TESE DE MESTRADO

Matriz Simplética e Transformações de Gauge em Super-QED

Danilo Teixeira Alves

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro/Agosto de 1996

Em muitas pessoas gostaria de dar um grande abraço, por toda a colaboração companhia e carinho. A todas dedico a amizade. Em especial a Edgardo Cheb-Terrab, pelas horas e horas que dedicou a me ouvir, incentivar, corrigir, ensinar. Com muita admiração um grande, super-abração .

Ao CNPq, pela bolsa.

Índice

A Sandra Maria, mãe, professora (tardes e tardes) e amiga.

A Armando Alves, pai, professor (muito bem...) e amigo.

A Cléo de Moura, vó, professora (comensalismo) e amiga.

Beijos, abraços, admiração e muito amor;

Resumo

Nesta tese apresentamos um estudo sobre os métodos de quantização de Dirac e Faddeev-Jackiw. Propomos o uso do formalimo simplético num contexto hamiltoniano e encontramos a relação entre a matriz simplética e as transformações de gauge em Super-QED.

Em muitas pessoas gostaria de dar um grande abraço, por toda a colaboração companhia e carinho. A todas dedico a amizade. Em especial a Edgardo, pelas horas e horas que dedicou a me ouvir, incentivar, corrigir.... Com muita admiração um grande, super-abração .

Introdução

O trabalho apresentado nesta tese está relacionado a formalismos para sistemas vinculados e com invariância de gauge. Um histórico do desenvolvimento teórico na área, a modo de contexto, resume-se a seguir.

Até 1950 o procedimento de passagem do formalismo Lagrangeano para o formalismo Hamiltoniano requeria que a Lagrangeana fosse não singular. Foi então que Dirac mostrou como fazer tal passagem, quando tem-se a Lagrangeana singular. No caso não singular, a passagem para a teoria quântica se dá mapeando momenta e coordenadas em operadores lineares, e parênteses de Poisson (PB) em comutadores. Enquanto que no caso singular, segundo Dirac, a passagem se dá mapeando os *parênteses generalizados de Poisson* (parênteses de Dirac (DB)), ao invés dos PB.

Em sistemas não singulares é possível arrumar as equações de Hamilton em notação matricial (simplética), tal que os PB fundamentais coincidem como os elementos de uma certa matriz[1] invertida[2]. No caso de sistemas singulares, é possível obter os DB também

[1]Dos coeficientes das derivadas temporais das velocidaes e momenta.

como os elementos da inversa de uma certa matriz: a matriz dos parênteses de Lagrange restritos (vide Hanson, Regge e Teitelboin [8], 1974), desde que se use o formalismo de *Lagrangeanas linearizadas* (lineares nas velocidades).

Em 1988 Faddeev-Jackiw (FJ) retomaram essa idéia e, de modo mais formal, propuseram um "método alternativo" [16] ao método de Dirac, partindo de Lagrangeanas linearizadas e obtendo basicamente os DB como elementos da inversa da matriz simplética; esta última agora definida de maneira geral em termos de 2-formas. A motivação desse trabalho estava, em parte, em evitar a categorização de vínculos em primeira e segunda classes, primários e secundários, etc. característica do formalismo desenvolvido por Dirac. A partir de FJ, uma série de trabalhos (exemplo [17, 18, 19, 20]) foram publicados no contexto do "novo método" [19], basicamente estendendo-o para o caso de 2-formas simpléticas singulares [20, 23], verificando a sua consistência e comparando-o com o método de Dirac.

Quase todos os trabalhos referência desta tese tendem a remarcar as *diferenças* entre os dois métodos, embora concluam que ambos são *equivalentes* no sentido de que obtêm os mesmos *parênteses generalizados de Poisson* de um dado sistema.

Em 1992 Barcelos-Wotzasek-Montani (BWM) [20, 25, 26], no contexto do método FJ, mostraram que se o algoritmo de construção da matriz simplética não resulta numa matriz inversível, então os modos nulos da *última* matriz (pré-simplética) obtida estão relacionados com *transformações de gauge frente às quais o sistema é invariante.*

Chegamos assim às questões principais desta tese, que são: a) estudar quais são, em definitivo, as *diferenças* e *equivalências* entre os métodos propostos por Dirac e FJ; e b) utilizar-se de uma combinação dos formalismos de Dirac e FJ e aplicar as idéias de BWM à supersimetria.

Mais concretamente, em relação ao item a) mostramos que é possível estender o conceito de matriz simplética, associada ao formalismo de lagrangeanas linearizadas do método de FJ, de modo a ser construída diretamente de um formalismo Hamiltoniano, e como uma alternativa à construção das matrizes dos PB entre os vínculos (formalismo de Dirac). Também mostramos uma prescrição simples para linearizar lagrangeanas singulares ou não, baseada nas transformações de Legendre, com a qual lineariza-se lagrangeanas de qualquer grau e que funciona mesmo no superespaço (é costume haver dificuldades em ambos casos).

A seguir, em relação ao item b), partindo de um formalismo Hamiltoniano, mas trabalhando com matrizes simpléticas, determinamos a conexão entre os modos nulos da matriz pré-simplética e as transformações de gauge para a super-QED.

Organizamos a exposição da seguinte forma. No capítulo 1 fazemos uma breve discussão sobre o método de Dirac. No capítulo 2 discutimos métodos de linearização de lagrangeanas. No capítulo 3 expomos brevemente o método de FJ. No capítulo 4 comparamos os procedimentos de ambos os métodos. No capítulo 5 introduzimos as matrizes simpléticas no contexto do método de Dirac e discutimos a extensão da proposta a sistemas contínuos. No capítulo 6 determinamos a relação entre os modos nulos da matriz simplética e as transformações de gauge para a lagrangeana de Super-QED. Finalmente, nas Conclusões é feito um balanço geral deste trabalho e discutidas algumas possíveis extensões.

Capítulo 1

Métodos de quantização para sistemas vinculados

Neste capítulo faz-se uma breve revisão dos métodos de quantização para sistemas vinculados. Concretamente, trataremos do método de Dirac [1], e do método proposto mais recentemente por Faddeev e Jackiw [16], junto com as variantes propostas por Barcelos e Wotzasek [20]. A ideia consiste em, alem de expor os métodos, focalizar os aspectos que servem de elo entre ambos. Quanto à notação usada neste capítulo e ao longo da tese, ela é praticamente igual à da referência [9].

1.1 Método de Dirac

Considere-se um sistema dinâmico com N graus de liberdade, descrito por uma Lagrangeana $L(q_i, \dot{q}_i)$ singular, com posto da matriz hessiana igual a $R < N$. Os índices i, j

assumem os valores:

$$i, j : 1 \to N. \tag{1.1}$$

Ao tentarmos escrever as velocidades como função das coordenadas e momenta[1] obteremos[9]:

$$\dot{q}_a \approx f_a(q_i, p_\alpha, \dot{q}_\rho) \tag{1.2}$$

$$p_\rho \approx g_\rho(q_i, p_\alpha), \tag{1.3}$$

onde $(a, \alpha) : 1 \to R$ e $(\gamma, \rho) : R + 1 \to N$. Note-se que os índices a, α estão ligados com as velocidades *inversíveis*, enquanto os ρ, γ com as *não inversíveis*. De acordo com [9], define-se a Hamiltoniana para o caso singular como:

$$H_c = p_a f_a(q_i, p_\alpha, \dot{q}_\rho) + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - L(q_i, f_a(q_i, p_\alpha, \dot{q}_\rho), \dot{q}_\rho), \tag{1.4}$$

As equações de Hamilton para esse caso serão:

$$\dot{q}_a \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_a} - \dot{q}_\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial p_a} \tag{1.5}$$

$$\dot{p}_a \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_a} + \dot{q}_\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial q_a} \tag{1.6}$$

$$\frac{d g_\gamma(q_i, p_\alpha)}{dt} \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_\gamma} + \dot{q}_\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\gamma} \tag{1.7}$$

No contexto do método de Dirac, definem-se os *vínculos primários* ϕ_ρ como:

$$\phi_\rho = p_\rho - g_\rho(q_i, p_\alpha) \approx 0, \tag{1.8}$$

[1] Usa-se a definição de igualdades fracas dada em [1].

Os parênteses de destes vínculos com a Hamiltoniana canônica e entre eles serão dados por:

$$h_\rho \equiv \{\phi_\rho, H_c\} = -\frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H_c}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H_c}{\partial q_\rho} \tag{1.9}$$

$$P_{\rho\gamma} \equiv \{\phi_\rho, \phi_\gamma\} = \frac{\partial g_\rho}{q_\alpha}\frac{\partial g_\gamma}{p_\alpha} - \frac{\partial g_\rho}{p_\alpha}\frac{\partial g_\gamma}{q_\alpha} - \frac{\partial g_\rho}{q_\gamma} + \frac{\partial g_\gamma}{q_\rho}, \tag{1.10}$$

onde frequentemente nos referiremos à matriz dos PB entre os vínculos como *matriz dos vínculos.*

A estratégia[2] do método de Dirac consiste em substituir as expressões (1.5) e (1.6) em (1.7) obtendo-se um sistema que envolve as velocidades não inversíveis:

$$P_{\rho\gamma}\dot{q}_\gamma = -h_\rho \tag{1.11}$$

e tentar inverter este sistema de modo a a expressar também esas velocidades como função das coordenadas e momenta.

Ao tentarmos essa inversão, podemos recair em vários casos diferentes[3]. Consideremos, então, o *caso 1* em que nem todos os h_ρ sejam fracamente nulos e que o determinante da matriz P, cujos elementos são $P_{\gamma\rho}$, seja não fracamente nulo. Neste caso teremos:

$$\dot{q}_\gamma \approx -{P^{-1}}_{\gamma\rho}h_\rho \tag{1.12}$$

[2]Por *métodos* de Dirac e FJ entenda-se os procedimentos tais quais propostos por esses autores, respectivamente em [1, 4, 5] e [16]. Por *estratégias* de Dirac e FJ entenda-se os procedimentos que cada um desses autores adota para trabalhar com o conjunto de equações (1.5), (1.6), (1.7).

