Marco Antônio de Andrade

Contribuições ao Estudo da Supersimetria em Espaços de Atiyah-Ward.

Tese de Doutorado

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro

Fevereiro de 1996

Agradecimentos

- A José A. Helayël-Neto, por sua orientação, apoio, e dedicação ao nosso trabalho, imprescindíveis para a realização desta tese e, também, por me iniciar em Física Teórica de Altas Energias.
- A Oswaldo M. Del Cima, meu companheiro de trabalho, sem o qual esta tese não poderia ser realizada a tempo.
- A Sebastiao A. Dias, por todas as discussões, apoio e amizade e por ser um exemplo de vida a ser seguido.
- A Maria Natália P. Magalhães, por sua valiosa ajuda no início deste trabalho.
- A Luiz Paulo Colatto, José Luiz M. Valle, Marcello Silva-Neto, Marcelo Carvalho, Luis Cláudio Villar, Ricardo R. L. de Carvalho, Álvaro Nogueira, Victor Lemes, Cláudio Sasaki, Alexandre Velasco, José A. de Barros, Fernando A. R. Carvalho, Gil O. Neto, Edgardo Cheb-Terrab, Henrique P. Oliveira, Luiz Alberto T. Wills, Jorge E. Stephany Ruiz, Carlos Alberto S. Almeida, Isaías G. de Oliveira, Odivaldo Cambraia, Sergio Duque, Antônio Telles, Maurício W. de Oliveira, Marco Aurélio C. Kneipp, Gentil O. Pires, meu compadre Ladário da Silva, que muito me ajudam.
- Aos Profs. Olivier Piguet e Silvio P. Sorella, por valiosas sugestões.
- A Miriam, Rosângela, Beth, Verinha, Denise, Fátima por me permitirem o acesso à infraestrutura do CBPF.
- A Ronilda e Marcos Vinícius, razões de minha vida.
- À minha mãe Dalva, meu pai Antônio e minhas irmãs Denise e Deise.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro.
- Ao ICTP, pela valiosa estadia durante a escola de primavera de 1995.

Resumo

Estuda-se nesta tese uma série de propriedades algébricas de espinores e alguns aspectos cinemáticos de campos fermiônicos definidos em espaços-tempo planos com assinatura arbitrária. Tais resultados são aplicados no processo de construção de teorias de gauge Abelianas supersimétricas definidas em espaços de Atiyah-Ward. Mostra-se que a redução dimensional destas conduz à versão tridimensional da QED massiva, com supersimetria simples e paridade preservada.

Sumário

Introdução

Com o advento das supersimetrias simples e estendidas no processo de formulação de modelos, sobretudo de gauge, para descrever fenômenos em Física de Partículas, chegou-se a um consenso de se definir e estudar teorias supersimétricas em dimensões superiores a quatro para, então, se compreender as simetrias da fenomenologia de partículas em bases mais geométricas. Este foi o procedimento amplamente adotado no estudo das teorias de super-Yang-Mills e nos modelos de Kaluza-Klein para a supergravidade dos anos '80.

No início dos anos '90, chamou-se a atenção para uma interessante conexão (à qual se refere a literatura como a conjectura de Atiyah) entre teorias de Yang-Mills definidas em espaços-tempo do tipo (2+2) e modelos integráveis em 2 e 3 dimensões. Dado o interesse despertado por tal questão, propôs-se estudar nesta tese alguns aspectos relacionados à formulação de teorias de gauge supersimétricas nos chamados espaços de Atiyah-Ward, D=(2+2). Apesar da interpretação física de partículas propagando-se em espaços-tempo com mais do que uma dimensão temporal não ser clara, adota-se o ponto-de-vista de construir os modelos em D=(2+2), usufruindo-se das propriedades especiais deste tipo de espaço, para, em seguida, usá-los como matrizes para a geração de modelos fisicamente razoáveis em duas ou três dimensões espaço-temporais (D=1+1 e D=1+2).

Nesta tese, em particular, procurou-se transpor para D=(1+2) modelos Abelianos supersimétricos originalmente formulados no espaço de Atiyah-Ward. As razões para nos fixarmos neste tipo de estudo são motivadas e discutidas nos capítulos que se seguem.

Visto o propósito de se construir teorias supersimétricas em D=(2+2), onde os campos fermiônicos apresentam propriedades peculiares, procedeu-se, inicialmente, a uma análise detalhada dos espinores e campos fermiônicos em espaços-tempo planos com assinatura arbitrária. Este é o conteúdo do Capítulo 1.

Em seguida, com os resultados obtidos no capítulo anterior, pôde-se sistematizar a formulação de superespaço para a supersimetria simples em D=(2+2). É, então, objeto do Capítulo 2 a análise de teorias de gauge Abelianas definidas no espaço de Atiyah-Ward. São, aí, levantadas e discutidas questões relativas à dinâmica dos campos de matéria, à natureza dos potenciais de gauge e à redução dimensional para D=(1+2).

No Capítulo 3, retoma-se o modelo Abeliano massivo do capítulo precedente e a ele se incorpora a condição de auto-dualidade, da qual se herda, em 3 dimensões, um campo de Chern-Simons Abeliano acoplado às matérias escalar e fermiônica. Seguem-se as Conclusões Gerais.

São dados, no final, três apêndices: no Apêndice A, são apresentadas propriedades gerais das matrizes-γ de Dirac em dimensões arbitrárias. As convenções e resultados úteis para o cálculo espinorial da supersimetria simples em D=(2+2) são encontrados no Apêndice B. Finalmente, no Apêncice C, são fornecidos os elementos para o desenvolvimento em superespaço da supersimetria em 3 dimensões espaço-temporais.

Capítulo 1

Algumas Observações sobre Espinores em D Dimensões.

As condições para a definição de espinores de Weyl, Majorana e Majorana-Weyl são reconsideradas para espaços-tempo de dimensões arbitrárias. Analisando-se Lagrangeanos fermiônicos livres, *e não a equação de Dirac em dimensão* $D = t{+}s$, e impondo-se aos mesmos a condição de realidade, são observadas algumas peculiaridades no que diz repeito ao parâmetro de massa e ao caráter cinemático dos campos fermiônicos. Em alguns espaços-tempo específicos, uma ação de Dirac para espinores conjugados de carga não pode ser definida [1].

1.1 Introdução.

O estudo de espinores e de representações espinoriais de grupos de rotação para espaços-tempo com métrica arbitrária vem sendo fortemente enfatizado em conexão com a construção de teorias supersimétricas em dimensões superiores e com a formulação de supersimetrias estendidas em $D{=}(1{+}3)$ [2, 3]. Mais recentemente, analisando-se modelos supersimétricos nos chamados espaços de Atiyah-Ward [$D{=}(2{+}2)$], conclui-se ser necessário reconsiderar algumas propriedades de campos fermiônicos, não mais estudando as equações de movimento, mas investigando-os do ponto-de-vista da ação. Com isto, pensou-se em generalizar tal investigação para espaços-tempo genéricos do tipo D=(t+s), onde t e s indicam, respectivamente, o número de direções tipo-tempo e o número de direções tipo-espaço. Alguns resultados bastante peculiares são obtidos.

Na seção 1.2, são revistas algumas propriedades essenciais das matrizes-γ de Dirac em espaços-tempo genéricos. Em seguida, na seção 1.3, são discutidos os diferentes tipos de espinores em conexão com as representações irredutíveis de $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$. Finalmente, na seção 1.4, encontra-se a nossa contribuição original: ao invés de discutir as propriedades dos diferentes espinores do ponto-de-vista das equações-de-campo, adota-se o ponto-de-vista das ações . Alguns resultados interessantes são derivados. Por exemplo, conclui-se que, para espaços-tempo onde $t = 3$ mod 4, não é possível definir espinores de Majorana que apresentem propagação.

1.2 Revisão dos aspectos essenciais das matrizes-γ de Dirac para um espaço-tempo arbitrário.

1.2.1 Notações e convenções.

A métrica considerada para o espaço-tempo (t, s) é a métrica generalizada de Minkowski:

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diagonal}(\underbrace{+,+,\cdots,+}_{t-\text{vezes}}, \underbrace{-,-,\cdots,-}_{s-\text{vezes}}), \quad \mu,\nu = (1,\cdots,D)\ . \tag{1.1}$$

As matrizes-γ de Dirac para os espaços-tempo (t, s) e (t, s+1), onde t+s=D (par), podem ser representadas por matrizes $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ complexas, e satisfazem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}\ , \tag{1.2}$$

onde $\mathbb{1}$ é a identidade do espaço das matrizes $2^{D/2} \times 2^{D/2}$. As γ's que satisfazem ($\gamma^{\mu 2} = \mathbb{1}$) e ($\gamma^{\mu 2} = -\mathbb{1}$) serão, respectivamente, chamadas de tipo-tempo e tipo-espaço. As matrizes $\gamma^{\mu\dagger}$, $\gamma^{\mu *}$ e $\gamma^{\mu T}$, a menos de fases constantes, formam representações equivalentes da álgebra de Clifford, logo

$$\gamma^{\mu\dagger} \;=\; -(-1)^t A\gamma^\mu A^{-1}\ , \tag{1.3}$$

$$\gamma^{\mu *} = \eta B \gamma^\mu B^{-1} , \tag{1.4}$$

$$\gamma^{\mu T} = -\eta(-1)^t C \gamma^\mu C^{-1} . \tag{1.5}$$

As matrizes-γ podem ser escolhidas unitárias, o que implica nas γ's tipo-tempo serem Hermiteanas e as tipo-espaço serem anti-Hermiteanas. Pode ser visto, utilizando o lema de Schur, que tal escolha induz a se tomar as matrizes A, B e C unitárias. Será visto, oportunamente, que a unitariedade de A permite construir ações reais para espinores e esta condição, junto à unitariedade de B ou C, garante a existência da ação para o espinor conjugado de carga correspondente. Fato que em si pode justificar a unitariedade das matrizes-γ. A matriz unitária que satisfaz à eq.(1.3) é dada por

$$A = \gamma^1 \cdots \gamma^t . \tag{1.6}$$

Como veremos, o fator η na eq.(1.4) terá valor ± 1 fixado para um dado t, através da existência, ou não, do espinor conjugado de carga. O fator da eq.(1.5) segue da sua consistência com as duas anteriores. Assim sendo, as matrizes A, B e C, além de serem unitárias, terão as propriedades [2]:

$$B^T = C A^{-1} , \tag{1.7}$$

$$A^{-1} = (-1)^{t(t-1)/2} A , \tag{1.8}$$

$$B^T = \varepsilon B , \quad \varepsilon = \pm 1 , \tag{1.9}$$

$$C^T = \varepsilon \eta^t (-1)^{t(t-1)/2} C , \tag{1.10}$$

$$A^* = \eta^t B A B^{-1} , \tag{1.11}$$

$$A^T = \eta^t C A^{-1} C^{-1} , \tag{1.12}$$

$$B^* = \eta^t C^* B C^{-1} , \tag{1.13}$$

1.2.2 Determinação de ε.

Matrizes $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ (D par) podem ser expandidas em termos das matrizes $C\Gamma^{(0)} = C$ e $C\Gamma^{(N)}$, N=(1, ..., D), onde $\Gamma^{(N)}$ representa o conjunto das $C_{D,N}$ possíveis matrizes[1] formadas pelo produto de N ($N \leq D$) diferentes matrizes-γ. Mostra-se que qualquer matriz de $C\Gamma^{(N)}$ satisfaz à relação

$$(C\Gamma^{(N)})^T = \zeta_N(t, \eta, \varepsilon) C\Gamma^{(N)} , \tag{1.14}$$

onde

$$\zeta_N \equiv \varepsilon\eta^t(-1)^{t(t-1)/2}[\eta(-1)^{t+1}]^N(-1)^{N(N-1)/2} = \pm 1 . \tag{1.15}$$

O valor de ε pode ser obtido a partir de

$$\sum_{N=0}^{D} \frac{1}{2}(1 - \zeta_N)C_{D,N} = \frac{1}{2}2^{D/2}(2^{D/2} - 1) . \tag{1.16}$$

Na equação acima, a expressão que conta o número de matrizes que formam uma base de expansão para qualquer matriz anti-simétrica $2^{D/2} \times 2^{D/2}$ (lado esquerdo) foi igualada ao resultado que deve ser esperado desta contagem (lado direito); da eq.(1.16), segue que

$$\sum_{N=0}^{D} \zeta_N(t, \eta, \varepsilon)C_{D,N} = 2^{D/2} . \tag{1.17}$$

Da eq.(1.17), determina-se ε para os espaços-tempo cujas matrizes $(C\Gamma)$'s são construídas a partir de γ^1, ..., γ^D, portanto para (t, s) e (t, s+1) t+s=D (par). Mostra-se [2, 3, 4] que

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{4}(s - t) - \eta \sin\frac{\pi}{4}(s - t), \tag{1.18}$$

sendo $\varepsilon = \pm 1$.

1.2.3 Extensão das matrizes-γ de Dirac do espaço-tempo (t, s) para (t, s+1), com t+s=D (par).

Dado o conjunto γ^1, ..., γ^D, pode-se construir, a partir destas, γ^{D+1}

$$\gamma^{D+1} = i(-1)^{(t-s)/4}\gamma^1 \cdots \gamma^D , \tag{1.19}$$

[1] $C_{D,N} = D!/N!(D-N)!$

que anticomuta com as demais matrizes-γ e satisfaz às seguintes propriedades:

$$(\gamma^{D+1})^2 = -\mathbb{1} , \tag{1.20}$$

$$(\gamma^{D+1})^\dagger = -(\gamma^{D+1}) , \tag{1.21}$$

$$(\gamma^{D+1})^\dagger = (-1)^{t+1} A(\gamma^{D+1})A^{(-1)} , \tag{1.22}$$

$$(\gamma^{D+1})^* = -(-1)^{(s-t)/2} B(\gamma^{D+1})B^{-1} , \tag{1.23}$$

$$(\gamma^{D+1})^T = (-1)^{D/2} C(\gamma^{D+1})C^{-1} , \tag{1.24}$$

que são as mesmas propriedades que são satisfeitas por qualquer γ^μ tipo-espaço, desde que $\eta = -(-1)^{(s-t)/2}$. Deste modo, obtém-se o conjunto de matrizes-γ, $\{\gamma^1, \cdots, \gamma^D, \gamma^{D+1}\}$ para o espaço-tempo $(t,\ s{+}1)$.

1.2.4 Operador de quiralidade γ_{D+1}.

Verifica-se que a matriz

$$\gamma_{D+1} = (-1)^{(t-s)/4} \gamma^1 .....\gamma^D \tag{1.25}$$

anticomuta com as demais matrizes-γ e satisfaz as seguintes propriedades:

$$(\gamma_{D+1})^2 = \mathbb{1} , \tag{1.26}$$

$$(\gamma_{D+1})^\dagger = (\gamma_{D+1}) , \tag{1.27}$$

$$(\gamma_{D+1})^\dagger = (-1)^t A(\gamma_{D+1})A^{(-1)} , \tag{1.28}$$

$$(\gamma_{D+1})^* = (-1)^{(s-t)/2} B(\gamma_{D+1})B^{-1} , \tag{1.29}$$

$$(\gamma_{D+1})^T = (-1)^{D/2} C(\gamma_{D+1})C^{-1} . \tag{1.30}$$

O significado e a relevância de γ_{D+1} serão abordados na subseção 1.3.1.

1.3 Espinores.

Espinores são objetos que, sob a ação do grupo $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$, transformam-se como

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}\Sigma^{\kappa\lambda}} \Psi , \quad \Sigma^{\kappa\lambda} = \tfrac{1}{4}[\gamma^\kappa, \gamma^\lambda]. \tag{1.31}$$

Portanto, a mais simples representação para o espinor é aquela em que ele possui $(2^{D/2})$ componentes complexas. Para D par, tal representação é, ainda, redutível uma vez que, neste caso, pode-se definir operadores de projeção, P_{R} e P_{L}, que, por sua vez, decompoem $\Sigma^{\kappa\lambda}$ em geradores ($\Sigma_{\mathrm{R}}^{\kappa\lambda}$ e $\Sigma_{\mathrm{L}}^{\kappa\lambda}$) de transformações independentes. P_{R} e P_{L} determinam setores complementares no espaço dos Ψ: subespaço dos Ψ_{R}'s e os Ψ_{L}'s, respectivamente.

