nos permite escrever para cada um deles,

$$\nabla_I\zeta_J + \nabla_J\zeta_I = 0 \ \ etc. \ , \tag{B.4}$$

com $\zeta_I = (0, 0, 0, k_{\bar{\hat{i}}})$, $k_{\bar{\hat{i}}} = g_{\bar{\hat{i}}j}k^j$. Lembrando que $\Gamma^{\bar{\hat{k}}}_{\bar{\hat{i}}\bar{\hat{j}}}$ é a única componente não nula de $\Gamma^{\bar{\hat{k}}}_{IJ}$, tem-se de (B.4) que $\zeta_{\bar{\hat{i}}} = \zeta_{\bar{\hat{i}}}(\Xi^*)$ ou $k_{\bar{\hat{i}}} = k_{\bar{\hat{i}}}(\Xi^*)$, e, de uma maneira análoga, $k_i = k_i(\Phi)$, $k_{\hat{i}} = k_{\hat{i}}(\Xi)$ e $k_{\bar{i}} = k_{\bar{i}}(\Phi^*)$. Estas componentes covariantes dos vetores de Killing, $\mathcal{K}^I$, sendo holomórficas, são também harmônicas [26], isto é, satisfazem

$$\nabla_I\mathcal{K}_J - \nabla_J\mathcal{K}_I = 0 \ . \tag{B.5}$$

Uma vez que $\mathcal{K}^I$ é um vetor de Killing nós temos também que $\nabla_I\mathcal{K}_J + \nabla_J\mathcal{K}_I = 0$. Isto, junto com eq.(B.5), dá $\nabla_I\mathcal{K}_J = 0$, e então $\nabla_I\mathcal{K}^J = 0$, o que também implica

$$k^i = k^i(\Phi),\ k^{\hat{i}} = k^{\hat{i}}(\Xi),\ k^{\bar{i}} = k^{\bar{i}}(\Phi^*),\ k^{\bar{\hat{i}}} = k^{\bar{\hat{i}}}(\Xi^*) \ . \tag{B.6}$$

Nós provamos então que vetores de Killing satisfazendo (B.3) são holomórficos em todas as suas coordenadas.

Inversamente, seja $\mathcal{K}^I$ um vetor satisfazendo (B.3) e holomórfico em todas suas coordenadas (B.6). Das identidades de Ricci

$$\nabla_J \nabla_K \mathcal{K}^I - \nabla_K \nabla_J \mathcal{K}^I = \mathcal{R}^I_{LKJ} \mathcal{K}^L \quad , \tag{B.7}$$

se obtem

$$\begin{aligned}
\nabla_{\bar{\hat{j}}} \nabla_k k^i &= \mathcal{R}^i_{lk\bar{\hat{j}}}\, k^l \quad , \\
\nabla_{\bar{j}} \nabla_{\hat{k}} k^{\hat{i}} &= \mathcal{R}^{\hat{i}}_{\hat{l}\hat{k}\bar{j}}\, k^{\hat{l}} \quad , \\
\nabla_{\hat{j}} \nabla_{\bar{k}} k^{\bar{i}} &= \mathcal{R}^{\bar{i}}_{\overline{lk}\hat{j}}\, k^{\bar{l}} \quad , \\
\nabla_j \nabla_{\bar{\hat{k}}} k^{\bar{\hat{i}}} &= \mathcal{R}^{\bar{\hat{i}}}_{\overline{\hat{l}\hat{k}}j}\, k^{\bar{\hat{l}}} \quad .
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Contraindo cada uma delas respectivamente com $g^{\bar{\hat{j}}k}$, $g^{\bar{j}\hat{k}}$, $g^{\hat{j}\bar{k}}$, $g^{j\bar{\hat{k}}}$, e usando (B.3), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
g^{\bar{\hat{j}}k} \nabla_{\bar{\hat{j}}} \nabla_k k^i + \mathcal{R}^i_l\, k^l = 0 \quad &, \quad \nabla_i k^i = 0 \quad e \quad c.c. \quad , \\
g^{\bar{j}\hat{k}} \nabla_{\bar{j}} \nabla_{\hat{k}} k^{\hat{i}} + \mathcal{R}^{\hat{i}}_{\hat{l}}\, k^{\hat{l}} = 0 \quad &, \quad \nabla_{\hat{i}} k^{\hat{i}} = 0 \quad e \quad c.c. \quad ,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