[3]Nesta tese discute-se apenas dois desses casos (ver [9]).

e a derivada temporal de uma função arbitrária $A(q_i, p_i, t)$ será dada por:

$$\dot{A} \approx \underbrace{\{A, H_c\} - \{A, \phi_\gamma\}P^{-1}{}_{\gamma\rho}\{\phi_\rho, H_c\}}_{\text{Parênteses de Dirac entre } A \text{ e } H_c} + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.13}$$

A expressão acima pode ser tomada como *a definição* dos parênteses de Dirac, os quais, no caso de duas funções arbitrárias A_1 e A_2 serão dados por:

$$\{A_1, A_2\}_D = \{A_1, A_2\} - \{A_1, \phi_\gamma\}P^{-1}{}_{\gamma\rho}\{\phi_\rho, A_2\} \tag{1.14}$$

Considere-se agora o caso *caso 2* em que o determinante da matriz P, $(N - R \times N - R)$, *é fracamente nulo.* Supondo-se que o posto da matriz P seja M, tem-se $(N - R) - M$ autovetores nulos linearmente independentes. Multiplicando estes autovetores em ambos os lados de (1.11) obteremos as seguintes $N - R - M$ relações:

$$\chi_A(q_i, p_\alpha) \approx 0 \tag{1.15}$$

Tomando a derivada temporal dos χ_A e usando as equações (1.5) e (1.6) teremos ainda:

$$\dot{\chi}_A \approx \{\chi_A, H_c\} + \dot{q}_\gamma\{\chi_A, \phi_\gamma\} \approx 0 \tag{1.16}$$

Com (1.16) pode-se ampliar o sistema de equações para as velocidade não inversíveis (1.11) obtendo-se:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \{\phi_\rho, \phi_\gamma\} \\ \\ \{\chi_A, \phi_\gamma\} \end{pmatrix}}_{C^{(0)}_{(2N-2R-M\times N-R)}} \underbrace{(\dot{q}_\rho)}_{(N-R\times 1)} \approx \begin{pmatrix} \{H_c, \phi_\rho\} \\ \\ \{H_c, \chi_A\} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

A matriz $C^{(0)}$ não é quadrada. Entretanto, é possível acrescentar colunas de modo a torná-la quadrada, sem por isso alterar o conteúdo do sistema via:

$$\begin{pmatrix} \{\phi_\rho, \phi_\gamma\} & J_{\rho B} \\ \\ \{\chi_A, \phi_\gamma\} & K_{AB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_\rho \\ \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \{H_c, \phi_\rho\} \\ \\ \{H_c, \chi_A\} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

onde, em princípio, $J_{\rho B}$ e K_{AB} são arbitrários. Com a finalidade de obter parênteses generalizados (DB) que sejam antissimétrico tomamos [1] $J_{\rho B} = \{\phi_\rho, \chi_B\}$ e $K_{AB} = \{\chi_A, \chi_B\}$, e a matriz C ficará:

$$C = \begin{pmatrix} \{\phi_\rho, \phi_\gamma\} & \{\phi_\rho, \chi_B\} \\ \\ \{\chi_A, \phi_\gamma\} & \{\chi_A, \chi_B\} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Usando ζ_ν para representar qualquer um dos vínculos $\phi_,\rho$, ouχ_A, o sistema (1.17) pode ser escrito como

$$\{\zeta_\mu, H_c\} + \{\zeta_\mu, \zeta_\rho\}\dot{q}_\rho \approx 0 \tag{1.20}$$

Repetindo os passos (1.15) até (1.19) é sempre possível, desde que não se esteja lidando com uma teoria que possua invarância de gauge, obter-se uma matriz C tal que $det(C)$ seja não fracamente nulo. O sistema, então, será inversível, resultando em:

$$\dot{q}_\rho \approx -C^{-1}{}_{\rho\mu}\{\zeta_\mu, H_c\} \tag{1.21}$$

$$0 \approx C^{-1}{}_{A\mu}\{\zeta_\mu, H_c\} \tag{1.22}$$

Usando (1.5), (1.6), (1.22) e (1.21), a derivada temporal de uma função arbitrária A será então dada por:

$$\dot{A} \approx \underbrace{\{A, H_c\} - \{A, \zeta_\mu\}C^{-1}{}_{\mu\nu}\{\zeta_\nu, H_c\}}_{\text{Parênteses de Dirac entre } A \text{ e } H_c} + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.23}$$

A expressão acima pode ser tomada como *a definição* dos parênteses de Dirac para o caso 2; no caso de duas funções arbitrárias A_1 e A_2 os DB serão dados assim por:

$$\{A_1, A_2\}_D = \{A_1, A_2\} - \{A_1, \zeta_\mu\}C^{-1}{}_{\mu\nu}\{\zeta_\nu, A_2\} \tag{1.24}$$

1.1.1 Resumo do método de Dirac

Situação inicial: Definem-se os momenta e tenta-se escrever todas as velocidades em função das coordenadas e momenta. Constroi-se a Hamiltoniana canônica.

1. Constroi-se o sistema (1.5), (1.6), (1.7) (note-se que ele é linear nas velocidades).

2. Tenta-se inverter esse sistema.

3. Caso o sistema não seja inversível, expressam-se as velocidades inversíveis como função das coordenadas e dos momenta, e constroi-se um sistema, com as equações do movimento, apenas para as velocidades *não inversíveis*. Este sistema é linear nas velocidades e caracterizado pela matriz dos vínculos. Utilizam-se os modos nulos da matriz dos vínculos para gerar "novos" vínculos.

4. Quando novos vínculos aparecem no passo anterior, toma-se a derivada temporal

deles e adicionam-se estas derivadas (também lineares nas velocidades[4]) ao sistema.

5. Amplia-se a matriz dos coeficientes das velocidades de forma que a mesma fique antissimétrica.

6. Repetem-se os procedimentos 3, 4 e 5 com o objetivo de chegar-se a um sistema inversível.

7. (a) Se o sistema assim obtído é inversível, então, escrevem-se todas as velocidades em termos de coordenadas e momenta e constroem-se os DB.

   (b) Caso contrario deve-se impor "à mão" um vínculo extra, derivá-lo em relação ao tempo, e proceder como no item 4 até definirmos os DB da teoria. Este é o caso de uma teoria invariante de gauge.

1.2 Linearização de Lagrangeanas

O método de FJ que será explicado na seção seguinte tem como ponto de partida uma descrição do sistema utilizando Lagrangeanas *linearizadas*, isto é, lineares nas velocidades[16]. Esta seção apresenta um método geral de linearização de Lagrangeanas, baseado na função de Routh, que resulta útil mesmo nos casos em que os métodos usuais não funcionam.

O processo de linearização de lagrangeanas sempre implica na introdução de coordenadas extras, ditas auxiliares. A lagrangeana linearizada será equivalente à lagrangeana

[4]Excluimos desta discussão o caso de vínculos não holonômicos.

original se a última pode ser obtida da primeira integrando as coordenadas auxiliares no funcional gerador, ou mesmo removendo estas coordenadas auxiliares através das suas equações de movimento se estivermos tratando de uma teoria clássica.

O método que geralmente se usa para a linearização (ver [20, 23, 24, 22]) se aplica basicamente a lagrangeanas quadráticas, e consiste em mapear cada um dos termos quadrático nas velocidades via

$$\dot{q}\dot{q} \rightarrow 2\dot{q}\tau - \tau\tau \tag{1.25}$$

O método proposto nesta tese baseia-se nas transformações de Legendre, mais especificamente nas funções de Routh [3, 6]. Mostramos que serve para linearizar lagrangeanas singulares ou não, de qualquer grau e mesmo no superespaço. Este método pode ser resumido como segue.

Considere-se um sistema dinâmico de N graus de liberdade, descrito com uma Lagrangeana $L(q_i, \dot{q}_i)$ não singular. Uma Lagrangeana linear L_f associada a ela sempre pode escrever-se como:

$$L_f(p_i, q_i, \dot{q}_i) = p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i) \tag{1.26}$$

Considere-se agora uma $L(q_i, \dot{q}_i)$ singular, com posto da hessiana igual a R. Uma lagrangeana linearizada associada a ela é dada por [5]:

$$L_f(q_a, \dot{q}_a, p_a, q_\rho, \dot{q}_\rho) = p_a\dot{q}_a + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - H_c(p_\alpha, q_i), \tag{1.29}$$

onde H_c é definido em (1.4) e g_ρ em (1.3).

1.2.1 Exemplos

Considere-se a seguinte lagrangeana *singular* e de grau N *arbitrário*:

$$L = \frac{a}{2}\dot{q_1}^2 + \frac{b}{2}\dot{q_2}^2 + c\dot{q_2}\dot{q_1} + h\dot{q_3}^N \tag{1.30}$$

onde a, b, c, h são funções de q_1, q_2, q_3. Tomaremos aqui o caso em que $ab = c^2$. Calculamos os momenta como:

$$\begin{aligned} p_1 &= a\dot{q_1} + c\dot{q_2} \\ p_2 &= c\dot{q_1} + b\dot{q_2} \\ p_3 &= Nh\dot{q_3}^{N-1} \end{aligned} \tag{1.31}$$

[5]Define-se a função de Routh G associada a L, como:

$$G(p_a, q_i, \dot{q}_\rho) = p_a f_a(q_i, p_\alpha, \dot{q}_\rho) - L(q_i, f_a(q_i, p_\alpha, \dot{q}_\rho), \dot{q}_\rho) \tag{1.27}$$

A Lagrangeana linearizada será dada por:

$$L_f(p_a, q_i, \dot{q}_i) = p_a\dot{q}_a - G(p_a, q_i, \dot{q}_\rho) = p_a\dot{q}_a + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - H_c(p_\alpha, q_i) \tag{1.28}$$

Ao tentarmos escrever as velocidades em função de coordenadas e momenta obtemos:

$$\dot{q_1} = (p_1 - c\dot{q_2})\frac{1}{a} \tag{1.32}$$

$$p_1 = \frac{a}{c}p_2 \tag{1.33}$$

$$\dot{q_3} = \left(\frac{1}{hN}p_3\right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{1.34}$$

não sendo possível expressar $\dot{q_2}$ como função das coordenadas e dos momenta. Uma função de Routh associada a L é:

$$G = \frac{1}{2a}{p_1}^2 - \frac{c}{a}p_1\dot{q}_2 + N^{-\frac{1}{N-1}}\left(\frac{N-1}{N}\right)\left(e^{-1}{p_3}^N\right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{1.35}$$

Uma lagrangeana linearizada associada a L é:

$$L_f = p_1\dot{q}_1 + p_3\dot{q}_3 - G \tag{1.36}$$

Exemplo 2

Como outro exemplo considere-se a densidade de lagrangeana no superespaço dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\dot{\phi}^i\dot{\phi}^i + \frac{1}{2}i\left(\bar{\theta}\frac{\partial\phi^i}{\partial\bar{\theta}} - \theta\frac{\partial\phi^i}{\partial\theta}\right)\dot{\phi}^i + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi^i}{\partial\bar{\theta}}\frac{\partial\phi^i}{\partial\theta} - V(\phi^i) \tag{1.37}$$

Onde θ e $\bar{\theta}$ são variáveis de Grassmann e $\phi^i(t,\theta,\bar{\theta})$ são supercoordenadas.

Os momenta são definidos como:

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^i} = \bar{\theta}\theta\dot{\phi}^i(x) + \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \bar{\theta}} - \theta\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \theta}\right) \tag{1.38}$$

No superespaço nem sempre é possível usar diretamente os momenta como coordenadas auxiliares [20, 22] porque nem sempre é possível expressar as velocidades $\dot{\phi}^i(x)$ em termos dos momenta [22] (esse é o caso deste exemplo). Este problema pode ser resolvido introduzindo-se uma coordenada P_i que se relaciona com os momenta da seguinte maneira:

$$\pi_i = \bar{\theta}\theta P_i + \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \bar{\theta}} - \theta\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \theta}\right) \tag{1.39}$$

Teremos então:

$$\bar{\theta}\theta P_i + \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \bar{\theta}} - \theta\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \theta}\right) = \bar{\theta}\theta\dot{\phi}^i(x) + \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \bar{\theta}} - \theta\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \theta}\right) \tag{1.40}$$

$$\bar{\theta}\theta\dot{\phi}^i(x) = \bar{\theta}\theta P_i \tag{1.41}$$

Usando-se este resultado e introduzindo a função de Routh para o sistema chega-se à lagrangeana linearizada:

$$\mathcal{L} = \left[\bar{\theta}\theta P_i + \frac{i}{2}\left(\bar{\theta}\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \bar{\theta}} - \theta\frac{\partial \phi^i(x)}{\partial \theta}\right)\right]\dot{\phi}^i(x) - \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta P_i^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \phi^i}{\partial \bar{\theta}}\,\frac{\partial \phi^i}{\partial \theta} - V(\phi^i) \tag{1.42}$$

1.3 Método de Faddeev-Jackiw e a proposta de Barcelos-Wotzasek

Nesta seção são analisados o método de FJ [16] e a proposta de Barcelos-Wotzasek (BW) [20, 23] para estender a técnica desenvolvida em [16] para os casos de 2-formas simpléticas singulares.