1.3.1 Projetores e operadores de quiralidade.

A primeira propriedade básica dos projetores $P_{\mathrm{R,L}}$ (${P_{\mathrm{R,L}}}^2 = P_{\mathrm{R,L}}$) é que

$$P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}} = \mathbb{1} \ , \tag{1.32}$$

de modo que a eq.(1.31) pode ser reescrita como

$$P_{\mathrm{R}}\Psi' + P_{\mathrm{L}}\Psi' = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}(P_{\mathrm{R}}\Sigma^{\kappa\lambda} + P_{\mathrm{L}}\Sigma^{\kappa\lambda})}(P_{\mathrm{R}}\Psi + P_{\mathrm{L}}\Psi). \tag{1.33}$$

A segunda propriedade básica é ortogonalidade:

$$P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = \mathbf{0} \, . \tag{1.34}$$

Com a propriedade adicional,

$$[P_{\mathrm{R,L}}, \Sigma^{\kappa\lambda}] = \mathbf{0} \tag{1.35}$$

(1.35) e (1.34) implicam que

$$[P_{\mathrm{R}}\ \omega_{\kappa\lambda}\Sigma^{\kappa\lambda}, P_{\mathrm{L}}\ \omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}] = \mathbf{0} \ , \tag{1.36}$$

de tal modo que (1.33) lê-se:

$$P_{\mathrm{R}}\Psi' + P_{\mathrm{L}}\Psi' = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}(P_{\mathrm{R}}\Sigma^{\kappa\lambda})}(P_{\mathrm{R}}\Psi) + e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}(P_{\mathrm{L}}\Sigma^{\kappa\lambda})}(P_{\mathrm{L}}\Psi) \, . \tag{1.37}$$

Por conseguinte,

$$\begin{cases} P_{\mathrm{R}}\Psi' = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}(P_{\mathrm{R}}\Sigma^{\kappa\lambda})}(P_{\mathrm{R}}\Psi) \\ P_{\mathrm{L}}\Psi' = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}(P_{\mathrm{L}}\Sigma^{\kappa\lambda})}(P_{\mathrm{L}}\Psi) \, . \end{cases} \tag{1.38}$$

Para espaços-tempo com dimensão D par, mostra-se que

$$P_{\mathrm{R,L}} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_{D+1}) \tag{1.39}$$

satisfazem às propriedades, eqs. (1.32), (1.34) e (1.35), o que permite concluir que $(P_{\rm R}\Psi)$ e $(P_{\rm L}\Psi)$ são elementos dos setores independentes em que se subdivide o espaço espinorial. (O termo quiralidade vai ser usado para distingüir os setores complementares, e γ_{D+1} é o operador quiral). Introduzindo a notação: $P_{\rm R,L}\Psi = \Psi_{\rm R,L}$ [2] ; $P_{\rm R,L}\Sigma^{\kappa\lambda} = \Sigma^{\kappa\lambda}_{\rm R,L}$, podemos escrever que $\Psi = \Psi_{\rm R} + \Psi_{\rm L}$ e $\gamma_{D+1}\Psi_{\rm R,L} = \pm\Psi_{\rm R,L}$.

1.3.2 Bilineares espinoriais.

O espinor adjunto, $\overline{\Psi}$, pode ser definido de modo que o bilinear $\overline{\Psi}\Psi$ seja um escalar sob a transformação do grupo $\overline{\rm SO}(t,s)$. Usando a eq.(1.3), vê-se que, sob uma tal transformação,

$$\Psi^\dagger A \to \Psi'^\dagger A = \Psi^\dagger A e^{-\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}\Sigma^{\kappa\lambda}}. \tag{1.40}$$

Portanto, $\overline{\Psi}$ pode ser identificado com $\overline{\Psi}=\Psi^\dagger A$. Usando a relação

$$e^{-\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}\Sigma^{\kappa\lambda}}\gamma^\mu e^{\frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\Sigma^{\rho\sigma}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \ , \tag{1.41}$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ é a matriz de transformação do grupo $\overline{\rm SO}(t,s)$ na representação vetorial, encontra-se que $\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ transforma-se como um vetor sob as transformações $\overline{\rm SO}(t,s)$.

1.4 Ação para espinores.

A ação livre de Dirac, $\mathcal{A}$, é um funcional real e escalar sob $\overline{\rm SO}(t,s)$, na qual deve estar contida a informação sobre a propagação de Ψ:

$$\mathcal{A} = \int d^Dx\mathcal{L}(\Psi,\partial_\mu\Psi) \ . \tag{1.42}$$

A densidade Lagrangeana de Dirac, $\mathcal{L}$, que pode ser sempre definida a menos de um "termo de superfície", tem a forma

$$\mathcal{L} = \alpha\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \beta m\overline{\Psi}\Psi \ , \tag{1.43}$$

[2] Estes espinores são autovetores da matriz γ_{D+1}, e são os conhecidos espinores de Weyl.

onde o parâmetro m é real e α e β são fatores que podem ter os valores (± 1), $(\pm i)$, dependendo do número de direções tipo-tempo. A determinação de α e β para um dado espaço-tempo é feita impondo-se que $\mathcal{A}$ seja real. Utilizando a eq.(1.3), e enfatizando o caráter Grassmaniano[3] dos espinores, encontra-se, a menos de um "termo de supefície", que

$$\mathcal{L}^\dagger = \alpha^*(-1)^{t(t+1)/2}\,\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + \beta^*(-1)^{t(t-1)/2}\,m\overline{\Psi}\Psi\ . \tag{1.44}$$

Para que $\mathcal{A}$ seja real, deve-se ter que:

$$\alpha^*(-1)^{t(t+1)/2} \ = \ \alpha\ , \tag{1.45}$$

$$\beta^*(-1)^{t(t-1)/2} \ = \ \beta\ . \tag{1.46}$$

Com estas equações, pode se costruir a Tabela 1, onde valores de α e β são mostrados para números diferentes de direções tipo-tempo.

Tabela 1: Condições para a realidade da ação de Dirac A.

t	0 mod 4	1 mod 4	2 mod 4	3 mod 4
α	1	i	i	1
β	1	1	i	i

Tomando agora a conjugação complexa de $\mathcal{L}$, e utilizando a eq.(1.4), pode ser encontrado que

$$\mathcal{L}^* = -\alpha^*\eta^{t+1}\,\overline{\Psi^c}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi^c - \beta^*\eta^t\,m\overline{\Psi^c}\Psi^c\ , \tag{1.47}$$

onde o espinor conjugado de carga[4], Ψ^c, é definido por

$$\Psi^c \equiv B^{-1}\Psi^* \quad \text{e} \quad \overline{\Psi^c} = (\Psi^c)^\dagger A\ . \tag{1.48}$$

Usando a eq.(1.7), reescreve-se $\Psi^c = C^*\overline{\Psi}^T$. A transformação $\Psi \rightarrow \Psi^c$ é a conhecida como operação de conjugação de carga.

[3]Adota-se que, para variáveis Grassmannianas, $(ab)^* = b^*a^*$.

[4]Ψ^c vai ser definido aqui a menos de uma fase.

1.4.1 Espinores de Majorana.

Da eq.(1.31), obtém-se que

$$B^{-1}\Psi'^{*} = e^{\frac{1}{2}\omega_{\kappa\lambda}B^{-1}\Sigma^{\kappa\lambda *}B}B^{-1}\Psi^{*} \,, \tag{1.49}$$

e das eqs. (1.4) e (1.31) vê-se que $B^{-1}\Sigma^{\kappa\lambda *}B = \Sigma^{\kappa\lambda}$. Logo, das eqs. (1.48) e (1.49), conclui-se que Ψ^{c} transforma-se como Ψ sob $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$; portanto, o vínculo $\Psi^{c} = \Psi$ é sempre preservado sob transformações de $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$. Os espinores que satisfazem a esta última condição são conhecidos como espinores de Majorana. A condição de Majorana pode ser reescrita como

$$\Psi = B^{-1}\Psi^{*} = C^{*}\overline{\Psi}^{T} \,. \tag{1.50}$$

Convém observar que, na representação de Majorana, onde $B=\mathbb{1}$ (Apêndice A), o espinor de Majorana é *real.* Da condição de Majorana segue que $(B^{*}B = \mathbb{1})$. Logo, da eq.(1.9), conclui-se que os espinores de Majorana[5] só podem ser definidos para espaços $(t,\, s)$ onde $\varepsilon = 1$.

O Lagrangeano livre para o espinor de Majorana, Ψ, tem a forma

$$\mathcal{L} = \alpha\Psi^{T}\, C\gamma^{\mu}\, \partial_{\mu}\Psi + \beta\, m\Psi^{T}\, C\, \Psi \,. \tag{1.51}$$

O conjugado complexo dos projetores quirais $P_{\mathrm{R,L}}$ podem ser tomados mediante o uso da eq.(1.29), logo para:

$$s-t = 0 \; mod \; 4 \;\; \rightarrow \;\; (P_{\mathrm{R,L}})^{*} = BP_{\mathrm{R,L}}B^{-1} \quad \mathrm{e} \quad s-t = 2 \; mod \; 4 \;\; \rightarrow \;\; (P_{\mathrm{R,L}})^{*} = BP_{\mathrm{L,R}}B^{-1} \,. \tag{1.52}$$

De uma análise idêntica à que foi feita a partir de Ψ(veja a subseção 1.3.1), mostra-se, a partir de Ψ^{c}, que $P_{\mathrm{R}}\Psi^{c}$ e $P_{\mathrm{L}}\Psi^{c}$ transformam-se sob o grupo $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$, respectivamente, como os espinores de Weyl Ψ_{R} e Ψ_{L} . Aplicando $P_{\mathrm{R,L}}$ ao espinor conjugado de carga dado pela eq.(1.48), e considerando os resultados dados na eq.(1.52), chega-se a:

$$s-t = 0 \; mod \; 4 \;\; \rightarrow \;\; P_{\mathrm{R,L}}\Psi^{c} = B^{-1}\Psi^{*}_{\mathrm{R,L}} \equiv \Psi^{c}_{\mathrm{R,L}} \quad \mathrm{e} \quad s-t = 2 \; mod \; 4 \;\; \rightarrow \;\; P_{\mathrm{R,L}}\Psi^{c} = \Psi^{c}_{\mathrm{L,R}} \,. \tag{1.53}$$

[5] No caso de $\varepsilon = -1$, podemos impor, por exemplo, a conhecida condição de realidade SU(2), e definir os espinores SU(2)-Majorana[2].

Assim sendo, observa-se que para $s - t = 0 \bmod 4$, Ψ_R^c e Ψ_L^c transformam-se sob $\overline{\mathrm{SO}}(t,s)$, respectivamente, como Ψ_R e Ψ_L. Portanto, neste caso, *pode-se* impor a condição de Majorana sobre os espinores de Weyl, obtendo, assim, os chamados *espinores de Majorana-Weyl*. Para $s - t = 2 \bmod 4$, Ψ_R^c e Ψ_L^c transformam-se, respectivamente, como Ψ_L e Ψ_R, logo *não podemos*, neste caso, impor o vínculo de Majorana sobre espinores de Weyl, uma vez que este não pode ser preservado sob as transformações $\overline{\mathrm{SO}}(t, s)$.

Finalmente, dispomos de todos os elementos para apresentar nossos resultados gerais sobre o fator η. Em seguida, serão mencionadas algumas propriedades interessantes sobre a dinâmica dos espinores conjugados de carga.

1.4.2 Análise das condições para a existência da ação para o espinor conjugado de carga.

Da invariância do Lagrangeano sob a operação de conjugação de carga segue, em virtude das eqs. (1.43) e (1.47), que

$$\eta^{t+1}(-1)^{t(t+1)/2} = -1 , \tag{1.54}$$

$$\eta^{t}(-1)^{t(t-1)/2} = -1 . \tag{1.55}$$

As relações (1.54) e (1.55) *não* decorrem de uma análise baseada diretamente na equação de Dirac; controlam, sim, a existência dos termos *cinético* e de *massa*, respectivamente, da ação para o espinor conjugado de carga (e, conseqüentemente, para o espinor de Majorana).

Apresentaremos, agora, algumas conclusões que dizem respeito à existência de termos cinético e de massa para os espinores conjugados de carga.

Para *t par*, a informação sobre o valor de η deve ser tirada da eq.(1.54). Por outro lado, a eq.(1.55) diz que a propagação do espinor conjugado de carga *massivo* só é possível se $t = 2 \bmod 4$; da eq.(1.54), resulta que $\eta = 1$. Resta $t = 0 \bmod 4$, que não é compatível com a eq.(1.55). Para estes valores de t, só é permitida a propagação de espinores conjugados de carga *não-massivos* e, neste caso, $\eta = -1$. Se a condição de Majorana é imposta sobre estes últimos, obtemos o que se conhece como espinores *pseudo-Majorana*[6].

Para t *ímpar*, a informação sobre o valor de η provém da eq.(1.55). Por outro lado, a eq.(1.54) dita que a propagação de espinores conjugados de carga, sejam eles *massivos* ou *não*, só é permitida para $t = 1$ mod 4; no caso de serem massivos, a eq.(1.55) deve ser satisfeita, e dela resulta que $\eta = -1$. Associados ao valor de $\eta = 1$, que não é solução da eq.(1.55), estão os espinores conjugados de carga *não-massivos* e, conseqüentemente, os espinores pseudo-Majorana. Resta $t = 3$ mod 4; estes valores de t *não são compatíveis* com a eq.(1.54). Assim, temos proibida a propagação de espinores conjugados de carga, quaisquer que sejam eles, para $t = 3$ mod 4.

Os resultados mencionados acima estão todos resumidos na Tabela 2.

Tabela 2: Tipos de espinores auto-conjugados (ε=1) como uma função de η e do número, t, de direções tipo-tempo. O símbolo — significa que não se pode escrever um termo cinético para espinores conjugados de carga com o par de valores (t,η).

η \ t	0 mod 4	1 mod 4	2 mod 4	3 mod 4
1	—	pseudo-Majorana	Majorana	—
-1	pseudo-Majorana	Majorana	—	—

Para concluir este capítulo, deve-se frisar que nossos resultados sobre a possibilidade de escrever Lagrangeanos cinéticos e de massa para os espinores conjugados de carga baseiam-se na suposição de que os espinores são sempre tomados como sendo Grassmann-valorados, não importando a assinatura do espaço-tempo. Para assinaturas não usuais com $t \geq 2$, ao invés de abandonar a tentativa de encontrar um termo cinético para os espinores conjugados de carga nos casos indicados na Tabela 2, poderíamos, talvez, decidir trabalhar com espinores comutantes, para o qual a existência de um termo cinético na ação torna-se não-trivial. Apesar disto, este não é o ponto-de-vista que tomamos aqui: supomos que os espinores sejam anticomutantes em qualquer caso, pois temos em mente formular

[6]De acordo com a ref. [2], este tipo de espinor aparece sem massa.

teorias de campos supersimétricas em espaços-tempo com assinaturas arbitrárias. Campos fermiônicos comutantes aparecem também em teorias de Yang-Mills supersimétricas, mas desempenham o papel de parceiros dos "ghosts" de Faddeev-Popov. São, então, férmions não-físicos associados a estados de 1-partícula com norma negativa. Querendo-se associar campos fermiônicos a partículas físicas de spin semi-inteiro, faz-se necessário tomá-los como variáveis de Grassmann.

Capítulo 2

Super-QED$_{2+2}$ e τ_3QED$_{1+2}$.

Neste capítulo, formula-se a ação supersimétrica e invariante de gauge para a super-QED$_{2+2}$ massiva no espaço de Atiyah-Ward D=(2+2). Estuda-se como assegurar a invariância de gauge mediante a introdução de um supercampo vetorial complexo. Constrói-se um termo massivo invariante de gauge, através da introdução de um par de supercampos quiral e anti-quiral com cargas-$U(1)$ opostas. Faz-se uma redução dimensional "à la Scherk" da ação da super-QED$_{2+2}$ massiva para D=(1+2). Truncamentos são necessários, a fim de suprimir modos não-físicos em D=(1+2). Finalmente, verifica-se que o modelo Abeliano reduzido apresenta uma única supersimetria e, automaticamente, incorpora a τ_3QED$_{1+2}$, estudada recentemente em conexão com problemas de Física da Matéria Condensada.