ou de uma maneira compacta,

$$g^{JK} \nabla_J \nabla_K \mathcal{K}^I + \mathcal{R}^I_L \mathcal{K}^L = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_I \mathcal{K}^I = 0 \quad .$$

Esta é exatamente a condição (B.2) para um vetor de Killing. Provou-se então que um vetor satisfazendo (B.3) é um vetor de Killing se e somente se suas componentes forem holomórficas em todas as suas coordenadas Φ, Ξ, Φ^*, Ξ^*.

Apêndice C

Derivadas Covariantes, Conexões, "Field-Strengths" etc. em D=(2+2).

C.1 Derivadas Covariantes, Conexões e "Field-Strengths".

Vamos considerar aqui o caso da formulação de uma teoria de gauge não-Abeliana. Sejam os campos de matéria e o campo de gauge transformando como

$$\begin{aligned}
\phi' &= \exp(i\Lambda)\phi \\
\chi' &= \exp(i\Gamma)\chi \\
\exp(iV') &= \exp(i\Lambda)\exp(iV)\exp(-i\Gamma)
\end{aligned} \tag{C.1}$$

o que resulta na ação invariante $S = \int d^4x d^2\theta d^2\widetilde{\theta}\ (\chi^*\phi + \phi^*\chi)$. Os "field-strengths" são espinores de Majorana-Weil dados por

$$\begin{aligned}
W_\alpha &\equiv i\widetilde{D}^2(\exp(iV)D_\alpha\exp(-iV)) \\
\tilde{W}_{\dot{\alpha}} &\equiv iD^2(\exp(-iV)\widetilde{D}_{\dot{\alpha}}\exp(iV))
\end{aligned} \tag{C.2}$$

e se transformam covariantemente

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= \exp(i\Lambda)W_\alpha\exp(-i\Lambda) \\
\tilde{W}'_{\dot{\alpha}} &= \exp(i\Gamma)\tilde{W}_{\dot{\alpha}}\exp(-i\Gamma) \quad .
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Na represantação quiral temos a derivadas covariantes dadas por

$$\nabla_A \equiv (\nabla_\alpha, \nabla_{\dot\alpha}, \nabla_{\alpha\dot\alpha}) = (\exp(iV) D_\alpha \exp(-iV),\ \widetilde{D}_{\dot\alpha},\ \frac{i}{2}\{\nabla_\alpha, \nabla_{\dot\alpha}\}) \tag{C.4}$$

e definimos as conexões Γ_A a partir de $\nabla_A \equiv D_A - i\Gamma_A$ o que nos dá

$$\Gamma_A \equiv (\Gamma_\alpha,\ \Gamma_{\dot\alpha},\ \Gamma_{\alpha\dot\alpha}) = (i\exp(iV) D_\alpha \exp(-iV),\ 0,\ \frac{i}{2}\widetilde{D}_{\dot\alpha}\Gamma_\alpha) \quad . \tag{C.5}$$