Consideremos uma Lagrangeana $L(q_i, \dot{q}_i)$ singular, cujo posto da matriz hessiana é $R < N$. Linearizaremos esta Lagrangeana como explicado na seção anterior, isto é fazendo $L_f(q_a, \dot{q}_a, p_a, q_\rho, \dot{q}_\rho) = p_a\dot{q}_a + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - H_c(p_\alpha, q_i)$. As equações de Lagrange para (1.29) são dadas por (1.5), (1.6) e (1.7) e coincidem com equações de Hamilton para o caso singular. No contexto do método de FJ estas equações escrevem-se em forma de matriz (notação simplética) como

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha} & -\delta_{\alpha a} \\ \frac{-\partial g_\gamma}{\partial q_a} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\gamma} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial p_a} \\ \delta_{\alpha a} & \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha} & 0 \end{pmatrix}}_{F^{(0)}{}_{(N+R)\times(N+R)}} \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_\rho \\ \dot{p}_a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial H_c}{\partial q_\gamma} \\ \frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

Se a matriz em (1.43) for inversível, então sua inversa será tal que vale:

$$F^{(0)^{-1}}{}_{\omega\sigma} = \{y_\omega, y_\sigma\}_D \tag{1.44}$$

onde $\sigma, \omega : 1 \to N + R$, e y representa as coordenadas e momenta. Entretanto, a matriz em (1.43) pode não ser inversível, levando à definição de vínculos no contexto do método

FJ. Então, de acordo BW [20, 23], pode-se proceder, da seguinte maneira. Tomam-se os $N-R-M$ autovetores nulos linearmente independentes associados a $F^{(0)}$ e multiplicam-se a ambos os lados de (1.43), obtendo-se as relações de vínculo dadas em (1.15). Seguindo [20, 23], estes vínculos são incorporados a L_f, obtendo-se a Lagrangeana $L^{(1)}{}_f$ dada por:

$$L^{(1)}{}_f(q_a, \dot{q}_a, p_a, q_\rho, \dot{q}_\rho) = p_a\dot{q}_a + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - H_c(p_\alpha, q_i) + \dot{\xi}_A\chi_A \tag{1.45}$$

Escrevendo as equações do movimento correspondentes a esta Lagrangeana mais uma vez em notação simplética teremos[6]:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha} & -\delta_{\alpha a} & \frac{\partial \chi_A}{\partial q_\alpha} \\ -\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_a} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\gamma} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial p_a} & \frac{\partial \chi_A}{\partial q_\gamma} \\ \delta_{\alpha a} & \frac{\partial g_\rho}{\partial p_a} & 0 & \frac{\partial \chi_A}{\partial p_\alpha} \\ \frac{-\partial \chi_A}{\partial q_a} & \frac{-\partial \chi_A}{\partial q_\rho} & \frac{-\partial \chi_A}{\partial p_a} & 0 \end{pmatrix}}_{F^{(1)}{}_{(2N-M)\times(2N-M)}} \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_\rho \\ \dot{p}_a \\ \dot{\xi}_A \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial H_c}{\partial q_\gamma} \\ \frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.46}$$

Se a matriz dos coeficientes em (1.46) for inversível então valerá: ${F^{(1)}}^{-1}{}_{\sigma\omega} = \{y_\sigma, y_\omega\}_D$, caso contrário, os passos (1.45) e (1.46) sao repetidos até obter-se uma matriz simplética inversível.

1.3.1 Resumo dos procedimentos relativos ao método de Faddeev-Jackiw (proposta de BW)

[6]Note-se que a forma simplética não é a única maneira de escrever estas equações, sendo também possível utilizar uma representação matricial não antisimétrica.

Situação inicial: Constroi-se uma Lagrangeana linear para descrever o sistema.

1. Calculam-se as equações do movimento e escrevem-se em notação simplética. Este sistema envolve *todas as velocidades*, é linear nelas, e é caracterizado pela matriz (pré) simplética do modelo.

2. Tenta-se inverter o sistema.

3. Caso o sistema não seja inversível, utilizam-se os modos nulos da matriz (pré)simplética do passo anterior para gerar "novos" vínculos.

4. Quando novos vínculos aparecem no passo anterior, toma-se a derivada temporal deles e adicionam-se estas derivadas (também lineares nas velocidades) ao sistema.

5. Repetem-se os procedimentos 3 e 4 com o objetivo de chegar-se a um sistema inversível.

6. (a) Se o sistema assim obtído é inversível, então, escrevem-se todas as velocidades em termos de coordenadas e momenta. Os elementos da matriz simplética invertida correspondem aos parênteses de Dirac entre as coordenadas do espaço de fase.

   (b) Caso contrário deve-se impor "à mão" um vínculo [illegible] derivá-lo em relação ao tempo, e proceder como no item 4 até definirmos os DB da teoria. De novo, este é o caso de uma teoria invariante de gauge. Os modos nulos da última matriz simplética obtída (antes de introduzir vínculos à mão) estão relacionados com as transformações de gauge que deixam invariante a Lagrangeana[20, 25, 26].

1.4 Relação entre os modos nulos da matriz simplética e as transformações de gauge

A relação entre os modos nulos da matriz simplética e as transformações de gauge de um sistema pode ser vista, de um modo geral, como segue [20, 26].

Considere-se um sistema singular com N graus de liberdade e posto da matriz hessiana igual a $R < N$, descrito por uma Lagrangeana linearizada $L_f(q_i, \dot{q}_i, p_\alpha) = p_a\dot{q}_a + g_\rho(q_i, p_\alpha)\dot{q}_\rho - H_c(p_\alpha, q_i)$. Seguindo [26], escrevemos a variação funcional da ação em função da matriz (pré) simplética como

$$\delta S = \int dt\ [\delta q_\alpha\ \delta q_\gamma\ \delta p_\alpha] \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha} & -\delta_{\alpha a} \\ \frac{-\partial g_\gamma}{\partial q_\alpha} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_\rho} + \frac{\partial g_\rho}{\partial q_\gamma} & -\frac{\partial g_\gamma}{\partial p_\alpha} \\ \delta_{\alpha a} & \frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha} & 0 \end{pmatrix}}_{F^{(0)}} \begin{pmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_\rho \\ \dot{p}_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial q_\alpha} \\ \frac{\partial H_c}{\partial q_\gamma} \\ \frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha} \end{pmatrix} \right] \tag{1.47}$$

$$= \int dt\ \delta y_\omega \left[F^{(0)}_{\omega\sigma}\dot{y_\sigma} - \frac{\partial H_c}{\partial y_\omega} \right] = 0 \tag{1.48}$$

onde $\sigma, \omega : 1 \to N + R$ e y engloba q_i e p_α. Se a matriz $F^{(0)}$ for singular e fazemos $\delta y_\omega = \epsilon M_\omega$, onde ϵ é um parâmetro infinitesimal e M_ω um modo nulo de $F^{(0)}$, obtemos:

$$\delta S = \int dt\ \delta y_\omega \frac{\partial H_c}{\partial y_\omega} = 0 \tag{1.49}$$

A seguir, duas coisas podem acontecer:

1. $\delta y_\omega \frac{\partial H_c}{\partial y_\omega}$ é identicamente nulo.

Nesse caso vemos diretamente que $\delta y_\omega = \epsilon M_\omega$ deixa a ação invariante;

2. $M_\omega \frac{\partial H_c}{\partial y_\omega} = \chi(q_i, p_\alpha)$, ou seja obtemos um vínculo.

Nesse caso, seguindo-se as propostas de BW expostas no capítulo 1.3, derivamos χ em relação ao tempo ampliando a matriz simplética conforme (1.46), repetindo-se esse processo até que não se gere mais vínculos. Resumidamente, se ao final desse processo a matriz (pré) simplética permanece singular, como por exemplo na QED, então tem-se um teoria com invariância de gauge, e ou recairemos no caso 1. acima, ou $\delta y_\omega \frac{\partial H_c}{\partial y_\omega}$ resulta numa combinação linear de vínculos já tidos em conta, podendo assim ser considerado fracamente nulo. Em ambos os casos teremos finalmente $\delta S = 0$. Parte do trabalho desta tese foi estudar como isto ocorre no caso da Super-QED, e estabelecer a relação entre os modos nulos da matriz simplética final e as transformações de gauge no super-espaço (ver capítulo 3).

Capítulo 2

Matriz Simplética e Formalismo Hamiltoniano para Sistemas Singulares

Quase todos os trabalhos referência desta tese, embora concluam que ambos os métodos de FJ e de Dirac são *equivalentes* quanto à obtenção dos DB, sugerem não haver uma *total correspondência* entre os *passos* usados para se chegar a esses parênteses.

De um modo geral, talvez pudéssemos dizer que enquanto o método de Dirac focaliza a generalização dos PB para sistemas vinculados (DB), partindo da definição dos PB para sistemas não sigulares, o método FJ focaliza os DB apenas entre as coordenadas do espaço de fase, partindo da estrutura simplética da teoria; i.e., das próprias equações do movimento escritas em notação simplética. Isto leva, no primeiro método, à matriz dos vínculos, enquanto que no segundo levará à matriz dos coeficientes das "velocidades" (incluindo nisto os coeficientes de $\dot{p}$). É claro que ambas matrizes *são diferentes.*

A seguir, ambos os métodos propõem determinar os modos nulos das respectivas matrizes, e com eles gerar novos vínculos multiplicando estes pelas equações do movimento (variante Barcelos-Wotzasek no caso FJ). Também ambos métodos utilizam as derivadas temporais dos eventuais novos vínculos para formar novas linhas e colunas nas respectivas matrizes. Finalmente, ou as respectivas matrizes não tem inversa (trata-se de uma teoria de gauge), ou estas inversas são utililzadas para construir os DB. No caso do método de FJ, os DB (somente) entre as coordenadas do espaço de fase são gerados *diretamente* como os elementos da inversa da matriz simplética. No caso do método de Dirac, (as matrizes são diferentes!), a inversa da matriz dos vínculos é parte fundamental na definição dos DB entre duas grandezas quaisquer.

Resulta elucidativo neste ponto esclarecer qual é, em definitiva, a diferença entre estas duas matrizes. No método de Dirac, constroi-se um sistema de equações (de movimento) apenas para as velocidades não inversíveis, após expressar nele todas as velocidades inversíveis como função das coordenadas e momenta; i.e., substituindo (1.5) e (1.6) em (1.7). Isto resultará num sistema linear caracterizado pela *matriz dos vínculos.* Já no método de FJ, o sistema linear caracterizado pela *matriz simplética* é construida com as equações (de movimento) para a totalidade das velocidades.

O ponto importante é que, na verdade, não há impedimentos para construirmos diretamente uma *matriz simplética partindo das equações do movimento para um formalismo Hamiltoniano* (digamos, matriz simplética no contexto do formalismo de Dirac), ou mesmo construir uma *matriz equivalente à matriz dos vínculos* partindo de Lagrangeanas de primeira ordem (formalismo de FJ)(Apêndice A).

De tudo isto pode já concluir-se que a *a diferença não está em trabalharmos com Lagrangeanas (de primeira ordem ou não) ou Hamiltonianas, nem na forma em que os vínculos são determinados, mas apenas na matriz que se toma como pivot para determinar os DB.*

Por outro lado, *a equivalência entre ambos os métodos decorre do fato de que as equações do movimento de Lagrangeanas linearizadas (momenta como coord. auxiliares) coincidem com as equações de Hamilton para o sistema.*

2.1 Exemplo: partícula pontual não relativista sobre uma esfera

Como exemplo, consideremos a construção da matriz simplética e obtenção dos DB, partindo de uma descrição Hamiltoniana, para uma partícula pontual não relativista movendo-se sobre a superfície de uma esfera. Os resultados que obtemos aqui podem ser comparados com os encontrados usando-se os métodos de Dirac (Hamiltonianas e matriz dos vínculos) em [13], e FJ (lagrangeanas lineares e matriz simplética) em [20].

