

1995/07

V 181

TESE DE
DOUTORADO

**Grupos Quânticos e q -Osciladores:
Algumas Aplicações**

José Luiz Matheus Valle

530.142
V 181

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, AGOSTO DE 1995

Dedicatória

Pras famílias: Seu Zé, Dona Olga, Rô, Maria, João, Sonia, Cambraia, Bel, Marcelo, Gustavo, Henrique, Diego e Pedro.

Agradecimentos

- A Marco Aurélio do Rego Monteiro, pela paciência em me orientar desde 1991.
- A José Abdalla Helayel Neto (CBPF) e Lorianò Bonora (SISSA), por se responsabilizarem pela minha permanência como bolsista *sandwich* na SISSA durante o ano acadêmico de 1990.
- A Luis Paulo Colatto, com quem quebrei a cabeça para fazer parte do trabalho desta tese.
- A galera do 3º andar e adjacências: Marcelão, Oswaldo, Marquinho, Luis Cláudio, Marcelinho, Renan, Vitor, Claudio, Daniel, Cambraia, Flavio e *last but not least* o grande Tião.
- A Myriam por toda a ajuda.
- Aos colegas do Departamento de Física de Juiz de Fora, pela força.
- Ao CNPq e à CAPES, de quem fui bolsista durante estes anos todos.

Resumo

Nesta tese, vamos discutir diferentes estruturas algébricas deformadas em três problemas distintos. Inicialmente utilizamos as variáveis de Paragrassmann para introduzir uma generalização das coordenadas fermiônicas. Utilizamos estas coordenadas para a construção de uma ação que será a generalização da ação da partícula clássica supersimétrica. Parte dessa ação possui uma invariância em relação ao q -grupo $SL_q(2)$. Mostramos que esta ação possui também uma simetria similar à supersimetria e discutimos ainda sua formulação no superespaço. Construímos sua extensão para a teoria de campos bidimensional e calculamos o propagador para estes campos via o formalismo de integral de trajetória. Depois, consideramos osciladores aniônicos em uma rede bidimensional e realizamos a álgebra $sl_{q,s}(2)$ através da construção de Schwinger. O parâmetro q da álgebra está relacionado com o parâmetro estatístico, enquanto o parâmetro s está ligado ao modo como os ângulos são medidos na rede. Finalmente, estudamos a termodinâmica de um gás de q -osciladores, determinando sua expansão virial, mostrando que o fenômeno da condensação de Bose-Einstein está presente e que o calor específico apresenta um comportamento tipo transição λ -point na temperatura crítica.

Summary

In this thesis, we consider different deformed algebraic structures in three distinct problems. Initially we consider Paragrassmann variables to introduce an extension of fermionic coordinates and an action that generalises the action for a classical supersymmetric point particle. We show that this action has a symmetry that resembles supersymmetry as well as part of it is invariant under the q -group $SL_q(2)$ and then we discuss its superspace formulation. We then extend this action to a bidimensional field theoretical language and we compute the field propagator by using the path integral formalism. Next, by considering anyonic oscillators in a two-dimensional lattice, we realize the quantum algebra $sl_{q,s}(2)$ by means of a generalised Schwinger construction. We find that the parameter q of the algebra is related to the statistical parameter, whereas the s parameter is related to how angles are measured in this two-dimensional lattice. Finally, we study the thermodynamics of a gas of q -oscillators, writing its virial expansion, showing that Bose-Einstein condensation is present and that the specific heat exhibits a λ -point discontinuity in the critical temperature.

Índice

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Resumo em inglês	iv
Índice	v
Lista de figuras	vii
Lista de tabelas	viii
Introdução	1
1 Alguns Aspectos Introdutórios sobre os Grupos Quânticos	6
1.1 Definições	6
1.2 A Álgebra $sl_q(2)$	14
1.3 A Construção de Schwinger e a Álgebra dos q -Osciladores	18
1.4 $SL_{q,s}(2)$ e o Plano Quântico	25
1.4.1 O Plano Quântico N-Dimensional	29
1.5 Variáveis de paragrassmann	35
2 Generalização para Grupos Quânticos da Partícula Clássica Super-simétrica	39
2.1 Introdução	39
2.2 Coordenadas q -fermiônicas e a ação para uma partícula clássica super-simétrica	41

2.3	Análise de Simetrias da Ação	43
2.4	Formulação Bi-Dimensional	46
2.5	Integral de Trajetória para Quérmions	48
2.6	O Gerador Funcional e o Propagador Quermiônico	52
3	Formulação no superespaço	55
3.1	O q -Superspaço e os q -Supercampos	55
3.2	Superações	63
4	Construção Aniônica para a Álgebra $sl_{(q,s)}(2)$	68
4.1	Anions no Contínuo	68
4.2	Função Ângulo na Rêde e Osciladores Anionicos	79
4.3	O semi-grupo Quântico $sl_{(q,s)}(2)$ e sua Realização não Local	84
4.4	Realização Aniônica de $sl_{(q,s)}(2)$	87
5	Propriedades Termodinâmicas dos q-Gases	93
5.1	Expansão Virial (aproximação para altas temperaturas)	97
5.2	Condensação de Bose-Einstein	101
5.3	Análise Numérica	104
	Conclusão	107
	Referências	110

Lista de Figuras

1.1	Comutatividade da multiplicação na álgebra	7
1.2	Diagrama que representa a identidade na álgebra	8
1.3	Co-comutatividade do coproduto na álgebra	9
1.4	Diagrama que representa a counidade na álgebra	9
1.5	Representação da antípoda na álgebra de Hopf	10

Lista de Tabelas

5.1	Valores para as diversas funções para $z = 1$ e $q = 3$	106
5.2	Razões entre as funções que aparecem no cálculo do calor específico considerando $z = 1$ e $q = 3$	106
5.3	Valores para o parâmetro dependente de α na expansão virial.	106

Introdução

Grupos quânticos [1, 2, 3, 4], ou álgebras de Hopf quase-triangulares, tornaram-se um dos tópicos de maior interesse em física e matemática nos últimos anos. Isto ocorreu em parte pela variedade das áreas em física e em matemática em que os grupos quânticos encontraram aplicação. Eles surgiram no método do espalhamento quântico inverso, no tratamento da cadeia quântica XXZ , mas hoje estuda-se suas aplicações em áreas como modelos de vértices, teoria dos laços, teorias de campos conformes em duas dimensões, geometria não-comutativa e em partículas com estatística arbitrária (anions) [17].

Grupos quânticos são essencialmente deformações contínuas de grupos de Lie ou álgebras de Lie, e o interesse despertado por eles vem da importância que álgebras e grupos de Lie têm nas mais diversas áreas da física.

De uma maneira geral, a deformação de um grupo de Lie pode ser entendida a partir de sua representação matricial. Como é bem sabido, a cada elemento do grupo podemos associar uma matriz, e as propriedades daqueles se refletem nestas. Por exemplo, no caso do grupo $SU(2)$ podemos associar a cada um de seus elementos uma matriz 2×2 de elementos arbitrários que seja hermitiana e cujo determinante seja igual a um. O grupo quântico associado a este grupo de Lie é obtido quando os elementos que compõem a matriz deixam de comutar entre si, tornando-se quantidades não comutantes que obedecem, porém, a certas regras (a eq.(1.72) é um exemplo desta não comutatividade). Esta nova estrutura costuma ser chamada de q -grupo.

Por seu lado, as deformações de álgebras de Lie são obtidas quando mudamos as relações de comutação entre os geradores da álgebra. Em geral, esta deformação é tal que

o resultado do comutador deixa de ser linear nos geradores, e a q -álgebra obtida não é mais uma álgebra de Lie. Assim, pode-se esperar que as q -álgebras sejam úteis na solução de problemas em que todo o ferramental das álgebras de Lie deixa de ser útil, como por exemplo em problemas envolvendo sistemas anisotrópicos. Espera-se também que a construção de teorias de calibre baseadas nas q -álgebras (teorias de q -calibre) possam indicar novas maneiras pelas quais se poderia quebrar simetrias existentes nas álgebras correspondentes não deformadas [28]. Outra aplicação refere-se à deformação da álgebra de osciladores, os chamados q -osciladores [7, 8], que encontraremos frequentemente mais tarde nesta tese, cujo espectro de energia corresponde a um certo tipo de oscilador não linear [9].

Nesta tese, vamos discutir os grupos quânticos em três problemas distintos: *i*) uma possível generalização da supersimetria (supersimetria fracionária), *ii*) sua relação com os aniões e *iii*) propriedades termodinâmicas de um gás de q -osciladores.

Antes de iniciarmos estas aplicações apresentaremos mais formalmente a estrutura matemática necessária para que possamos entender como se constroem essas deformações. Isto será feito no capítulo 1. Começaremos, na seção 1.1, com uma sequência de definições formais que nos possibilitarão definir o que é um grupo quântico. Esta definição formal pode ser melhor entendida através de exemplos, e apresentaremos na seção 1.2 um exemplo de deformação a dois parâmetros q e s da álgebra $su(2)$, a álgebra $su_{q,s}(2)$, e seu caso particular $su_q(2)$, em que o parâmetro s é tomado igual a um. Este é um caso particular das deformações de álgebras de Lie semi-simples introduzidas por Drinfeld [1] e Jimbo [2]. Na seção seguinte mostraremos como Macfarlane [7] e Biedernharn [8] utilizaram esta deformação para introduzirem os q -osciladores, a deformação da álgebra de osciladores harmônicos ou da álgebra de Heisenberg. Discutiremos as várias formas de deformação, além de alguns aspectos ligados com o espectro destes q -osciladores. Na seção 1.4 apresentamos uma outra maneira de introduzirmos os grupos quânticos, da forma como foi introduzida por Fadeev, Reshetikin e Takhtajan [3]. Nesta forma, os grupos quânticos são definidos a partir da representação fundamental de um dado grupo de Lie, mas com

os parâmetros do grupo não mais comutando entre si. Isto abre possibilidade para introduzirmos uma geometria e um cálculo diferencial não-comutativos no espaço de funções dos parâmetros do grupo, como mostrado por Woronowicz [10] e exemplificado por Jurco [11]. Daremos um exemplo mais simples dessa estrutura considerando o plano quântico N -dimensional introduzido por Wess, Zumino [12] e Manin [13] e mostrando explicitamente para $N = 2$ como todo o cálculo diferencial pode ser obtido a partir de uma dada matriz, a matriz R . Concluímos o primeiro capítulo com a introdução da variáveis de paragrassmann [14]. Uma variável de de Paragrassmann θ é tal que $\theta^k = 0$ para algum inteiro k , sendo portanto uma generalização das variáveis de Grassmann. Veremos que o cálculo diferencial com esta variável é semelhante ao do plano quântico.

No capítulo 2 mostraremos como a partir das variáveis de Paragrassmann podemos construir uma estrutura similar à da supersimetria [15]. Inicialmente, consideraremos o problema do ponto de vista da mecânica clássica e tomaremos $k = 3$. Após introduzirmos estas coordenadas, escreveremos uma ação para elas. Então mostraremos que esta ação quando adicionada a de uma coordenada comutante, possui uma simetria em que a variação de uma das coordenadas é proporcional a uma outra de forma cíclica, estrutura típica da supersimetria. Depois, introduziremos campos q -comutantes em duas dimensões e após reescrever a estrutura do caso mecânico clássico na linguagem da teoria de campos bi-dimensional, discutiremos a integração funcional nestas coordenadas bem como seu propagador [16]. As semelhanças entre o modelo que construiremos e a supersimetria nos colocará a questão da possibilidade de termos um formalismo em supercampos que o reproduza em componentes. Mostraremos no capítulo 3 que isto é possível através da utilização das variáveis de Paragrassmann introduzidas no capítulo 1 [18].

O capítulo 4 é dedicado a explorar a conexão entre grupos quânticos e os anions [21, 22, 23], as partículas que obedecem à estatística fracionária, seguindo a idéia originalmente apresentada por Lerda e Sciuto [17] para o grupo quântico $su_q(2)$. Que possa existir tal conexão pode ser sugerido do fato que, em ambos os casos, uma mesma equação surge como a estrutura fundamental para assegurar a respectiva consistência algébrica. Esta

é a Equação de Yang-Baxter. Para os grupos quânticos, esta equação tem o papel de assegurar a associatividade da álgebra considerada. Assim, como veremos no capítulo 1, quando construímos o cálculo diferencial no plano quântico a condição de associatividade no produto de coordenadas e diferenciais implica em que a matriz que governa as relações de comutação entre elas tenha que obedecer à equação de Yang-Baxter.

Por seu lado, a estatística fracionária está profundamente ligada ao grupo de tranças. Estatísticas diferente da bosônica ou fermiônica podem ser consistentemente escritas em duas ou três dimensões espaço-temporais. No caso em que temos mais que duas dimensões espaciais, a função de onda de um sistema de duas partículas idênticas é ou completamente simétrica ou anti-simétrica, e somente bósons ou férmions existem. Neste caso, as funções de onda são representações do grupo de permutação. Entretanto, quando temos duas dimensões espaciais apenas, não basta conhecermos qual a configuração inicial e final do sistema, torna-se necessário informarmos também de qual maneira a trajetória de uma partícula trança em torno da outra durante a troca de posições. Dependendo de como ocorre esta mudança, aparecerá uma fase arbitrária (não necessariamente ± 1). Neste caso, as funções de onda não serão representações do grupo de permutação, mas sim do grupo de trança. Uma das equações que definem o grupo de tranças tem exatamente a mesma estrutura que a Equação de Yang-Baxter. Assim, após uma breve introdução sobre anions, principalmente para mostrarmos o surgimento da função ângulo como fundamental na construção da estatística fracionária, mostraremos como podemos construir os osciladores aniônicos [17], objetos intrinsecamente bi-dimensionais, definidos em uma rede quadrada, cuja álgebra interpola a bosônica e a fermiônica. Depois, mostraremos como estes osciladores permitem a realização da álgebra $su_{q,s}(2)$ [19] via a chamada construção de Schwinger [20], a qual apresentaremos no capítulo 1. Vamos enfatizar aqui um ponto que deverá ficar mais claro quando discutirmos em mais detalhes tanto os q -osciladores (capítulo 1) quanto os osciladores aniônicos (capítulo 4): estes dois tipos de osciladores que nos referimos aqui são fundamentalmente diferentes entre si. Enquanto os q -osciladores podem ser definidos em qualquer dimensão e são objetos locais, os osciladores aniônicos

são intrinsecamente não locais e bi-dimensionais.

O capítulo 5 tratará da termodinâmica de um gás ideal de q -osciladores. Nossa motivação para este estudo decorre do fato que os gases ideais tem aplicabilidade em vários fenômenos físicos, como por exemplo superfluidez, supercondutividade, radiação de corpo negro, fónons em redes cristalinas, estrelas anãs brancas, etc [24]. Seguindo Rego Monteiro *et. al.* [25] e tomando a Hamiltoniana proposta por Chaichian *et. al.* [27] determinamos a expansão virial do q -gás até terceira ordem, mostramos que este q -gás apresenta o fenômeno de condensação de Bose-Einstein e que a curva do calor específico a volume constante em função da temperatura possui um comportamento tipo λ -point na temperatura crítica, e não tipo cúspide como no caso não deformado.

Capítulo 1

Alguns Aspectos Introdutórios sobre os Grupos Quânticos

Neste capítulo vamos apresentar aspectos a respeito dos Grupos Quânticos que serão úteis para o que pretendemos desenvolver nos capítulos subsequentes. Começaremos com uma série de definições elementares formais, com o objetivo de introduzir a notação comumente utilizada na literatura, e definiremos então Grupos Quânticos. Depois apresentaremos vários exemplos onde a estrutura formal inicialmente apresentada emergirá sob diferentes aspectos. Existem vários artigos de revisão no assunto [28, 29].

1.1 Definições

Um *grupo* (G, \cdot) é um conjunto G no qual um produto associativo é definido. G possui um elemento e tal que $e.g = g.e = g$ para todo $g \in G$ (a identidade ou elemento neutro). Também deve existir, para todo $g \in G$, um elemento denotado g^{-1} tal que $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$ (o elemento inverso). Se para todo $g_1, g_2 \in G$ tivermos que $g_1.g_2 = g_2.g_1$ então G é dito abeliano.

