

TESE DE
MESTRADO

**UMA COMPROVAÇÃO
ALGÉBRICA DA EQUIVALÊNCIA
ENTRE A CONDENSÇÃO
ANIÔNICA E A COMPOSIÇÃO
FERMIÔNICA PARA O EFEITO
HALL QUÂNTICO
FRACIONÁRIO**

Carmem Lúcia de Souza Batista

**CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, 1996**

Tese orientada por
DINGPING LI

Dedicatória

À Catharina, Célia, Luís Ranulfo e José Carlos

À memória de Raul Batista

Agradecimentos

- Ao meu orientador Dingping Li pela orientação, paciência, encorajamento, e conselhos sempre bem colocados.
- Ao meu coorientador J. A. Helayel pela confiança e suporte fornecido durante o desenvolvimento deste trabalho
- Ao CNPq pela ajuda financeira
- Ao Dr R.Portugal pela consultoria em Maple
- Ao LNCC, CAT e LCA pelo uso dos recursos computacionais
- Aos colegas, professores e funcionários do CBPF
- A todas as pessoas que direta ou indiretamente me permitiram concluir este trabalho

Resumo

Adotando-se coordenadas projetivas, apresenta-se um método para o cálculo das funções de onda propostas pela condensação aniônica e composição fermiônica para o Efeito Hall Quântico Fracionário sobre uma esfera. Calculamos os overlaps entre as funções de onda dos dois modelos para vários filling factors. Observa-se que todos os resultados são, aproximadamente, iguais a 1, evidenciando que as duas teorias são fisicamente equivalentes.

Índice

• Dedicatória	2
• Agradecimentos	3
• Resumo	4
• Índice	5
• Introdução	7
• Capítulo 1: O Efeito Hall	11
1.1 Efeito Hall Clássico	11
1.2 Teoria Quântica, níveis de Landau, gauge simétrico	13
1.3 O papel dos defeitos e impurezas no EHQ	15
1.4 A alta precisão da quantização da condutividade Hall	16
• Capítulo 2: Estados Hierárquicos	19
2.1 Condensação eletrônica	19
2.2 Condensação aniônica	25
2.3 Composição fermiônica	29
• Capítulo 3: Equilavência	37
3.1 Condensação aniônica sobre a esfera	38
Coordenadas projetivas	42

3.2	Composição fermiônica sobre a esfera	49
3.3	A comparação	54
	A expansão dos termos $\prod(z_j - z_k)^m$ e $\prod(\omega_\alpha - \omega_\beta)^{2p}$	55
	Conjugação de carga	59
	Aplicação dos operadores P_n e $S_{n\alpha}^{(h)}$	60
	Invariância rotacional	63
	Overlappings	64
	Conclusões Gerais	69
•	Refências	70
•	Tabelas	
	Tabela 1	65
	Tabela 2: Overlappings	68
•	Figuras	
	Fig.1: Medidas da resistividade em função do campo magnético no EHQ ..	8
	Fig.2: Visão esquemática da experiência para observação do efeito Hall ..	11
	Fig.3: Movimento clássico do elétron na ausência (a) e na presença (b) de defeitos (os centros espalhadores)	12
	Fig.4: Densidade dos estados quânticos para um elétron na presença de defeitos	15

Introdução

O efeito Hall quântico (EHQ) é um fenômeno que ocorre a baixas temperaturas ($\leq 4^0K$) em um gás de elétrons bidimensional, sob a influência de um intenso campo magnético transversal ($B \sim 1$ a $30T$). Em 1980, von Klitzing, Dorda e Pepper [1] observaram que a condutividade Hall é um múltiplo inteiro da condutividade quântica $e^2/h = (25812,807\Omega)^{-1}$. Dois anos depois, Tsui, Stomer e Gossard [2] descobriram que, a baixas temperaturas, numa amostra com menor número de impurezas, a condutividade Hall pode ser um múltiplo fracionário de e^2/h .

A descoberta deste fenômeno é um resultado da tecnologia moderna, que proporcionou a produção de sistemas bidimensionais de elétrons submetidos a fortes campos magnéticos. Existem dois tipos de sistemas experimentais nos quais pode-se gerar sistemas bidimensionais de elétrons ocupando até o nível de Fermi: “metal-oxide-semiconductor (MOS) inversion layer” e a heterojunção semicondutora $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$ ($0 < x \leq 1$).

Em resumo, foi descoberto que, sob certas condições, em um sistema bidimensional de elétrons sujeito a um campo magnético intenso, o tensor de condutividade, σ , toma a forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & s_{xy}e^2/h \\ -s_{xy}e^2/h & 0 \end{bmatrix},$$

onde $s_{xy} = p/q$, com p e q sendo inteiros. Exemplo de valores observados são $s_{xy} = 1, 2, 3, \dots; 1/3, 2/3, 2/5 \dots$, sendo que os mais observados possuem q ímpar. Ou seja, a densidade de corrente, \mathbf{j} , é precisamente perpendicular ao campo elétrico, \mathbf{E} : $j_i = \sigma_{ij}E_j$.

A condutividade diagonal anula-se, indicando que o sistema não dissipa energia, como na supercondutividade e na superfluidez.

Quando s_{xy} é um número inteiro, tem-se o Efeito Hall Quântico Inteiro (EHQI); no caso de ser um número fracionário, o sistema apresenta o Efeito Hall Quântico Fracionário (EHQF). Existem diferenças microscópicas importantes entre os dois efeitos. Contudo, macroscopicamente, estes são similares. O EHQI é, essencialmente, um fenômeno de partículas não-interagentes, enquanto que no EHQF, a interação possui um papel significativo.

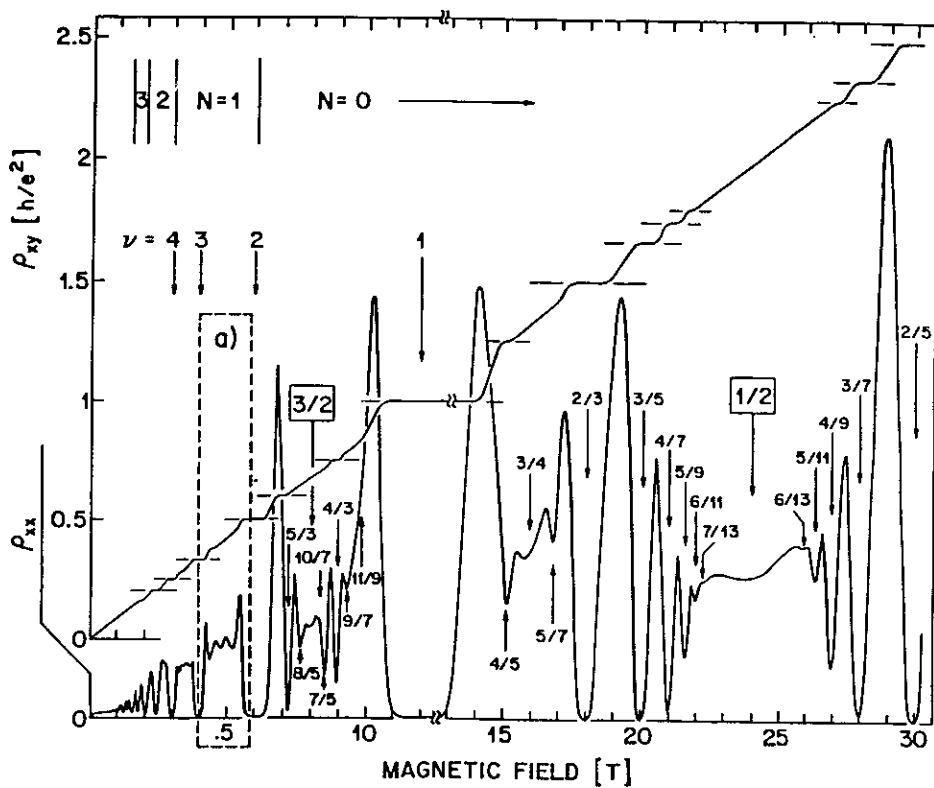


Fig.1: Medidas da resistividade em função do campo magnético no EHQ

Capítulo 1

O Efeito Hall

1.1 Efeito Hall Clássico

No efeito Hall, os elétrons estão confinados a uma superfície bidimensional, submetidos a um campo magnético uniforme e intenso, aplicado perpendicularmente à superfície, e a uma diferença de potencial entre os dois bordos paralelos, A_1 e A_2 (Fig.2)

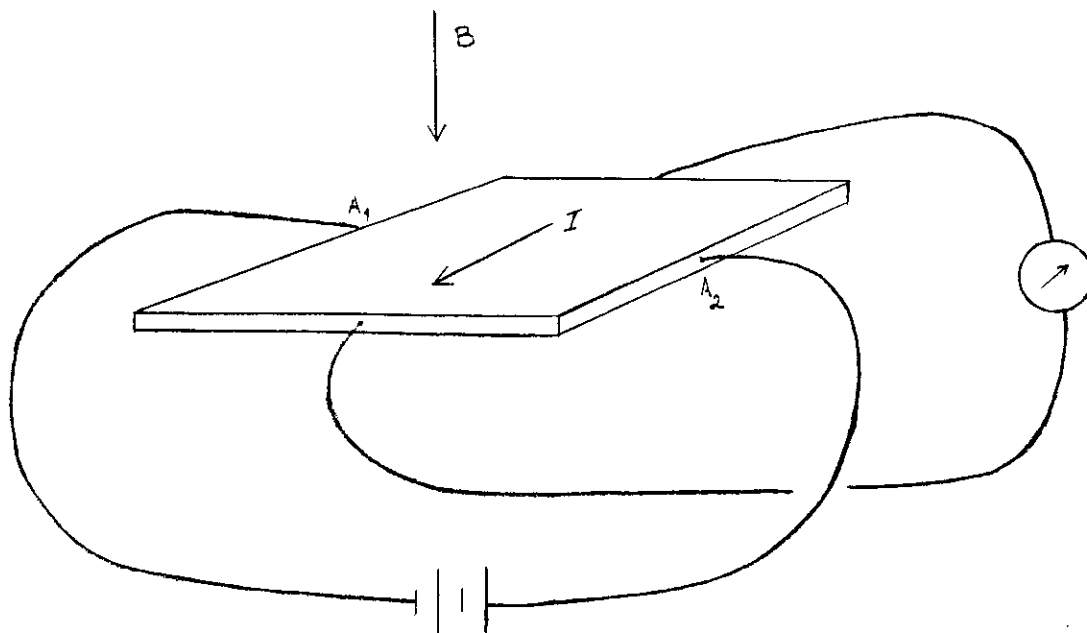


Fig.2: Visão esquemática da experiência para observação do efeito Hall

Os tensores de resistividade (ρ) e condutividade (σ) são relacionados por uma inversão de matriz:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

A Fig.1 mostra medidas típicas das resistividades como função do campo magnético; estas são funções do filling factor, $\nu = \frac{nhc}{eB}$ (n é a densidade eletrônica).

Existem regiões de filling factor para os quais ρ_{xy} é quase constante (região dos platôs), intercaladas por regiões de crescimento; ρ_{xx} só é intenso nas regiões de transição entre os platôs. Estudos da evolução das curvas de ρ_{xx} e ρ_{xy} , feitos em função da temperatura, demonstram que, à medida que $T \rightarrow 0$, a largura das regiões de transição tende a zero, enquanto que, nos platôs, $\rho_{xx} \rightarrow 0$ e ρ_{xy} tende a uma fração ou múltiplo inteiro de e^2/h [3].

A quantização da condutividade Hall é extraordinariamente precisa. Para o EHQI, foi mostrado que a medida da constante $R_K = \nu R_{xy} = \frac{h}{e^2}$, onde ν é o filling factor associado a cada platô medido, é independente da escolha do platô, do tipo de dispositivo e de quaisquer outras variáveis, dentro de, no máximo, 3,5 partes em 10^{10} [4]. Como consequência desta precisão, o EHQ é agora usado nos laboratórios para medir resistências. O valor de $R_K = h/e^2$, determinado pelo EHQ, é adotado pelo International Committee of Weights and Measures desde 1º de janeiro de 1990.

O EHQF foi, primeiramente, observado no sistema bidimensional formado pela heteroestrutura $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$. Uma vez que o grau de desordem e impurezas nas heteroestruturas é bem pequeno, tendo em vista a forma altamente controlada como são construídas, pode-se supor que, neste efeito, o papel das impurezas é irrelevante perante as interações entre os elétrons, que passam a ser bastante significantes.

Nesta tese, comparamos dois modelos sugeridos para descrever o estado fundamental do EHQF, a saber: a composição fermiônica [5] e a condensação aniônica [6][7]. Para evitar os efeitos de fronteira, e analisar principalmente os modelos no interior da amostra bidimensional, trabalhamos sobre uma superfície esférica.

Em prol de uma apresentação mais didática, no Capítulo 1 apresentamos uma rápida

revisão do Efeito Hall Clássico, da teoria quântica dos níveis de Landau, discutimos o papel das impurezas e apresentamos uma argumentação heurística sobre a alta precisão da quantização da condutividade Hall.

No Capítulo 2, encontram-se os modelos da condensação eletrônica, seguidos da condensação aniônica e composição fermiônica.

No Capítulo 3, apresentamos os estados fundamentais do EHQF sobre uma esfera, descritos usando a condensação aniônica e a composição fermiônica, em coordenadas estereográficas. Descrevemos o modelo utilizado para execução dos cálculos algébricos. Neste trabalho, todos os cálculos foram feitos algebricamente, isentando-nos, deste modo, de qualquer erro numérico. Apenas os resultados finais foram aproximados.

Nos Apêndices estão impressas algumas funções de onda calculadas, bem como as bases ortogonais no espaço das funções rotacionalmente invariantes, para cada filling factor e número de partículas.

Os programas foram feitos em sua maioria em Maple 5.3. Foram necessários inúmeros programas com várias linhas de programação. Entre os principais, podem ser citados aqueles que geram as funções de onda com filling factor $1/m$, executam a composição fermiônica, a conjugação de carga, a projeção sobre o 1^{o} nível de Landau, criam e geram a condensação aniônica dos quasi-buracos e quasi-elétrons nos vários níveis hierárquicos, calculam e solucionam as equações que vinculam os coeficientes correspondentes aos determinantes de Slater da expansão das funções de onda, testam a invariância rotacional, calculam as bases ortogonais, e outros.

Classicamente, elétrons sobre a influência de um campo magnético num espaço bidimensional executam movimento circular. Quando um campo elétrico externo \mathbf{E} é aplicado, o elétron experimenta a força elétrica de Lorentz, que desloca o centro da órbita circular na direção perpendicular a E_x , com velocidade $v_y = \frac{c}{B}E_x$. O movimento resultante é uma “trochoid”, e a velocidade do centro dá origem à corrente Hall. Quando existem

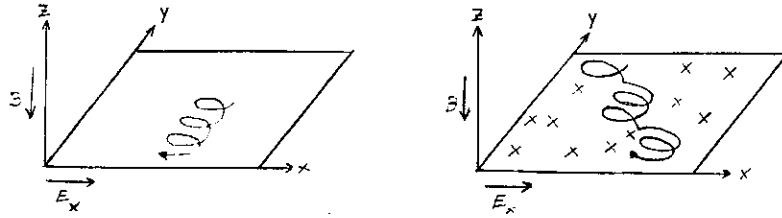


Fig3: Movimento clássico do elétron na ausência (a) e na presença (b) de defeitos (os centros espalhados)

impurezas (potenciais randômicos no sistema), os elétrons são espalhados e geram uma componente na corrente ao longo da direção de E_y . Os elétrons acumulam-se nos bordos perpendiculares a E_x , e um campo elétrico E_y é criado.

A equação de movimento genérica é dada por

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{mc} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{p}}{\tau}$$

onde τ é o tempo de relaxação. No regime estático (a corrente é independente do tempo), p_x e p_y satisfazem às equações

$$0 = eE_x - \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau},$$

$$0 = -eE_y + \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau},$$

onde $\omega_c = \frac{eB}{mc}$. Multiplicando as equações acima por $\frac{-ne\tau}{m}$, e introduzindo as componentes

das densidades de corrente ($\mathbf{j} = \frac{ne}{m}\mathbf{p}$), obtém-se

$$j_x = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2} E_x + \left(\frac{ne c}{B} + \frac{1}{\omega_0 \tau_0} \frac{\sigma_0}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2} \right) E_y$$

$$j_y = - \left(\frac{ne c}{B} + \frac{1}{\omega_0 \tau_0} \frac{\sigma_0}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2} \right) E_x + \frac{\sigma_0}{1 + \omega_0^2 \tau_0^2} E_y,$$

onde $\sigma_0 = \frac{ne^2 \tau}{m}$. Portanto

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \frac{ne c}{B} + \frac{\sigma_{xx}}{\omega_c \tau} \\ -\frac{ne c}{B} - \frac{\sigma_{xx}}{\omega_c \tau} & \sigma_{xx} \end{pmatrix},$$

onde $\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$.

1.2 Teoria Quântica, níveis de Landau, gauge simétrico

O EHQI pode ser muito bem entendido em termos das propriedades de elétrons independentes. Nesta seção, apresentamos um breve resumo do caso ideal de uma amostra bidimensional sem impurezas, e com os spins eletrônicos polarizados devido a um intenso campo magnético perpendicular.

A Hamiltoniana de um elétron movendo-se em duas dimensões espaciais e sobre a influência de um campo magnético, B , perpendicular ao sistema, é dada por

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-i\nabla - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2,$$

onde $B = \nabla \times \mathbf{A}$. A energia dos níveis de Landau são [8] $E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ é a frequência de ciclotron.

Em uma superfície bidimensional, é conveniente usar coordenadas complexas: $z = x + iy$, $\partial = \partial_x - i\partial_y$, $\bar{\partial} = \partial_x + i\partial_y$. Usando o gauge simétrico, $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(y, -x, 0)$, de modo que o campo magnético é antiparalelo ao eixo \hat{z} , a Hamiltoniana torna-se

$$H = \frac{-2\hbar^2}{m} \left\{ \left(\partial - \frac{\bar{z}}{4l_0^2} \right) \left(\bar{\partial} - \frac{z}{4l_0^2} \right) - \frac{1}{4l_0^2} \right\},$$

cujos auto-estados de energia são

$$\Psi_{nm}(z, \bar{z}) = \left[\frac{n!}{2\pi l_0^2 (n+m)!} \right]^{1/2} \left(\frac{z}{\sqrt{2}l_0} \right)^m L_n^m \left(\frac{z\bar{z}}{2l_0^2} \right) e^{-\frac{z\bar{z}}{4l_0^2}},$$

onde L_n^m são os polinômios de Laguerre, n identifica os níveis de Landau e $m = -n, -n + 1, -n + 2, \dots$ é o número quântico de momento angular, $L = \hbar(z\partial - \bar{z}\bar{\partial})$. Note que, no nível $n = 0$, $L_0^m = 1$, a função de onda do nível de menor energia é holomórfica (não contém termos com \bar{z} na sua parte polinomial). O nível $n = 1$ contém no máximo uma potência de \bar{z} ; e, em geral, a maior potência de \bar{z} na função de onda do n -ésimo nível é $(n - 1)$.

A degenerescência de cada nível de Landau pode ser calculada, desde que

$$\langle n, m | \bar{z}z | n, m \rangle = \pi l_0^2 (m + n + 1).$$

O raio do estado Ψ_{nm} será $r_{nm} = l_0 \sqrt{2(m + n + 1)}$, onde $m = -n, -n + 1, -n + 2, \dots$. Se R é o raio da amostra circular de área A , a degenerescência, D , é determinada tomando $m = -n + D - 1$, donde obtém-se

$$D = \frac{A}{2l_0^2\pi}.$$

O número de estados por unidade de área para cada nível de Landau é $n_L = \frac{1}{2\pi l_0^2} = \frac{eB}{hc} = \frac{B}{\phi_0}$.

Se existem ν níveis de Landau totalmente preenchidos, nos platôs onde $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, a condutividade Hall será

$$\sigma_{xy} = \frac{ne c}{B} = \frac{\nu}{2\pi l_0^2} \frac{ec}{B} = \frac{\nu e^2}{h}.$$

1.3 O papel dos defeitos e impurezas no EHQ

Os defeitos e impurezas da rede cristalina nos sistemas bidimensionais onde é observado o EHQ desempenham um papel muito importante: servem como um reservatório que estabiliza os platôs. Na presença de defeitos e impurezas, os níveis de Landau expandem-se formando bandas. Se o potencial das impurezas é fraco, quando comparado a $\hbar\omega_c$, as bandas de energia permanecem separadas, enquanto que num alto grau de desordem, as bandas formam um contínuo. Se o grau de desordem é suficientemente baixo, ainda existem estados estendidos em cada banda (fig.4). E surgem estados localizados preenchendo o gap entre as bandas de estados estendidos. Os estados estendidos ocupam as regiões próximas aos níveis de Landau originais.

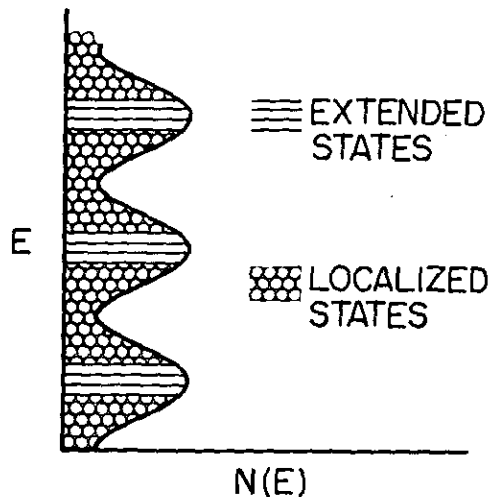


Fig.4: Densidade dos estados quânticos para um elétron na presença de defeitos

Somente os estados estendidos podem carregar corrente quando $T \rightarrow 0$. Portanto, se a ocupação dos estados estendidos não varia, a corrente também não variará. Os platôs da corrente Hall são precisamente aquelas regiões onde a ocupação dos estados estendidos não varia. As impurezas reduzem o número de estados que carregam corrente, contudo

esta última permanece a mesma, desde que todos os estados estendidos estejam ocupados. Demonstrações de que σ_{xy} é independente da desordem no EHQI foram apresentadas por Prange e Joynt [9] e Thouless [10]. Se o nível de energia de Fermi não está na região dos estados estendidos, ou seja, se estes estão totalmente preenchidos, eles carregarão exatamente a corrente dada por $\sigma = \begin{bmatrix} 0 & ie^2/h \\ -ie^2/h & 0 \end{bmatrix}$.

À medida que a densidade aumenta (ou o campo magnético diminui), os estados localizados serão gradualmente preenchidos, sem qualquer variação na ocupação dos estados estendidos; portanto, sem qualquer mudança na condutividade Hall. Para estas densidades, a condutividade Hall está sobre os platôs da Fig.1, e a condutividade longitudinal anula-se a $0^\circ K$. Apenas quando a energia de Fermi passa pela região dos estados estendidos é que a condutividade longitudinal torna-se apreciável e a condutividade Hall está na região de transição entre os platôs. Os estados localizados são, portanto, uma espécie de reservatório que asseguram a localização da energia de Fermi entre as bandas de estados estendidos, ou seja, em um gap de mobilidade.

1.4 A alta precisão da quantização da condutividade Hall

A alta precisão da quantização da condutividade Hall e a sua independência da forma geométrica da amostra e homogeneidade do campo magnético indicam que deve existir um princípio geral regendo o fenômeno. Laughlin [11] e Halperin [12] demonstraram que o EHQ é uma consequência da invariância de gauge e da existência de um gap de mobilidade. A visão de que a condutividade Hall é uma quantidade topológica, refletindo-se na precisão da sua quantização, foi desenvolvida por Thouless e colaboradores [13] e [14].

Executemos a experiência hipotética que consiste em inserir adiabaticamente um fluxo magnético através do buraco de uma amostra com a geometria de Corbino. Um voltímetro é colocado conectando os círculos concêntricos, a fim de medir o potencial elétrico. A variação do fluxo magnético induz uma corrente, I , ao redor do disco. Desde que o fluxo magnético, ϕ , inserido não penetre diretamente na amostra, o potencial vetor dentro da amostra corresponderá a um puro gauge. Os estados localizados não são afetados pela variação de ϕ (a menos de uma transformação de gauge), contudo, os estados estendidos sentem-na: estes são sensíveis à fase Aharonov-Bohm invariante de gauge, $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi\phi/\phi_0$. Se ϕ varia de um múltiplo inteiro do quantum de fluxo, $\phi_0 = \frac{hc}{e}$, após uma transformação de gauge, a Hamiltoniana retorna à sua forma original. A única variação induzida pela introdução adiabática de um número inteiro de quanta de fluxo através do buraco é levar o sistema de um auto-estado da Hamiltoniana original para outro.

Na ausência de desordem, os auto-estados de um elétron no gauge simétrico são também auto-estados do momento angular. A introdução adiabática de um quantum de fluxo através do buraco leva uma partícula com número quântico de momento angular m para $m + 1$. De modo que um elétron por nível de Landau é transportado da fronteira interna do anel definido pela circunferência de raio menor para a fronteira externa, definida pela circunferência externa. Se existem p níveis de Landau totalmente preenchidos, a variação da energia do sistema é dada por $\Delta = peV_H$, onde V_H é o potencial Hall (diferença de potencial químico entre as fronteiras). Por outro lado, o trabalho realizado pela introdução de um quantum de fluxo é igual a $c^{-1}I\phi_0$, sendo I a corrente ao redor do loop. Pela conservação da energia, obtém-se o EHQI: $I/V_H = \frac{pe}{\phi_0} = \frac{pe^2}{h}$. Na presença de impurezas e defeitos, a despeito do caráter complicado dos estados quânticos, o raciocínio é análogo, visto que os estados localizados podem ser ignorados. Não são influenciados pela variação do fluxo, e a mudança da ocupação dos estados estendidos produz a transferência de um número inteiro de elétrons através do sistema, número este idêntico ao número de bandas de Landau ocupadas.

Existem dois requisitos básicos para que se possa generalizar este argumento para os

casos em que $\sigma_{xy} = \frac{p}{q} \frac{e^2}{h}$ na presença de desordem e interação entre os elétrons, a saber:

- (1) A energia de Fermi, no interior da amostra, deve estar na região dos estados localizados, de modo que os únicos estados que podem ser excitados pela inserção adiabática de um número de inteiro de quanta de fluxo envolvem apenas o movimento de cargas de uma fronteira para a outra, não sendo possível a criação de excitações no interior da amostra.
- (2) Existe um número inteiro mínimo de quanta de fluxo para que o sistema mova um número inteiro de elétrons de uma fronteira para a outra.

Justifica-se o primeiro critério notando que apenas os estados estendidos são afetados pela adição do fluxo. Se a energia de Fermi no interior da amostra estiver numa região de estados localizados, nenhuma excitação pode surgir nesta região, devido à existência de um gap de estados estendidos. Nas fronteiras da amostra, tem-se um potencial confinante que cresce com a posição, de modo que existirão estados estendidos no nível de Fermi [12]. A variação do fluxo influenciará os estados da fronteira, resultando num transporte de carga de uma fronteira para a outra, enquanto o interior da amostra permanece imutável.

No EHQL, a adição de um quantum de fluxo ($q = 1$) move um elétron por nível de Landau de uma fronteira para a outra. No EHQF, as quasi-partículas possuem carga fracionária, portanto $q > 1$ quanta de fluxo são necessários para que um número inteiro, p , de elétrons atravesse a amostra e esta retorne ao seu estado original.

Um sistema em que a carga total, pe , transportada quando q quanta de fluxo são inseridos, tem uma variação na sua energia dada por $\Delta = peV_H = c^{-1}I\Delta\phi$ ($\Delta\phi = q\phi_0$), e, portanto, apresenta condutividade Hall, $\sigma_{xy} = I/V_H = \frac{e^2}{h} \frac{p}{q}$, quantizada.

Capítulo 2

Estados Hierárquicos

Introdução

O Efeito Hall Quântico Fracionário foi descoberto por Tsui e colaboradores em 1982 [2], para um sistema bidimensional formado pela heteroestrutura $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$. Como as heteroestruturas possuem menor grau de desordem, se comparadas ao sistema MOS inversion layer, é natural supor que o EHQF resulta da interação Coulombiana entre elétrons, que é considerada dominante sobre o efeito dos defeitos nas heteroestruturas.

O estado fundamental do EHQF não deve suportar a existência de excitações sem gap de energia, caso contrário os platôs de σ_{xy} não seriam tão nítidos.