A lagrangeana do problema é dada por:

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\dot{q}_2^2}{2} + \frac{\dot{q}_3^2}{2} + \frac{\lambda\left({q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 - 1\right)}{2} \tag{2.1}$$

onde (q_1, q_2, q_3, λ) são as coordenadas independentes. Após calcular os momenta:

$$p_a \approx \frac{\partial L}{\partial \dot{q_a}} \approx \dot{q_a}, \tag{2.2}$$

onde : $a, \alpha : 1 \to 3$, e.

$$p_\lambda \approx \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \approx 0 \tag{2.3}$$

podemos escrever a Hamiltoniana canônica como:

$$H_c = \frac{1}{2}p_a^2 + \frac{\lambda}{2}(q_a^2 - 1) \tag{2.4}$$

Além de (2.2), as outras equacões de Hamilton são:

$$\dot{p_a} \approx \lambda q_a \tag{2.5}$$

$$0 \approx {q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 - 1 \tag{2.6}$$

Note-se que (2.6) é a derivada temporal do vínculo primário de Dirac (2.3).

Agora, ao invés de continuar o esquema característico do método de Dirac, a camino da *matriz dos vínculos*, podemos construir diretamente una *matriz* com as equações de movimento acima em *notação simplética* como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ q_a q_a - 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

O modo nulo desta matriz (pré-simplética), após multiplica-lo a ambos os lados das equações do movimento, conduzirá ao vínculo (2.6). Tomando a derivada temporal deste vínculo,

$$0 \approx \frac{d}{dt}({q_1}^2 + {q_2}^2 + {q_3}^2 - 1) \tag{2.8}$$

Esta derivada temporal poderia ser utilizada para aumentar a matriz acima tal qual é feito no método de FJ. Entretanto, aproveitando o fato de que neste estágio não precissamos nos preocupar com se a matriz é quadrada ou não (a matriz ainda não será invertida), utilizaremos a derivada temporal do vínculo apenas para aumentar o número de linhas, simplificando assim as contas de um modo geral:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_3} \\ 0
\end{bmatrix}
\approx
\begin{bmatrix}
-\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ q_a q_a - 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0
\end{bmatrix}
\tag{2.9}
$$

O modo nulo correspondente á matriz acima é dado por:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tau & q_1 & q_2 & q_3 & 1 \end{bmatrix},
\tag{2.10}
$$

onde τ é arbitrário; multiplicando este a ambos os lados das equações do movimento acima, chegamos a mais um vínculo:

$$
q_a p_a \approx 0
\tag{2.11}
$$

Derivando ele em relação ao tempo e acrescentando mais uma linha na matriz das equações do movimento, chegamos a:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 & -q_1 & -q_2 & -q_3
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_3} \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\approx
\begin{bmatrix}
-\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ q_a q_a - 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
\tag{2.12}
$$

Esta matriz ainda possui um último modo nulo dado por

$$
\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \tau & -p_1 + q_1 & -p_2 + q_2 & -p_3 + q_3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\tag{2.13}
$$

o qual, por sua vez, gerará o vínculo:

$$
-\lambda q_a q_a - p_a p_a \approx 0
\tag{2.14}
$$

Derivando este em relação ao tempo e acrescentando mais uma linha à matriz das equações do movimento acima não se encontram mais vínculos. Trata-se, então, de completar o processo tornando quadrada a matriz acima, e invertendo-a de modo a determinar os DB do modelo. Para tornar esta matriz quadrada, procedemos como feito no Cap.1 para ampliar a matriz dos vículos no formalismo de Dirac, e como feito por BW para a ampliar a matriz simplética: buscamos a ampliação que torna a matriz antisimétrica, resultando nas equações do movimento escritas em notação simplética:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & q_1 & p_1 & -\lambda q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & q_2 & p_2 & -\lambda q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_3 & p_3 & -\lambda q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_a q_a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_1 & -p_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_2 & -p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_3 & -p_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & 0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q_1 & \lambda q_2 & \lambda q_3 & q_a q_a & p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q_1} \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \\ \dot{p_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ -\lambda q_1 \\ q_a q_a - 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Os elementos da inversa desta matriz são os DB fundamentais buscados [20] e [13]:

$$\begin{aligned} \{q_a, q_\alpha\}_D &= {A^{-1}}_{a\alpha} &&= 0. \\ \{q_a, p_\alpha\}_D &= {A^{-1}}_{a,\alpha+4} &&= (\delta_{a\alpha}) - \frac{q_a q_\alpha}{q^2} \\ \{p_a, p_\alpha\}_D &= {A^{-1}}_{a+4,\alpha+4} &&= \frac{q_a p_\alpha - q_\alpha p_a}{q^2} \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 Extensão a Infinitos Graus de Liberdade

A generalização dos resultados da seção anterior para teorias de campos é direta. Consideremos primeiro uma Lagrangeana $\mathcal{L}$ singular com posto da matriz hessiana igual a $R < N$, contendo somente campos bosônicos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A(x), \partial^\mu \phi^A(x)), \qquad A : 1 \to N \tag{2.17}$$

Da definição dos momenta e invertindo as velocidades que puderem ser invertidas teremos

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^a(x) &= f^a(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \dot{\phi}^\rho, \partial^j \phi^A(x)) && a, \alpha : 1 \to R. \\ \pi_\rho(x) &= g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x)) && \gamma, \rho : R+1 \to N. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Como no Cap.1, os índices a, α estão relacionados com as velocidades *inversíveis*, enquanto os ρ, γ com as *não inversíveis*. A Hamiltoniana canonica será então dada por:

$$\begin{aligned} H_c &= \pi_a(x) f^a(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \dot{\phi}^\rho, \partial^j \phi^A(x)) + g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x)) \dot{\phi}^\rho(x) \\ &\quad - \mathcal{L}\left(\phi^a(x), \partial_j \phi^A(x), f^a(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \dot{\phi}^\rho, \partial^j \phi^A(x)), \dot{\phi}^\rho(x)\right), \end{aligned} \tag{2.19}$$

e para as equações de Hamilton teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\alpha(x)} &= \dot{\phi}^\alpha(x) + \frac{\delta g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\delta \pi_\alpha(x)} \dot{\phi}^\rho(x) \\ \frac{\delta H_c}{\delta \phi^\alpha(x)} &= -\dot{\pi}_\alpha(x) + \left[\frac{\delta g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\delta \phi^\alpha(x)} - \frac{\partial g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial(\partial_j \phi^\alpha(x))} \partial_j \right] \dot{\phi}^\rho(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta H_c}{\delta \phi^\gamma(x)} \;=\; & \left\{ \left[\frac{\delta g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\delta \phi^\gamma(x)} - \frac{\partial g_\gamma(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial \phi^\rho(x)} \right] \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial g_\rho(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial(\partial_j \phi^\gamma(x))} \partial_j + \frac{\partial g_\gamma(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial(\partial_j \phi^\rho(x))} \partial_j \right] \right\} \dot{\phi}^\rho(x) \\
& - \left[\frac{\partial g_\gamma(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial(\phi^\alpha(x))} + \frac{\partial g_\gamma(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial(\partial_j \phi^\alpha(x))} \partial_j \right] \dot{\phi}^\alpha(x) \\
& - \frac{\partial g_\gamma(\phi^A(x), \pi_\alpha(x), \partial^j \phi^A(x))}{\partial \pi_\alpha(x)} \dot{\pi}_\alpha(x)
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Observe-se que a última destas 3 equações representa a conservação temporal dos vínculos primários de Dirac. Agora, como no exemplo tratado na seção anterior, ao invés de seguirmos a estratégia de Dirac, escrevemos as equações do movimento acima em notação simplética, obtendo:

$$
\begin{bmatrix}
0 & \frac{\delta g_\rho}{\delta \phi^\alpha(x)} - \frac{\partial g_\rho}{\partial(\partial_j \phi^\alpha(x))}\partial_j & -\delta_{\alpha a} \\
-\frac{\partial g_\gamma}{\partial \phi^\alpha(x)} - \frac{\partial g_\gamma}{\partial(\partial_j \phi^\alpha(x))}\partial_j & \left[\frac{\delta g_\rho}{\delta \phi^\gamma(x)} - \frac{\partial g_\gamma}{\partial \phi^\rho(x)}\right] - \left[\frac{\partial g_\rho}{\partial(\partial_j \phi^\gamma(x))}\partial_j + \frac{\partial g_\gamma}{\partial(\partial_j \phi^\gamma(x))}\partial_j\right] & \frac{-\partial g_\gamma}{\partial \pi_\alpha(x)} \\
\delta_{\alpha a} & \frac{\partial g_\rho}{\partial \pi_\alpha(x)} & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\dot{\phi}^\alpha(x) \\ \dot{\phi}^\rho(x) \\ \dot{\pi}_\alpha(x)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{\delta H_c}{\delta \phi^\alpha(x)} \\ \frac{\delta H_c}{\delta \phi^\gamma(x)} \\ \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\alpha(x)}
\end{bmatrix}
\tag{2.21}
$$

Este resultado pode escrever-se de uma maneira mais formal como:

$$
\int A. \begin{bmatrix} \dot{\phi}^\alpha(t, \vec{y}) \\ \dot{\phi}^\rho(t, \vec{y}) \\ \dot{\phi}^\alpha(t, \vec{y}) \end{bmatrix} d^3\vec{y} = \begin{bmatrix} \frac{\delta H_c}{\delta \phi^\alpha(x)} \\ \frac{\delta H_c}{\delta \phi^\gamma(x)} \\ \frac{\delta H_c}{\delta \pi_\alpha(x)} \end{bmatrix}, \tag{2.22}
$$

onde A é a matriz simplética[1] do sistema, antisimétrica nos seus índices contínuos e discretos, e dada por:

[1] Ou pré-simplética, caso não seja inversível.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & A(1,2) & A(1,3) \\ A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) \\ A(3,1) & A(3,2) & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.23}
$$

com elementos:

$$
\begin{aligned}
A(1,2) &= \frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \phi^\alpha(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x})\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^\alpha(t,\vec{y}))} \\
A(1,3) &= -\delta_{\alpha a}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(2,2) &= \left[\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \phi^\gamma(t,\vec{y})} - \frac{\partial g_\gamma(t,\vec{y})}{\partial \phi^\rho(t,\vec{y})}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x})\left[\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^\gamma(t,\vec{y})} - \frac{\partial g_\gamma(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \phi^\rho(t,\vec{x}))}\right] \\
A(2,3) &= -\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \pi_\alpha(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

Por último, o caso de modelos contendo campos bosônicos e fermiônicos introduz poucos detalhes a mais no processo descrito acima. A matriz simplética nestes casos, então, será dada por:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A(1,3) & A(1,4) & A(1,5) & 0 \\ 0 & 0 & A(2,3) & A(2,4) & 0 & A(2,6) \\ A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4) & A(3,5) & A(3,6) \\ A(4,1) & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4) & A(4,5) & A(4,6) \\ A(5,1) & 0 & A(5,3) & A(5,4) & 0 & 0 \\ 0 & A(6,2) & A(6,3) & A(6,4) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.25}
$$