Um *corpo* $(k, +, \cdot)$ é um conjunto no qual $(k, +)$ é um grupo abeliano, da mesma forma que $(k - 0, \cdot)$. O elemento 0 é a identidade da adição (operação $+$). Estas duas estruturas devem ser compatíveis, de modo que $a(b + c) = ab + ac$. Na maior parte das situações o

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes 1} & A \otimes A \\
 \downarrow 1 \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

Figura 1.1: Comutatividade da multiplicação na álgebra

corpo k utilizado é o dos números complexos, mas às vezes pode-se restringir aos reais.

Um *Espaço Vetorial* $(V, +, k)$ sobre um corpo k é definido com sendo um grupo abeliano $(V, +)$ juntamente com uma ação do grupo $(k, 0, \cdot)$ sobre V – a multiplicação escalar. A compatibilidade exige que $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$, para todo $\lambda \in k$ e $v_1, v_2 \in V$.

Uma *Álgebra* é um espaço vetorial $(A, +, k)$ sobre k tal que existe um produto associativo $m : A \otimes A \rightarrow A$ e um mapeamento linear $\eta : k \rightarrow A$. A condição de associatividade

$$m(id \otimes m)(A \otimes A \otimes A) = m(m \otimes id)(A \otimes A \otimes A), \quad (1.1)$$

(id é a operação identidade) pode ser vista através da comutação no diagrama da fig.1.1, onde as flechas indicam a direção da operação.

A álgebra deve possuir um elemento, a identidade 1_A , tal que

$$m(a \otimes 1_A) = a, \quad (1.2)$$

para todo $a \in A$. A figura 1.1 representa esta propriedade.

Dadas duas álgebras (A, m_A, η_A) e (B, m_B, η_B) , pode-se definir o produto tensorial $A \otimes B$ que também é uma álgebra com a multiplicação

$$m_{A \otimes B} = (m_A \otimes m_B)(1 \otimes \tau \otimes 1), \quad (1.3)$$

onde o operador de troca τ é definido através da relação $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Com isto, se

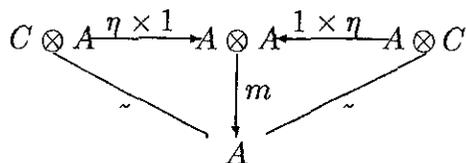


Figura 1.2: Diagrama que representa a identidade na álgebra

tomarmos elementos de A e B teremos

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2). \quad (1.4)$$

Nosso próximo passo é definir uma representação da álgebra. (V, ρ) é uma representação de A se ρ é uma aplicação linear que leva elementos de A nos operadores lineares que atuam em V , de tal forma que $\rho(a_1 a_2) = \rho(a_1) \rho(a_2)$.

Geralmente as representações de uma álgebra podem ser obtidas a partir de uma particular, a representação fundamental. Isto é feito via o produto tensorial. Então, se temos duas representações (V_1, ρ_1) e (V_2, ρ_2) de A , o produto tensorial das representações, $(V_1 \otimes V_2, \rho)$, é tal que

$$\rho = (\rho_1 \otimes \rho_2) \Delta, \quad (1.5)$$

onde Δ , o coproduto, é um aplicação linear que leva um elemento de A em um elemento definido no produto tensorial, $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$. Em outras palavras, o coproduto é introduzido para que se possa fazer produto de representações. Veremos daqui a pouco como esta estrutura aparece nas álgebras de Lie e em particular na álgebra de momento angular. Construir um grupo quântico significa, essencialmente, mudar o coproduto. Voltaremos a este ponto mais tarde.

Introduzido o coproduto, podemos continuar nossa série de definições. Uma *coálgebra*

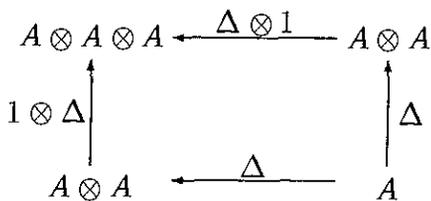


Figura 1.3: Co-comutatividade do coproduto na álgebra

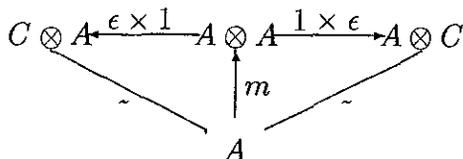


Figura 1.4: Diagrama que representa a counidade na álgebra

$(C, +, \Delta, \varepsilon, k)$ é um espaço vetorial $(C, +, k)$ sobre k com as aplicações lineares $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$. (o coproduto definido anteriormente), e a *counidade* $\varepsilon : C \rightarrow k$. Da mesma forma que a álgebra é associativa, a coálgebra deve ser coassociativa

$$(\Delta \otimes id)\Delta = (id \otimes \Delta)\Delta. \tag{1.6}$$

A representação por diagramas é dada pela fig.1.3, e de fato nada mais é que a figura 1.1 com a direção das flechas invertidas.

A representação gráfica da counidade é dada pela figura 1.4

Uma *biálgebra* $(B, +, \cdot, \eta, \Delta, \varepsilon, k)$ sobre k é um espaço vetorial sobre k de tal forma que seja uma álgebra e uma coálgebra de uma maneira compatível, ou seja

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b),$$

$$\begin{array}{ccccc}
 H & \xrightarrow{\epsilon} & k & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \downarrow \Delta & & & & \uparrow m \\
 H \otimes H & \xrightarrow{id \otimes S, S \otimes id} & & & H \otimes H
 \end{array}$$

Figura 1.5: Representação da antípoda na álgebra de Hopf

$$\begin{aligned}
 \Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\
 \epsilon(ab) &= \epsilon(a)\epsilon(b).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

para todo elemento a, b , de B .

Uma *Álgebra de Hopf* $(H, +, \cdot, \eta, \Delta, \epsilon, S, k)$ sobre k é uma biálgebra que possui um aplicação linear S chamado *antípoda* $S : H \rightarrow H$ a qual obedece a

$$m(S \otimes id)\Delta(a) = m(id \otimes S)\Delta(a) = \epsilon(a)1 \tag{1.8}$$

onde a é um elemento da biálgebra. Diagramaticamente esta equação é representada pela figura 1.5.

O papel básico da antípoda é relacionar elementos inversos. De fato, alguns grupos de Lie podem ser relacionados com álgebras de Hopf (exemplo 1 adiante), e nesse caso a antípoda é a aplicação que garante a existência do elemento inverso.

Dizemos que uma álgebra de Hopf é comutativa se sua estrutura algébrica é comutativa, ou seja, dados dois elementos a, b pertencentes à H então $a \cdot b = b \cdot a$. Ela é dita cocomutativa se for cocomutativa como uma coálgebra, ou seja, se $\tau \circ \Delta = \Delta$.

Uma *Álgebra de Hopf Quase-Triangular* (H, \mathcal{R}) é uma álgebra de Hopf onde podemos definir a matriz $\mathcal{R} \in H \otimes H$ tal que

$$\begin{aligned}
 (\Delta \otimes id)\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \\
 (id \otimes \Delta)\mathcal{R} &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12},
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

e

$$\tau \circ \Delta h = \mathcal{R}(\Delta h)\mathcal{R}^{-1}, \quad (1.10)$$

onde $\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i$ e $R_{ij} \in H \otimes H \otimes H$ com elementos na i -ésima e j -ésima posição e 1 na restante (por exemplo, $R_{13} = a_1 \otimes 1 \otimes a_3$, $a_1, a_3 \in H$) e $h \in H$. A equação (1.10) tem como importância o fato que os elementos de uma Álgebra de Hopf Quasi-Triangular não necessariamente co-comutam. Entretanto, (1.10) controla esta não co-comutatividade. Veremos mais para a frente um exemplo explícito deste fato (eq.1.83).

Vamos mostrar adiante que as condições (1.9) e (1.10) implicam na Equação Quântica de Yang-Baxter

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}. \quad (1.11)$$

Esta equação é um caso particular da equação de Yang-Baxter com parâmetro spectral, dada por

$$\mathcal{R}_{12}(\lambda_{12}) \mathcal{R}_{13}(\lambda_{13}) \mathcal{R}_{23}(\lambda_{23}) = \mathcal{R}_{23}(\lambda_{23}) \mathcal{R}_{13}(\lambda_{13}) \mathcal{R}_{12}(\lambda_{12}), \quad (1.12)$$

com $\lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$, $\lambda_i \in C$. Esta equação é relevante na solução de problemas exatamente solúveis em Mecânica Estatística e Teoria Quântica de Campos em duas dimensões.

Para mostrar (1.11), vamos aplicar o operador $\tau\Delta \otimes id$ em \mathcal{R} de duas maneiras diferentes. Inicialmente fazemos

$$\begin{aligned} (\tau \circ \Delta \otimes id) \mathcal{R} &= \sum_i \tau \circ \Delta(a_i) \otimes b_i = \\ \sum_i \mathcal{R}\Delta(a_i)\mathcal{R}^{-1} \otimes b_i &= \mathcal{R}_{12} \sum_i (\Delta(a_i) \otimes b_i) \mathcal{R}_{12}^{-1} = \\ \mathcal{R}_{12}(\Delta \otimes id)\mathcal{R}\mathcal{R}_{12}^{-1} &= \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}^{-1} \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde utilizamos (1.10) na segunda passagem, explicitamos onde a matriz \mathcal{R} atua na terceira, e usamos a primeira de (1.9) na última. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\tau \circ \Delta \otimes id) \mathcal{R} &= \tau_{12}(\Delta \otimes id) \mathcal{R} = \\ \tau_{12}(\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}) &= \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

com τ_{ij} o operador que troca a i -ésima posição pela j -ésima e vice-versa, e aqui usamos a segunda equação de (1.9). Comparando eqs.(1.13) e (1.14) chegamos à (1.11).

É útil também definir a matriz de *braid* B ,

$$B \equiv \tau R, \tag{1.15}$$

e neste caso verifica-se que a Equação de Yang-Baxter se escreve como

$$B_{12} B_{23} B_{12} = B_{23} B_{12} B_{23}. \tag{1.16}$$

Exemplos

Exemplo 1 Consideremos um grupo finito G de elementos g e vamos definir um espaço vetorial $(G, +)$ cujos elementos são dados por

$$\alpha = \sum_g \alpha_g g, \tag{1.17}$$

onde α_g pertence a algum corpo (por exemplo, os complexos). O produto neste espaço é estendido por linearidade

$$\alpha\beta = \sum \alpha_{g_1} \beta_{g_2} g_1 g_2. \tag{1.18}$$

Podemos dar a esta álgebra uma estrutura de Hopf através das relações

$$\begin{aligned} 1 &= e \\ \Delta(g) &= g \otimes g \\ \varepsilon(g) &= 1 \\ S(g) &= g^{-1}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

a atuação em um elemento α é estendida por linearidade. Esta álgebra é co-comutativa.

Exemplo 2 Seja G um grupo topológico compacto. Podemos então definir funções contínuas que atuam em G . Seja $f(G)$ o espaço gerado por estas funções. Este conjunto

forma uma álgebra de Hopf com as operações

$$\begin{aligned}(f.h)(g) &= f(g)h(g), \\ \Delta(f)(g_1 \otimes g_2) &= f(g_1 g_2), \\ \eta(x) &= x1, \\ \varepsilon(f) &= f(e), \\ S(f)(g) &= f(g^{-1}),\end{aligned}\tag{1.20}$$

com $f, g \in f(G)$, $g_1, g_2 \in G$ e $x \in \mathbb{C}$. Assim como no exemplo anterior, também aqui a álgebra é co-comutativa.

Exemplo 3 Consideremos uma álgebra de Lie L e sua álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(L)$, ou seja, o conjunto de todos os elementos da álgebra, mais a identidade, e combinações lineares de produtos de elementos de L . Então $\mathcal{U}(L)$ é uma álgebra de Hopf com as operações

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= a \otimes 1 + 1 \otimes a, \\ \eta(x) &= x1, \\ \varepsilon(1) &= 1, \\ \varepsilon(a) &= 0, \\ S(1) &= 1, \\ S(a) &= -a,\end{aligned}\tag{1.21}$$

onde $a \in L$. A extensão para $U(L)$ é imediata, pois o coproduto é compatível com o produto da álgebra de Lie (eq.(1.7)). O motivo pelo qual tomamos a álgebra envolvente universal é que os exemplos interessantes de deformações de álgebras que veremos mais tarde são feitos na álgebra envolvente universal (a álgebra envolverá não apenas os geradores, mas também polinômios destes). Notemos também que o coproduto acima

é cocomutativo e de (1.10) vemos então que a matriz \mathcal{R} é a identidade. Na próxima seção encontraremos um coproduto para uma estrutura matemática cuja matriz \mathcal{R} é não trivial, às custas de termos que deformar a álgebra de $su(2)$ através de um parâmetro q , construindo então a álgebra $su_q(2)$.

Os três exemplos que apresentamos acima possuem toda a estrutura de uma Álgebra de Hopf co-comutativa. Transformar esta estrutura em um Grupo Quântico, ou seja, escrever uma matriz \mathcal{R} que seja não-trivial, envolve de alguma maneira mudar a definição de produto. Assim, no último exemplo a própria estrutura algébrica será modificada, e a álgebra de Lie deixará de se-lo para tornar-se um Grupo Quântico (veremos isto explicitamente na próxima seção com a álgebra $su(2)$). Já no caso da álgebra de funções num grupo (exemplo 2), esta álgebra deixará de ser comutativa, via a não-comutatividade das coordenadas do espaço em que as funções estão definidas. Neste caso, é onde o nome “Grupo Quântico” introduzido por Drinfeld [1] possui algum “significado”, através da semelhança entre este procedimento e o da quantização usual. De fato, a passagem da mecânica clássica para a quântica se dá quando as coordenadas q e p do espaço de fase são transformadas nos operadores Q e P e, conseqüentemente, duas funções quaisquer destas variáveis que seguramente comutariam no caso clássico podem perfeitamente deixar de fazê-lo no caso quântico. Este é o procedimento usado para a álgebra de funções no grupo: os elementos do grupo não mais comutam entre si fazendo com que a álgebra de funções se torne não comutativa. Isto é o que ocorre com o plano quântico, que analisaremos em breve, na seção (1.4)

1.2 A Álgebra $sl_q(2)$

Vamos dar um exemplo do formalismo apresentado na seção anterior que nos será bastante útil no que discutiremos mais tarde. O exemplo é a álgebra $su(2)$ deformada. Começemos introduzindo a álgebra

$$\begin{aligned} [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \\ [J_+, J_-] &= 2J_0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

a qual, como sabemos, é a álgebra do momento angular. Como vimos na seção anterior, toda álgebra de Lie possui a estrutura de uma álgebra de Hopf, com as operações

$$\begin{aligned} \Delta(J_{\alpha}) &= J_{\alpha} \otimes 1 + 1 \otimes J_{\alpha}, \\ \varepsilon(J_{\alpha}) &= 0, \\ S(J_{\alpha}) &= -J_{\alpha}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Neste exemplo, podemos ver que o coproduto está ligado diretamente ao produto de representações. Para isto, recordemos que se temos uma representação de momento angular J_1 atuando em um espaço vetorial V_1 de base u_1^i , e outra de momento angular J_2 atuando em V_2 com base v_2^j , então o operador $J = J_1 + J_2$ atua no espaço $V = V_1 \otimes V_2$ em que $u_1^i \otimes v_2^j$ é uma base. A atuação de uma componente de J em V é dada por

$$J_{\alpha}(u_1^i \otimes v_2^j) = J_{\alpha}(u_1^i) \otimes v_2^j + (u_1^i) \otimes J_{\alpha}(v_2^j) \tag{1.24}$$

que pode ser escrita como

$$J_{\alpha}(u_1^i \otimes v_2^j) = \Delta(J_{\alpha})(u_1^i \otimes v_2^j) \tag{1.25}$$

Portanto, dada a representação fundamental de $su(2)$ (spin $\frac{1}{2}$, matrizes de Pauli), o coproduto Δ , nos permite determinar todas as outras representações (no caso do momento angular, sabemos que o espaço V pode ser decomposto na soma de $2 \min(j_1, j_2) + 1$ espaços ortogonais associados com valores de j variando entre $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$, onde $\min(j_1, j_2)$ significa o valor mínimo entre os dois).