O papel das impurezas e defeitos nesta teoria é o mesmo que no caso do EHQI. As bandas de energia contêm uma banda de estados estendidos e localizados. Pequenas variações da densidade movem o nível de Fermi dentro dos estados localizados, à medida que quasi-partículas extras ficam presas aos sítios de impurezas [15].

2.1 Condensação eletrônica

O estado eletrônico do EHQF obedece à Hamiltoniana com interação Coulombiana:

$$\mathcal{H} = \sum_j \left\{ \frac{1}{2m} | -i\nabla_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}_j |^2 \right\} + V(r_j) + \sum_{j < k} \frac{e^2}{|r_j - r_k|}.$$

Usando o campo magnético no gauge simétrico, $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(y\hat{x} - x\hat{y})$, e o insight adquirido estudando estados para um pequeno número de partículas [16], Laughlin [15] [17] [18] propôs a seguinte classe de funções de onda para descrever o estado fundamental:

$$\Psi(z_1 \dots z_N) = \prod_{j < k} f(z_j - z_k) e^{-\frac{1}{4l_0} \sum_j^N |z_j|^2},$$

onde f é uma função que tende a zero quando o seu argumento também tende a zero, afim de minimizar o valor esperado da Hamiltoniana. Além disto, f deve satisfazer a mais três exigências, a saber:

1- O estado fundamental da Hamiltoniana deve ter os elétrons apenas no primeiro nível de Landau, ou seja, $f(z)$ deve ser uma função analítica, e o produto $\prod_{i < j}^N f(z_i - z_j)$ uma função holomórfica.

2- Os estados de \mathcal{H} devem ser totalmente antissimétricos, de forma que $f(z)$ deve ser uma função ímpar, $f(z) = -f(-z)$.

3- $\prod_{i < j}^N f(z_i - z_j)$ deve ser um polinômio homogêneo de grau igual ao número quântico de momento angular, visto que a \mathcal{H} é rotacionalmente invariante no gauge simétrico (implicando na conservação do momento angular).

A função que satisfaz a estes três requerimentos é $f(z) = z^m$, onde m é um número ímpar, ou seja,

$$\Psi_m(z_1 \dots z_N) = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m e^{-\frac{1}{4l_0} \sum_j^N |z_j|^2}.$$

Sob uma rotação rígida do sistema como um todo, por um ângulo θ ao redor da origem, a coordenada z_j de cada partícula é multiplicada pela fase $e^{i\theta}$, e Ψ_m transforma-se em $\Psi_m(e^{i\theta z_1}, \dots, e^{i\theta z_N}) = e^{m\frac{N}{2}(N-1)\theta} \Psi_m(z_1, \dots, z_N)$, significando que o momento angular total, L_z , de Ψ_m é igual a $M = \frac{1}{2}mN(N-1)$. Como o valor esperado de r^2 para uma partícula

no primeiro nível de Landau e momento angular l é dado por $\langle l|r^2|l \rangle = 2(l+1)l_0$, a área da amostra restringe os valores possíveis do momento angular em $l \leq N_s - 1$, visto que $\pi \langle r^2 \rangle \leq A$ e $N_s = A/(2\pi l_0)$. Por outro lado, o maior expoente em Ψ_m para uma dada coordenada z é $m(N - 1)$. Logo, no limite termodinâmico ($N \gg 1$ e $N_s \gg 1$)

$$\nu = \frac{N}{N_s} = \frac{1}{m},$$

ou seja, o parâmetro m é fixado pela densidade eletrônica e o filling factor de Ψ_m é $1/m$.

O caminho principal que esta tese propõe-se a seguir é estudar o EHQF pelo método das funções de onda tentativas. Laughlin foi o primeiro a seguir este caminho, propondo os estados para filling factor fracionário do tipo $1/(2m+1)$. A característica peculiar que torna este método especialmente útil é o fato das funções de onda dos estados incompressíveis do EHQF serem extraordinariamente independentes da interação. Estudos numéricos [18], com pequeno número de elétrons, realizados para várias interações repulsivas tais como λ/r , $\ln \lambda r$, ou $\exp(\lambda^2 r^2)$ (onde λ é o parâmetro que controla o alcance da interação), mostram que as funções de ondas encontradas para os estados fundamentais possuem overlap fundamentalmente igual a um. Este fato, junto à variedade de filling factors fracionários, indica que, independentemente do aspecto complexo deste problema de muitos-corpos, pode-se esperar a revelação de uma estrutura bem simples para o EHQF. Guiados por este princípio, pode-se solucionar o problema do EHQF: com base na intuição, pode-se propor ansätze para as funções de onda que sejam boas aproximações para a solução exata da Hamiltoniana com interação repulsiva Coulombiana.

Analogia com o caso de um plasma

Pode-se escrever o valor absoluto do estado Ψ_m na forma

$$|\Psi_m|^2 = e^{-\beta S},$$

com

$$S = - \sum_{i < j} m^2 \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{4} m \sum_k |z_k|^2,$$

e reinterpretar $|\Psi_m|^2$ como a probabilidade de um ensemble canônico com energia potencial S e temperatura tal que $\beta = 2/m$. Em duas dimensões espaciais, a interação Coulombiana é dada por $\phi(|x|) = \ln|x|^{-1}$. Conseqüentemente, a energia potencial do sistema será

$$V(N) = \frac{e^2}{2} \sum_{i < j}^N \phi(|z_i - z_j|) - e\rho \sum_{i=1}^N \int_A dA \phi(|z - z_i|),$$

onde ρ é a densidade de carga do background. Após integração,

$$V(N) = -q^2 \sum_{j < k} \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{2} \pi \rho q \sum_j |z_j|^2.$$

Comparando S e V , conclui-se que S descreve um estado de plasma clássico bidimensional, com carga m para cada partícula e densidade de carga para o background neutralizante dada por $\rho = \frac{1}{2\pi l_0}$.

Um estado de plasma é eletricamente neutro em qualquer parte, logo o produto da densidade dos elétrons, ρ_m , do estado quântico Ψ_m pela a carga m deve ser igual à densidade de carga do background, ou seja, $\rho_m = \frac{1}{m} \rho = \frac{1}{2\pi l_0 m}$. Na verdade, a exigência de neutralidade do plasma minimiza a energia total do estado.

A natureza do estado de Laughlin é, no mínimo, intrigante. Foi mostrado que o overlap desta função de onda com as funções de onda exatas, calculadas numericamente para um pequeno número de elétrons e para diferentes tipos de interação repulsiva elétron-elétron, é aproximadamente igual a 1 [22].

Excitações elementares (quasi-partículas)

Laughlin [15] gerou as excitações elementares de Ψ_m perfurando o fluido em uma posição qualquer, z_0 , com um solenóide infinitesimalmente fino, e fazendo passar adiabaticamente

através dele um quantum de fluxo $\phi_0 = \frac{hc}{e}$. Na medida em que o quantum de fluxo é adicionado, a função de onda evolui adiabaticamente a fim de ser sempre um autoestado da Hamiltoniana mutante. Contudo, uma vez o quantum de fluxo tenha sido completamente adicionado, a menos de uma transformação de gauge, a Hamiltoniana estará de volta ao seu valor inicial. O solenóide atravessado por ϕ_0 desaparece por uma transformação de gauge, deixando para trás um estado excitado da Hamiltoniana original. Esta excitação é chamada quasi-partícula.

O potencial vetor associado ao quantum de fluxo que atravessa o solenóide pode ser escrito como $\mathbf{A}'(z_0) = \pm \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_0}{|z_0|^2} = \pm \frac{\phi_0}{2\pi} \nabla \theta$, onde o sinal \pm indica o sentido em que o campo magnético foi adicionado. De forma que o campo magnético, $\mathbf{B}(z_0) = \nabla \times \mathbf{A}' = \pm \phi_0 \delta(z_0) \hat{\mathbf{k}}$, estará confinado ao interior do solenóide e as funções de onda para uma única partícula, da qual a função de onda para muitos corpos é obtida, transformar-se-á de acordo com $\Psi \rightarrow \Psi e^{\pm i\theta}$. Portanto, se o fluxo for adicionado na origem, para os estados no primeiro nível de Landau, o momento angular variará: $\frac{z^k e^{-\frac{|z|^2}{4}}}{\sqrt{2^{k+1} k! \pi}} \rightarrow \frac{z^{k\pm 1} e^{-\frac{|z|^2}{4}}}{\sqrt{2^{k\pm 1} (k\pm 1)! \pi}}$. Note que o estado com $k = 0$ evolui, quando o quantum de fluxo é removido, para $\frac{\bar{z} e^{-\frac{|z|^2}{4}}}{4\pi}$, um estado no próximo nível de Landau.

As quasi-partículas possuem carga fracionária. A mudança do fluxo na posição z_0 induz um campo elétrico, $E(R)$, azimutal. Supondo que $\sigma_{xx} = 0$ e $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{m\hbar}$, distante do ponto z_0 , surgirá uma corrente $j(R)$, na direção radial $j(R) = \sigma_{xy} E(R) = \frac{\sigma_{xy}}{2\pi R c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$. A carga e^* da quasi-partícula é a integral da corrente radial durante o tempo que leva para inserir o quantum de fluxo ϕ_0 , de modo que $e^* = \int dt 2\pi R j(R) = \sigma_{xy} \frac{\phi_0}{c}$, ou seja, $e^* = e/m$. Quando o fluxo é adicionado, a corrente formar-se-á no sentido radial, deixando um decréscimo de carga e/m em z_0 , o quasi-buraco; por outro lado, quando o fluxo é retirado, forma-se um acúmulo de carga e/m em z_0 , o quasi-elétron.

Laughlin propôs que as funções de onda aproximadas para o quasi-buraco e o quasi-elétron, centrados em z_0 , teriam, respectivamente, as formas:

$$S_{z_0} \Psi_m = e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2} \prod_i^N (z_i - z_0) \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m,$$

$$S_{z_0}^\dagger \Psi_m = e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2} \prod_i^N \left(2 \frac{\partial}{\partial z_i} - z_0 \right) \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m.$$

O comportamento da função de onda para N elétrons, quando se adiciona o fluxo ϕ_0 , é independente da interação Coulombiana entre os mesmos. Na verdade, pode-se estudar a evolução do estado fundamental como se a força Coulombiana estivesse desligada, e interpretar a função de onda aproximada da quasi-partícula variacionalmente.

Considerando Ψ_m como um auto-estado da Hamiltoniana com a interação Coulombiana desligada, e escrita na forma $\sum_{k_1 \dots k_N} a_{k_1 \dots k_N} z_1^{k_1} \dots z_N^{k_N} e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2}$, com a criação de um quasi-buraco na origem, Ψ_m evoluirá exatamente para

$\sum_{k_1 \dots k_2} \frac{a_{k_1 \dots k_N}}{\sqrt{2^N (k_1+1) \dots (k_N+1)}} z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1} e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2}$. No entanto, observando $S_{z_0} \Psi_m$, nota-se que se retirou a contribuição dos fatores de normalização, de forma que a Ψ_m evolui para $\sum_{k_1 \dots k_2} a_{k_1 \dots k_N} z_1^{k_1+1} \dots z_N^{k_N+1} e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2}$. Isto porque a função de onda para as quasi-partículas é, em primeiro lugar, apenas uma função variacional, de modo que os fatores de normalização têm pouco efeito sobre a mesma.

Na criação de um quasi-elétron na origem, Ψ_m evolui para

$\sum_{k_1 \dots k_2} [2^N k_1 \dots k_N] a_{k_1 \dots k_N} z_1^{k_1-1} \dots z_N^{k_N-1} e^{-\frac{1}{4} \sum_i^N |z_i|^2}$. De forma que a parte da função de onda inicial, Ψ_m , com $k_j = 0$, é simplesmente aniquilada. A razão deste fato é que a função de onda verdadeira para o quasi-elétron não deve apresentar contribuição de níveis de Landau mais elevados, visto que isto poderia aumentar a energia cinética do estado, descaracterizando-o.

O operador $(2 \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_0)$ é o adjunto Hermitiniano do operador $(z_i - z_0)$ no espaço gerado pelos estados do nível de Landau de menor energia. Prova-se isto, definindo uma base de funções ortogonais neste espaço, $f_n(z) = \frac{z^n}{(2^n n!)^{1/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4}}$, e usando as propriedades (i) $z f_m = \sqrt{2} \sqrt{m+1} f_{m+1}$, (ii) $\frac{d}{dz} f_m = \sqrt{\frac{m}{2}} f_{m-1}$, de modo que $\langle f_n | \bar{z} f_m \rangle = \langle f_n | 2 \frac{d}{dz} f_m \rangle$, ou seja, \bar{z} e $2 \frac{d}{dz} f_m$ têm o mesmo elemento de matriz no espaço definido pelo mais baixo nível de Landau [23].

Cálculos numéricos demonstram que a função de onda $S_{z_0} \Psi_m$ apresenta um ótimo overlapping com a função de onda verdadeira (calculada numericamente para o quasi-

buraco) [24, 18]. A função de onda proposta para o quasi-elétron, $S_{z_0}^\dagger \Psi_m$ também apresenta um bom overlapping; entretanto, existe uma proposta ainda melhor no procedimento da composição fermiônica [25].

A estatística e a carga das quasi-partículas foram calculadas explicitamente por Arovas et al [26], através da variação da fase da função de onda quando uma quasi-partícula descreve adiabaticamente um caminho fechado adiabaticamente. Pela fase de Berry, dada uma Hamiltoniana, $H(z_0)$, além da fase usual $\int^t E(t') dt'$, onde $E(t')$ é a energia adiabática, surge um fase extra, $\gamma = i \int dt \langle \Psi(t) | \frac{d}{dt} \Psi(t) \rangle$, que depende da taxa de variação de z_0 . Os cálculos são executados tomando duas quasi-partículas nas coordenadas z_a e z_b , e fazendo com que, por exemplo, a quasi-partícula z_a descreva um caminho fechado ao redor da outra, fixa em z_b , e dos demais elétrons também mantidos fixos. Para quasi-buracos, $\frac{d\gamma}{dt} = i \langle \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} | \frac{d}{dt} \sum_i \ln(z_i - z_a(t)) | \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} \rangle$, e para quasi-elétrons, $\frac{d\gamma}{dt} = i \langle \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} | \frac{d}{dt} \sum_i \ln(2 \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z}_a(t)) | \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} \rangle = i \langle \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} | \frac{d}{dt} \sum_i \ln(\bar{z}_i - \bar{z}_a(t)) | \Psi_m^{+z_a(t), +z_b} \rangle$. Usando a expressão para a densidade de um elétron dada por $\rho^{z_a, z_b}(z) = \langle \Psi_m^{z_a, z_b} | \sum_i \delta(z_i - z) | \Psi_m \rangle$, simplifica-se a expressão de $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt} = i \int dx dy \frac{d}{dt} \ln(z - z_a(t)) \rho^{z_a, z_b}(z)$ para quasi-buracos, e uma expressão análoga para quasi-elétrons. Integrando em t , obtém-se $\gamma = \mp \int dx dy \oint^\Gamma dz_a \frac{1}{z_a - z} \rho^{z_a, z_b}(z) = \mp 2\pi(N_\Gamma \mp \frac{1}{m})$, onde N_Γ é o número de elétrons dentro da área definida pelo contorno Γ , e $\frac{1}{m}$ é a quantidade de elétrons necessária para formar uma quasi-partícula. De forma que a troca de duas quasi-partículas acarreta numa fase $\frac{\Delta\gamma}{2} = \frac{\pi}{m}$, correspondendo a uma estatística fracionária.

2.2 Condensação aniônica

Para explicar o filling factor fracionário do tipo p/q , onde q é um número ímpar diferente de 1, foi proposta a condensação das quasi-partículas aniônicas, seguindo o modelo do estado de Laughlin para os elétrons [6, 7, 27, 28, 29, 30]. Isto porque, como a presença de uma quasi-partícula muda a densidade eletrônica localmente, um condensado uniforme delas irá variar o filling factor.

A idéia é bem simples. Por exemplo, para dois níveis de condensação, inicia-se com o estado fundamental condensado de elétrons, sobre o qual se condensam as suas quasi-partículas (suas excitações), produzindo um novo estado fundamental, com um novo filling factor e dois níveis de condensação. A expressão “níveis hierárquicos” provém dos níveis de condensação.

Apenas o término do gap de energia, separando o estado fundamental dos demais, restringirá a continuação deste processo de formação de novos níveis hierárquicos a partir da condensação de quasi-partículas de quasi-partículas de quasi-partículas de ... elétrons.

Em resumo: é através da condensação das quasi-partículas (excitações), formando os níveis hierárquicos, que se materializam os novos estados com os filling factors desejados, $\nu = p/q$.

Tomando por base a estatística fracionária das quasi-partículas, Halperin [7] propôs a seguinte função de onda para o s -ésimo nível hierárquico, formado exclusivamente apenas por quasi-buracos ou por quasi-elétrons:

$$\Psi_s(z_k) = \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{-\alpha_{s+1}/m_s} \prod_{\alpha < \beta} (z_\alpha - z_\beta)^{2p_{s+1}} \prod_{k=1}^{N_s} e^{\frac{-iq_s |z_k \bar{z}_k}{4}},$$

onde p_{s+1} é um número inteiro positivo; $z_\alpha = x_\alpha \mp y_\alpha$ é a posição da s -partícula, isto é, da $(s-1)$ -quasi-partícula formadora do s -ésimo nível hierárquico; $\alpha = \pm 1$, dependendo se os z_α 's representam s -partículas do tipo quasi-elétron ou do tipo quasi-buraco; o sinal de $z_\alpha = x_\alpha \mp y_\alpha$ também depende da carga da s -partícula.

Estas duas últimas restrições podem ser facilmente provadas. Basta lembrar das seções [1.2] e [2.1]. Na seção [1.2], observou-se que quando a carga da s -partícula é negativa, o estado fundamental é descrito por uma função holomórfica, $\Psi(z)$. Enquanto que, quando a carga é positiva, o estado fundamental é constituído por uma função antiholomórfica, $\Psi(\bar{z})$. Na seção [2.1], vimos que se o número de $(s-1)$ -partículas do $(s-1)$ -ésimo nível hierárquico necessárias para formar uma $(s-1)$ -quasi-partícula for f , a intertroca de duas $(s-1)$ -excitações do tipo quasi-buraco gerariam uma fase extra à função de onda, correspondendo a $(z_\alpha - z_\beta)^f$, caso a carga do quasi-buraco, e_{s-1}^* , seja negativa, e $(\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta)^f$,

caso e_{s-1}^* seja positiva. Da mesma forma, para $(s-1)$ -excitações do tipo quasi-elétron, a função de onda se comporta como $(z_\alpha - z_\beta)^{-f}$ se $e_{s-1}^* < 0$, ou como $(\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\beta)^{-f}$ se $e_{s-1}^* > 0$ [31].

Fazendo analogia com o plasma de uma componente, como na seção [2.1],

$$|\Psi_s| = e^{-\beta S}$$

$$S = - \sum_{\alpha < \beta} m_{s+1}^2 \ln |z_\alpha - z_\beta| + \frac{1}{4} |q_s| m_{s+1} \sum_{\alpha} |z_\alpha|^2,$$

onde $m_{s+1} = 2p_{s+1} - \alpha_{s+1}/m_s$, desde que a densidade do plasma seja fixada pela condição de neutralidade. O número de s -partículas na área $2\pi l_0^2$ é dado por $n_s = |q_s|/m_{s+1}$. Como cada s -partícula tem carga $\alpha_{s+1}q_s$, cada s -partícula na área $2\pi l_0$ representará $\alpha_{s+1}q_s$ elétrons, e o filling factor deste novo estado será

$$\begin{aligned} \nu_{s+1} &= \nu_s + \alpha_{s+1} q_s n_s \\ &= \nu_s + \alpha_{s+1} q_s \frac{|q_s|}{m_{s+1}} \end{aligned}$$

Aplicando-se o operador para formar quasi-elétrons na posição η :

$$\prod_{\alpha=1}^N \left(2 \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \bar{\eta} \right),$$

acumula-se um excesso de $1/m_{s+1}$ s -partículas ao redor do ponto $z = \eta$. Similarmente, gerando um quasi-buraco na posição ω , através do operador $\prod(z_\alpha - \omega)$, acha-se uma deficiência de $1/m_{s+1}$ s -partículas ao redor do ponto $z = \omega$. Como as s -excitações formam as $(s+1)$ -partículas do próximo nível hierárquico, determina-se a equação iterativa para a carga q_s e para o parâmetro θ_s da estatística

$$q_s = \alpha_{s+1} \frac{q_s}{m_{s+1}}$$

$$\frac{\theta_{s+1}}{\pi} = - \frac{\alpha_{s+1}}{2p_{s+1} - \alpha_{s+1} \frac{\theta_s}{\pi}}.$$

Com as condições iniciais $\nu_0 = 0$, $q_0 = m_0 = \alpha_1 = 1$, as equações iterativas para m_{s+1} , ν_{s+1} e q_{s+1} produzem um filling factor para qualquer seqüência de $\{\alpha_s, p_s\}$. No nível $s = 1$, encontra-se os estados de Laughlin com $\nu_1 = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$. Do estado $\nu_1 = 1/3$, chega-se, acrescentando quasi-elétrons, aos estados $\nu_2 = \frac{2}{5}$ ou $\frac{4}{11}$, e, acrescentando quasi-buracos, aos estados $\nu_2 = \frac{2}{7}$ ou $\frac{4}{13}$.

A expressão para as frações permitidas é da forma

$$\nu = \frac{1}{m_1 - \frac{\alpha_1}{2p_1 - \frac{\alpha_2}{2p_2 - \frac{\alpha_3}{\dots - \frac{\alpha_n}{2p_n}}}}},$$

tendo todos os filling factors racionais, $0 \leq \nu \leq 1$, com denominadores ímpares.

É possível provar que o fator de normalização, $\mathcal{N}(\omega_1, \dots, \omega_{N_q})$, do estado no nível hierárquico s ,

$$\tilde{\Psi}_s(\omega_1, \dots, \omega_{N_q}; z_1, \dots, z_N) = \mathcal{N}(\omega_1, \dots, \omega_{N_q}) \prod_{\alpha=1}^{N_q} Op(\omega_\alpha) \Psi_s(z_1, \dots, z_N),$$

é precisamente o módulo da função de onda do próximo nível hierárquico, Ψ_{s+1} com $p_{s+2} = 0$ [32].

Portanto, o estado eletrônico para n níveis hierárquicos é expresso como

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \int \left(\prod_{s=2}^n \prod_{i=1}^{N_s} d^2 z_{si} \right) \prod_{s=1}^n \exp\left(-\frac{q_s}{4} \sum_i |z_{si}|^2\right) \prod_{s=1}^n \left[\prod_{i < j} |\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_{sj}|^{-2 \frac{\alpha_{s+1}}{m_s} c_s} \prod_{ij} Op(\tilde{z}_{si}; \tilde{z}_{s+1,j})^{b_{s,s+1}} \prod_{i < j} (\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_{sj})^{2p_{s+1}} \right].$$

$\Psi(z_1, \dots, z_N)$ descreve $N = N_1$ elétrons nas posições $z_i = \tilde{z}_{1i} = z_{i1}$, e as integrais são sobre as coordenadas das quasi-partículas formadoras dos níveis hierárquicos $s = 1, \dots, n$. Este estado quântico contém, em cada nível s , N_s quasi-partículas nas posições \tilde{z}_{si} . $\tilde{z}_{si} = z_{si}$, se a s -partícula tiver carga negativa, enquanto que $\tilde{z}_{si} = \bar{z}_{si}$ se tiver carga positiva. $c_s = 0$, se $s=1$ e se a s -partícula for uma $(s-1)$ -excitação do tipo quasi-elétron; caso contrário, $c_s = 1$. p_s , α_s , q_s e m_s seguem as mesmas equações iterativas dadas na

discussão da função de onda Ψ_s . $Op(\tilde{z}_{si}; \tilde{z}_{s+1,j})$ é o operador que produz as excitações do nível s , ou seja, as $(s + 1)$ -partículas formadoras do nível $s + 1$. Se as s -excitações forem do tipo quasi-elétron, ter-se-á

$$Op(\tilde{z}_{si}; \tilde{z}_{s+1,j}) = (2\frac{\partial}{\partial \tilde{z}_{si}} - \tilde{z}_{s+1,j}).$$

Caso contrário, se forem do tipo quasi-buraco,

$$Op(\tilde{z}_{si}; \tilde{z}_{s+1,j}) = (\tilde{z}_{si} - \tilde{z}_{s+1,j}).$$

Finalmente, $b_{n,n+1} = 0$.

Por exemplo, para apenas dois níveis hierárquicos ($n = 2$), temos

$$\Psi_2(z_i) = \int \dots \int \prod_{\alpha < \beta}^M (\tilde{\omega}_\alpha - \tilde{\omega}_\beta)^{2p} \mathcal{F}(|\omega_\alpha - \omega_\beta|) e^{-\frac{1}{4m} \sum_\gamma^M |\omega_\gamma|^2} \prod_{i,\alpha} Op(z_i; \tilde{\omega}_\alpha) |m \rangle d^2\omega_1 \dots d^2\omega_M,$$

onde M é o número de quasi-partículas, $M = N_2$; $\omega_\alpha = z_{2\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, M$; $\mathcal{F}(|\omega_\alpha - \omega_\beta|) = |\omega_\alpha - \omega_\beta|^{\sigma/m}$; $|m \rangle = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}$

Na verdade, independentemente da expressão para $\mathcal{F}(|\omega_\alpha - \omega_\beta|)$, obtém-se o mesmo filling factor e a mesma estatística para as quasi-partículas [33].

2.3 Composição Fermiônica

A composição fermiônica é uma teoria proposta por Jain [5] para explicar o EHQF através da adição de um número par de quanta de fluxos magnéticos a cada elétron. Esta teoria relaciona o problema complicado da alta correlação entre os elétrons no EHQF ao problema simples de elétrons fracamente interagentes do EHQI.

Como vimos na seção 2.1, os estados de Laughlin descrevem muito bem o EHQF para filling factors do tipo $1/(2m + 1)$. Contudo, estes filling factors não diferem experimen-

talmente dos demais: não existe nada de especial neles que a experiência mostre. Para se convencer disto, basta analisar os dados experimentais da Fig.1. Não existe distinção entre as várias frações observadas. Se o eixo das abscissas for coberto, é impossível dizer qual fração pertence a um dado platô. Portanto, todas as frações devem ter a mesma origem física.

Qual é a física contida nos estados de Laughlin responsável pelo seu sucesso? Com a resposta a esta pergunta, pode-se entender as outras frações, ou seja, aquelas do tipo $\nu = \frac{p}{q}$, $q \neq 1$.

A correlação de Jastrow, dada pelo fator de Jastrow $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^{2m+1}$, é a idéia fundamental do estado de Laughlin: é a responsável pelos excelentes resultados numéricos apresentados. Mas, como não se pode escrever os estados para as outras frações de modo similar, conclui-se que a correlação de Jastrow não nos revela toda a história, mas apenas uma parte dela.

Por outro lado, deve também existir uma conexão entre o EHQF e o EHQI, visto que, experimentalmente, os platôs do EHQI também são similares aos platôs do EHQF. A teoria do EHQ deve descrever este fenômeno de maneira unificada.

A conexão entre o EHQI e o EHQF pode parecer improvável, a princípio, porque: (i) o EHQF provém da interação entre os elétrons, enquanto o EHQI não, e (ii) o gap de energia no EHQI é determinado pelo espaçamento dos níveis de Landau, enquanto no EHQF o gap é determinado pela interação elétron-elétron.

Porém, a observação fundamental é a existência de um gap, tanto no EHQI como no EHQF. Tal gap provém de uma rigidez do estado fundamental que, por sua vez, deve resultar da presença de alguma correlação especial no estado fundamental. A conexão entre o EHQI e o EHQF está, então, na natureza das correlações dos estados fundamentais. Como o EHQI está muito bem entendido, pode-se esperar que ele nos ensine alguma coisa sobre o EHQF.

O estado de Laughlin obtém a sua incompressibilidade da incompressibilidade de Φ_1 ,

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2\right) = \prod_{j < k} (z_j - z_k) \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2\right),$$

visto que, pode-se escrever o estado de Laughlin $\chi_{1/(2m+1)}$ na forma

$$\chi_{1/(2m+1)} = \Phi^{2m+1}.$$

Por outro lado, escrevendo o estado de Laughlin $\chi_{1/(2m+1)}$ na forma

$$\chi_{1/(2m+1)} = D^m \Phi_1,$$

onde

$$D \equiv \prod_{j < k} (z_j - z_k)^2,$$

obtém-se a “pista” para propor a função de onda para os demais filling factors fracionários.