2.1 Introdução.

A idéia de espaços-tempo com várias componentes tipo-tempo e assinatura indefinida tem sido tratada com notável ênfase, desde que se entendeu que teorias de Yang-Mills auto-duais em 4-dimensões [5] aparecem, através da conjectura de Atiyah [6], como fonte para todos os modelos integráveis em dimensões mais baixas, após a adoção de algum esquema apropriado de redução dimensional.

Recentemente, foi observado por Oogury e Vafa [7] que o "background" consistente com a propagação de cordas corresponde a configurações de gravidade auto-dual (SDG), no caso de cordas fechadas com $N=2$, e configurações de Yang-Mills auto-duais (SDYM), acopladas à gravidade, no caso de cordas heteróticas em dimensões iguais ou menores que quatro. Este resultado foi reconfirmado por Gates e Nishino [8], baseando-se em cálculos de funções-β do setor de Yang-Mills da corda heterótica com $N=2$. Mais recentemente, Gates, Ketov e Nishino [9] propuseram a versão supersimétrica da teoria de Yang-Mills auto-dual com $N=2$ (SDSYM) e um modelo de supergravidade-$N=4$ auto-dual (SDSG); com estes resultados, conclui-se também não ser possível escrever contratermos não-triviais no caso de supercordas com $N=2$ [10].

A evidência de uma relação mais próxima entre a teoria de Chern-Simons supersimétrica (SCS) e modelos integráveis, ou teorias topológicas, vem justificando a concentração de esforços na tentativa de uma maior compreensão das teorias de campos em 3-dimensões. Já se mostrou que as teorias SCS, com $N=1$ e $N=2$ em $D=(1+2)$, são geradas diretamente das teorias SDSYM, com $N=1$ e $N=2$ em $D=(2+2)$, por uma redução dimensional conveniente e truncamentos de alguns dos campos resultantes [11].

Sabe-se que teorias de campos em 3 dimensões desempenham um papel central na compreensão do comportamento de teorias a temperaturas finitas em 4 dimensões [12], assim como na descrição de um número de fenômenos de superfície em Física da Matéria Condensada [13, 14, 15]. É, portanto, razoável procurar entender algumas características peculiares da dinâmica dos campos de gauge em 3 dimensões. Por outro lado, a finitude das teorias de Chern-Simons no gauge de Landau, provada nos trabalhos da ref. [16], tornou as teorias de gauge 3-dimensionais bastante atrativas. Mais recentemente, esta linha de investigação vem sendo reforçada, em vista de suas potenciais possibilidades de oferecer um fundamento teórico para a descrição de alguns fenômenos em Matéria Condensada, tais como supercondutividade a temperaturas finitas [14], onde a QED_3 e $\tau_3\mathrm{QED}_3$ [14, 15] emergem como possíveis cenários teóricos na tentativa de uma compreensão mais profunda destes fenômenos.

O principal propósito deste capítulo é construir uma ação no superspaço que descreva um modelo de gauge Abeliano massivo em D=(2+2), a saber, a versão N=1 da QED$_{2+2}$. Este capítulo é organizado como segue. Na Secão 2.2, damos detalhes da formulação da supersimetria simples (N=1) no espaço de Atiyah-Ward. A discussão e a construção explícita de um modelo de gauge Abeliano com supersimetria N=1 em D=(2+2) é o conteúdo da Seção 2.3. Descreve-se campos de matéria massivos, mas o caso não-massivo pode também ser contemplado como um caso particular do primeiro.

Mostramos, na Seção 2.4, que, fazendo uma redução dimensional "à la Scherk" [17, 18] da ação da super-QED$_{2+2}$ massiva para o espaço-tempo D=(1+2), truncamentos são necessários, a fim de suprimir modos não-físicos, Conclui-se com uma abordagem da super-τ_3QED$_{1+2}$ (a versão supersimétrica da τ_3QED$_{1+2}$) [19], cujo espectro é livre de táquions e "ghosts" a "tree-level". Finalmente, na Seção 2.5, esboçamos a conclusão do capítulo, e apresentamos perspectivas para trabalhos futuros.

2.2 Supersimetria N=1 e supercampos no espaço de Atiyah-Ward.

Espaços-tempo tipo Minkowski podem ser definidos como espaços-coset do tipo (grupo de Poincaré)/(grupo de Lorentz). Similarmente, superespaços planos podem ser definidos como espaços-coset (grupo de super-Poincaré)/ (grupo de Lorentz): seus pontos sendo órbitas que o grupo de Lorentz varre no supergrupo de Poincaré. Pontos do superespaço são parametrizados pelas coordenadas do espaço de Atiyah-Ward, x^μ, μ=(0, 1, 2, 3), e coordenadas fermiônicas, θ^α e $\widetilde{\theta}^{\dot{\alpha}}$, onde α=(1, 2) e $\dot{\alpha}$=($\dot{1}$, $\dot{2}$). As coordenadas fermiônicas θ e $\widetilde{\theta}$ são espinores de Majorana-Weyl.

Supercampos são funções analíticas das coordenadas do superespaço, que devem ser comprendidas em termos de suas expansões em série de potências em θ e $\widetilde{\theta}$, com coeficientes que são campos locais definidos no espaço de Minkowski [20, 21].

Uma técnica compacta e eficiente para trabalhar com representações da álgebra de supersimetria, e sua atuação sobre os campos, foi proposta por Salam e Strathdee [22]:

supercampos no superespaço. Tal idéia é particulamente útil para teorias com supersimetria N=1, onde a estrutura de supercampos é completamente conhecida. A álgebra a que os geradores, P_μ, Q_α e $\widetilde{Q}_{\dot\alpha}$, da supersimetria em D=2+2 satisfaz é a usual, dada por[1]

$$\{Q_\alpha, \widetilde{Q}_{\dot\alpha}\} = 2\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \ , \ \{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\widetilde{Q}_{\dot\alpha}, \widetilde{Q}_{\dot\beta}\} = 0$$
$$\text{e} \quad [Q_\alpha, P_\mu] = [\widetilde{Q}_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0 \ . \tag{2.1}$$

A lei de transformação para um supercampo genérico, $F(x, \theta, \widetilde{\theta})$, é definida pela variação:

$$\delta F \equiv i\,(\varepsilon\, Q + \widetilde{\varepsilon}\, \widetilde{Q}) F \ , \tag{2.2}$$

onde os parâmetros ε^α e $\widetilde{\varepsilon}^{\dot\alpha}$ são espinores de Majorana-Weyl, e as supercargas, Q_α e $\widetilde{Q}_{\dot\alpha}$, são dadas por

$$Q_\alpha = -i(\partial_\alpha + i\partial\!\!\!/_{\alpha\dot\alpha}\widetilde{\theta}^{\dot\alpha}) \quad \text{e} \quad \widetilde{Q}_{\dot\alpha} = -i(\widetilde{\partial}_{\dot\alpha} + i\widetilde{\partial\!\!\!/}_{\dot\alpha\alpha}\theta^\alpha) \ . \tag{2.3}$$

As translações no superespaço associadas às transformações de supersimetria do supercampo $F(x, \theta, \widetilde{\theta})$ são mostradas abaixo:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + i\,\varepsilon^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \widetilde{\theta}^{\dot\alpha} + i\,\widetilde{\varepsilon}^{\dot\alpha} \widetilde{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\alpha} \theta^\alpha \ ,$$
$$\theta^\alpha \longrightarrow \theta^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad \text{e} \quad \widetilde{\theta}^{\dot\alpha} \longrightarrow \widetilde{\theta}^{\dot\alpha} + \widetilde{\varepsilon}^{\dot\alpha} \ . \tag{2.4}$$

As derivadas covariantes, D_α e $\widetilde{D}_{\dot\alpha}$, são tais que os resultados da aplicação delas sobre qualquer supercampo são covariantes sob transformações de supersimetria; isto significa que são também supercampos, e uma possível representação para as mesmas é dada a seguir:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i\partial\!\!\!/_{\alpha\dot\alpha}\widetilde{\theta}^{\dot\alpha} \quad \text{e} \quad \widetilde{D}_{\dot\alpha} = \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} - i\widetilde{\partial\!\!\!/}_{\dot\alpha\alpha}\theta^\alpha \ , \tag{2.5}$$

que satisfazem à seguinte álgebra

$$\{D_\alpha, \widetilde{D}_{\dot\alpha}\} = -2i\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu \ , \ \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\widetilde{D}_{\dot\alpha}, \widetilde{D}_{\dot\beta}\} = 0$$
$$\text{e} \quad [D_\alpha, \partial_\mu] = [\widetilde{D}_{\dot\alpha}, \partial_\mu] = 0 \ . \tag{2.6}$$

[1]Para notações e convenções em D=2+2, veja o Apêndice B.

Um supercampo quiral, Ψ, é caracterizado pela condição covariante $\widetilde{D}_{\dot{\alpha}}\Psi = 0$; portanto, segue que este supercampo pode ser, em geral, parametrizado por

$$\Psi(x, \theta, \widetilde{\theta}) = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[A(x) + i\theta\psi(x) + i\theta^2 F(x)\right] \ , \tag{2.7}$$

onde A é um escalar complexo, ψ é um espinor de Weyl e F é um campo auxiliar escalar complexo. O supercampo $\Psi^\dagger$ é dado por

$$\Psi^\dagger(x, \theta, \widetilde{\theta}) = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[A^*(x) + i\theta\psi^c(x) + i\theta^2 F^*(x)\right] \ , \tag{2.8}$$

onde usamos as relações (B.31) e (B.32) do Apêndice B.

Um supercampo anti-quiral, $\widetilde{X}$, é tal que deve satisfazer ao vínculo $D_\alpha\widetilde{X} = 0$, e pode ser escrito como segue

$$\widetilde{X}(x, \theta, \widetilde{\theta}) = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[B(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\chi}(x) + i\widetilde{\theta}^2 G(x)\right] \ , \tag{2.9}$$

onde B é um escalar complexo, $\widetilde{\chi}$ é um espinor de Weyl e G é um campo auxiliar escalar complexo. Analogamente ao caso anterior (usando (B.31) e (B.32)), o supercampo anti-quiral $\widetilde{X}^\dagger$ admite a expansão:

$$\widetilde{X}^\dagger(x, \theta, \widetilde{\theta}) = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[B^*(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\chi}^c(x) + i\widetilde{\theta}^2 G^*(x)\right] \ . \tag{2.10}$$

A lei de transformação de supersimetria definida pela eq.(2.2) gera as seguintes transformações dos campos componentes de (2.7) e (2.9):

$$\left\{\begin{array}{l} \delta A = i\varepsilon^\alpha\psi_\alpha \\ \delta\psi_\alpha = 2\varepsilon_\alpha F - 2\widetilde{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\partial}_{\dot{\alpha}\alpha}A \\ \delta F = i\widetilde{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\partial}_{\dot{\alpha}}{}^{\alpha}\psi_\alpha \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \delta B = i\widetilde{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} \\ \delta\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} = 2\widetilde{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}G - 2\varepsilon^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}B \\ \delta G = i\varepsilon^\alpha\partial_\alpha{}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} \end{array}\right. \ . \tag{2.11}$$

Tendo em mente o propósito de formular uma teoria de gauge supersimétrica no espaço de Atiyah-Ward, faz-se necessário introduzir um supercampo vetorial *complexo* (um supercampo vetorial sem o vínculo de realidade), V :

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \widetilde{\theta}) = {} & C(x) + i\theta\zeta(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\eta}(x) + \frac{1}{2}i\theta^2 M(x) + \frac{1}{2}i\widetilde{\theta}^2 N(x) + \\ & + \frac{1}{2}i\theta\sigma^\mu\widetilde{\theta}B_\mu(x) - \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^2\theta\lambda(x) - \frac{1}{2}\theta^2\widetilde{\theta}\widetilde{\rho}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\widetilde{\theta}^2 D(x) \ , \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde C, M, N e D são escalares complexos, ζ, $\widetilde{\eta}$, λ e $\widetilde{\rho}$ são espinores de Weyl e B_μ é um campo vetorial *complexo*. O conjugado Hermitiano, $V^\dagger$, é dado por

$$V^\dagger(x,\theta,\widetilde{\theta}) = C^*(x) + i\theta\zeta^{\,c}(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\eta}^{\,c}(x) + \frac{1}{2}i\theta^2 M^*(x) + \frac{1}{2}i\widetilde{\theta}^2 N^*(x) + \\ + \frac{1}{2}i\theta\sigma^\mu\widetilde{\theta}B^*_\mu(x) - \frac{1}{2}\widetilde{\theta}^2\theta\lambda^c(x) - \frac{1}{2}\theta^2\widetilde{\theta}\widetilde{\rho}^{\,c}(x) - \frac{1}{4}\theta^2\widetilde{\theta}^2 D^*(x) \quad , \tag{2.13}$$

onde foram usadas as relações (B.31) e (B.32) do Apêndice B.

Os supercampos "field-strength", W_α e $\widetilde{W}_{\dot\alpha}$ que satisfazem, respectivamente, às condições de quiralidade e anti-quiralidade, $\widetilde{D}_{\dot\beta}W_\alpha = 0$ e $D_\beta\widetilde{W}_{\dot\alpha} = 0$, são escritos como

$$W_\alpha = \frac{1}{2}\widetilde{D}^2 D_\alpha V \quad \text{e} \quad \widetilde{W}_{\dot\alpha} = \frac{1}{2}D^2\widetilde{D}_{\dot\alpha}V \quad ; \tag{2.14}$$

em componentes, tem-se que

$$\begin{cases} W_\alpha = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[\widehat{\lambda}_\alpha + \theta^\beta\left(\epsilon_{\alpha\beta}\widehat{D} - \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}G_{\mu\nu}\right) + i\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\widehat{\widetilde{\rho}}^{\,\dot\alpha}\right] \\ \\ \widetilde{W}_{\dot\alpha} = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[\widehat{\widetilde{\rho}}_{\dot\alpha} + \widetilde{\theta}^{\dot\beta}\left(\widetilde{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta}\widehat{D} - \widetilde{\sigma}^{\mu\nu}_{\dot\alpha\dot\beta}G_{\mu\nu}\right) + i\widetilde{\theta}^2\widetilde{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\widehat{\lambda}^{\,\alpha}\right] \end{cases} , \tag{2.15}$$

onde

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha - \sigma^\mu{}_\alpha{}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\widetilde{\eta}_{\dot\alpha} \\ \\ \widehat{D} = D - \Box C \\ \\ \widehat{\widetilde{\rho}}_{\dot\alpha} = \widetilde{\rho}_{\dot\alpha} - \widetilde{\sigma}^\mu{}_{\dot\alpha}{}^\alpha\,\partial_\mu\zeta_\alpha \\ \\ G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{cases} . \tag{2.16}$$

As transformações de supersimetria dos campos componentes dados em (2.15) lêem-se:

$$\begin{cases} \delta\widehat{\lambda}_\alpha = \varepsilon^\beta \left(\epsilon_{\alpha\beta}\widehat{D} - \sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}G_{\mu\nu}\right) \\ \delta\widehat{D} = i\varepsilon^\alpha\sigma^\mu{}_\alpha{}^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\widehat{\widetilde{\rho}}_{\dot\alpha} + i\widetilde{\varepsilon}^{\dot\alpha}\widetilde{\sigma}^\mu{}_{\dot\alpha}{}^\alpha\,\partial_\mu\widehat{\lambda}_\alpha \\ \delta G_{\mu\nu} = -i\varepsilon^\alpha\sigma_{\mu\alpha}{}^{\dot\alpha}\,\partial_\nu\widehat{\widetilde{\rho}}_{\dot\alpha} + i\widetilde{\varepsilon}^{\dot\alpha}\widetilde{\sigma}_{\mu\dot\alpha}{}^\alpha\,\partial_\nu\widehat{\lambda}_\alpha - (\mu\leftrightarrow\nu) \\ \delta\widehat{\widetilde{\rho}}_{\dot\alpha} = \widetilde{\varepsilon}^{\dot\beta}\left(\widetilde{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta}\widehat{D} - \widetilde{\sigma}^{\mu\nu}{}_{\dot\alpha\dot\beta}G_{\mu\nu}\right) \end{cases} . \tag{2.17}$$

A conjugação de carga dos supercampos "field-strength" resulta em

$$\begin{cases} W^{\rm c}_\alpha = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[\widehat{\lambda}^{\rm c}_\alpha + \theta^\beta\left(\epsilon_{\alpha\beta}\widehat{D}^* - \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}G^*_{\mu\nu}\right) + i\theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\widehat{\widetilde{\rho}}^{\,{\rm c}\dot\alpha}\right] \\ \widetilde{W}^{\rm c}_{\dot\alpha} = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[\widehat{\widetilde{\rho}}^{\,\rm c}_{\dot\alpha} + \widetilde{\theta}^{\dot\beta}\left(\widetilde{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta}\widehat{D}^* - \widetilde{\sigma}^{\mu\nu}_{\dot\alpha\dot\beta}G^*_{\mu\nu}\right) + i\widetilde{\theta}^2\widetilde{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\widehat{\lambda}^{{\rm c}\alpha}\right] \end{cases} , \tag{2.18}$$

onde as relações (B.26), (B.31) e (B.32) foram usadas. A conexão entre a conjugação complexa e a conjugação de carga dos espinores tem um importante papel na formulação de ações supersimétricas invariantes de gauge, como será visto nas seções seguintes.