Como a álgebra de Hopf $su(2)$ é co-comutativa, a matriz \mathcal{R} associada a ela é a identidade. Se quisermos obter uma álgebra de Hopf quase-triangular, torna-se necessário deformarmos o coproduto de tal maneira que ele não seja mais co-comutativo. Esta deformação, porém, não pode ser arbitrária, já que o coproduto e o produto devem ser compatíveis entre si. Em outras palavras, devemos mudar a maneira como é feito o produto de representações (neste caso, estaríamos mudando a forma de somar os operadores de momento angular). Vamos então tomar como coprodutos

$$\begin{aligned}\Delta(J_0) &= J_0 \otimes 1 + 1 \otimes J_0, \\ \Delta(J_{\pm}) &= J_{\pm} \otimes q^{J_0} + q^{-J_0} \otimes J_{\pm},\end{aligned}\tag{1.26}$$

onde o parâmetro de deformação q é um número complexo arbitrário.

Não é difícil comprovar que esta deformação do coproduto é compatível com

$$\Delta([J_0, J_{\pm}]) = \Delta(\pm J_{\pm}),\tag{1.27}$$

condição necessária para a compatibilidade entre o produto e o coproduto, mas podemos mostrar que

$$\Delta([J_+, J_-]) = [J_+, J_-] \otimes q^{2J_0} + q^{-2J_0} \otimes [J_+, J_-] \neq \Delta(2J_0).\tag{1.28}$$

Como podemos resolver este impasse? Poderíamos retornar e tentar uma outra deformação no coproduto. mas a deformação acima teve a vantagem que funcionou em parte (eq.1.27). O que vamos fazer então é deformar a relação de comutação entre J_+ e J_- para

$$[J_+, J_-] = \frac{1}{2}[2J_0]_q,\tag{1.29}$$

onde definimos o *número de Gauss*

$$[x]_q \equiv \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}.\tag{1.30}$$

Esta deformação possibilita a compatibilidade do produto e do coproduto.

Vale a pena frisar que a álgebra

$$\begin{aligned} [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \\ [J_+, J_-] &= \frac{q^{2J_0} - q^{-2J_0}}{q - q^{-1}} = [2J_0]_q, \end{aligned} \quad (1.31)$$

não é mais uma álgebra de Lie. De fato, ela está definida na álgebra envolvente universal, pois envolve produtos de ordem arbitrária dos geradores. Por isso, a sua deformação é chamada de Álgebra Envolvente Universal Quântica.

A matriz R associada à álgebra $su_q(2)$ na representação fundamental é dada por

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Pode-se mostrar que esta matriz obedece à equação de Yang-Baxter eq.(1.11).

A matriz acima é, na verdade, um caso especial de uma matriz a dois parâmetros, dada por

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \quad (1.33)$$

A álgebra que obtemos com esta matriz é uma álgebra deformada a dois parâmetros, $sl_{q,s}(2)$, dada por

$$\begin{aligned} [J_0, J_{\pm}] &= \pm J_{\pm}, \\ [J_+, J_-]_s &\equiv s^{-1}J_+J_- - sJ_- - J_+ = s^{-2J_0}[2J_0]_q, \end{aligned} \quad (1.34)$$

Retornaremos a esta álgebra no capítulo 4, quando desenvolvermos a construção de Schwinger, que discutiremos na seção (1.3), através dos osciladores aniônicos, a serem introduzidos mais adiante. Notemos que $su_q(2)$ é recuperado no limite em que o parâmetro q tende a um.

1.3 A Construção de Schwinger e a Álgebra dos q -Osciladores

Chamam-se q -osciladores objetos que geram uma álgebra que pode ser vista como uma deformação da álgebra de Heisenberg. Esta deformação é feita através da introdução de um parâmetro q , e a álgebra de Heisenberg é recuperada no limite em que q tende a um.

Ao introduzirem os q -osciladores, Macfarlane e Biedernarn [7, 8] queriam responder à seguinte pergunta: é sabido que a álgebra de momento angular ($su(2)$) pode ser realizada a partir da álgebra de dois osciladores harmônicos independentes, a chamada construção de Schwinger [30]. Será que é possível definir-se osciladores que possibilitem realizarmos a construção de Scwinger também para a álgebra $su_q(2)$? A resposta, como veremos abaixo, é sim.

Antes de apresentarmos os q -osciladores, vamos recordar alguns pontos a respeito dos osciladores harmônicos. O espaço de Hilbert de um oscilador harmônico unidimensional é gerado por uma base de vetores $|n\rangle$, que são autoestados da Hamiltoniana

$$H = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega, \tag{1.35}$$

com autovalores $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ (tomaremos $\hbar = 1$ de agora em diante), onde n é um inteiro não negativo. O operador número N é o produto dos operadores de criação b^\dagger e seu hermitiano conjugado b (deixaremos a letra a para representarmos os q -osciladores que introduziremos abaixo),

$$N = b^\dagger b, \tag{1.36}$$

os quais obedecem à relação de comutação canônica

$$[b, b^\dagger] \equiv b b^\dagger - b^\dagger b = 1, \quad (1.37)$$

a chamada álgebra de Heisenberg ou álgebra de osciladores.

Da definição de N , é imediato que

$$\begin{aligned} [N, b^\dagger] &= b^\dagger, \\ [N, b] &= -b. \end{aligned} \quad (1.38)$$

O estado de menor energia, o “vácuo” $|0\rangle$, tem como característica ser aniquilado pelo operador de destruição,

$$b|0\rangle = 0. \quad (1.39)$$

Todos os demais autoestados podem ser obtidos a partir do vácuo, através da aplicação do operador de criação,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.40)$$

Consideremos agora dois osciladores independentes, ou seja, operadores b_j , $j = 1, 2$, e seus respectivos conjugados hermitianos. Serem independentes significa que operadores com subíndices diferentes sempre comutam. É fácil ver que se definirmos os operadores

$$\begin{aligned} J_+ &= b_1^\dagger b_2, \\ J_- &= b_2^\dagger b_1, \\ J_0 &= \frac{1}{2}(N_1 - N_2) = \frac{1}{2}(b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2), \end{aligned} \quad (1.41)$$

eles obedecerão à algebra de momento angular dada por (1.22). Já que estas relações valem operatorialmente, elas também deverão valer no espaço de Hilbert. De fato, podemos construir autoestados do operador J_0 a partir dos autoestados dos operadores número N_1

e N_2 , dados por

$$|j, m\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)(j-m)}}|0, 0\rangle \quad (1.42)$$

Portanto, vemos que dois osciladores harmônicos independentes nos permitem escrever a álgebra de momento angular (1.22), e construir seu espaço de Hilbert. Esta é a chamada construção de Schwinger para a álgebra $su(2)$.

A introdução dos q -osciladores é feita de maneira semelhante a dos osciladores apresentada acima. Consideramos a base de autoestados de um operador número N

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (1.43)$$

Os operadores de criação e aniquilação obedecem às mesmas relações de comutação com N ,

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger] &= a^\dagger, \\ [N, a] &= -a, \end{aligned} \quad (1.44)$$

mas não assumimos a validade da relação correspondente à eq.(1.36) . O comutador restante é deformado para

$$[a, a^\dagger]_q \equiv a a^\dagger - q a^\dagger a = q^{-N}. \quad (1.45)$$

O estado fundamental é aniquilado pelo operador de destruição,

$$a|0\rangle = 0, \quad (1.46)$$

e os demais estados excitados são obtidos pela relação de recorrência

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}}(a^\dagger)^n|0\rangle. \quad (1.47)$$

O número de estados que podem ser criados pela aplicação de a^\dagger é infinito. Entretanto, se impusermos a condição de nilpotência $a^{\dagger k} = 0$ para algum inteiro k , teremos um número finito de estados. Isto ocorre quando tomamos o parâmetro q tal que $q^k = 1$ (ou seja, q é raiz da unidade), já que neste caso teremos que $[k]_q = 0$, e poderemos construir apenas k estados.

A dependência em q na relação (1.47) se dá via o número de Gauss presente no denominador, e por isto ela é invariante perante a troca $q \leftrightarrow q^{-1}$. Isto decorre do fato que (1.47) também é obtida se trocarmos q por q^{-1} em (1.45). Portanto, toma-se também a equação

$$[a, a^\dagger]_{q^{-1}} \equiv a a^\dagger - q^{-1} a^\dagger a = q^N. \quad (1.48)$$

Estas duas relações juntas nos levam à

$$\begin{aligned} [N]_q &= a^\dagger a, \\ [N + 1]_q &= a a^\dagger, \end{aligned} \quad (1.49)$$

que são diferentes de (1.36).

Torna-se imediato agora mostrar que os operadores

$$\begin{aligned} J_+ &= (a_1)^\dagger a_2, \\ J_- &= (a_2)^\dagger a_1, \\ J_0 &= \frac{1}{2}([N_1] - [N_2]) = \frac{1}{2}((a_1)^\dagger a_1 - (a_2)^\dagger a_2), \end{aligned} \quad (1.50)$$

obedecem à álgebra de $su(2)_q$ dada por (1.31).

No que foi apresentado acima, q foi implicitamente considerado como um número complexo arbitrário. Entretanto, caso q seja real, pode-se redefinir os operadores [31]

$$\begin{aligned} A &= q^{\frac{N}{2}} a, \\ A^\dagger &= a^\dagger q^{\frac{N}{2}}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

que satisfazem à relação de comutação

$$AA^\dagger - q^2 A^\dagger A = 1. \quad (1.52)$$

Esta redefinição não altera significativamente nada do que foi apresentado anteriormente. De fato, podemos obter as mesmas equações que as acima, bastando redefinir a forma do número de Gauss de $[x]$ para

$$[x]^B \equiv \frac{q^{2x} - 1}{q^2 - 1} \quad (1.53)$$

(por exemplo, $[N]^B = A^\dagger A$).

É interessante notar também que existe um aplicação que leva os operadores b, b^\dagger nos operadores [32]

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{[N+1]}{N+1} \right)^{\frac{1}{2}} b, \\ a^\dagger &= b^\dagger \left(\frac{[N+1]}{N+1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Na seção anterior, vimos que também podemos deformar a álgebra $su(2)$ com dois parâmetros diferentes. Podemos nos perguntar se é possível construirmos uma álgebra de Heisenberg deformada a dois parâmetros que nos permita também neste caso fazer a construção de Schwinger. Isto é possível através da álgebra

$$\begin{aligned} a_1 a_1^\dagger - qs^{-1} a_1^\dagger a_1 &= (qs)^{-N_1}, \\ a_2 a_2^\dagger - qs^{-1} a_2^\dagger a_2 &= q^{-N_2}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

A relação entre cada tipo de operadores é

$$\begin{aligned} [N_1]_{q,s} &= a_1^\dagger a_1, \\ [N_1 + 1]_{q,s} &= a_1 a_1^\dagger \end{aligned} \quad (1.56)$$

e

$$\begin{aligned} [N_2]_{q,s^{-1}} &= a_2^\dagger a_2, \\ [N_2 + 1]_{q,s^{-1}} &= a_2 a_2^\dagger, \end{aligned} \quad (1.57)$$

onde definimos

$$[x]_{q,s} = \frac{(s^{-1}q)^x - (sq)^{-x}}{s^{-1}q - (sq)^{-1}}. \quad (1.58)$$

Com esta álgebra, e as mesmas relações de comutação admitidas entre os operadores número e os operadores a e a^\dagger , pode-se mostrar que operadores definidos como em (1.50) obedecem à álgebra de $su(2)_{q,s}$ (1.34).

Além da álgebra de osciladores (1.37), podemos definir uma outra, em que operadores de destruição f e criação f^\dagger obedecem à relação de anticomutação,

$$\{f, f^\dagger\} \equiv ff^\dagger + f^\dagger f = 1, \quad (1.59)$$

cujos autoestados do operador número,

$$N = f^\dagger f, \quad (1.60)$$

é bidimensional: os únicos estados possíveis são o fundamental e o primeiro estado excitado. Estes osciladores ganham o nome de osciladores fermiônicos, e também podem ser deformados para

$$\begin{aligned} ff^\dagger + qf^\dagger f &= q^{-N}, \\ [N, f] &= -f, \\ [N, f^\dagger] &= f^\dagger. \end{aligned} \quad (1.61)$$

A base de autoestados de N ,

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad (1.62)$$

é construída através das relações

$$f|0\rangle = 0, \\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]_q!}} (f^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.63)$$

onde

$$[n]_q^f = \frac{q^{-n} - (-1)^n q^n}{q + q^{-1}}. \quad (1.64)$$

A composição de N em termos de f e f^\dagger é

$$[N]_q^f = f^\dagger f, \\ [N + 1]_q^f = f f^\dagger. \quad (1.65)$$

Se q é um número real, podemos redefinir os operadores para

$$F = q^{\frac{N}{2}} f, \\ F^\dagger = f^\dagger q^{\frac{N}{2}}, \quad (1.66)$$

que obedecem à álgebra

$$F F^\dagger + q^2 F^\dagger F = 1. \quad (1.67)$$

Não existe, porém, um aplicação que leve f e F^\dagger nos osciladores fermiônicos usuais c e c^\dagger . Isto poderia ser antevisto já que, ao contrário dos osciladores fermiônicos usuais, a dimensão do espaço de autoestados do operador número não é finita para os q -osciladores fermiônicos, como nos mostra a equação (1.63).

Para definir operadores que possam ser mapeados nos férmions, toma-se a álgebra

$$d d^\dagger + q d^\dagger d = q^N, \quad (1.68)$$

cuja transformação

$$\begin{aligned} D &= q^{-\frac{N}{2}} d, \\ D^\dagger &= d^\dagger q^{-\frac{N}{2}}, \end{aligned} \tag{1.69}$$

nos leva à álgebra fermônica usual para D e D^\dagger ,

$$DD^\dagger + D^\dagger D = 1. \tag{1.70}$$

1.4 $SL_{q,s}(2)$ e o Plano Quântico

Na seção (1.2), nós construímos a *álgebra quântica* $sl_q(2)$ através da introdução de um parâmetro que serve para modificar (deformar) as relações de comutação entre os geradores da álgebra de $sl(2)$. Como qualquer outra álgebra de Lie, $sl(2)$ está diretamente relacionada com um grupo, $SL(2)$. No exemplo 2 da seção 1 mostramos que podemos associar uma estrutura de álgebra de Hopf co-comutativa a qualquer grupo topológico, portanto também ao $SL(2)$. Vamos mostrar nesta seção que, da mesma forma que para a álgebra $sl(2)$, também o grupo $SL(2)$ pode ser deformado de tal forma que se torne uma álgebra de Hopf não-comutativa. Iniciamos introduzindo a matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.71}$$

onde a, b, c, d são as coordenadas de alguma variedade (por exemplo se restringíssemos para $SU(2)$, impondo as relações $a = d^*$, $b = c^*$ e $ad - bc = 1$ teríamos uma esfera, onde * significa o complexo conjugado). Em outras palavras, cada conjunto de valores para as entradas de T significam um elemento g do grupo. Podemos portanto escrever T como uma função de g , ou seja, $T = T(g)$. Logo a álgebra A gerada por $T(g)$ é a álgebra de funções em G , $A = Fun(G)$

Usualmente, as entradas da matriz T são tomadas como comutantes. Entretanto

vamos considerar aqui as seguintes relações

$$\begin{aligned} ab &= sba, & ac &= qca \\ bd &= qdb, & cd &= sdc \\ bc &= cb, & ad - da &= (q - s^{-1})bc, \end{aligned} \tag{1.72}$$

onde q e s são números complexos arbitrários. Com estas relações, T gera elementos do grupo quântico $GL_{q,s}(2)$, o grupo de transformações lineares em duas dimensões deformado pelos parâmetros q e s .

No caso em que $q = s$, o elemento

$$\det_q T \equiv ad - qbc, \tag{1.73}$$

comuta com todas as entradas de T . Podemos então defini-lo como sendo o q -determinante (ou determinante quântico) da matriz T e sendo ele um número podemos fixá-lo pela relação

$$\det_q T = 1 \tag{1.74}$$

restringindo $GL_q(2)$ para $SL_q(2)$. Podemos também restringir para $SU_q(2)$ impondo as condições $a = d^*$ e $b = -qc^*$ e tomando o parâmetro q real [28]. Se $q \neq s$, a definição (1.73) não comuta com todos os elementos de T , não sendo portanto um elemento central da álgebra. Entretanto, mesmo neste caso toma-se (1.73) como a definição do q -determinante [28].