Observe que multiplicar por D tem o mesmo efeito sobre a fase que adicionar dois quanta de fluxo magnético ($2\phi_0$) a cada elétron. Tomando-se, por exemplo, a coordenada z_1 do fator D , e fazendo-a descrever uma circunferência fechada ao redor de outras N coordenadas z_j 's mantidas fixas, a fase produzida será $4\pi N$. Por outro lado, obtém-se a mesma fase pelo efeito Aharonov-Bohm, ao se atar um tubo de fluxo magnético de intensidade $2\phi_0$ a cada elétron, e realizando o mesmo caminho fechado descrito acima. Com efeito, esta última afirmação merece um esclarecimento.

Ao se atar α quanta de fluxo a uma partícula carregada, forma-se um composto. Fazendo com que este composto descreva um caminho fechado ao redor de outro composto idêntico, a fase obtida será $4\pi\alpha$, proveniente das seguintes contribuições [32]: (i) $2\pi\alpha$ devido à circulação da partícula ao redor do tubo de fluxo magnético α ; (ii) $2\pi\alpha$ devido à

circulação do tubo de fluxo magnético α ao redor da partícula. No entanto, pode-se obter esta mesma fase, $4\pi\alpha$, se suprimirmos do raciocínio a contribuição da circulação do tubo de fluxo ao redor da partícula, e se adicionarmos a cada partícula 2α quanta de fluxo, ao invés de α .

Por outro lado, o fluxo do campo magnético efetivo sentido pela partícula é determinado pela fase Aharonov-Bohm, quando a partícula carregada descreve um caminho fechado ao redor da área por onde passa o campo magnético. Deste modo, o fluxo magnético adicional sentido por um elétron, quando se acrescenta o fator D , será $2N\phi_0$, que é justamente o campo magnético obtido quando se ata dois quanta de fluxo, ϕ_0 , a cada elétron.

Portanto, a maneira de se adicionar $2m$ quanta de fluxo a cada elétron em um dado estado quântico é, simplesmente, multiplicando o estado pelo fator de Jastrow, D^m . Por exemplo, cria-se o estado

$$\chi_\nu = D^m \Phi_n,$$

onde Φ_n é o estado do EHQI com os n primeiros níveis de Landau preenchidos. Como o campo magnético total sentido pelo estado χ_ν é dado por $B = B^* + 2m\rho\phi_0$, onde ρ é a densidade de elétrons e B^* é campo magnético original sentido por Φ_n ($B^* = \frac{\phi_0 \ell}{n}$), o filling factor do estado χ_ν será

$$\nu = \frac{n}{2mn + 1}.$$

Obtém-se os estados de Laughlin quando $n = 1$, e todos os demais filling factors fracionários encontrados na seqüência observada experimentalmente. Por exemplo, para $m = 1$

$$\frac{n}{2n + 1} = \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13};$$

para $m = 2$

$$\frac{n}{4n + 1} = \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{3}{13}, \dots;$$

e a seqüência proveniente da conjugação partícula-buraco:

$$1 - \frac{n}{2n+1} = \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}$$

$$1 - \frac{n}{4n+1} = \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \dots$$

O composto formado por um elétron atado a $2m$ quanta de fluxo continua sendo um férmion, é denominado composto fermiônico, CF. Observe que, efetivamente, cria-se um composto fermiônico, adicionando a cada elétron um número par de vórtices. Pode-se usar esta observação como uma outra definição para os CF's, dada a similaridade topológica entre quanta de fluxo e vórtices.

Na realidade, não existe nenhuma ligação entre os elétrons e os quanta de fluxo no EHQF; os elétrons estão sobre a influência de um campo magnético constante e uniforme. Contudo, observando o estado de Laughlin na forma $\chi_{1/(2m+1)} = D^m \Phi_1$, identifica-se que uma das correlações existentes no EHQF é a formação dos compostos fermiônicos, isto é, a adição de um número par de fluxos quânticos a cada elétron, que deve ocorrer dinamicamente, devido à interação repulsiva entre os elétrons. Os fluxos (de gauge) componentes, então, fundem-se para formar um campo magnético externo uniforme.

A essência do EHQF poderá estar na composição fermiônica de estados incompressíveis de elétrons. O estado de Laughlin obtém parte da incompressibilidade da correlação que leva à incompressibilidade de Φ_1 . Outros estados do tipo $D^m \Phi_n$, com $\nu = \frac{n}{2mn+1}$, produzidos a partir da composição fermiônica do estado Φ_n , são incompressíveis devido à incompressibilidade de Φ_n . Logo, existem dois tipos de correlações no EHQF: uma é a formação dos CF's; a outra é a correlação proveniente da estatística de Fermi que produz os Φ_n 's. Esta última demonstra qual é a conexão entre o EHQF e o EHQI. O EHQF de elétrons é idêntico ao EHQI de compostos fermiônicos, i.e., uma vez estes tenham sido gerados, tratamo-los como se interagissem fracamente, preenchendo um número inteiro de níveis de Landau.

A estrutura básica dos estados Jain do EHQF é do tipo Jastrow-Slater, isto é, um



fator de Jastrow multiplicado por um determinante de Slater, ao invés de um simples fator de Jastrow como nos estados de Laughlin. A correlação Jastrow-Slater é capaz, na proposta da composição fermiônica, de descrever todo o fenômeno do EHQ, e possui os estados de Laughlin e do EHQI como casos particulares.

Multiplicar pelo fator D^m é a única maneira natural de se atar $2m$ fluxos a cada elétron. Por exemplo, a multiplicação pelo fator topologicamente equivalente $\prod_{j < k} [(z_j - z_k)/|z_j - z_k|]^{m-1}$ não altera a densidade. O fator D^m expande o tamanho do sistema, reduzindo a densidade. Isto porque o maior momento angular de cada elétron aumenta de $N(m-1)$.

Nesta tese, usa-se o estado de Jain projetado no mais baixo nível de Landau: $\chi_\nu = PD^m\Phi_n$. Esta projeção não descaracteriza o estado, visto que os elétrons do estado não-projetado, $D^m\Phi_n$, estão predominantemente no menor nível de Landau [34]. À primeira vista, poderia parecer que o estado não-projetado teria uma grande fração de elétrons nos níveis mais altos, devido à presença dos estados Φ_n . Contudo, estudos numéricos [34] demonstram que a energia cinética é sensivelmente baixa, estabelecendo que χ_ν está predominantemente no menor nível de Landau. Por exemplo, o estado Φ_2 tem apenas 50% dos estados no menor nível; no entanto, os estados $\chi_{2/5} = D\Phi_2$ e $\chi_{2/9} = D^2\Phi_2$ têm 96% e 98% dos elétrons neste nível, respectivamente. A predominância do menor nível de Landau é proveniente do fator de Jastrow [25]. Um estado do tipo $z^t\eta_{n,s}$, onde $\eta_{n,s}$ é um estado do n -ésimo nível com momento angular s , estará completamente no menor nível, para t suficientemente grande. Por exemplo, no 2^o nível,

$$\begin{aligned} z^t\eta_{2,s} &= z^t z^s [2(s+1) - z\bar{z}] \exp(-\frac{1}{4}|z^2|) \\ &= \mathcal{N}[(s+t+1)^{1/2}\eta_{1,s+t} - t\eta_{0,s+t}]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Para t grande, a amplitude do 2^o termo dominará sobre o 1^o, e este estado estará predominantemente no menor nível. Como o fator de Jastrow, $D^m = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2m}$, multiplica o estado Φ_n com potências de z grandes, conclui-se que o estado não-projetado

terá predominância no menor nível.

Por outro lado, Rezayi e MacDonald [35] mostraram, por cálculos numéricos, que os estados não-projetado e projetado são adiabaticamente conectados variando o espaçamento entre os níveis, $\hbar\omega_c \rightarrow \infty$.

O overlap entre o estado projetado e o estado calculado numericamente é bem próximo de 100% [25], estabelecendo que o estado projetado é uma ótima aproximação para o verdadeiro estado fundamental da interação Coulombiana. Isto não quer dizer que o estado projetado seja melhor do que o não-projetado. Os dois descrevem muito bem o fenômeno. Mas, nesta tese, usaremos o estado projetado, pois se pretende comparar o estados de Jain com os da condensação aniônica, que foram propostos estando todos os elétrons no mais baixo nível de Landau.

Além do operador D que, ao multiplicar um estado incompressível χ_ν gera outro estado incompressível com filling factor $\nu/(2\nu + 1)$, existem dois outros operadores, C e L , que, por repetidas aplicações sobre os estados do EHQI, geram todos os estados do EHQF.

C é o operador de conjugação de carga [36]: mapeia o estado χ_ν no estado $\chi_{1-\nu}$ (a conjugação partícula-buraco é uma simetria exata no limite $B \rightarrow \infty$). L adiciona um nível de Landau preenchido, levando ν em $\nu + 1$.

A pergunta que surge é se o procedimento da condensação das quasi-partículas é equivalente ao da composição fermiônica. À primeira vista, não há conexão entre os dois métodos; eles estão baseados em estruturas físicas completamente diferentes. Enquanto um gera novos estados a partir da condensação de quasi-partículas aniônicas, o outro, pela teoria dos compostos fermiônicos, gera os estados sem fazer qualquer referência às quasi-partículas, não necessitando, tampouco, das informações sobre a sua estatística ou carga. No esquema com os CF's, os estados do EHQI estão no nível mais baixo da hierarquia, e não existe distinção especial entre o estado de Laughlin e os outros demais estados. Já na hierarquia por condensação de quasi-partículas, os estados hierárquicos evoluem do estado de Laughlin. As frações do filling factor aparecem em ordem diferente nos dois métodos [5, 37]. Um ponto a favor da equivalência dos dois procedimentos está na igualdade dos

números quânticos das quasi-partículas do estado hierárquico por condensação e daquele formado pelos CF's [38, 39].

Nesta tese, propomos demonstrar a equivalência entre os dois procedimentos por comparação numérica. Calculamos o overlap dos estados propostos pelos dois métodos. Os resultados obtidos comprovam que os estados formados a partir da condensação de quasi-partículas e da composição fermiônica representam a mesma física do EHQF.

Capítulo 3

Equivalência

Introdução

Nesta tese, mostramos a equivalência entre os procedimentos da condensação das quasipartículas aniônicas e da composição fermiônica. Calculamos o overlap entre as funções de onda propostas pelos dois procedimentos para vários filling factors. E, apesar desses modelos serem baseados em físicas diferentes, os overlaps são praticamente iguais a 1.

Um modelo útil para estudar numericamente o EHQF consiste de N elétrons interagentes movendo-se sobre uma superfície esférica, sofrendo a influência de um campo magnético radial produzido por um monopólo [40, 41]. O fluxo através da superfície esférica, em unidades de $\phi_0 = hc/e$, é ϕ , um número inteiro. Os auto-estados para um único elétron são os harmônicos de monopólo, $Y_{\frac{\phi}{2}, l, m}$, onde l é o momento angular, $l = \frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2} + 1, \dots$, e m , a componente- z , $m = -l, -l + 1, \dots, l$. A degenerescência da l -ésima camada do momento angular é $2l + 1$ (elétrons com spin polarizado). A camada de menor nível de energia possui momento angular $l = \frac{\phi}{2}$.

Nas seções que se seguem, apresentamos as funções de onda para o EHQF pela composição fermiônica e condensação aniônica sobre a superfície esférica em coordenadas estereográficas, e mostramos o método de cálculo utilizado para realizar a comparação entre as duas teorias.

3.1 Condensação aniônica sobre a esfera

A introdução da geometria esférica no estudo do EHQF tem uma grande importância, visto que, sobre esta geometria, os estados fundamentais são determinados sem ambigüidades, facilitando a comparação entre os procedimentos da composição fermiônica e da condensação aniônica em que estamos interessados. Historicamente, foi sobre esta geometria que, originalmente, introduziu-se a idéia da condensação aniônica [6].

Os elétrons estão confinados sobre a superfície de uma esfera de raio R , na presença de um monopólo magnético no centro da mesma. O fluxo magnético total, $4\pi R^2 B$, deve ser um múltiplo inteiro, $\phi = 2S$, do quantum do fluxo magnético ϕ_0 [40]. Portanto, o raio da esfera é dado por

$$R = S^{1/2} l_0.$$

Para um elétron de massa m_e , a energia cinética é dada por $\frac{1}{2m_e}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2$. Mas, como

$$(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} [\mathbf{r} \times (\nabla + e\mathbf{A})]^2,$$

e o elétron está confinado sobre a superfície esférica, a energia cinética será dada por

$$\mathcal{K} = \frac{\Lambda^2}{2m_e R^2} = \frac{w_c}{2S} |\Lambda^2|,$$

onde $\Lambda = \mathbf{r} \times [-i\nabla + e\mathbf{A}]$, $\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\Omega}$.

As componentes de Λ obedecem às relações de comutação

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = i\epsilon_{ijk}(\Lambda_k - S\Omega_k).$$

Definindo os operadores

$$\mathbf{L} = \Lambda + S\Omega,$$

obtém-se as seguintes relações de comutação:

$$[L_x, x] = 0, \quad [L_x, y] = iz, \quad [L_x, z] = -iy$$

$$[L_x, p_x + eA_x] = 0, \quad [L_x, p_y + eA_y] = i(p_z + eA_z), \quad [L_x, p_z + eA_z] = -i(p_y + eA_y)$$

Delas, chega-se a

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k.$$

As equações acima mostram que L_x, L_y, L_z são os operadores de momento angular (os geradores de rotações). Resumidamente, temos

$$[L_i, X_j] = i\epsilon_{ijk}X_k, \quad \text{onde } X = L, \hat{\Omega}, \Lambda.$$

Como Λ não tem componente normal à superfície:

$$\hat{\Omega} \cdot \Lambda = \Lambda \cdot \hat{\Omega} = 0,$$

$$\mathbf{L} \cdot \hat{\Omega} = \hat{\Omega} \cdot \mathbf{L} = S,$$

tem-se que

$$|\Lambda|^2 = |\mathbf{L}|^2 - S^2.$$

Os autovalores de $|\Lambda|^2$ são deduzidos a partir da álgebra usual do momento angular:

$$|\Lambda|^2 = |\mathbf{L}|^2 - S^2 = l(l+1) - S^2, \quad l = S + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Com $l = S$, obtém-se o nível de mais baixa energia, $\frac{1}{2}\omega_c$. A degenerescência deste nível será $(2S+1)$. Os seus autoestados são calculados usando a transformação de coordenadas:

$$u = \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)e^{i\varphi}, \quad v = \text{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right).$$

Escolhendo o gauge tal que $\mathbf{A} = -\frac{S}{eR} \frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$, com singularidade no pólo norte, a componente- z do momento angular pode ser escrita como

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi} - S = u\frac{\partial}{\partial u} - S,$$

do que se obtém:

$$\Psi_{Slm} = \Theta_{Slm} e^{i(m+S)\phi}.$$

Um cálculo explícito do operador $[\mathbf{r} \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]^2$ conduz a

$$[l(l+1) - S^2]\Theta_{Slm} = \left[-\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} (m - S \cos\theta)^2\right]\Theta_{Slm}.$$

Em particular, $\Theta_{S,S,m}$ é dado por

$$\Theta_{S,S,m} = \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{S-m} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{S+m}.$$

Os auto-estados do primeiro nível de Landau são, portanto,

$$\begin{aligned} \Psi_{SSm} &= \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{S-m} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{S+m} e^{i(m+S)\varphi} \\ &= u^{S+m} v^{S-m}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, qualquer polinômio, $\Psi(u, v)^{(S)}$, em u e v , homogêneo de grau $2S$ satisfará à relação $|\mathbf{L}|^2 \Psi(u, v)^{(S)} = S(S+1) \Psi(u, v)^{(S)}$. E, nesta base, ter-se-á que

$$S = \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Quando o primeiro nível de Landau está totalmente preenchido, a função para os $2S+1$ elétrons é dada por

$$\Phi_1 = \prod_{j < k} (u_j v_k - u_k v_j).$$

Para $\nu = \frac{1}{m}$, a função função de onda será

$$\Psi_m = \prod_{j < k} (u_j v_k - u_k v_j)^m;$$

isto porque como função de (u_j, v_j) , Ψ_m deve ser um polinômio de grau $2S$, e desde que o grau máximo de qualquer uma das variáveis é $m(N - 1)$, obtém-se que $S = \frac{1}{2}m(N - 1)$, que no limite termodinâmico resulta em $\nu = \frac{N}{2S} = \frac{1}{m}$. Ψ_m é invariante sob rotações da esfera; logo, possui densidade uniforme e $L_{tot} \Psi_m = \sum_i L_i \Psi_m = 0$.

Os operadores das excitações são dados por

$$A^\dagger(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N (\beta u_i - \alpha v_i) \quad (\text{quasi-buraco}),$$

$$A(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N (\tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial u_i} - \tilde{\alpha} \frac{\partial}{\partial v_i}) \quad (\text{quasi-elétrons}),$$

onde α e β são as coordenadas da excitação, $\alpha = \cos \theta_\gamma e^{i\varphi_\gamma}$, $\beta = \text{sen } \theta_\gamma$. Nos estados $A^\dagger(\alpha, \beta) \Psi_m$ e $A(\alpha, \beta) \Psi_m$, a excitação possui número quântico de momento angular $J = \frac{1}{2}N$. Os operadores $A^\dagger(\alpha, \beta) \Psi_m$ e $A(\alpha, \beta) \Psi_m$ descrevem defeitos no fluido localizados ao redor de α e β [42].

Construir um estado coletivo para as excitações é um problema análogo à construção do estado fundamental para os elétrons. O estado coletivo para as excitações será dado por

$$\Psi_{ex}^{2p} = \prod_{\gamma < \delta}^{N^{ex}} (\tilde{\alpha}_\gamma \tilde{\beta}_\delta - \tilde{\alpha}_\delta \tilde{\beta}_\gamma)^{2p},$$

onde p é um número inteiro para não modificar a estatística definida pelos operadores A^\dagger e A , $\tilde{\alpha} = \alpha$ ou $\tilde{\alpha} = \beta$ e $\tilde{\beta} = \beta$ ou $\tilde{\beta} = \alpha$, dependendo da carga da quasi-partícula. Como o momento angular para uma excitação vale $\frac{1}{2}N$, o grau de $\Psi_{ex}^{(2p)}$ deve ser N , ou seja,

$$N^{ex} = \frac{N}{2p} + 1.$$

Por outro lado, a presença de um quasi-buraco (quasi-elétron) aumenta (diminui) o

número de quanta de fluxo S de $\frac{1}{2}$. Isto pode ser facilmente visto observando o grau do polinômio $A^\dagger(\alpha, \beta)\Psi_m (A(\alpha, \beta)\Psi_m)$ em (u_i, v_i) . Então, $\hat{\Omega}(\alpha, \beta) \cdot \mathbf{L}_{tot}$ aumenta (diminui) de $\frac{1}{2}N$. Um estado com N^{ex} quasi-buracos ou quasi-elétrons terá $S = S(N, m) \pm \frac{1}{2}N^{ex}$. Desta forma, para apenas dois níveis hierárquicos,

$$S = S(N; m, 2p) \equiv \frac{1}{2}m(N - 1) \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{N}{2p} + 1\right)\right].$$

No limite termodinâmico, chega-se ao o filling factor

$$\nu = \frac{N}{2S} = \frac{N}{m(N - 1) \pm (N/2p + 1)} = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p}}.$$

As cargas das excitações produzidas pelos operadores $A^\dagger(\alpha, \beta)$ e $A(\alpha, \beta)$ são idênticas às propostas por Laughlin. Acrescentando um quasi-buraco ao sistema, o estado final terá $S = S(N, m) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}m(N + \frac{1}{m} - 1)$, ou seja, é como se tivéssemos acrescentado $\frac{1}{m}$ de elétron ao sistema; por outro lado, acrescentando um elétron, o sistema terá $S = S(N; m) + \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}mN$. É fácil perceber, então, que um quasi-buraco deve ter carga $e^* = \frac{e}{m}$, com sinal oposto à carga do elétron; deste modo, a sua presença libera, por conservação de carga elétrica, $\frac{1}{m}$ elétrons para o sistema. Raciocínio análogo demonstra que para um quasi-elétron, $e^* = -\frac{e}{m}$.

Coordenadas projetivas

Uma descrição conveniente sobre a esfera é feita usando a projeção estereográfica [22, 43, 30, 29]. Projetando do pólo norte e reescalando, define-se $z = \cot \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$. A medida sobre a esfera, então, fica $4R^2 \int \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}$. Para simplificar, escolhe-se $R = 1/2$. Na presença de um monopólo magnético, a Hamiltoniana será [29]

$$H_0 = \frac{2}{m_e} (1 + z\bar{z})^2 (P_z + eA_z)(P_{\bar{z}} + eA_{\bar{z}}),$$

onde

$$P_z = -i \frac{\partial}{\partial z}, \quad P_{\bar{z}} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

$$eA_z = i \frac{\phi}{2} \frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}}.$$

Encontra-se as funções de onda do estado fundamental solucionando a equação $(P_{\bar{z}} + eA_{\bar{z}})\Psi = 0$. O estado fundamental para um elétron é, então,

$$\Psi = \frac{z^k}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi}{2}}},$$

onde $0 \leq k \leq \phi$, a fim de que a função seja normalizável.

O estado de Laughlin para N elétrons com interação será

$$\Psi = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \prod_k \frac{1}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi}{2}}},$$

que é equivalente a $\prod (u_k v_j - u_j v_k)^m$, visto que $u = \frac{z}{(1+z\bar{z})^{1/2}}$ e $v = \frac{1}{(1+z\bar{z})^{1/2}}$.

Sob rotações, a coordenada estereográfica z se transforma como

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

onde $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz geradora das rotações. As rotações nos três eixos Cartesianos são representadas por

$$R_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 + \cos \alpha)^{1/2} & i(1 - \cos \alpha)^{1/2} \\ i(1 - \cos \alpha)^{1/2} & (1 + \cos \alpha)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$R_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 + \cos \beta)^{1/2} & (1 - \cos \beta)^{1/2} \\ -(1 - \cos \beta)^{1/2} & (1 + \cos \beta)^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \exp(i\gamma/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\gamma/2) \end{pmatrix}.$$

A invariância sob rotações da Hamiltoniana é expressa pela identidade

$$OH(z')O^{-1} = H(z),$$

$$O = \left(\frac{cz + d}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \right)^{\frac{\phi}{2}}.$$

Em conformidade, sob rotações, a função de onda transforma-se como

$$V(R)\Psi = O\Psi\left(\frac{az_i + b}{cz_i + d}\right). \quad (3.1)$$

A presença do operador O é devida à existência de um momento angular adicional além do orbital, induzido pelo monopólo magnético. Com a equação acima e a aplicação infinitesimal de R_x, R_y e R_z , encontra-se as seguintes expressões para os operadores de momento angular:

$$J_x = \frac{1}{2} \sum_i^N [(1 - z_i^2) \frac{\partial}{\partial z_i} - (1 - \bar{z}_i^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\phi}{2}(z_i + \bar{z}_i)],$$

$$J_y = \frac{i}{2} \sum_i^N [(1 + z_i^2) \frac{\partial}{\partial z_i} + (1 + \bar{z}_i^2) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\phi}{2}(\bar{z}_i - z_i)],$$

$$J_z = \sum_i^N (z_i \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\phi}{2}).$$

Sobre a esfera e o plano, o estado do EHQF é não-degenerado, visto que, pela adição da interação Coulombiana, a degenerescência dos níveis de Landau desaparece. Por outro lado, experimentalmente, observa-se que sobre pequenas perturbações, o estado de EHQF é estável. Como a Hamiltoniana sobre a esfera é invariante rotacionalmente, exigir a unicidade do seu estado fundamental é o mesmo que assegurar a estabilidade deste estado contra perturbações, uma vez que estas podem facilmente induzir transições entre estados

degenerados ou quase-degenerados. Desta forma, qualquer estado proposto para representar o EHQ sobre a esfera deve ser rotacionalmente invariante. Em particular, para o estado de Laughlin

$$\Psi(z_i) = \prod_i^N \left(\frac{cz_i + d}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \right)^{\frac{\phi}{2}} \Psi\left(\frac{az_i + b}{cz_i + d} \right). \quad (3.2)$$

Usando as relações

$$z'_i - z'_j = \frac{z_i - z_j}{(cz_i + d)(cz_j + d)},$$

$$1 + z'_i \bar{z}'_i = \frac{1 + z_i \bar{z}_i}{(cz_i + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})},$$

descobre-se que o estado (3.2) só é válido se

$$\phi = m(N - 1),$$

ou seja, $\nu = 1/m$.

A transformação para a coordenada estereográfica reescalada, z , do operador $A_N^\dagger(\omega)$ para quasi-buracos é imediata

$$A_N^\dagger(\omega) = \prod_i \frac{(z_i - \omega)}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + \omega \bar{\omega}}},$$

onde $\omega = \cot \frac{\theta_\omega}{2} e^{i\phi_\omega}$. Já o operador $A_N(\omega)$ requer alguma álgebra. Após alguns cálculos, para N_q quasi-elétrons e N elétrons obtém-se

$$A_N(\omega_\alpha) = \prod_j \frac{\sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \{ (1 + z_j \bar{\omega}_\alpha) \partial_{z_j} - [m'(N - 1) - \alpha + 1] \bar{\omega}_\alpha \},$$

onde m' é o expoente do fator $\prod_{i < k} (z_i - z_k)^{m'}$ sobre o qual o operador $\prod_\alpha A_N(\omega_\alpha)$ está sendo aplicado. Mas, atenção: note que escrito desta forma, $A_N(\omega_\alpha)$ não age sobre o fator $\prod_i \frac{1}{\sqrt{(1 + z_i \bar{z}_i)^{m(N-1)}}$.

A aparência um pouco complicada do $A_N(\omega)$, na verdade, esconde uma forma análoga

à expressão do $A_N^\dagger(\omega)$. Para tanto, define-se o operador

$$P(\phi_r) = \sum_{l=0}^{\phi_r} |l\rangle\langle l|,$$

onde

$$|l\rangle = \sqrt{\frac{(\phi_r + 1)!}{2\pi l! (\phi_r - l)! (1 + z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}}} z^l.$$

P é o operador de projeção sobre o primeiro nível de Landau quando o fluxo é ϕ_r .