2.3 $N=1$ super-QED$_{2+2}$ Abeliana e Massiva.

A extensão supersimétrica da QED massiva em D=1+3 requer a introdução de dois supercampos quirais, com cargas-$U(1)$ opostas [23]. Entretanto, para introduzir massa para o setor de matéria em D=(2+2), sem a quebra da simetria-de-gauge, temos que lidar com quatro supercampos escalares: um par de supermultipletes quirais e um par de anti-quirais; os membros de cada par têm cargas-$U(1)$ opostas.

A super-QED$_{2+2}$ massiva é descrita pela ação:[2]

$$\begin{aligned} S^{\rm AW}_{\rm inv} = &-\frac{1}{8}\left(\int ds\; W^{\rm c}W + \int d\widetilde{s}\;\widetilde{W}^{\rm c}\widetilde{W}\right) + \int dv\;\left(\Psi^\dagger_+ e^{4qV}\widetilde{X}_+ + \Psi^\dagger_- e^{-4qV}\widetilde{X}_-\right) + \\ &+ im\left(\int ds\;\Psi_+\Psi_- - \int d\widetilde{s}\;\widetilde{X}_+\widetilde{X}_-\right) + \text{h.c.} \quad , \end{aligned} \tag{2.19}$$

[2]Neste trabalho, estamos adotando $ds\equiv d^4xd^2\theta$, $d\widetilde{s}\equiv d^4xd^2\widetilde{\theta}$ e $dv\equiv d^4xd^2\theta d^2\widetilde{\theta}$ como possíveis medidas no superespaço.

onde q é uma constante de acoplamento sem dimensão e m é um parâmetro com dimensão de massa. Os índices $+$ e $-$ dos supercampos de matéria referem-se às suas cargas-$U(1)$. Para construir os termos de interação entre campos de matéria e bósons de gauge, temos que usar uma mistura entre supercampos quiral e anti-quiral (*a fim de justificar tal procedimento, referimos-nos ao artigo de Gates, Ketov e Nishino* [10]). Este termo de interação misto estabelece que o supercampo vetorial deva ser *complexo.*

A ação que fixa o gauge no superespaço é dada por:

$$S_{\rm gf}^{\rm AW} = \frac{1}{4\alpha}\int dv \, \left(\widetilde{D}^2 V^\dagger\right)\left(D^2 V\right) + \text{h.c.} \quad , \tag{2.20}$$

onde α é o parâmetro de fixação de gauge.

Na ação da super-QED$_{2+2}$ massiva. dada pela eq.(2.19), os supercampos quirais Ψ_+ e Ψ_- $(\widetilde{D}_{\dot\alpha}\Psi_\pm{=}0)$, são definidos como segue:

$$\Psi_\pm(x,\theta,\widetilde{\theta}) = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[A_\pm(x) + i\theta\psi_\pm(x) + i\theta^2 F_\pm(x)\right] \quad , \tag{2.21}$$

onde $A_\pm$ são escalares complexos, $\psi_\pm$ são espinores de Weyl, e $F_\pm$ são campos auxiliares escalares complexos. Além disto, os supercampos anti-quirais, $\widetilde{X}_+$ e $\widetilde{X}_-$ $(D_\alpha \widetilde{X}_\pm{=}0)$, são definidos por:

$$\widetilde{X}_\pm(x,\theta,\widetilde{\theta}) = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[B_\pm(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\chi}_\pm(x) + i\widetilde{\theta}^2 G_\pm(x)\right] \quad , \tag{2.22}$$

onde $B_\pm$ são escalares complexos, $\widetilde{\chi}_\pm$ são espinores de Weyl, e $G_\pm$ são campos auxiliares escalares complexos.

As transformações dos supercampos escalares, $\Psi_\pm$ e $\widetilde{X}_\pm$, que asseguram a invariância de gauge da ação da super-QED$_{2+2}$ massiva são as seguintes:

$$\Psi_\pm \longrightarrow e^{\mp i4q\Lambda_\pm}\Psi_\pm \ , \quad \widetilde{D}_{\dot\alpha}\Lambda_\pm = 0 \quad \text{e} \quad \widetilde{X}_\pm \longrightarrow e^{\mp i4q\widetilde{\Gamma}_\pm}\widetilde{X}_\pm \ , \quad D_\alpha\widetilde{\Gamma}_\pm = 0 \quad , \tag{2.23}$$

com

$$\Lambda_\pm(x,\theta,\widetilde{\theta}) = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[\Lambda_{1\pm}(x) + i\theta\Lambda_{2\pm}(x) + i\theta^2\Lambda_{3\pm}(x)\right] \tag{2.24}$$

e

$$\widetilde{\Gamma}_\pm(x,\theta,\widetilde{\theta}) = e^{i\theta\partial\widetilde{\theta}}\left[\Gamma_{1\pm}(x) + i\widetilde{\theta}\widetilde{\Gamma}_{2\pm}(x) + i\widetilde{\theta}^2\Gamma_{3\pm}(x)\right] \quad , \tag{2.25}$$

onde $\Lambda_{1\pm}$ e $\Gamma_{1\pm}$ são escalares complexos, $\Lambda_{2\pm}$ e $\widetilde{\Gamma}_{2\pm}$ são espinores de Weyl, $\Lambda_{3\pm}$ e $\Gamma_{3\pm}$ são campos auxiliares escalares complexos.

Da invariância de gauge da ação (2.19), e considerando as transformações (2.23) dos supercampos $\Psi_\pm$ e $\widetilde{X}_\pm$, conclui-se que o supercampo V é sujeito à a seguinte transformação de gauge:

$$\delta_g V = i\left(\widetilde{\Gamma}_+ - \Lambda_+^\dagger\right) = i\left(\widetilde{\Gamma}_- - \Lambda_-^\dagger\right) \quad , \tag{2.26}$$

que coloca em evidência a necessidade de um supercampo vetorial *complexo*, V, a fim de tornar possível a construção de uma ação invariante de gauge no espaço de Atiyah-Ward. Este é um resultado peculiar das (2+2) dimensões.

Em termos de campos componentes, a transformação de gauge (2.26), levando em conta as eqs. (2.12), (2.24) e (2.25), desmembra-se em:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_g C = i\left(\Gamma_{1\pm} - \Lambda_{1\pm}^*\right) \\ \\ \delta_g \zeta_\alpha = -i\Lambda^c_{2\pm\,\alpha} \quad , \quad \delta_g \widetilde{\eta}_{\dot\alpha} = i\widetilde{\Gamma}_{2\pm\,\dot\alpha} \\ \\ \delta_g M = -2i\Lambda_{3\pm}^* \quad , \quad \delta_g N = 2i\Gamma_{3\pm} \\ \\ \delta_g B_\mu = 2i\partial_\mu(\Gamma_{1\pm} + \Lambda_{1\pm}^*) \\ \\ \delta_g \lambda_\alpha = -i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\widetilde{\Gamma}^{\dot\alpha}_{2\pm} \quad , \quad \delta_g\widetilde{\rho}_{\dot\alpha} = i\widetilde{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\alpha}\partial_\mu\Lambda^{c\,\alpha}_{2\pm} \\ \\ \delta_g D = i\Box\left(\Gamma_{1\pm} - \Lambda_{1\pm}^*\right) \end{array}\right. \quad . \tag{2.27}$$

Entretanto, adotando-se o gauge de Wess-Zumino [22, 23],

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_g C = -C = i\left(\Gamma_{1\pm} - \Lambda_{1\pm}^*\right) \\ \\ \delta_g \zeta_\alpha = -\zeta_\alpha = -i\Lambda^c_{2\pm\,\alpha} \quad , \quad \delta_g\widetilde{\eta}_{\dot\alpha} = -\widetilde{\eta}_{\dot\alpha} = i\widetilde{\Gamma}_{2\pm\,\dot\alpha} \\ \\ \delta_g M = -M = -2i\Lambda_{3\pm}^* \quad , \quad \delta_g N = -N = 2i\Gamma_{3\pm} \end{array}\right. \quad , \tag{2.28}$$

eliminam-se os campos compensadores do supercampo V: C, ζ_α, $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}}$, M, N. A tranformação que sobrevive no gauge de Wess-Zumino é dada por

$$\delta_g B_\mu = i\ \partial_\mu \beta \quad , \tag{2.29}$$

onde β é uma função complexa arbitrária. Entretanto, como veremos em seguida, após a análise da ação completa no gauge de Wess-Zumino, o acoplamento entre a matéria e o setor de gauge indica que, na verdade, só a parte imaginária de B_μ exibe a transformação de um campo de gauge genuíno, ao passo que a parte real de B_μ realiza o gauge de uma simetria de Weyl. A partir deste ponto, vamos omitir o símbolo de chapéu sobre os campos componentes, λ, D e $\tilde{\eta}$, uma vez que os cálculos sempre serão executados no gauge de Wess-Zumino.

Da ação dada pela eq.(2.19), retiramos a seguinte ação para os campos componentes no gauge de Wess-Zumino:

$$\begin{aligned}
S_{\rm inv}^{\rm AW} = \int d^4x \Big\{ & -\frac{1}{4} i\Big(\lambda^{\rm c} \partial\!\!\!/ \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^{\rm c} \tilde{\partial\!\!\!/} \lambda \Big) - \frac{1}{8} G^*_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - \frac{1}{4} D^* D + \\
& - F^*_+ G_+ - A^*_+ \Box B_+ - \frac{1}{2} i \psi^{\rm c}_+ \partial\!\!\!/ \tilde{\chi}_+ - q B_\mu \left(\frac{1}{2} i \psi^{\rm c}_+ \sigma^\mu \tilde{\chi}_+ + A^*_+ \partial^\mu B_+ - B_+ \partial^\mu A^*_+ \right) + \\
& + iq \Big(A^*_+ \tilde{\chi}_+ \tilde{\rho} + B_+ \psi^{\rm c}_+ \lambda \Big) - \left(qD + q^2 B_\mu B^\mu \right) A^*_+ B_+ + \\
& - F^*_- G_- - A^*_- \Box B_- - \frac{1}{2} i \psi^{\rm c}_- \partial\!\!\!/ \tilde{\chi}_- + q B_\mu \left(\frac{1}{2} i \psi^{\rm c}_- \sigma^\mu \tilde{\chi}_- + A^*_- \partial^\mu B_- - B_- \partial^\mu A^*_- \right) + \\
& - iq \Big(A^*_- \tilde{\chi}_- \tilde{\rho} + B_- \psi^{\rm c}_- \lambda \Big) + \left(qD - q^2 B_\mu B^\mu \right) A^*_- B_- + \\
& + m \Big(\frac{1}{2} i \psi_+ \psi_- - \frac{1}{2} i \tilde{\chi}_+ \tilde{\chi}_- - A_+ F_- - A_- F_+ + B_+ G_- + B_- G_+ \Big) \Big\} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Devido ao fato de que na super-QED$_{2+2}$ massiva devemos ter duas cargas-$U(1)$ para introduzir massa a "tree-level", e um supercampo vetorial complexo a fim de construir interações invariantes de gauge, podemos ler diretamente, da ação (2.19) e dos supercampos

(2.12), (2.21) e (2.22), os seguintes conjuntos de transformações locais $U(1)_\alpha \times U(1)_\gamma$:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_g A^*_\pm = \pm iq\beta(x) A^*_\pm \\ \\ \delta_g \psi^c_\pm = \pm iq\beta(x)\psi^c_\pm \\ \\ \delta_g F^*_\pm = \pm iq\beta(x) F^*_\pm \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} \delta_g B_\pm = \mp iq\beta(x) B_\pm \\ \\ \delta_g \widetilde{\chi}_\pm = \mp iq\beta(x)\widetilde{\chi}_\pm \\ \\ \delta_g G_\pm = \mp iq\beta(x) G_\pm \end{array}\right. \quad , \tag{2.31}$$

onde $\beta \equiv \alpha - i\gamma$ é uma função complexa infinitesimal C^∞. Observe que as transformações de gauge só são lidas como acima porque previamente escolhemos trabalhar no gauge de Wess-Zumino. Para as componentes do supercampo de gauge que sobreviveram ao gauge de Wess-Zumino, temos que:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_g \lambda = \delta_g \widetilde{\rho} = 0 \quad , \\ \\ \delta_g D = 0 \quad \text{e} \\ \\ \delta_g B_\mu = i\,\partial_\mu \beta \quad . \end{array}\right. \tag{2.32}$$

Portanto, no gauge de Wess-Zumino, a parte real de B_μ faz o gauge da simetria-$U(1)_\gamma$, com função de gauge real γ, ao passo que sua parte imaginária faz o gauge da simetria-$U(1)_\alpha$, com função de gauge real α. A última é a usual simetria de fase, e a associamos à carga elétrica. Na verdade, como veremos mais tarde, esta componente imaginária será tomada como o campo do fóton. O parâmetro γ gera uma invariância local tipo-Weyl [24]. Entretanto, o campo vetorial que faz o gauge de tal simetria, a saber a parte real de B_μ, será suprimido no processo de redução dimensional, de tal forma que esta invariância não deixará uma contrapartida em $D{=}1{+}2$.

Deve ser enfatizado que os bilineares de massa na ação dada pela eq.(2.30) preservam a simetria local $U(1)_\alpha \times U(1)_\gamma$, já que os campos de matéria (férmions e escalares) carregam cargas opostas. Portanto, os valores opostos de cargas-$U(1)$ têm um papel central no processo de introduzir massa para os campos de matéria, sem quebrar a simetria de gauge, similarmente ao que acontece em $D{=}(1{+}3)$.

2.4 Super-τ_3QED$_{1+2}$ a partir do espaço de Atiyah-Ward.

É bem conhecido que teorias de campos com supersimetrias estendidas em D dimensões podem ser relacionadas a modelos mais simples definidos em dimensões superiores a D [17, 18]. Como estamos interessados em modelos supersimétricos com N=1 em D=1+2, propomo-nos aqui a investigar que tipo de modelo surge após a adoção de um esquema conveniente de redução dimensional, a partir do espaço de Atiyah-Ward, para o espaço-tempo de 3 dimensões. Nosso propósito é realizar uma redução dimensional [3] "à la Scherk" da N=1-super-QED$_{2+2}$ massiva [17]. Uma vez que este procedimento deve estender a supersimetria [17, 18] para N >1 em 3 dimensões, serão necessários alguns truncamentos, a fim de se permanecer com uma supersimetria N=1 e, ao mesmo tempo, suprimir modos não-físicos, isto é, graus-de-liberdade correspondentes a estados quânticos de norma negativa, provenientes de (2+2) dimensões. Para realizar a redução dimensional da ação (2.30) para D=(1+2), usamos as regras apresentadas a seguir.

