

TESE DE
MESTRADO

O Fenômeno Tricrítico
em Teoria de Campos a Temperatura Finita

GINO NOVALIS JANAMPA AÑAÑOS

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, SETEMBRO DE 1996

DEDICATÓRIA

Esta tese é dedicada à minha mãe Nery e a meu pai Pedro

AGRADECIMENTO

A Johana por seu amor, compreensão e ajuda.

A Nami Fux Svaiter pela amizade e prestativa orientação.

A Myriam Simões Coutinho pela ajuda e apoio.

A turma de peruanos e brasileiros.

A todas as pessoas que me ajudaram direta ou indiretamente.

A CAPES pelo inestimável suporte financeiro.

Resumo

O capítulo 1 da tese constitui uma introdução da teoria de campos a temperatura finita fazendo uso do formalismo do tempo imaginário.

No capítulo 2 desenvolvemos os princípios da renormalização de teoria de campos a temperatura finita para o modelo de um campo escalar real com auto-interação em quatro dimensões espaço-temporais $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$. Neste capítulo, como uma aplicação direta da teoria desenvolvida, é analisada a dependência dos parâmetros físicos, *i.e.*, massa e constante de acoplamento, com a temperatura.

No capítulo 3 fazemos uma aplicação das técnicas desenvolvidas, estudando a transição de primeira a segunda ordem no modelo $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$ e o fenômeno tricrítico. Mostramos que existe uma temperatura para a qual a massa e a constante de acoplamento se anulam. Esta temperatura define o ponto tricrítico. Para altas temperaturas mostramos a existência de uma transição de fase de segunda ordem, assim como uma transição de primeira ordem a baixas temperaturas.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Índice	iv
1 Introdução à Teoria de Campos à Temperatura Finita	3
1.1 A função de partição para o campo escalar	3
1.2 A função de partição para o campo escalar livre	7
1.3 A função de Green e o funcional gerador a temperatura finita	9
1.4 Gerador funcional para o campo escalar livre	11
1.5 As regras de Feynman para a teoria massiva do campo escalar	12
1.6 Formalismo do potencial efetivo a temperatura finita	14
2 Efeitos da Temperatura na Massa e na Constante de Acoplamento	18
2.1 $\Gamma^{(2)}(0)$ a um <i>loop</i> : renormalização da massa a temperatura finita	23
2.2 $\Gamma^{(4)}(0)$ a um <i>loop</i> : renormalização da constante de acoplamento a temperatura finita	26
2.3 $\Gamma^{(2)}(0)$ a dois <i>loops</i> : renormalização da massa	28
2.4 $\Gamma^{(4)}(0)$ a dois <i>loops</i> : renormalização da constante de acoplamento	31
3 O Fenômeno Tricrítico no Modelo $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$	34
4 Conclusão	44

A - Apêndice: O Ponto Tricrítico	46
Referências	49

Introdução

O modelo $(\lambda\varphi^4)_D$ em Teoria Quântica de Campos (TQC) tem sido estudado extensivamente na literatura. Para $D > 4$ o modelo é trivial [1], portanto nos restringiremos a $2 < D \leq 4$. Expressões gerais para os diagramas de Feynman a temperatura zero foram derivadas até ordem de aproximação de quatro loops. Dentro desta linha de pesquisa, a dependência da massa renormalizada e da constante de acoplamento com a temperatura tem sido analisada por vários autores [2, 3, 4, 5]. Mais recentemente diferentes métodos têm sido usado para o estudo da teoria de campos a temperatura finita [6].

Um dos grandes triunfos da física teórica, conseguido no final da década de 70, é o modelo de Weinberg-Salam que unifica as forças fracas e eletromagnéticas[7]. Neste modelo a massas dos bosons W e Z são geradas pelo mecanismo de Higgs. Neste esquema a idéia de quebra espontânea de simetria é fundamental. Diversas simetrias vão sendo quebradas com o esfriamento do universo. Desta forma, o estudo da TQC a temperatura finita é fundamental para o entendimento destes mecanismos. Como é conhecido um campo escalar carregado tem um papel fundamental no modelo de Weinberg-Salam.

Existem dois formalismos para o estudo da teoria de campos a temperatura finita , que nos permitem fazer uso das convencionais regras de Feynman. O primeiro é o formalismo do tempo imaginário desenvolvido por Matsubara [8], Abrikosov e outros e logo estendido ao caso relativístico por Linde [9], Bernard [10], Dolan e Jackiw [11] e Weinberg [12] . A vantagem deste formalismo se apóia no fato de que na expansão perturbativa temos os mesmos diagramas da teoria a temperatura zero. O outro formalismo é o método do tempo real, que foi introduzido por Takahashi e Umezawa [13] e desenvolvido por

Matsumoto [14] e outros. A diferença destes dois formalismos está na maneira que é feita a continuação analítica no tempo. Nesta tese, trabalharemos com o formalismo do tempo imaginário.

O propósito desta tese é apresentar o cálculo até ordem de dois loops para os modelos com auto-interação $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$ e $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$. Nestes modelos obtivemos a correção térmica dos parâmetros físicos que aparecem na densidade Lagrangiana, o quadrado da massa $m^2(\beta)$ e a constante de acoplamento $\lambda(\beta)$. Recentemente, a correção térmica da massa e da constante de acoplamento foi analisada no modelo $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$ e no modelo de Efimov-Fradkin [15]. A possibilidade de que a constante de acoplamento renormalizada no modelo $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$ se anule por efeito da temperatura ou topológico foi discutido por Ford e Svaiter [16]. Assumindo a topologia trivial da seção espacial Malbouisson e Svaiter [17] estenderam parte da discussão de Ford e Svaiter. Assumindo que o sistema está em equilíbrio térmico com um reservatório, a correção térmica do quadrado da massa $\Delta m^2(\beta)$ e da constante de acoplamento $\Delta\lambda(\beta)$ foi obtida para uma dimensão D genérica na aproximação de um loop. Como foi discutido na referência [17], para $D < 4$ a constante de acoplamento renormalizada pode se tornar negativa, acima de alguma temperatura β_*^{-1} . Isto estabelece a existência de uma transição de fase de primeira ordem no modelo para dimensões espaço-temporais abaixo de dimensão crítica.

Esta tese é uma continuação natural dos trabalhos acima citados, onde a ordem da transição em $(\lambda\varphi^4)$ em $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)$ é estabelecida [18].

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Campos à Temperatura Finita

1.1 A função de partição para o campo escalar

Um dos objetos fundamentais da Mecânica Estatística é a função de partição definida por:

$$Z = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}. \quad (1.1)$$

A soma é avaliada sob todo o sub-espaço físico dos estados de partícula permitidos. Na eq. (1.1) \hat{H} é o operador Hamiltoniano e β é dado por :

$$\beta = (kT)^{-1} \quad (1.2)$$

(em unidades da constante de Boltzman temos que $\beta = T^{-1}$).

Para o campo escalar a função de partição pode ser formulada dentro do formalismo das integrais de trajetória da seguinte forma: Seja $\hat{\varphi}(t = 0, \mathbf{x})$ o operador do campo na representação de Schrödinger em $\beta^{-1} = 0$. Os auto-estados do operador de campo $|\varphi, t = 0\rangle$ satisfazem

$$\hat{\varphi}(t = 0, \mathbf{x}) |\varphi, t = 0\rangle = \varphi(\mathbf{x}) |\varphi, t = 0\rangle \quad . \quad (1.3)$$

É claro que os auto estados $|\varphi, t = 0\rangle$ satisfazem as relações de completeza e ortogonalidade dadas por

$$\int d\varphi(x) |\varphi, t = 0\rangle \langle \varphi, t = 0| = 1 \quad (1.4)$$

$$\langle \varphi_a | \varphi_b \rangle = \delta[\varphi_a(\mathbf{x}) - \varphi_b(\mathbf{x})] \quad . \quad (1.5)$$

Desta forma a função de partição pode ser escrita explicitamente como uma soma sob todos estados próprios

$$Z = \sum_{\varphi(\mathbf{x})} (\varphi(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi(\mathbf{x}), t = 0) \quad . \quad (1.6)$$

Vamos partir da representação funcional da amplitude de transição $\langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | \varphi'(\mathbf{x}), t' \rangle$ a temperatura zero dada por [7]

$$\begin{aligned} \langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | \varphi'(\mathbf{x}), t' \rangle &= \langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')} | \varphi'(\mathbf{x}), t' = 0 \rangle \\ &\propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)}, \quad (1.8)$$

é a densidade do momento conjugado a φ . Nesta última relação as funções $\varphi(t, \mathbf{x})$ satisfazem às condições de contorno

$$\varphi(t'', \mathbf{x}) = \varphi''(\mathbf{x}) \quad , \quad \varphi(t', \mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.9)$$

Fazemos a ponte entre a teoria do campo e a mecânica estatística introduzindo heurísticamente as variáveis (continuação no tempo Euclidiano)

$$(\tau, \mathbf{x}) = (ix^0, \mathbf{x}) \equiv (it, \mathbf{x}) \quad (1.10)$$

onde chamamos a componente zero do espaço Euclidiano de τ , e impomos periodicidade no tempo Euclidiano tomando os limites de integração na eq. (1.7) como

$$t' = 0 \quad t'' = -i\beta \quad . \quad (1.11)$$

Desta forma a eq. (1.7) se transforma em

$$\begin{aligned} & \langle \varphi''(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-\beta \hat{H}} | \varphi'(\mathbf{x}), t = 0 \rangle = \\ & \propto \int \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde na integral de caminho as funções $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ satisfazem as condições de fronteira

$$\varphi(\beta, \mathbf{x}) = \varphi''(\mathbf{x}) \quad \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}) \quad . \quad (1.13)$$

A introdução de x_E^0 (componente zero no espaço Euclidiano) na teoria de campos a temperatura zero serve para fazer a continuação ao espaço Euclidiano para que integral de caminho esteja bem definida [7], mas ao final se volta ao espaço de Minkowski para obter a funcional gerador e as funções de Green físicas. Aqui nos introduzimos a variável τ para fazer a ponte entre a Teoria de Campos e a Mecânica Estatística.