O coproduto das entradas de T é determinado pelo fato que a matriz $T(g)$ é um elemento de $Fun(SL_q(2))$, e usando a relação para o coproduto apresentado no exemplo 2 da seção 1, $\Delta f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ teremos

$$T(g_1)T(g_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}, \tag{1.75}$$

resultando em

$$\begin{aligned}\Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c, \\ \Delta(b) &= a \otimes b + b \otimes d, \\ \Delta(c) &= c \otimes a + d \otimes c, \\ \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d,\end{aligned}\tag{1.76}$$

ou de forma compacta

$$\Delta(T^i_j) = T^i_k \otimes T^k_j.\tag{1.77}$$

Da mesma forma temos que, usando $\varepsilon(g) = f(e)$

$$\begin{aligned}\varepsilon(a) &= \varepsilon(d) = 1 \\ \varepsilon(b) &= \varepsilon(c) = 0\end{aligned}\tag{1.78}$$

e, já que $S(f(g)) = f(g^{-1})$,

$$\begin{aligned}S(a) &= d, \\ S(b) &= -q^{-1}b, \\ S(c) &= -qc, \\ S(d) &= a.\end{aligned}\tag{1.79}$$

As equações (1.72) podem ser escritas de uma forma compacta,

$$R^{ij}_{mn} T^m_k T^n_l = T^j_m T^i_n R^{nm}_{kl},\tag{1.80}$$

onde a matriz R é exatamente a mesma que a apresentada em (1.33). Notemos que quando os parâmetros q e s tendem a um, a matriz R tende a identidade, o que assegura que as entradas de T comutarão neste limite. Se quisermos compactar ainda mais (1.80)

podemos definir as matrizes (4x4)

$$T_1 \equiv T \otimes 1, \quad T_1^{ij}{}_{mn} = T^i{}_m \delta^j{}_n \quad (1.81)$$

e

$$T_2 \equiv 1 \otimes T, \quad T_2^{ij}{}_{mn} = \delta^i{}_m T^j{}_n, \quad (1.82)$$

e reescrevemos (1.80) como

$$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12}, \quad (1.83)$$

que é comumente chamada de equação RTT.

Vimos anteriormente que a Equação de Yang-Baxter (EYB) é a consequência de termos uma Álgebra de Hopf quase triangular. Por outro lado, já sabemos que uma matriz da forma (1.33) obedece à EYB. Isto assegura que a álgebra de funções $Fun(SL_q(2))$ é uma Álgebra de Hopf quase triangular. Entretanto, a validade da EYB pode nos dar mais informação neste caso. Para vermos de onde ela vem, vamos tomar o produto de três matrizes, $T_1T_2T_3$ e reescrevê-lo na ordem inversa, $T_3T_2T_1$. Podemos fazer esta inversão de duas maneiras diferentes, ou trocando inicialmente T_1 por T_2 ou T_2 por T_3 . A condição de associatividade da álgebra exige que os dois resultados sejam idênticos, e usando a eq.(1.83) temos a condição

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \quad (1.84)$$

ou via eq.(1.80)

$$R_{kl}^{ij} R_{rs}^{km} R_{uv}^{ls} = R_{ls}^{jm} R_{kv}^{is} R_{ru}^{kl}. \quad (1.85)$$

Portanto, a EYB assegura a associatividade da álgebra $Fun(SL_q(2))$.

O grupo $GL_{q,s}(2)$ introduzido acima é o grupo de covariância do *plano quântico*, expandido pelas coordenadas (x, y) e que obedece à equação

$$xy = qyx, \quad (1.86)$$

e pelas diferenciais que obedecem a

$$dx \wedge dy = -\frac{1}{s} dy \wedge dx, \quad (1.87)$$

de modo que suas coordenadas e diferenciais são não comutativas. Dizer que o plano quântico é covariante perante $GL_{q,s}(2)$ significa que todo o cálculo diferencial do plano quântico é preservado por $GL_{q,s}(2)$. Na próxima subseção vamos apresentar o cálculo diferencial no plano quântico. Entretanto não vamos iniciar diretamente com duas coordenadas, mas sim com um número arbitrário N e depois particularizaremos para o plano propriamente dito.

1.4.1 O Plano Quântico N-Dimensional

Vamos apresentar nesta subseção um outro exemplo em que a estrutura não comutativa aparece quando construímos um espaço V , o plano quântico N-dimensional [12, 30], definido através das N^2 relações

$$B^{ij}{}_{kl} x^k x^l = 0, \quad (1.88)$$

onde x^i são as coordenadas do (hiper)plano (índices repetidos somados) e os coeficientes $B^{ij}{}_{kl}$ são números complexos e fornecem a estrutura não comutativa das coordenadas. A questão que vamos procurar discutir aqui é como podemos definir o cálculo diferencial neste plano, ou seja, dotá-lo de uma derivada exterior e determinar as relações de comutação entre coordenadas e diferenciais.

A derivada exterior d neste espaço V deve obedecer à regra de Leibnitz

$$d(fg) = (df)g + f(dg), \quad (1.89)$$

onde f e g são funções em V , bem como a relação de nilpotência

$$d^2 = 0. \quad (1.90)$$

Vamos considerar que a derivada exterior possa ser escrita como

$$d = dx^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \partial_i, \quad (1.91)$$

onde ξ^i são as diferenciais (1-formas) e ∂_i as derivadas parciais.

Notemos que, em geral, as funções f e g não comutam entre si, devido a não comutatividade das coordenadas, indicando que a álgebra A gerada por estas funções é não comutativa. Além disso, as derivadas parciais ∂_i também não comutam com as funções em V . Isto significa que a regra de Leibnitz para ∂_i deve ser modificada para

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + (O^j_i(f))\partial_j g, \quad (1.92)$$

onde O^j_i é um operador que atua no espaço de funções de V ($(O^j_i(f))$ é uma função em V).

Atuando com a derivada parcial num produto de três funções e usando a associatividade em A , temos por um lado

$$\begin{aligned} \partial_i(fgh) &= (\partial_i f)gh + (O^j_i(f))\partial_j(gh) = \\ &(\partial_i f)gh + (O^j_i(f))\partial_j(g)h + (O^j_i(f))(O^l_j(g))\partial_l h, \end{aligned} \quad (1.93)$$

e por outro

$$\begin{aligned} \partial_i(fgh) &= \partial_i(fg)h + (O^j_i(fg))\partial_j = \\ &(\partial_i f)gh + (O^j_i(f))\partial_j(g)h + (O^j_i(fg))\partial_j h, \end{aligned} \quad (1.94)$$

obtendo então a relação para o operador O^j_i :

$$(O^j_i(fg)) = (O^j_k(f))(O^k_i(g)), \quad (1.95)$$

o que mostra que basta sabermos a atuação do operador O^j_i nas coordenadas para que

possamos conhece-la em qualquer função f .

Em geral, a atuação dos operadores O^j_i nas coordenadas x^k não é linear. Isto ocorre, por exemplo, quando x^k são os parâmetros de um grupo [10], ou seja, quando vamos construir o cálculo diferencial no grupo propriamente dito (por exemplo, poderíamos construir o cálculo diferencial de $GL_{q,s}(2)$ dado por (1.72). Entretanto, quando estas coordenadas são as coordenadas do plano quântico, podemos escolher

$$O^j_i(x^k) = Q^{kj}_{in} x^n, \quad (1.96)$$

onde os coeficientes Q^{kj}_{in} são números complexos.

Substituindo a função arbitrária f por x^k em (1.92) obtemos a relação

$$\partial_i x^k = \delta^k_i + Q^{km}_{in} x^n \partial_m. \quad (1.97)$$

Atuando com a derivada parcial em (1.88) obtemos

$$B^{ij}_{lm} D^{lm}_{rs} = 0, \quad (1.98)$$

onde

$$D^{lm}_{rs} = \delta^l_r \delta^m_s + Q^{lm}_{rs}. \quad (1.99)$$

Além dessa expressão, para que tenhamos o cálculo diferencial completo precisamos determinar as equações que tem o mesmo papel que esta mas envolvendo os pares ξ^i, x^j ; ξ^i, ∂_j ; ξ^i, ξ^j e ∂_i, ∂_j .

Para o primeiro par, isto pode ser feito se notarmos que, por um lado

$$df = (df) + fd = \xi^i \partial_i f + f \xi^i \partial_i, \quad (1.100)$$

e por outro

$$df = \xi^i \partial_i f = \xi^i (\partial_i f) + \xi^i O^j_i(f) \partial_j, \quad (1.101)$$

e se tomarmos $f = x^k$ teremos

$$x^k \xi^j = Q^{kj}_{in} \xi^i x^n. \quad (1.102)$$

Para determinar a relação entre ∂_j e ξ^i , tentemos o *ansatz*

$$\partial_i \xi^j = F^{kn}_{im} \xi^m \partial_n, \quad (1.103)$$

e para determinar F consideremos

$$\begin{aligned} \partial_i x^j \xi^k &= \delta^j_i \xi^k = \\ \partial_i (Q^{jk}_{mn} \xi^m x^n) &= Q^{jk}_{mn} \partial_i \xi^m x^n = \\ &= Q^{jk}_{mn} F^{mp}_{ir} \xi^r \delta_p^n, \end{aligned} \quad (1.104)$$

ou seja

$$Q^{jk}_{mn} F^{mn}_{ir} = \delta_i^j \delta_r^k \quad (1.105)$$

indicando que F é a matriz inversa de Q .

Vamos agora mostrar que a matriz Q deve obedecer à equação de Yang-Baxter. Isto ocorre porque quando tomamos o elemento $\partial_i x^j \xi^k$, podemos escrevê-lo na ordem inversa de duas maneiras diferentes, ou fazendo na sequencia

$$\partial x \xi \rightarrow \partial \xi x \rightarrow \xi \partial x \rightarrow \xi x \partial \quad (1.106)$$

ou

$$\partial x \xi \rightarrow x \partial \xi \rightarrow x \xi \partial \rightarrow \xi x \partial. \quad (1.107)$$

Como as duas maneiras devem ser iguais, os coeficientes que aparecem em ambos devem ser os mesmos, resultando na igualdade

$$Q^{ir}_{cd} Q^{je}_{im} Q^{mf}_{rs} = Q^{jk}_{cm} Q^{ma}_{ds} Q^{ef}_{ka} \quad (1.108)$$

Tensorialmente, esta equação pode ser escrita como

$$Q_{12}Q_{23}Q_{12} = Q_{23}Q_{12}Q_{23}, \quad (1.109)$$

que é a equação para a matriz de *braid* (confira a equ.(1.16)). Vemos então que da mesma forma que na álgebra $Fun(SL_{q,s}(2))$, a associatividade da álgebra gerada por (x, ξ, ∂) nos dá como condição a equação de Yang-Baxter.

Para completar as relações entre (x, ξ, ∂) , vamos determinar as relações quadráticas para a derivada parcial e as 1-forma, recordando que na geometria comutativa as primeiras comutam e as segundas anticomutam.

A partir do fato que

$$d\xi^i = -\xi^i d, \quad (1.110)$$

podemos escrever

$$\xi^i \xi^j = dx^i \xi^j = d(Q^{ij}_{mn} \xi^m x^n) = -Q^{ij}_{mn} \xi^m \xi^n, \quad (1.111)$$

ou seja

$$D^{ij}_{mn} \xi^m \xi^n = 0. \quad (1.112)$$

Já para as derivadas parciais, vamos escrever

$$\partial_i \partial_j = S^{mn}_{ij} \partial_m \partial_n \quad (1.113)$$

e atuando em x^k descobrimos que S deve satisfazer a duas equações

$$\left(\delta^k_m \delta^l_n + Q^{kl}_{mn} \right) \left(\delta^m_i \delta^n_j - S^{nm}_{ji} \right) = 0 \quad (1.114)$$

e

$$S^{mn}_{ij} Q^{ka}_{nb} Q^{bt}_{ms} = Q^{kn}_{jb} Q^{bv}_{is} S^{ia}_{un}. \quad (1.115)$$

Com isto, determinamos todas as relações de comutação entre as coordenadas, as diferenciais e as derivadas parciais. O fundamental aqui é notarmos que todas as matrizes que controlam as comutações, (B, D, F, S) , são escritas em função da matriz Q . Por seu lado, Q deve obedecer à equação de Yang-Baxter. Portanto, para escrever o cálculo diferencial do plano quântico N -dimensional, basta encontrarmos uma matriz $N^2 \times N^2$ que satisfaça à equação de Yang-Baxter, e o resto é determinado automaticamente.

Já conhecemos uma matriz 4×4 que satisfaz este requisito, a matriz dada em (1.33) ou sua restrição (1.32). Às já mencionadas relações entre as coordenadas

$$xy = qyx, \tag{1.116}$$

e diferenciais

$$dx \wedge dy = -\frac{1}{s} dy \wedge dx. \tag{1.117}$$

se juntam as relações entre as coordenadas e diferenciais dadas por

$$\begin{aligned} x dx &= qs dx x, \\ x dy &= qdy x + (qs - 1)dx y, \\ y dx &= sdx y, \\ y dy &= qsdy y. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Podemos finalmente explicitar o que queremos dizer com a afirmação que o grupo $GL_{q,s}(2)$ é o grupo de covariância do plano quântico. Se fizermos a transformação

$$\begin{aligned} x' &= Ax + By, \\ y' &= Cx + Dy, \end{aligned} \tag{1.119}$$

veremos que x' e y' também obedecem a (1.116), desde que os coeficientes A, B, C, D comutem com as coordenadas e q -comutem (ou quomutem) de acordo com (1.72). Isto

também ocorre para as demais equações entre as coordenadas e as diferenciais.

Quando, nos próximos capítulos, formos descrever a evolução temporal de coordenadas quomutantes teremos que nos questionar como uma destas coordenadas x e sua derivada temporal \dot{x} quomutam. Se considerarmos t como uma coordenada comutante e lembrarmos que a derivada temporal vem da equação

$$dx = \dot{x} dt, \tag{1.120}$$

vemos que o comportamento sob relações de quomutação da derivada temporal de uma coordenada deve ser o mesmo que o de sua diferencial. Portanto (1.118) também nos fornece a relação entre as coordenadas x, y e suas derivadas temporais. Uma discussão mais detalhada desta questão encontra-se em ([33]).

1.5 Variáveis de paragrassmann

Além do plano quântico introduzido acima, existe um outro tipo de variáveis que podem ser introduzidas e relacionadas com grupos quânticos. São as chamadas variáveis de paragrassmann [14].

Uma variável de paragrassmann θ é definida através da relação de nilpotência obedecida por ela e sua derivada, $\frac{\partial}{\partial \theta} \equiv \partial_\theta$

$$\theta^k = 0, \quad \partial_\theta^k = 0, \tag{1.121}$$

para um número inteiro k .

Pode-se construir uma álgebra de polinômios em θ da forma

$$a = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \dots + a_k\theta^k \tag{1.122}$$

onde os coeficientes a_j são, em geral, números complexos.

O operador de derivada ∂_θ é introduzido de tal maneira que

$$\begin{aligned}\partial_\theta(1) &= 0 \\ \partial_\theta(\theta) &= 1 \\ \partial_\theta(\theta^n) &\propto \theta^{n-1}.\end{aligned}\tag{1.123}$$

Estas condições nos obrigam a mudar a regra de Leibnitz para a diferenciação. Isto decorre do fato que, por um lado

$$\partial_\theta(\theta^k) = \partial_\theta(0) = 0,\tag{1.124}$$

e por outro, usando a regra de Leibnitz usual

$$\partial_\theta(\theta^k) \propto (\partial_\theta\theta) \theta^{k-1} + \theta(\partial_\theta\theta^{k-1}) \propto \theta^{k-1},\tag{1.125}$$

o que evidentemente é incompatível. Portanto, a regra de Leibiniz deve ser deformada para

$$\partial_\theta(ab) = (\partial_\theta a)b + g(a)(\partial_\theta b),\tag{1.126}$$

para quaisquer a, b polinomios arbitrários em θ . O coeficiente $g(a)$ deve pertencer à álgebra e deve ser linear e preservar a regra de multiplicação

$$\begin{aligned}g(\alpha a + \beta b) &= \alpha g(a) + \beta g(b), \\ g(ab) &= g(a)g(b),\end{aligned}\tag{1.127}$$

onde α, β são c-números.