É fácil provar que

$$\begin{aligned} A_N(\omega) &= \prod_j \frac{\sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}}{\sqrt{1 + \omega \bar{\omega}}} [(1 + z_j \bar{\omega}) \partial_{z_j} - \phi_m \bar{\omega}] \\ &= (\phi_m + 1) P(\phi_m - 1) \prod_i \frac{\bar{z}_i - \bar{\omega}}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + \omega \bar{\omega}}}, \end{aligned}$$

onde $\phi_m = m(N - 1)$. Para N_q quasi-partículas obtém-se

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha=1}^{N_q} A_N(\omega_\alpha) &= \prod_k (1 + z_k \bar{z}_k)^{\frac{N_q}{2}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N [(1 + z_i \bar{\omega}_{N_q}) \partial_{z_i} - (\phi_m - N_q + 1) \bar{\omega}_{N_q}] \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N [(1 + z_i \bar{\omega}_{N_q-1}) \partial_{z_i} - (\phi_m - N_q + 2) \bar{\omega}_{N_q-1}] \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N [(1 + z_i \bar{\omega}_\alpha) \partial_{z_i} - (\phi_m - \alpha + 1) \bar{\omega}_\alpha] \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \times \prod_{i=1}^N [(1 + z_i \bar{\omega}_1) \partial_{z_i} - \phi_m \bar{\omega}_1] \\ &= (\phi_m + 1) \dots (\phi_m - N_q + 2) P(\phi_m - N_q) \prod_{i\alpha} \frac{(\bar{z}_i - \bar{\omega}_\alpha)}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \end{aligned}$$

Como primeiro passo para construir os estados hierárquicos, observe que a função de onda normalizada com quasi-partículas sobre o estado eletrônico $\nu = 1/m$ é dada por

$$\Psi_{eq} = N_{eq} \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha} \sqrt{1 + \omega_\beta \bar{\omega}_\beta}} \right)^{1/m} \prod_{i\alpha} \frac{\bar{z}_i - \bar{\omega}_\alpha}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \prod_{i < j} \left(\frac{z_i - z_j}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}} \right)^m.$$

Note que para quasi-buracos, $\bar{z} = z$, $\bar{\omega} = \omega$ e $N_{eq} = 1$; enquanto que para quasi-elétrons, $\bar{z} = \bar{z}$, $\bar{\omega} = \bar{\omega}$ e $N_{eq} = (\phi_m + 1) \dots (\phi_m - N_q + 2) P(\phi_m - N_q)$. E o estado de Laughlin para as quasi-partículas será

$$\Psi_q = \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha} \sqrt{1 + \omega_\beta \bar{\omega}_\beta}} \right)^{\sigma/m} \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_\beta}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha} \sqrt{1 + \omega_\beta \bar{\omega}_\beta}} \right)^{2p}.$$

$\sigma = \pm 1$, dependendo se as quasi-partículas são quasi-buracos ou quasi-elétrons. Portanto, para apenas dois níveis de hierarquia, o estado eletrônico será

$$\Psi(z_i) = \int \prod_{\alpha} \frac{d\omega_\alpha d\bar{\omega}_\alpha}{(1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha)^2} \Psi_{eq}(z_i, \omega_\alpha) \Psi_q(\omega_\alpha).$$

Impondo que $\Psi(z_i)$ seja rotacionalmente invariante, chega-se às relações

$$m(N - 1) \pm N_q = \phi,$$

$$2p(N_q - 1) = N_q.$$

No limite termodinâmico, eliminando-se N_q obtém-se que

$$\nu = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p}}.$$

Observe que para quasi-elétrons o fator $\prod_{\alpha < \beta} \left| \frac{\omega_\alpha - \omega_\beta}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha} \sqrt{1 + \omega_\beta \bar{\omega}_\beta}} \right|^{1/m}$ desaparece do estado eletrônico. Para os demais filling factors, os estados hierárquicos com maior quantidade de níveis são construídos de forma análoga [30]. Exigindo sempre que o estado eletrônico

seja rotacionalmente invariante, obtém-se as equações

$$m(N-1) \pm N_2 = \phi$$

$$2p_s(N_s-1) \pm N_{s+1} = N_{s-1} \quad \text{para } s=2, \dots, n-1$$

Solucionando-as, no limite termodinâmico, calcula-se o filling factor

$$\nu = \frac{1}{m \pm \frac{1}{2p_2 \pm \frac{1}{\dots \pm \frac{1}{2p_n}}}}$$

Nos nossos cálculos, trabalhamos com dois tipos de estados, a saber: com núcleo duro (CND) e sem núcleo duro (SND). Por exemplo, para dois níveis hierárquicos de condensação, tem-se:

-sem núcleo duro

$$\Psi_{SND} = \int \prod_{\alpha} \frac{d\omega_{\alpha} d\bar{\omega}_{\alpha}}{(1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha})^2} \prod_{\alpha < \beta} \left| \frac{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}}{\sqrt{1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}} \sqrt{1 + \omega_{\beta} \bar{\omega}_{\beta}}} \right|^{\frac{2\sigma}{m}} \times$$

$$\times \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{\tilde{\omega}_{\alpha} - \tilde{\omega}_{\beta}}{\sqrt{1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}} \sqrt{1 + \omega_{\beta} \bar{\omega}_{\beta}}} \right)^{2p} \prod_{\gamma} A_N^{(\dagger)}(\omega_{\gamma}) \prod_{i < j} \left(\frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}} \right)^m$$

-com núcleo duro

$$\Psi_{CND} = \prod_{i < j} \left(\frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}} \right)^n \int \prod_{\alpha} \frac{d\omega_{\alpha} d\bar{\omega}_{\alpha}}{(1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha})^2}$$

$$\times \prod_{\alpha < \beta} \left| \frac{\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}}{\sqrt{1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}} \sqrt{1 + \omega_{\beta} \bar{\omega}_{\beta}}} \right|^{\frac{2\sigma}{m}} \prod_{\alpha < \beta} \left(\frac{\tilde{\omega}_{\alpha} - \tilde{\omega}_{\beta}}{\sqrt{1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha}} \sqrt{1 + \omega_{\beta} \bar{\omega}_{\beta}}} \right)^{2p}$$

$$\times \prod_{\gamma} A_N^{(\dagger)}(\omega_{\gamma}) \prod_{i < j} \left(\frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i} \sqrt{1 + z_j \bar{z}_j}} \right)^{m'}$$

onde $n + m' = m$; $\sigma = 0$ $\tilde{\omega} = \bar{\omega}$ se as quasi-partículas forem quasi-elétrons; e $\sigma = 1$ $\tilde{\omega} = \omega$ se as quasi-partículas forem quasi-buracos.

Expandindo $A_N(\omega_\alpha)$, obtém-se

$$A_N(\omega_\alpha) = \frac{\prod_i \sqrt{1 + z_i \bar{z}_i}}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \sum_{j=0}^N \omega_\alpha^j S_{j\alpha},$$

onde

$$S_{N-j,\alpha} = \sum_{i=0}^{N-j} b^{N-j-i} \sum_{k=C_{[N]}^{j+i}} \sum_{p=C_k^i} z_{p_1} \cdots z_{p_i} \frac{\partial}{\partial z_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial z_{k_{j+i}}},$$

$$b = -[m'(N-1) - \alpha + 1],$$

$$[N] = [1, 2, \dots, N].$$

C_l^h representa todas as combinações possíveis dos elementos da lista l com h termos. Os operadores $S_{n,\alpha}$ são simétricos e, de modo geral, não comutam entre si. Em menor escala, cada operador $S_{n,\alpha}$ é constituído por $n+1$ operadores simétricos.

Em contrapartida, a expansão do operador $A_N^\dagger(\omega_\alpha)$ é direta e bem simples

$$A_N^\dagger(\omega_\alpha) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i}} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \sum_{n=0}^N (-1)^n \sum_{p=C_{[N]}^{N-n}} z_{p_1} \cdots z_{p_{N-n}} \omega_\alpha^n.$$

Para futura referência, escreveremos de forma análoga a expansão de A_N , definindo operadores simétricos, de tal forma que

$$A_N^\dagger(\omega_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_\alpha \bar{\omega}_\alpha}} \prod_i \frac{1}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i}} \sum_{n=0}^N (-1)^n S_n^h \omega_\alpha^n,$$

onde

$$S_n^h = \sum_{p=C_{[N]}^{N-n}} z_{p_1} \cdots z_{p_{N-n}}.$$

Evidentemente, os operadores S_n^h comutam entre si.

3.2 Composição fermiônica sobre a esfera

Usamos dois tipos diferentes de funções de onda propostas por Jain para os estados do EHQF, a saber:

- sem núcleo duro

$$\chi_{\nu}^{SND} = P\Phi_1^{2p}\chi_{\nu^*}; \quad (3.3)$$

- com núcleo duro [44]

$$\chi_{\nu}^{CND} = \Phi_1^n P\Phi_1^m \chi_{\nu^*}, \quad (3.4)$$

tal que $n + m = 2p$. χ_{ν^*} é o estado dos CF's com filling factor ν^* . Φ_1 é a função de onda com todos os N elétrons no primeiro nível de Landau. P projeta a função de onda à sua direita sobre a camada de menor nível energético.

Na superfície esférica, em coordenadas estereográficas, Φ_1 é dada por

$$\Phi_1 = \prod_{j < k}^N \frac{(z_j - z_k)}{\sqrt{1 + z_j \bar{z}_j} \sqrt{1 + z_k \bar{z}_k}}. \quad (3.5)$$

A função χ_{ν}^{CND} possui ao menos um Φ_1 fatorado, que assegura a propriedade de “núcleo duro”, isto é, a probabilidade zero de dois elétrons venham a ocupar o mesmo ponto. Esta é uma boa correlação na presença da interação repulsiva de Coulomb.

$2p$ vórtices foram atados a cada elétron em χ_{ν}^{CND} e em χ_{ν}^{SND} . Pela equivalência entre quanta de fluxo magnético e vórtices, cada composto fermiônico (CF) nos estados χ_{ν}^{CND} e χ_{ν}^{SND} é formado por um elétron e $2p$ quanta de fluxo, ϕ_0 . Se ϕ^* é o fluxo magnético sentido pelos CF no estado χ_{ν^*} , o fluxo ϕ gerado pelo monopólo será dado por

$$\phi = \phi^* + 2p(N - 1). \quad (3.6)$$

Para se determinar χ_{ν^*} , precisamos calcular a expressão das funções de onda de um elétron para os demais níveis de Landau em coordenadas estereográficas [45, 30, 41]. Isto

é feito aplicando-se o operador $J_- = J_x - iJ_y$ sobre o estado do n -ésimo nível de Landau

$$\Psi_{\frac{\phi}{2}, \frac{\phi}{2}+n-1, \frac{\phi}{2}+n-1} = \frac{z^{\phi+n-1}}{(1+z\bar{z})^{\frac{\phi}{2}+n-1}}.$$

Dado que a degenerescência do 1^{o} nível é $\phi^* + 1$, a do 2^{o} , $\phi^* + 3$, a do 3^{o} , $\phi^* + 5$ e assim sucessivamente, o número de elétrons N , o número de níveis n , e o fluxo magnético ϕ^* estão relacionados por

$$N = n\phi^* + n^2. \quad (3.7)$$

A expressão genérica da função de onda não-normalizada, Φ_n , dos CF's preenchendo os n primeiros níveis de Landau, é dada pelo determinante

$$\Phi_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^m & z_2^m & \dots & z_N^m \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \dots & \bar{z}_N \\ \bar{z}_1 z_1 & \bar{z}_2 z_2 & \dots & \bar{z}_N z_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_1 z_1^m & \bar{z}_2 z_2^m & \dots & \bar{z}_N z_N^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_1^{n-1} & \bar{z}_2^{n-1} & \dots & \bar{z}_N^{n-1} \\ \bar{z}_1^{n-1} z_1 & \bar{z}_2^{n-1} z_2 & \dots & \bar{z}_N^{n-1} z_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_1^{n-1} z_1^m & \bar{z}_2^{n-1} z_2^m & \dots & \bar{z}_N^{n-1} z_N^m \end{vmatrix} \prod_{j=1}^N \frac{1}{(1+z_j \bar{z}_j)^{\frac{\phi^*}{2}+n-1}}, \quad (3.8)$$

onde $m = N/n - 1$.

Se o operador P atua sobre uma função de onda do tipo $\Phi_1^m \chi_n$, por definição, P projetará esta função no mais baixo nível de Landau, tal que fluxo magnético que atravessa a superfície esférica seja $\phi_r = m(N - 1) + \phi^*$, onde ϕ^* é dado pela equação 3.7. Os $\phi^* + 1$ estados degenerados do nível fundamental são dados por

$$\psi_a = \langle z|a \rangle = \sqrt{\frac{(\phi_r + 1)!}{2\pi a!(\phi_r - a)!}} \frac{z^a}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}},$$

tal que $0 \leq a \leq \phi$ e $\langle a|a \rangle = 1$.

Pelas equações 3.8 e 3.5, percebe-se que o termo genérico para o i -ésimo elétron em cada monômio da expansão de $\Phi_1^m \chi_n$ será

$$t_{b,e} = \frac{\bar{z}_i^e z_i^b}{(1 + z_i \bar{z}_i)^{\frac{\phi_r}{2} + n - 1}},$$

onde $0 \leq e \leq n - 1$.

Definindo o ket não-normalizado $|b, e \rangle$, tal que $\langle z|b, e \rangle = t_{b,e}$, a projeção de $t_{b,e}$ será

$$Pt_{b,e} \equiv \langle z|P|b, e \rangle = \sum_{a=0}^{\phi_r} \langle z|a \rangle \langle a|b, e \rangle.$$

Usando o resultado $\int dz d\bar{z} \frac{(\bar{z}z)^p}{(1+z\bar{z})^q} = 2\pi p! \frac{(q-p-2)!}{(q-1)!}$, após algumas integrações, não é difícil provar que

$$Pt_{a,e} = \begin{cases} \frac{(\phi_r + n - a - 1) \dots (\phi_r - a + 1)}{(\phi_r + n) \dots (\phi_r + 2)} \frac{z^a}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}}, & \text{se } e = 0; \\ \frac{a \dots (a - e + 1) (\phi_r + n - a - 1) \dots (\phi_r + e - a + 1)}{(\phi_r + n) \dots (\phi_r + 2)} \frac{z^{a-e}}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}}, & \text{se } e \neq 0 \text{ e } e \neq n - 1; \\ \frac{a \dots (a - e + 1)}{(\phi_r + n) \dots (\phi_r + 2)} \frac{z^{a-e}}{(1 + z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}}, & \text{se } e \neq 0 \text{ e } e = n - 1. \end{cases}$$

O denominador $(\phi_r + n)(\phi_r + 2)$ aparecerá elevado a N após a projeção de cada monômio da expansão de $\Phi_1^m \chi_n$. Mas, como nem ψ^{SND} e ψ^{CND} estão normalizadas, este fator $[(\phi_r + n)(\phi_r + 2)]^{-N}$ pode ser esquecido, pois desaparecerá na normalização. Daí,

redefinimos a atuação do operador P para

$$Pt_{a,e} = \begin{cases} (\phi_r + n - a - 1) \dots (\phi_r - a + 1) \frac{z^a}{(1+z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}}, & \text{se } e = 0; \\ \frac{(\phi_r + n - a - 1) \dots (\phi_r + e - a + 1)}{(1+z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}} \frac{\partial^e}{\partial z^e} z^a, & \text{se } e \neq 0 \text{ e } e \neq n - 1; \\ \frac{1}{(1+z\bar{z})^{\frac{\phi_r}{2}}} \frac{\partial^e}{\partial z^e} z^a, & \text{se } e \neq 0 \text{ e } e = n - 1. \end{cases}$$

Observe que a presença de \bar{z}^e num monômio $\bar{z}^e z^a$, por causa do operador de projeção P , gera uma e -ésima derivada em z .

Como os \bar{z} 's só aparecem em χ_n , devido à presença de níveis de Landau acima do de menor energia, a $P\Phi^p\chi_n$ pode ser reescrita na forma $\frac{1}{\prod_j (1+z_j\bar{z}_j)^{\frac{\phi_r}{2}}} P_n D^p$, onde P_n é um operador antissimétrico nas coordenadas dos elétrons e $D^p = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^p$. Definindo o operador Log_{z_i} tal que

$$\left(\frac{k_1 + Log_{z_i} z_i^a}{k_2 + Log_{z_i} z_i^a} \right) z_j^b = \frac{k_1 + a + b}{k_2 + a + b} \delta_{ij} z_j^{a+b},$$

P_n resulta dado por

$$P_n = \begin{array}{ccc}
\frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_N})!} \\
z_1 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r-1-\text{Log}_{z_1})!} & z_2 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r-1-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & z_N \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r-1-\text{Log}_{z_N})!} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
z_1^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r-m-\text{Log}_{z_1})!} & z_2^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r-m-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & z_N^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r-m-\text{Log}_{z_N})!} \\
\frac{\partial}{\partial z_1} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r+1-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial}{\partial z_2} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r+1-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_N} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r+1-\text{Log}_{z_N})!} \\
\frac{\partial}{\partial z_1} z_1 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial}{\partial z_2} z_2 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_N} z_N \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r-\text{Log}_{z_N})!} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial}{\partial z_1} z_1^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r+1-m-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial}{\partial z_2} z_2^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r+1-m-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_N} z_N^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r+1-m-\text{Log}_{z_N})!} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial^k}{\partial z_1^k} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r+k-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r+k-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial^k}{\partial z_N^k} \frac{(\phi_r+n-1-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r+k-\text{Log}_{z_N})!} \\
\frac{\partial^k}{\partial z_1^k} z_1 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r+k-1-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} z_2 \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r+k-1-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial^k}{\partial z_N^k} z_N \frac{(\phi_r+n-2-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r+k-1-\text{Log}_{z_N})!} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial^k}{\partial z_1^k} z_1^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_1})!}{(\phi_r+k-m-\text{Log}_{z_1})!} & \frac{\partial^k}{\partial z_2^k} z_2^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_2})!}{(\phi_r+k-m-\text{Log}_{z_2})!} & \dots & \frac{\partial^k}{\partial z_N^k} z_N^m \frac{(\phi_r+n-1-m-\text{Log}_{z_N})!}{(\phi_r+k-m-\text{Log}_{z_N})!} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial^{n-1}}{\partial z_1^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_2^{n-1}} & \dots & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_N^{n-1}} \\
\frac{\partial^{n-1}}{\partial z_1^{n-1}} z_1 & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_2^{n-1}} z_2 & \dots & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_N^{n-1}} z_N \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
\frac{\partial^{n-1}}{\partial z_1^{n-1}} z_1^m & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_2^{n-1}} z_2^m & \dots & \frac{\partial^{n-1}}{\partial z_N^{n-1}} z_N^m
\end{array}$$

3.3 A Comparação

Realizamos os cálculos expandindo as funções de onda propostas pelos dois procedimentos. Nesta seção, explicaremos como executamos esta tarefa. Todos os cálculos foram feitos usando pacotes de computação algébrica, de modo que os resultados estão 100% desprovidos de qualquer erro computacional. E ainda podemos nos certificar da exatidão dos resultados aplicando operadores que exigem a invariância rotacional dos

estados calculados, como veremos em detalhes mais adiante.

A expansão dos termos $\prod(z_j - z_k)^m$ e $\prod(\omega_\alpha - \omega_\beta)^{2p}$.

É interessante expandir o termo $\prod(z_j - z_k)^m$ em determinantes de Slater porque, deste modo, os cálculos tornam-se mais fáceis. Encontra-se, em livros sobre funções simétricas [46, 47, 48], métodos de expansão. Contudo, preferimos usar um não tão rebuscado, mas de mais fácil programação e que possa ser diretamente estendido para os casos em que $m \geq 3$.

Como primeiro passo define-se as funções-base simétricas, M , e antissimétricas, A . Para N coordenadas, z_1, z_2, \dots, z_N , tem-se que

$$\begin{aligned} M_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} &= \sum_p z_1^{\lambda_{p_1}} z_2^{\lambda_{p_2}} z_3^{\lambda_{p_3}} \dots z_N^{\lambda_{p_N}} \\ &= \sum_p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} &= \sum_p (-)^p z_1^{\lambda_{p_1}} z_2^{\lambda_{p_2}} z_3^{\lambda_{p_3}} \dots z_N^{\lambda_{p_N}} \\ &= \sum_p (-)^p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \\ &= \begin{vmatrix} z_1^{\lambda_1} & z_2^{\lambda_1} & z_3^{\lambda_1} & \dots & z_N^{\lambda_1} \\ z_1^{\lambda_2} & z_2^{\lambda_2} & z_3^{\lambda_2} & \dots & z_N^{\lambda_2} \\ z_1^{\lambda_3} & z_2^{\lambda_3} & z_3^{\lambda_3} & \dots & z_N^{\lambda_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{\lambda_N} & z_2^{\lambda_N} & z_3^{\lambda_N} & \dots & z_N^{\lambda_N} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações de $[1, 2, 3 \dots N]$, e $(-)^p$ será igual a 1 se a permutação p for par, e -1 se for ímpar.

Nesta notação, o produto entre duas quaisquer bases antissimétricas, A , será uma soma de bases simétricas, M ; da mesma forma, o produto de duas quaisquer bases M será também uma soma de bases M , e, finalmente, o produto de uma base A por outra

base M será uma soma de bases A . Genericamente:

$$\begin{aligned}
A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} A_{[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N]} &= \\
&= \sum_p (-)^p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q (-)^q z_1^{\gamma_{q_1}} z_2^{\gamma_{q_2}} z_3^{\gamma_{q_3}} \dots z_N^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q (-)^q z_{p_1}^{\gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p \sum_q (-)^q z_{p_1}^{\lambda_1 + \gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\lambda_2 + \gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\lambda_3 + \gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\lambda_N + \gamma_{q_N}} \\
&= \sum_q (-)^q M_{[\lambda_1 + \gamma_{q_1}, \lambda_2 + \gamma_{q_2}, \lambda_3 + \gamma_{q_3} \dots \lambda_N + \gamma_{q_N}]};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} M_{[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N]} &= \\
&= \sum_p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q z_1^{\gamma_{q_1}} z_2^{\gamma_{q_2}} z_3^{\gamma_{q_3}} \dots z_N^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q z_{p_1}^{\gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p \sum_q z_{p_1}^{\lambda_1 + \gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\lambda_2 + \gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\lambda_3 + \gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\lambda_N + \gamma_{q_N}} \\
&= \sum_q M_{[\lambda_1 + \gamma_{q_1}, \lambda_2 + \gamma_{q_2}, \lambda_3 + \gamma_{q_3} \dots \lambda_N + \gamma_{q_N}]};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} M_{[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N]} &= \\
&= \sum_p (-)^p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q z_1^{\gamma_{q_1}} z_2^{\gamma_{q_2}} z_3^{\gamma_{q_3}} \dots z_N^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p (-)^p z_{p_1}^{\lambda_1} z_{p_2}^{\lambda_2} z_{p_3}^{\lambda_3} \dots z_{p_N}^{\lambda_N} \sum_q z_{p_1}^{\gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\gamma_{q_N}} \\
&= \sum_p (-)^p \sum_q z_{p_1}^{\lambda_1 + \gamma_{q_1}} z_{p_2}^{\lambda_2 + \gamma_{q_2}} z_{p_3}^{\lambda_3 + \gamma_{q_3}} \dots z_{p_N}^{\lambda_N + \gamma_{q_N}} \\
&= \sum_q A_{[\lambda_1 + \gamma_{q_1}, \lambda_2 + \gamma_{q_2}, \lambda_3 + \gamma_{q_3} \dots \lambda_N + \gamma_{q_N}]}.
\end{aligned}$$

Como exemplo, para $N=4$,

$$\prod_{i<j}(z_i - z_j) = A_{[1,2,3]} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & z_4^2 \\ z_1^3 & z_2^3 & z_3^3 & z_4^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i<j}(z_i - z_j)^2 &= A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} \\ &= M[2, 4, 6] - M[2,5,5] - M[3,3,6] + 2 M[3,4,5] - M[4,4,4] - M[1,1,4,6] + \\ &\quad + M[1,1,5,5] + 2 M[1,2,3,6] - 2 M[1,3,3,5] - 2 M[1,2,4,5] + 2 M[1,3,4,4] + \\ &\quad - M[2,2,2,6] + 2 M[2,2,3,5] + M[2,2,4,4] - 3 M[2,3,3,4] + M[3,3,3,3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i<j}(z_i - z_j)^3 &= A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} \\ &= A[3,6,9] - 3 A[3,7,8] - 3 A[4,5,9] - 15 A[5,6,7] - 3 A[1,2,6,9] + 9 A[1,2,7,8] + \\ &\quad + 27 A[2,3,5,8] - 6 A[2,3,6,7] - 9 A[1,4,5,8] - 15 A[2,3,4,9] - 45 A[2,4,5,7] + \\ &\quad + 27 A[1,4,6,7] + 105 A[3,4,5,6] + 6 A[4,6,8] + 6 A[1,3,5,9] - 12 A[1,3,6,8] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i<j}(z_i - z_j)^4 &= A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} A_{[1,2,3]} \\ &= 576 M[4,8,12] - 15024 M[3,3,7,11] + 864 M[4,10,10] + 864 M[6,6,12] + \\ &\quad - 5856 M[6,8,10] + 3552 M[8,8,8] + 864 M[2,2,8,12] + 1296 M[2,2,10,10] + \\ &\quad - 5856 M[2,4,6,12] + 31824 M[2,6,6,10] - 16176 M[2,4,8,10] - 14112 M[2,6,8,8] + \\ &\quad + 3552 M[4,4,4,12] - 14112 M[4,4,6,10] + 40344 M[4,4,8,8] - 42528 M[4,6,6,8] + \\ &\quad + 14904 M[6,6,6,6] - 1440 M[4,9,11] - 2016 M[6,7,11] - 8832 M[7,8,9] + \\ &\quad - 2160 M[2,2,9,11] + 15744 M[2,4,7,11] - 26208 M[2,6,7,9] - 17472 M[2,5,6,11] + \\ &\quad + 21984 M[2,5,8,9] - 7536 M[4,4,5,11] + 64944 M[4,5,6,9] - 70320 M[4,5,7,8] + \\ &\quad - 53544 M[5,6,6,7] - 1440 M[5,7,12] - 2016 M[5,9,10] - 2016 M[2,3,7,12] + \\ &\quad - 4032 M[2,3,9,10] - 8832 M[3,4,5,12] - 26208 M[3,5,6,10] - 23424 M[3,4,8,9] + \\ &\quad + 64944 M[3,6,7,8] + 3456 M[5,8,11] + 6144 M[6,9,9] + 6144 M[7,7,10] + \\ &\quad + 6048 M[2,3,8,11] + 10272 M[3,4,6,11] - 30648 M[3,6,6,9] + 4608 M[1,6,6,11] + \\ &\quad + 21984 M[3,4,7,10] + 6288 M[2,4,9,9] - 29352 M[4,4,7,9] + 43920 M[4,6,7,7] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -16800 M_{[2,5,7,10]} + 43920 M_{[6,5,6,8]} + 14640 M_{[4,5,5,10]} - 1440 M_{[1,3,8,12]} + \\
& -2160 M_{[1,3,10,10]} - 2016 M_{[1,5,6,12]} - 17472 M_{[1,6,7,10]} + 15744 M_{[1,5,8,10]} + \\
& -7536 M_{[1,7,8,8]} + 3600 M_{[1,3,9,11]} + 1296 M_{[1,5,7,11]} + 10128 M_{[1,7,7,9]} + \\
& +10128 M_{[3,5,5,11]} + 44136 M_{[3,5,7,9]} + 24168 M_{[5,5,7,7]} + 3456 M_{[1,4,7,12]} + \\
& +6048 M_{[1,4,9,10]} + 10272 M_{[1,6,8,9]} + 6144 M_{[2,5,5,12]} + 14640 M_{[2,7,7,8]} + \\
& +6144 M_{[3,3,6,12]} + 6288 M_{[3,3,8,10]} - 29352 M_{[3,5,8,8]} - 15024 M_{[1,5,9,9]} + \\
& +2592 M_{[3,3,9,9]} - 33000 M_{[3,7,7,7]} - 33000 M_{[5,5,5,9]} - 9504 M_{[1,4,8,11]}.
\end{aligned}$$

O número de bases, M ou A , que aparecem em cada expansão de $\prod_{(i < j)}^N (z_i - z_j)^m$ é determinado pelo número de partições de $m \frac{N(N-1)}{2}$ com $N-1$ e N partes, e com cada parcela, no máximo, igual a $m(N-1)$. As bases simétricas, M , podem ter partições com parcelas iguais, mas as bases antissimétricas, A , devem ter todas as parcelas diferentes entre si, caso contrário, esta base será identicamente nula. Para m par, o número de bases M é dado pelo coeficiente do monômio $t^N q^m \frac{N(N-1)}{2}$ na expansão da função geratriz [46],

$$\prod_{i=0}^{m(N-1)} (1 - tq^i)^{-1}.$$

Para m ímpar, o número de bases A é dado pelo coeficiente do mesmo monômio do caso anterior, na função geratriz

$$\prod_{i=0}^{m(N-1)} (1 + tq^i).$$

As funções de onda finais serão apresentadas com uma expansão nas bases antissimétricas, $A^{(n)}$, normalizadas. Estas são similares às bases A , com a diferença que estão normalizadas. De modo geral:

$$A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]}^{(n)} = \frac{A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]}}{\sqrt{\eta_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]}}},$$

onde

$$\eta_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N]} = N! \left(\frac{2\pi}{(\phi + 1)!} \right)^N \prod_i (\phi - \lambda_i)! \lambda_i!.$$

No entanto, os cálculos preliminares são totalmente feitos com as bases A , porque, desta forma, facilita-se bastante o trabalho, e bases normalizadas $A^{(n)}$ podem ser facilmente introduzidas na expressão final.