Na representação antiquiral temos para as derivadas covariantes a forma

$$\tilde\nabla_A \equiv (\tilde\nabla_\alpha,\ \tilde\nabla_{\dot\alpha},\ \tilde\nabla_{\alpha\dot\alpha}) = (D_\alpha,\ \exp(-iV)\widetilde{D}_{\dot\alpha} \exp(iV),\ \frac{i}{2}\{\tilde\nabla_\alpha, \tilde\nabla_{\dot\alpha}\}) \quad , \tag{C.6}$$

enquanto que as conexões definidas por $\tilde\Gamma_A \equiv \widetilde{D}_A - i\tilde\Gamma_A$ se escrevem como

$$\tilde\Gamma_A \equiv (\tilde\Gamma_\alpha,\ \tilde\Gamma_{\dot\alpha},\ \tilde\Gamma_{\alpha\dot\alpha}) = (0,\ i\exp(-iV)\tilde D_\alpha \exp(iV),\ \frac{i}{2}D_\alpha\tilde\Gamma_{\dot\alpha}) \quad . \tag{C.7}$$

Os "field-strengths" $\tilde W_{\dot\alpha}$ e W_α satisfazem as seguintes identidades de Bianchi:

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha W_\alpha + \nabla^{\dot\alpha} W_{\dot\alpha} &= 0\,; \quad W_{\dot\alpha} \equiv \exp(iV)\tilde W_{\dot\alpha}\exp(-iV) \\ \tilde\nabla^{\dot\alpha}\tilde W_{\dot\alpha} + \tilde\nabla^\alpha \tilde W_\alpha &= 0\,; \quad \tilde W_\alpha \equiv \exp(-iV) W_\alpha \exp(iV) \quad . \end{aligned} \tag{C.8}$$

C.2 Expansão em Componentes do Supercampo V.

O supercampo vetorial V (2.40) tem seus campos componentes escritos como

$$V \mid= C(x) \tag{C.9}$$

$$D_\alpha V \mid= i\zeta_\alpha(x), \quad \tilde D_{\dot\alpha} V \mid= i\tilde\eta_{\dot\alpha}(x) \tag{C.10}$$

$$D^2 V \mid= -2iM(x), \quad \tilde D^2 V \mid= -2iN(x) \tag{C.11}$$

$$[D_\alpha, \tilde D_{\dot\alpha}]V \mid= -i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}A_\mu(x) \tag{C.12}$$

$$D^2\tilde D_{\dot\alpha} V \mid= 2\tilde\rho_{\dot\alpha}(x) + 2\partial_{\alpha\dot\alpha}\zeta^\alpha(x), \quad \tilde D^2 D_\alpha V \mid= 2\lambda_\alpha(x) + 2\partial_{\alpha\dot\alpha}\tilde\eta^{\dot\alpha}(x) \tag{C.13}$$

$$D^\beta \tilde D^2 D_\alpha V \mid= -2\delta^\beta_\alpha D(x) + (\sigma^\mu\tilde\sigma^\nu)^\beta_\alpha F_{\mu\nu} - 2\partial^{\beta\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}C(x), \tag{C.14}$$

$$\tilde D^{\dot\beta} D^2 \tilde D_{\dot\alpha} V \mid= -2\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} D(x) - (\tilde\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\beta}_{\dot\alpha} F_{\mu\nu} - 2\partial^{\alpha\dot\beta}\partial_{\alpha\dot\alpha}C(x) \quad . \tag{C.15}$$

C.3 Covariantização da Álgebra N=1.

Vamos mostrar agora como se realiza a covariantização da álgebra N=1.O procedimento é análogo ao apresentado em [24]. Consideremos a transformação de superpoincaré N=1

$$\begin{aligned}\delta &\equiv i(\epsilon^\alpha Q_\alpha + \tilde{\epsilon}^{\dot\alpha}\tilde{Q}_{\dot\alpha} + \epsilon^{\alpha\dot\alpha}P_{\alpha\dot\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{D}^2 D^\alpha \mathcal{U})D_\alpha - \frac{1}{2}(D^2\tilde{D}^{\dot\alpha}\mathcal{U})\tilde{D}_{\dot\alpha} - i([D^\alpha, \tilde{D}^{\dot\alpha}]\mathcal{U})\partial_{\alpha\dot\alpha} \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde expressamos os parâmetros da transformação em termos das componentes de um supercampo escalar real $\mathcal{U}$.