Como $g(a)$ é um elemento da álgebra, ele deve ser tal que

$$g(\theta) = \sum_{m=0}^k \alpha_m \theta^{m+1}.\tag{1.128}$$

então, fazendo $a = b = \theta$ teremos a condição

$$\alpha_m = 0 \quad \text{se } m > 0, \quad (1.129)$$

mostrando que $g(\theta)$ deve ser proporcional a θ . O coeficiente de proporcionalidade α_0 pode ser obtido da seguinte forma. Escrevemos

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\theta(\theta^k) &= (\partial_\theta \theta)\theta^{k-1} + g(\theta)\partial_\theta \theta^{k-1} = \\ &(\partial_\theta \theta) \left(\theta^{k-1} + g(\theta)\theta^{k-2} + g(\theta)g(\theta)\theta^{k-3} + \dots + (g(\theta))^{k-1} \right), \end{aligned} \quad (1.130)$$

e usando que a condição que $g(\theta)$ é proporcional a θ teremos que

$$1 + \alpha_0 + \alpha_0^2 + \dots + \alpha_0^{k-1} = \frac{1 - \alpha_0^k}{1 - \alpha_0} = 0 \quad (1.131)$$

mostrando que α_0 deve ser uma raiz da unidade.

Então, escrevendo

$$g(\theta) = q\theta. \quad (1.132)$$

ve-se que ∂_θ e θ devem obedecer uma relação de comutação q -deformada (quommutação)

$$[\partial_\theta, \theta] \equiv \partial_\theta \theta - q\theta \partial_\theta = 1, \quad (1.133)$$

com q sendo raiz da unidade, $q^k = 1$.

Esta derivada, entretanto, não é única. De fato, podemos mudar a potência 1 na eq.(1.133) por qualquer outro inteiro menor que k , significando que para cada valor de k podemos definir $k - 1$ derivadas diferentes. Por exemplo, se $k = 3$, que é a situação que mais nos interessará nos capítulos subsequentes, pode-se definir uma outra derivada δ_θ [34] que quomuta com θ da seguinte forma

$$[\delta_\theta, \theta] \equiv \delta_\theta \theta - q^2 \theta \delta_\theta = 1, \quad (1.134)$$

e sua regra de Leibnitz difere da eq.(1.126) pela mudança $g(a)$ por $g(g(a))$. Genericamente, podemos definir o operador diferencial $\partial^{(n)}_\theta$ através da equação

$$[\partial^{(n)}_\theta, \theta] \equiv \partial^{(n)}_\theta \theta - q^n \theta \partial^{(n)}_\theta = 1, \quad (1.135)$$

onde o inteiro $1 \leq n \leq k-1$. O surgimento de mais de uma derivada não é uma situação incomum: também quando se estudam problemas na rede pode-se definir duas derivadas independentes, uma que relaciona a função num sitio e no subsequente, e outra cuja relação envolve um sitio e o anterior.

A introdução da integral sobre as variáveis de paragrassmann é feita de maneira análoga à das variáveis de Grassmann. Em primeiro lugar, também aqui o fato que a derivada de uma certa ordem $(k+1)$ se anula para qualquer função (de ordem k) impossibilita a definição de integral como a inversa da diferenciação. Seguindo o procedimento das variáveis de Grassmann, vamos então definir a integral de uma função como a sua própria derivada.

Tomando uma função arbitrária de θ e integrando teremos

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (a + b\theta + c\theta^2). \quad (1.136)$$

Fazendo uma translação em θ , $\theta' = \theta + \varepsilon$ teremos

$$\int d\theta (a + b\theta + c\theta^2) = \int d\theta' ((a - b\varepsilon - c\varepsilon) + (b - 2c)\theta' + c\theta'^2). \quad (1.137)$$

Impondo a linearidade, ou seja, retirando as constantes de dentro do sinal de integração, vemos que os termos independente e linear em θ devem se anular, restando apenas o termo quadrático. Esta análise é trivialmente generalizada, levando à relação

$$\int d\theta \theta^n = \delta_{n,k-1}. \quad (1.138)$$

Capítulo 2

Generalização para Grupos Quânticos da Partícula Clássica Supersimétrica

2.1 Introdução

Introduziremos neste capítulo as coordenadas generalizadas, veremos sua relação com os Grupos Quânticos, escreveremos uma ação para elas e discutiremos simetrias desta ação.

No capítulo anterior, vimos que podemos construir coordenadas quocomutantes a partir do grupo $GL_{(q,s)}(2)$, o plano quântico. Vamos ver agora uma outra maneira de introduzir estas coordenadas utilizando os q -osciladores.

Como vimos no capítulo anterior, a álgebra de q -osciladores,

$$aa^\dagger - qa^\dagger a = q^{-N}, \quad (2.1)$$

é tal que, quando $q = \exp(2\pi i/k)$, com k um inteiro, os operadores de aniquilação e criação satisfazem à relação

$$a^k = (a^\dagger)^k = 0, \quad (2.2)$$

o que indica que o conjunto de auto-estados do operador número é finito, com auto-valores discretizados. Assim como no caso das álgebras bosônica ou fermiônica de osciladores, também aqui podemos definir variáveis clássicas deste sistema como o limite clássico destes operadores [35]. Então, chamando estas coordenadas de θ , elas devem ser nilpotentes de ordem k ,

$$\theta^k = 0. \tag{2.3}$$

Estas coordenadas clássicas θ são a generalização das variáveis de Grassman [35, 14], as variáveis de Paragrassmann, as quais já estudamos anteriormente. Vamos também ressaltar que o cálculo diferencial com estas coordenadas possui uma estrutura de Yang–Baxter e uma covariância das equações sob a ação do grupo quântico a dois parâmetros $GL_{q^2, q^{-2}}$ [35].

É interessante notar que, se tomarmos o limite $k \rightarrow \infty$, ou seja, $q \rightarrow 1$, a eq. (2.1) se transforma na álgebra usual dos osciladores com um número de ocupação infinito, e o limite clássico nos dá coordenadas comutantes. Tomando o caso $k = 2$, eq. (2.1) nos dá uma relação de anticomutação entre a e a^\dagger , e neste caso o número de ocupação é dois enquanto as variáveis clássicas são as de Grassmann. Como para os valores intermediários de k as variáveis interpolam os casos bosônicos e fermiônicos, vamos procurar explorar estes casos.

Neste capítulo, consideraremos o problema de construir uma ação para uma partícula clássica usando estas coordenadas de Grassmann generalizadas para o caso em que $k = 3$, e mostraremos que ela possui uma simetria envolvendo estas coordenadas muito parecida com a supersimetria. Inicialmente, trataremos o problema na Mecânica Clássica. Depois, generalizaremos para uma Teoria de Campos Heterótica bi-dimensional e construiremos o funcional gerador para os campos bem como o seu propagador.

2.2 Coordenadas q -fermiônicas e a ação para uma partícula clássica supersimétrica

Para que possamos entender como estas coordenadas generalizadas podem aparecer, vamos inicialmente recordar que na supersimetria (SUSY) temos um superespaço com coordenadas (θ, t) , $\theta^2 = 0$ e t um c -número que é identificado com o tempo (como dissemos acima, nossa discussão aqui será inicialmente na mecânica clássica). Funções no superespaço são polinômios em θ , e isto nos dá dois tipos diferentes de campos: férmions, que sob relações de comutação se comportam como a própria variável de Grassmann θ , isto é, anticomutam entre eles mesmos, e bósons, que se comportam como θ^0 , ou seja, comutam com todos os objetos da teoria. Translações no superespaço nos dão a supersimetria, e determinam a dimensão de θ em relação a t .

Se agora considerarmos o caso $\theta^k = 0$, onde k é um inteiro, teremos k tipos diferentes de campos: aqueles que sob relação de comutação se comportam como θ^0 (bósons, que definimos como um campo do setor-zero); como θ (campo do setor-um); ou como θ^2 (campo do setor dois) e assim por diante, até o campo do setor $k - 1$.

Vamos definir a relação de q -comutação entre dois campos $A^{(r)}$ e $B^{(s)}$ como sendo

$$[A^{(r)}, B^{(s)}]_q \equiv q^{(-rs/2)} A^{(r)} B^{(s)} - q^{(rs/2)} B^{(s)} A^{(r)}, \quad (2.4)$$

onde o superscrito indica o setor ao qual o campo pertence. Esta é a relação mais simples que assegura que qualquer campo bosônico comutará com qualquer outro campo, já que neste caso o fator q desaparece. Ele também dá o limite correto no caso $k = 2$ e no limite $k \rightarrow \infty$ nós recobramos o comutador usual.

Vamos considerar a partir de agora o caso $k = 3$. Neste caso, para fixarmos a dimensão de θ , nós introduzimos a seguinte transformação no q -superespaço

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta' = \theta + \epsilon^{(1)}, \\ t &\rightarrow t' = t + q\theta^2 \epsilon^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

com $\epsilon^{(1)}$ um parametro infinitesimal constante pertencendo ao setor um. devido a homogeneidade da transformação em θ . Esta transformação é similar à transformação de SUSY, $\theta' = \theta + \epsilon$, $t' = t + i\epsilon\theta$.

O fator θ^2 foi escolhido na transformação da coordenada t porque estamos tomando as coordenadas θ como generalização das variáveis de Grassmann, e o produto de uma variável do setor dois com uma do setor um nos dá uma variável do setor zero. Nós estendemos o caso de bósons e férmions de modo que, em geral, o produto $A^{(r)}B^{(s)}$ pertence ao setor $(r+s) \bmod 3$ no caso em que $k = 3$. Em outras palavras, o produto destas variáveis possui uma graduação Z_3 . Em breve discutiremos algumas sutilezas relacionadas com o produto destes campos. O fator q que aparece na transformação da coordenada t é necessário para que, sendo t e θ reais, t' também o seja, e isto é decidido pela escolha $[\epsilon^{(1)}, \theta]_q = 0$.

A equação (2.5) fixa a dimensão de massa de θ e $\epsilon^{(1)}$, como sendo

$$[\theta] = [\epsilon^{(1)}] = -1/3. \quad (2.6)$$

Podemos também construir uma transformação com um parâmetro infinitesimal que pertença ao setor dois

$$\begin{aligned} \theta^2 &\rightarrow \theta'^2 = \theta^2 + \epsilon^{(2)}, \\ t &\rightarrow t' = t + q\theta\epsilon^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde escolhemos $[\theta, \epsilon^{(2)}]_q = 0$, e isto nos dá que $[\epsilon^{(2)}] = -2/3$.

Nosso próximo passo será construir uma ação que estenda a noção de partícula clássica supersimétrica através do uso destas coordenadas generalizadas. Esta partícula generalizada é descrita pelas coordenadas $(x(t), \psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t))$, da mesma maneira que uma partícula supersimétrica é descrita pelas coordenada $(x(t), \psi(t))$. Chamaremos as coordenadas $\psi^{(i)}(t)$ de a generalização q -fermiônica das coordenadas ou, simplesmente, as

coordenadas quermiônicas.

A ação envolvendo estes quermions será tomada como sendo

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - q C^{(s)^2} \dot{\psi}^{(2)} \psi^{(1)} \right), \quad (2.8)$$

onde escolhemos o parâmetro de massa igual a um. A primeira derivada no termo quermiônico é escolhida de tal maneira que a equação clássica de movimento para $\psi^{(i)}$ seja semelhante a dos férmions. O fator tipo-cociclo $C^{(s)^2}$ é necessário porque quando multiplicamos dois objetos de diferentes setores, $A^{(r)}B^{(s)}$, o produto deve pertencer ao setor $(r + s) \bmod 3$, mas se este fator não for inserido o produto não comutará corretamente com $A^{(r)}$ ou $B^{(s)}$. É subjacente a este ponto o fato que no caso fermiônico campos anticomutam mesmo quando estão no mesmo ponto, enquanto que neste caso campos no mesmo ponto são comutantes.

Este fator tipo-cociclo $C^{(s)}$ de fato funciona com um q -contador de setor, já que suas relações de quomutação são

$$C^{(s)} A^{(i)} = q^i A^{(i)} C^{(s)}. \quad (2.9)$$

Com esta escolha, além da $[\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]_q = 0$, considerando todos os campos como reais, o segundo termo da ação eq. (2.8), torna-se real e é representativo do setor-zero.

2.3 Análise de Simetrias da Ação

Nesta seção, vamos mostrar que a ação dada pela eq. (2.8) possui uma simetria, construída a partir do parâmetro infinitesimal $\epsilon^{(1)}$ introduzido anteriormente, a qual se assemelha a uma transformação de supersimetria. Também discutiremos algumas simetrias apenas da ação quermiônica.

Como o parâmetro $\epsilon^{(1)}$ é definido no setor um, torna-se natural escolhermos as transformações entre as coordenadas como sendo do tipo

$$\delta\psi^{(1)} \sim \epsilon^{(1)} \partial_t^i x,$$

$$\begin{aligned}\delta x &\sim \epsilon^{(1)} \partial_t^m \psi^{(2)}, \\ \delta \psi^{(2)} &\sim \epsilon^{(1)} \partial_t^n \psi^{(1)},\end{aligned}\tag{2.10}$$

ou seja, uma transformação cíclica entre as coordenadas. Para determinarmos os fatores multiplicativos nas variações, devemos nos lembrar que cada uma das variações dos campos deve ser real (já que os campos o são), e também devem se comportar como o próprio campo se comporta sob relações de quomutação com relação aos outros campos. Com isto, as potências de $C^{(s)}$ e q são encontradas.

Falta ainda determinar os valores dos inteiros positivos (l, m, n) , o que pode ser feito calculando-se δS e impondo-lhe ser uma derivada total. Obtemos

$$\delta S \propto \int dt \left(\dot{x} (\partial_t)^{m+1} \psi^{(2)} + (\partial_t)^{n+1} \psi^{(1)} \psi^{(1)} + \dot{\psi}^{(2)} (\partial_t)^l x \right)\tag{2.11}$$

Isto implica que n deve ser um número par. Além disso, a condição que $[\psi^{(i)}]$ seja positiva implica que $m = n = 0$, $l = 1$, e as dimensões para as coordenadas $\psi^{(i)}$ ficam determinadas como sendo

$$[\psi^{(j)}] = j/3.\tag{2.12}$$

Com isto, as transformações das coordenadas ficam determinadas como

$$\begin{aligned}\delta x &= q C^{(s)} \epsilon^{(1)} \psi^{(2)}, \\ \delta \psi^{(1)} &= q^2 C^{(s)^2} \epsilon^{(1)} \dot{x}, \\ \delta \psi^{(2)} &= \pm q \epsilon^{(1)} \psi^{(1)}\end{aligned}\tag{2.13}$$

e quando submetida a esta transformação, a ação se transforma em

$$\delta S = \pm \int dt \frac{d}{dt} (\epsilon^{(1)} \psi^{(1)^2}),\tag{2.14}$$

onde usamos $[\epsilon^{(1)}, \psi^{(1)}]_q = [\psi^{(2)}, \epsilon^{(1)}]_q = 0$.

Da mesma maneira que na supersimetria, a ação se transforma como uma derivada

total. Uma outra semelhança com a supersimetria é o fato que uma das coordenadas, $\psi^{(1)}$, se transforma como uma derivada total, e sabemos que isto sempre acontece com o campo mais alto de um multiplete em supersimetria (o campo mais alto em um multiplete é aquele em que a potência das variáveis grassmannianas do superespaço é a maior possível). De fato, uma possível expansão para um supercampo envolvendo as coordenadas consideradas aqui seria $\Phi = x + \theta\psi^{(2)} + \theta^2\psi^{(1)}$, que como veremos no capítulo 3 é de fato essencialmente a expansão para um supercampo escalar.

Argumentos similares podem ser usados para se construir transformações que envolvam um parâmetro $\epsilon^{(2)}$, pertencendo ao setor 2. Novamente potências de $C^{(s)}$ e q são determinadas pelos vínculos de homogeneidade e realidade das transformações. As potências das derivadas são determinadas pelas dimensões dos campos, e as transformações são

$$\begin{aligned}\delta x &= -q^2 C^{(s)} \epsilon^{(2)} \psi^{(1)}, \\ \delta \psi^{(1)} &= \pm q^2 \epsilon^{(2)} \dot{\psi}^{(2)}, \\ \delta \psi^{(2)} &= q C^{(s)^2} \epsilon^{(2)} \dot{x},\end{aligned}\tag{2.15}$$

com a escolha $[\epsilon^{(2)}, \psi^{(1)}]_q = [\psi^{(2)}, \epsilon^{(2)}]_q = 0$.