Como já discutimos, para se obter a função de partição devemos impor periodicidade no tempo imaginário

$$|\varphi''(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\varphi'(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\varphi(\mathbf{x}), t = 0\rangle \quad , \quad (1.14)$$

conseqüentemente a função de partição é dada por

$$Z = \alpha \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x} (i\pi \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - \mathcal{H}(\pi - \varphi)) \quad (1.15)$$

onde as condições de fronteira dados pelas eq. (1.13) junto com eq. (1.14), significam que a integral de caminho está restrita sob as funções $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ que são periódicos em τ com período β , *i.e.*

$$\varphi(\tau = 0, \mathbf{x}) = \varphi(\tau = \beta, \mathbf{x}) \quad . \quad (1.16)$$

Se a densidade Lagrangiana tem a forma quadrática

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_{\mu}\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_0\varphi)^2 - f(\varphi, \nabla\varphi) \quad , \quad (1.17)$$

a densidade Hamiltoniana terá a forma

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + f(\varphi, \nabla\varphi) \quad (1.18)$$

Desta forma a integração funcional sobre π pode ser avaliada explicitamente [7] já que a exponencial é quadrática em π . A eq. (1.15) adquire o aspecto mais simples, dado por

$$\begin{aligned} Z &= N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[1/2(\bar{\partial}_0\varphi)^2 + f(\varphi, \nabla\varphi) \right] \right\} \\ &= N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \bar{\partial}_{\mu}\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (1.19)$$

onde

$$\bar{\partial}_{\mu}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}, \nabla\varphi \right) \quad (1.20)$$

e $N(\beta)$ é o fator de normalização dependente da temperatura.

Nesta seção obtemos a função de partição fazendo a rotação de Wick e somando sob todas as configurações do campo que são periódicos em $[0, \beta]$. Na seção 1.5 derivaremos as regras de Feynman a temperatura finita para um sistema bosônico.

1.2 A função de partição para o campo escalar livre

Para a teoria do campo escalar livre a integral de caminho na eq. (1.19) é uma integral Gaussiana que pode ser feita exatamente. Se a densidade Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, \bar{\partial}_\mu \varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \quad (1.21)$$

temos

$$Z_\beta = N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3\mathbf{x}' \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \varphi(\bar{x}') A(\bar{x}', \bar{x}) \varphi(\bar{x}) \right\} \quad (1.22)$$

onde

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = (\bar{\partial}^\mu \bar{\partial}_\mu + m^2) \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \quad (1.23)$$

e

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \delta(\tau' - \tau) \quad (1.24)$$

Daqui para frente, por simplicidade, evitaremos escrever a barra sobre \mathbf{x} , que indica o espaço euclidiano compactificado na componente zero.

A integração funcional na eq. (1.22) pode ser feita exatamente resultando em [7]

$$Z_\beta = N(\beta) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln A\right) \quad (1.25)$$

O traço é associado sobre as funções $\varphi(\tau, \mathbf{x})$ obedecendo às condições de periodicidade dadas pela eq. (1.16). O requerimento de periodicidade em τ para as configurações de campo significa que os campos euclidianos podem ser expressos como uma expansão de

Fourier do seguinte modo [8, 7]

$$\varphi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\omega_n \tau) \varphi_n(\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

onde

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad , \quad (1.27)$$

são as frequências de Matsubara para os bósons. A transformada de Fourier de $\varphi(x)$ satisfaz á relação

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot x} \tilde{\varphi}(p) \quad , \quad (1.28)$$

onde

$$p \equiv (\omega_n, \mathbf{p}) \quad . \quad (1.29)$$

Com isto concluímos que para o campo escalar bosônico os efeitos da temperatura finita são dados pelas seguintes substituições no espaço Euclideano

$$\omega \rightarrow \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad , \quad \int \frac{d\omega}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \quad . \quad (1.30)$$

Conseqüentemente temos que a delta de Dirac tem a forma

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} \quad (1.31)$$

Logo a matriz $A(x', x)$ para o campo escalar livre é

$$A(x', x) = \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} (p^2 + m^2) \quad (1.32)$$

onde

$$p^2 \equiv (\omega_n^2 + \mathbf{p}^2) \quad . \quad (1.33)$$

Logo, para avaliar a função de partição Z_β devemos achar o traço da matriz $A(x', x)$, para isto fazemos $x' = x$ e então integramos sob todos os valores x . Um cálculo direto

nos da

$$Z_\beta = T\tau \ln A = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln(p^2 + m^2) \quad . \quad (1.34)$$

1.3 A função de Green e o funcional gerador a temperatura finita

Considerando sempre o campo escalar onde a dinâmica deste sistema está governada pelo Hamiltoniano \hat{H} . De acordo com a mecânica quântica temos que

$$\hat{\varphi}(x) = e^{-it\hat{H}} \hat{\varphi}(0, \mathbf{x}) e^{-it\hat{H}} \quad . \quad (1.35)$$

Para achar a função de Green a temperatura finita, procederemos como se fez na seção anterior em que obtivemos uma representação via integral de caminho da função de partição, fazendo uma extensão analítica para o tempo euclidiano ($\tau = ix^0$) e somando sobre todos os campos clássicos φ que são funções de τ e x . Conseqüentemente, definimos a função de Green térmica como

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \equiv \langle T_\tau(\hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_N)) \rangle \quad (1.36)$$

Os observáveis do sistema podem ser obtidos a partir desta função que é definida como o valor médio esperado do produto de campos do operador de campo na representação de Heisenberg. Note que T_τ tem o significado que o ordenamento dos operadores de campo vai de direita à esquerda em ordem de crescimento de τ . A representação das funções de Green térmicas pode ser obtida a partir da teoria análoga para $\beta^{-1} = 0$. A representação funcional da função de Green de N pontos, como é conhecida tem a seguinte forma

$$\langle \varphi''(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-i\hat{H}(t'' - t')} T(\hat{\varphi}(x_1), \dots, \hat{\varphi}(x_N)) | \varphi'(\mathbf{x}), t = 0 \rangle =$$

$$\int \mathcal{D}\varphi \int D\pi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} . \quad (1.37)$$

Agora pelos mesmos passos que seguimos para encontrar a representação funcional da função de partição introduzindo o tempo imaginário, é fácil obter a função de Green térmica que tem a forma

$$G^N(x_1, \dots, x_N) = N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\pi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \times \\ \exp \left\{ \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \varphi) \right) \right\} . \quad (1.38)$$

Esta fórmula se simplifica após a integração funcional em π , e tem uma representação mais simples

$$G^N(x_1, \dots, x_N) = N(\beta) \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \times \\ \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\} \quad (1.39)$$

(note que aqui $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$ é o Lagrangiano no espaço Euclidiano). Seguindo a analogia com a teoria do campo escalar a $\beta^{-1} = 0$, define-se o gerador funcional das funções de Green térmicas como

$$Z[J] = \frac{1}{Z[0]} \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \left(\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) - J(x)\varphi \right) \right\} \quad (1.40)$$

onde $J(x)$ é a fonte e $Z[0]$ é definido como

$$Z[0] = \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \right\} \quad (1.41)$$

As funções de Green são obtidas pela diferenciação funcional de $Z[J]$ *i.e.*,

$$G^N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} \quad (1.42)$$

O gerador funcional $Z(J)$ pode ser representado por uma série de Taylor funcional onde as funções de Green são os coeficientes desta série funcional, *i.e.*

$$Z[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N G^N(x_1, \dots, x_N) \quad (1.43)$$

onde se usou a notação

$$\int dx \equiv \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \quad . \quad (1.44)$$

As funções de Green térmicas conexas são obtidas a partir de $W[J]$ definido por

$$Z[J] = e^{W[J]} \quad , \quad (1.45)$$

usando-se a relação ,

$$G_c^N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\delta^N W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} \quad . \quad (1.46)$$

1.4 Gerador funcional para o campo escalar livre

O gerador funcional para o campo escalar livre, a temperatura finita, é dado pela seguinte expressão:

$$Z_0[J] = \frac{\int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) + \int dx J(x) \varphi(x) \right]}{\int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) \right]} \quad (1.47)$$

onde

$$A(x', x) = (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \delta(x' - x) \quad .$$

Como a integral funcional é Gaussiana, obtemos

$$Z_0[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int dx' \int dx J(x') \Delta_\beta(x' - x) J(x) \right\} \quad (1.48)$$

onde o propagador a temperatura finita é dado por

$$\Delta_\beta(x' - x) = -A^{-1}(x' - x) \quad . \quad (1.49)$$

A inversa de $A(x', x)$ pode ser obtida fazendo-se uso da transformada de Fourier já que se tem

$$A(x', x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} (p^2 + m^2) \quad (1.50)$$

ou

$$\Delta_\beta(x' - x) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-ip \cdot (x' - x)} \frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad . \quad (1.51)$$

Desta forma definimos o propagador no espaço de momentos como

$$\Delta_\beta(p) = \frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad . \quad (1.52)$$

1.5 As regras de Feynman para a teoria massiva do campo escalar

Tendo estabelecido já a representação em forma de integral de caminho do gerador funcional, vamos estender os resultados para a teoria com interação.

Se

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \mathcal{L}_I \quad (1.53)$$

o gerador funcional se escreve como

$$Z[J] = \exp \left\{ \int_{\beta} dx \mathcal{L}_I(\varphi) \right\} Z_0[J] \quad (1.54)$$

onde $Z_0[J]$ é o gerador funcional para a teoria livre. Agora substituímos na densidade Lagrangiana de interação o campo $\varphi(x)$ pela diferenciação funcional com respeito à função fonte para obter

$$Z[J] = \exp \left\{ \int_{\beta} dx \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right\} Z_0[J] \quad (1.55)$$

A expansão perturbativa nasce da expansão do primeiro fator nesta última equação. A forma de $Z_0[J]$ para a teoria $\lambda\varphi^4$ tem a mesma forma que para a mesma teoria a $\beta^{-1} = 0$, com a única diferença que no expoente não tem o fator i e o propagador é dado por (1.52). Daqui tomando em conta que o fator i não aparece nas equações (1.40), (1.43) e (1.47). Temos as seguintes regras de Feynmann no espaço de momentos :

1) A cada linha de momento associamos um fator

$$\frac{-1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} \quad . \quad (1.56)$$

2) Para cada vértice de quatro linhas levando momentos p_1, p_2, p_3, p_4 associamos um fator $-\lambda$, de forma que exista conservação dos momentos

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad . \quad (1.57)$$

3) Integrar e somar cada *loop* interno independente de acordo com

$$\frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad . \quad (1.58)$$

1.6 Formalismo do potencial efetivo a temperatura finita

Por analogia à teoria de campos a $\beta^{-1} = 0$, o campo clássico a temperatura finita pode ser definido como

$$\varphi_c(x) = \frac{\text{Tr} \left(e^{-\beta H} \varphi(x) \right)}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (1.59)$$