As relações entre as matrizes-γ em D=(2+2) e D=(1+2) são dadas por:

$$\epsilon\sigma^{\mu} = (C\gamma^{m}, iC) \tag{2.33}$$

$$\tilde{\epsilon}\tilde{\sigma}^{\mu} = (C\gamma^{m}, -iC) \quad , \tag{2.34}$$

onde, no membro esquerdo, são dadas as matrizes do modelo em D=(2+2), ao passo que, no membro direito, figuram as correspondentes matrizes em D=(1+2). Observe que os espinores de Weyl em D=(2+2) transformam-se em espinores de Dirac depois de realizada a redução dimensional para D=(1+2). Abaixo, são fornecidas as regras para o procedimento da redução dimensional:

$$G^{*}_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \xrightarrow{\text{R.D.}} G^{*}_{mn}G^{mn} + 2\partial_m\phi^{*}\partial^{m}\phi \quad , \tag{2.35}$$

$$\psi^{c}\tilde{\partial\!\!\!/}\tilde{\chi} \quad \rightarrow \quad \overline{\psi}\gamma^{m}\partial_{m}\chi \quad , \tag{2.36}$$

[3] Usaremos o mais simples processo de redução dimensional que, efetivamente, consiste em postular que todos os campos do modelo em 4 dimensões independem da coordenada temporal x^3.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\chi}^{c}\widetilde{\partial}\psi &\to \overline{\chi}\gamma^{m}\partial_{m}\psi \quad , & (2.37)\\
iB_{\mu}\psi^{c}\sigma^{\mu}\widetilde{\chi} &\to iB_{m}\overline{\psi}\gamma^{m}\chi-\phi\overline{\psi}\chi \quad , & (2.38)\\
B_{\mu}B\partial^{\mu}A^{*} &\to B_{m}B\partial^{m}A^{*} \quad , & (2.39)\\
iA^{*}\widetilde{\chi}\widetilde{\rho} &\to A^{*}\overline{\chi}^{c}\rho \quad , & (2.40)\\
iB\psi^{c}\lambda &\to -B\overline{\psi}\lambda \quad , & (2.41)\\
B_{\mu}B^{\mu}A^{*}B &\to B_{m}B^{m}A^{*}B+\phi^{2}A^{*}B \quad , & (2.42)\\
i\psi_{+}\psi_{-} &\to -\overline{\psi}_{+}^{c}\psi_{-} \quad , & (2.43)\\
i\widetilde{\chi}_{+}\widetilde{\chi}_{-} &\to \overline{\chi}_{+}^{c}\chi_{-} \quad , & (2.44)
\end{aligned}
$$

onde os campos do lado esquerdo são definidos em D=(2+2) e os do lado direito são definidos em D=(1+2). O modo escalar, ϕ, provém da componente temporal B^3 do potencial B^μ.

Como resultado da redução dimensional, pode ser diretamente encontrada a seguinte ação supersimétrica em D=(1+2):

$$
\begin{aligned}
S_{\text{inv}}^{D=3} = \int d^3\hat{x}\Big\{ & -\frac{1}{4}i\Big(\overline{\lambda}\gamma^m\partial_m\rho+\overline{\rho}\gamma^m\partial_m\lambda\Big)-\frac{1}{8}\Big(G^*_{mn}G^{mn}+2\partial_m\phi^*\partial^m\phi\Big)-\frac{1}{4}D^*D+\\
& -F^*_+G_+-A^*_+\Box B_+-\frac{1}{2}i\overline{\psi}_+\gamma^m\partial_m\chi_+-qB_m\left(\frac{1}{2}i\overline{\psi}_+\gamma^m\chi_++A^*_+\partial^mB_+-B_+\partial^mA^*_+\right)+\\
& +\frac{1}{2}q\phi\overline{\psi}_+\chi_++q\Big(A^*_+\overline{\chi}^c_+\rho-B_+\overline{\psi}_+\lambda\Big)-\Big(qD+q^2B_mB^m+q^2\phi^2\Big)A^*_+B_++\\
& -F^*_-G_--A^*_-\Box B_--\frac{1}{2}i\overline{\psi}_-\gamma^m\partial_m\chi_-+qB_m\left(\frac{1}{2}i\overline{\psi}_-\gamma^m\chi_-+A^*_-\partial^mB_--B_-\partial^mA^*_-\right)+\\
& -\frac{1}{2}q\phi\overline{\psi}_-\chi_--q\Big(A^*_-\overline{\chi}^c_-\rho-B_-\overline{\psi}_-\lambda\Big)+\Big(qD-q^2B_mB^m-q^2\phi^2\Big)A^*_-B_-+\\
& -m\Big(\frac{1}{2}\overline{\psi}^c_+\psi_-+\frac{1}{2}\overline{\chi}^c_+\chi_-+A_+F_-+A_-F_+-B_+G_--B_-G_+\Big)\Big\}+\text{h.c.} \quad , \qquad (2.45)
\end{aligned}
$$

onde, após a redução dimensional, a constante de acoplamento q adquiriu dimensão de $(\text{mass})^{\frac{1}{2}}$.

Da análise da ação 3-dimensional[4] dada pela eq.(2.45), pode ser facilmente mostrado que o espectro estará inevitavelmente contaminado pela presença de campos de "ghost", já que o setor livre da ação é totalmente fora da diagonal nos campos de matéria em

[4]Os campos λ, ρ, ψ e χ são,agora, espinores de Dirac em D=(1+2).

3 dimensões. Portanto, devemos efetuar truncamentos, a fim de remover os graus de liberdades espúrios, do que resultará uma ação com supersimetria simples em D=(1+2). Antes de mais nada, para que façamos os truncamentos de forma coerente, precisamos diagonalizar inteiramente o setor livre, a fim de poder identificar os campos de "ghost". Devemos, também, diagonalizar o setor livre de gauge.

A diagonalização consiste em procurar por combinações lineares convenientes dos campos que conduzam a uma ação livre diagonal. Encontramos as seguintes transformações que efetuam o que se procura: $S_{\text{inv}}^{D=3}$:

1. setor de gauge:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\rho} + \widehat{\lambda}\right) \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\rho} - \widehat{\lambda}\right) \quad ; \tag{2.46}$$

2. setor de matéria fermiônica:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\psi}_{\pm} \mp \widehat{\psi}^{c}_{\mp} + \widehat{\chi}_{\pm} \pm \widehat{\chi}^{c}_{\mp}\right) \quad \text{e} \quad \chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\chi}_{\pm} \pm \widehat{\chi}^{c}_{\mp} - \widehat{\psi}_{\pm} \pm \widehat{\psi}^{c}_{\mp}\right) \quad ; \tag{2.47}$$

3. setor de matéria bosônica:

$$A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{A}_{\pm} - \widehat{B}_{\pm}\right) \quad \text{e} \quad B_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{A}_{\pm} + \widehat{B}_{\pm}\right) \quad ; \tag{2.48}$$

$$F_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{F}_{\pm} + \widehat{G}_{\pm}\right) \quad \text{e} \quad G_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{G}_{\pm} - \widehat{F}_{\pm}\right) \quad . \tag{2.49}$$

Por outro lado, para simplificar os termos de interação de Yukawa (acoplamentos matéria-gaugino), encontramos que são convenientes as seguintes redefinições de campos para o setor bosônico de matéria;

$$\widehat{A}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{A}_{\pm} \mp \breve{A}^{*}_{\mp}\right) \quad \text{e} \quad \widehat{F}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{F}_{\pm} \mp \breve{F}^{*}_{\mp}\right) \quad . \tag{2.50}$$

Substituindo estas redefinições de campos na ação (2.45), chega-se a uma ação diagonalizada, onde os campos, ϕ, $\widehat{\rho}$, $\widehat{\chi}_{+}$, $\widehat{\chi}_{-}$, $\widehat{B}_{+}$ e $\widehat{B}_{-}$ aparecem como "ghosts" de um modelo supersimétrico com N=2. Portanto, deverão ser truncados no processo de redução. Devemos, simultaneamente, truncar os campos componentes, $\widehat{G}_{+}$, $\widehat{G}_{-}$, D, a_m e τ [5]. O

[5] O campo a_m é a parte real de B_m, B_m=a_m+iA_m. Também, como $\widehat{\lambda}$ é um espinor de Dirac, podemos escrevê-lo em termos de dois espinores de Majorana: $\widehat{\lambda}$=τ+$i\breve{\lambda}$.

truncamento de τ é ditado pela supressão de a_m. Agora, a escolha de truncar a_m, ao invés de A_m, é baseada na análise dos acoplamentos do setor de matéria: A_m se acopla tanto à matéria fermiônica como à matéria escalar, e o interpretamos como sendo o campo do fóton em 3 dimensões.

Depois de realizar estes truncamentos, omitindo os símbolos ($\hat{}$) e ($\check{}$), encontramos a seguinte ação em D=(1+2):

$$
\begin{aligned}
S_{N=1}^{\tau_3\mathrm{QED}} = \int d^3\hat{x}\, \Big\{ & \frac{1}{2} i\overline{\lambda}\gamma^m\partial_m\lambda - \frac{1}{4}F_{mn}F^{mn} + \\
& -A_+^*\Box A_+ - A_-^*\Box A_- + i\overline{\psi}_+\gamma^m\partial_m\psi_+ + i\overline{\psi}_-\gamma^m\partial_m\psi_- + F_+^*F_+ + F_-^*F_- + \\
& -qA_m\Big(\overline{\psi}_+\gamma^m\psi_+ - \overline{\psi}_-\gamma^m\psi_- + iA_+^*\partial^m A_+ - iA_-^*\partial^m A_- - iA_+\partial^m A_+^* + iA_-\partial^m A_-^*\Big) + \\
& -iq\Big(A_+\overline{\psi}_+\lambda - A_-\overline{\psi}_-\lambda - A_+^*\overline{\lambda}\psi_+ + A_-^*\overline{\lambda}\psi_-\Big) + q^2A_mA^m\left(A_+^*A_+ + A_-^*A_-\right) + \\
& -m\Big(\overline{\psi}_+\psi_+ - \overline{\psi}_-\psi_- + A_+^*F_+ - A_-^*F_- + A_+F_+^* - A_-F_-^*\Big)\Big\} \quad . \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

Tal ação nada mais é que a estensão supersimétrica de um modelo de gauge que preserva a simetria de paridade em 3 dimensões, conhecido como $\tau_3\mathrm{QED}_{1+2}$ [15]. Contudo, para tornar mais explícita a nossa afirmação, vamos utilizar a formulação do superespaço em D=(1+2), onde os supercampos são convenientemente definidos e as convenções notacionais são fixadas em função da redução dimensional realizada.

Com a finalidade de formular a ação da super-$\tau_3\mathrm{QED}_{1+2}$, referimo-nos ao trabalho de Salam e Strathdee [22], onde o superespaço e os supercampos em D=(1+3) foram introduzidos originalmente. Estendendo suas idéias ao caso aqui presente, os elementos do superespaço são parametrizados por (x^m, θ), onde x^m são as coordenadas do espaço-tempo e as coordenadas fermiônicas, θ, são espinores de Majorana, θ^c=θ.[6]

Agora, estamos prontos para introduzir a formulação da super-τ_3QED simples via formalismo de supercampos. Como primeiro passo, definimos os supercampos escalares

[6] O espinor conjugado de carga é definido por ψ^c=$-C\overline{\psi}^T$, onde C=σ_y. As matrizes-γ que estamos utilizando, originárias da redução dimensional para D=(1+2), são: γ^m=$(\sigma_x, i\sigma_y, -i\sigma_z)$. Note que, para quaisquer objetos espinoriais, por exemplo, ψ e χ, o produto $\overline{\psi}\chi$ denota $\overline{\psi}_a\chi_a$. Para mais detalhes, veja o Apêndice C.

complexos com cargas-$U(1)$ opostas, Φ_+ e Φ_- , como

$$\Phi_\pm = A_\pm + \overline{\theta}\psi_\pm - \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta F_\pm \quad \text{e} \quad \Phi^\dagger_\pm = A^*_\pm + \overline{\psi}_\pm\theta - \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta F^*_\pm \quad , \tag{2.52}$$

onde $A_\pm$ são escalares complexos, $\psi_\pm$ são espinores de Dirac e $F_\pm$ são campos auxiliares escalares complexos.

No gauge de Wess-Zumino, a superconexão de gauge, Γ_a, é escrita como

$$\Gamma_a = i(\gamma^m\theta)_a A_m + \overline{\theta}\theta\lambda_a \quad \text{e} \quad \overline{\Gamma}_a = -i(\overline{\theta}\gamma^m)_a A_m + \overline{\theta}\theta\overline{\lambda}_a \quad , \tag{2.53}$$

onde A_m é o campo de gauge e λ_a é o gaugino (espinor de Majorana).

Definindo o supercampo "field-strength", W_a, de modo que

$$W_a = -\frac{1}{2}\overline{D}_b D_a \Gamma_b \quad , \tag{2.54}$$

com derivadas covariantes dadas por

$$D_a = \overline{\partial}_a - i(\gamma^m\theta)_a\partial_m \quad \text{e} \quad \overline{D}_a = -\partial_a + i(\overline{\theta}\gamma^m)_a\partial_m \quad , \tag{2.55}$$

encontra-se que

$$W_a = \lambda_a + \Sigma^{mn}{}_{ab}\theta_b F_{mn} - \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\, \gamma^m{}_{ab}\left(\partial_m\lambda_b\right) \tag{2.56}$$

e

$$\overline{W}_a = \overline{\lambda}_a - \overline{\theta}_b\Sigma^{mn}{}_{ba}F_{mn} + \frac{i}{2}\overline{\theta}\theta\left(\partial_m\overline{\lambda}_b\right)\gamma^m{}_{ba} \quad , \tag{2.57}$$

onde $\Sigma^{mn}=\frac{1}{4}[\gamma^m, \gamma^n]$ são os geradores do grupo de Lorentz em D=(1+2).

As derivadas covariantes de gauge que atuam nos campos de matéria com cargas-$U(1)$ opostas, Φ_+ e Φ_-, são respectivamente dadas por

$$\nabla_a\Phi_\pm = \left(D_a \mp iq\Gamma_a\right)\Phi_\pm \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_a\Phi^\dagger_\pm = \left(\overline{D}_a \pm iq\overline{\Gamma}_a\right)\Phi^\dagger_\pm \quad , \tag{2.58}$$

onde q é uma constante de acoplamento com dimensão de $(\text{mass})^{\frac{1}{2}}$.

Usando as definições previamente dadas para os supercampos (2.52),(2.53), (2.56)-(2.57), e as derivadas covariantes de gauge, (2.58), encontramos como construir a ação da super-τ_3QED$_{1+2}$ com N=1, dada pela eq.(2.51), no superespaço;

$$S_{N=1}^{\tau_3\text{QED}} = \int d\hat{v} \left\{ -\frac{1}{2}\overline{W}W + (\overline{\nabla}\Phi_+^\dagger)(\nabla\Phi_+) + (\overline{\nabla}\Phi_-^\dagger)(\nabla\Phi_-) + 2m(\Phi_+^\dagger\Phi_+ - \Phi_-^\dagger\Phi_-) \right\} , \tag{2.59}$$

onde, $d\hat{v}{\equiv}d^3\hat{x}d^2\theta$ é a medida do superespaço que adotamos e integral de Berezin vai ser definida como $\int d^2\theta= -\frac{1}{4}\bar{\partial}\partial$ (Apêndice C). Portanto, verifica-se que, fazendo-se uso da formulação de superespaço de D=(1+2), a ação (2.51) é, de fato, a versão com supersimetria simples da ação da τ_3QED$_{1+2}$.

Capítulo 3

Auto-Dualidade e Termo de Chern-Simons.

Neste capítulo, apresenta-se a formulação de Parkes-Siegel para o caso da super-QED_{2+2} massiva acoplada a um supermultiplete auto-dual [25]. Para isto, deve-se introduzir um supercampo chiral tipo multiplicador de Lagrange.Após realizar uma redução dimensional conveniente de (2+2) para (1+2) dimensões, e fazer alguns truncamentos, chega-se à estensão supersimétrica simples da $\tau_3 QED_{1+2}$ acoplada a um termo de Chern-Simons.