A modo de referência para uso no Capítulo seguinte, os elementos de A são dados por:

$$
\begin{aligned}
A(1,3) &= \tfrac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\alpha'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^{\alpha'}(t,\vec{y}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(1,4) &= -\tfrac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\alpha}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^{\alpha}(t,\vec{y}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(1,5) &= -\delta_{\alpha' a'}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(2,3) &= \tfrac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\alpha}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \psi^{\alpha}(t,\vec{y}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(2,4) &= -\tfrac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\alpha}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \psi^{\alpha}(t,\vec{y}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(2,6) &= -\delta_{\alpha a} \\
A(3,1) &= -\tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{a'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \phi^{a'}(t,\vec{x}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(3,2) &= \tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\alpha}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \psi^{\alpha}(t,\vec{x}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(3,3) &= \left[\frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\gamma'}(t,\vec{y})} - \frac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\rho'}(t,\vec{y})}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&\quad \left[\frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^{\gamma'}(t,\vec{y}))} + \frac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \phi^{\rho'}(t,\vec{x}))}\right]\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(3,4) &= \left[-\frac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\gamma'}(t,\vec{y})} + \frac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\rho}(t,\vec{y})}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \\
&\quad \left[\frac{\partial g_{\rho}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \phi^{\gamma'}(t,\vec{y}))} + \frac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \psi^{\rho}(t,\vec{x}))}\right]\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(3,5) &= -\tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \pi_{a'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(3,6) &= \tfrac{\partial g_{\gamma'}(t,\vec{y})}{\partial \pi_{a}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(4,1) &= -\tfrac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{a'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \phi^{a'}(t,\vec{x}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(4,2) &= -\tfrac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\alpha}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \tfrac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \psi^{\alpha}(t,\vec{x}))}\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(4,3) &= \left[\frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \psi^{\gamma}(t,\vec{y})} - \frac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{y})}{\partial \phi^{\rho'}(t,\vec{y})}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \\
&\quad \left[\frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j \psi^{\gamma}(t,\vec{y}))} + \frac{\partial g_{\gamma}(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j \phi^{\rho'}(t,\vec{x}))}\right]\delta^{j}{}'(\vec{y}-\vec{x})
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

$$
\begin{aligned}
A(4,4) &= \left[-\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \psi^\gamma(t,\vec{y})} - \frac{\partial g_\gamma(t,\vec{y})}{\partial \psi^\rho(t,\vec{y})}\right]\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \\
&\qquad \left[\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial(\partial_j\,\psi^\gamma(t,\vec{y}))} - \frac{\partial g_\gamma(t,\vec{x})}{\partial(\partial_j\,\psi^\rho(t,\vec{x}))}\right]\delta^{j\prime}(\vec{y}-\vec{x}) \\
A(4,5) &= -\frac{\partial g_\gamma(t,\vec{y})}{\partial \pi_{a'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(4,6) &= -\frac{\partial g_\gamma(t,\vec{y})}{\partial \pi_a(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(5,1) &= \delta_{\alpha' a'}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(5,3) &= \frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \pi_{\alpha'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(5,4) &= -\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \pi_{\alpha'}(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(6,2) &= -\delta_{\alpha a}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(6,3) &= \frac{\partial g_{\rho'}(t,\vec{y})}{\partial \pi_\alpha(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\
A(6,4) &= -\frac{\partial g_\rho(t,\vec{y})}{\partial \pi_\alpha(t,\vec{y})}\delta(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Onde a seguinte notação é usada: $g_\rho(t,\vec{y}) = g_\rho(\phi^A(t,\vec{y}), \pi_\alpha(t,\vec{y}), \partial^j\phi^A(t,\vec{y}))$ e $\delta^{j\prime}(\vec{y}-\vec{x}) = \frac{\partial\delta(\vec{y}-\vec{x})}{\partial y_j}$.

Capítulo 3

Modos nulos da matriz simplética e sua relação com as transformações de gauge na Super-QED

Já era sabido que, no contexto do formalismo de Dirac, quando a *matriz dos vínculos* não é inversível e além disso os seus modos nulos não geram novos vínculos, então, estamos frente a uma teoria invariante de gauge; havendo uma relação entre os vínculos (ditos *de primeira classe*) e as transformações de gauge [9].

Barcelos-Montani-Wotzasek[20, 25, 26] (BMW), trabalhando no contexto do método FJ, mostraram que se a *matriz simplética* final associada a um dado sistema não possui inversa, então também estamos frente a uma teoria invariante de gauge. Mostraram também que os modos nulos da matriz simplética estão diretamente relacionados essas transformações.

Neste capítulo, partindo de um formalismo Hamiltoniano, mas trabalhando com a matriz simplética do modelo como explicado no capítulo anterior, determina-se a relação entre os modos nulos dessa matriz e as transformações de gauge para a Super-QED . Os objetivos deste trabalho podem ser resumidos em:

1. testar o uso do formalismo simplético em conexão com uma descrição Hamiltoniana num caso suficientemente geral e ilustrativo;

2. verificar a hipótese de BMW em supersimetria;

3. desenvolver as ferramentas computacionais para tratar problemas deste tipo. Isto é relevante visto o grande número de teorias supersimétricas que podem ser construidas variando apenas a representação ou o gauge.

A modo de introdução, nas seções 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 faz-se um breve resumo sobre alguns detalhes técnicos da supersimetria envolvidos nos cálculos desta tese (supercampos quirais, vetorias, transformações de gauge, etc.) [11, 10].

3.1 Supercampos Quirais

Um dos aspectos mais notáveis do super-espaço é a introdução de parâmetros anticomutativos (variáveis de Grassmann) em "pé de igualdade" com os parâmetros espaço-temporais. Estes últimos mais os primeiros são chamados de super-coordenadas. Supercampos são funções destas supercoordenadas os quais são entendidos em termos de expansões em séries de potências de θ e $\bar{\theta}$ (as variáveis de Grassmann):

$$F(x,\theta,\bar{\theta}) = \tag{3.1}$$

$$f(x) + \theta\varphi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{n}(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x)$$

Os supercampos quirais satisfazem o vínculo:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{3.2}$$

onde D e $\bar{D}$ são os operadores de derivação covariante (apêndice B). Levando em conta o vínculo acima, a forma mais geral de um supercampo quiral é:

$$\phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \tag{3.3}$$

$$A(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m A(x) + \tfrac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - (\tfrac{i}{\sqrt{2}})\theta\theta\partial_m\psi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta F(x)$$

Estes supercampos envolvem 4 graus de liberdade bosônicos e 4 graus de liberdade fermiônicos relacionados com: as partes reais e imaginárias de 2 campos escalares; e ora as partes reais imaginárias de 2 campos spinorias (representação de Weyl), ora 4 componentes spinoriais reais (representação de Majorana).

A forma mais geral de lagrangeana supersimétrica renormalizável envolvendo somente campos quirais é:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= {\phi_i}^\dagger\phi_i|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + (\lambda_i\phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k)|_{\theta\theta} \\ &+({\lambda_i}^*{\phi_i}^\dagger + \frac{1}{2}{m_{ij}}^*{\phi_i}^\dagger{\phi_j}^\dagger + \frac{1}{3}{g_{ijk}}^*{\phi_i}^\dagger{\phi_j}^\dagger{\phi_k}^\dagger)|_{\bar\theta\bar\theta}\end{aligned} \tag{3.4}$$

As matrizes das massas m_{ij} e das constante g_{ijk} são totalmente simétricas em seus índices.

Em campos componentes esta lagrangeana fica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\partial_m\bar\psi_i\bar\sigma^m\psi_i + {A_i}^*\Box A_i + {F_i}^*F_i \\ &+ \left[\lambda_iF_i + m_{ij}\left(A_iF_j - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\right) + g_{ijk}\left(A_iA_jF_k - \psi_i\psi_jA_k\right) + h.c.\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Note-se que os campos F_i (auxiliares) entram nessa expressão sem derivadas.

3.2 Supercampos Vetoriais

Supercampos vetoriais são supercampos como o (3.2) que satisfazem o vínculo:

$$V = V^\dagger \tag{3.6}$$

Sua expansão em série de potências de θ e $\bar\theta$ é dada por:

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar\theta) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar\theta\bar\chi(x) + \frac{i}{2}\theta\theta\left[M(x)+iN(x)\right] - \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\left[M(x)-iN(x)\right] \\ &-\theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) + i\theta\theta\bar\theta\left[\bar\lambda(x) + \frac{i}{2}\bar\sigma^m\partial_m\chi(x)\right] - i\bar\theta\bar\theta\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar\chi(x)\right] \\ &+\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right]\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde os campos componentes C, D, M, N e v_m são reais.

3.3 Teorias de Gauge Supersimétricas

Os supercampos quirais ϕ transformam-se por rotações *globais* do tipo U(1) como:

$$\phi' = e^{-it\lambda}\phi \tag{3.8}$$

onde t é carga U(1) e λ é o ângulo de rotação. De (3.8) segue que ϕ' também é um supercampo quiral. Uma lagrangeana invariante sob (3.8) é:

$$\mathcal{L} = L_C + L_P \tag{3.9}$$

onde

$$L_C = {\phi_i}^\dagger \phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \tag{3.10}$$

$$L_P = (\frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k)|_{\theta\theta} + (\frac{1}{2}{m_{ij}}^*{\phi_i}^\dagger{\phi_j}^\dagger + \frac{1}{3}{g_{ijk}}^*{\phi_i}^\dagger{\phi_j}^\dagger{\phi_k}^\dagger)|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \tag{3.11}$$

Na expressão acima os índices i, j e k representam genericamente diferentes supercampos que poderiam compor a Lagrangeana. L_C representa a Lagrangeana dos campos livres e L_P contem os termos de interação. A invariância sob transformações do tipo U(1) requer que $m_{ij} = 0$ ou $g_{ijk} = 0$ sempre que a soma das cargas associadas a estas transformações$t_i + t_j$ ou $t_i + t_j + t_k \neq 0$. No caso de transformações locais (λ dependerá das supercoordenadas), o campo λ tem que ser promovido a campo quiral (Λ), satisfazendo portanto:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0 \tag{3.12}$$

A lagrangeana (3.11) não é invariante sob transformações locais. Em particular L_P permanece invariante, mas L_C não. A fim de termos uma Lagrangeana total invariante, o termo L_C é reescrito introduzindo-se um supercampo vetorial V, satisfazendo a seguinte lei de transformação:

$$V' = V + i\left(\Lambda - \Lambda^{\dagger}\right) \tag{3.13}$$

resultando na seguinte Lagrangeana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4}\left[W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right] + {\phi_i}^{\dagger}e^{t_iV}\phi_i|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & (\frac{1}{2}m_{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k)|_{\theta\theta} + (\frac{1}{2}{m_{ij}}^{*}{\phi_i}^{\dagger}{\phi_j}^{\dagger} + \frac{1}{3}{g_{ijk}}^{*}{\phi_i}^{\dagger}{\phi_j}^{\dagger}{\phi_k}^{\dagger})|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde

$$W_{\alpha} = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_{\alpha}V \tag{3.15}$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \tag{3.16}$$

As leis de transformação para os campos componentes decorrentes das transformações (3.8) e (3.13) se obtem levando em conta a expansão do Λ em potências de θ e $\bar{\theta}$,

$$\Lambda(x,\theta,\bar{\theta}) = U(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m U(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Box U(x) + \sqrt{2}\theta\rho(x) - (\frac{i}{\sqrt{2}})\theta\theta\partial_m\rho(x)\sigma^m\bar{\theta} + \theta\theta S(x) \quad (3.17)$$

e são dadas por:

$$A'(x) = A(x)e^{-ieU(x)} \quad (3.18)$$

$$\psi'(x) = [\psi(x) - ie\rho(x)A(x)]\, e^{-ieU(x)} \quad (3.19)$$

$$F'(x) = \left[F(x) - ieS(x)A(x) + ie\rho(x)\psi(x) - \frac{e^2}{2}A(x)\rho(x)\rho(x)\right] e^{-ieU(x)} \quad (3.20)$$

Os campos componentes do supercampo vetorial transformam-se como:

$$C' = C + i(U(x) - U^*(x)) \quad (3.21)$$

$$M' + iN' = M + iN + 2S \quad (3.22)$$

$$\lambda' = \lambda \quad (3.23)$$

$$\chi' = \chi - i\sqrt{2}\rho \quad (3.24)$$

$$v'_m = v_m + \partial_m(U(x) + U^*(x)) \quad (3.25)$$

$$D' = D \quad (3.26)$$

3.4 Gauge de Wess-Zumino e a Lagrangeana de Super-QED

Uma lagrangeana invariante sob (3.8)(local) e (3.13) e que contenha 1 supercampo vetorial e dois supercampos quirais (de modo a poder descrever a QED) é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4}\left[W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right] + \phi^{\dagger}{}_{+}e^{eV}\phi_{+}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \phi^{\dagger}{}_{-}e^{-eV}\phi_{-}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+m(\phi_{+}\phi_{-}|_{\theta\theta} + \phi^{\dagger}{}_{+}\phi^{\dagger}{}_{-}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Esta lagrangeana (3.27) pode ser vista como uma série infinita de potências na constante de acoplamento e. Entretanto é possível escolher um gauge especial para transformar (3.27) numa forma mais simples e tratável. Esse é o gauge de Wess-Zumino (WZ), no qual os campos componentes C, χ, M e N são todos nulos. O supercampo vetorial no gauge WZ tem a seguinte expansão em termos das potências de θ e $\bar{\theta}$:

$$V_{WZ}(x,\theta,\bar{\theta}) = -\theta\sigma^{m}\bar{\theta}v_{m}(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \qquad (3.28)$$