Levando em conta que o gerador funcional é

$$Z[J] = \frac{1}{Z[0]} \int_{\beta} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x (\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) - J(x)\varphi) \right\} \quad (1.60)$$

podemos definir o campo clássico φ_c como o valor esperado no vácuo do operador $\hat{\varphi}$ na presença da fonte $J(x)$, *i.e.*,

$$\varphi_c = \frac{\delta \ln Z}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0, out | \varphi(x) | 0, in \rangle_J}{\langle 0, out | 0, in \rangle_J} \quad (1.61)$$

para $J(x) = 0$, temos que

$$\varphi_c(x) = \langle \hat{\varphi}(x) \rangle \quad (1.62)$$

Por meio de uma transformação de Legendre pode se definir a ação efetiva $\Gamma[\varphi_c]$ como

$$\Gamma[\varphi_c] = \ln Z[J] - \int dx (J(x)\varphi_c(x)) \quad (1.63)$$

Desta definição se segue a seguinte expressão funcional

$$J(x) = - \frac{\delta \Gamma(\varphi_c)}{\delta \varphi_c} \quad (1.64)$$

Agora podemos expandir $\Gamma(\varphi_c)$ em potências de φ_c

$$\Gamma(\varphi_c) = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) \quad (1.65)$$

É possível demonstrar que $\Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ é a soma de todos os diagramas de Feynman irreduzíveis a uma partícula (1PI) com n linhas externas. Alternativamente podemos expandir a ação efetiva $\Gamma(\varphi_c)$ em potências dos momentos. É claro que os 1PI diagramas de Feynman $\Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ e os $\tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1 \dots p_N)$ (*i.e.*, suas transformadas de Fourier) satisfazem à seguinte expressão

$$\tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1 \dots p_N) \Gamma(\varphi_c) \delta(p_1 + \dots + p_N) (2\pi)^3 \beta =$$

$$\int dx_1 \dots dx_N \exp \left[i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_N \cdot x_N) \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \right] \quad (1.66)$$

com

$$\delta(p_1 + \dots + p_N) = \delta_{\omega_1 + \dots + \omega_N} \delta(\mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_N) \quad . \quad (1.67)$$

O potencial efetivo a temperatura finita $V(\varphi_c)$ pode ser definido por uma expansão análoga da teoria com $T = 0$

$$\Gamma(\varphi_c) = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx \left(-V(\varphi_c) + \frac{1}{2} A(\varphi_c) \partial^\mu \varphi_c \partial_\mu \varphi_c + \dots \right) \quad (1.68)$$

O termo sem derivadas chama-se o potencial efetivo [11, 12].

Para expressar o potencial efetivo em termos das funções de Green 1PI, primeiro escrevemos $\Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ no espaço dos momentos; para isto temos que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + \dots + k_n) \\ &\quad \times e^{i(k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n)} \Gamma^{(n)}(k_1 \dots k_n) \end{aligned} \quad (1.69)$$

e substituindo esta expansão na eq. (1.68) e expandindo-a em potências de φ_c , obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) &= \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1^4 \dots dx_n^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \\
&\quad \times \int dx^4 e^{i(k_1 + \dots + k_n) \cdot x} e^{i(k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n)} \\
&\quad \times \{ \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n) + \dots \} \\
&= \int dx^4 \sum_n \frac{1}{n!} \{ \Gamma^{(n)}(0, \dots, 0) [\varphi_c(x)]^n + \dots \} \quad (1.70)
\end{aligned}$$

Comparando a eq. (1.70) e eq. (1.72) vemos que a n -ésima derivada de $V(\varphi_c)$ é justamente a soma de todos os diagramas 1PI com n linhas externas levando momento zero.

$$V(\varphi_c) = - \sum_n \frac{1}{n!} \tilde{\Gamma}^{(n)}(0, \dots, 0) [\varphi_c(x)]^n \quad . \quad (1.71)$$

As condições usuais de normalização da teoria de perturbações podem ser expressas em termos das funções dadas na eq. (1.67). Então as condições de renormalização para a Função de Green de dois e quatro pontos 1PI avaliados para os momentos externos nulos e a temperatura finita são

$$\Gamma^{(2)}(0, 0) = m^2 \quad (1.72)$$

$$\Gamma^{(4)}(0, 0, 0, 0) = -\lambda \quad , \quad (1.73)$$

e finalmente a condição da renormalização da função de onda se escreve como

$$Z(\varphi_c)|_{\varphi_c=0} = 1 \quad . \quad (1.74)$$

Então o potencial efetivo é o gerador funcional dos 1PI com momentos externos nulos.

A condição de estabilidade é dada por

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_c} \Big|_{\varphi_c=0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_c^2} \Big|_{\varphi_c=0} > 0 \quad . \quad (1.75)$$

Capítulo 2

Efeitos da Temperatura na Massa e na Constante de Acoplamento

A teoria revista na seção anterior nos serve para encontrarmos a dependência com a temperatura dos parâmetros físicos. Da mesma forma que na teoria com interação a temperatura zero ($\beta^{-1} = 0$), existe a necessidade de renormalizar, o mesmo acontece a temperatura finita. No entanto, pode se mostrar que os contra-termos que renormalizam a teoria a temperatura zero são os mesmos que renormalizam a teoria a temperatura finita. Isto não é difícil de se entender, pois as divergências de uma teoria massiva são divergências ultravioletas e a compactificação de uma das coordenadas não pode nem eliminar nem introduzir novas divergências. No caso de uma transição de segunda ordem, onde a massa renormalizada vai a zero é claro que aparecem divergências infravermelhas.

Voltaremos a este ponto posteriormente. No processo de renormalização, devemos identificar os infinitos que aparecem em cada diagrama de Feynman. Esta etapa é chamada de regularização.

Existem vários métodos diferentes de regularização: "Brute-force cutoff", a regularização de Schwinger, a regularização de Pauli-Villars, a regularização dimensional etc. A escolha de um destes métodos está associada a que este não viole simetrias da teoria. Por exemplo é conhecido que a regularização analítica de Speer não pode ser usada na

$(QED)_{D=4}$ pois viola as identidades de Ward - Takahashi. No nosso caso, como não temos nenhuma simetria de gauge, utilizaremos este método de regularização, fazendo uso do princípio de Extensão Analítica.

Agora, considerando sempre o modelo massivo $\lambda\varphi^4$, analisaremos este sistema a temperatura finita. Em particular, estamos interessados na dependência da massa e da constante de acoplamento renormalizada com a temperatura. Calcularemos estes parâmetros físicos a um *loop* e a dois *loops*. Como se verá mais adiante, é interessante notar que a massa e a constante de acoplamento renormalizados podem ser expressas em termos da função ζ não-homogênea de Epstein. Para um tratamento recente desta técnica veja por exemplo [16]. Neste trabalho nos definimos a massa e a constante de acoplamento renormalizada com momentos externos nulos. Na aproximação de um *loop* a função de vértice de dois pontos $\Gamma^{(2)}$ só envolve o diagrama (a) dado pela figura (2.1). Para a função de vértice de quatro pontos $\Gamma^{(4)}$ temos só um diagrama tipo (b) da mesma figura (2.1).

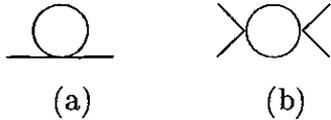


Figura 2.1: Diagramas que contribuem a um *loop* para: (a) função de dois pontos $\Gamma^{(2)}(0)$ e (b) função de quatro pontos $\Gamma^{(4)}(0)$.

Aplicando as regras de Feynman derivadas na seção 1.5 temos

$$\Gamma^{(2)}(0,0) = m^2 + \frac{\lambda}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{\omega_n^2 + k^2 + m^2} + \delta m^{2(1)} \quad (2.1)$$

$$\Gamma^{(4)}(0,0,0,0) = \lambda - \frac{3}{2} \lambda^2 \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(\omega_n^2 + k^2 + m^2)^2} + \delta \lambda^{(1)} \quad (2.2)$$

onde estamos numa dimensão D genérica do espaço-tempo. É fácil ver que para $D = 4$ as integrais acima têm divergências ultravioleta que serão removidas na renormalização. Como primeiro passo no processo de regularização vamos definir

$$F_\beta(s, D) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(\omega_n^2 + k^2 + m^2)^s} \quad (2.3)$$

Neste sentido as integrais acima, são funções dos parâmetros s e D , agora complexos.

Para os momentos contínuos vamos aplicar o método de regularização dimensional.

[No processo de regularização analítica devemos trabalhar com quantidades adimensionais.]

Para isto definimos as quantidades adimensionais em $D = 4$ dadas por:

$$q = \frac{k}{2\pi\mu} \quad (2.4)$$

$$a = \left(\frac{1}{\beta\mu}\right)^2 \quad (2.5)$$

$$c = \frac{m}{2\pi\mu} \quad (2.6)$$

onde μ é um parâmetro com a dimensão da massa. Logo, fazendo a mudança de variável $q = \frac{k}{2\pi\mu}$ na integral e substituindo as novas variáveis definidas acima, a função F_β pode ser expressa como:

$$F_\beta(s, d+1) = \frac{(2\pi\mu)^{d-2s}}{(2\pi\beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^d q \frac{1}{(an^2 + q^2 + c^2)^s} \quad (2.7)$$

Utilizando a identidade

$$\frac{1}{(q^2 + m^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha(q^2+m^2)} \quad (2.8)$$

que nos permite substituir polinômios no denominador por exponenciais, temos

$$F_{\beta}(s, d + 1) = \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(2\pi\beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^d q \cdot \int_0^{\infty} d\alpha \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot e^{-\alpha(q^2 + a \cdot n^2 + c^2)} \cdot \alpha^{s-1} \quad . \quad (2.9)$$

A integração com respeito à variável q é imediata, já que a que a exponencial é Gaussiana. Desta forma, obtemos

$$F_{\beta}(s, d + 1) = \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2}\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\alpha \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \cdot e^{-\alpha(an^2 + c^2)} \alpha^{-d/2} \alpha^{s-1} \quad (2.10)$$

Para seguir adiante fazemos uma nova mudança na variável de integração α ,

$$z = \alpha(an^2 + c^2)$$

e com isto $F_{\beta}(s, D)$ toma uma forma mais simples

$$F_{\beta}(s, d + 1) = \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2}\beta\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(an^2 + c^2)^{s-d/2}} e^{-z} z^{s-d/2-1} \quad . \quad (2.11)$$

Utilizando a representação de Euler da função Gamma:

$$\Gamma_E(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} \quad (Re(z) > 0) \quad (2.12)$$

obtem-se a extensão analítica da função Gamma em todo o plano complexo z . É claro que esta função é analítica em todo o plano complexo exceto nos pontos $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Desta forma, obtemos

$$F_{\beta}(s, d + 1) = \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2}\beta\Gamma(s)} \Gamma(s - d/2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^{s-d/2}}$$

$$= \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2} \beta \Gamma(s)} \Gamma(s - d/2) A_1^{c^2}(s - d/2, a) \quad (2.13)$$

onde definimos a função $A_1^{c^2}(z, a)$ como

$$A_1^{c^2}(z, a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + c^2)^z} \quad (2.14)$$

que é um caso particular da função não-homogênea de Epstein. A função mais geral é

$$A_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N = -\infty}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2 + c^2)^{-z} \quad (2.15)$$