3.1 Introdução.

Recentemente, versões supersimétricas de uma teoria de Yang-Mills auto-dual e de um modelo de supergravidade auto-dual, ambos no espaço de Atiyah-Ward, foram formulados por Gates, Ketov e Nishino [10]. Também, por um método conveniente para a redução dimensional proposta por Nishino, as teorias de Chern-Simons N=1- e N=2-supersimétricas em D=(1+2) puderam ser geradas a partir da teoria N=2-super-Yang-Mills auto-dual em D=(2+2) [11].

O propósito deste capítulo é mostrar que a N=1-super-$\tau_3 QED_{1+2}$, acoplada a um termo de Chern-Simons em D=(1+2), pode ser obtida da N=1-super-QED_{2+2} massiva [19] apresentada no capítulo anterior. A redução dimensional aqui usada para mostrar a relação entre ambos os modelos foi proposta por Nishino na Ref..[11]. Truncamentos que preservam a supersimetria são necessários para suprimir modos dinâmicos não-físicos, assim como para garantir uma supersimetria simples em D=(1+2).

3.2 O modelo Abeliano auto-dual.

Para introduzir massa para o setor de matéria, procedemos do mesmo modo apresentado na Seção 2.3. A formulação devida a Parkes-Siegel [26], aplicada à N=1-super-QED$_{2+2}$ massiva acoplada a um supermultiplete auto-dual, é realizada introduzindo-se um supercampo chiral que tem o papel de um multiplicador de Lagrange, de acordo com a ação[1]

$$S^{\rm SD}_{\rm SQED} = -\int ds\; \Xi^{\rm c} W + \int dv\; \left(\Psi^{\dagger}_{+} e^{4qV}\widetilde{X}_{+} + \Psi^{\dagger}_{-} e^{-4qV}\widetilde{X}_{-}\right) + \\ + i\,m\left(\int ds\; \Psi_{+}\Psi_{-} - \int d\widetilde{s}\; \widetilde{X}_{+}\widetilde{X}_{-}\right) + \text{h.c.} \quad , \tag{3.1}$$

Nesta ação, a única inovação em relação àquela da Seção 2.3, é a substituição do termo cinético do setor de gauge pelo termo devido a Parkes e Siegel. O supercampo quiral multiplicador (Ξ) é definido como

$$\Xi_{\alpha}(x,\theta,\widetilde{\theta}) = e^{i\widetilde{\theta}\widetilde{\partial}\theta}\left[A_{\alpha}(x) + \theta^{\beta}\left(\epsilon_{\alpha\beta}E(x) - \sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}H_{\mu\nu}(x)\right) + i\theta^{2}F_{\alpha}(x)\right] \quad , \quad \widetilde{D}_{\dot{\beta}}\Xi_{\alpha} = 0 \quad , \tag{3.2}$$

onde A_{α} é um espinor de Weyl, E é um escalar complexo, $H_{\mu\nu}$ é um tensor de rank-2 complexo e antisimétrico, e F_{α} é um espinor de Weyl auxiliar. Os demais supercampos já foram definidos na Seção 2.3.

Adotando o gauge de Wess-Zumino, obtemos, da ação dada pela eq.(3.1), a seguinte ação em componentes:

$$S^{\rm SD}_{\rm SQED} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}H^{*}_{\mu\nu}\left(G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}\right) - i\Big(A^{\rm c}\partial\!\!\!/\widetilde{\rho} + F^{\rm c}\lambda\Big) - E^{*}D + \right. \\ -F^{*}_{+}G_{+} - A^{*}_{+}\Box B_{+} - \frac{1}{2}i\psi^{\rm c}_{+}\partial\!\!\!/\widetilde{\chi}_{+} - qB_{\mu}\left(\frac{1}{2}i\psi^{\rm c}_{+}\sigma^{\mu}\widetilde{\chi}_{+} + A^{*}_{+}\partial^{\mu}B_{+} - B_{+}\partial^{\mu}A^{*}_{+}\right) +$$

[1] A notação utilizada neste capítulo para D = 2+2 e D = 1+2 é idêntica à que foi utilizada no Capítulo 2, e é dada nos Apêndices 2 e 3.

$$+iq\Big(A_+^*\tilde{\chi}_+\tilde{\rho}+B_+\psi_+^c\lambda\Big)-\Big(qD+q^2B_\mu B^\mu\Big)A_+^*B_+ +$$
$$-F_-^*G_- - A_-^*\Box B_- - \frac{1}{2}i\psi_-^c\partial\!\!\!/\tilde{\chi}_- + qB_\mu\left(\frac{1}{2}i\psi_-^c\sigma^\mu\tilde{\chi}_- + A_-^*\partial^\mu B_- - B_-\partial^\mu A_-^*\right)+$$
$$-iq\Big(A_-^*\tilde{\chi}_-\tilde{\rho}+B_-\psi_-^c\lambda\Big)+\Big(qD-q^2B_\mu B^\mu\Big)A_-^*B_- +$$
$$+m\Big(\frac{1}{2}i\psi_+\psi_- - \frac{1}{2}i\tilde{\chi}_+\tilde{\chi}_- - A_+F_- - A_-F_+ + B_+G_- + B_-G_+\Big)\Big\}+\text{h.c.}\quad ,(3.3)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o "field-strength" usual associado a B_μ.

Com isto, vê-se que a equação de campo para $H^*_{\mu\nu}$ expressa a auto-dualidade de $G_{\mu\nu}$:

$$\frac{\delta S^{\rm SD}_{\rm SQED}}{\delta H^*_{\mu\nu}}=0 \quad\Longrightarrow\quad G^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}\quad . \tag{3.4}$$

As transformações de gauge do setor de matéria e do setor de gauge são aquelas dadas na Seção 2.3, Entretanto, temos que considerar tranformações adicionais correspondentes ao multiplete Ξ_α, a saber $\delta_g\Xi_\alpha$=0, que reúne, no gauge de Wess-Zumino, as seguintes transformações das componentes:

$$\delta_g A_\alpha=\delta_g F_\alpha=0\ \ ,\quad \delta_g E=0\ \ \text{e}\ \ \delta_g H_{\mu\nu}=0\quad . \tag{3.5}$$

Uma vez que a τ_3QED$_{1+2}$ acoplada a modelos topológicos em D=(1+2) tem sido usada em alguns tratamentos teóricos em problemas de Física da Matéria Condensada[14, 15], visamos, aqui, a obtenção de sua versão supersimétrica. Para este fim, faremos a redução dimensional da ação dada pela eq.(3.3), e o método de redução proposto por Nishino em [11] mostra-se bastante apropriado. Como este processo deve gerar uma supersimetria estendida [17, 18], serão necessários alguns truncamentos para recuperarmos uma supersimetria simples em D=(1+2), assim como suprimir modos não-físicos que, certamente, irão aparecer após ser realizada a redução dimensional.

3.3 O modelo reduzido em 3 dimensões.

Realizando a redução dimensional[2] "à la Nishino" [11], de D=(2+2) para D=(1+2), da ação (3.3), temos como resultado a seguinte ação supersimétrica em D=(1+2) :

$$
\begin{aligned}
S^{D=3} = \int d^3\hat{x} \Big\{ & \frac{\mu}{2}\epsilon^{klm}B_k^* G_{lm} + i\frac{\mu}{2}\overline{A}\gamma^m\partial_m\rho - \frac{\mu}{2}\overline{F}\lambda + \frac{\mu}{2}E^* D + \\
& - F_+^* G_+ - A_+^*\Box B_+ - \frac{1}{2}i\overline{\psi}_+\gamma^m\partial_m\chi_+ - qB_m\left(\frac{1}{2}i\overline{\psi}_+\gamma^m\chi_+ + A_+^*\partial^m B_+ - B_+\partial^m A_+^*\right) + \\
& + q\Big(A_+^*\overline{\chi}_+^c\rho - B_+\overline{\psi}_+\lambda\Big) - \left(qD + q^2 B_m B^m\right)A_+^* B_+ + \\
& - F_-^* G_- - A_-^*\Box B_- - \frac{1}{2}i\overline{\psi}_-\gamma^m\partial_m\chi_- + qB_m\left(\frac{1}{2}i\overline{\psi}_-\gamma^m\chi_- + A_-^*\partial^m B_- - B_-\partial^m A_-^*\right) + \\
& - q\Big(A_-^*\overline{\chi}_-^c\rho - B_-\overline{\psi}_-\lambda\Big) + \left(qD - q^2 B_m B^m\right)A_-^* B_- + \\
& - m\Big(\frac{1}{2}\overline{\psi}_+^c\psi_- + \frac{1}{2}\overline{\chi}_+^c\chi_- + A_+F_- + A_-F_+ - B_+G_- - B_-G_+\Big)\Big\} + \text{h.c.} \quad , \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

onde o parâmetro real, μ, tem dimensão de massa.

Uma vez que no espectro da ação dada pela eq.(3.6) temos a presença de estados de norma negativa, vão ser necessários truncamentos, a fim de suprimir estes modos não-físicos, Entretanto, para identificá-los, devemos diagonalizar o setor livre da ação (3.6).

Para a diagonalização do setor livre da ação (3.6), devemos encontrar combinações lineares dos campos, conforme feito na Seção 2.4. Encontramos as seguintes combinações:

1. setor de gauge:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \quad \text{e} \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \quad ; \qquad (3.7)$$

$$F = \sqrt{2}(\varphi + \phi) \quad \text{e} \quad \lambda = \sqrt{2}(\varphi - \phi) \quad ; \qquad (3.8)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{E} + \widehat{D}\right) \quad \text{e} \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{E} - \widehat{D}\right) \quad ; \qquad (3.9)$$

2. setores de matéria fermiônica e bosônica:

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\psi}_\pm \mp \widehat{\psi}_\mp^c + \widehat{\chi}_\pm \pm \widehat{\chi}_\mp^c\right) \quad \text{e} \quad \chi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{\chi}_\pm \pm \widehat{\chi}_\mp^c - \widehat{\psi}_\pm \pm \widehat{\psi}_\mp^c\right) \quad ; \qquad (3.10)$$

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{A}_\pm \mp \breve{A}_\mp^*\right) - \widehat{B}_\pm\right] \quad \text{e} \quad B_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{A}_\pm \mp \breve{A}_\mp^*\right) + \widehat{B}_\pm\right] \quad ; \qquad (3.11)$$

[2]Depois da redução dimensional, a métrica 3-dimensional torna-se η_{mn}=(+, −, −). Observe que os espinores tornam-se espinores de Dirac em D=(1+2)

$$F_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{F}_\pm \mp \breve{F}^*_\mp\right) + \widehat{G}_\pm\right] \quad \text{e} \quad G_\pm = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\breve{F}_\pm \mp \breve{F}^*_\mp\right) - \widehat{G}_\pm\right] \quad . \tag{3.12}$$

Substituindo estas redefinições de campos na ação (3.6), chegamos a uma ação diagonalizada, onde os campos η, $\widehat{\chi}_+$, $\widehat{\chi}_-$, $\widehat{B}_+$ e $\widehat{B}_-$ aparecem como "ghosts" na estrutura de um modelo supersimétrico com N=2. Devemos fazer os truncamentos necessários, tendo em mente que estamos procurando por um modelo supersimétrico com supersimetria N=1. Realizando os truncamentos dos "ghosts", η, $\widehat{\chi}_+$, $\widehat{\chi}_-$, $\widehat{B}_+$ e $\widehat{B}_-$, devemos, simultaneamente, truncar os campos $\widehat{G}_+$, $\widehat{G}_-$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, ξ, ϕ, a_m and τ. Após tais truncamentos, e omitindo os símbolos ($\widehat{}$) e ($\breve{}$). encontramos a seguinte ação em D=(1+2):

$$\begin{aligned} S^{\rm SCS}_{\tau_3{\rm QED}} = \int d^3\hat{x}\,\Big\{&\mu\epsilon^{klm}A_kF_{lm} - 2\mu\overline{\lambda}\lambda + \\ &- A^*_+\Box A_+ - A^*_-\Box A_- + i\overline{\psi}_+\gamma^m\partial_m\psi_+ + i\overline{\psi}_-\gamma^m\partial_m\psi_- + F^*_+F_+ + F^*_-F_- + \\ &- qA_m\Big(\overline{\psi}_+\gamma^m\psi_+ - \overline{\psi}_-\gamma^m\psi_- + iA^*_+\partial^m A_+ - iA^*_-\partial^m A_- - iA_+\partial^m A^*_+ + iA_-\partial^m A^*_-\Big) + \\ &- iq\Big(A_+\overline{\psi}_+\lambda - A_-\overline{\psi}_-\lambda - A^*_+\overline{\lambda}\psi_+ + A^*_-\overline{\lambda}\psi_-\Big) + q^2A_mA^m\left(A^*_+A_+ + A^*_-A_-\right) + \\ &- m\Big(\overline{\psi}_+\psi_+ - \overline{\psi}_-\psi_- + A^*_+F_+ - A^*_-F_- + A_+F^*_+ - A_-F^*_-\Big)\Big\} \qquad ; \end{aligned} \tag{3.13}$$

a qual, concluímos, é a extensão supersimétrica da ação que preserva a paridade minimamente acoplada ao campo de Chern-Simons [27, 14, 15]. Usando as definições prévias de supercampos (2.52),(2.53), (2.56)-(2.57), e das derivadas covariantes de gauge (2.58), encontramos como construir a ação da super-τ_3QED acoplada a um termo de super-Chern-Simons, no superespaço, e a lemos como:

$$S^{\rm SCS}_{\tau_3{\rm QED}} = \int d\hat{v}\left\{2\mu(\overline{\Gamma}W) + (\overline{\nabla}\Phi^\dagger_+)(\nabla\Phi_+) + (\overline{\nabla}\Phi^\dagger_-)(\nabla\Phi_-) + 2m(\Phi^\dagger_+\Phi_+ - \Phi^\dagger_-\Phi_-)\right\} , \tag{3.14}$$

que é a transcrição em supercampos da ação (3.13).

Nossa conclusão é que a N=1-super-QED$_{2+2}$ massiva, acoplada a um supermultiplete auto-dual, mostra características interessantes, quando realizado um esquema de redução dimensional apropriado. A redução dimensional "à la Nishino", aplicada ao nosso problema, mostrou-se bastante interessante, já que nos possibilitou, depois de truncamentos de modos não-físicos, obter como resultado final a N=1-super-Chern-Simons acoplada a um setor de matéria (super-τ_3QED$_{1+2}$). No capítulo precedente, sem a condição de auto-dualidade em D=(2+2), chegou-se à super-τ_3QED$_{1+2}$, caracterizada por preservar a paridade em 3 dimensões. Neste capítulo, mostra-se que a auto-dualidade conduz a um campo de Chern-Simons acoplado à matéria, ocorrendo, portanto, violação de paridade.

Conclusões Gerais

Um dos aspectos mais peculiares dos modelos de gauge Abelianos supersimétricos definidos nos espaços de Atiyah-Ward é a necessidade de se introduzir campos de gauge de natureza complexa. Este fato é decorrência da necessidade de se impor vínculos de quiralidade e anti-quiralidade sobre os supercampos que devem descrever o setor de matéria. Entretanto, poder-se-ia pensar que o mesmo resultado devesse ocorrer em 1+3 dimensões; este, porém, não é o caso, já que em 2+2, contrariamente ao caso do espaço de Minkowski, o complexo-conjugado de supercampos quirais (anti-quirais) são *também* quirais (anti-quirais).

Como discutido no Capítulo 2, o modelo Abeliano mais simples no espaço de Atiyah-Ward é baseado em um grupo do tipo U(1)$\otimes$U(1), com "gauging" simultâneo de uma simetria tipo-Weyl e uma simetria de fase como a usual na QED. Seria interessante averigüar, posteriormente, se a construção de modelos Abelianos em termos de supercampos lineares comportaria o mesmo tipo de propriedade.

Outro fato que se pode ressaltar é a possível equivalência entre o modelo Abeliano apresentado no Capítulo 2 e modelos-σ N=1-supersimétricos (também no espaço de Atiyah-Ward) com "gauging" do grupo de isotropia do espaço-alvo. Tal estudo encontra-se, no momento, em fase de elaboração [28].