Entretanto, neste caso δS não é uma derivada total. De fato sua variação é dada por

$$\delta S = \int dt \left(-q^2 C^{(s)} \epsilon^{(2)} \frac{d}{dt} (\dot{x} \psi^{(1)}) \pm q C^{(s)^2} \epsilon^{(2)} \dot{\psi}^{(2)^2} \right).\tag{2.16}$$

O fato que neste caso um campo elevado ao quadrado não se anula significa que $\epsilon^{(2)}$ não pode ser tomado como um parâmetro infinitesimal de uma transformação sob a qual a ação é invariante.

Portanto, a ação dada pela eq. (2.8), é invariante sob a supersimetria generalizada eq. (2.5) que é uma transformação cíclica entre as coordenadas bosônicas e quermiônicas.

Uma ação construída apenas com o termo quermiônico e dada por

$$S = \int dt \left(\psi^{(2)} \dot{\psi}^{(1)} - q \psi^1 \dot{\psi}^2 \right),\tag{2.17}$$

é invariante perante transformações finitas de $SL_{q,q}(2)$ [33], com as transformações

$$\begin{aligned}\psi^{2'} &= A\psi^2 + B\psi^1, \\ \psi^{1'} &= C\psi^2 + D\psi^1,\end{aligned}\tag{2.18}$$

onde os parâmetros A, B, C, D comutam com as coordenadas quermiônicas e geram as matrizes de $SL_q(2)$ (eq.(1.72)). O cálculo diferencial neste caso é exatamente o mesmo que o do plano quântico introduzido no capítulo anterior, identificando ψ^2 com x e ψ^1 com y . Esta simetria mostra uma relação entre as coordenadas quermiônicas e as coordenadas do plano quântico, pois uma ação construída para estas últimas possui uma simetria deste tipo [33]. Esta semelhança vem do fato que o cálculo diferencial das coordenadas quermiônicas pode ser o mesmo que o do plano quântico quando tomamos a relação $q = s^{-1}$ na álgebra de $GL_{(q,s)}(2)$. As coordenadas quermiônicas, porém, sofrem uma restrição que não se aplica às coordenadas do plano quântico: a condição de nilpotência (2.3).

2.4 Formulação Bi-Dimensional

A mesma construção apresentada na seção anterior para as coordenadas quermiônicas na Mecânica Clássica pode ser estendida para um modelo heterótico bi-dimensional, simplesmente considerando que as coordenadas $x(t)$ se transformam em campos $\phi(x^+, x^-)$, onde $x^\pm = \frac{1}{2}(x^0 \pm x^1)$ são as coordenadas do cone-de-luz. Tanto a ação bosônica quanto a fermiônica num modelo bi-dimensional podem ser escritas em termos das coordenadas do cone-de-luz, e a ação para os férmions é tal que eles possuem uma quiralidade definida.

A ação para os quermions será dada por

$$S_q = \int d^2x q C^{(s)^2} \partial_+ \psi^{(2)} \psi^{(1)},\tag{2.19}$$

onde escolhemos os quermions com quiralidade negativa, e a relação de quomutação (no

mesmo ponto) para $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$ é a mesma que no caso anterior.

Também aqui podemos introduzir um superspaço dado pelas coordenadas (θ, x^μ) , com transformações

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta' = \theta + \epsilon^{(1)}, \\ x^- &\rightarrow x'^- = x^- + q\theta^2 \epsilon^{(1)},\end{aligned}\tag{2.20}$$

valendo também aqui a mesma relação entre ϵ e θ .

Usando os mesmos procedimentos utilizados na seção anterior, podemos ver que a ação para campo escalar $\phi(x)$ e campos quermiônicos $\psi^{(j)}$, dada por

$$S = \int d^2x (\partial_+ \phi \partial_- \phi - qC^{(s)^2} \partial_+ \psi^{(2)} \psi^{(1)}),\tag{2.21}$$

é invariante perante a transformação

$$\begin{aligned}\delta\phi &= qC^{(s)} \epsilon^{(1)} \psi^{(2)}, \\ \delta\psi^{(1)} &= q^2 C^{(s)^2} \epsilon^{(1)} \partial_- \phi, \\ \delta\psi^{(2)} &= \pm q \epsilon^{(1)} \psi^{(1)},\end{aligned}\tag{2.22}$$

resultando na derivada total

$$\delta S = \pm \int d^2x \partial_+ (\epsilon^{(1)} \psi^{(1)^2}).\tag{2.23}$$

As dimensões dos campos quermiônicos são

$$\begin{aligned}[\psi^{(1)}] &= \frac{2}{3}, \\ [\psi^{(2)}] &= \frac{1}{3},\end{aligned}\tag{2.24}$$

Podemos também mostrar que a ação eq.(2.21) não é invariante perante uma trans-

formação construída a partir de um parâmetro infinitesimal $\varepsilon^{(2)}$ cuja estrutura é semelhante à eq.(2.16).

2.5 Integral de Trajetória para Quérmions

Vamos agora construir a integral de trajetória sobre os campos quermiônicos introduzidos neste capítulo. Isto será usado na próxima seção quando definirmos o funcional gerador e calcularmos o propagador quermiônico. O que desejamos fazer aqui é integrar sobre as variáveis quermiônicas $\psi^{(i)}$ que obedecem à relação

$$\psi^{(1)}\psi^{(2)} = q^2\psi^{(2)}\psi^{(1)}, \quad (2.25)$$

e

$$\psi^{(i)3} = 0. \quad (2.26)$$

Como vimos quando estudamos as variáveis de paragrassmann, as condições de linearidade e invariância translacional nos impõem a condição [35]

$$\int d\psi^{(i)} \psi^{(i)n} = \delta_{n,2}\alpha, \quad (2.27)$$

onde α é uma constante determinada por normalização. Para integrarmos sobre as duas variáveis, $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$, a medida invariante é dada por

$$[d\psi] = C^{(s)^2} d\psi^{(1)} d\psi^{(2)}. \quad (2.28)$$

A normalização da integral acima pode ser determinada se impusermos como resultado da integral q -gaussiana

$$I = \int [d\psi] \exp [C^{(s)^2} \psi^{(2)} \psi^{(1)}] = 1. \quad (2.29)$$

Expandindo a exponencial, apenas o termo quadrático restará, e teremos

$$\alpha = \sqrt{2q}. \quad (2.30)$$

Desta relação torna-se evidente que

$$\int [d\psi] \exp [C^{(s)^2} \psi^{(2)} a_1 \psi^{(1)}] = a_1^2. \quad (2.31)$$

Definida esta integral, vamos construir agora uma integração funcional sobre duas variáveis quermiônicas em “pontos” diferentes (ou seja, $\psi_1^{(1)}$, $\psi_1^{(2)}$, $\psi_2^{(1)}$ e $\psi_2^{(2)}$). Escrevendo a medida de integração como $[d\psi]$, a integral será da forma

$$I_2 = \int [d\psi] \exp (X), \quad (2.32)$$

com

$$X = X_1 + X_2 = \psi_1^{(2)} A_1 \psi_1^{(1)} + \psi_2^{(2)} A_2 \psi_2^{(1)}, \quad (2.33)$$

onde A_α , $\alpha = 1, 2$, são escolhidos de tal maneira que cada X_α pertença ao setor zero, para que a exponencial faça sentido, e em geral eles serão o produto de um c-número, a_α com algum fator tipo-cociclo C.

Precisamos ainda definir as relações de quomutação entre diferentes campos $\psi_1^{(i)}$ e $\psi_2^{(i)}$. Nós as escolheremos como sendo

$$\begin{aligned} [\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}]_q &= 0 && \text{sem soma sobre } i, \\ [\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(j)}]_q &= 0 && i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Com esta escolha, torna-se fácil determinar quais os cociclos necessários para que cada termo X_α pertença ao setor zero. Os A_α são

$$A_1 = a_1 C^{(s)^2} C(\psi_2^{(1)}) C(\psi_2^{(2)})^2,$$

$$A_2 = a_2 C^{(s)^2} C(\psi_1^{(1)}) C(\psi_1^{(2)})^2, \quad (2.35)$$

onde $C(A)A = qAC(A)$, ou seja, o fator tipo cociclo $C(A)$ q -conta o campo A .

Necessitamos ainda determinar qual é a medida invariante. Para isto, vamos multiplicar todos os cociclos aparecendo em A_1 e A_2 , obtendo

$$[d\psi] = C^{(s)} C(\psi_2^{(1)}) C(\psi_2^{(2)})^2 C(\psi_1^{(1)}) C(\psi_1^{(2)})^2 d\psi_1^{(1)} d\psi_1^{(2)} d\psi_2^{(1)} d\psi_2^{(2)}. \quad (2.36)$$

Com esta escolha a medida pode ser dividida em duas partes,

$$[d\psi] = [d\psi_1][d\psi_2], \quad (2.37)$$

onde

$$[d\psi_i] = C^{(s)} C(\psi_j^{(1)}) C(\psi_j^{(2)})^2 d\psi_i^{(1)} d\psi_i^{(2)}, \quad (2.38)$$

com $i \neq j$, e cada $[d\psi_i]$ é invariante. Com esta medida temos

$$I_2 = \int [d\psi] \exp(X_1 + X_2) = a_1^2 a_2^2. \quad (2.39)$$

Podemos ver que a eq.(2.33) pode ser escrita em uma forma matricial onde A é uma matriz diagonal, com coeficientes a_α . Neste caso, podemos reescrever a eq.(2.39) como

$$I_2 = (\det A)^2. \quad (2.40)$$

A generalização para $N > 2$ segue de uma maneira análoga. Tomamos o quomutador dos campos como sendo

$$\begin{aligned} [\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}]_q &= 0 & i = 1, 2, \dots, N \text{ (sem soma sobre } i), \\ [\psi_i^{(l)}, \psi_j^{(m)}]_q &= 0 & i, j = 1, 2, \dots, N; i < j; l, m = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde X neste caso é dado por

$$X = \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \psi_{\alpha}^{(2)} A_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(1)}, \quad (2.42)$$

com

$$A_{\alpha} = a_{\alpha} C^{(s)^2} \prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N C(\psi_{\beta}^{(1)}) C(\psi_{\beta}^{(2)})^2. \quad (2.43)$$

Os cociclos da equação acima podem ser entendidos da seguinte forma: a primeira parte dos cociclos, $C^{(s)^2}$, é introduzida de tal maneira que tenhamos objetos comutantes para o mesmo α (mesmo ponto no limite contínuo), enquanto que a segunda parte $\prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N C(\psi_{\beta}^{(1)}) C(\psi_{\beta}^{(2)})^2$, faz um termo comutante para cada valor de α com todos os outros possíveis valores (pontos diferentes no limite contínuo).

A medida passa a ser dada por

$$[d\psi] = \prod_{\alpha=1}^N [d\psi_{\alpha}], \quad (2.44)$$

com

$$[d\psi_{\alpha}] = C^{(s)^2} \prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^N C(\psi_{\beta}^{(1)}) C(\psi_{\beta}^{(2)})^2 d\psi_{\alpha}^{(1)} d\psi_{\alpha}^{(2)}, \quad (2.45)$$

de tal modo que teremos para I_N :

$$I_N = \prod_{\alpha=1}^N (a_{\alpha})^2 = (\det A)^2. \quad (2.46)$$

Como estamos considerando uma generalização das variáveis de Grassmann, este poderia ser um resultado esperado, já que da relação (2.27) podemos ver que

$$\int d\psi \psi^n = \delta_{n, k-1}, \quad (2.47)$$

e a integral q -gaussiana se comporta como

$$\int [d\psi] \exp(\psi A \psi) \sim (\det A)^{(k-1)}, \quad (2.48)$$

com o limite correto para $k = 2$.

Analogamente ao caso de férmions, podemos generalizar a eq.(2.46) para um número infinito de graus de liberdade obtendo desta maneira uma integral de trajetória para a ação quermiônica.

2.6 O Gerador Funcional e o Propagador Quermiônico

Passaremos agora a escrever o Gerador Funcional para os quermions e posteriormente calcularemos seu propagador. Iniciamos introduzindo as fontes $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$, que serão acopladas aos quermions. Vamos escolher seu quomutador como sendo

$$\begin{aligned} [J^{(1)}, J^{(2)}]_q &= 0, \\ [J^{(i)}, \psi^{(1)}]_q &= 0, \\ [\psi^{(2)}, J^{(i)}]_q &= 0, \end{aligned} \tag{2.49}$$

com $i = 1, 2$.

O Gerador Funcional pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z[J^{(1)}, J^{(2)}] &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int [d\psi] \exp \left[i \int d^2x \left(q C^{(s)^2} \psi^{(2)} A \psi^{(1)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q^2 C^{(s)} C (J^{(2)})^2 \psi^{(2)} J^{(1)} + q^2 C^{(s)} C (J^{(1)})^2 J^{(2)} \psi^{(1)} \right) \right], \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde A é um operador que deve ser inversível ($A = \partial_+$, se considerarmos a ação dada por eq.(2.19)). As potências em q e os cociclos nos dois últimos termos são fixadas pela imposição da condição de realidade e pelo fato que eles devem pertencer ao setor zero. Vamos agora seguir o truque usual para calcular esta integral. Primeiro, escrevemos o

integrando do argumento da exponencial em eq.(2.50) como sendo

$$Q(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = qC^{(s)^2}(\psi^{(2)} + \psi_0^{(2)})A(\psi^{(1)} + \psi_0^{(1)}) + X, \quad (2.51)$$

com

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)} &= q^2 C^{(s)^2} C(J^{(2)}) A^{-1} J^{(1)}, \\ \psi_0^{(2)} &= q C^{(s)^2} C(J^{(1)})^2 J^{(2)} A^{-1}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

e

$$X = -q^2 C(J^{(1)})^2 C(J^{(2)}) J^{(2)} A^{-1} J^{(1)}. \quad (2.53)$$

Como X comuta com todos os campos e fontes (e também com a medida), podemos tirá-lo de dentro da integral, restando apenas a integral q -gaussiana que já discutimos na seção anterior. Normalizando Z de tal forma que $Z[J^{(1)} = 0, J^{(2)} = 0] = 1$ obtemos

$$\mathcal{N} = (\det A)^2, \quad (2.54)$$

e Z se torna

$$Z[J^{(1)}, J^{(2)}] = \exp \left(q^2 C(J^{(1)})^2 C(J^{(2)}) \int d^2 x J^{(2)} A^{-1} J^{(1)} \right). \quad (2.55)$$

A função de dois pontos é definida por

$$\begin{aligned} \langle \psi^{(2)}(x) \psi^{(1)}(y) \rangle &= \frac{1}{(\det A)^2} \left\{ \int [d\psi] \psi^{(2)}(x) \psi^{(1)}(y) \exp \left(\int d^2 x i Q(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) \right) \right\} \Big|_{J^{(i)}=0} \\ &= C^{(s)} C(J^{(2)})^2 C(J^{(1)}) \frac{\delta^2}{\delta J^{(1)}(y) \delta J^{(2)}(x)} F(J^{(1)}, J^{(2)}) \Big|_{J^{(i)}=0}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

com

$$F(J^{(1)}, J^{(2)}) = \exp \left(q^2 C^{(s)^2} C(J^{(1)})^2 C(J^{(2)}) \int d^2 x J^{(2)} A^{-1} J^{(1)} \right). \quad (2.57)$$

Calculando as derivadas, obtemos

$$\langle \psi^{(2)}(x)\psi^{(1)}(y) \rangle = q^2 C^{(s)} A^{-1}(x-y). \quad (2.58)$$

No caso da ação para quérmons livres dada pela equação eq.(2.19), $A = \partial_+$ e o propagador se torna

$$\langle \psi^{(2)}(x^-)\psi^{(1)}(y^-) \rangle = \frac{q^2 C^{(s)}}{(x^- - y^-)}. \quad (2.59)$$

Podemos interpretar esta expressão como uma extensão do propagador fermionico, pois no limite $k = 2$ (ou $q = -1$), obtemos o resultado para o propagador fermionico, já que neste caso os cociclos são o operador identidade.

Capítulo 3

Formulação no superespaço

Nos capítulo anterior, desenvolvemos um modelo em que as coordenadas são quomutantes, e fomos capazes de construir ações para estas coordenadas. Vimos também que estas ações são invariantes perante transformações cujo parâmetro infinitesimal também é quomutante e que as características destas transformações são tais que elas se assemelham a transformações de supersimetria. Torna-se natural, portanto, nos perguntarmos se é possível construir um formalismo de superespaço para estas transformações. Nosso objetivo neste capítulo é respondermos (positivamente) à esta questão. Seguiremos aqui um paralelo com o que se faz quando se introduzem os conceitos básicos da supersimetria, começando com a introdução das coordenadas do super-espaço e translações envolvendo-as. Isto possibilitará a determinação da representação operatorial do gerador destas translações e também definir a derivada covariante e, com esta, ações envolvendo supercampos apropriadamente definidos.