$(a_1, a_2, \dots, a_N > 0 \quad , \quad c^2 > 0)$

também $A_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N)$ pode ser expressa em termos da função modificada não-homogênea de Epstein

$$E_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N = 1}^{\infty} (a_1 n_1^2 + a_2 n_2^2 + \dots + a_N n_N^2 + c^2)^{-z} \quad (2.16)$$

onde se tem a seguinte identidade

$$A_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{1}{c^{2z}} + 2 E_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N) \quad . \quad (2.17)$$

Agora, no processo da continuação analítica da função ζ não-homogênea de Epstein $E_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N)$, dada pela equação (2.16), a função converge para $Re(z) > \frac{N}{2}$ e é uma função analítica de z . Assim, a função $A_1^{c^2}(z, a)$, dada por (2.14), converge para $z > \frac{1}{2}$ e, em particular, para a dimensão do espaço-tempo igual a quatro ($D = 4$) só tem divergências para $s = 1$ ($z = -\frac{1}{2}$) e $s = 2$ ($z = \frac{1}{2}$). Fazendo uso da transformada de Mellin é possível fazer a continuação analítica de $E_N^{c^2}(z, a_1, a_2, \dots, a_N)$ em princípio definida no aberto conexo dado por $Re(z) > \frac{N}{2}$ para $Re(z) \leq \frac{N}{2}$. Agora, o seguinte passo importante é fazer o uso do resultado da extensão analítica desta função [19] para o caso

particular $N = 1$, que é dada pela relação seguinte

$$A_1^{c^2}(z, a) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} c^{2z-1} \Gamma(z)} \left\{ \Gamma\left(z - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{\frac{1}{4}-\frac{z}{2}}}{(\pi n c)^{\frac{1}{2}-z}} K_{\frac{1}{2}-z}\left(\frac{2\pi n c}{\sqrt{a}}\right) \right\} \quad (2.18)$$

onde $K_n(z)$ é a função esférica modificada de Bessel de segunda classe. Fazendo a substituição de (2.18) em (2.13) temos que :

$$F_\beta(s, d+1) = \frac{(2\pi u)^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2} \beta \Gamma(s)} \Gamma(s-d/2) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{c^{2z-1} \Gamma(s-d/2)} \times \\ \left\{ \Gamma\left(s - d/2 - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{1/4-(s/2-d/4)}}{(\pi n c)^{1/2-(s-d/2)}} K_{\frac{1}{2}-(s-d/2)}\left(\frac{2\pi n c}{\sqrt{a}}\right) \right\}. \quad (2.19)$$

Finalmente, fazendo $\boxed{d+1} = D$ e simplificando obtemos a forma mais compacta da função $F_\beta(s, D)$

$$F_\beta(s, D) = \frac{m^{D-2s}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(s)} \left\{ \Gamma\left(s - \frac{D}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{mn\beta}\right)^{\frac{D}{2}-s} K_{\frac{D}{2}-s}(mn\beta) \right\} \quad \checkmark \quad (2.20)$$

Como vemos, os pólos desta função se manifestam para o valor de $(s - \frac{D}{2})$ inteiro e negativo. Para $D = 4$ temos $s = 1$ e $s = 2$ como pólos.

Nas seguintes seções faremos uso dos resultados obtidos, para proceder com a renormalização das funções de dois e quatro pontos para um e dois *loops*, para o campo escalar massivo com interação $\lambda\varphi^4$ e logo depois aplicaremos este método para tratar o fenômeno tricrítico no modelo $\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6$.

2.1 $\Gamma^{(2)}(0)$ a um *loop*: renormalização da massa a temperatura finita

Analisaremos o comportamento da massa com a temperatura até ordem de um *loop*. Então o primeiro passo é renormalizar a massa (a função de dois pontos avaliada com

momentos externos nulos) a temperatura finita β^{-1} . Para isto faremos uso do resultado da seção anterior, que está resumido na equação (2.20).

Para $D = 4$ a massa renormalizada é dada por

$$m_\beta^2 = \Gamma^{(2)}(0, 0) = m^2 + \frac{\lambda}{2} F_\beta(1 + \epsilon, 4) + \delta m^{2(1)} \quad (2.21)$$

onde $\delta m^{2(1)}$ é o contra-termo da massa a um loop. Estamos calculando para $s = 1 + \epsilon$ onde ϵ é um parâmetro em geral complexo . Para calcular $F_\beta(1, 4)$ fazemos uso da equação (2.20):

$$F_\beta(1 + \epsilon, 4) = \frac{m^{2-\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}\Gamma(1)} \left\{ \Gamma(-1 + \epsilon) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{mn\beta} \right) K_1(mn\beta) \right\} \quad (2.22)$$

Por comodidade definimos

$$F_\beta(1 + \epsilon, 4) = I_0 + I_\beta \quad (2.23)$$

onde I_0 e I_β são dados por:

$$I_0 = \frac{m^2}{(4\pi)^2} \Gamma(-1 + \epsilon) \quad (2.24)$$

$$I_\beta = \frac{m^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{mn\beta} \right) K_1(mn\beta) \quad (2.25)$$

então

$$m_\beta^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}(I_0 + I_\beta) + \delta m^{2(1)} \quad (2.26)$$

Agora fazemos uso do esquema de renormalização \overline{MS} (*Minimal Subtraction Modified*), [20] , disto que o contratermo é

$$\delta m^{2(1)} = -\frac{\lambda}{2} I_0 \quad (2.27)$$

Vemos que o contra-termo na teoria a temperatura finita também é o mesmo contra-termo que renormaliza a teoria a $\beta^{-1} = 0$. Logo se tem que a massa renormalizada

a temperatura $\beta^{-1} \neq 0$ pode ser escrita como

$$m_\beta^2 = m^2 + \Delta m_\beta^2 \quad (2.28)$$

onde m^2 é o quadrado da massa renormalizada a $\beta^{-1} = 0$ e Δm_β^2 é a correção térmica finita dada por:

$$\Delta m_\beta^2 = \frac{m^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\beta} K_1(mn\beta) \quad (2.29)$$

Note que esta expressão é zero no limite quando β tende ao infinito, quer dizer, a correção térmica para a massa se anula para $\beta^{-1} = 0$.

A primeira vista se conclui que a contribuição térmica é positiva e crescente com a temperatura . Agora temos que a relação

$$\frac{\Delta m_\beta^2}{m^2} \gg 1 \quad (2.30)$$

quando $m\beta \rightarrow 0$, quer dizer, para altas temperaturas a contribuição da massa térmica é consideravelmente muito maior que para a massa a temperatura zero, isto se deduz das propriedades da função $K_\nu(z)$. Para simplificar a expressão (2.29) , é possível demonstrar que para $\nu > -\frac{1}{2}$ uma das representações integrais da função $K_\nu(z)$ [21] é dada por :

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(\nu - \frac{1}{2})!} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-zp} (p^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dp ; -\frac{\pi}{2} < \text{arg}(z) < \frac{\pi}{2} \quad (2.31)$$

Aplicando a forma integral da função de Bessel para $\nu = 1$ e efetuando o somatório em (2.29), obtemos que

$$\Delta m_\beta^2 = \frac{\lambda m^2}{4\pi^2} \int_1^\infty \frac{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{e^{m\beta p} - 1} dp \quad (2.32)$$

Se analisamos o comportamento assintótico desta expressão para $m\beta \rightarrow 0$, quer dizer, para $\beta^{-1} \rightarrow \infty$ (isto é para altas temperaturas) obtemos então

$$\Delta m_\beta^2 = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{12\beta^2} - \frac{m}{4\pi\beta} - \frac{m^2}{8\pi^2} \ln m\beta \right\} \quad (2.33)$$

O resultado que achamos coincide com os resultados de outros trabalhos [11, 16, 5]. Deste resultado pode-se concluir que a massa aumenta com a temperatura e para temperaturas altas esta pode ser muito grande com respeito à massa a $\beta^{-1} = 0$ como mencionamos acima. Veremos que este comportamento assintótico muda quando consideramos a correção a dois *loops*.

2.2 $\Gamma^{(4)}(0)$ a um *loop*: renormalização da constante de acoplamento a temperatura finita

Agora procedemos a renormalizar a constante de acoplamento a um *loop* a temperatura finita. Então podemos escrever

$$\lambda_\beta = \lambda - \frac{3\lambda^2}{2} F_\beta(2 + \epsilon, 4) + \delta\lambda^{(1)} \quad (2.34)$$

logo $F_\beta(2 + \epsilon, 4)$ é dado por

$$F_\beta(2 + \epsilon, 4) = \frac{1}{16\pi^2} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) + 4 \sum_{n=0}^{\infty} K_0(mn\beta) \right] \quad (2.35)$$

se definimos

$$F_\beta(2 + \epsilon, 4) = J_0 + J_\beta \quad (2.36)$$

onde J_0 e J_β são dados por :

$$J_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma \right) \quad (2.37)$$

$$(2.38)$$

$$J_\beta = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(mn\beta) \quad .$$

(γ é a constante de Euler). Então, segundo nosso esquema de renormalização, temos que

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{3\lambda^2}{2} J_0 \quad (2.39)$$

É possível achar a soma em (2.39) fazendo uso da representação integral de $K_\nu(z)$ para $\nu = 0$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} K_0(mn\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{e^{-mn\beta p} dp}{(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_1^{\infty} \frac{dp}{(e^{m\beta p} - 1)(p^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

logo achamos que a correção térmica finita na aproximação de um *loop* é dada por

$$\Delta\lambda_\beta = -\frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{dp}{(e^{m\beta p} - 1)(p^2 - 1)^{1/2}} \right\} \quad . \quad (2.41)$$

Note que a contribuição térmica para a constante de acoplamento é sempre negativa, isto é, na aproximação de um *loop*, a constante de acoplamento decresce monotonamente com o aumento da temperatura. É claro que atinge seu valor máximo a temperatura zero ($\beta^{-1} = 0$). A dependência da constante de acoplamento com a temperatura tem sido discutido por vários autores [2, 3, 4, 16, 22, 23, 24, 25].

Se a contribuição térmica à constante de acoplamento é negativa, então existe a possibilidade de que para certa temperatura a constante de acoplamento se anule. Quer dizer, para certa temperatura a correção térmica finita seria igual em módulo à constante de acoplamento renormalizada a temperatura zero. A pergunta é, existe tal temperatura, antes de que na aproximação de um *loop* quebre? Como discute Malbouisson e Svaiteer, para $D < 4$ a constante de acoplamento não é necessariamente uma quantidade pequena

e é possível encontrar $\lambda(\beta) = 0$.