Conjugação de carga

A conjugação de carga [36, 33], que leva a expressão de uma função de onda com fator de preenchimento ν para os buracos numa outra com fator de preenchimento $1 - \nu$, é dada por

$$\chi_{1-\nu} = \int \prod_i^M \frac{dz_{N+i} d\bar{z}_{N+i}}{(1 + z_{N+i} \bar{z}_{N+i})^2} \chi_\nu^*(z_{N+i} \dots z_{N+M}) \Phi_1(z_1 \dots z_{N+M}),$$

onde M é o número de partículas em χ_ν^* , N é o número de elétrons em $\chi_{1-\nu}$, e $N + M = \phi + 1$. Como as funções χ_ν estão sendo expandidas nas bases A , devemos determinar como a seguinte integral pode ser feita

$$I_\lambda = \int \prod_i^M \frac{dz_{N+i} d\bar{z}_{N+i}}{(1 + z_{N+i} \bar{z}_{N+i})^{\phi+2}} A_{[1,2,3,\dots,N+M-1]} \overline{A_{[\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_M]}}.$$

Primeiro, define-se a notação

$$A_{[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots]}^{\{p_1,p_2,p_3,\dots\}} = \begin{vmatrix} z_{p_1}^{\lambda_1} & z_{p_2}^{\lambda_1} & z_{p_3}^{\lambda_1} & \dots \\ z_{p_1}^{\lambda_2} & z_{p_2}^{\lambda_2} & z_{p_3}^{\lambda_2} & \dots \\ z_{p_1}^{\lambda_3} & z_{p_2}^{\lambda_3} & z_{p_3}^{\lambda_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Com esta notação, note que a identidade se verifica

$$A_{[0,1,2,3,\dots,N+M-1]} = \sum_{k=C_{[N+M-1]}^M} (-)^{[\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_M,[N+M-1]-[\lambda]]} (-)^{[k_1,k_2,\dots,k_M,[N+M-1]-[k]]} A_{[\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_M]}^{\{k_1,k_2,\dots,k_M\}} A_{[[N+M-1]-[k]]}^{\{[N+M-1]-[k]\}},$$

onde $[N + M - 1]$ representa a lista $[0, 1, 2, \dots, N + M - 1]$; $[k]$ e $[\lambda]$ representam as listas $[k_1, \dots, k_M]$ e $[\lambda_1, \dots, \lambda_M]$, respectivamente, e as operações $[N + M - 1] - [\lambda]$ e $[N + M - 1] - [k]$ determinam as diferenças complementares dos conjuntos formados pelos elementos das listas $[\lambda]$ e $[k]$ em relação ao conjunto formado pelos elementos de $[N + M - 1]$; por exemplo, $[N + M - 1] - [\lambda] = \{0, 1, 2, \dots, N + M - 1\} - \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$; por definição, os conjuntos formados pelos elementos de k e λ estão contidos no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N + M - 1\}$. Note que, para que a identidade acima se verifique, o resultado das operações $[N + M - 1] - [\lambda]$ e $[N + M - 1] - [k]$ deve ter os elementos ordenados do menor para o maior.

Portanto, o resultado da integral acima será dado por

$$I_\lambda = M! \prod_i^M C_{\lambda_i} (-)^{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M, [N+M-1]-[\lambda]]} A_{[[N+M-1]-[\lambda]]},$$

onde $C_k = \int \frac{dzd\bar{z}}{(1+z\bar{z})^{\phi+z}} z^k \bar{z}^k$.

Aplicação dos operadores P_n e $S_{n\alpha}^{(h)}$

Os operadores de projeção antissimétricos P_n , e os que compõem os operadores de criação de quasi-partículas $A_N(\omega)$ e $A_N^\dagger(\omega)$, simétricos, $S_{n\alpha}$ e S_n^h , estão aplicados sobre as expansões de $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^m$. Nas bases A e M , a execução destes cálculos pode ser feita para um maior número de filling factors e elétrons sem, contudo, produzir overflow no computador.

A ação do operador P_n segue o mesmo padrão da aplicação de um operador antissimétrico sobre uma base A ou M . Por exemplo, para 4 elétrons nos dois primeiros níveis de Landau

$$P_n = \sum_p (-)^p (\phi_r + 1 - \text{Log}_{z_{p_1}}) z_{p_2} (\phi_r - \text{Log}_{z_{p_2}}) \frac{\partial}{\partial z_{p_3}} \frac{\partial}{\partial z_{p_4}} z_{p_4},$$

que, se aplicado a uma base simétrica M , produzirá uma expansão em bases A , e se

aplicado a uma base A produzirá uma expansão em M :

$$\begin{aligned}
P_n A_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]} &= \\
&= \sum_p (-)^p (\phi_r + 1 - \text{Log}_{z_{p_1}}) z_{p_2} (\phi_r - \text{Log}_{z_{p_2}}) \frac{\partial}{\partial z_{p_3}} \frac{\partial}{\partial z_{p_4}} z_{p_4} \sum_q (-)^q z_1^{\lambda_{q_1}} z_2^{\lambda_{q_2}} z_3^{\lambda_{q_3}} z_4^{\lambda_{q_4}} \\
&= \sum_p (\phi_r + 1 - \text{Log}_{z_{p_1}}) z_{p_2} (\phi_r - \text{Log}_{z_{p_2}}) \frac{\partial}{\partial z_{p_3}} \frac{\partial}{\partial z_{p_4}} z_{p_4} \sum_q (-)^q z_{p_1}^{\lambda_{q_1}} z_{p_2}^{\lambda_{q_2}} z_{p_3}^{\lambda_{q_3}} z_{p_4}^{\lambda_{q_4}} \\
&= \sum_p \sum_q (-)^q (\phi_r + 1 - \lambda_{q_1}) z_{p_1}^{\lambda_{q_1}} (\phi_r - \lambda_{q_2}) z_{p_2}^{\lambda_{q_2}+1} \lambda_{q_3} z_{p_3}^{\lambda_{q_3}-1} (\lambda_{q_4} + 1) z_{p_4}^{\lambda_{q_4}} \\
&= \sum_q (-)^q (\phi_r + 1 - \lambda_{q_1}) (\phi_r - \lambda_{q_2}) \lambda_{q_3} (\lambda_{q_4} + 1) M_{[\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}+1, \lambda_{q_3}-1, \lambda_{q_4}]};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n M_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]} &= \\
&= \sum_p (-)^p (\phi_r + 1 - \text{Log}_{z_{p_1}}) z_{p_2} (\phi_r - \text{Log}_{z_{p_2}}) \frac{\partial}{\partial z_{p_3}} \frac{\partial}{\partial z_{p_4}} z_{p_4} \sum_q z_1^{\lambda_{q_1}} z_2^{\lambda_{q_2}} z_3^{\lambda_{q_3}} \dots z_N^{\lambda_{q_N}} \\
&= \sum_p \sum_q (\phi_r + 1 - \lambda_{q_1}) z_{p_1}^{\lambda_{q_1}} (\phi_r - \lambda_{q_2}) z_{p_2}^{\lambda_{q_2}+1} \lambda_{q_3} z_{p_3}^{\lambda_{q_3}-1} (\lambda_{q_4} + 1) z_{p_4}^{\lambda_{q_4}} \\
&= \sum_q (\phi_r + 1 - \lambda_{q_1}) (\phi_r - \lambda_{q_2}) \lambda_{q_3} (\lambda_{q_4} + 1) A_{[\lambda_{q_1}, \lambda_{q_2}+1, \lambda_{q_3}-1, \lambda_{q_4}]}.
\end{aligned}$$

Na expansão do estado hierárquico da condensação aniônica não é necessário expandir totalmente o produto de operadores $\prod_\alpha A_N(\omega_\alpha)$ e $\prod_\alpha A_N(\tilde{\omega}_\alpha)$, uma vez que a integral nas coordenadas das quasi-partículas restringe as seqüências $S_{n_1\alpha} S_{n_2\alpha} S_{n_3\alpha} \dots S_{n_{N_q}\alpha}$. Após a integral, sobreviverão apenas aquelas seqüências onde os $n_1, n_2, n_3 \dots n_{N_q}$ são identificados com os expoentes das coordenadas das quasi-partículas, $\tilde{\omega}_{p_1}^{n_1} \tilde{\omega}_{p_2}^{n_2} \tilde{\omega}_{p_3}^{n_3} \dots \tilde{\omega}_{p_{N_q}}^{n_{N_q}}$, na expansão de $\prod (\tilde{\omega}_\alpha - \tilde{\omega}_\beta)^{2p}$. Isto ocorre porque a integral

$$\int \prod_\alpha \frac{d\omega_\alpha d\tilde{\omega}_\alpha}{(1 + \omega_\alpha \tilde{\omega}_\alpha)^e} \prod_{\alpha < \beta} |\omega_\alpha - \omega_\beta|^{2\sigma/m} \prod_\alpha \omega_\alpha^{a_\alpha} \tilde{\omega}_\alpha^{b_\alpha},$$

onde $e = N/2 + N_q + \sigma/m + 1$, só será diferente de zero se $\sum_\alpha (a_\alpha - b_\alpha) = 0$. Em particular, quando as quasi-partículas são do tipo quasi-elétrons, $\sigma = 0$, $a_\alpha = b_\alpha$. Portanto, para

quasi-elétrons, se

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha < \beta} (\omega_\alpha - \omega_\beta)^{2p} &= \sum_{\lambda} \mathcal{M}_\lambda \left(\sum_p \omega_1^{\lambda_{p1}} \omega_2^{\lambda_{p2}} \omega_3^{\lambda_{p3}} \dots \omega_{N_q}^{\lambda_{pN_q}} \right) \\ &= \sum_{\lambda} \mathcal{M}_\lambda M_{[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{N_q}]}, \end{aligned}$$

onde λ assume todas as partições de $N_q(N_q - 1)$ com N_q e $(N_q - 1)$ parcelas, sendo a maior parcela no máximo igual a $2p(N_q - 1)$, e \mathcal{M}_λ é o coeficiente da função base $M_{[\lambda]}$ da expansão escrita nestas bases, teremos

$$\begin{aligned} &\int \prod_{\alpha} \frac{d\omega_{\alpha} d\bar{\omega}_{\alpha}}{(1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha})^{N/2 + p(N_q - 1) + 2}} \prod_{\alpha < \beta} (\bar{\omega}_{\alpha} - \bar{\omega}_{\beta})^{2p} \prod_{\alpha} A_N^{(\dagger)}(\omega_{\alpha}) = \\ &= \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i}} \right)^{\sigma N_q} \int \prod_{\alpha} \frac{d\omega_{\alpha} d\bar{\omega}_{\alpha}}{(1 + \omega_{\alpha} \bar{\omega}_{\alpha})^{N/2 + p(N_q - 1) + 2}} \times \\ &\times \sum_{\lambda} \mathcal{M}_{\lambda} \sum_p (\omega_1 \bar{\omega}_1)^{\lambda_{p1}} (\omega_2 \bar{\omega}_2)^{\lambda_{p2}} \dots (\omega_{N_q} \bar{\omega}_{N_q})^{\lambda_{pN_q}} S_{\lambda_{p1}, 1} S_{\lambda_{p2}, 2} \dots S_{\lambda_{N_q}, N_q} \\ &= \prod_i \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z_i \bar{z}_i}} \right)^{\sigma N_q} \sum_{\lambda} \mathcal{M}_{\lambda} C_{\lambda_1} C_{\lambda_2} C_{\lambda_3} \dots C_{\lambda_{N_q}} \sum_p S_{\lambda_{p1}, 1} S_{\lambda_{p2}, 2} S_{\lambda_{p3}, 3} \dots S_{\lambda_{N_q}, N_q}, \end{aligned}$$

onde

$$C_n = \int \frac{d\omega d\bar{\omega}}{(1 + \omega \bar{\omega})^{N/2 + p(N_q - 1) + 2}} (\omega \bar{\omega})^n = 2\pi n! \frac{(N/2 + p(N_q - 1) - n)!}{(N/2 + p(N_q - 1) + 1)!}.$$

Os operadores simétricos, $S_{k\alpha}$, que compõem o operador de criação de quasi-elétrons, são formados por operadores simétricos menores, da forma

$$S_{j\alpha} = \sum_{i=0}^j b^{j-i} \mathcal{S}_j^{j-i},$$

onde

$$\mathcal{S}_l^n = \sum_{k=C_{[N]}^{N-n}} \sum_{p=C_k^{l-n}} z_{p1} z_{p2} \dots z_{p_{l-n}} \frac{\partial}{\partial z_{k1}} \frac{\partial}{\partial z_{k2}} \dots \frac{\partial}{\partial z_{k_{N-n}}}.$$

As aplicações de cada \mathcal{S}_l^n sobre as funções de base A e M são idênticas:

$$\mathcal{S}_l^n A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_{k=C_{[N]}^{N-n}} \lambda_{k1} \lambda_{k2} \dots \lambda_{k_{N-n}} \sum_{p=C_k^{N-l}} A_{[\dots, \lambda_{p1}-1, \dots, \lambda_{p2}-1, \dots, \lambda_{p_{N-l}}-1, \dots]},$$

$$S_l^n M_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_{k=C_{[N]}^{N-n}} \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \cdots \lambda_{k_{N-n}} \sum_{p=C_k^{N-l}} M_{[\dots, \lambda_{p_1}-1, \dots, \lambda_{p_2}-1, \dots, \dots, \lambda_{p_{N-l}}-1, \dots]}.$$

Para quasi-buracos, a ação dos S_l^h sobre as M e A é dada por

$$S_l^h A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_{k=C_{[N]}^{N-l}} A_{[\dots, \lambda_{p_1}+1, \dots, \lambda_{p_2}+1, \dots, \dots, \lambda_{p_{N-l}}+1, \dots]},$$

$$S_l^h M_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_{k=C_{[N]}^{N-l}} M_{[\dots, \lambda_{p_1}+1, \dots, \lambda_{p_2}+1, \dots, \dots, \lambda_{p_{N-l}}+1, \dots]}.$$

Invariância rotacional

A necessidade da invariância rotacional da função de onda do estado fundamental fornece-nos, ao mesmo tempo, um teste para as nossas funções de ondas calculadas e um método para se determinar os coeficientes da expansão nas funções de base A .

As funções de onda calculadas têm a forma

$$\Psi = \frac{1}{\prod_i (1 + z_i \bar{z}_i)^{\frac{\phi}{2}}} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]},$$

onde a soma está sendo feita sobre todas as partições de $\frac{\phi N}{2}$ com N e $(N - 1)$ parcelas, tal que, no máximo, cada parcela seja igual a ϕ , e todas as parcelas sejam diferentes entre si.

Da invariância rotacional dos estados do EHQF, a ação dos operadores de momento angular J_x , J_y e J_z sobre estes estados deve ser identicamente nula. Como

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_i \lambda_i A_{[\dots, \lambda_i-1, \dots]},$$

$$\sum_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_i \lambda_i A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \frac{\phi N}{2} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]},$$

$$\sum_i z_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = \sum_i \lambda_i A_{[\dots, \lambda_i+1, \dots]},$$

a aplicação dos operadores J_x , J_y e J_z sobre as funções de onda calculadas implica que

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = 0,$$

$$\sum_i (z_i^2 \frac{\partial}{\partial z_i} - z_i \phi) \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = 0.$$

Estas duas equações são equivalentes, ambas levam-nos ao mesmo conjunto de equações que relacionam os coeficientes c_{λ} . Por ser de mais fácil manuseio, usamos a primeira para testar as funções de onda calculadas.

A presença destas equações para os coeficientes c_{λ} indica-nos a existência de um número finito de funções independentes e rotacionalmente invariantes. De modo que as funções de onda serão combinações lineares destas funções independentes. O número de funções rotacionalmente independentes é dado pela diferença entre o número de coeficientes c_{λ} necessários para se expandir a função de onda e o número de equações que os relacionam, ou seja, pela diferença entre os coeficientes dos monômios $t^N q^{\frac{\phi N}{2}}$ e $t^N q^{\frac{\phi N}{2}-1}$ na expansão da função geratriz

$$\prod_{i=0}^{\phi} (1 + tq^i).$$

Ou, mais sucintamente, o número de funções rotacionalmente independentes é dado pelo coeficiente do monômio $t^N q^{\frac{\phi N}{2}}$ na função geratriz

$$\prod_{i=0}^{\phi} (1 + tq^i)(1 - q).$$

Para alguns filling factors, o número de bases A e de funções independentes com invariância rotacional é mostrado na Tabela 1.

Tabela 1: Nesta tabela, lista-se a dimensão do espaço de Hilbert no menor nível de Landau e o número de estados independentes rotacionalmente invariantes para alguns filling factors.

ν	N	bases A	funções independentes	ϕ (fórmula)	ϕ	$L (= \frac{N\phi}{2})$
$\frac{2}{5}$	4	5	1	$\frac{5}{2}N - 4$	6	12
	6	58	3		11	33
	8	910	8		16	64
$\frac{2}{7}$	4	43	2	$\frac{7}{2}N - 2$	12	24
	6	1.242	10		19	57
	8	46.029	80		26	104
$\frac{2}{9}$	4	43	2	$\frac{9}{2}N - 6$	12	24
	6	2.137	13		21	63
	8	139.143	164		30	120
$\frac{2}{11}$	4	150	3	$\frac{11}{2}N - 4$	18	36
	6	11.963	29		29	87
	8	1.229.093	702		40	160
$\frac{2}{13}$	4	150	3	$\frac{13}{2}N - 8$	18	36
	6	17.002	34		31	93
	8	2.502.617	1.137		44	176
$\frac{3}{7}$	9	910	8	$\frac{7}{3}N - 5$	16	72
$\frac{3}{11}$	6	2.137	13	$\frac{11}{3}N - 1$	21	63
	9	610.358	506		32	144
$\frac{3}{17}$	6	17.002	34	$\frac{17}{3}N - 3$	31	93
$\frac{5}{17}$	4	33	2	$\frac{17}{5}N - \frac{13}{5}$	11	22
	9	184.717	217		28	126

Determina-se as bases ortogonais que expandem o espaço das funções rotacionalmente invariantes para cada filling factor calculando e solucionando as equações que relacionam os coeficientes c_λ . Algumas destas bases estão impressas nos Apêndices.

O espaço dos estados com momento angular diferente de zero também pode ser determinado, solucionando as equações

$$\left(\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{J+m_J+1} \sum_\lambda c_\lambda A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = 0,$$

$$\sum_i (z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\phi}{2} + m_J) \sum_\lambda c_\lambda A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} = 0,$$

que são oriundas das relações básicas $J_z \Psi_{Jm_J} = m_J \Psi_{Jm_J}$, $(J_x - iJ_y)^{J+m_J+1} \Psi_{Jm_J} = 0$, onde J é o número quântico de momento angular.

Para um número grande de elétrons na amostra, podemos encontrar o número de funções independentes, p , que expandem o espaço para um dado filling factor como sendo dado por

$$p = e^{S(N, L')},$$

onde $S(N, L')$ é o ponto de sela da

$$S = L' \rho + \int_0^{N+\phi'} du \ln(1-e^{-\rho u}) - \int_0^N du \ln(1-e^{-\rho u}) - \int_0^{\phi'} du \ln(1-e^{-\rho u}) + \ln(1-e^{-\rho(J+m_J+1)}), \quad (3.9)$$

que é determinado pela solução da equação

$$L' + (J+m_J+1) \frac{e^{-\rho(J+m_J+1)}}{1-e^{-\rho(J+m_J+1)}} = -\frac{1}{\rho^2} \int_0^{N+\phi'} dx \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{N\rho} dx \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\phi' \rho} dx \frac{x e^{-x}}{1-e^{-x}} \quad (3.10)$$

$$\text{onde } \begin{cases} L' = \frac{\phi N}{2} - \frac{N(N-1)}{2} - m_J, \\ \phi' = \phi - (N-1). \end{cases}$$

Toda função antissimétrica pode ser decomposta na forma

$$\Psi = \prod_{i < j} (z_i - z_j) \frac{\Psi_s}{\prod_k (1 + z_k \bar{z}_k)}.$$

Desde que

$$\sum_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \Psi_s = \left(\frac{\phi N}{2} - \frac{N(N-1)}{2} - m_J \right) \Psi_s = L' \Psi_s$$

expande-se Ψ_s na base simétrica M :

$$\Psi_s = \sum_\beta M_{\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}},$$

onde

$$\sum_i \beta_i = \frac{\phi N}{2} - \frac{N(N-1)}{2} - m_J$$

$$0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_N \leq \phi'.$$

De modo que o número de bases M (ou A) na expansão de Ψ_s (ou Ψ) será dado pelo coeficiente de $t^{L'}$ na expansão da função geratriz [47]

$$G(\phi', N; t) = \frac{(1-t^{\phi'+N})(1-t^{\phi'+N-1})\dots(1-t)}{(1-t^{\phi'})(1-t^{\phi'-1})\dots(1-t)(1-t^N)(1-t^{N-1})\dots(1-t)},$$

e o número de funções independentes $p(N, L')$ será dado pelo coeficiente de $t^{L'}$ da expansão de $(1-t^{J+m_J+1})G(\phi', N; t)$,

$$p(N, L') = \oint \frac{dt}{2\pi it} \frac{1-t^{J+m_J+1}}{t^{L'}} \frac{\prod_{k=1}^{N+\phi'} (1-t^k)}{\prod_{k=1}^N (1-t^k) \prod_{k=1}^{\phi'} (1-t^k)}.$$

Quando N e L' tendem a infinito, é válido aproximar $p(N, L')$ pelo ponto de sela t_c de

$$S = \ln\left(\frac{1-t^{J+m_J+1}}{t^{L'}} \frac{\prod_{k=1}^{N+\phi'} (1-t^k)}{\prod_{k=1}^N (1-t^k) \prod_{k=1}^{\phi'} (1-t^k)}\right),$$

$$p(N, L') = e^S(N, L').$$

$t_c \rightarrow 1$ quando N e L' são suficientemente grandes. Definindo $t_c = e^{-\rho}$, e trocando os somatórios por integrais, chega-se às eqs. (3.10) e (3.11).

Overlappings

Todos os cálculos foram executados com as funções independentes A não normalizadas; no final, normalizamo-las, multiplicando cada termo $c_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]} A_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]}$ da expansão por $\sqrt{\eta_{[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]}}$, gerando o resultado parcial $\sum_{\lambda} c_{\lambda}^{(n)} A_{\lambda}^{(n)}$. De modo que a normalização de cada função se dá multiplicando este resultado parcial por $\frac{1}{\sqrt{\sum_{\lambda} (c_{\lambda}^{(n)})^2}}$, visto que

$$\langle A_{\lambda_1}^{(n)} | A_{\lambda_2}^{(n)} \rangle = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}.$$

O overlapping entre duas funções, $\Psi = \frac{1}{\prod_k (1+z_k \bar{z}_k)} \sum_\lambda c_\lambda^{(n)} A_\lambda^{(n)}$ e $\chi = \frac{1}{\prod_k (1+z_k \bar{z}_k)} \sum_\gamma c_\gamma^{(n)} A_\gamma^{(n)}$, é dado por $\sum_{\lambda\gamma} \delta_{\lambda\gamma} c_\lambda^{(n)} c_\gamma^{(n)}$. Nos Apêndices, encontram-se algumas das funções de onda calculadas. Na Tabela 2, estão os overlappings calculados.

Tabela 2: Overlappings entre os estados propostos pela condensação aniônica e pela composição fermiônica.

ν	N	<i>Overlappings</i>			
$\frac{2}{5}$		$\langle \Psi_{PD\chi_2} \Psi_{E\chi_{1/3}} \rangle$	$\langle \Psi_{\Phi_1 P \Phi_{1\chi_2}} \Psi_{E\chi_{1/3}} \rangle$	$\langle \Psi_{PD\chi_2} \Psi_{\Phi_1 E \Phi_1^2} \rangle$	$\langle \Psi_{\Phi_1 P \Phi_{1\chi_2}} \Psi_{\Phi_1 E \Phi_1^2} \rangle$
	6	.9993234149	.9993615971	.9998331523	.9999456457
	4	1	1	1	1

ν	N	<i>Overlappings</i>		ν	N	<i>Overlappings</i>
$\frac{2}{5}$		$\langle \Psi_{E\chi_{1/3}} \Psi_{\Phi_1 E \Phi_1^2} \rangle$	$\langle \Psi_{PD\chi_2} \Psi_{\Phi_1 P \Phi_{1\chi_2}} \rangle$	$\frac{2}{7}$		$\langle \Psi_{B\chi_{1/3}} \Psi_{DC\chi_{1/3}} \rangle$
	6	.9996479001	.9999288987		6	.9993762574
	4	1	1		4	1

ν	N	<i>Overlappings</i>		
$\frac{2}{9}$		$\langle \Psi_{E\chi_{1/5}} \Psi_{DPD\chi_2} \rangle$	$\langle \Psi_{E\chi_{1/5}} \Psi_{PD^2\chi_2} \rangle$	$\langle \Psi_{DPD\chi_2} \Psi_{PD^2\chi_2} \rangle$
	4	.9999614869	.9999614869	1

ν	N	<i>Overlappings</i>	ν	N	<i>Overlappings</i>
$\frac{3}{11}$		$\langle \Psi_{EB\chi_{1/3}} \Psi_{DCPD\chi_2} \rangle$	$\frac{2}{11}$		$\langle \Psi_{B\chi_{1/5}} \Psi_{D^2C\chi_{1/3}} \rangle$
	6	.9996522383		4	1

ν	N	<i>Overlappings</i>	ν	N	<i>Overlappings</i>
$\frac{2}{13}$		$\langle \Psi_{E\chi_{1/7}} \Psi_{DPD^2\chi_2} \rangle$	$\frac{5}{17}$		$\langle \Psi_{BB\chi_{1/3}} \Psi_{DCDC\chi_{1/3}} \rangle$
	4	.9999218859		4	.9999999997

A notação desta tabela não deve gerar dúvidas. P é o operador de projeção; C , o de conjugação de carga; D significa Φ_1^2 ; E indica que a função de onda provém da

condensação de quasi-elétrons no nível hierárquico subsequente, já B indica condensação de quasi-buracos.

Conclusões Gerais

De acordo com os dados da Tabela 2, constata-se que, realmente, os dois modelos propostos, composição fermiônica e condensação aniônica, para o Efeito Hall Quântico Fracionário, são equivalentes: os overlappings das funções de ondas calculadas são bem próximos de 1.

O grande número de bases A dificulta enormemente o cálculo das suas funções de onda para um maior número de elétrons. Por outro lado, na condensação de quasi-elétrons, como os operadores simétricos, S , que aparecem no desenvolvimento do operador de criação destas quasi-partículas não comutam entre si: quanto maior for o número de quasi-elétrons, maior será o tempo computacional exigido para o cálculo da função de onda. De forma que o cálculo destas funções com condensação de quasi-elétrons requer muito tempo computacional, fazendo-se necessário o desenvolvimento de um novo método. Solucionar as equações que relacionam os coeficientes das bases A seria um caminho, desde que se conheça, no mínimo, coeficientes em número igual ao de funções independentes, visto que a simples solução algébrica destas equações também requer muito tempo computacional e memória randômica (memória interna a CPU).

Outra possível continuação deste trabalho é um estudo mais aprofundado, no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), da relação existente entre a dimensão do espaço das funções independentes, o filling factor e o momento angular, principalmente para os casos em que este é diferente de zero (ver as eqs. (3.10) e (3.11)).