A generalização supersimétrica da QED é assim dada por (3.27), quando o supercampo vetorial satisfaz o gauge de WZ. Esta lagrangeana, escrita em campos componentes aparece como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \tfrac{1}{2}D^2 - \tfrac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} + F_+F^*{}_+ + F_-F^*{}_- + A^*{}_+\Box A_+ + +A^*{}_-\Box A_- \\
&\quad + i(\partial_n\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ + \partial_n\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-) + \tfrac{1}{2}ev_n(\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ - \bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_-) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}iev^n(A^*{}_+\partial_nA_+ - \partial_nA^*{}_+A_+ - A^*{}_-\partial_nA_- + \partial_nA^*{}_-A_-) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}ie\sqrt{2}(A_+\bar{\psi}_+\bar{\lambda} - A^*{}_+\psi_+\lambda - A_-\bar{\psi}_-\bar{\lambda} + A^*{}_-\psi_-\lambda) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}eD(A^*{}_+A_+ - A^*{}_-A_-) - \tfrac{1}{4}e^2v_nv^n(A^*{}_+A_+ + A^*{}_-A_-) \\
&\quad m(A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_- + A^*{}_+F^*{}_- + A^*{}_-F^*{}_+)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

No contexto do gauge de WZ, as transformações de gauge mencionadas na seção anterior e que deixam invariante a lagrangeana acima são dadas por:

$$\begin{aligned}
A'_+(x) &= A_+(x)e^{-ieU(x)} \\
\psi_+{}'(x) &= \psi_+(x)e^{-ieU(x)} \\
F'_+(x) &= F_+(x)e^{-ieU(x)} \\
A'_-(x) &= A_-(x)e^{ieU(x)} \\
\psi_-{}'(x) &= \psi_-(x)e^{ieU(x)} \\
F'_-(x) &= F_-(x)e^{ieU(x)}, \\
\lambda' &= \lambda \\
v'{}_m &= v_m + 2\partial_mU(x) \\
D' &= D
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Estas são as leis de transformação que obteremos na seção seguinte por um caminho por completo diferente, calculando os modos nulos da matriz simplética. A reobtenção deste resultado nos confirmará a relação entre esses modos nulos e as transformações de gauge.

3.5 Relação entre os modos nulos da matriz simplética e as transformações de gauge na Super-QED

A fim de passarmos de uma descrição lagrangeana para uma descrição hamiltoniana, escrevemos (3.29) separando as derivadas temporais das espaciais e organizando os índices espinoriais:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\partial_i A_+ \partial_i A^*{}_+ - \tfrac{1}{4} e^2 {v^i}^2 A_+ A^*{}_+ + \tfrac{1}{2} i e v^i \partial_i A_+ A^*{}_+ + \tfrac{1}{2} \partial_i v^j \partial_j v^i \\
& - \tfrac{1}{2} i e {v^0}^2 - \tfrac{1}{4} {v^i}^2 A_- A^*{}_- - \tfrac{1}{2} i e \sqrt{2} A_- \epsilon_{\dot a \dot b} \bar\psi_-^{\dot a} \bar\lambda^{\dot b} - \left(i \lambda^a \sigma^i{}_{a\dot a} \partial_i \bar\lambda^{\dot a} \right) \\
& - \tfrac{1}{2} i e \sqrt{2} A^*{}_- \epsilon_{ab} \psi_-{}^a \lambda^b - i \lambda^a \sigma^0{}_{a\dot a} \partial_0 \bar\lambda^{\dot a} + \tfrac{1}{2} i e v^i \partial_i A^*{}_- A_- - \tfrac{1}{2} i e v^i \partial_i A_- A^*{}_- \\
& + \tfrac{1}{2} D^2 + \tfrac{1}{2} i e v^0 \partial_0 A^*{}_- A_- - \tfrac{1}{2} i e v^0 A^*{}_- \partial_0 A_- + \tfrac{1}{4} e^2 {v^0}^2 A_- A^*{}_- - \tfrac{1}{2} e D A_- A^*{}_- \\
& + \tfrac{1}{2} i e \sqrt{2} A^*{}_+ \epsilon_{ab} \psi_+{}^a \lambda^b + \tfrac{1}{2} i e \sqrt{2} A_+ \epsilon_{\dot a \dot b} \bar\psi_+^{\dot a} \bar\lambda^{\dot b} - \tfrac{1}{2} i e v^i \partial_i A^*{}_+ A_+ - \tfrac{1}{2} e v_i \bar\psi_-^{\dot a} \bar\sigma^i_{\dot a a} \psi_-{}^a \\
& + \tfrac{1}{2} e v_0 \bar\psi_-^{\dot a} \bar\sigma^0_{\dot a a} \psi_-{}^a - \tfrac{1}{2} \partial_i {v^j}^2 + \tfrac{1}{2} \partial_0 {v^i}^2 + \partial_i v^0 \partial_0 v^i - \partial_i A_- \partial_i A^*{}_- + \partial_0 A_- \partial_0 A^*{}_- \\
& + F_- F^*{}_- + m (A^*{}_- F^*{}_+ + A_+ F_- + A_- F_+ + A^*{}_+ F^*{}_-) - m \epsilon_{ab} \psi_+{}^a \psi_-{}^b \\
& + i \partial_0 \bar\psi_+^{\dot a} \bar\sigma^0_{\dot a a} \psi_+{}^a + i \partial_i \bar\psi_+^{\dot a} \bar\sigma^i_{\dot a a} \psi_+{}^a - \tfrac{1}{2} e v_0 \bar\psi_+^{\dot a} \bar\sigma^0_{\dot a a} \psi_+{}^a + \tfrac{1}{2} e v_i \bar\psi_+^{\dot a} \bar\sigma^i_{\dot a a} \psi_+{}^a \\
& + \tfrac{1}{2} e D A_+ A^*{}_+ + \tfrac{1}{4} e^2 {v^0}^2 A_+ A^*{}_+ - \tfrac{1}{2} i e v^0 \partial_0 A^*{}_+ A_+ + i \partial_0 \bar\psi_-^{\dot a} \bar\sigma^0_{\dot a a} \psi_-{}^a \\
& + i \partial_i \bar\psi_-^{\dot a} \bar\sigma^i_{\dot a a} \psi_-{}^a - m \epsilon_{ab} \bar\psi_+^{\dot a} \bar\psi_-^{\dot b} + F_+ F^*{}_+
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Os momenta ficarão:

$$\begin{array}{rcl}\pi_i & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 v^i)} = & \partial_i v^0 + \partial_0 v^i \\ \tau & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_+)} = & \frac{1}{2} iev^0 A^*{}_+ + \partial_0 A^*{}_+ \\ \tau_1 & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^*{}_+)} = & -\frac{1}{2} iev^0 A_+ + \partial_0 A_+ \\ \kappa & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_-)} = & -\frac{1}{2} iev^0 A^*{}_- + \partial_0 A^*{}_- \\ \kappa_1 & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^*{}_-)} = & \frac{1}{2} iev^0 A_- + \partial_0 A_- \\ \pi_{\bar{\lambda}^b} & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\lambda}^b)} = & i\sigma^0{}_{ab}\lambda^a \\ \pi_{\bar{\psi}^b_+} & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}^b_+)} = & i\bar{\sigma}^0_{b,a}\psi_+{}^a \\ \pi_{\bar{\psi}^b_-} & = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}^b_-)} = & i\bar{\sigma}^0_{b,a}\psi_-{}^a \end{array} \tag{3.32}$$

sendo ainda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\lambda^b)} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 v^0)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 D)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 F_+)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_+{}^b)} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_-{}^b)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 F_-)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 F^*{}_+)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 F^*{}_-)} = 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

A Hamiltoniana canônica será então dada por:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} \;=\; & \tfrac{1}{4}{v^i}^2 A_-A^*{}_- + \tfrac{1}{2}ie\sqrt{2}A^*{}_-\epsilon_{ab}\psi_-{}^a\lambda^b + \tfrac{1}{4}e^2{v^i}^2A_+A^*{}_+ \\
& -\tfrac{1}{2}iev^i\partial_iA^*{}_-A_- + \tfrac{1}{2}eDA_-A^*{}_- + \tfrac{1}{2}iev^i\partial_iA_-A^*{}_- - \tfrac{1}{2}eDA_+A^*{}_+ \\
& +\tfrac{1}{2}ie\sqrt{2}A_-\epsilon_{\dot a\dot b}\bar\psi_-^{\dot a}\bar\lambda^{\dot b} - \tfrac{1}{2}\partial_iv^j\partial_jv^i + \tfrac{1}{2}\partial_i{v^j}^2 - i\partial_i\bar\psi_-^{\dot a}\bar\sigma^i_{\dot aa}\psi_-{}^a \\
& +\left(i\lambda^a{\sigma^i}_{a\dot a}\partial_i\bar\lambda^{\dot a}\right) + \tfrac{1}{2}{\pi_i}^2 - F_-F^*{}_- - \tfrac{1}{2}ie\sqrt{2}A^*{}_+\epsilon_{ab}\psi_+{}^a\lambda^b \\
& -\tfrac{1}{2}ie\sqrt{2}A_+\epsilon_{\dot a\dot b}\bar\psi_+^{\dot a}\bar\lambda^{\dot b} + \partial_iA_-\partial_iA^*{}_- + \tfrac{1}{2}iev^i\partial_iA^*{}_+A_+ - \tfrac{1}{2}iev^i\partial_iA_+A^*{}_+ \\
& +\tfrac{1}{2}ev_i\bar\psi_-^{\dot a}\bar\sigma^i_{\dot aa}\psi_-{}^a - \tfrac{1}{2}ev_0\bar\psi_-^{\dot a}\bar\sigma^0_{\dot aa}\psi_-{}^a + m\epsilon_{ab}\bar\psi_+^{\dot a}\bar\psi_-^{\dot b} - \tfrac{1}{2}ev_i\bar\psi_+^{\dot a}\bar\sigma^i_{\dot aa}\psi_+{}^a \\
& +\tfrac{1}{2}ev_0\bar\psi_+^{\dot a}\bar\sigma^0_{\dot aa}\psi_+{}^a - i\partial_i\bar\psi_+^{\dot a}\bar\sigma^i_{\dot aa}\psi_+{}^a + \tau\tau_1 - F_+F^*{}_+ + \tfrac{1}{2}i\kappa_1ev^0A^*{}_- \\
& +\partial_iA_+\partial_iA^*{}_+ - \tfrac{1}{2}i\tau_1ev^0A^*{}_+ + \tfrac{1}{2}i\tau ev^0A_+ - \tfrac{1}{2}i\kappa ev^0A_- + m\epsilon_{ab}\psi_+{}^a\psi_-{}^b - \pi_i\partial_iv^0 \\
& -m(A^*{}_-F^*{}_+ + A_+F_- + A_-F_+ + A^*{}_+F^*{}_-) - \tfrac{1}{2}D^2 + \kappa\kappa_1
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