Seja agora Φ um supercampo quiral. temos então de (C.16)

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}(\tilde{D}^2 D^\alpha \mathcal{U})D_\alpha\Phi - i([D^\alpha, \tilde{D}^{\dot\alpha}]\mathcal{U})\partial_{\alpha\dot\alpha}\Phi \quad . \tag{C.17}$$

A covariantização dessa transformação é feita pela adição de uma transformação de gauge $\delta_{gauge}\Phi = i\Lambda\phi$ com parâmetro $\Lambda = -\frac{1}{2}\tilde{D}^2(D^\alpha\mathcal{U}\Gamma_\alpha)$: $\delta\Phi \to \delta\Phi + \delta_{gauge}\Phi$, isto é,

$$\Phi = \frac{1}{2}\tilde{D}^2(D^\alpha\mathcal{U}\nabla_\alpha\Phi) = \frac{1}{2}\nabla^2(\nabla^\alpha\mathcal{U}\nabla_\alpha\Phi) \quad . \tag{C.18}$$

De (C.16) tem-se que o supercampo antiquiral Ξ se transforma como

$$\delta\Xi = \frac{1}{2}(D^2\tilde{D}^{\dot\alpha}\mathcal{U})\tilde{D}_{\dot\alpha}\Xi - i([D^\alpha, \tilde{D}^{\dot\alpha}]\mathcal{U})\partial_{\alpha\dot\alpha}\Xi \tag{C.19}$$

a qual covariantizamos fazendo $\delta\Xi \to \delta\Xi + \delta_{gauge}\Xi$ com $\delta_{gauge}\Xi = i\Gamma\ \Xi$, e $\Gamma = \frac{1}{2}D^2(\tilde{D}^{\dot\alpha}\mathcal{U}\tilde{\Gamma}_{\dot\alpha})$, isto é,

$$\delta\Xi = -\frac{1}{2}D^2(\tilde{D}^{\dot\alpha}\mathcal{U}\tilde{\nabla}_{\dot\alpha}\Xi) = -\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^2(\tilde{\nabla}^{\dot\alpha}\mathcal{U}\tilde{\nabla}_{\dot\alpha}\Xi) \quad . \tag{C.20}$$

A transformação covariantizada de $\exp(iV)$ é obtida de maneira análoga fazendo $\delta\exp(iV) \to \delta\exp(iV) + \delta_{gauge}\exp(iV)$ com $\delta_{gauge}\exp(iV) = i(\Lambda\exp(iV) - \exp(iV)\,\Gamma)$ com Λ e Γ dados anteriormente. Assim, obtem-se

$$\exp(-iV)\,\delta\exp(iV) = -\frac{i}{2}(\nabla^\alpha\mathcal{U})\exp(-iV)W_\alpha\exp(iV) - \frac{i}{2}(\tilde{\nabla}^{\dot\alpha}\mathcal{U})\tilde{W}_{\dot\alpha} \quad . \tag{C.21}$$

Essas são então as formas covariantizadas da transformação N=1. É interessante observar que ela constitui uma translação por todo o superspaço.

Bibliografia

[1] M.F. Atiyah e R.S. Ward, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977) 117;
R.S. Ward, *Phys. Lett.* **61A** (1977) 81;
R.S. Ward, *Nucl. Phys.* **B236**(1984) 381;
R.S. Ward, *Phil. Trans. R. London* **A315** (1985) 451;
R.S. Ward, *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge Univ. Press, (1990);
N.J. Hitchin, *Proc. London Math. Soc.* **55**(1987) 59.

[2] S.J. Gates Jr., S. V. Ketov e H. Nishino, *Phys. Lett.* **B297** (1992) 99 ;
S.J. Gates Jr., S.V. Ketov e H. Nishino, *Nucl. Phys.* **B393** (1993) 149.

[3] S.J Gates Jr. e H. Nishino,*Phys. Lett.* **299** (1993) 255.