Referências

- [1] K. Klitzing, G. Dorda e M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 494
- [2] D.C. Tsui, H.L. Störmer, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* 48 (1982) 1559
- [3] D.C. Tsui, *Physica B* 164 (1990) 59
- [4] A. Hartland, K. Jones, J.M. Williams, B.L.Gallagher e T. Galloway, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 969.
- [5] J.K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989) 199; *Phys. Rev. B* 41 (1990) 7653; *Adv. Phys.* 41 (1992) 105
- [6] F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 605
- [7] B.I. Halperin, *Phys. Rev. Lett.* 52 (1984) 1583
- [8] L.D. Landau, *Z. Phys.* 61 (1930) 629
- [9] R.E. Prange e R. Joynt, *Phys. Rev. B* 25 (1982) 2943; R.E. Prange, *Phys. Rev. B* 23 (1981) 4802
- [10] D.J. Thouless, *J. Phys. C* 14 (1981) 3475
- [11] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. B* 23 (1981) 5632
- [12] B.I. Halperin, *Phys. Rev. B* 25 (1982) 2185

- [13] R. Tao e Y.S. Wu, *Phys. Rev. B* 30 (1984) 1097; Q. Niu, D.J. Thouless e Y.S. Wu, *Phys. Rev. B* 31 (1984) 3372; D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale e M. Nijs, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 405; R. Tao e F.D.M. Haldane, *Phys. Rev. B* 33 (1986) 3844; M. Kohmoto, *Ann. Phys.* 160 (1985) 343; D.J. Thouless, Em “The Quantum Hall Effect”, eds. R.E. Prange e S.M. Girvin, Springer-Verlag, New York, 1990
- [14] D.J. Thouless e Y. Gefen, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 806
- [15] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 1395
- [16] R.B. Laughlin, *Phys. Rev. B* 27 (1983) 3383
- [17] R.B. Laughlin, *Surface Science* 142 (1984) 163
- [18] R.B. Laughlin, Em “The Quantum Hall Effect”, eds. R.E. Prange e S.M. Girvin, Springer-Verlag, New York, 1990
- [19] Jancovici *Phys. Rev. Lett.* 46 (1981) 386; R.R. Sari, D. Merlini e R. Calinon, *J. Phys. A: Math. Gen.* 9 (1976) 1539
- [20] J.M. Caillol, D. Levesque, J.J. Weis e J.P. Hansen, *Jour. of Stat. Phys.* 28 (1982) 325
- [21] E. Wigner, *Trans. Faraday Soc.* 34 (1938) 678
- [22] G. Fano, F. Ortolani e E. Colombo, *Phys. Rev. B* 34 (1986) 2670
- [23] S.M. Girvin e T. Jach, *Phys. Rev. B* 29 (1984) 5617
- [24] F.D.M. Haldane, “The Hierarchy of Fractional State and Numerical Studies”, Chapter 8, na ref. [50]
- [25] G. Dev e J.K. Jain, *Phys. Rev. B* 45 (1992) 1223, *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 2843
- [26] D. Arovas, J.R. Schrieffer e F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett* 53 (1984) 722

- [27] N. Read, Phys. Rev. Lett 65 (1990) 1502
- [28] B.I. Halperin, Helvetica Phys. Acta 56 (1983) 75
- [29] D. Li, Phys. Lett. A 169 (1992) 82; D. Li, Nucl. Phys. B 396 (1993) 411 (FS); D. Li, Phys. Rev B 47 (1993) 13370
- [30] D. Li, "Fractional Quantum Hall Effect on Compact Surface" - Thesis Submitted for the Degree of "Doctor Philosophiae", SISSA (1992)
- [31] R. Iengo e K. Lechner, Phys. Reports 213 (1992) 179
- [32] D.P. Arovas, "Topics in Fractional Statistics", em "Geometric Phases in Physics", ed. F.Wilczek, World Scientific (1989)
- [33] R.B. Laughlin, Em "Fractional Statistics and anyons Superconductivity", ed. F. Wilczek, World Scientific (1990)
- [34] N. Trivedi e J.K. Jain, Mod. Phys. Lett. B 5 (1991) 503
- [35] E.H. Rezayi e A.H. MacDonald, Phys. Rev. B 44 (1991) 8395
- [36] S.M. Girvin, Phys. Rev. B 29 (1984) 6012
- [37] J.K. Jain e V.J. Goldman, Phys. Rev. B 45 (1992) 1255
- [38] B. Block e X.G. Wen, Phys. Rev. B 42 (1990) 8133, 8145
- [39] G. Moore e N. Read, Nucl. Phys. B 360 (1991) 362
- [40] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A 133 (1931) 60
- [41] T.S. Wu e C.N. Yang Nucl. Phys. B 107 (1976) 365; Phys. Rev. D 12 (1975) 3845; Phys. Rev. D 16 (1977) 1018
- [42] F.D.M. Haldane e E.H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 237

- [43] B.A. Ovrut e S. Thomas, Phys. Rev. D 43 (1991) 1314; A. Comtet, J. McCabe e S. Ouvry, Phys. Rev. D 45 (1992) 709
- [44] X.G. Wu e K.J. Jain, Phys. Rev. B 49 (1994) 5085; J.K. Jain e X.G. Wu, Phys. Rev. B 49 (1994) 7515
- [45] R. Iengo e D. Li, Nucl. Phys. B 413 (1994) 735 (FS)
- [46] I.P. Goulden e D.M. Jackson, "Combinatorial Enumeration", Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, 1983; I.G. MacDonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials", Clarendon Press, Oxford, 1979
- [47] G.E. Andrews, "The Theory of Partitions", Addison-Wesley Publishing Company, 1976
- [48] M. Stone, Phys. Rev. B 42 (1990) 8399; G.V. Dunne, Int. J. of Mod. Phys. B 7 (1993) 4783
- [49] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov e O. I. Marichev, "Integrals and Series", pg. 284 Gordon and Breach Science Publishers
- [50] R.E. Prange e S.M. Girvin eds., "The Quantum Hall Effect", Springer-Verlag, 1990
- [51] X.G. Wu, G. Dev e J.K. Jain, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 153

Apêndices

Funções de onda e base para $\nu = \frac{2}{5}$

Para $N = 4$:

$$\begin{aligned}\Psi_{2/5} = & -0.5345224838 A_{[3,4,5]} - 0.5345224838 A_{[1,2,3,6]} - 0.3779644730 A_{[1,5,6]} \\ & + 0.3779644730 A_{[1,2,4,5]} + 0.3779644729 A_{[2,4,6]}\end{aligned}$$

Para $N=6$

$$\Psi_{E\chi_{1/3}}^{SND} = \xi_1$$

$$\Psi_{\Phi_1 E \Phi_1}^{CND} = 0.9996479001 \xi_1 + 0.009799745638 \xi_2 + 0.02465848822 \xi_3$$

$$\Psi_{PD\Phi_2}^{SND} = 0.9993234139 \xi_1 + 0.02804379991 \xi_2 + 0.02379619246 \xi_3$$

$$\Psi_{\Phi_1 P \Phi_1 \Phi_2}^{CND} = 0.9993615971\xi_1 + 0.01830660180\xi_2 + 0.03068007148\xi_3$$

$$\begin{aligned} \xi_1 = & -0.09263891056 A_{[2,5,7,9,10]} - 0.1098010074 A_{[1,5,8,9,10]} + 0.03535257254 A_{[2,3,8,9,11]} \\ & - 0.1078849532 A_{[2,4,7,9,11]} + 0.1390442911 A_{[3,4,6,9,11]} + 0.05017463569 A_{[3,4,7,8,11]} \\ & - 0.09524314428 A_{[1,5,6,10,11]} - 0.1915430820 A_{[1,6,7,8,11]} - 0.09416301472 A_{[2,3,4,6,8,10]} \\ & - 0.1268970026 A_{[3,6,7,8,9]} + 0.1715815008 A_{[1,2,3,7,9,11]} + 0.1390442911 A_{[2,5,7,8,11]} \\ & - 0.1753001549 A_{[4,5,6,8,10]} - 0.1915430820 A_{[3,4,5,10,11]} + 0.1164615554 A_{[1,2,4,5,10,11]} \\ & - 0.03550123581 A_{[1,4,8,9,11]} - 0.03550123581 A_{[2,3,7,10,11]} + 0.03844024228 A_{[1,3,4,7,8,10]} \\ & - 0.1098010074 A_{[1,2,3,6,10,11]} - 0.003210775645 A_{[2,4,5,6,7,9]} + 0.1897265039 A_{[1,2,6,7,8,9]} \\ & - 0.09416301472 A_{[1,3,5,7,8,9]} + 0.1104616174 A_{[1,3,5,6,8,10]} - 0.009553333415 A_{[1,2,9,10,11]} \\ & + 0.009553333418 A_{[1,3,8,10,11]} - 0.01494516905 A_{[2,3,5,6,8,9]} + 0.1196396414 A_{[4,5,7,8,9]} \\ & + 0.08612571754 A_{[2,3,4,7,8,9]} - 0.1451372796 A_{[1,2,5,7,8,10]} + 0.02296565533 A_{[1,4,5,6,8,9]} \\ & + 0.02296565533 A_{[2,3,5,6,7,10]} + 0.003210775645 A_{[3,4,5,6,7,8]} + 0.006736052229 A_{[2,6,7,8,10]} \\ & + 0.08874984899 A_{[3,5,7,8,10]} - 0.1268970026 A_{[2,3,4,5,8,11]} + 0.3248316849 A_{[4,5,6,7,11]} \\ & - 0.02583873587 A_{[1,4,5,6,7,10]} - 0.1576076724 A_{[1,2,4,7,8,11]} - 0.03903485708 A_{[2,5,6,9,11]} \\ & + 0.1196396414 A_{[2,3,4,6,7,11]} - 0.2220528586 A_{[3,5,6,8,11]} + 0.1610234743 A_{[1,2,5,6,8,11]} \\ & - 0.1576076724 A_{[3,4,7,9,10]} - 0.1753001549 A_{[1,3,5,6,7,11]} + 0.006736052229 A_{[1,3,4,5,9,11]} \\ & + 0.1897265039 A_{[2,3,4,5,9,10]} + 0.08874984899 A_{[1,3,4,6,8,11]} - 0.1451372796 A_{[1,3,4,6,9,10]} \\ & + 0.1715815008 A_{[2,4,8,9,10]} + 0.1610234743 A_{[3,5,6,9,10]} + 0.1015046281 A_{[2,4,6,10,11]} \\ & + 0.01851285781 A_{[1,4,7,10,11]} + 0.1164615554 A_{[1,6,7,9,10]} + 0.2274043917 A_{[1,2,4,7,9,10]} \\ & + 0.1015046281 A_{[1,5,7,9,11]} - 0.09263891056 A_{[1,2,4,6,9,11]} - 0.3280029636 A_{[1,2,3,8,9,10]} \\ & - 0.04799438146 A_{[1,2,5,6,9,10]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2 = & 0.07345842900 A_{[2,5,7,9,10]} - 0.1731110133 A_{[1,5,8,9,10]} - 0.1324957772 A_{[2,3,8,9,11]} \\
& - 0.08254419555 A_{[2,4,7,9,11]} + 0.1045793014 A_{[3,4,6,9,11]} - 0.0009829907594 A_{[3,4,7,8,11]} \\
& + 0.1275718753 A_{[1,5,6,10,11]} + 0.03979489423 A_{[1,6,7,8,11]} - 0.1287236825 A_{[2,3,4,6,8,10]} \\
& + 0.1926104184 A_{[3,6,7,8,9]} + 0.06061993310 A_{[1,2,3,7,9,11]} + 0.1045793014 A_{[2,5,7,8,11]} \\
& + 0.07344627926 A_{[4,5,6,8,10]} + 0.03979489423 A_{[3,4,5,10,11]} + 0.1836119572 A_{[1,2,4,5,10,11]} \\
& + 0.2270494951 A_{[1,4,8,9,11]} + 0.2270494951 A_{[2,3,7,10,11]} - 0.03084734285 A_{[1,3,4,7,8,10]} \\
& - 0.1731110133 A_{[1,2,3,6,10,11]} - 0.07396245900 A_{[2,4,5,6,7,9]} + 0.02569701499 A_{[1,2,6,7,8,9]} \\
& - 0.1287236825 A_{[1,3,5,7,8,9]} - 0.01035059517 A_{[1,3,5,6,8,10]} + 0.1547016411 A_{[1,2,9,10,11]} \\
& - 0.1547016413 A_{[1,3,8,10,11]} - 0.1038268111 A_{[2,3,5,6,8,9]} - 0.1815948439 A_{[4,5,7,8,9]} \\
& + 0.2011327687 A_{[2,3,4,7,8,9]} + 0.1150872402 A_{[1,2,5,7,8,10]} + 0.2248876148 A_{[1,4,5,6,8,9]} \\
& + 0.2248876148 A_{[2,3,5,6,7,10]} + 0.07396245900 A_{[3,4,5,6,7,8]} - 0.2428504990 A_{[2,6,7,8,10]} \\
& + 0.06675137204 A_{[3,5,7,8,10]} + 0.1926104184 A_{[2,3,4,5,8,11]} + 0.08522997827 A_{[4,5,6,7,11]} \\
& - 0.2105003732 A_{[1,4,5,6,7,10]} - 0.05568296415 A_{[1,2,4,7,8,11]} + 0.05228460227 A_{[2,5,6,9,11]} \\
& - 0.1815948439 A_{[2,3,4,6,7,11]} - 0.1282916765 A_{[3,5,6,8,11]} - 0.06746471540 A_{[1,2,5,6,8,11]} \\
& - 0.05568296415 A_{[3,4,7,9,10]} + 0.07344627926 A_{[1,3,5,6,7,11]} - 0.2428504990 A_{[1,3,4,5,9,11]} \\
& + 0.02569701499 A_{[2,3,4,5,9,10]} + 0.06675137204 A_{[1,3,4,6,8,11]} + 0.1150872402 A_{[1,3,4,6,9,10]} \\
& + 0.06061993310 A_{[2,4,8,9,10]} - 0.06746471540 A_{[3,5,6,9,10]} - 0.1359587175 A_{[2,4,6,10,11]} \\
& - 0.02479674525 A_{[1,4,7,10,11]} + 0.1836119572 A_{[1,6,7,9,10]} - 0.06464365801 A_{[1,2,4,7,9,10]} \\
& - 0.1359587175 A_{[1,5,7,9,11]} + 0.07345842900 A_{[1,2,4,6,9,11]} + 0.02910207182 A_{[1,2,3,8,9,10]} \\
& - 0.07762029367 A_{[1,2,5,6,9,10]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_3 = & 0.02257139500 A_{[2,5,7,9,10]} + 0.07381013524 A_{[1,5,8,9,10]} + 0.2534398133 A_{[2,3,8,9,11]} \\
& - 0.1864716440 A_{[2,4,7,9,11]} - 0.07273423988 A_{[3,4,6,9,11]} + 0.2239165802 A_{[3,4,7,8,11]} \\
& - 0.2293675794 A_{[1,6,6,10,11]} + 0.06694251296 A_{[1,6,7,8,11]} + 0.05972905449 A_{[2,3,4,6,8,10]} \\
& + 0.01428111528 A_{[3,6,7,8,9]} - 0.07737759941 A_{[1,2,3,7,9,11]} - 0.07273423988 A_{[2,5,7,8,11]} \\
& + 0.05456904196 A_{[4,5,6,8,10]} + 0.06694251296 A_{[3,4,5,10,11]} - 0.07828747077 A_{[1,2,4,5,10,11]} \\
& - 0.02732401473 A_{[1,4,8,9,11]} - 0.02732401473 A_{[2,3,7,10,11]} - 0.2524594824 A_{[1,3,4,7,8,10]} \\
& + 0.07381013524 A_{[1,2,3,6,10,11]} + 0.2577797711 A_{[2,4,5,6,7,9]} - 0.07808458927 A_{[1,2,6,7,8,9]} \\
& + 0.05972905449 A_{[1,3,5,7,8,9]} + 0.2022757466 A_{[1,3,5,6,8,10]} + 0.2188773648 A_{[1,2,9,10,11]} \\
& - 0.2188773647 A_{[1,3,8,10,11]} - 0.2185962914 A_{[2,3,5,6,8,9]} - 0.01346436460 A_{[4,5,7,8,9]} \\
& + 0.1734453704 A_{[2,3,4,7,8,9]} + 0.03536257980 A_{[1,2,5,7,8,10]} - 0.04956361660 A_{[1,4,5,6,8,9]} \\
& - 0.04956361660 A_{[2,3,5,6,7,10]} - 0.2577797711 A_{[3,4,5,6,7,8]} + 0.04131592480 A_{[2,6,7,8,10]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.1950862040 A_{[1,4,5,6,7,10]} + 0.07107586355 A_{[1,2,4,7,8,11]} + 0.2488123819 A_{[2,5,6,9,11]} \\
& -0.01346436460 A_{[2,3,4,6,7,11]} - 0.1340068701 A_{[3,5,6,8,11]} - 0.05012486574 A_{[1,2,5,8,8,11]} \\
& + 0.07107586355 A_{[3,4,7,9,10]} + 0.05456904196 A_{[1,3,5,6,7,11]} + 0.04131592480 A_{[1,3,4,5,9,11]} \\
& - 0.07808458927 A_{[2,3,4,5,9,10]} - 0.04642515533 A_{[1,3,4,6,8,11]} + 0.03536257980 A_{[1,3,4,6,9,10]} \\
& - 0.07737759941 A_{[2,4,8,9,10]} - 0.05012486574 A_{[3,5,6,9,10]} - 0.01469888909 A_{[2,4,6,10,11]} \\
& + 0.2404788952 A_{[1,4,7,10,11]} - 0.07828747077 A_{[1,6,7,9,10]} + 0.1668307753 A_{[1,2,4,7,9,10]} \\
& - 0.01469888909 A_{[1,5,7,9,11]} + 0.02257139500 A_{[1,2,4,6,9,11]} - 0.1214641364 A_{[1,2,3,8,9,10]} \\
& - 0.2105438780 A_{[1,2,5,6,9,10]}
\end{aligned}$$

Funções de onda e base para $\nu = 2/7$

Para $N = 4$:

$$\Psi_{B\chi_{1/3}} = \xi_1$$

$$\Psi_{DC\chi_{1/3}} = 1.000000000\xi_1$$

$$\begin{aligned}\xi_1 = & 0.1371743403 A_{[1,6,7,10]} + 0.2844772256 A_{[7,8,9]} - 0.2404271376 A_{[6,8,10]} \\ & + 0.1231589728 A_{[1,5,8,10]} - 0.1238091378 A_{[1,3,8,12]} - 0.1191353984 A_{[5,7,12]} \\ & + 0.2225922766 A_{[2,3,7,12]} - 0.01155252348 A_{[2,4,8,10]} - 0.2404271376 A_{[2,4,6,12]} \\ & + 0.2844772256 A_{[3,4,5,12]} + 0.1130217627 A_{[3,10,11]} - 0.1787030976 A_{[1,2,10,11]} \\ & - 0.1238091378 A_{[4,9,11]} + 0.1072218586 A_{[1,3,9,11]} + 0.2228819218 A_{[6,7,11]} \\ & - 0.2387576715 A_{[2,3,8,11]} + 0.1509048379 A_{[1,4,8,11]} + 0.1429624781 A_{[4,8,12]} \\ & - 0.2184148971 A_{[1,5,7,11]} + 0.1231589728 A_{[2,4,7,11]} + 0.2228819218 A_{[1,5,6,12]} \\ & + 0.1371743403 A_{[2,5,6,11]} - 0.1520594733 A_{[3,4,6,11]} + 0.2225922766 A_{[5,9,10]} \\ & - 0.2387576715 A_{[1,4,9,10]} - 0.04350209673 A_{[5,8,11]} - 0.04913272159 A_{[3,6,7,8]} \\ & + 0.04548806121 A_{[4,5,7,8]} + 0.1981979810 A_{[2,3,9,10]} + 0.1130217627 A_{[1,2,9,12]} \\ & - 0.06498294458 A_{[3,4,8,9]} + 0.04485183321 A_{[2,6,7,9]} + 0.007581343535 A_{[3,5,7,9]} \\ & - 0.04913272159 A_{[4,5,6,9]} + 0.06628165965 A_{[3,4,7,10]} + 0.04485183321 A_{[3,5,6,10]} \\ & - 0.1520594733 A_{[1,6,8,9]} + 0.06628165965 A_{[2,5,8,9]} - 0.1371862164 A_{[2,5,7,10]} \\ & - 0.04350209673 A_{[1,4,7,12]} - 0.07148123906 A_{[3,9,12]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_2 = & 0.2104601261 A_{[1,6,7,10]} + 0.04925329879 A_{[7,8,9]} - 0.04162663505 A_{[6,8,10]} \\ & - 0.1608873077 A_{[1,5,8,10]} - 0.1491015112 A_{[1,3,8,12]} + 0.05308116208 A_{[5,7,12]} \\ & + 0.03853877539 A_{[2,3,7,12]} + 0.2948312372 A_{[1,11,12]} - 0.2948312371 A_{[2,10,12]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0.1361104351 A_{[3,10,11]} +0.07962174311 A_{[1,2,10,11]} -0.1491015112 A_{[4,9,11]} \\
&-0.1657055407 A_{[1,3,9,11]} -0.09930576109 A_{[6,7,11]} +0.1315225451 A_{[2,3,8,11]} \\
&+0.1489734353 A_{[1,4,8,11]} -0.1226636419 A_{[4,8,12]} -0.09923869433 A_{[1,5,7,11]} \\
&-0.1608873077 A_{[2,4,7,11]} -0.09930576109 A_{[1,5,6,12]} +0.2104601261 A_{[2,5,6,11]} \\
&-0.02632699560 A_{[3,4,6,11]} +0.03853877539 A_{[5,9,10]} +0.1315225451 A_{[1,4,9,10]} \\
&+0.1270396460 A_{[5,8,11]} +0.2303339482 A_{[3,6,7,8]} -0.2132477989 A_{[4,5,7,8]} \\
&-0.002538664274 A_{[2,3,9,10]} +0.1361104351 A_{[1,2,9,12]} -0.1586665170 A_{[3,4,8,9]} \\
&-0.2102651654 A_{[2,6,7,9]} -0.03554129983 A_{[3,5,7,9]} +0.2303339482 A_{[4,5,6,9]} \\
&+0.2242518707 A_{[3,4,7,10]} -0.2102651654 A_{[3,5,6,10]} -0.02632699560 A_{[1,6,8,9]} \\
&+0.2242518707 A_{[2,5,8,9]} +0.02538664273 A_{[2,5,7,10]} +0.1270396460 A_{[1,4,7,12]} \\
&+0.2087474396 A_{[3,9,12]}
\end{aligned}$$

Função de onda para $\nu = 2/7$

Para $N = 6$:

$$\begin{aligned}\Psi_{B\chi_{1/3}} = & 0.002476459726A_{[2,7,10,11,12,15]} + 0.01508057862A_{[1,4,8,9,16,19]} + 0.006652914924A_{[1,8,10,11,13,14]} \\ & + 0.05151443970A_{[1,3,10,12,13,18]} - 0.0003885811092A_{[1,6,9,11,14,16]} - 0.005123064952A_{[1,7,9,10,13,17]} \\ & + 0.001717394738A_{[3,5,10,12,13,14]} + 0.001955340229A_{[2,8,9,11,12,15]} - 0.002466549348A_{[2,7,10,11,13,14]} \\ & - 0.009239101487A_{[2,4,5,14,15,17]} + 0.001484364745A_{[3,5,9,11,13,16]} + 0.0002933902775A_{[2,8,9,10,13,15]} \\ & - 0.001539404766A_{[2,8,9,11,13,14]} + 0.005864902675A_{[2,7,8,11,13,16]} - 0.0003304279286A_{[4,7,10,11,12,13]} \\ & - 0.006148970714A_{[3,7,14,15,18]} - 0.006578772835A_{[3,6,8,11,13,16]} + 0.0003428670825A_{[3,7,10,11,12,14]} \\ & + 0.06887543878A_{[1,2,10,13,15,16]} + 0.001484364745A_{[3,6,8,10,14,16]} + 0.01806932364A_{[3,5,6,11,15,17]} \\ & + 0.0004108914460A_{[3,8,9,10,11,16]} + 0.03602511607A_{[4,10,11,13,19]} - 0.02271343159A_{[3,5,7,10,14,18]} \\ & + 0.0002744386897A_{[6,8,9,10,11,13]} + 0.03552176398A_{[1,6,7,10,15,18]} - 0.001442618056A_{[1,7,9,11,12,17]} \\ & + 0.0007914854196A_{[6,7,8,9,13,14]} + 0.000004656944941A_{[1,3,9,11,15,18]} + 0.03543340190A_{[4,5,7,8,15,18]} \\ & - 0.04558637237A_{[2,3,8,13,14,17]} - 0.008126738660A_{[3,4,9,11,14,16]} - 0.003683455126A_{[2,6,9,10,14,16]} \\ & + 0.03148456593A_{[1,2,10,12,14,18]} - 0.006778537497A_{[1,6,9,12,14,15]} - 0.007680416405A_{[3,5,7,9,15,18]} \\ & + 0.01293343501A_{[1,4,9,13,14,16]} + 0.006859339139A_{[1,6,9,12,13,16]} - 0.01074233575A_{[1,8,9,10,12,17]} \\ & - 0.01608672360A_{[1,7,8,10,14,17]} - 0.001008480987A_{[2,6,8,11,14,16]} + 0.001117838367A_{[1,6,10,11,12,17]} \\ & + 0.07496789274A_{[2,4,6,13,14,18]} + 0.04588095941A_{[1,6,8,9,16,17]} - 0.004596279244A_{[2,5,11,12,13,14]} \\ & - 0.07305344983A_{[1,4,10,11,13,18]} - 0.01608672360A_{[2,5,9,11,12,18]} + 0.001759223428A_{[3,5,9,10,14,16]} \\ & + 0.01293343501A_{[3,5,6,10,15,18]} - 0.0001255845690A_{[4,5,9,12,13,14]} - 0.001321965056A_{[4,6,8,9,12,18]} \\ & - 0.01074233575A_{[2,7,9,10,11,18]} - 0.003974005016A_{[1,7,10,12,13,14]} + 0.0002933902775A_{[4,6,9,10,11,17]} \\ & - 0.001321965056A_{[1,7,10,11,13,15]} - 0.009427060878A_{[2,5,8,11,15,16]} + 0.03283093630A_{[2,5,6,11,15,18]} \\ & - 0.03371936895A_{[1,4,11,12,13,16]} + 0.001497084788A_{[3,6,9,10,14,15]} + 0.003873752621A_{[3,6,8,12,13,15]} \\ & + 0.007089523051A_{[3,4,9,11,12,18]} + 0.03544113980A_{[2,4,7,9,16,19]} + 0.007891112247A_{[3,6,7,10,15,16]} \\ & + 0.0002333429443A_{[3,6,9,11,13,15]} - 0.02720912207A_{[3,4,8,9,15,18]} + 0.02631989643A_{[3,4,7,9,15,19]} \\ & - 0.001807317548A_{[3,6,9,10,13,16]} - 0.000005074788095A_{[4,9,11,15,18]} - 0.002863322737A_{[2,7,8,11,12,17]} \\ & - 0.0002625891356A_{[3,8,9,11,12,14]} - 0.01728006553A_{[2,6,8,11,13,17]} + 0.03088786984A_{[1,3,9,10,16,18]} \\ & - 0.03365927579A_{[4,9,10,16,18]} + 0.04881654493A_{[2,4,8,10,14,19]} + 0.01149362257A_{[1,3,7,13,16,17]}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.002640502961A_{[4,6,8,11,13,15]} - 0.008852719715A_{[1,5,9,10,15,17]} - 0.01102060590A_{[3,6,7,11,12,18]} \\
& - 0.007540517407A_{[4,5,8,9,14,17]} - 0.02090942112A_{[4,5,6,9,15,18]} + 0.001501608067A_{[3,4,9,11,13,17]} \\
& + 0.006066462578A_{[3,4,8,11,13,18]} - 0.001177292796A_{[3,8,9,10,12,15]} - 0.05337183866A_{[4,5,6,7,16,19]} \\
& + 0.03006060928A_{[6,8,12,13,18]} - 0.006625812061A_{[1,6,10,12,13,15]} + 0.003025829206A_{[4,6,8,11,12,16]} \\
& - 0.02445351676A_{[1,3,11,12,13,17]} - 0.001760354618A_{[1,7,8,11,14,16]} + 0.02393493719A_{[3,5,7,10,15,17]} \\
& + 0.002377193517A_{[2,6,8,9,15,17]} + 0.04857128588A_{[2,3,10,13,14,15]} - 0.01174021387A_{[1,5,8,11,15,17]} \\
& - 0.02590002807A_{[2,6,8,9,14,18]} - 0.05806520556A_{[2,4,7,9,17,18]} + 0.03633000599A_{[2,5,8,9,15,18]} \\
& + 0.01108260739A_{[2,3,7,10,16,19]} + 0.009061011758A_{[4,5,8,9,15,16]} + 0.03218918928A_{[2,6,7,9,15,18]} \\
& + 0.01848712506A_{[1,6,7,12,14,17]} + 0.02612618374A_{[2,3,11,12,13,16]} - 0.03325431936A_{[1,6,7,12,15,16]} \\
& + 0.001555345554A_{[5,6,7,11,13,15]} - 0.04425349516A_{[3,11,12,14,17]} - 0.02277148255A_{[2,4,9,13,14,15]} \\
& + 0.0005033231823A_{[4,5,8,11,13,16]} - 0.0006488906693A_{[4,6,9,10,12,16]} - 0.005594252590A_{[2,6,10,11,12,16]} \\
& - 0.01617884840A_{[2,6,7,10,15,17]} + 0.004469763007A_{[2,6,7,11,15,16]} - 0.006778537497A_{[4,5,7,10,13,18]} \\
& + 0.001287975183A_{[2,6,7,10,14,18]} - 0.006173566464A_{[2,5,8,13,14,15]} + 0.0008414586635A_{[6,7,8,11,12,13]} \\
& - 0.02132625900A_{[2,4,8,12,14,17]} + 0.04411502107A_{[3,4,8,9,16,17]} + 0.0009160660971A_{[5,6,8,11,12,15]} \\
& - 0.03745546979A_{[3,4,6,10,16,18]} - 0.003272584956A_{[2,6,9,11,14,15]} + 0.006815922597A_{[2,6,9,11,13,16]} \\
& + 0.04357792380A_{[3,5,6,8,16,19]} - 0.04425349516A_{[2,5,7,8,16,19]} - 0.01921716958A_{[1,5,7,9,16,19]} \\
& - 0.07139615484A_{[3,5,6,8,17,18]} - 0.01239044410A_{[4,5,6,11,13,18]} - 0.01979914294A_{[1,2,9,11,16,18]} \\
& - 0.02066144175A_{[1,4,9,11,15,17]} + 0.0005757276429A_{[4,6,9,10,13,15]} + 0.005701584212A_{[2,6,8,12,13,16]} \\
& + 0.0004832693490A_{[5,6,9,10,13,14]} + 0.06594171441A_{[2,3,8,9,17,18]} - 0.0003755660352A_{[5,6,9,11,12,14]} \\
& + 0.004044415551A_{[3,7,8,9,14,16]} + 0.0005033231823A_{[3,6,8,11,14,15]} - 0.03859314506A_{[3,4,6,13,14,17]} \\
& - 0.02066144175A_{[2,4,8,10,15,18]} - 0.003974005016A_{[5,6,7,9,12,18]} - 0.01344291740A_{[2,4,6,10,16,19]} \\
& + 0.01512565572A_{[3,4,5,12,15,18]} + 0.07192274239A_{[2,3,9,10,15,18]} - 0.002844482249A_{[3,5,10,11,13,15]} \\
& - 0.0004390591239A_{[3,7,9,11,13,14]} - 0.03964998098A_{[1,3,8,13,15,17]} + 0.009061011758A_{[3,4,10,11,14,15]} \\
& + 0.003212580273A_{[3,9,10,17,18]} + 0.0004006702655A_{[4,7,9,10,12,15]} - 0.001091527698A_{[2,5,10,11,13,16]} \\
& - 0.007540517407A_{[2,5,10,11,14,15]} - 0.004005796384A_{[2,6,7,9,16,17]} + 0.02220355244A_{[1,7,9,10,12,18]} \\
& + 0.1021078641A_{[2,4,6,14,15,16]} + 0.0001449512161A_{[3,5,9,11,14,15]} + 0.001497084788A_{[4,5,9,10,13,18]} \\
& + 0.006859339139A_{[3,6,7,10,13,18]} - 0.008770889032A_{[1,7,8,9,15,17]} - 0.009099646923A_{[5,6,7,10,11,18]} \\
& - 0.0004095673385A_{[6,7,9,10,12,13]} + 0.06449251655A_{[3,4,6,11,16,17]} + 0.0001449512161A_{[4,5,8,10,14,16]} \\
& - 0.003272584956A_{[4,5,8,10,13,17]} - 0.02782874665A_{[2,5,8,9,16,17]} - 0.01534764114A_{[1,4,6,13,16,17]} \\
& + 0.001993092609A_{[4,5,8,11,12,17]} - 0.04203935952A_{[3,4,6,9,16,19]} - 0.01257227326A_{[4,6,7,10,11,19]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0.01489690236A_{[1,3,9,13,14,17]} +0.0007914854196A_{[5,6,10,11,12,13]} -0.007249032663A_{[4,7,8,9,11,18]} \\
&+0.004044415551A_{[3,5,10,11,12,16]} -0.00003734960700A_{[2,8,10,11,12,14]} -0.001768433971A_{[5,6,7,10,13,18]} \\
&-0.0004039631316A_{[4,6,10,11,12,14]} -0.005915433425A_{[3,6,8,9,13,18]} -0.02373049909A_{[2,6,7,11,13,18]} \\
&-0.001501737332A_{[4,6,7,11,14,15]} +0.002319953146A_{[3,5,8,12,13,16]} -0.02248049278A_{[2,3,10,12,14,16]} \\
&-0.007797258114A_{[3,5,7,13,14,15]} -0.01009258225A_{[3,6,8,10,12,18]} +0.0004139048003A_{[5,7,8,10,12,15]} \\
&+0.01434493525A_{[2,6,7,12,13,17]} -0.04534150658A_{[5,7,13,15,17]} +0.02470964874A_{[2,5,6,12,15,17]} \\
&-0.00005092951379A_{[6,7,8,9,11,16]} -0.001152156254A_{[4,7,8,11,12,15]} -0.01102060590A_{[1,7,8,12,13,16]} \\
&-0.002097178277A_{[3,6,9,10,12,17]} -0.009421035379A_{[3,4,7,11,14,18]} -0.002976578624A_{[5,6,7,11,12,16]} \\
&-0.002422229605A_{[2,6,10,12,13,14]} -0.01009258225A_{[1,7,9,11,13,16]} -0.01596610374A_{[3,5,6,11,14,18]} \\
&-0.01252488483A_{[4,7,13,16,17]} -0.02415279342A_{[3,4,7,9,16,18]} -0.003654630318A_{[4,5,9,10,14,15]} \\
&-0.001177292796A_{[4,7,9,10,11,16]} -0.02590002807A_{[1,5,10,11,13,17]} -0.01623352299A_{[4,9,13,14,17]} \\
&+0.01747439160A_{[3,4,9,10,14,17]} +0.03117037182A_{[2,5,7,12,15,16]} -0.001376425703A_{[3,4,10,11,12,17]} \\
&+0.007111777720A_{[2,7,9,12,13,14]} +0.01013672232A_{[3,5,9,10,12,18]} -0.04900121769A_{[1,4,9,12,14,17]} \\
&-0.03794262480A_{[3,5,6,10,18,17]} -0.008770889032A_{[2,4,10,11,12,18]} -0.01077861533A_{[2,5,9,10,12,19]} \\
&+0.002833647662A_{[3,5,8,11,14,18]} -0.002458972005A_{[3,7,8,11,12,16]} +0.009116994935A_{[3,5,6,10,14,19]} \\
&-0.005716260912A_{[4,6,7,11,12,17]} -0.03998984547A_{[1,3,11,13,14,15]} -0.008126738660A_{[3,5,8,10,15,16]} \\
&-0.006832064016A_{[3,4,9,10,15,16]} -0.002167785349A_{[4,7,8,9,13,16]} +0.04092172735A_{[6,7,11,15,18]} \\
&+0.05534789444A_{[2,3,8,10,15,19]} -0.008496856599A_{[4,6,7,8,14,18]} -0.003578485658A_{[2,6,9,12,13,15]} \\
&+0.03119029441A_{[3,6,7,8,14,19]} -0.03998984547A_{[4,5,6,8,16,18]} +0.006066462578A_{[1,6,8,11,15,16]} \\
&+0.005701584212A_{[3,6,7,11,13,17]} -0.002909958299A_{[3,6,7,12,13,16]} +0.01103774590A_{[5,6,7,8,13,18]} \\
&-0.01174021387A_{[2,4,8,11,14,18]} -0.09886368390A_{[2,3,7,14,15,16]} -0.01617884840A_{[2,4,9,12,13,17]} \\
&+0.02135558783A_{[4,5,7,9,13,19]} +0.09194896357A_{[2,3,8,11,16,17]} +0.0001444586020A_{[6,7,9,10,11,14]} \\
&-0.002422229605A_{[5,6,7,9,13,17]} -0.01424171256A_{[3,5,7,11,15,16]} -0.01515667029A_{[5,8,13,14,17]} \\
&-0.03760395168A_{[1,4,8,12,14,18]} +0.000002457832052A_{[3,7,9,11,12,15]} +0.04535523391A_{[6,10,11,13,17]} \\
&-0.02507756118A_{[5,6,13,14,19]} +0.04116047976A_{[3,4,7,10,15,18]} +0.01663935319A_{[9,10,11,12,15]} \\
&-0.04558637237A_{[2,5,6,11,16,17]} -0.03872017786A_{[2,3,8,11,15,18]} -0.001768433971A_{[3,6,9,12,13,14]} \\
&+0.01858275683A_{[2,4,7,11,15,18]} +0.008597213647A_{[3,7,8,9,12,18]} +0.03138310287A_{[1,3,11,12,14,16]} \\
&+0.003207283315A_{[3,7,8,10,11,18]} +0.04816596401A_{[7,8,11,14,17]} -0.05577822177A_{[2,4,7,11,16,17]} \\
&+0.01763998130A_{[2,4,9,10,15,17]} +0.005116889513A_{[1,4,7,13,14,18]} +0.001242361655A_{[2,4,5,13,15,18]} \\
&-0.009236436987A_{[1,8,9,10,14,15]} +0.03487772617A_{[1,7,8,9,14,18]} -0.02386609981A_{[1,6,9,10,15,16]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0.0002333429443A_{[4,6,8,10,13,16]}+0.02554668755A_{[8,9,10,13,17]}+0.001993092609A_{[2,7,8,11,14,15]} \\
&-0.000005074788095A_{[1,4,8,10,15,19]}-0.02090942112A_{[1,4,10,13,14,15]}-0.007797258114A_{[4,5,6,12,14,16]} \\
&+0.04357792380A_{[4,5,6,8,15,19]}+0.03421769903A_{[3,5,6,9,16,18]}+0.004286484426A_{[3,4,7,8,16,19]} \\
&+0.01115017238A_{[2,5,6,9,16,19]}+0.03218918928A_{[1,4,10,12,13,17]}+0.002022555645A_{[3,6,9,11,12,16]} \\
&+0.006427969692A_{[2,5,10,12,13,15]}+0.001963781252A_{[2,8,9,10,11,17]}-0.002976578624A_{[3,7,8,12,13,14]} \\
&+0.06292977358A_{[3,4,5,11,16,18]}-0.008012063049A_{[4,5,7,9,14,18]}-0.006625812061A_{[4,6,7,9,13,18]} \\
&+0.06658304875A_{[2,3,9,12,14,17]}+0.04983326239A_{[1,6,7,8,16,19]}-0.08164462662A_{[1,6,7,8,17,18]} \\
&-0.03384686308A_{[5,10,11,14,17]}+0.004619082349A_{[3,5,8,9,15,17]}+0.04116047976A_{[1,4,9,12,15,16]} \\
&-0.07305344983A_{[1,6,8,9,15,18]}+0.1026545619A_{[7,8,9,15,18]}-0.02988400245A_{[3,4,6,12,15,17]} \\
&+0.02325188746A_{[1,5,9,10,13,19]}+0.01897147843A_{[4,5,6,11,15,16]}+0.04588095941A_{[2,3,10,11,13,18]} \\
&+0.02420457988A_{[6,9,12,13,17]}+0.006427969692A_{[4,6,7,9,14,17]}-0.003805029273A_{[4,6,7,9,15,16]} \\
&-0.08164462662A_{[1,2,11,12,13,18]}-0.0009425567995A_{[4,7,9,10,13,14]}+0.01780033858A_{[1,5,9,11,15,16]} \\
&+0.03148456593A_{[1,5,7,9,17,18]}-0.03265150154A_{[2,5,7,9,16,18]}-0.02296678629A_{[3,4,8,10,15,17]} \\
&+0.04237966419A_{[2,5,7,11,14,18]}+0.01780033858A_{[3,4,8,10,14,18]}-0.04024870828A_{[2,3,8,9,16,19]} \\
&+0.01462868945A_{[4,6,13,16,18]}+0.01747439160A_{[2,5,9,10,15,16]}+0.01164190797A_{[1,5,6,10,16,19]} \\
&-0.005012424721A_{[2,5,8,10,15,17]}+0.001287975183A_{[1,5,9,12,13,17]}-0.006090615821A_{[6,7,10,16,18]} \\
&-0.003710816663A_{[4,5,7,9,15,17]}+0.005071930477A_{[1,5,9,11,14,17]}-0.02198226837A_{[1,5,8,10,16,17]} \\
&-0.02918608725A_{[5,8,12,13,19]}-0.02271343159A_{[1,5,9,12,14,16]}-0.04255799361A_{[2,3,9,10,16,17]} \\
&+0.003776542721A_{[3,5,7,10,13,19]}-0.03872017786A_{[1,4,8,11,16,17]}+0.0003644955399A_{[4,8,9,11,12,13]} \\
&-0.03689805690A_{[1,7,8,11,12,18]}+0.01255161005A_{[1,6,8,10,14,18]}-0.05962573027A_{[2,3,7,12,16,17]} \\
&-0.01322207845A_{[7,10,11,12,17]}+0.03633000599A_{[1,4,10,11,14,17]}-0.03438824671A_{[6,8,11,15,17]} \\
&+0.07100615809A_{[1,5,7,11,16,17]}-0.02938530902A_{[1,6,8,11,14,17]}+0.001839395219A_{[2,6,8,12,14,15]} \\
&-0.001376425703A_{[2,7,8,9,15,16]}-0.07345916178A_{[2,3,9,12,13,18]}+0.005864902675A_{[3,6,8,11,12,17]} \\
&-0.0003000127638A_{[1,2,8,13,16,17]}-0.00001806697883A_{[4,6,9,11,13,14]}+0.01903756156A_{[1,6,9,10,14,17]} \\
&-0.004596279244A_{[5,6,7,8,14,17]}+0.007125994315A_{[1,6,9,11,13,17]}-0.01188518839A_{[5,9,10,14,19]} \\
&+0.01878206539A_{[1,6,8,12,14,16]}-0.0004688699888A_{[5,7,9,11,12,13]}-0.004005796384A_{[2,3,10,12,13,17]} \\
&-0.01479444140A_{[3,4,7,13,14,16]}+0.02393493719A_{[2,4,9,12,14,16]}-0.009263362772A_{[2,3,9,12,15,16]} \\
&-0.004291900945A_{[3,6,8,10,11,19]}+0.02372111673A_{[5,9,12,14,17]}+0.006496466410A_{[1,6,7,13,14,16]} \\
&+0.07496789274A_{[1,5,6,13,15,17]}-0.005618462557A_{[1,3,10,11,14,18]}+0.006122577628A_{[4,10,11,14,18]} \\
&-0.04318553773A_{[6,7,11,16,17]}+0.03138310287A_{[3,5,7,8,16,18]}+0.05180120528A_{[3,4,5,12,14,19]}
\end{aligned}$$

+0.007111777720A_[5,6,7,10,12,17] +0.01111015748A_[1,6,10,11,14,15] -0.001539404766A_[5,6,8,10,11,17]
 +0.009879210847A_[2,6,8,10,14,17] +0.007089523051A_[1,7,8,10,15,16] -0.02893615980A_[2,4,8,9,15,19]
 +0.001817052630A_[5,6,7,8,15,16] +0.001717394738A_[5,6,7,9,14,16] +0.00007095810998A_[6,7,8,9,10,17]
 +0.01638686116A_[1,4,7,12,16,17] -0.02333620982A_[2,4,8,10,16,17] -0.009263362772A_[3,4,7,10,16,17]
 -0.02248049278A_[3,5,7,9,16,17] -0.002986723139A_[1,3,7,11,16,19] +0.001501608067A_[2,6,8,10,15,16]
 -0.02277148255A_[4,5,6,10,15,17] +0.02558126446A_[2,3,4,14,15,19] +0.01829155568A_[2,3,4,13,17,18]
 +0.007255018979A_[3,8,11,16,19] -0.05806520556A_[1,2,10,12,15,17] -0.01077861533A_[7,9,10,14,17]
 -0.005594252590A_[3,7,8,9,13,17] +0.03667934543A_[4,9,10,15,19] -0.05515727598A_[3,4,7,10,14,19]
 -0.04705488518A_[6,9,11,13,18] -0.09135050343A_[5,10,11,12,19] +0.01638686116A_[2,3,7,12,15,18]
 +0.01716218097A_[4,7,12,16,18] -0.03438824671A_[2,4,8,11,13,19] -0.0004924004007A_[4,6,7,12,13,15]
 -0.004700271216A_[3,7,8,10,14,15] -0.001171393596A_[4,5,7,12,13,16] +0.006965003347A_[1,4,7,12,14,19]
 +0.07192274239A_[1,4,9,10,16,17] -0.06224405408A_[2,3,7,13,14,18] -0.01921716958A_[3,10,12,14,18]
 +0.04320756505A_[2,4,6,11,15,19] +0.07100615809A_[2,3,8,12,14,18] -0.03365927579A_[1,3,9,10,15,19]
 +0.01851722099A_[4,5,8,10,11,19] -0.05613655919A_[1,6,7,9,15,19] +0.006815922597A_[3,6,8,10,13,17]
 -0.003683455126A_[3,5,9,10,13,17] -0.02352426209A_[2,3,7,11,15,19] -0.01024018601A_[1,4,7,11,16,18]
 -0.03728787302A_[3,5,6,9,15,19] -0.004976448622A_[3,5,9,11,12,17] +0.07187324275A_[2,4,6,12,16,17]
 -0.03419894350A_[3,5,7,8,15,19] +0.02664760208A_[2,6,7,8,15,19] +0.001963912725A_[5,6,8,9,13,16]
 -0.03305891375A_[6,8,9,16,18] +0.001388670868A_[3,5,8,10,14,17] +0.02651344505A_[1,7,8,11,13,17]
 +0.01157155527A_[2,6,7,13,14,15] +0.003679481742A_[1,8,9,11,13,15] +0.001264606975A_[2,5,7,13,14,16]
 +0.04698258949A_[1,4,9,11,14,18] -0.03848516005A_[1,4,8,13,15,16] -0.005097983144A_[5,10,13,14,15]
 +0.00007095810998A_[2,9,10,11,12,13] -0.06649604591A_[1,4,9,10,15,18] -0.005332367382A_[1,2,8,12,15,19]
 -0.009099646923A_[1,8,9,12,13,14] -0.03745546979A_[1,3,9,13,15,16] -0.07345916178A_[1,6,7,10,16,17]
 +0.001789004792A_[3,8,9,10,13,14] -0.001274072718A_[4,5,10,11,13,14] -0.0003304279286A_[6,7,8,9,12,15]
 -0.01815725680A_[2,3,7,10,17,18] -0.03794262480A_[2,3,9,13,14,16] -0.03762330922A_[3,6,7,9,13,19]
 +0.03923288244A_[2,5,6,13,14,17] +0.005071930477A_[2,5,8,10,14,18] +0.04081615193A_[4,9,13,15,16]
 -0.02550887094A_[2,3,11,12,14,15] +0.001030991868A_[4,8,9,10,11,15] -0.01558924036A_[2,4,8,12,15,16]
 -0.03848516005A_[3,4,6,11,15,18] +0.02994629570A_[2,4,7,12,15,17] -0.001274072718A_[5,6,8,9,14,15]
 -0.002823379752A_[8,10,11,13,15] +0.02797327022A_[4,5,6,10,14,18] +0.02158734342A_[1,3,8,12,16,17]
 -0.05577822177A_[2,3,8,12,15,17] -0.0009425567995A_[5,6,9,10,12,15] +0.01115017238A_[3,10,13,14,17]
 +0.005381697937A_[4,5,9,10,12,17] -0.002844482249A_[4,6,8,9,14,16] +0.01380982169A_[4,5,13,17,18]

$$\begin{aligned}
& -0.007249032663A_{[1,8,10,11,12,15]} - 0.03859314506A_{[2,5,6,13,15,16]} + 0.02797327022A_{[1,5,9,13,14,15]} \\
& - 0.0001604041920A_{[2,6,9,10,13,17]} + 0.01557837958A_{[1,8,9,10,11,18]} + 0.01903756156A_{[2,5,9,10,13,18]} \\
& + 0.01405228646A_{[5,8,12,15,17]} + 0.01405228646A_{[2,4,7,11,14,19]} + 0.001963912725A_{[3,6,10,11,13,14]} \\
& + 0.003172248119A_{[1,5,7,11,14,19]} + 0.07566892555A_{[5,10,11,13,18]} + 0.02655364133A_{[2,4,8,9,16,18]} \\
& - 0.001267272222A_{[5,6,7,12,13,14]} + 0.05310999646A_{[1,5,7,13,15,16]} - 0.04548700035A_{[6,8,12,14,17]} \\
& + 0.02470964874A_{[2,4,7,13,14,17]} + 0.1063470454A_{[6,9,11,12,19]} + 0.01489690236A_{[2,5,6,10,16,18]} \\
& + 0.001823763559A_{[5,9,12,13,18]} + 0.03433789078A_{[1,5,6,11,16,18]} + 0.03544113980A_{[3,10,12,15,17]} \\
& - 0.01907359030A_{[1,2,9,13,14,18]} + 0.002552574160A_{[4,5,7,11,12,18]} + 0.01851722099A_{[8,9,11,14,15]} \\
& + 0.001632375467A_{[4,6,8,10,14,15]} + 0.07099030049A_{[6,8,11,14,18]} + 0.009956676873A_{[1,7,9,12,13,15]} \\
& - 0.01508466593A_{[5,6,8,9,10,19]} - 0.02988400245A_{[2,4,7,13,15,16]} - 0.005123064952A_{[2,6,9,10,12,18]} \\
& + 0.006637094711A_{[6,7,10,15,19]} - 0.02198226837A_{[2,3,9,11,14,18]} - 0.002167785349A_{[3,6,10,11,12,15]} \\
& - 0.02373049909A_{[1,6,8,12,13,17]} + 0.000002457832052A_{[4,7,8,10,12,16]} - 0.05533880330A_{[6,8,10,15,18]} \\
& + 0.003418696663A_{[4,5,6,13,14,15]} + 0.02153004672A_{[7,8,13,14,15]} + 0.03038967620A_{[3,4,8,11,15,16]} \\
& + 0.04237966419A_{[1,5,8,12,14,17]} + 0.01508057862A_{[3,10,11,15,18]} - 0.01596610374A_{[1,5,8,13,14,16]} \\
& + 0.01971116816A_{[7,10,11,13,16]} + 0.05744321807A_{[7,9,11,12,18]} + 0.001955340229A_{[4,7,8,10,11,17]} \\
& + 0.01657115413A_{[3,8,13,15,18]} - 0.01337854333A_{[3,7,8,9,11,19]} + 0.006965003347A_{[5,7,12,15,18]} \\
& - 0.002466549348A_{[5,6,8,9,12,17]} + 0.01106042876A_{[6,11,12,13,15]} - 0.0004039631316A_{[5,7,8,9,13,15]} \\
& + 0.006318292874A_{[1,4,6,13,15,18]} + 0.003873752621A_{[4,6,7,11,13,16]} + 0.0006042155738A_{[6,8,13,14,16]} \\
& - 0.0005322043046A_{[5,7,9,10,11,15]} + 0.002476459726A_{[4,7,8,9,12,17]} + 0.1420820248A_{[8,9,10,11,19]} \\
& - 0.0003755660352A_{[5,7,8,10,13,14]} + 0.06449251655A_{[2,3,8,13,15,16]} + 0.002046801936A_{[5,6,13,15,18]} \\
& - 0.06428554553A_{[7,8,10,14,18]} + 0.03487772617A_{[1,5,10,11,12,18]} - 0.02333620982A_{[2,3,9,11,15,17]} \\
& - 0.01939801589A_{[1,4,7,10,16,19]} + 0.02157561582A_{[4,8,10,17,18]} + 0.04698258949A_{[1,5,8,10,15,18]} \\
& - 0.01979914294A_{[1,3,8,10,17,18]} - 0.05189992110A_{[1,5,7,13,14,17]} - 0.03563137957A_{[7,8,11,13,18]} \\
& + 0.03283093630A_{[1,4,8,13,14,17]} - 0.006439147965A_{[3,4,7,12,15,16]} - 0.001802919123A_{[2,7,9,11,12,16]} \\
& - 0.00001806697883A_{[5,6,8,10,13,15]} - 0.02296678629A_{[2,4,9,11,15,16]} - 0.02823737550A_{[1,4,8,11,14,19]} \\
& + 0.009517735814A_{[4,5,7,10,14,17]} + 0.006496466410A_{[3,5,6,12,13,18]} + 0.001839395219A_{[4,5,7,11,13,17]} \\
& - 0.0001255845690A_{[5,6,7,10,14,15]} + 0.0004060015354A_{[4,7,8,10,13,15]} - 0.01558924036A_{[3,4,7,11,15,17]} \\
& - 0.07422180689A_{[6,7,12,14,18]} - 0.02014840667A_{[2,3,5,12,17,18]} - 0.01001374101A_{[1,7,8,10,13,18]} \\
& + 0.001830923470A_{[4,7,8,9,14,15]} + 0.0004139048003A_{[4,7,9,11,12,14]} + 0.01111015748A_{[4,5,8,9,13,18]} \\
& + 0.03442930536A_{[2,4,8,11,15,17]} - 0.001730825282A_{[3,7,9,10,11,17]} + 0.1026545619A_{[1,4,10,11,12,19]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0.01806932364A_{[2,4,8,13,14,16]} + 0.02502036552A_{[2,4,5,11,17,18]} - 0.02823737550A_{[5,8,11,15,18]} \\
&- 0.02714945052A_{[1,4,6,11,17,18]} - 0.0003000127638A_{[2,3,6,11,17,18]} + 0.008809635256A_{[2,3,5,14,15,18]} \\
&- 0.00003734960700A_{[5,7,8,9,11,17]} - 0.006027100312A_{[1,2,6,13,16,19]} - 0.001501737332A_{[4,5,6,12,13,15]} \\
&+ 0.001811908967A_{[3,7,9,10,12,16]} + 0.01858275683A_{[1,4,8,12,15,17]} - 0.00004645298717A_{[5,7,8,9,10,18]} \\
&- 0.04900121769A_{[2,5,7,10,15,18]} - 0.01116457912A_{[2,3,4,13,16,19]} + 0.1063470454A_{[7,8,10,13,19]} \\
&- 0.05515727598A_{[5,9,12,15,16]} + 0.04983326239A_{[3,11,12,13,18]} + 0.003120301295A_{[4,5,7,12,14,15]} \\
&+ 0.0006042155738A_{[3,5,6,11,13,19]} - 0.03760395168A_{[1,5,7,11,15,18]} - 0.002986723139A_{[3,8,12,16,18]} \\
&+ 0.002377193517A_{[2,4,10,11,13,17]} + 0.03178085656A_{[1,4,7,10,17,18]} + 0.005876073928A_{[2,7,9,10,12,17]} \\
&- 0.001091527698A_{[3,6,8,9,14,17]} - 0.02782874665A_{[2,3,10,11,14,17]} + 0.03806074770A_{[1,4,8,11,15,18]} \\
&- 0.01316906415A_{[3,9,11,15,19]} + 0.005785327562A_{[3,8,9,10,11,18]} + 0.03543340190A_{[1,4,11,12,14,15]} \\
&- 0.005915433425A_{[1,6,10,11,13,16]} + 0.04411502107A_{[2,3,10,11,15,16]} + 0.004593167687A_{[2,5,10,11,12,17]} \\
&+ 0.01485435216A_{[8,10,12,13,14]} + 0.01013672232A_{[1,7,9,10,14,16]} - 0.01484321647A_{[3,6,7,10,14,17]} \\
&- 0.009421035379A_{[1,5,8,12,15,16]} + 0.03006060928A_{[1,6,7,11,13,19]} - 0.0008853152945A_{[2,7,8,10,13,17]} \\
&+ 0.04320756505A_{[4,8,13,15,17]} - 0.005332367382A_{[4,7,11,17,18]} - 0.01569955367A_{[6,9,13,14,15]} \\
&- 0.04152831899A_{[1,5,7,12,15,17]} - 0.02918608725A_{[6,7,11,14,19]} + 0.004893315906A_{[1,3,7,11,17,18]} \\
&+ 0.01039247648A_{[7,8,12,13,17]} + 0.004619082349A_{[2,4,10,11,14,16]} + 0.003837894953A_{[2,6,10,11,13,15]} \\
&+ 0.07497982742A_{[1,5,7,12,14,18]} - 0.07422180689A_{[3,5,7,12,13,19]} + 0.04092172735A_{[1,4,8,12,13,19]} \\
&- 0.04558029998A_{[2,6,7,9,14,19]} + 0.07566892555A_{[1,6,8,9,14,19]} - 0.01515667029A_{[2,5,6,11,14,19]} \\
&+ 0.05264462137A_{[1,6,9,10,12,19]} - 0.07013968647A_{[8,9,10,12,18]} - 0.05533880330A_{[1,4,9,11,13,19]} \\
&+ 0.002525385986A_{[4,6,7,9,12,19]} + 0.01106042876A_{[4,6,7,8,13,19]} - 0.05180120524A_{[3,4,6,12,13,19]} \\
&- 0.02596185681A_{[3,4,8,11,12,19]} + 0.02966583118A_{[2,4,7,12,13,19]} - 0.04318553773A_{[2,3,8,12,13,19]} \\
&+ 0.04535523391A_{[2,6,8,9,13,19]} - 0.03384686308A_{[2,5,8,9,14,19]} + 0.06594171441A_{[1,2,10,11,16,17]} \\
&+ 0.01537936015A_{[1,3,6,14,16,17]} - 0.006090615821A_{[1,3,9,12,13,19]} - 0.01280611673A_{[1,4,7,12,15,18]} \\
&- 0.01508466593A_{[7,11,12,13,14]} - 0.09886368390A_{[3,4,5,12,16,17]} + 0.01229794143A_{[3,7,14,16,17]} \\
&+ 0.009420535124A_{[3,4,6,11,14,19]} + 0.05802397674A_{[2,5,6,12,13,19]} - 0.03563137957A_{[1,6,8,11,12,19]} \\
&- 0.06428554553A_{[1,5,9,11,12,19]} + 0.05744321807A_{[1,7,8,10,12,19]} - 0.005097983144A_{[4,5,6,9,14,19]} \\
&+ 0.08026523026A_{[2,3,9,11,13,19]} + 0.000004468026294A_{[4,6,7,10,14,16]} - 0.07013968647A_{[1,7,9,10,11,19]} \\
&- 0.02582256895A_{[5,7,12,14,19]} + 0.02250912919A_{[2,7,8,10,11,19]} + 0.02027282143A_{[2,3,7,12,14,19]} \\
&+ 0.007172428073A_{[3,5,8,10,12,19]} - 0.01282218868A_{[3,5,8,9,13,19]} - 0.07647037888A_{[2,3,9,10,14,19]} \\
&+ 0.001830923470A_{[4,5,10,11,12,15]} - 0.02714925922A_{[1,5,8,11,14,18]} - 0.04485334142A_{[1,5,8,12,13,18]}
\end{aligned}$$