3.1 O q -Superspaço e os q -Supercampos

Já que nossa estratégia é seguir os passos da supersimetria, iniciaremos retornando às translações no superespaço parametrizado por uma coordenada bosônica t e outra para-

grassmanniana θ , introduzidas no capítulo anterior

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta + \varepsilon, \\ t' &= t + q^C \theta^2 \varepsilon,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde o parâmetro infinitesimal ε pertence ao setor um.

Neste caso, o quomutador

$$[\varepsilon, \theta]_{q^C} = 0,\tag{3.2}$$

e a condição de realidade das coordenadas paragrassmannianas determinam o aparecimento do fator q^C . Notemos que anteriormente fixamos $C = 1$. Deixaremos esta escolha em aberto inicialmente, mas tomaremos tanto C quanto outros fatores deste tipo que aparecerão abaixo como números inteiros, o que limitará seus valores a 0, 1 ou 2.

Introduzido o q -superespaço (t, θ) , o nosso próximo passo será escrever uma função destas variáveis. Como no caso supersimétrico, vamos iniciar expandindo esta função em uma série de Taylor na coordenada quermiônica θ , e naturalmente esta expansão será um polinômio de grau dois (para o caso genérico em que $\theta^k = 0$, o polinômio vai até a ordem $k - 1$). A única diferença entre o supercampo introduzido aqui e os elementos da álgebra Paragrassmanniana introduzidos na seção 1.5 é que os coeficientes da expansão do supercampo são funções reais do tempo, e não números complexos.

Vamos considerar um q -supercampo cuja componente independente de θ seja a coordenada bosônica $x(t)$. Neste caso

$$X(t, \theta) = x(t) + q^{B_2} \theta \psi^{(2)}(t) + q^{2B_1} \theta^2 \psi^{(1)}(t).\tag{3.3}$$

Sendo a coordenada $x(t)$ uma função comutante, por homogeniedade o q -supercampo $X(t, \theta)$ também o é, fazendo o mesmo papel que o de um campo escalar. Os campos componentes $\psi^{(i)}(t)$ são os parceiros q -supersimétricos da coordenada $x(t)$, e suas dimensões de massa são $[\psi^{(j)}] = -\frac{j}{3}$.

Com as relações de quomutação

$$\begin{aligned} [\psi^{(1)}, \psi^{(2)}]_{q^A} &= 0, \\ [\theta, \psi^{(j)}]_{q^j} &= 0, \\ [\varepsilon, \psi^{(j)}]_{q^j} &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

garantimos que X é um supercampo real.

A transformação infinitesimal (3.1) induz uma variação no q -supercampo $X(\theta, t)$ da forma

$$X(\theta', t') - X(\theta, t) = \Delta X = \varepsilon Q X, \tag{3.5}$$

e a realização operatorial do gerador de transformações q -supersimétricas Q pode ser obtida fazendo uma expansão em série de Taylor do lado esquerdo da equação acima. A partir das translações no superespaço podemos escrever

$$X(\theta', t') - X(\theta, t) = \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \theta} + q^{2C} \varepsilon \theta^2 \frac{\partial X}{\partial t}, \tag{3.6}$$

fazendo com que tenhamos

$$Q = q^{2C} \theta^2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.7}$$

Notamos então que o gerador está no setor dois, e sua dimensão canônica é $[Q] = \frac{1}{3}$.

Um cálculo direto mostra que

$$Q^3 = -\partial_t, \tag{3.8}$$

o que significa que o gerador de transformações q -supersimétrica é a raiz cúbica das translações temporais, generalizando o resultado da supersimetria em que o quadrado do gerador é proporcional à Hamiltoniana.

Calculando explicitamente o lado direito de (3.5), obtemos para a variação de X

$$\Delta X = q^{B_2} \varepsilon \psi^{(2)} - q^{2B_1+2+C} \theta \varepsilon \psi^{(1)} + q^{2C} \theta^2 \varepsilon \dot{x}. \tag{3.9}$$

Como o supercampo $X(t, \theta)$ é real, vamos exigir que sua variação também o seja. Esta condição nos dá as relações

$$\begin{aligned}\beta + B_2 &= D_2 \\ \beta + B_1 + 2 + 2C + 2D_1 &= 0 \\ \alpha &= 2C\end{aligned}\tag{3.10}$$

De (3.9), podemos comparar as potências em θ e determinar quais são as transformações sofridas pelas coordenadas componentes de X , as quais serão

$$\begin{aligned}\Delta x &= q^{B_2} \varepsilon \psi^{(2)}, \\ \Delta \psi^{(2)} &= -q^{2B_2+2B_1+2+C} \varepsilon \psi^{(1)}, \\ \Delta \psi^{(1)} &= q^{B_1+2C} \varepsilon \dot{x}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Também as variações destas coordenadas devem ser reais, implicando nas relações

$$\begin{aligned}\beta + B_2 &= D_2, \\ 2B_2 + \beta + 2B_1 + 2 + C &= D_1, \\ B_1 + \alpha + 2C &= 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

As condições(3.10) e (3.11) são satisfeitas se tivermos as relações

$$\begin{aligned}\alpha = 2C = 2B_2 = B_1 \\ D_2 = D_1 + 1,\end{aligned}\tag{3.13}$$

o que não fixa completamente as relações de quomutação entre as diversas variáveis do problema, visto que temos à nossa disposição dois coeficientes. Escolhendo $\alpha = D_2 = 1$, todos os outros coeficientes que aparecem em (3.13) ficam determinados. Com esta

escolha, a translação no q -superespaço fica

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta + \varepsilon \\ t' &= t + q\theta^2\varepsilon\end{aligned}\tag{3.14}$$

Enquanto o q -supercampo se torna

$$X(t) = x + q^2\theta\psi^{(2)} + q^2\theta^2\psi^{(1)}\tag{3.15}$$

O gerador da q -SUSY

$$Q = q\theta^2\partial_t + \partial_\theta\tag{3.16}$$

gera a transformação em X

$$\Delta X = q\varepsilon\theta^2\dot{x} + q^2\varepsilon\psi^{(2)} - q\varepsilon\theta\psi^{(1)}\tag{3.17}$$

cujas variações em componentes serão

$$\begin{aligned}\Delta x &= q^2\varepsilon\psi^{(2)} \\ \Delta\psi^{(1)} &= \varepsilon\dot{x} \\ \Delta\psi^{(2)} &= q\varepsilon\psi^{(1)}\end{aligned}\tag{3.18}$$

com as quomutações

$$\begin{aligned}\varepsilon\theta &= q^2\theta\varepsilon \\ \theta\psi^{(j)} &= q^j\psi^{(j)}\theta \\ \varepsilon\psi^{(j)} &= q^j\psi^{(j)}\varepsilon \\ \psi^{(1)}\psi^{(2)} &= q^2\psi^{(2)}\psi^{(1)}\end{aligned}\tag{3.19}$$

A última equação é uma escolha, não uma imposição, e recupera as mesmas relações de

quomutação utilizadas no capítulo anterior.

Notemos que, apesar das transformações acima possuírem a mesma estrutura que as apresentadas no capítulo 2 (confira eq.(1.15)), temos a diferença que aqui não aparece o fator tipo cociclo para corrigir a estatística das coordenadas. De fato, embora todas as variações sejam reais, a variação de uma coordenada não se comporta em geral como ela própria sob relações de quomutação com as outras variáveis.

Tendo escrito as transformações no q -superespaço e a variação do q -supercampo, nosso próximo passo será escrever o operador derivada covariante, ou seja, um operador que obedeça às relações

$$\begin{aligned} [D, Q]_q &= 0, \\ D(\Delta X) &= \Delta(DX). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Poderíamos tentar determinar um operador envolvendo os mesmos operadores diferenciais que aparecem no gerador da q -SUSY, ou seja, tomarmos $D = q^\alpha \theta^2 \partial_t + a q^\beta \partial_\theta$, ($\alpha, \beta = 1, 2, 3; a \in C$). Entretanto, podemos mostrar que não é possível encontrar um operador desta forma que quomute com Q . O único operador com a forma acima que obedece à segunda das eq.3.20) é o próprio gerador da q -susy, e este naturalmente não tem como obedecer à primeira das equações (3.20).

Para que possamos construir a derivada covariante vamos lançar mão do fato que quando definimos as variáveis de Paragrassmann, definimos dois operadores diferenciais diferentes, ∂_θ e δ_θ . Utilizando este segundo operador diferencial podemos mostrar que o operador

$$D = \theta^2 \partial_t + q \delta_\theta \tag{3.21}$$

satisfaz as condições (3.20).

Da mesma forma que na supersimetria, os campos componentes podem ser definidos projetando o supercampo em diferentes setores utilizando-se a derivada covariante e

tomando-se $\theta = 0$

$$\begin{aligned} X|_{\theta=0} &= x, \\ DX|_{\theta=0} &= \psi^{(2)}, \\ D^2 X|_{\theta=0} &= -\psi^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

De agora em diante, deixaremos de indicar explicitamente a condição $\theta = 0$.

Também é fácil observar as seguintes relações entre D e Q

$$\begin{aligned} D \cdot | &= q^2 Q \cdot |, \\ D^2 \cdot | &= q Q^2 \cdot |, \\ D^3 \cdot | &= -\partial_t \cdot |. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Além do q -supercampo bosônico definido anteriormente, podemos também definir q -supercampos pertencentes aos setores um e dois, que farão o mesmo papel que o supercampo fermiônico na supersimetria. Suas expansões em θ serão

$$\Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)} + \theta A + q\theta^2 \lambda^{(2)}, \tag{3.24}$$

e

$$\Xi^{(2)}(t) = \xi^{(2)} + q\theta\xi^{(1)} + \theta^2 F, \tag{3.25}$$

onde os superscritos indicam o setor ao qual o campo pertence, e as relações de quomutação das componentes quermiônicas com ϵ e θ são as mesmas que as dadas em (3.19), trocando-se $\psi^{(1)}$ e $\psi^{(2)}$ pelos respectivos campos do mesmo setor. Estes dois q -supercampos são reais.

A dimensão do q -supercampo $\Xi^{(2)}$ será tomada como sendo $\frac{2}{3}$, fazendo com que $[\xi^{(2)}] = [\psi^{(2)}] = \frac{2}{3}$, e com esta escolha notamos que sua componente bosônica F é adimensional. Esta é uma indicação de um fato que veremos em breve, que F é uma coordenada auxiliar.

Já a dimensão do q -supercampo $\Lambda^{(1)}$ tem que ser olhada com um pouco de cuidado, pois se a escolhessemos como sendo $\frac{1}{3}$, teríamos uma dimensão de massa negativa para o campo componente $\lambda^{(2)}$ ($\lambda^{(2)}$ teria que ter dimensão $\frac{-1}{3}$, devido à presença do termo quadrático em θ). No contexto de mecânica clássica que estamos considerando aqui, isto poderia não ser visto como um problema real. Entretanto, dimensões negativas não são aceitáveis em uma teoria de campos. Já se preparando para uma possível formulação de teoria de campos da q -supersimetria, vamos tomar todas as coordenadas com dimensão positiva. O termo mais alto na expansão de $\Lambda^{(1)}$ é um campo do setor dois, e campos deste setor que definimos até agora possuem dimensão $\frac{2}{3}$. O mesmo pode ser obtido aqui se tomarmos a dimensão de $\Lambda^{(1)}$ igual a $\frac{4}{3}$. Esta escolha, porém, fará com que as equações de movimento para seus componentes quermiônicos sejam diferentes que a dos outros q -supercampos, como veremos na próxima seção.

A variação q -supersimétrica destes supercampos pode ser determinada através da atuação do gerador Q . Comparando as potências em θ , podemos determinar as transformações das coordenadas componentes, que serão, para as de $\Lambda^{(1)}$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda^{(1)} &= \varepsilon A, \\ \Delta A &= -q^2\varepsilon\lambda^{(2)}, \\ \Delta\lambda^{(2)} &= q\varepsilon\dot{\lambda}^{(1)},\end{aligned}\tag{3.26}$$

enquanto que para as de $\Xi^{(2)}$ serão

$$\begin{aligned}\Delta\xi^{(2)} &= q\varepsilon\xi^{(1)}, \\ \Delta\xi^{(1)} &= \varepsilon F, \\ \Delta F &= q^2\varepsilon\dot{\xi}^{(2)},\end{aligned}\tag{3.27}$$

3.2 Superações

Nosso objetivo nesta seção é fazer uma discussão geral sobre ações para os q -supercampos introduzidos anteriormente bem como dar alguns exemplos, em particular determinar ações cujo setor comutante descrevam uma partícula livre e um oscilador harmônico.

Em geral, uma ação para um q -supercampo genérico Φ deve ser da forma

$$S = \int dt d\theta \mathcal{P}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, D^2\Phi), \quad (3.28)$$

onde o polinômio \mathcal{P} em Φ e suas derivadas covariantes deve comportar-se sob relações de comutação como θ^2 , pertencendo ao setor dois, já que $\int d\theta = \partial_\theta^2$, e S é escalar. Como a medida de integração tem dimensão de massa $\frac{-1}{3}$ e no sistema natural de unidades ($c = \hbar = 1$) S deve ser adimensional, a dimensão de \mathcal{P} deve ser $\frac{1}{3}$.

Se compararmos a expressão para a derivada covariante e a integração em θ , podemos notar a relação

$$\int d\theta = q^2 D^2 |, \quad (3.29)$$

fazendo com que a integral em θ possa ser escrita apenas em função da derivada covariante.

Vamos agora fazer a seguinte transformação na ação

$$\Delta S = \int dt d\theta \Delta \mathcal{P}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, D^2\Phi), \quad (3.30)$$

já que o Jacobiano da transformação deve ser igual a um, visto que a transformação em θ independe de t . Colocando na eq.(3.29) e usando (3.5), chegamos à conclusão que S se transforma em uma derivada total

$$\Delta S = -q\epsilon \int dt \partial_t \mathcal{P} |. \quad (3.31)$$

e as transformações dadas pela eq.(3.1) induzem uma simetria da ação.

Portanto, para qualquer polinômio \mathcal{P} , vemos que as transformações (3.1) induzem uma

simetria da ação. Resta, naturalmente, determinarmos quais são as possíveis ações para os supercampos introduzidos anteriormente.

Combinando-se as derivadas ∂_t e D com os q -supercampos X , Λ e Ξ , podemos formar os seguintes supercampos:

setor zero: $X, \dot{X}, D\Lambda, D^2\Xi$

setor um: $\Lambda, \dot{\Lambda}, D^2X, D\Xi$

setor dois: $\Xi, \dot{\Xi}, DX, D^2\Lambda$

Para construirmos ações livres (ou seja, quadráticas nas coordenadas), qualquer combinação de um q -supercampo do setor zero com um do setor dois, ou entre dois do setor um é, em princípio, possível. Pode ser necessário, entretanto, acrescentar uma constante multiplicativa para que a ação tenha a dimensão correta.

Entre todas estas possíveis ações, vamos escolher alguns exemplos para analisá-los em mais detalhe. Iniciemos com uma ação envolvendo o q -supercampo bosônico X . A ação livre para este campo é

$$S_X = q^2 \frac{m}{2} \int dt d\theta (D^2 X)(D^2 X), \quad (3.32)$$

onde m é um parâmetro massivo comutante. Calculando-se explicitamente a integral em θ , ou utilizando-se a eq.(3.29), podemos ver que esta ação tem a seguinte forma em componentes

$$S_X = m \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - 2q \dot{\psi}^{(2)} \psi^{(1)} \right). \quad (3.33)$$

que é a ação que discutimos no capítulo 2.

A equação de movimento das componentes, $\ddot{x} = \dot{\psi}^{(j)} = 0$ ($j = 1, 2$), pode ser escrita em termos do q -supercampo como

$$D\dot{X} = 0, \quad (3.34)$$

Esta é de fato a equação de movimento esperada para a ação (3.32), $D^2(D^2 X) = 0$. Como veremos a seguir, a equação de movimento para cada uma das ações apresentadas é

aquela que um cálculo variacional *naive* nos daria. Uma formulação rigorosa deste cálculo, porém, apresenta uma série de dificuldades, e não existe até o momento.