[4] S. Mathur e S. Mukhi, *Nucl. Phys.* **B302** (1988) 130;
H. Ooguri e C. Vafa, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 1389;
H. Ooguri e C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B361** (1991) 469;
W. Siegel, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1493;
S.J. Gates Jr., S. V. Ketov e H. Nishino, *Phys. Lett.* **B307** (1993) 331.

[5] H. Nishino, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 3255.

[6] S.J. Gates Jr., S.V. Ketov e H. Nishino, *Phys. Lett.* **B307** (1993) 323.

[7] M.A. De Andrade e O.M. Del Cima, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 95,
M.A. De Andrade e O.M. Del Cima, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A11** (1996) 1367.

[8] C.M. Hull e E. Witten, *Phys. Lett.* **B160** (1985) 398.

[9] C.M. Hull, A. Karlhede, U. Lindström e M. Roček, *Nucl. Phys.* **B266** (1986) 1.

[10] L. Alvarez-Gaume e D.Z. Freedman, *Comm. Math. Phys.* **80** (1981) 443;
L. Alvarez-Gaume e D.Z. Freedman, *Unification of the fundamental particles interactions*, S.Ferrara, J. Ellis, P. van Nieuwenhuizen (eds.). New York, Plenum (1980).

[11] T. Kugo e P.K. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357.

[12] J. Bagger e E. Witten, *Phys. Lett.* **115B** (1982) 202;
J.A. Bagger, *Nucl. Phys.* **B211** (1983) 302.

[13] I. Jack, D.R.T. Jones, N. Mohammedi e H. Osborn, *Nucl. Phys.* **B332** (1990) 359;
C.M. Hull, G. Papadopoulos e B. Spence, *Nucl. Phys.* **B363** (1991) 593;
C.M. Hull e B. Spence, *Nucl. Phys.* **B353** (1991) 379;
C.M. Hull e B. Spence, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1991) 969.

[14] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström e M. Roček, *Comm. Math. Phys.* **108** (1987) 535.

[15] J. Helayël-Neto, R. Iengo, F. Legovini e S. Pugnetti, *Supersymmetry, complex structures and superfields*, ISAS preprint, (1987).

[16] K. Yano, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press (1964).

[17] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, Inc. N.Y.(1972).

[18] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette e M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics, (2 vols.)*, North-Holland (1982).

[19] B. Zumino, *Phys. Lett.* **B87** (1979) 203.

[20] J. Bagger e E. Witten, *Phys. Lett.* **118B** (1982) 103.

[21] M. Carvalho, J.A. Helayël-Neto e L.C.Q. Vilar, *hep-th 9507163, aceito para publicação em Helv.Phys.Acta.*

[22] S. Ishihara, *J.Diff.Geom.* **9**(1974) 483.

[23] E.H. Saidi, *"On the hyperKähler Potential and the Selection Rule of the hyperKähler Geometry"*, Int.Cent. Ther.Phys. prepint, IC/88/148.

[24] S.J. Gates Jr., M.T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *Superspace*, Benjamin/Cummings (Reading, 1983) ;

J. Wess e J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1992, segunda edição).

[25] C.A.S. Almeida, J.A. Helayël-Neto e A.W. Smith, *Mod. Phys. Lett.* **6A** (1991) 1397.

[26] K. Yano, *Jour. Math. Soc. Japan* **5** (1953) 6.

[27] M.Carvalho e M.Werneck, *Phys.Rev.* **D55** (1997) 7574.

"MODELOS – σ SUPERSIMÉTRICOS EM ESPAÇOS DE ATIYAH-WARD"

MARCELO FERREIRA LIMA CARVALHO

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Maurício Werneck de Oliveira

Galleu Sotkov

Paul Schweizer

Antônio Fernandes da Fonseca Teixeira

Marco Aurélio Cattacin Kneipp - Suplente

Rio de Janeiro, 29 de novembro de 1996