A dependência da correção térmica para altas temperaturas é obtida fazendo a expansão do segundo termo do lado direito de (2.41) quando $m\beta \rightarrow 0$. Encontramos que o comportamento assintótico é dado por

$$\Delta\lambda_\beta = -\frac{3\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1}{8\pi m\beta} + \frac{1}{8\pi^2} \ln m\beta \right\} \quad (2.42)$$

Dentro do domínio de validade da aproximação de um *loop*, a dependência da constante de acoplamento com a temperatura poderia ter interessantes implicações para a cosmologia. Resumindo, temos o seguinte resultado para a correção térmica da massa (Δm_β^2) e a correção térmica da constante de acoplamento ($\Delta\lambda_\beta$):

$$\Delta m_\beta^2 > 0 \quad (2.43)$$

e que

$$\Delta\lambda_\beta < 0 \quad . \quad (2.44)$$

Na duas seções seguintes consideraremos estas correções na aproximação de dois *loops*.

2.3 $\Gamma^{(2)}(0)$ a dois *loops*: renormalização da massa

Para a renormalização a dois *loops* da massa a temperatura finita consideram-se todos os diagramas mostrados na figura (2.2). Mas a dois *loops* aparecem divergências que poderiam depender da temperatura (*overlapping*), dando a possibilidade de que apareçam contra-termos dependentes da temperatura. É claro que estas divergências devem se cancelar [26]. Fazendo esta observação a correção a dois *loops* da massa é dada por :

$$m_\beta^2 = m^2 + \lambda(2.2a) - \frac{\lambda^2}{4}(2.2b) - \frac{\lambda^2}{6}(2.2c) + \text{contra-termos} \quad . \quad (2.45)$$

Neste ordem, não se deve considerar uma surpresa que diagramas individuais tenham

infinitos dependentes da temperatura, tais como a diagramas (2.2b) e (2.2c). Estes infinitos dependentes da temperatura se anulam quando todos os diagramas são incluídos, onde os gráficos (2.2d), (2.2e), (2.2f), e (2.2g), são os respectivos contra-termos até ordem de dois *loops* [5, 27]. Nestes cálculos temos problemas com o gráfico (2.2c) que não pode ser expresso em termos de nossa função $F_\beta(s, D)$ e que é dada pela seguinte expressão

$$(2.2c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} \int \frac{dp^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{dq^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{w_n^2 + p^2 + m^2} \frac{1}{w_l^2 + q^2 + m^2} \\ \times \frac{1}{(w_n + w_l)^2 + (p + q)^2 + m^2} \quad (2.46)$$

onde a parte finita de (2.2c) é uma expressão muito complicada. Autores tem calculado (2.2c) , [5, 22, 27], mas sempre a parte finita é uma expressão complicada. Fazendo uso do formalismo Thermo Field Dynamics, que foi introduzido por Takahashi e Umezawa [13], é possível expressar (2.2c) como

$$(2.2c) = K_0 + K_\beta \quad (2.47)$$

Então levando em conta esta notação, podemos escrever

$$m_\beta^2 = m^2 + \lambda(I_0 + I_\beta) - \frac{\lambda^2}{4}(I_0 + I_\beta)(J_0 + J_\beta) - \frac{\lambda^2}{6}(K_0 + K_\beta) + \text{contra - termos} \quad (2.48)$$

Mas existe uma peculiaridade, K_β é divergente mesmo, embora possa ser expresso como

$$K_\beta = 3J_0I_\beta + f_\beta(m\beta) \quad (2.49)$$

onde $f_\beta(m\beta)$ agora é finito e tem uma expressão muito complicada que para nosso caso não é mesmo importante, já que o termo importante que contribui para que a massa diminua vem do terceiro termo de (2.48). Desta forma temos que a correção térmica

finita (desprezando a parte finita de (2.49) a dois *loops* é

$$\Delta m_\beta^2 = \frac{\lambda m^2 I_\beta}{3\pi^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} J_\beta\right) \quad , \quad (2.50)$$

onde os termos divergentes se cancelam quando são incluídos todos os gráficos da figura (2.2) [5, 27].

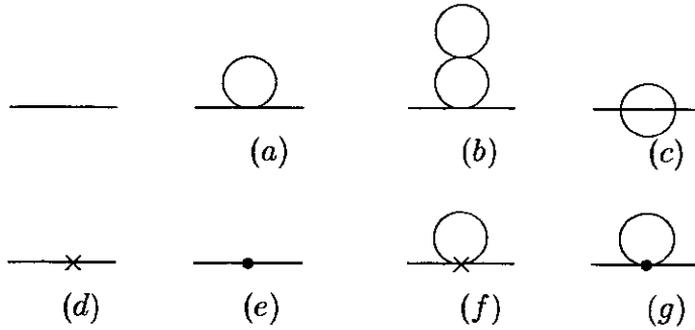


Figura 2.2: Diagramas que contribuem à função de vértice de dois pontos a dois *loops*.

Note que I_β e J_β são ambos não-negativos para qualquer temperatura :

$$J_\beta, I_\beta > 0 \quad (\forall \beta^{-1} > 0), \quad (2.51)$$

Logo se conclui que para certa temperatura a correção térmica finita decresce com a temperatura , chegando a ser nula quando o termo entre parênteses de (2.50) se anula, *i.e.* ,

$$1 - \frac{\lambda}{2} J_\beta = 0 \quad , \quad (2.52)$$

e acima desta temperatura a massa renormalizada começa a decrescer com o aumento da temperatura . Assim, temos que o cálculo da correção térmica finita da massa a dois *loops* só é consistente com o cálculo a um *loop* para certo intervalo de temperatura (regime de baixas temperaturas). No regime de altas temperaturas a correção térmica finita da

massa é negativa e monotonamente decrescente com a temperatura na aproximação de dois *loops*. O ponto de partida deste trabalho foi responder a pergunta do que acontecia com a massa renormalizada quando a correção até dois *loops* fosse considerada.

2.4 $\Gamma^{(4)}(0)$ a dois *loops*: renormalização da constante de acoplamento

Agora analisaremos o comportamento da constante de acoplamento quando se considera a correção térmica a dois *loops*. Para este caso os gráficos que devem ser considerados para a correção da função de vértice $\Gamma^{(4)}(0)$, são mostrados na figura (2.3). Note que incluímos os gráficos que representam os contra-termos .

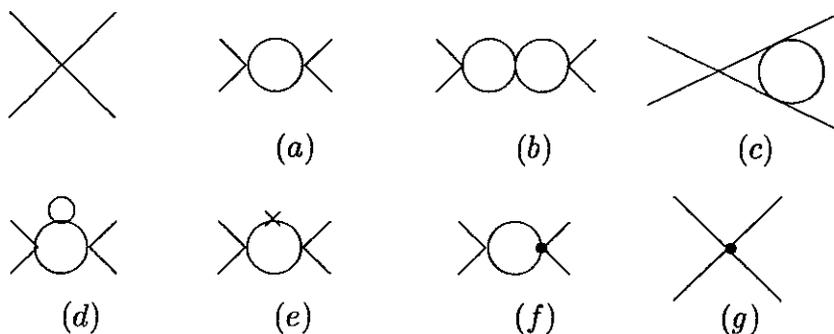


Figura 2.3: Diagramas que contribuem para a função de vértice de quatro pontos a dois *loops*.

Um cálculo direto nos dá

$$\lambda_\beta = \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2(2.3a) + \frac{3}{4}\lambda^3(2.3b) + \frac{3}{2}\lambda^3(2.3d) + 3(2.3c) + \text{contra-termos}, \quad (2.53)$$

conseqüentemente, em termos de nossa função $F_\beta(s, D)$, pode-se escrever como:

$$\begin{aligned} \lambda_\beta &= \lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 F_\beta(1, 4) + \frac{3}{4}\lambda^3 [F_\beta(2, 4)]^2 \\ &+ \frac{3}{2}\lambda^3 F_\beta(1, 4)F_\beta(3, 4) + 3(2.3c) + \text{contra - termos} , \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde $F_\beta(1, 4)$ e $F_\beta(2, 4)$ são dadas pelas equações (2.22) e (2.35), respetivamente, e $F_\beta(3, 4)$ pode avaliar-se da mesma forma com ajuda da eq.(2.20), portanto

$$F_\beta(3, 4) = \frac{1}{32\pi^2 m^2} \left[\Gamma(1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (mn\beta) K_{-1}(mn\beta) \right] . \quad (2.55)$$

Por simplicidade definimos

$$F_\beta(3, 4) = L_0 + L_\beta \quad (2.56)$$

onde

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{32\pi m^2} \\ L_\beta &= \frac{\beta^2}{16\pi^2} \int_1^\infty \frac{e^{m\beta} + e^{2m\beta}}{(e^{m\beta} - 1)^3} (p^2 - 1) dp . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Note que fizemos uso da propriedade $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ e da representação integral da função de Bessel dada por (2.31) para simplificar a expressão (2.55).

Logo a correção térmica a dois *loops* para a constante de acoplamento pode ser expressa aproximadamente por

$$\Delta\lambda_T = \frac{3}{4}\lambda^2 (-2J_\beta + \lambda J_\beta^2 + 2\lambda I_\beta L_\beta) \quad (2.58)$$

onde nesta equação desprezamos o diagrama (2.3c) que contém K_β .

Desta equação, conclui-se que o comportamento a dois *loops* para a constante de acoplamento é contrário ao obtido a um *loop* já que J_β aumenta indefinidamente com a temperatura. Então no início de certa temperatura em o que o termo que se encontra

entre os parênteses é positivo, e logo continua crescendo monotonamente. Isto indica que para altas temperaturas a constante de acoplamento tende a aumentar indefinidamente.

Capítulo 3

O Fenômeno Tricrítico no Modelo

$$(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$$

Neste capítulo discutiremos os efeitos térmicos para a teoria de um campo escalar massivo com interação $\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6$ em três dimensões ($D = 3$) onde o modelo é renormalizável. O comportamento térmico da massa e da constante de acoplamento é analisado na aproximação de dois *loops*. A inclusão da interação $\sigma\varphi^6$ nos permite estudar o fenômeno interessante da mudança de transição de fase de segunda à primeira ordem [30, 31].