No Capítulo 3, abordou-se a questão da auto-dualidade e a conexão com modelos de gauge com campos de Chern-Simons em 3 dimensões. Seria interessante estudar, a seguir, a redução dimensional do modelo auto-dual definido em D=(2+2) diretamente para D=(1+1), mediante um esquema de redução que preserve duas supersimetrias, o que pode vir a gerar algum modelo integrável ainda não discutido.

Finalizando, a experiência adquirida nos trabalhos aqui apresentados com supersimetria em D=(2+2) forneceu as bases para a construção de modelos-σ nos espaços de Atiyah-Ward; a estes modelos, está associada uma estrutura de Kähler com geometria especial [29]. Também, a compactificação para 2 e 3 dimensões destes modelos-σ acoplados as setor de Yang-Mills da supersimetria em D=(2+2), pode fornecer novos exemplos de modelos integráveis. Tal conjectura pode ser a base para o prosseguimento dos trabalhos que constituíram os Capítulos 2 e 3 desta tese.

Apêndice A

Representações de matrizes-γ para D dimensões.

Representação de Weyl (quiral).

A matriz γ_{D+1} tem autovalores ± 1, o que pode ser visto da eq.(1.26); estes podem ser convenientemente ordenados por meio de transformações unitárias. Assim, pode-se encontrar uma representação onde γ_{D+1} possui a forma

$$\gamma_{D+1} = \text{diagonal}(+, \cdots, + \,;\, -, \cdots, -) \,. \tag{A.1}$$

Esta é a chamada representação de Weyl. Nesta representação

$$P_{\mathrm{R}} = \text{diagonal}(+, \cdots, + \,;\, 0, \cdots, 0) \tag{A.2}$$

$$P_{\mathrm{L}} = \text{diagonal}(0, \cdots, 0 \,;\, +, \cdots, +) \,. \tag{A.3}$$

Uma vez que

$$\gamma^\mu \gamma_{D+1} + \gamma_{D+1} \gamma^\mu = \mathbf{0} \,, \tag{A.4}$$

a eq.(A.1) assegura a seguinte estrutura para as matrizes γ^μ :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \alpha^\mu \\ \tilde{\alpha}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \tag{A.5}$$

o que, por sua vez, conduz à forma diagonal para $\Sigma^{\mu\nu}$:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta_{\mathrm{R}}^{\mu\nu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_{\mathrm{L}}^{\mu\nu} \end{pmatrix} . \tag{A.6}$$

Seja

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}} \\ \psi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} , \tag{A.7}$$

onde $\psi_{\mathrm{R,L}}$ são os espinores de Weyl e possuem, cada um, $(2^{(D/2)-1})$ componentes complexas. Logo

$$\Psi_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{R}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} , \quad \Psi_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \psi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} , \tag{A.8}$$

e

$$\Sigma_{\mathrm{R}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta_{\mathrm{R}}^{\mu\nu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \quad \Sigma_{\mathrm{L}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_{\mathrm{L}}^{\mu\nu} \end{pmatrix} . \tag{A.9}$$

Nesta representação, os resultados da seção 1.3.1 tornam-se mais evidentes.

Dada a forma da eq.(A.5) para as matrizes-γ na representação de Weyl, facilmente verifica-se, utilizando a eq.(A.7) que, para t (ímpar), não pode ser construído um *termo de massa* que envolva um único setor de quiralidade. Procedendo do mesmo modo, encontra-se em contrapartida que, para t (par), não pode ser construído um *termo cinético* que envolva um único setor de quiralidade.

Representação de Majorana.

Para os casos em que $\epsilon = 1$, B, além de *unitária*, é *simétrica*. Assim, podemos decompô-la como

$$B = B_1 + iB_2, \quad B_1 \text{ e } B_2 \text{ reais e simétricas,} \tag{A.10}$$

de modo que

$$B^\dagger B = B_1^2 + B_2^2 + i[B_1, B_2] = \mathbb{1} \tag{A.11}$$

ou

$$\begin{cases} B_1^2 + B_2^2 = \mathbb{1} \\ [B_1, B_2] = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.12}$$

"Uma vez que B_1 e B_2 são *reais, simétricas* e *comutam* entre si, existe uma matriz *ortogonal* e *real* R e matrizes *diagonais* e *reais* b_1 e b_2 tais que

$$B_1 = Rb_1R^T \quad , \quad B_2 = Rb_2R^T \text{ ''}, \tag{A.13}$$

logo

$$B = R(b_1 + ib_2)R^T \equiv RbR^T \,, \tag{A.14}$$

de modo que

$$B^\dagger B = Rb^*bR^T = \mathbb{1} \,. \tag{A.15}$$

Assim sendo,

$$b = e^{iD}, \quad D \text{ diagonal e real} \tag{A.16}$$

portanto,

$$B = Re^{iD}R^T \,. \tag{A.17}$$

Teorema fundamental de Pauli

"As matrizes $\tilde{\gamma}^\mu$ e γ^μ são representações equivalentes da álgebra de Clifford, desde que

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \text{ ''} \tag{A.18}$$

De acordo com a eq.(1.4), na representação definida pelos $\tilde{\gamma}$'s, devemos encontrar $\tilde{B}$ que satisfaça a

$$\tilde{\gamma}^{\mu *} = \eta \tilde{B}\tilde{\gamma}^\mu \tilde{B}^{-1} \,. \tag{A.19}$$

Tem-se que

$$\tilde{B} = S^* B S^{-1}. \tag{A.20}$$

Assim, pode-se escrever, com a eq.(A.17), e as propriedades de ortogonalidade e realidade da matriz R, que

$$\tilde{B} = (SR)^* e^{iD} (SR)^{-1}. \tag{A.21}$$

A seguir, pode-se escolher

$$S = e^{\frac{1}{2}iD}R^T \tag{A.22}$$

unitária, com o quê se chega a

$$\widetilde{B} = \mathbb{1} \ , \tag{A.23}$$

e, conseqüentemente,

$$\widetilde{\gamma}^{\mu *} = \eta \widetilde{\gamma}^{\mu} \tag{A.24}$$

Na representação onde $B = \mathbb{1}$ (representação de Majorana), as matrizes-γ ou são todas reais, ou todas imaginárias puras; conseqüentemente, os geradores $\Sigma^{\mu\nu}$ são sempre reais.

Apêndice B

Notações gerais e convenções para D=2+2.

Métrica: $\eta_{\mu\nu}$=diag.(+,−,−,+), μ, ν=(0,1,2,3). O espinor de Dirac, na representação de Weyl, é lido como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} , \tag{B.1}$$

onde ψ e $\tilde{\chi}$ têm as seguintes componentes: ψ^{α}, $\alpha=(1,2)$, e $\tilde{\chi}^{\dot{\alpha}}$, $\dot{\alpha}=(\dot{1},\dot{2})$. As matrizes-$\gamma$ de Dirac, 4×4, satisfazem à álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \quad , \tag{B.2}$$

onde $\mathbb{1}_4$ é a matriz identidade 4×4. Valem as transformações de equivalência:

$$\gamma^{\mu\dagger} = -A\gamma^{\mu}A^{-1} \quad , \tag{B.3}$$

$$\gamma^{\mu *} = B\gamma^{\mu}B^{-1} \quad , \tag{B.4}$$

$$\gamma^{\mu T} = -C\gamma^{\mu}C^{-1} \quad , \tag{B.5}$$

onde $A=\gamma^0\gamma^3$. A matriz, B, e a matriz conjugação de carga, C, na representação para os espinores acima tomam a forma:

$$B = \begin{pmatrix} i\sigma_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i\sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} \epsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\epsilon} \end{pmatrix} \quad , \tag{B.6}$$

onde

$$\epsilon = i\sigma_y \quad \text{e} \quad \tilde{\epsilon} = -i\sigma_y \quad . \tag{B.7}$$

As matrizes-γ, na mesma representação, são escritas como:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad , \tag{B.8}$$

$$\gamma_5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{B.9}$$

$\mathbb{1}_2$ sendo a matriz identidade 2×2. As matrizes-σ de (B.8) têm suas componentes dadas por:

$$\sigma^\mu = (-i\sigma_x, \sigma_y, -\sigma_z, \mathbb{1}_2) \quad , \tag{B.10}$$

$$\tilde{\sigma}^\mu = (i\sigma_x, -\sigma_y, \sigma_z, \mathbb{1}_2) \quad , \tag{B.11}$$

onde

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{B.12}$$

são as usuais matrizes de Pauli. Os geradores de $\overline{\text{SO}}(2,2)$ para os espinores são escritos como:

$$\Sigma^{\kappa\lambda} = \tfrac{1}{4}[\gamma^\kappa, \gamma^\lambda] = \begin{pmatrix} \sigma^{\kappa\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\sigma}^{\kappa\lambda} \end{pmatrix} \quad . \tag{B.13}$$

Logo, usando as eqs. (B.8) e (B.13), encontramos que:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu) \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \quad . \tag{B.14}$$

A conjugação complexa das matrizes, σ^μ, $\tilde{\sigma}^\mu$, $\sigma^{\mu\nu}$ e $\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ resulta em

$$\sigma^{\mu *} = \sigma_z\sigma^\mu\sigma_z \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}^{\mu *} = \sigma_z\tilde{\sigma}^\mu\sigma_z \quad , \tag{B.15}$$

$$\sigma^{\mu\nu *} = \sigma_z\sigma^{\mu\nu}\sigma_z \quad \text{e} \quad \tilde{\sigma}^{\mu\nu *} = \sigma_z\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\sigma_z \quad . \tag{B.16}$$

Outras relações úteis envolvendo as matrizes-σ são dadas por:

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu}\widetilde{\sigma}^{\nu}) = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \tag{B.17}$$

$$(\sigma^{\mu}\widetilde{\sigma}^{\nu} + \sigma^{\nu}\widetilde{\sigma}^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\alpha}{}_{\beta} \quad , \tag{B.18}$$

$$(\widetilde{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} + \widetilde{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\alpha}{}_{\beta} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\alpha}{}_{\beta} \quad , \tag{B.19}$$

e

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\kappa\lambda}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} + \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}) \quad , \tag{B.20}$$

$$\mathrm{Tr}(\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}\widetilde{\sigma}^{\kappa\lambda}) = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda} - \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}) \quad . \tag{B.21}$$

O espinor conjugado de carga, Ψ^c, é definido como:

$$\Psi^c = B\Psi^* = C\overline{\Psi}^T \; , \tag{B.22}$$

com $\overline{\Psi}$=$\Psi^{\dagger}A$. e, na representação aqui usada, é lido como:

$$\Psi^c = \begin{pmatrix} \psi^c \\ \widetilde{\chi}^c \end{pmatrix} \; , \tag{B.23}$$

onde $\psi^c \equiv i\sigma_z\psi^*$ e $\widetilde{\chi}^c \equiv i\sigma_z\widetilde{\chi}^*$. Pode ser visto, do Capítulo 1, que ψ^c e $\widetilde{\chi}^c$ transformam-se do mesmo modo que ψ e $\widetilde{\chi}$, respectivamente; portanto, os espinores de Weyl conjugados de carga, ψ^c e $\widetilde{\chi}^c$, devem ter como componentes $\psi^{c\alpha}$ e $\widetilde{\chi}^{c\dot{\alpha}}$. A imposição da condição de Majorana sobre Ψ resulta nos chamados espinores de Majorana-Weyl, que satisfazem a ψ^c=ψ e $\widetilde{\chi}^c$= $\widetilde{\chi}$.

Convenções de índices.

Para todos ψ, $\widetilde{\chi}$, σ^{μ}, $\widetilde{\sigma}^{\mu}$, ϵ, $\widetilde{\epsilon}$ que aparecem no texto, adotamos as seguintes convenções para a estrutura de índices: ψ^{α}, $\widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}$, $\sigma^{\mu\alpha}{}_{\dot{\alpha}}$, $\widetilde{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}}{}_{\alpha}$, $\epsilon_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$. Adicionalmente, consideramos os símbolos $\epsilon^{\alpha\beta}$ and $\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, tais que, $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma}$=$\delta^{\alpha}{}_{\gamma}$ e, $\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\epsilon}_{\dot{\beta}\dot{\gamma}}$=$\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}}$, que atuam sobre os dois setores $SL(2,\mathbb{R})$ independentes. Logo os índices espinoriais são levantados e abaixados de acordo com as regras:

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \quad \mathrm{e} \quad \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \quad , \tag{B.24}$$

$$\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} = \widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\chi}^{\dot{\beta}} \quad \text{e} \quad \widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}} = \widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\chi}_{\dot{\beta}} \quad . \tag{B.25}$$

Os espinores de Weyl conjugados de carga são dados por:

$$\psi^{c\,\alpha} = (i\sigma_z\psi^*)^{\alpha} \quad , \quad \widetilde{\chi}^{c\,\dot{\alpha}} = (i\sigma_z\widetilde{\chi}^*)^{\dot{\alpha}} \quad . \tag{B.26}$$

Adota-se uma notação compacta para os bilineares fermiônicos:

$$\psi^{\alpha}\psi_{\alpha} \equiv \psi^2 \quad \text{e} \quad \psi^{\alpha}\lambda_{\alpha} \equiv \psi\lambda = \lambda\psi \quad , \tag{B.27}$$

$$\widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}_{\dot{\alpha}} \equiv \widetilde{\chi}^2 \quad \text{e} \quad \widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\rho}_{\dot{\alpha}} \equiv \widetilde{\chi}\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}\widetilde{\chi} \quad , \tag{B.28}$$

$$\psi^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\widetilde{\chi}^{\dot{\alpha}} \equiv \psi\sigma^{\mu}\widetilde{\chi} = -\widetilde{\chi}\widetilde{\sigma}^{\mu}\psi \quad , \tag{B.29}$$

$$\widetilde{\rho}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\lambda^{\alpha} \equiv \widetilde{\rho}\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda = -\lambda\sigma^{\mu}\widetilde{\rho} \quad . \tag{B.30}$$

A conjugação complexa resulta em:

$$(i\psi\lambda)^* = i\psi^c\lambda^c \quad , \quad (i\widetilde{\chi}\widetilde{\rho})^* = i\widetilde{\chi}^c\widetilde{\rho}^c \quad , \tag{B.31}$$

$$(i\psi\sigma^{\mu}\widetilde{\chi})^* = i\psi^c\sigma^{\mu}\widetilde{\chi}^c \quad , \quad (i\widetilde{\rho}\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda)^* = i\widetilde{\rho}^c\widetilde{\sigma}^{\mu}\lambda^c \quad . \tag{B.32}$$

Algumas relações úteis para os espinores de Majorana-Weyl, θ e $\widetilde{\theta}$, são dadas a seguir:

$$\theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta^2 \quad , \tag{B.33}$$

$$\theta_{\alpha}\theta_{\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta^2 \quad , \tag{B.34}$$

$$\widetilde{\theta}^{\dot{\alpha}}\widetilde{\theta}^{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\widetilde{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\theta}^2 \quad , \tag{B.35}$$

$$\widetilde{\theta}_{\dot{\alpha}}\widetilde{\theta}_{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\widetilde{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\widetilde{\theta}^2 \quad , \tag{B.36}$$

$$\theta\sigma^{\mu}\widetilde{\theta}\;\theta\sigma^{\nu}\widetilde{\theta} = \frac{1}{2}\theta^2\widetilde{\theta}^2\eta^{\mu\nu} \quad . \tag{B.37}$$

As derivadas fermiônicas são definidas como:

$$\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \quad , \tag{B.38}$$

$$\widetilde{\partial}_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial\widetilde{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad . \tag{B.39}$$

Logo, segue que:

$$\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^{\ \beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^{\dot\beta} = \delta_{\dot\alpha}^{\ \dot\beta} \quad , \tag{B.40}$$

$$\partial^\alpha \theta_\beta = -\delta^\alpha_{\ \beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}_{\dot\beta} = -\delta^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta} \quad , \tag{B.41}$$

$$\partial_\alpha \theta_\beta = -\epsilon_{\alpha\beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}_{\dot\beta} = -\widetilde{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta} \quad , \tag{B.42}$$

$$\partial^\alpha \theta^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^{\dot\beta} = \widetilde{\epsilon}^{\dot\alpha\dot\beta} \quad , \tag{B.43}$$

$$\partial_\alpha \theta^2 = 2\theta_\alpha \quad , \quad \widetilde{\partial}_{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^2 = 2\widetilde{\theta}_{\dot\alpha} \quad , \tag{B.44}$$

$$\partial^\alpha \theta^2 = 2\theta^\alpha \quad , \quad \widetilde{\partial}^{\dot\alpha} \widetilde{\theta}^2 = 2\widetilde{\theta}^{\dot\alpha} \quad , \tag{B.45}$$

$$\partial^2 \theta^2 = -4 \quad , \quad \widetilde{\partial}^2 \widetilde{\theta}^2 = -4 \quad . \tag{B.46}$$

As derivadas bosônicas são definidas como:

$$\partial\!\!\!/ \equiv \epsilon\sigma^\mu \partial_\mu \quad , \tag{B.47}$$

$$\widetilde{\partial\!\!\!/} \equiv \widetilde{\epsilon}\widetilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad . \tag{B.48}$$

As medidas no superespaço adotada para o espaço de Atiyah-Ward são:

$$ds \equiv d^4x d^2\theta \quad , \quad d\widetilde{s} \equiv d^4x d^2\widetilde{\theta} \quad \text{e} \quad dv \equiv d^4x d^2\theta d^2\widetilde{\theta} \quad , \tag{B.49}$$

onde foram tomadas as seguintes condições de normalização

$$\int d^2\theta \; \theta^2 = 1 \quad \text{and} \quad \int d^2\widetilde{\theta} \; \widetilde{\theta}^2 = 1 \quad . \tag{B.50}$$

Para um supercampo genérico, $\Phi(x, \theta, \widetilde{\theta})$, pode-se, mostrar que:

$$\int d^2\theta \; \Phi = -\frac{1}{4}\partial^2\Phi = -\frac{1}{4}D^2\Phi \;|_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \quad , \quad \int d^2\widetilde{\theta} \; \Phi = -\frac{1}{4}\widetilde{\partial}^2\Phi = -\frac{1}{4}\widetilde{D}^2\Phi \;|_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \tag{B.51}$$

$$\text{e} \quad \int d^2\theta d^2\widetilde{\theta} \; \Phi = \frac{1}{16}\partial^2\widetilde{\partial}^2\Phi = \frac{1}{16}D^2\widetilde{D}^2\Phi \;|_{\theta=\widetilde{\theta}=0} \quad . \tag{B.52}$$

Apêndice C

Convenções gerais para D=1+2.