A seguir, escrevem-se as equações de Hamilton em notação simplética, sendo que a forma geral da matriz (pré) simplética já foi mostrada em (2.25). Os elementos não nulos desta matriz (24 X 24) serão dados então por:

$$
\begin{aligned}
& S^0(1,18) = -S^0(18,1) = -\delta_{ij} \\
& S^0(12,13) = S^0(13,12) = S^0(12,13) = S^0(13,12) = -i\bar\sigma^0_{\dot cc} \\
& S^0(16,17) = S^0(17,16) = -i{\sigma^0}_{c\dot c} \\
& S^0(2,19) = -S^0(19,2) = S^0(3,20) = -S^0(20,3) = \\
& S^0(4,21) = -S^0(21,4) = S^0(5,22) = -S^0(22,5) = -1
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

As equações de Hamilton em notação matricial são assim dadas por

$$S^{(0)}{}_{ab}\dot{y}_b = V_a \tag{3.36}$$

onde $\dot{y}_b$ e V_a são 24 x 1, e seus elementos são:

$$\begin{array}{llllllllllll}
V_1 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v^i} & V_{12} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi_+{}^c} & \dot{y}_1 & = & \partial_0 v^j & \dot{y}_{12} & = & \partial_0\psi_+{}^c \\
V_2 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta A_+} & V_{13} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{\psi}^{\dot{c}}_+} & \dot{y}_2 & = & \partial_0 A_+ & \dot{y}_{13} & = & \partial_0\bar{\psi}^{\dot{c}}_+ \\
V_3 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta A^*{}_+} & V_{14} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\psi_-{}^c} & \dot{y}_3 & = & \partial_0 A^*{}_+ & \dot{y}_{14} & = & \partial_0\psi_-{}^c \\
V_4 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta A_-} & V_{15} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{\psi}^{\dot{c}}_-} & \dot{y}_4 & = & \partial_0 A_- & \dot{y}_{15} & = & \partial_0\bar{\psi}^{\dot{c}}_- \\
V_5 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta A^*{}_-} & V_{16} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\lambda^c} & \dot{y}_5 & = & \partial_0 A^*{}_- & \dot{y}_{16} & = & \partial_0\lambda^c \\
V_6 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v^0} & V_{17} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\bar{\lambda}^{\dot{c}}} & \dot{y}_6 & = & \partial_0 v^0 & \dot{y}_{17} & = & \partial_0\bar{\lambda}^{\dot{c}} \\
V_7 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta D} & V_{18} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta pi_i} & \dot{y}_7 & = & \partial_0 D & \dot{y}_{18} & = & \partial_0\pi_j \\
V_8 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F_+} & V_{19} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\tau} & \dot{y}_8 & = & \partial_0 F_+ & \dot{y}_{19} & = & \partial_0\tau \\
V_9 & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F^*{}_+} & V_{20} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\tau_1} & \dot{y}_9 & = & \partial_0 F^*{}_+ & \dot{y}_{20} & = & \partial_0\tau_1 \\
V_{10} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F_-} & V_{21} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\kappa} & \dot{y}_{10} & = & \partial_0 F_- & \dot{y}_{21} & = & \partial_0\kappa \\
V_{11} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F^*{}_-} & V_{22} & = & \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\kappa_1\partial_0} & \dot{y}_{11} & = & \partial_0 F^*{}_- & \dot{y}_{22} & = & \partial_0\kappa_1
\end{array} \tag{3.37}$$

Os modos nulos de S^0 implicarão nos seguintes vínculos:

$$\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta v^0} = 0, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F_+} = 0, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F^*{}_+} = 0, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F_-} = 0, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta F^*{}_-} = 0, \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta D} = 0 \tag{3.38}$$

Tomando a derivada temporal dos vínculos acima, a matriz simplética ampliada S resultante será uma matriz 30×30, com elementos (somente os não nulos) dados por:

$$
\begin{array}{lclclclclcl}
S(1,18) & = & -S(18,1) & = & -\delta_{ij} & S(13,23) & = & S(23,13) & = & \frac{1}{2}e\bar{\sigma}^0_{\dot{c}a}\psi_+{}^a \\
S(2,23) & = & -S(23,2) & = & \frac{1}{2}ie\tau & S(14,15) & = & S(15,14) & = & -i\bar{\sigma}^0_{\dot{c}c} \\
S(2,24) & = & -S(24,2) & = & -\frac{1}{2}eA^*{}_+ & S(14,23) & = & S(23,14) & = & \frac{1}{2}e\bar{\sigma}^0_{\dot{a}c}\bar{\psi}^{\dot{a}}_- \\
S(3,23) & = & -S(23,3) & = & -\frac{1}{2}ie\tau_1 & S(15,23) & = & S(23,14) & = & -\frac{1}{2}e\bar{\sigma}^0_{\dot{a}a}\psi_-{}^a \\
S(3,24) & = & -S(24,3) & = & -\frac{1}{2}iA_+ & S(15,27) & = & S(17,15) & = & -i\sigma^0{}_{c\dot{c}} \\
S(4,23) & = & -S(23,4) & = & -\frac{1}{2}ie\kappa & S(16,17) & = & S(17,16) & = & -i\sigma^0{}_{c\dot{c}} \\
S(4,24) & = & -S(24,4) & = & \frac{1}{2}eA^*{}_- & S(18,23) & = & -S(23,18) & = & \partial_j \\
S(5,23) & = & -S(23,5) & = & -\frac{1}{2}ie\kappa_1 & S(19,23) & = & -S(23,19) & = & \frac{1}{2}ieA_+ \\
S(5,24) & = & -S(24,5) & = & \frac{1}{2}eA_- & S(20,23) & = & -S(23,20) & = & -\frac{1}{2}ieA^*{}_+ \\
S(12,13) & = & S(13,12) & = & -i\bar{\sigma}^0_{\dot{c}c} & S(21,23) & = & -S(23,21) & = & -\frac{1}{2}ieA_- \\
S(12,23) & = & S(23,12) & = & -\frac{1}{2}e\bar{\sigma}^0_{\dot{a}c}\bar{\psi}^{\dot{a}}_+ & S(22,23) & = & -S(23,22) & = & \frac{1}{2}ieA^*{}_-
\end{array}
\qquad (3.39)
$$

$$
\begin{aligned}
&S(2,19) = -S(19,2) = S(3,20) = -S(20,3) = S(4,21) = -S(21,4) = S(5,22) = -S(22,5) = \\
&= S(7,24) = -S(24,7) = S(8,26) = -S(26,8) = S(9,25) = -S(25,9) = S(10,28) = -S(28,10) = -1 \\
&S(2,27) = -S(27,2) = S(3,28) = -S(28,3) = S(4,25) = -S(25,4) = S(5,26) = -S(26,5) = -m
\end{aligned}
\qquad (3.40)
$$

O novo conjunto de equações agora pode ser escrito como:

$$
S_{ab}\dot{y}_b = V_a \qquad (3.41)
$$

onde $\dot{y}_b$ e V_a são matrizes 30 x 1, e seus elementos são idênticos aos descritos em (3.37), sendo que os novos elmentos são todos nulos.

A matriz S apresenta ainda um modo nulo M:

$$
\begin{array}{lllllll}
M_1 & = & \partial_i U & M_{15} & = & -\frac{1}{2}iUe\bar{\psi}_-^{\dot{c}} \\
M_2 & = & -\frac{1}{2}iUeA_+ & M_{16} & = & 0 \\
M_3 & = & \frac{1}{2}iUeA^*{}_+ & M_{17} & = & 0 \\
M_4 & = & \frac{1}{2}iUeA_- & M_{18} & = & 0 \\
M_5 & = & -\frac{1}{2}iUeA^*{}_- & M_{19} & = & \frac{1}{2}iUe\tau \\
M_6 & = & n & M_{20} & = & -\frac{1}{2}iUe\tau_1 \\
M_7 & = & 0 & M_{21} & = & -\frac{1}{2}iUe\kappa \\
M_8 & = & \frac{1}{2}iUemA^*{}_- & M_{22} & = & \frac{1}{2}iUe\kappa_1 \\
M_9 & = & -\frac{1}{2}iUemA_- & M_{23} & = & U \\
M_{10} & = & -\frac{1}{2}iUemA^*{}_+ & M_{24} & = & 0 \\
M_{11} & = & \frac{1}{2}iUemA_+ & M_{25} & = & 0 \\
M_{12} & = & -\frac{1}{2}iUe\psi_+{}^c & M_{26} & = & 0 \\
M_{13} & = & \frac{1}{2}iUe\bar{\psi}_+^{\dot{c}} & M_{27} & = & 0 \\
M_{14} & = & \frac{1}{2}iUe\psi_-{}^c & M_{28} & = & 0
\end{array}
\qquad (3.42)
$$

onde U e n são funções arbitrárias. Visto possuir um modo nulo, a última matriz (pré) simplética obtída não é inversível, mas o modo nulo acima não gera novos vínculos. Isso indica que lagrangeana de Super-QED é invariante de gauge, e que este gauge não foi fixado ainda.

Por outro lado, como explicado no capítulo 1, os elementos deste modo nulo podem ser vistos como as *variações infinitesimais que deixam a ação do modelo invariante* (ver 1.48). Podemos então, de acordo com todo o exposto, igualar os elementos do modo nulo às referidas variações e escrever diretamente:

$$
\begin{aligned}
\delta(v^i) &= \partial_i U \\
\delta(A_+) &= -\tfrac{1}{2} iUeA_+ \\
\delta(A^*{}_+) &= \tfrac{1}{2} iUeA^*{}_+ \\
\delta(A_-) &= \tfrac{1}{2} iUeA_- \\
\delta(A^*{}_-) &= -\tfrac{1}{2} iUeA^*{}_- \\
\delta(D) &= 0 \\
\delta(\psi_+{}^c) &= -\tfrac{1}{2} iUe\psi_+{}^c \\
\delta(\bar{\psi}^{\dot{c}}_+) &= \tfrac{1}{2} iUe\bar{\psi}^{\dot{c}}_+ \\
\delta(\psi_-{}^c) &= \tfrac{1}{2} iUe\psi_-{}^c \\
\delta(\bar{\psi}^{\dot{c}}_-) &= -\tfrac{1}{2} iUe\bar{\psi}^{\dot{c}}_- \\
\delta(\lambda^c) &= 0 \\
\delta(\bar{\lambda}^{\dot{c}}) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Quanto a v^0, visto estarmos trabalhando no espaço de fase, a reobtenção da lei de transformação mostrada em (3.30) requer que se leve em conta a variação para os momenta. Em vez de escrever diretamente o resultado, é ilustrativo mostrar como isto é feito. Partindo da expressão do modo nulo acima, para v^0 tem-se a seguinte variação:

$$\delta(v^0) = n \tag{3.44}$$

onde n é arbitrário. Por outro lado a variação para π_i é:

$$\delta(\pi_i) = 0 \tag{3.45}$$

Usando a definição de momenta (3.32), vê-se que (3.45) só vale se:

$$n = -\partial_0 U$$

Então a variação para v^0 é de fato dada por:

$$\delta(v^0) = -\partial_0 U \tag{3.46}$$

Por último, utilizando as relações de vínculo (3.38) para F_+,$F^*{}_+$,F_- e $F^*{}_-$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\delta(F_+) &= \tfrac{1}{2}iUemA^*{}_- &&= -\tfrac{1}{2}iUeF_+ \\
\delta(F^*{}_+) &= -\tfrac{1}{2}iUemA_- &&= \tfrac{1}{2}iUeF^*{}_+ \\
\delta(F_-) &= -\tfrac{1}{2}iUemA^*{}_+ &&= \tfrac{1}{2}iUeF_- \\
\delta(F^*{}_-) &= \tfrac{1}{2}iUemA_+ &&= -\tfrac{1}{2}iUeF^*{}_-
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Uma comparação entre os resultados acima e as leis de transformação (3.30) confirma que os elementos do modo nulo da matriz simplética são, de fato, as variações infinitesimais que deixam a ação invariante. Chegamos assim ao resultado procurado.