Note que se a constante de acoplamento térmica se tornasse negativa para certa temperatura (para $m^2(\beta) > 0$) a transição de primeira ordem pode acontecer. Para $m^2(\beta) < 0$ e a constante de acoplamento positiva ($\lambda_\beta > 0$), nos temos uma transição de segunda ordem. O ponto $m^2(\beta) = \lambda(\beta) = 0$ define o ponto tricrítico [32, 33]. Alguns sistemas como os metamagnéticos (anti-ferromagnéticos na presença de um campo magnético forte) ou em uma mistura $He^3 - He^4$ pode apresentar tal comportamento. Para um tratamento do fenômeno tricrítico fazendo uso da equação de Callan-Zymanzik veja por exemplo a ref. [34].

Como foi discutido no primeiro capítulo, e também por Funakubo e Sakamoto [23] e Fendley [24], na aproximação de dois loops os efeitos da temperatura sob os parâmetros físicos é oposto ao comportamento do cálculo na aproximação de um *loop*, no regime de

altas temperaturas. Entretanto, não desprezamos a possibilidade de que a constante de acoplamento térmica se anule para alguma temperatura intermediária. O propósito deste capítulo é investigar o fenômeno tricrítico na teoria $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$.

Portanto devemos calcular $\Gamma^{(2)}(0)$ e $\Gamma^{(4)}(0)$ na aproximação de dois *loops*. Mostramos que esta aproximação é suficiente para obter o ponto tricrítico. Nossa Lagrangiana de interação é

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{\sigma}{6!}\varphi^6 \quad . \quad (3.1)$$

Os diagramas que devem ser considerados para a correção da massa se constróem de acordo as regras de Feynman modificadas devido à adição do termo de interação $\frac{\sigma}{6!}\varphi^6$, quer dizer os diagramas são compostos a partir dos vértices de 4 e 6 pernas . A expansão em diagramas de $\Gamma^{(2)}(0)$ até dois *loops* é mostrada na figura (3.1).

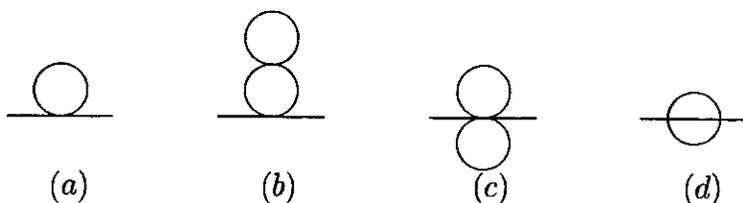


Figura 3.1: Diagramas que contribuem para correção de $\Gamma^{(2)}(0)$ no modelo $\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6$.

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 + \frac{\lambda}{2} (3.1a) - \frac{\lambda^2}{4} (3.1b) - \frac{\sigma}{8} (3.1c) - \frac{\lambda^2}{6} (3.1d) \quad (3.2)$$

onde as integrais (3.1a) , (3.1b) e (3.1c) são expressas em termos da função $F_\beta(s, D)$ dada por (2.20). O gráfico (3.1d) "sunset" tem uma expressão bastante complicada mesmo para $\beta^{-1} = 0$ e não pode ser expresso em termos de funções elementares. Usando resultados anteriores temos que

$$(3.1a) = F_{\beta}(1, 3) = \frac{m}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \left\{ -2\pi^{\frac{1}{2}} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{mn\beta} \right)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(mn\beta) \right\} . \quad (3.3)$$

A expressão analítica da função de Bessel de segunda classe $K_{\nu}(z)$ para ν semi-inteiro é simples e pode achar-se com ajuda da seguinte fórmula de recorrência

$$K_{n-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{\frac{1}{2}} z^n \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n e^{-z} ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Aplicando esta fórmula para $n = 1$ ($\nu = \frac{1}{2}$), temos que :

$$K_{\frac{1}{2}}(mn\beta) = \left(\frac{\pi}{2mn\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-mn\beta} \quad (3.5)$$

e substituindo este resultado na eq. (3.3), obtemos:

$$F_{\beta}(1, 3) = \frac{m}{4\pi} \left(-1 + \frac{2}{m\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-mn\beta}}{n} \right) . \quad (3.6) \checkmark$$

A soma pode ser efetuada a partir da relação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} = -\ln(1-a) \quad (0 < a < 1) . \quad (3.7)$$

Desta forma

$$F_{\beta}(1, 3) = \frac{m}{4\pi} \left(-1 - \frac{2 \ln(1 - e^{-m\beta})}{m\beta} \right) . \quad (3.8)$$

Daqui em diante frente por simplicidade, faremos uso da notação

$$x = m\beta . \quad (3.9)$$

Definimos a função $f_1(x)$ como:

$$f_1(x) = -1 - \frac{2 \ln(1 - e^{-x})}{x} . \quad (3.10)$$

Agora em termos desta expressão temos que

$$(3.1a) = \frac{m}{4\pi} f_1(x) \quad (3.11)$$

logo, o diagrama (3.1b) pode ser expresso como:

$$(3.1b) = F_\beta(1, 3) \times F_\beta(2, 3) \quad (3.12)$$

onde agora

$$F_\beta(2, 3) = \frac{1}{8m\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{nx}\right)^{-\frac{1}{2}} K_{-\frac{1}{2}}(nx) \right) \quad (3.13)$$

então levando em conta que $K_\nu = K_{-\nu}$ e fazendo uso da eq. (3.5) nesta última relação, obtemos que:

$$\begin{aligned} F_\beta(2, 3) &= \frac{1}{8m\pi} \left(1 + \frac{2}{e^x - 1} \right) \\ &= \frac{1}{8m\pi} f_2(x) , \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde definimos :

$$f_2(x) = 1 + \frac{2}{e^x - 1} . \quad (3.15)$$

É claro que $\Gamma^{(2)}(0)$ pode ser escrito em termos de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 + \frac{\lambda m}{8\pi} f_1(x) - \frac{\lambda^2}{128\pi^2} f_1(x) f_2(x) - \frac{\sigma m^2}{128\pi^2} (f_1(x))^2 . \quad (3.16)$$

É interessante notar que podemos expressar $\Gamma^{(2)}(0)$ como função dos parâmetros adi-

mensionais x , $\frac{\lambda}{m}$ e σ . Para isto fatorizamos m^2 de (3.16) e fazendo uso da notação

$$y = \frac{\lambda}{m} \quad , \quad (3.17)$$

obtemos que

$$\Gamma^{(2)}(0) = m^2 \left[1 + \frac{f_1(x)}{8\pi} \left(y - y^2 \frac{f_2(x)}{16\pi} - \sigma \frac{f_1(x)}{16\pi} \right) \right] \quad . \quad (3.18)$$

Podemos ver que de igual modo que em $D = 2$ a dois *loops* a massa térmica diminui com a temperatura a partir de uma certa temperatura. Este resultado pode ser visto mais claramente fazendo os gráficos para certos valores dos parâmetros adimensionais de y e σ em função de $x = m\beta$ (ver figura (3.2)).

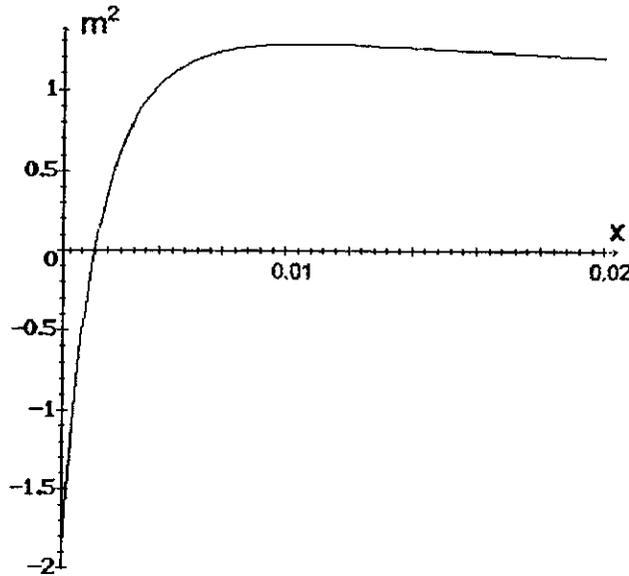


Figura 3.2: Gráfico do comportamento de $m^2(\beta)$ em função de $x = m\beta$ para certos valores numéricos de σ e y . Note que no regime de altas temperaturas o comportamento de m_β^2 é contrário com respeito ao cálculo de um *loop*. Nesta figura se mostra que para certa temperatura m_β^2 se anula.

O seguinte passo é o cálculo do comportamento da constante de acoplamento ($\Gamma^{(4)}(0)$) com a temperatura na aproximação de dois *loops*. A expansão da função de vértice de quatro pontos em diagramas se mostra na figura (3.3).

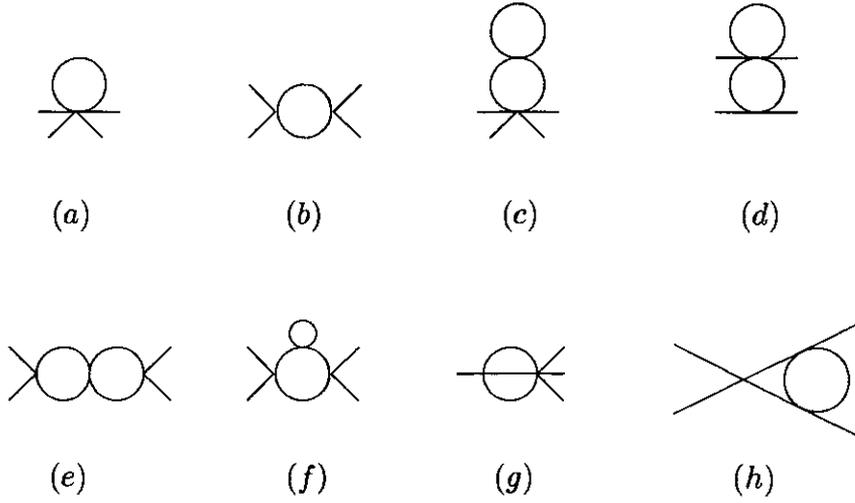


Figura 3.3: Diagramas que contribuem para a correção de $\Gamma^{(4)}(0)$ no modelo $\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6$ a dois loops

$$\lambda(\beta) = \lambda - \frac{1}{2}\sigma (3.3a) - \frac{3}{2}\lambda^2 (3.3b) + \frac{1}{4}\lambda\sigma (3.3c) + \frac{1}{2}\lambda\sigma (3.3d) +$$

$$\frac{3}{4}\lambda^3 (3.3e) + \frac{3}{2}\lambda^3 (3.3f) + \frac{2}{3}\lambda\sigma (3.3g) + 3\lambda^3 (3.3h) . \quad (3.19)$$