$-0.04152831899A_{[2,4,7,12,14,18]} + 0.01157155527A_{[4,5,6,12,13,17]} + 0.009420535124A_{[5,8,13,15,16]}$
 $-0.001390721829A_{[6,9,11,14,17]} - 0.0003885811092A_{[3,5,8,10,13,18]} + 0.04552684181A_{[1,3,9,12,15,17]}$
 $-0.004976448622A_{[2,7,8,10,14,16]} - 0.001802919123A_{[3,7,8,10,12,17]} + 0.002739836773A_{[1,5,10,11,14,16]}$
 $+ 0.02251664738A_{[3,6,7,9,14,18]} - 0.002740522052A_{[4,5,7,10,15,16]} - 0.004592800516A_{[4,5,7,11,14,16]}$
 $+ 0.007778762830A_{[5,10,11,15,16]} - 0.008852719715A_{[2,4,9,10,14,18]} - 0.0006488906693A_{[3,7,9,10,13,15]}$
 $- 0.05079071129A_{[2,3,8,10,16,18]} - 0.00004645298717A_{[1,9,10,11,12,14]} - 0.009427060878A_{[3,4,8,11,14,17]}$
 $+ 0.0007641493733A_{[5,7,9,10,12,14]} + 0.003097899261A_{[4,6,7,8,15,17]} + 0.04357792380A_{[4,11,13,14,15]}$
 $+ 0.004469763007A_{[3,4,8,12,13,17]} + 0.07250298125A_{[2,5,7,8,17,18]} - 0.01424171256A_{[3,4,8,12,14,15]}$
 $- 0.002483423062A_{[3,5,7,11,14,17]} - 0.01500531216A_{[3,5,7,12,13,17]} + 0.01314434526A_{[3,5,7,12,14,16]}$
 $- 0.007022787665A_{[3,4,7,8,17,16]} - 0.0008357450750A_{[1,3,8,12,14,19]} + 0.002739836773A_{[3,5,8,9,14,18]}$
 $- 0.02386609981A_{[3,4,9,10,13,18]} - 0.0002625891356A_{[5,7,8,10,11,16]} + 0.001789004792A_{[5,6,9,10,11,16]}$
 $- 0.02347497824A_{[1,3,5,15,16,17]} + 0.03388321254A_{[2,3,4,15,16,17]} - 0.01772321991A_{[1,3,5,14,15,19]}$
 $+ 0.01829155568A_{[1,2,6,15,16,17]} - 0.01342420610A_{[1,3,6,13,16,18]} + 0.01758697118A_{[1,2,7,13,16,18]}$
 $+ 0.03576735377A_{[1,2,10,12,13,19]} + 0.01007420333A_{[1,4,5,12,17,18]} + 0.01931343113A_{[4,5,14,15,19]}$
 $+ 0.01947399831A_{[1,2,8,11,17,18]} - 0.01594124474A_{[4,6,13,15,19]} + 0.008379634588A_{[1,4,5,13,15,19]}$
 $- 0.02183124597A_{[3,10,12,13,19]} - 0.01188630419A_{[1,2,8,11,16,19]} + 0.02092317657A_{[3,9,12,14,19]}$
 $+ 0.02502036552A_{[1,2,8,14,15,17]} + 0.01537936015A_{[2,3,5,13,16,18]} - 0.008429072393A_{[3,6,14,15,19]}$
 $+ 0.02157561582A_{[1,2,9,11,15,19]} + 0.004893315906A_{[1,2,8,12,16,18]} + 0.01462868945A_{[1,3,6,13,15,19]}$
 $- 0.01916495752A_{[1,2,7,13,15,19]} + 0.007615933994A_{[5,8,9,16,19]} - 0.01527162891A_{[3,8,14,15,17]}$
 $+ 0.02092317657A_{[5,7,10,16,19]} + 0.03602511607A_{[6,8,9,15,19]} - 0.01522150232A_{[2,4,5,13,14,19]}$
 $- 0.03427961280A_{[1,2,9,12,14,19]} + 0.03630330700A_{[4,7,13,14,19]} + 0.006637094711A_{[4,9,12,13,19]}$
 $+ 0.0009107320814A_{[4,8,12,14,19]} + 0.007735047314A_{[1,3,5,13,16,19]} - 0.01778000998A_{[4,7,13,15,18]}$
 $- 0.01073452333A_{[3,7,13,16,18]} - 0.01527162891A_{[2,4,5,11,16,19]} + 0.0001831181720A_{[2,3,6,11,16,19]}$
 $+ 0.0009107320814A_{[5,7,11,15,19]} - 0.008429072393A_{[4,5,13,16,19]} - 0.02304058450A_{[1,2,7,12,17,18]}$
 $+ 0.02912243733A_{[5,6,13,16,17]} + 0.01380982169A_{[1,2,6,14,15,19]} - 0.05337183866A_{[3,12,13,14,15]}$
 $- 0.01870205312A_{[4,7,12,15,19]} + 0.02558126446A_{[4,5,15,16,17]} - 0.01316906415A_{[4,8,10,16,19]}$
 $+ 0.01007420333A_{[1,2,7,14,15,18]} - 0.007689680077A_{[1,3,6,14,15,18]} + 0.04122127594A_{[5,6,11,17,18]}$
 $+ 0.007615933994A_{[3,10,11,14,19]} - 0.02022095202A_{[1,3,7,14,15,17]} - 0.01534764114A_{[2,3,6,13,15,18]}$
 $- 0.02014840667A_{[1,2,7,14,16,17]} - 0.001960855997A_{[3,9,10,16,19]} - 0.009429194344A_{[4,8,11,16,18]}$
 $+ 0.008652822160A_{[1,3,8,11,16,18]} - 0.03427961280A_{[5,7,10,17,18]} - 0.01761927050A_{[2,3,5,14,16,17]}$

+0.003678748788 $A_{[3,6,13,16,19]}$ -0.01344291740 $A_{[3,9,13,15,17]}$ -0.03419894350 $A_{[4,11,12,14,16]}$
 -0.03741884897 $A_{[4,8,13,14,18]}$ -0.01826795232 $A_{[1,2,10,13,14,17]}$ +0.01108260739 $A_{[3,9,12,16,17]}$
 +0.01169767560 $A_{[3,7,13,15,19]}$ -0.01916495752 $A_{[4,6,12,17,18]}$ +0.01406323406 $A_{[3,7,12,17,18]}$
 +0.01758697118 $A_{[1,3,6,12,17,18]}$ +0.02203527160 $A_{[4,7,14,15,17]}$ -0.007878328298 $A_{[2,3,6,13,16,17]}$
 +0.05534789444 $A_{[4,9,11,16,17]}$ +0.002046801936 $A_{[1,4,6,13,14,19]}$ +0.009874536222 $A_{[1,2,6,13,17,18]}$
 +0.09232331895 $A_{[6,7,12,13,19]}$ -0.008583747172 $A_{[3,7,12,16,19]}$ +0.01208476205 $A_{[3,9,11,16,18]}$
 +0.02664760208 $A_{[4,11,12,13,17]}$ +0.01626394201 $A_{[1,3,5,14,16,18]}$ -0.006148970714 $A_{[1,4,5,12,16,19]}$
 +0.08744207443 $A_{[1,2,12,13,14,15]}$ +0.01767664903 $A_{[2,4,5,13,16,17]}$ +0.02296084063 $A_{[6,8,10,14,19]}$
 -0.02415279342 $A_{[1,3,10,12,15,16]}$ +0.02631989643 $A_{[4,10,12,15,16]}$ +0.02655364133 $A_{[1,3,10,11,15,17]}$
 -0.02893615980 $A_{[4,10,11,15,17]}$ +0.04122127594 $A_{[1,2,8,13,14,19]}$ -0.0008357450750 $A_{[5,7,11,16,18]}$
 -0.04961172567 $A_{[4,9,12,15,17]}$ -0.03331419927 $A_{[5,6,12,16,18]}$ +0.03558114887 $A_{[4,10,12,14,17]}$
 -0.06312538229 $A_{[3,4,5,10,17,18]}$ -0.06857613090 $A_{[4,8,14,15,16]}$ +0.007735047314 $A_{[3,6,14,16,18]}$
 +0.01027522632 $A_{[4,8,11,15,19]}$ +0.02202428498 $A_{[2,4,6,10,17,18]}$ -0.009429194344 $A_{[1,3,8,11,15,19]}$
 -0.01826795232 $A_{[2,5,6,9,17,18]}$ -0.02410004451 $A_{[6,9,10,13,19]}$ -0.02516014519 $A_{[5,6,11,16,19]}$
 -0.02470735714 $A_{[1,2,10,11,15,18]}$ +0.02203527160 $A_{[2,4,5,12,15,19]}$ -0.01522150232 $A_{[5,6,14,15,17]}$
 +0.06887543878 $A_{[3,4,6,9,17,18]}$ +0.04552684181 $A_{[2,4,7,10,16,18]}$ -0.01252488483 $A_{[2,3,6,12,15,19]}$
 +0.04610634773 $A_{[5,9,10,15,18]}$ +0.0001831181720 $A_{[3,8,13,16,17]}$ -0.01778000998 $A_{[1,4,6,12,15,19]}$
 +0.01716218097 $A_{[1,3,7,12,15,19]}$ -0.01865991279 $A_{[7,8,12,14,16]}$ +0.003254706084 $A_{[3,8,12,15,19]}$
 -0.1108784031 $A_{[7,9,10,12,19]}$ -0.04534150658 $A_{[2,4,6,12,14,19]}$ -0.07647037888 $A_{[5,9,10,16,17]}$
 -0.08431242623 $A_{[7,8,9,16,17]}$ -0.03964998098 $A_{[2,4,6,11,16,18]}$ -0.07139615484 $A_{[1,2,11,13,14,16]}$
 -0.006756936198 $A_{[7,9,12,14,15]}$ -0.006027100312 $A_{[3,6,13,17,18]}$ -0.01907359030 $A_{[1,5,6,10,17,18]}$
 +0.03558114887 $A_{[2,5,7,9,15,19]}$ +0.05151443970 $A_{[1,6,7,9,16,18]}$ -0.02445351676 $A_{[2,6,7,8,16,18]}$
 -0.01623352299 $A_{[2,5,6,10,15,19]}$ +0.01406323406 $A_{[1,2,7,12,16,19]}$ -0.01073452333 $A_{[1,3,6,12,16,19]}$
 +0.02325188746 $A_{[6,9,10,14,18]}$ +0.05264462137 $A_{[7,9,10,13,18]}$ -0.01625802959 $A_{[7,10,11,14,15]}$
 -0.007689680077 $A_{[1,4,5,13,16,18]}$ -0.004291900945 $A_{[8,9,11,13,16]}$ -0.01116457912 $A_{[3,6,15,16,17]}$
 +0.009116994935 $A_{[5,9,13,14,16]}$ +0.01631605616 $A_{[1,3,7,13,15,18]}$ +0.02202428498 $A_{[1,2,9,13,15,17]}$
 -0.02516014519 $A_{[3,8,13,14,19]}$ +0.01590806045 $A_{[7,9,10,15,16]}$ -0.06312538229 $A_{[1,2,9,14,15,16]}$
 +0.03630330700 $A_{[5,6,12,15,19]}$ +0.004286484426 $A_{[3,11,12,15,18]}$ +0.04360579713 $A_{[6,8,12,15,16]}$
 -0.02470735714 $A_{[1,4,8,9,17,18]}$ -0.04472966634 $A_{[7,9,11,13,17]}$ -0.03331419927 $A_{[1,3,7,13,14,19]}$
 +0.07250298125 $A_{[1,2,11,12,14,17]}$ +0.02912243733 $A_{[2,3,6,13,14,19]}$ +0.01229794143 $A_{[2,3,5,12,16,19]}$

$$\begin{aligned}
&+0.01149362257A_{[2,3,6,12,16,18]} - 0.02714945052A_{[1,2,8,13,15,18]} + 0.02250912919A_{[8,9,11,12,17]} \\
&- 0.007022787665A_{[1,2,11,12,15,16]} + 0.01164190797A_{[3,9,13,14,18]} + 0.08744207443A_{[4,5,6,7,17,18]} \\
&- 0.05180120524A_{[6,7,13,15,16]} - 0.03728787302A_{[4,10,13,14,16]} + 0.03421769903A_{[1,3,10,13,14,16]} \\
&+ 0.03852970942A_{[3,4,5,10,16,19]} + 0.02856957429A_{[5,10,12,14,16]} - 0.05190055187A_{[6,10,11,12,18]} \\
&- 0.01337854333A_{[8,10,11,12,16]} - 0.01675926918A_{[4,6,14,16,17]} + 0.008809635256A_{[1,4,5,14,16,17]} \\
&+ 0.07187324275A_{[2,3,7,13,15,17]} - 0.1218038744A_{[3,4,5,14,15,16]} - 0.01574909738A_{[1,3,7,12,16,18]} \\
&+ 0.02372111673A_{[2,5,7,10,14,19]} - 0.01799791587A_{[8,9,10,14,16]} - 0.04177908119A_{[5,8,10,15,19]} \\
&- 0.08656546612A_{[2,4,6,13,15,17]} - 0.003832742495A_{[1,6,7,12,13,18]} - 0.01772321991A_{[4,5,14,16,18]} \\
&- 0.01865991279A_{[3,5,7,11,12,19]} - 0.01001374101A_{[1,6,9,11,12,18]} + 0.005116889513A_{[1,5,6,12,15,18]} \\
&- 0.05434590574A_{[5,9,11,14,18]} - 0.08431242623A_{[2,3,10,11,12,19]} + 0.03178085656A_{[1,2,9,12,15,18]} \\
&+ 0.05180120528A_{[5,7,14,15,16]} - 0.01508466593A_{[9,10,11,13,14]} - 0.06224405408A_{[1,5,6,12,16,17]} \\
&- 0.01222079476A_{[6,9,10,15,17]} + 0.003974987235A_{[6,9,11,15,16]} - 0.05190055187A_{[1,7,8,9,13,19]} \\
&- 0.04705488518A_{[1,6,8,10,13,19]} + 0.07099030049A_{[1,5,8,11,13,19]} - 0.01222079476A_{[2,4,9,10,13,19]} \\
&+ 0.003172248119A_{[5,8,12,14,18]} + 0.007778762830A_{[3,4,8,9,14,19]} - 0.01939801589A_{[3,9,12,15,18]} \\
&+ 0.001823763559A_{[1,6,7,10,14,19]} + 0.01455711908A_{[3,6,7,10,12,19]} - 0.03424448835A_{[4,5,7,8,14,19]} \\
&+ 0.009680345716A_{[2,4,9,11,12,19]} - 0.01508466593A_{[5,6,7,8,12,19]} + 0.01971116816A_{[3,6,8,9,12,19]} \\
&- 0.04472966634A_{[2,6,8,10,12,19]} - 0.01625802959A_{[4,5,8,9,12,19]} - 0.01799791587A_{[3,5,9,10,11,19]} \\
&+ 0.02856957429A_{[3,5,7,9,14,19]} + 0.03576735377A_{[6,7,9,17,18]} - 0.01095375870A_{[2,3,8,11,14,19]} \\
&- 0.003094237033A_{[2,7,9,11,13,15]} + 0.1021078641A_{[3,4,5,13,15,17]} + 0.04881654493A_{[5,9,11,15,17]} \\
&+ 0.04360579713A_{[3,4,7,11,13,19]} + 0.003974987235A_{[3,4,8,10,13,19]} + 0.01485435216A_{[5,6,7,9,11,19]} \\
&+ 0.02554668755A_{[2,6,9,10,11,19]} - 0.001390721829A_{[2,5,8,10,13,19]} + 0.01039247648A_{[2,6,7,11,12,19]} \\
&+ 0.01512565572A_{[1,4,7,14,15,16]} - 0.03305891375A_{[1,3,10,11,13,19]} + 0.02420457988A_{[2,6,7,10,13,19]} \\
&- 0.04548700035A_{[2,5,7,11,13,19]} + 0.01590806045A_{[3,4,9,10,12,19]} - 0.07839554575A_{[6,8,11,13,19]} \\
&+ 0.02027282143A_{[5,7,12,16,17]} - 0.01322207845A_{[2,7,8,9,12,19]} + 0.003776542721A_{[6,9,12,14,16]} \\
&+ 0.04816596401A_{[2,5,8,11,12,19]} - 0.002641260619A_{[3,6,8,9,15,16]} + 0.000004656944941A_{[1,4,8,10,16,18]} \\
&- 0.05434590574A_{[1,5,8,10,14,19]} + 0.01115898400A_{[4,8,12,15,18]} - 0.005908475072A_{[1,4,7,13,15,17]} \\
&+ 0.003254706084A_{[4,7,11,16,19]} + 0.01657115413A_{[1,4,6,11,16,19]} + 0.005878941060A_{[3,5,6,13,14,16]} \\
&- 0.003094237033A_{[4,6,8,10,12,17]} - 0.01188630419A_{[3,8,11,17,18]} + 0.04357792380A_{[3,11,13,14,16]} \\
&- 0.005908475072A_{[2,4,6,12,15,18]} - 0.06492409958A_{[1,5,6,13,14,18]} - 0.03741884897A_{[1,5,6,11,15,19]} \\
&+ 0.003212580273A_{[1,2,9,10,16,19]} + 0.05090740844A_{[5,8,11,14,19]} + 0.06292977358A_{[1,3,8,14,15,16]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.000004468026294A_{[3,5,9,12,13,15]} - 0.002641260619A_{[3,4,10,11,13,16]} - 0.04024870828A_{[3,10,11,16,17]} \\
& - 0.05079071129A_{[1,3,9,11,16,17]} + 0.003097899261A_{[2,4,11,12,13,15]} - 0.002300102970A_{[4,5,8,10,12,18]} \\
& + 0.003207283315A_{[1,8,9,11,12,16]} - 0.02938530902A_{[2,5,8,11,13,18]} - 0.002097178277A_{[2,7,9,10,13,16]} \\
& - 0.008496856599A_{[1,5,11,12,13,15]} - 0.001730825282A_{[2,8,9,10,12,16]} + 0.009956676873A_{[4,6,7,10,12,18]} \\
& - 0.03325431936A_{[3,4,7,12,13,18]} + 0.01103774590A_{[1,6,11,12,13,14]} - 0.02347497824A_{[2,3,4,14,16,18]} \\
& - 0.01247761149A_{[5,8,9,17,18]} - 0.04177908119A_{[4,9,11,14,19]} + 0.03833911428A_{[1,3,9,11,14,19]} \\
& + 0.03852970942A_{[3,9,14,15,18]} + 0.007172428073A_{[7,9,11,14,16]} - 0.03424448835A_{[5,11,12,14,15]} \\
& - 0.03762330922A_{[6,10,12,13,16]} + 0.06658304875A_{[2,5,7,10,16,17]} + 0.01255161005A_{[1,5,9,11,13,18]} \\
& + 0.005785327562A_{[1,8,9,10,13,16]} + 0.02651344505A_{[2,6,8,11,12,18]} + 0.007125994315A_{[2,6,8,10,13,18]} \\
& + 0.007891112247A_{[3,4,9,12,13,16]} + 0.03354607969A_{[2,4,8,12,13,18]} - 0.01247761149A_{[1,2,10,11,14,19]} \\
& + 0.01848712506A_{[2,5,7,12,13,18]} + 0.006652914924A_{[5,6,8,9,11,18]} + 0.009517735814A_{[2,5,9,12,14,15]} \\
& - 0.01484321647A_{[2,5,9,12,13,16]} - 0.001760354618A_{[3,5,8,11,12,18]} - 0.002740522052A_{[3,4,9,12,14,15]} \\
& + 0.001555345554A_{[4,6,8,12,13,14]} + 0.0009160660971A_{[4,7,8,11,13,14]} - 0.0001074720148A_{[5,6,8,11,13,14]} \\
& - 0.0005322043046A_{[4,8,9,10,12,14]} - 0.0003324438876A_{[5,7,8,11,12,14]} + 0.05802397674A_{[6,7,13,14,17]} \\
& + 0.0001444586020A_{[5,8,9,10,12,13]} - 0.007680416405A_{[1,4,10,12,14,16]} - 0.05189992110A_{[2,5,6,12,14,18]} \\
& + 0.02251664738A_{[1,5,10,12,13,16]} - 0.008012063049A_{[1,5,10,12,14,15]} - 0.03259192200A_{[1,6,9,10,13,18]} \\
& + 0.04694779352A_{[1,6,8,11,13,18]} + 0.01423040598A_{[2,6,7,11,14,17]} - 0.01500531216A_{[2,6,7,12,14,16]} \\
& + 0.002552574160A_{[1,7,8,12,14,15]} - 0.003163502280A_{[2,4,10,12,13,16]} - 0.003710816663A_{[2,4,10,12,14,15]} \\
& - 0.02996849837A_{[2,5,7,12,14,17]} + 0.002319953146A_{[3,6,7,11,14,16]} - 0.005716260912A_{[2,7,8,12,13,15]} \\
& - 0.01267276152A_{[1,2,6,14,16,18]} - 0.001171393596A_{[3,6,7,12,14,15]} - 0.0004288714312A_{[5,8,9,10,11,14]} \\
& - 0.04485334142A_{[1,6,7,11,14,16]} + 0.0003644955399A_{[6,7,8,10,11,15]} - 0.002300102970A_{[1,7,9,11,14,15]} \\
& - 0.001008480987A_{[3,5,8,11,13,17]} - 0.009236436987A_{[4,5,9,10,11,18]} + 0.01878206539A_{[3,5,7,11,13,18]} \\
& + 0.003679481742A_{[4,6,8,10,11,18]} - 0.01282218868A_{[6,10,11,14,16]} + 0.001242361655A_{[1,4,6,14,15,17]} \\
& - 0.005263350309A_{[1,2,9,10,17,18]} - 0.01815725680A_{[1,2,9,12,16,17]} + 0.01631605616A_{[1,4,6,12,16,18]} \\
& + 0.003837894953A_{[4,6,8,9,13,17]} - 0.003578485658A_{[4,6,7,10,13,17]} - 0.02352426209A_{[4,8,12,16,17]} \\
& - 0.05613655919A_{[4,10,12,13,18]} - 0.01569955367A_{[4,5,6,10,13,19]} + 0.03119029441A_{[5,11,12,13,16]} \\
& + 0.002525385986A_{[7,10,12,13,15]} - 0.02550887094A_{[4,5,7,8,16,17]} - 0.02183124597A_{[6,7,9,16,19]} \\
& + 0.03947617625A_{[1,5,7,10,15,19]} - 0.03265150154A_{[1,3,10,12,14,17]} + 0.001388670868A_{[2,5,9,11,14,16]} \\
& - 0.005618462557A_{[1,5,8,9,16,18]} + 0.03947617625A_{[4,9,12,14,18]} - 0.03622582379A_{[1,3,9,12,14,18]} \\
& - 0.03622582379A_{[1,5,7,10,16,18]} + 0.02135558783A_{[6,10,12,14,15]} - 0.003163502280A_{[3,6,7,9,15,17]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+0.01767664903A_{[2,3,6,14,15,17]} + 0.01663935319A_{[4,7,8,9,10,19]} + 0.008597213647A_{[1,7,10,11,12,16]} \\
&+ 0.02158734342A_{[2,3,7,11,16,18]} + 0.009879210847A_{[2,5,9,11,13,17]} + 0.008379634588A_{[4,6,14,15,18]} \\
&- 0.04961172567A_{[2,4,7,10,15,19]} - 0.004404817628A_{[1,4,5,14,15,18]} - 0.0002744386896A_{[7,8,9,10,11,12]} \\
&+ 0.03833911428A_{[5,8,10,16,18]} + 0.02612618374A_{[3,6,7,8,16,17]} + 0.08026523026A_{[6,8,10,16,17]} \\
&- 0.006173566464A_{[4,5,6,11,14,17]} + 0.03926689653A_{[5,7,13,14,18]} + 0.04857128588A_{[4,5,6,9,16,17]} \\
&+ 0.03433789078A_{[1,3,8,13,14,18]} - 0.01095375870A_{[5,8,11,16,17]} + 0.04224206759A_{[3,4,6,13,15,16]} \\
&+ 0.02153004672A_{[4,5,6,11,12,19]} - 0.005012424721A_{[2,4,9,11,14,17]} + 0.009680345716A_{[7,8,10,15,17]} \\
&- 0.01479444140A_{[3,5,6,12,15,16]} - 0.09135050343A_{[7,8,9,14,19]} - 0.08842800429A_{[1,5,6,14,15,16]} \\
&+ 0.01406788116A_{[2,4,9,11,13,18]} - 0.004555848472A_{[1,5,9,10,14,18]} - 0.02720912207A_{[1,4,10,11,15,16]} \\
&- 0.04558029998A_{[5,10,12,13,17]} + 0.01406788116A_{[1,6,8,10,15,17]} - 0.00005092951379A_{[3,8,10,11,12,13]} \\
&+ 0.001817052630A_{[3,4,11,12,13,14]} + 0.01136505229A_{[2,5,8,11,14,17]} - 0.02015755207A_{[2,5,9,10,14,17]} \\
&+ 0.03354607969A_{[1,6,7,11,15,17]} + 0.03552176398A_{[1,4,9,12,13,18]} + 0.01897147843A_{[3,4,8,13,14,15]} \\
&+ 0.01423040598A_{[2,5,8,12,13,17]} + 0.004593167687A_{[2,7,8,9,14,17]} - 0.0004390591239A_{[6,6,8,10,12,16]} \\
&- 0.08842800429A_{[3,4,5,13,14,18]} - 0.04203935952A_{[3,10,13,15,16]} + 0.002034451267A_{[4,5,8,11,14,15]} \\
&+ 0.001632375467A_{[4,5,9,11,13,15]} + 0.0003428670825A_{[5,7,8,9,12,16]} + 0.001117838367A_{[2,7,8,9,13,18]} \\
&- 0.01239044410A_{[1,6,8,13,14,15]} + 0.03117037182A_{[3,4,7,12,14,17]} + 0.03926689653A_{[1,5,6,12,14,19]} \\
&- 0.002483423062A_{[2,6,8,12,14,16]}
\end{aligned}$$

**“UMA COMPROVAÇÃO ALGÉBRICA DA EQUIVALÊNCIA
ENTRE A CONDENSAÇÃO ANIÔNICA E A COMPOSIÇÃO
FERMIÔNICA PARA O EFEITO HALL QUÂNTICO
FRACIONÁRIO”**

Carmem Lucia de Souza Batista

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto .

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Luca Moriconi
Luca Moriconi

R. Paunov

Roman Raycov Paounov

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 1996