Conclusões

Os objetivos principais do trabalho aqui apresentado foram testar o formalismo simplético num contexto Hamiltoniano, e verificar a existência de conexão entre os modos nulos da correspondente matriz e a invariância de gauge de uma teoria definida no super-espaço.

Isto nos levou a um estudo dos métodos de quantização de Dirac e FJ, e da relação que existe entre os modos nulos da matriz simplética e as variações infinitesimais que deixam uma dada ação invariante.

Em relação aos métodos de Dirac e FJ, foi visto que é possível trabalhar com matrizes simpléticas, usualmente associadas ao formalismo de lagrangeanas lineares (método FJ), mas construídas partindo de uma Hamiltoniana para sistemas singulares. Assim, a ideia de matriz simplética tornou-se uma alternativa no contexto do método de Dirac, e a matriz *dos vínculos* uma possibilidade mesmo partindo de uma lagrangeana linearizada (FJ), e mesmo sem definir previamente os vínculos primários.

De tudo isto concluimos que o que torna os caminhos diferentes é a escolha da matriz com a qual vamos trabalhar (*dos vínculos* ou *simplética*), e não o formalismo de contexto (de Lagrange ou de Hamilton). Mais especificamente, as opções serão trabalharmos com a totalidade das velocidades ou apenas com as não inversíveis, que é o que em definitivo torna essas matrizes diferentes.

Esta liberdade de usarmos matrizes simpléticas ou matrizes dos vínculos nos dá a possibilidade de explorarmos as vantagens de ambos os métodos de acordo com a conveniência. Por exemplo, da inversa de uma matriz simplética podemos obter diretamente os DB fundamentais, mas se a matriz de um sistema tornou-se muito grande, sempre será possível reformular o problema somente para as velocidades não inversíveis, em termos da matriz dos vínculos, a qual por sua vez quase sempre será menor.

Enfim, quanto à *equivalência* entre ambos os métodos no restante (determinação dos vínculos etc.), ela decorre do fato de que *as equações do movimento de Lagrangeanas linearizadas coincidem com as equações de Hamilton.*

Também é mencionável nestas conclusões a prescrição proposta no capítulo 1 para linearizar lagrangeanas, baseada na função de Routh. Esta prescrição funciona com lagrangeanas de qualquer grau e mesmo no superespaço.

A respeito da relação entre os modos nulos da matriz simplética e a invariância de gauge, foi estudada aqui a Super-QED, partindo de um formalismo Hamiltoniano mas trabalhando com matrizes simpléticas. Mais concretamente, trabalhando no gauge de Wess-Zumino determinamos os modos nulos dessa matriz e verificamos que eles nos dão as variações infinitesimais que deixam invariante a ação do modelo. Os geradores de transformações de gauge se obtêm destas variações infinitesimais da maneira usual.

Por último, merece comentário a técnica utilizada para a realização dos cálculos.

Poderíamos pensar, e com razão, que uma das principais limitações práticas para este trabalho ou suas possíveis extensões está no grande número de termos envolvidos nos cálculos. Por exemplo, na determinação dos modos nulos da última matriz (pré) simplética na super-QED estivemos trabalhando com matrizes 30 x 30, envolvendo campos vetoriais e spinoriais (anticomutativos); e mesmo a constatação da invariância da Lagrangeana frente a transformações de gauge, com e sem o gauge de Wess-Zumino, envolveram contas de um volume singular.

Para tornar possíveis tais cálculos optamos por implementar todas as contas desta tese no computador, num meio ambiente para cálculos simbólicos (o Maple). Com este propósito, desenvolvimos rotinas especiais para expandir super-campos em serie de Taylor de variáveis de Grassmann, e utilizamos os pacotes *Grassmann* [29] e *Partials* [28] do grupo de computação simbólica do IF-UERJ, adaptados especialmente para trabalhar em supersimetria (índices de Weyl, derivadas-à-esquerda, derivação funcional em relação a campos espinoriais etc.)

Estas rotinas foram utilizadas em seções eletrônicas de cálculo simbólico (mais de 70 páginas), as quais permitem não somente refazer todos os cálculos em poucos minutos mas, principalmente, introduzir mudanças no modelo obtendo os correspondentes novos resultados sem termos que refazer o raciocinio para cada caso considerado.

Podemos concluir, então, que parte dos *resultados* desta tese está também na experiência acumulada para desenvolver cálculos com teorias supersimétricas, a nível simbólico, utilizando um computador. Efetivamente, de um modo geral, cálculos em teorias de campos quase sempre envolvem campos spinorias e o tipo de manipulação com que aqui nos deparamos, havendo assim grande interesse tanto na experimentação como no desenvolvimento de algorítmos como os que foram utilizados nesta tese.

Explicações mais detalhadas a relativas a estas rotinas e a suas possíveis adaptações para problemas similares deverão ficar prontas, em forma de artigo, em breve; assim como um outro artigo com os resultados desta tese, o qual está agora em fase de redação.

Apêndice A

Estratégia de Dirac aplicada ao Formalismo de Lagrangeanas Lineares

Neste apêndice mostra-se a possibilidade de, trabalhando-se no formalimo de FJ, construir-se, ao invés de matrizes simpléticas, matrizes que coincidam com a matriz dos vínculos de Dirac.

Em resumo faz-se:

- Lineariza-se a lagrangeana. Escreve-se as equações de Lagrange.

  Como nesse trabalho está-se usando a Lagrangeana linearizda na forma dada em (1.29), as equações de Lagrange são dadas por (1.5), (1.6) e (1.7).

- Seguindo-se a estratégia de Dirac escreve-se (1.5), (1.6) e (1.7) como um sistema em que se considera como incógnitas somente as velocidades não inversíveis:

$$(\frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g_\gamma}{\partial p_\alpha}+\frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial g_\rho}{\partial q_\gamma}-\frac{\partial g_\gamma}{\partial q_\rho})\dot{q}_\gamma+(\frac{\partial g_\rho}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H_c}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial g_\rho}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H_c}{\partial q_\alpha}+\frac{\partial H_c}{\partial q_\rho})\approx 0 \quad (A.1)$$

Note-se que (A.1) é coincidente com (1.11). A matriz dos coeficientes em (A.1) coincide com a matriz dos PB entre vínculos primários de Dirac em (1.11).

- Desse ponto pode-se seguir a estratégia proposta por Dirac, conforme mostrada no capítulo (1), mesmo sem a definição prévia de vínculos primários e parênteses de Poisson .

Apêndice B

Notação

A métrica utilizada para o espaçotempo é

$$g_{\mu\nu} = (-, +, +, +) \tag{B.1}$$

Os spinores de Weyl satisfazem

$$\psi'_{\alpha} = M_{\alpha}{}^{\beta}\psi_{\beta} \tag{B.2}$$

$$\bar{\psi}'_{\dot{\alpha}} = M^{*}{}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{B.3}$$

$$\psi'^{\,\alpha} = (M^{-1})_{\beta}{}^{\alpha}\psi^{\beta} \tag{B.4}$$

$$\bar{\psi}'^{\,\dot{\alpha}} = M^{*-1}{}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{B.5}$$

onde M é um elemento do grupo $SL(2, C)$.

A métrica spinorial é

$$-\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

A regra para subir e baixar índices é dada por [15]

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \tag{B.7}$$

$$\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta} \tag{B.8}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{B.9}$$

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \tag{B.10}$$

A regra de notação para o produto contraído de spinores é

$$\psi\eta = \eta\psi = \eta^{\alpha}\psi_{\alpha} \tag{B.11}$$

$$\bar{\psi}\bar{\eta} = \bar{\eta}\bar{\psi} = \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{B.12}$$

A conjugação complexa muda a ordem do produto de spinores

$$(\eta\xi)^{*} = \bar{\xi}\bar{\eta} \tag{B.13}$$

As derivadas covariantes são definidas como:

$$D_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\sigma^{m}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{m} \tag{B.14}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\sigma^{m}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}\partial_{m} \tag{B.15}$$

E as identidades

$$\theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{\theta\theta}{2}\epsilon^{\alpha\beta} \tag{B.16}$$

$$\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\frac{\bar{\theta}\bar{\theta}}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \tag{B.17}$$

Referências

[1] P. A. M. Dirac,*Generalized Hamiltonian Dynamics*, Cannad. J. Math. **2**, 129 (1950).

[2] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley ,(1950).

[3] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Mir, (1957).

[4] P. A. M. Dirac,*Generalized Hamiltonian Dynamics*, Proc. Roy. Soc. **A246**, 326 (1958a).

[5] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University Press, New York (1964).

[6] C. Lanczos, *Variational Principles of Mechanics*, (1970).

[7] J.Wess and B.Zumino, *Supergauge Invariant Extension of Quantum Electrodynamiics*, Nucl. Phys. **B78** (1974)1-13.

[8] A. Hanson, T. Regge e C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, 1976.

[9] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics 169, Springer Verlag (1982).

[10] J.Wess and J.Bagger, *Introduction to gauge theory*, Princeton University press, Princeton, **N.J.**, 1983.

[11] J.Wess and J.Bagger, *Introduction to gauge theory*, Les Houches, Session XXXVII, 1981, Gauge theories in high energy Physics, North-Holland Publishing Company, 1983.

[12] A. A. Sokolov, I. M. Ternov, V. Ch. Zhukovskii, A. V. Borisov, *Quantum Electrodynamics*, Mir, 1983.

[13] N. K. Falck and A. C. Hirschfeld, Eur. J. Phys. **4**, 5 (1983).

[14] L. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (1984).

[15] P. P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity*, Adam Hilger, (1985).

[16] L. Faddeev and R. Jackiw, *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1692 (1988).

[17] M. E. V. Costa e H. O. Girotti, *Comment on "Self-Dual Fields as Charge-Density Solitons"*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1771 (1988).

[18] J.Govaerts, *Hamiltonian Reduction of First-Order Actions*, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 3625 (1990).

[19] D.S.Kulshreshtha and H.J.W.M.Kirsten, *Quantization of systems with constraints: The Faddeev-Jackiw method versus Dirac's method applied to superfields*, Phys.Rev. **D43**, 3376 (1991).

[20] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Symplectic Quantization of Constrained Systems*, Modern Physics Lett. **A7**, 19, 1737 (1992).

[21] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints*, Int. J. Mod. Physics **A7**, 20, 4981 (1992).

[22] J.Barcelos-Neto and E.S.Cheb Terrab, *Faadeev-Jackiw quantization in Superspace*, Z.Phys., C**54**, (1992).

[23] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints*, Int. J. Mod. Physics **A7**, 20, 4981 (1992).

[24] J. Barcelos-Neto, *Quantização Simplética com Vínculos*, IF/ UFRJ/ MONOGRAFIA/ M92/ 01.

[25] C. Wotzasek, *Faddeev-Jackiw Quantization of Siegel's Oscillator*, Phys. Rev. **D46**, 2734, (1992).

[26] H. Montani and C. Wotzasek, *Faddeev Jackiw Quantization of Non-Abelian Systems*, Mod. Phys. Lett., **35**, (1993).

[27] J. Barcelos-Neto, Phys. Rev. **D49**, 1012, (1993).

[28] E.S. Cheb-Terrab, "Maple procedures for partial and functional derivatives", Computer Physics Communications, 79 (1994) 409-424.

[29] E.S. Cheb-Terrab, "Symbolic Computing with Grassmann variables", submitted to Journal of Symbolic Computation (October 1995).

"MATRIZ SIMPLÉTICA E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE EM SUPER-QED"

DANILO TEIXEIRA ALVES

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

Edgardo Salomon Cheb Terrab - Presidente

Sebastião Alves Dias – Orientador ad-hoc

João Barcelos Neto

José Abdalla Helayël-Neto

Rio de Janeiro, 15 de agosto de 1996