Aqui as integrais de Feynman representadas pelos gráficos (3.3a), (3.3b), (3.3c), (3.3d), (3.3e) e (3.3f) podem ser expressas em termos da função $F_\beta(s, D)$ como segue

$$(3.3a) = F_\beta(1, 3) \quad (3.20)$$

$$(3.3b) = F_\beta(2, 3) \quad (3.21)$$

$$(3.3c) = F_\beta(1, 3) \times F_\beta(2, 3) \quad (3.22)$$

$$(3.3d) = (c) \quad (3.23)$$

$$(3.3e) = (F_\beta(2, 3))^2 \quad (3.24)$$

$$(3.3f) = F_\beta(1, 3) \times F_\beta(3, 3) \quad (3.25)$$

Note que $F_\beta(1, 3)$ e $F_\beta(2, 3)$ são dados pelas equações (3.8) e (3.13) respectivamente. O único termo novo surge em (3.3f) que é $F_\beta(3, 3)$ e é dado por :

$$F_\beta(3, 3) = \frac{1}{16m^3\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + xn) e^{-xn} \right) . \quad (3.26)$$

A soma entre parênteses se pode achar facilmente tendo em conta a soma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \quad (3.27)$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^n = a \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{a}{(1-a)^2} . \quad (3.28)$$

Desta forma temos que

$$F_\beta(3, 3) = \frac{1}{16m^3\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} \right\} . \quad (3.29)$$

Definindo a função

$$f_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} + \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} , \quad (3.30)$$

a constante de acoplamento dependente da temperatura pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \lambda(\beta) = & \lambda - \frac{\sigma m f_1(x)}{8\pi} - \frac{3\lambda^2 f_2(x)}{16m\pi} + \frac{3\lambda\sigma f_1(x) f_2(x)}{128\pi^2} \\ & + \frac{3\lambda^3 (f_1(x))^2}{256m^2\pi^2} + \frac{3\lambda^3}{128m^2\pi} f_1(x) f_3(x) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

• Para altas temperaturas a constante de acoplamento aumenta monotonamente com a temperatura. O gráfico em função de $x = m\beta$ é mostrado na figura (3.4) para certos valores numéricos dos parâmetros adimensionais já mencionados acima.

Agora neste ponto é interessante notar que m_β e λ_β são a massa e a constante de acoplamento efetiva a temperatura β^{-1} no potencial efetivo. O conceito de potencial efetivo a temperatura finita é uma quantidade muito importante quando se discutem

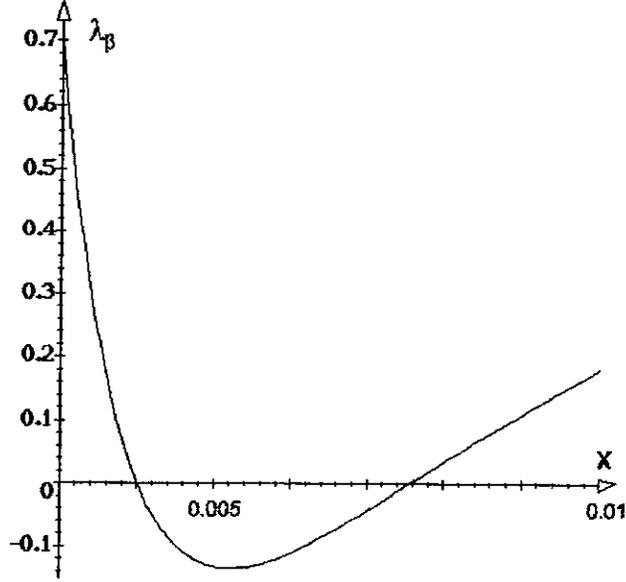


Figura 3.4: Comportamento da constante de acoplamento efetiva a dois *loops* λ_β em função de $x = m\beta$ para valores numéricos fixos de σ e y . Também o comportamento deste parâmetro com a temperatura é contrario ao cálculo de um *loop* no regime de altas temperaturas.

problemas de transição de fase. Assim, a massa efetiva dependente da temperatura dada desempenha um papel importante no estudo da transição de fase de segunda ordem [11]. Na transição de fase de primeira ordem a constante de acoplamento efetiva dependente da temperatura é importante .

Como se discute no apêndice A, o fenômeno tricrítico acontece quando os parâmetros m_β^2 e λ_β se anulam para certa temperatura (β^{-1}). Fazendo o cálculo para valores diferentes dos parâmetros , x, y e σ chegamos a concluir que existe um conjunto de valores dos parâmetros para o qual o ponto tricrítico acontece. Quer dizer no espaço dos parâmetros (x, y, σ) a condição $\Gamma^2(0) = 0$ define uma superfície. O mesmo acontece com $\Gamma^4(0)$. A interseção de ambas as superfícies define uma linha tricrítica, (ver figura (3.5)), *i.e.*, para cada conjunto de valores m^2 , σ e λ temos uma temperatura tricrítica.

Para uma melhor visualização das transições de fase é possível plotar o potencial efetivo como uma função do valor esperado do campo no vácuo e $x = m\beta$. A temperatura é o parâmetro que nos permite interpolar as duas configurações : o estado meta-estável $\langle \varphi \rangle = 0$ no regime de baixas temperaturas com transição de fase de primeira ordem, e

transição de fase de segunda ordem no regime de altas temperaturas; (ver figura (3.6)).
 Em alguma temperatura intermediária o ponto tricrítico acontece.

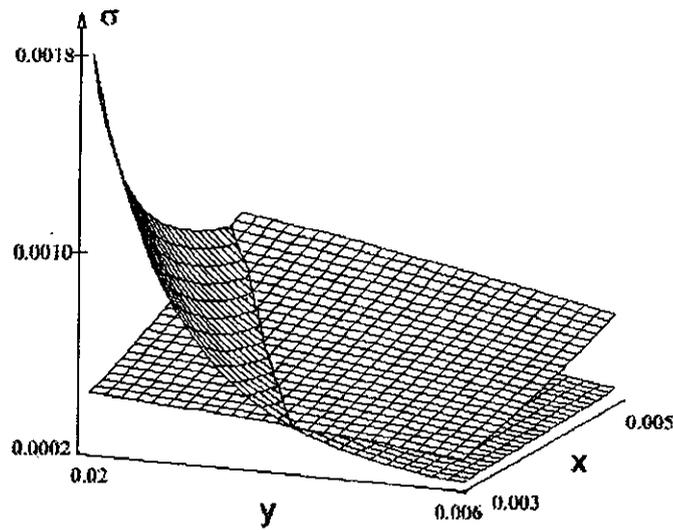


Figura 3.5: As duas superfícies $\Gamma^{(2)}(0) = 0$ e $\Gamma^{(4)}(0) = 0$ no espaço $x = m\beta$, $y = \frac{\lambda}{m}$ e σ . Neste gráfico mostra-se claramente a linha de interseção destas duas superfícies onde para cada valor das coordenadas desta linha no espaço (x, y, σ) o fenômeno tricrítico acontece.

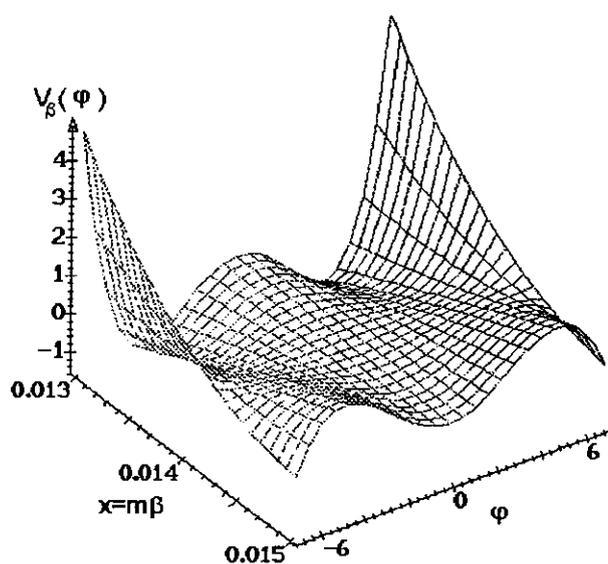


Figura 3.6: O potencial efetivo como uma função do valor esperado do campo no vácuo e $x = m\beta$. No regime do baixas temperaturas, existe um mínimo meta-estável em $\langle \varphi \rangle = 0$ (existe um mínimo degenerado verdadeiro fora de origem que não aparece na figura). Aumentando a temperatura aparece a temperatura tricrítica β_*^{-1} . No regime de altas temperaturas existe a transição de fase de segunda ordem.

Capítulo 4

Conclusão

No segundo capítulo encontramos que para o modelo $(\lambda\varphi^4)_{D=4}$, na aproximação de um *loop*, a correção térmica da massa (Δm_β^2) é positiva e a correção térmica da constante de acoplamento $(\Delta\lambda_\beta)$ é negativa. Na aproximação de dois *loops*, achamos que no regime de altas temperaturas o comportamento destes parâmetros é oposto ao cálculo de um *loop*.

No terceiro capítulo estudando o modelo $(\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6)_{D=3}$ a temperatura finita, obtemos um resultado muito conhecido. Provamos que para cada conjunto de valores de m , λ e σ existe uma temperatura $\beta^{-1}(m, \lambda, \sigma)$ onde a massa térmica e a constante de acoplamento se anulam. Devem-se fazer duas observações: a primeira é que a existência do ponto tricrítico não pode ser modificada com a inclusão do diagrama tipo “*sunset*” e diagramas relacionados; a inclusão desses gráficos só mudara a temperatura do ponto tricrítico; a segunda é a existência de um pólo em $\Gamma^4(0)$ como foi anotado por Bardeen, Moshe e Bander [28]. Na teoria $\lambda\varphi^4$ é possível somar uma série infinita de diagramas (*ring diagrams*) para solucionar o problema das divergências infravermelhas, já que o campo adquire uma massa proporcional a $(\lambda)^{\frac{1}{2}}\beta^{-1}$. Neste sentido nos concluímos que o mesmo pode ser feito no modelo $\lambda\varphi^4 + \sigma\varphi^6$ de tal maneira que a massa gerada dinamicamente evita a divergência infravermelha. Um argumento mais elaborado foi dado por Parisi [29], onde a introdução de operadores multi-locais como contra-termos pode eliminar as divergências infravermelhas.

Esta tese tem duas continuações naturais. A primeira é calcular a taxa de decaimento do estado meta-estável $\langle \varphi \rangle = 0$. Para baixas temperaturas a solução $\langle \varphi \rangle = 0$ é um mínimo meta-estável do potencial efetivo, e é possível se calcular a probabilidade por unidade de tempo por unidade de volume deste estado decair para o verdadeiro vácuo do modelo com formação de bolhas. Estas ideias têm sido bastante utilizadas no contexto de cosmologia inflacionária assim como outros modelos que pretendem descrever um universo primordial.