Métrica: η_{mn}=diag.(+,−,−), m, n=(0,1,2). As matrizes- γ de Dirac, 2×2, que satisfazem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn}\mathbb{1}_2 \quad , \tag{C.1}$$

são dadas por

$$\gamma^m = i\sigma^m = -i\tilde{\sigma}^m = (\sigma_x, i\sigma_y, -i\sigma_z) \quad , \tag{C.2}$$

onde σ^m e $\tilde{\sigma}^m$ são definidos pelas eqs.(B.10) e (B.11). Em D=(1+2), as matrizes-γ satisfazem a uma relação adicional

$$\gamma^m\gamma^n = \eta^{mn}\mathbb{1}_2 + i\epsilon^{mnl}\gamma_l \quad . \tag{C.3}$$

Temos os seguintes geradores do grupo $\overline{\mathrm{SO}}(1,2)$ na representação espinorial:

$$\Sigma^{kl} = \tfrac{1}{4}[\gamma^k, \gamma^l] \quad . \tag{C.4}$$

Isto leva às relações:

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma^l\Sigma^{mn}\right) = i\epsilon^{lmn} \quad . \tag{C.5}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\Sigma^{kl}\Sigma^{mn}\right) = -\frac{1}{2}\left(\eta^{km}\eta^{ln} - \eta^{kn}\eta^{lm}\right) \quad . \tag{C.6}$$

A matriz conjugação de carga é dada por

$$C = -i\epsilon = i\tilde{\epsilon} = \sigma_y \quad , \tag{C.7}$$

onde ϵ and $\widetilde{\epsilon}$ são definidos pela eq.(B.7). Vale também a identidade

$$C_{ab}C_{cd} = \delta_{ad}\delta bc - \delta_{ac}\delta_{bd} \ . \tag{C.8}$$

Os espinores conjugado de carga e adjunto são, respectivamente, definidos por

$$\psi^{c} = -C\overline{\psi}^{T} \quad \text{e} \quad \overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{0} \quad . \tag{C.9}$$

Algumas relações úteis envolvendo bilineares espinoriais são apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}\chi)^{T} &= \overline{\chi}^{c}\psi^{c} \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\chi)^{T} &= -i\overline{\chi}^{c}\gamma^{m}\psi^{c} \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\partial_{m}\chi)^{T} &= i\overline{\chi}^{c}\gamma^{m}\partial_{m}\psi^{c} \quad ; \end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}\chi)^{*} &= \overline{\psi}^{c}\chi^{c} \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\chi)^{*} &= i\overline{\psi}^{c}\gamma^{m}\chi^{c} \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\partial_{m}\chi)^{*} &= i\overline{\psi}^{c}\gamma^{m}\partial_{m}\chi^{c} \quad ; \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned} (\overline{\psi}\chi)^{\dagger} &= \overline{\chi}\psi \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\chi)^{\dagger} &= -i\overline{\chi}\gamma^{m}\psi \quad , \\ (i\overline{\psi}\gamma^{m}\partial_{m}\chi)^{\dagger} &= i\overline{\chi}\gamma^{m}\partial_{m}\psi \quad . \end{aligned} \tag{C.12}$$

Como θ é um espinor de Majorana ($\theta^{c}{=}\theta$), usando as eqs.(C.7) e (C.9), encontramos que

$$\theta_a = (\overline{\theta}C)_a \quad , \quad \overline{\theta}_a = -(C\theta)_a \quad ; \tag{C.13}$$

$$\theta_a\theta_b = -\frac{1}{2}\overline{\theta}\theta C_{ab} \quad , \quad \overline{\theta}_a\overline{\theta}_b = \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta C_{ab} \quad ; \tag{C.14}$$

$$\overline{\theta}_a\theta_b = \frac{1}{2}\overline{\theta}\theta\ \delta_{ab} \quad , \tag{C.15}$$

$$\overline{\theta}\theta \equiv \overline{\theta}_a\theta_a \quad . \tag{C.16}$$

As derivadas fermiônicas em $D{=}(1{+}2)$ são definidas como

$$\partial_a\theta_b = \delta_{ab} \quad , \quad \overline{\partial}_a\overline{\theta}_b = \delta_{ab} \quad ; \tag{C.17}$$

$$\partial_a\overline{\theta}_b = C_{ab} \quad , \quad \overline{\partial}_a\theta_b = C_{ab} \quad ; \tag{C.18}$$

$$\partial_a\overline{\theta}\theta = -2\overline{\theta}_a \quad , \quad \overline{\partial}_a\overline{\theta}\theta = 2\theta_a \quad ; \tag{C.19}$$

$$(\overline{\partial}\partial)(\overline{\theta}\theta) = -4 \quad . \tag{C.20}$$

Valem, ainda, as relações:

$$\partial_a = -(\overline{\partial}C)_a \quad \text{e} \quad \overline{\partial}_a = (C\partial)_a \, . \tag{C.21}$$

A medida de integração no superespaço para o espaço-tempo[1] de dimensão D=(1+2) é

$$d\hat{v} \equiv d^3\hat{x}d^2\theta \quad ; \tag{C.22}$$

a medida dada na equação acima respeita a condição de normalização

$$\int d^2\theta \, \overline{\theta}\theta = 1 \quad . \tag{C.23}$$

As superderivadas covariantes satisfazem a seguinte álgebra

$$\{D_a, D_b\} = 2i(\gamma^m C)_{ab} \, \partial_m \quad , \tag{C.24}$$

$$\{\overline{D}_a, \overline{D}_b\} = -2i(C\gamma^m)_{ab} \, \partial_m \quad , \tag{C.25}$$

$$\{D_a, \overline{D}_b\} = 2i\gamma^m_{ab} \, \partial_m \quad , \tag{C.26}$$

e são dadas por

$$D_a = \overline{\partial}_a - i(\gamma^m\theta)_a\partial_m \; , \; \overline{D}_a = -\partial_a + i(\overline{\theta}\gamma^m)_a\partial_m \quad . \tag{C.27}$$

e segue que

$$D_a = (\overline{D}C)_a \quad \text{e} \quad \overline{D}_a = -(CD)_a \tag{C.28}$$

$$\overline{D}D = \overline{\partial}\partial - 2i(\gamma^m\theta)_a\partial_a\partial_m + \overline{\theta}\theta\Box \tag{C.29}$$

$$D_aD_b = i(\gamma^m C)_{ab}\partial_m - \tfrac{1}{2}C_{ab}\overline{D}D \tag{C.30}$$

$$\overline{D}_bD_aD_b = 0 \tag{C.31}$$

$$\overline{D}DD_a = -D_a\overline{D}D = 2i(\gamma^m C)_{ab}\partial_m\overline{D}_b \tag{C.32}$$

$$(\overline{D}D)^2 = -4\Box \, . \tag{C.33}$$

[1] O símbolo de chapéu ($\hat{}$) sobre as coordenadas do espaço-tempo 3-dimensional é usado para distingüi-las das coordenadas do espaço de Atiyah-Ward.

Para qualquer supercampo, $\Phi(\hat{x},\theta)$, pode se mostrar que

$$\int d^2\theta\ \Phi = -\frac{1}{4}\bar{\partial}\partial\Phi = -\frac{1}{4}\overline{D}D\Phi\mid_{\theta=0} \quad . \tag{C.34}$$

Referências

[1] M.A. De Andrade, *Mod.Phys.Lett.* **A10** (1995) 961

[2] T. Kugo e P. Townsend, *Nucl. Phys.* **B221** (1983) 357;
C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B211** (1983) 177.

[3] F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253.

[4] J. Scherk, em *Recent Developments in Gravitation*, ed. M. Lévy e S. Deser, Plenum Press, New York (1979).

[5] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz e Y. S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **B59** (1975) 85 ;
R. S. Ward, *Phys. Lett.* **B61** (1977) 81 ;
M. F. Atiyah e R. S. Ward, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977) 117 ;
E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. C. Yates e P. Goddard, *Comm. Math. Phys.* **58** (1978) 223 ;
E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 121.

[6] M. F. Atiyah, *unpublished* ;
R. S. Ward, *Phil. Trans. R. London* **A315** (1985) 451 ;
N. J. Hitchin, *Proc. London Math. Soc.* **55** (1987) 59.

[7] H. Ooguri e C. Vafa, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 1389 ;
H. Ooguri e C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B361** (1991) 469 ;
H. Ooguri e C. Vafa, *Nucl. Phys.* **B367** (1991) 83.

[8] S. J. Gates Jr. e H. Nishino, *Mod. Phys. Lett.* **A7** (1992) 2543.

[9] S. J. Gates Jr., S. V. Ketov e H. Nishino, *Phys. Lett.* **B307** (1993) 323.

[10] S. J. Gates Jr., S. V. Ketov e H. Nishino, *Phys. Lett.* **B297** (1992) 99 ;
S. J. Gates Jr., S. V. Ketov e H. Nishino, *Nucl. Phys.* **B393** (1993) 149.

[11] H. Nishino, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 3255.

[12] S. Weinberg, *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, ed. A. Zichichi, Plenum Press (New York, 1978) ;
A. Linde, *Rep. Progr. Phys.* **42** (1979) 389 ;
D. Gross, R. D. Pisarski e L. Yaffe *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43.

[13] O. Foda, *Nucl. Phys.* **B300** (1988) 611 ;
Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten e B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B3** (1989) 1001 ;
J. D. Lykken, *Chern-Simons and Anyonic Superconductivity*, talk given at the fourth annual Superstring Workshop, "Strings 90", Texas A & M University (Texas, March 1990).

[14] N. Dorey e N. E. Mavromatos, *Phys. Lett.* **B266** (1991) 163 ;
N. Dorey e N. E. Mavromatos, *Nucl. Phys.* **B386** (1992) 614.

[15] R. D. Pisarski, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2423 ;
T. W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali e L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev.* **D33** (1986) 3704 ;
R. Mackenzie e F. Wilczek, *Int. J. Mod. Phys.* **A3** (1988) 2827 ;
G. W. Semenoff e P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328** (1989) 753 ;
G. W. Semenoff e L. C. R. Wijewardhana, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2633 ;
A. Kovner e B. Rosenstein, *Mod. Phys. Lett.* **A5** (1990) 2661.

[16] F. Delduc, C. Lucchesi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 313 ;
A. Blasi, O. Piguet e S. P. Sorella, *Nucl. Phys.* **B356** (1991) 154 ;
C. Lucchesi e O. Piguet, *Nucl. Phys.* **B381** (1992) 281.

[17] J. Scherk, *Extended Supersymmetry and extended Supergravity Theories*, Recent Developments in Gravitation, Cargèse 1978, Ed. M. Lévy e S. Deser, Plenum Press ;
L. Brink, J. H. Schwarz e J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B121** (1977) 77 ;
F. Gliozzi, J. Scherk e D. Olive, *Nucl. Phys.* **B122** (1977) 253 ;
J. Scherk e J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 61.

[18] M. F. Sohnius, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39 ;
P. van Nieuwenhuizen, *An Introduction to Simple Supergravity and the Kaluza-Klein Program*, Relativity, Groups and Topology II, Les Houches 1984, Ed. B.S. de Witt e R. Stora, North-Holland.

[19] M. A. De Andrade e O. M. Del Cima, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 95 ;
M.A. De Andrade e O.M. Del Cima, *Super-τ_3QED and the dimensional reduction of N=1 super-QED_{2+2}* , hep-th 9501002, aceito para publicação em *Int. J. Mod. Phys.* **A**.

[20] S. J. Gates Jr., M. T. Grisaru, M. Roček e W. Siegel, *Superspace*, Benjamin/Cummings (Reading, 1983) ;
J. Wess e J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (Princeton, 1983).

[21] O. Piguet e K. Sibold, *Renormalized Supersymmetry*, Birkhäuser Press (Boston, 1986).

[22] A. Salam e J. S. Strathdee, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 353 ;
A. Salam e J. S. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477 ;
A. Salam e J. S. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B80** (1974) 499 ;
A. Salam e J. S. Strathdee, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 1521.

[23] J. Wess e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39 ;
J. Wess e B. Zumino, *Phys. Lett.* **B49** (1974) 52 ;
J. Wess e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 1 ;
S. Ferrara e B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 413.

[24] O. Piguet, J. A. Helayël-Neto e S. P. Sorella, *comunicações privadas.*

[25] M.A. De Andrade, O.M. Del Cima e L.P. Colatto, *N=1 super-Chern-Simons coupled to parity-preserving matter from Atiyah-Ward space-time*, ICTP-preprint IC/95/136, hep-th 9506146, aceito para publicação em *Phys.Lett.* **B**.

[26] A. Parkes, *Phys. Lett.* **B286** (1992) 265 ;
W. Siegel, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 2504.

[27] W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B156** (1979) 135 ;
J. Schonfeld, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 157 ;
R. Jackiw e S. Templeton, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2291 ;
S. Deser e R. Jackiw, *Phys. Lett.* **B139** (1984) 371 ;
S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 975 ;
S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140** (1982) 372.

[28] M. Carvalho, M.A. De Andrade, O.M. Del Cima e L.C.Q. Vilar, trabalho em andamento.

[29] M. Carvalho, L.C.Q. Vilar e J.A. Helayël-Neto *Non-Linear Supersymmetric σ-Models and their Gauging in the Atiyah-Ward Space-Time*, hep-th 9507163.

"CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DA SUPERSIMETRIA EM ESPAÇOS DE ATIYAH-WARD"

Marco Antonio de Andrade

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

J. A. Helayël - Neto.

José Abdalla Helayël-Neto - Presidente

Olivier Piguet

Silvio Paolo Sorella

Sílvio Paolo Sorella

Francisco Caruso Neto

Maurício W. de Oliveira

Maurício Werneck de Oliveira

Sebastião Alves Dias

Sebastião Alves Dias - Suplente

Rio de Janeiro, 12 de abril de 1996