Note que o aparecimento de bolhas está relacionado à razão entre dois tempos característicos: vida média do estado meta-estável $\Delta\tau$ e o tempo que o sistema demora para passar para o regime de altas temperaturas Δt (estamos assumindo que a temperatura do banho térmico pode ser controlada). Se $\Delta t \gg \Delta\tau$ teremos formação de bolhas. Caso contrário ($\Delta\tau \gg \Delta t$) o estado $\langle \varphi \rangle = 0$ é estável.

Outra continuação possível do trabalho desta tese é utilizar o método de redução dimensional para se investigar o comportamento do modelo a altas temperaturas. No regime de altas temperaturas os modos não-estáticos se desacoplam e temos uma teoria efetiva em $D = 3$. É importante notar que a validade desta aproximação se restringe a distâncias $R \gg \beta$ [35]. Esta aproximação tem sido utilizada para se investigar a transição de uma fase confinada a uma fase desconfinada em QCD. Seria interessante utilizar esta técnica neste modelo ou num modelo de férmions com auto-interação como por exemplo o modelo de Gross-Neveu [36], que contém algumas semelhanças com QCD, a saber: em $D = 2$ o modelo tem liberdade assintótica e existe quebra de simetria quiral.

Apêndice A

O Ponto Tricrítico

Para estudar o fenômeno tricrítico, vamos introduzir interação φ^6 . Na aproximação de árvore (*tree level*) o potencial tem a forma

$$V(\varphi) = \frac{A}{2}\varphi^2 + \frac{B}{4}\varphi^4 + \frac{C}{6}\varphi^6 \quad (\text{A.1})$$

e exigimos que $C > 0$ para que exista um vácuo estável. Em geral os parâmetros físicos vão mudar com a temperatura, mas agora somente consideraremos como parâmetros que vão mudar A e B. Para introduzir o fenômeno tricrítico precisamos conhecer os valores de φ que minimizam o potencial A.1. Como se sabe, encontramos os extremos a partir da equação $V'(\varphi) = 0$, isto é

$$\varphi \{A + B\varphi^2 + C\varphi^4\} = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

A solução trivial desta equação é $\varphi = 0$, mas existe outra possibilidade para a condição

$$B^2 - 4AC > 0 \quad (\text{A.3})$$

(a curva de pontos na figura (A.1), que é a fronteira da região meta-estável).

Logo se $A < 0$, o mínimo absoluto é

$$\varphi_+^2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} \quad (\text{A.4})$$

neste caso

$$V(\varphi_+) - V(0) = \frac{1}{3}\varphi_+^2 \left[A + \frac{B}{4}\varphi_+^2 \right] \quad (\text{A.5})$$

é negativo, indicando uma quebra espontânea de simetria.

Agora para A e B positivos, só existe uma solução real da eq. (A.2) que é $\varphi = 0$.

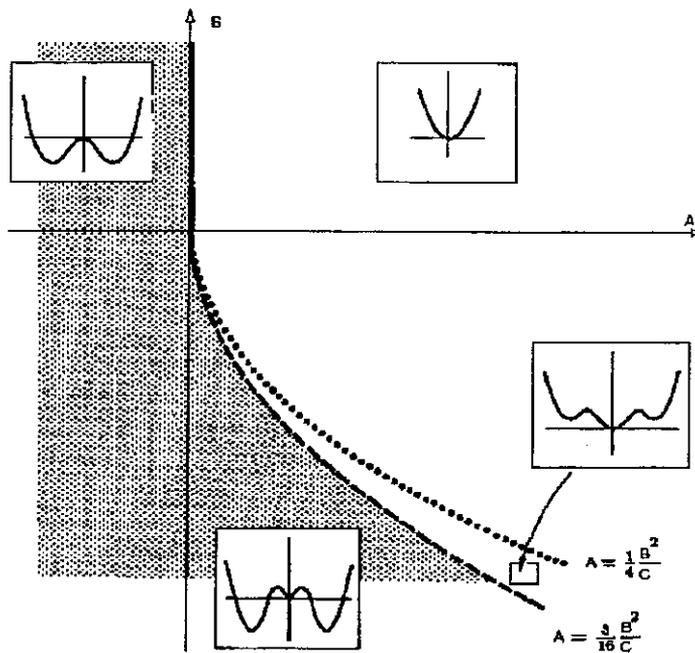


Figura A.1: Diagrama de fase para o ponto “tricrítico”. Linha grossa: Transição de segunda ordem; linha quebrada: transição de primeira ordem; curva de pontos: limite da região meta-estável. No ponto tricrítico as duas linhas de transição se juntam suavemente. Em cada região o comportamento típico do potencial é mostrado.

Consideremos agora um sistema cartesiano cujo eixos são A e B . Então cruzando o eixo positivo de B , temos uma transição de fase de segunda ordem, que é controlada por A , mas o termo $C\varphi^6$ é irrelevante. Algo interessante ocorre quando A é positivo e B negativo, onde se tem

$$4AC < B^2 \quad (\text{A.6})$$

Então o sinal de $V(\varphi_+) - V(0)$ é negativo, quer dizer φ_+ representa, no sentido da mecânica estatística usual, uma magnetização espontânea, só até a curva

$$B\sqrt{B^2 - 4AC} = B^2 - 8AC \quad (\text{A.7})$$

Isto é o arco da parábola

$$B^2 = \frac{16}{3}AC \quad (\text{A.8})$$

e o ramo negativo desta parábola descreve uma linha de transição de primeira ordem. Assim como se mostra na figura. (A.1), a linha de transição de segunda ordem se junta no ponto tricrítico ($A = B = 0$) com uma linha de transição de primeira ordem.

Referências

- [1] A. Aizeman, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1 (1981), J. Frohlich, *Nucl. Phys.* **200B**, 281 (1982).
- [2] K. Babu Joseph, V.C. Kuriakose and M. Sabir, *Phys. Lett.* **115B**, 120 (1982).
- [3] O.J. Eboli and G.C. Marques, *Phys. Lett.* **162B**, 189 (1985).
- [4] H.A. Weldon, *Phys. Lett.* **174B**, 427 (1986), K. Takahashi, *Z. Phys.* **C26**, 601 (1985).
- [5] T. Alther, *Phys. Lett.* **B238**, 360 (1990).
- [6] N. Banerjee and S. Mallik, *Phys. Rev. D* **43**, 3368 (1991), M.E. Carrington, *Phys. Rev. D* **45**, 2933 (1992), P. Arnold, *Phys. Rev. D* **46**, 2628 (1992), R.P. Parwani, *Phys. Rev. D* **45**, 4695 (1992), R.P. Parwani and H. Singh, *Phys. Rev. D* **51**, 4518 (1995).
- [7] D. Bailin and A. Love “*Introduction to Gauge Field Theory*” (Graduate Student Series in Physics,1996); M. Swanson ”*Path Integral and Quantum Processes*”, Academic Press, INC (1992); J.I. Kapusta, ”*Finite temperature field theory*”, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989); N.P. Landsmann and Ch.G. Van Weert, *Phys. Rep.*, **145**, 141 (1987).
- [8] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).
- [9] A.D. Linde, *Phys. Lett.* **B42**, 471 (1972).
- [10] C. Bernard, *Phys. Rev. D* **9**, 3312 (1974).

- [11] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974).
- [12] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **9**, 3357 (1974).
- [13] Y. Takahashi and H. Umezawa, *Collec. Phen.* **2**, 55 (1975).
- [14] H. Matsumoto, *Fortschr. Phys.* **25**, 1 (1977).
- [15] A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Notas de Física CBPF-NF-059/95*.
- [16] L.H. Ford and N.F. Svaiter, *Phys. Rev. D*, **51**, 6981 (1995).
- [17] A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Notas de Física CBPF-NF-070/95*, to appear in *Physica A* (1996).
- [18] G.J. Añaños and N.F. Svaiter, *Notas de Física CBPF-NF-043/96*.
- [19] K. Kirsten, *J. Math. Phys.* **32**, 3008 (1991).
- [20] W.A. Barden, A.J. Buras, D.W. Duke and T. Muta, *Phys. Rev. D* **18**, 3998 (1978).
- [21] G. Arfken, “*Mathematical Methods For Physicists*”, Academic Press New York and London (1965).
- [22] Y. Fujimoto , K. Ideura , Y. Nakano and H. Yoneyama, *Phys. Lett.* **167B**, 406 (1986)
- [23] K. Funakubo and M. Sakamoto, *Phys. Lett.* **186B**, 205 (1987).
- [24] P. Fendley, *Phys. Lett.* **196B**, 175 (1987).
- [25] A.P.C. Malbouisson and N.F. Svaiter, *Notas de Física-CBPF-NF-044/94*.
- [26] D.J. Toms, *Phys. Rev. D* **21**, 928 (1980), *D* **21**, 2805 (1980).
- [27] H.W. Braden *Phys. Rev. D* **25**, 1028 (1982).
- [28] A. Bardeen, M. Moshe and M. Bander, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1188 (1984).

- [29] G. Parisi, *Phys. Lett.* **66B**, 167 (1977), C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, *Phys. Lett.* **38**, 306 (1970).
- [30] C. Itzykson and J.M. Drouffe, "*Statistical Field Theory*", Cambridge University Press (1989), Cambridge.
- [31] K. Huang, "*Statistical Mechanics*", John Willey and Sons, Inc New York (1987).
- [32] Estamos adotando a nomenclatura sugerida por Griffiths (R. B. Griffiths, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 715 (1970)).
- [33] M. Blume, V. J. Emery and R. B. Griffiths, *Phys. Rev. A* **4**, 1071 (1971), E. Eberhand, K. Riedel and F. J. Wegner, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 349 (1972), J.C. Le Guillou and J. Zinn Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 95 (1977), D. Boyanovsky and L. Masperi, *Phys. Rev. D* **21**, 1550 (1980), H. Hamber, *Phys. Rev. B* **21**, 3999 (1980) and R. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 574 (1982).
- [34] C.A. Aragão de Carvalho, *Nucl. Phys.* **119**, 401 (1977).
- [35] N. P. Landsman, *Nucl. Phys. Rev.* **322**, 498 (1989)
- [36] D. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974).

**“O FENÔMENO TRICRÍTICO EM TEORIA DE
CAMPOS A TEMPERATURA FINITA”**

Gino Novalis Janampa Añaños

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



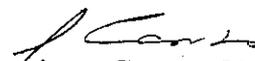
Nami Fux Svaiter - Presidente



Bruto Max Pimentel Escobar



Adolfo Pedro Carvalho Malbouisson



Francisco Caruso Neto - Suplente

• Rio de Janeiro, 27 de setembro de 1996