Se calcularmos a variação q -supersimétrica da eq.(3.32), obtemos

$$\Delta S_X = q\epsilon \int dt \frac{d\psi^{(1)2}}{dt} \quad (3.35)$$

que está de acordo com a variação da ação em componentes mostrada no capítulo 2.

Uma outra ação que nos dá uma ação semelhante à esta é

$$S = \int \dot{X}DX \quad (3.36)$$

que se torna em componentes

$$S_X = \frac{m}{2} \int dt (\dot{x}^2 - q\dot{\psi}^{(2)}\psi^{(1)} + q\dot{\psi}^{(1)}\psi^{(2)}) \quad (3.37)$$

a qual, a menos de uma derivada total na parte quermiônica, é a mesma que a anterior. Naturalmente, as equações de movimento obtidas serão as mesmas em ambos os casos.

A ação quadrática para o q -supercampo $\Lambda^{(1)}$ é

$$S_\Lambda = -\frac{m}{2} \int dt d\theta (\dot{\Lambda}^{(1)})^2. \quad (3.38)$$

Por conveniência, o parâmetro de massa foi tomada como sendo o mesmo que na ação para X . Em componentes, esta ação é

$$S_\Lambda = \frac{m}{2} \int dt (\dot{A}^2 + 2q \dot{\lambda}^{(2)} \dot{\lambda}^{(1)}). \quad (3.39)$$

É interessante notar que a equação de movimento para $\Lambda^{(1)}$,

$$\ddot{\Lambda}^{(1)} = 0, \quad (3.40)$$

se escreve em componentes como $\ddot{A} = \ddot{\lambda}^{(i)} = 0$. Logo este q -supercampo também representa uma partícula livre e suas coordenadas q -supersimétricas, mas a equação de movimento obedecida pelas últimas é diferente, sendo de segunda ordem no tempo, ao contrário das coordenadas $\psi^{(j)}$, que era de primeira ordem. A variação de S_A é

$$\Delta S_A = \varepsilon \int dt \frac{d(\dot{\Lambda}^{(1)})^2}{dt}. \quad (3.41)$$

Passemos agora a considerar a ação quadrática para o q -supercampo $\Xi^{(2)}$. Ela é

$$S_{\Xi} = q^2 m \int dt d\theta (D\Xi^{(2)})^2. \quad (3.42)$$

Em campos componentes, a ação se torna

$$S_{\Xi} = \int dt (2q \xi^{(2)} \dot{\xi}^{(1)} - F^2). \quad (3.43)$$

A equação de movimento para (3.42) é

$$D^2 \Xi^{(2)} = 0, \quad (3.44)$$

implicando $F = \xi^{(j)} = 0$. Assim, como havíamos antecipado na seção anterior, a componente bosônica F é uma coordenada auxiliar. A variação de S_{Ξ} é

$$\Delta S_{\Xi} = -\epsilon L^{(2)} \int dt \partial_t \xi^{(1)2}, \quad (3.45)$$

Os supercampos X e $\Xi^{(2)}$ podem ter uma ação quadrática com um termo mixto

$$S = m\omega \int dt d\theta X \Xi^{(2)}, \quad (3.46)$$

onde ω tem uma dimensão de massa⁻¹, que é escrita em componentes como

$$S = m\omega \int dt \left(Fx + q^2 \psi^{(1)} \xi^{(2)} + q \psi^{(2)} \xi^{(1)} \right). \quad (3.47)$$

Se somarmos as ações (3.32), (3.42) e (3.46),

$$S_{OH} = S_X + S_\Xi + S_{X\Xi}, \quad (3.48)$$

vemos que sua parte bosônica será

$$S_{OH} = \int dt m \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} F^2 + \omega Fx \right). \quad (3.49)$$

Calculando a equação de movimento do campo auxiliar F e reinserindo na ação ela se torna

$$S_x = \int dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega x^2 \right], \quad (3.50)$$

a qual é a ação para o oscilador harmônico.

Capítulo 4

Construção Aniônica para a Álgebra $sl_{(q,s)}(2)$

4.1 Anions no Contínuo

Anions são partículas, que existem apenas em duas dimensões, cuja estatística é arbitrária. Como veremos com um pouco mais de detalhes a seguir, isto ocorre porque o espaço de configuração de um sistema de N partículas é infinitamente conexo em duas dimensões ($d = 2$) mas duplamente conexo em dimensões superiores, ($d > 2$), gerando neste caso apenas as estatísticas bosônica e fermiônica.

A noção de estatística está relacionada com o sinal que uma função de onda de N partículas idênticas ganha quando quaisquer duas partículas têm a posição trocada entre si. Se tomarmos duas partículas idênticas e movermos uma em torno da outra de um ângulo ϕ teremos

$$\psi'(1, 2) = e^{i\nu\phi}\psi(1, 2), \quad (4.1)$$

onde a fase $e^{i\nu\phi}$ é a estatística da partícula e seu significado é melhor percebido se trocarmos as partículas de posição movendo a segunda de um ângulo π em torno da primeira e depois transladando o sistema como um todo. Notemos que no plano ($d = 2$) existem duas maneiras independentes de movermos 2 em torno de 1, no sentido horário ($-\pi$) ou

anti-horário ($+\pi$).

Porém, se $d > 2$, as duas situações são idênticas, já que podemos mover a trajetória da partícula 2 para "fora" do plano. Sendo as duas situações idênticas, teremos que identificar as fases,

$$e^{i\nu\phi} = e^{-i\nu\phi}, \quad (4.2)$$

mostrando que $\nu = 0$ ou $\nu = 1$ (módulo 2), levando a uma função que é ou totalmente simétrica ($\nu = 0$) ou anti-simétrica ($\nu = 1$).

Esta diferença nos mostra uma das características mais importantes da estatística em duas dimensões: não basta apenas indicarmos quais os estados inicial e final do sistema, mas temos que informar também qual foi o modo pelo qual o sistema foi levado de uma configuração para outra.

Do ponto de vista da topologia do espaço de configuração, a diferença se $d = 2$ ou $d > 2$ pode ser vista da seguinte forma. O espaço de configuração de um sistema de N partículas idênticas em d dimensões é

$$M^d_N = \frac{(R^d)^N - \Delta}{S_N}, \quad (4.3)$$

onde Δ é o conjunto de todos os pontos de $(R^d)^N$ com pelo menos duas coordenadas iguais, e S_N é o grupo de permutação de N objetos. O motivo pelo qual retiramos Δ é que não permitiremos que duas partículas ocupem a mesma posição, independente de sua estatística. A não exclusão de Δ levaria apenas à estatística bosônica [36]. Retiramos também S_N porque, sendo as partículas idênticas, duas configurações que difiram somente por uma permutação devem ser identificadas como o mesmo estado físico. A topologia de M^d_N depende do número de dimensões considerado. O grupo fundamental π_1 de M^d_N é, para $d > 2$, o grupo de permutação S_N , mas se $d = 2$ ele se torna o grupo de trança (*braid*) B_N . Isto significa que enquanto bósons e férmions são as representações (abelianas) do grupo de permutação, anions são a representação do grupo de trança.

Para entendermos o surgimento do grupo de trança mais formalmente, vamos calcular

a amplitude de probabilidade para que um sistema de N partículas evolua de uma dada configuração q num tempo t para a mesma configuração num tempo t' posterior (um *loop* no espaço de configuração) [36]. De acordo com o formalismo de integral de trajetória para a mecânica quântica, esta amplitude é calculada através da integral sobre todos os caminhos fechados de M^d_N que contenham o ponto q ,

$$K(q, t', t) = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau \mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau))}, \quad (4.4)$$

onde $\mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau))$ é a Lagrangiana do sistema. Dois *loops* serão considerados homotopicamente equivalentes (ou simplesmente homotópicos) se existir uma deformação contínua que leve um no outro. Podemos então agrupar estes *loops* por classes de homotopia, e o conjunto de todas as classes é o grupo fundamental π_1 . Cada elemento de π_1 é o conjunto de todos os *loops* homotópicos.

Chamando de α cada elemento do grupo fundamental, a integral (4.4) pode ser calculada somando-se sobre α e integrando sobre os elementos de cada classe,

$$K(q, t', t) = \sum_{\alpha \in \pi_1(M^d_N)} \chi(\alpha) \int Dq_\alpha e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau \mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau))}. \quad (4.5)$$

Os coeficientes $\chi(\alpha)$ são os pesos para cada classe de homotopia, e estes em principio podem ser diferentes para cada classe (de fato, se tomássemos o mesmo peso para todas as classes teríamos apenas a estatística bosônica [36]). Para que possamos interpretar $K(q, t', t)$ como amplitude de probabilidade, ela deve obedecer à regra de composição

$$K(q'', t''; q, t) = \int dt' K(q'', t''; q', t') K(q', t'; q, t), \quad (4.6)$$

implicando na condição para $\chi(\alpha)$

$$\chi(\alpha_1 \alpha_2) = \chi(\alpha_1) \chi(\alpha_2), \quad (4.7)$$

ou seja, $\chi(\alpha)$ deve ser uma representação unidimensional do grupo fundamental π_1 . Para

$d = 2$, $\pi_1(M^2_N) = B_N$.

O grupo de trança (infinito) B_N é gerado por $N - 1$ elementos $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N-1})$. O elemento σ_I representa a troca da partícula que está na posição I pela que está na posição $I + 1$ e vice-versa, numa dada orientação, que aqui fixaremos como sendo a anti-horária, mantendo todas as demais partículas nas mesmas posições.

O elemento inverso σ_I^{-1} é aquele que troca as mesmas duas partículas, mas na orientação contrária a de σ_I . Os elementos de $\pi_1(M^2_N)$ obedecem às relações

$$\sigma_I \sigma_{I+1} \sigma_I = \sigma_{I+1} \sigma_I \sigma_{I+1}, \quad (4.8)$$

para $I = 1, 2, \dots, N - 2$ e

$$\sigma_I \sigma_J = \sigma_J \sigma_I, \quad (4.9)$$

para $|I - J| > 1$.

A representação unidimensional de B_N é dada por

$$\chi(\sigma_I) = e^{-i\nu\pi}, \quad (4.10)$$

onde ν é um número real, $0 \leq \nu < 2$. Para um elemento genérico α de B_N teremos

$$\chi(\alpha) = e^{-i\nu\pi P_\alpha}, \quad (4.11)$$

onde P_α é a diferença entre o número de mudanças no sentido anti-horário e horário.

Notemos que $\sigma_I^2 \neq 1$. Caso tivéssemos a igualdade, os únicos valores possíveis para ν seriam $\nu = 0$ ou $\nu = 1$, e teríamos o grupo de permutação.

Com a descrição acima das representações do grupo B_N , podemos escrever para a amplitude de probabilidade

$$K(q, t', t) = \sum_{\alpha \in \pi_1(M^d_N)} e^{-i\nu\pi P_\alpha} \int Dq_\alpha e^{i\hbar \int d\tau \mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau))}. \quad (4.12)$$

Para escrevermos esta expressão da forma que mais nos interessa, vamos introduzir a função $\Theta_{IJ}(t)$, o ângulo com que a partícula I vê a partícula J em relação a uma dada linha de referência, digamos a linha que nasce na posição da partícula I prolongando-se até o infinito na coordenada x do plano cartesiano (x, y) , no instante t . Pode-se mostrar que

$$\sum_{I < J} \Theta_{IJ}(t') - \sum_{I < J} \Theta_{IJ}(t) = n\pi, \quad (4.13)$$

onde n é um inteiro. Este resultado está de acordo com o caso de duas partículas que vimos anteriormente. O significado deste resultado é que para sairmos e retornarmos à mesma configuração é necessário um número inteiro de trocas de duas partículas, e cada uma delas contribui com $\pm\pi$, dependendo do sentido em que é feita.

Quando movemos a partícula K em torno da $K + 1$ no sentido anti-horário, todos os ângulos permanecem os mesmos, com exceção de Θ_{KK+1} , que muda por um fator π , nos permitindo escrever

$$\chi(\sigma_K) = e^{-i\nu\pi} = e^{-i\nu\Theta_{KK+1}} = e^{-i\nu \sum_{I < J} \Delta\Theta_{IJ}^K}, \quad (4.14)$$

com

$$\Delta\Theta_{IJ}^K = \Theta_{IJ}^K(t') - \Theta_{IJ}^K(t) = \pi\delta_{I,k}\delta_{J,K+1}. \quad (4.15)$$

Generalizando este resultado podemos escrever

$$\chi(\alpha) = e^{-i\nu \sum_{I < J} (\Theta_{IJ}^\alpha(t') - \Theta_{IJ}^\alpha(t))}, \quad (4.16)$$

ou seja

$$\chi(\alpha) = e^{-i\nu \int_t^{t'} d\tau \frac{d}{d\tau} \Theta_{IJ}^\alpha(\tau)}. \quad (4.17)$$

Isto nos permite escrever para a amplitude de probabilidade

$$K(q, t', t) = \sum_{\alpha \in \pi_1(M^{d_N})} \int Dq_\alpha e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau [\mathcal{L}(q(\tau), \dot{q}(\tau)) - \hbar\nu \frac{d}{d\tau} \Theta_{IJ}^\alpha(\tau)]}. \quad (4.18)$$

Agora, todas as classes α possuem o mesmo peso (um), típica situação em que estamos considerando partículas bosônicas. Entretanto, a Lagrangiana do sistema não é mais apenas a inicial, mas sim

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L} - \hbar\nu \frac{d}{d\tau} \Theta^\alpha_{IJ}, \quad (4.19)$$

onde o segundo termo não contribui para as equações de movimento e outras propriedades dinâmicas locais, por ser uma derivada total.

Se escrevermos

$$\nu' = 1 + \nu, \quad (4.20)$$

teremos

$$\mathcal{L}_F = \mathcal{L} - \hbar\nu' \frac{d}{d\tau} \Theta^\alpha_{IJ}, \quad (4.21)$$

e a amplitude de probabilidade fica dada por

$$K(q, t', t) = \sum_{\alpha \in \pi_1(M^d_N)} (-1)^{P_\alpha} \int Dq_\alpha e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau \mathcal{L}_F}, \quad (4.22)$$

e agora como cada classe contribui com um sinal de acordo com a permutação estamos tratando de férmions. Concluindo, vemos que anions podem ser tratados como partículas que localmente se comportam como bósons ou férmions, mas cuja ação possui um termo topológico, cujo efeito (global) é modificar a estatística para aquela aniônica.

Vamos mostrar agora como podemos realizar esta interação estatística através da introdução de um campo de Chern-Simons. Iniciamos tomando um sistema de N férmions não relativísticos de massa m e carga e num plano. Chamando suas coordenadas de \vec{r}_I e suas velocidades \vec{v}_I , tomamos a ação deste sistema como sendo

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_I^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right), \quad (4.23)$$

com $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ um potencial dado. Este sistema possui uma corrente conservada j^α

cujas componentes são

$$j^0(\vec{x}, t) \equiv \rho(\vec{x}, t) = \sum_I \delta(\vec{x} - \vec{r}_I) \quad (4.24)$$

e

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_I \vec{v}_I(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}_I). \quad (4.25)$$

Acoplando esta corrente minimamente com um campo de calibre A_α

$$S_{int} = \int d^3x j^\alpha A_\alpha, \quad (4.26)$$

e tomando como ação para A_α a ação de Chern-Simons

$$S_{CS} = \frac{\kappa}{2} \int d^3x \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma, \quad (4.27)$$

a ação total $S = S_{mat} + S_{int} + S_{CS}$ é escrita como

$$S = \int dt \left[\left(\sum_I \frac{m}{2} \dot{\vec{v}}_I^2 + \frac{e}{c} \dot{\vec{v}}_I \vec{A}(\vec{r}_I, t) - \frac{e}{c} A_0(\vec{r}_I, t) \right) + \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{2} \int d^3x \left(\vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{A}(\vec{x}, t) + A_0(\vec{x}, t) B(\vec{x}, t) \right) \right], \quad (4.28)$$

onde \vec{B} e \vec{E} são os campos magnético e elétrico respectivamente.

Variando S em relação a A_0 , obtemos a relação

$$B = -\frac{e}{\kappa} \rho, \quad (4.29)$$

mostrando que cada partícula de carga e carrega também um fluxo magnético.

Fixando o calibre por $A_0 = 0$ e $\partial_i A^i = 0$, podemos resolver (4.29) para as componentes do potencial $A_i(\vec{x})$

$$A^i(\vec{x}) = \sum_I A^I(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) |_{\vec{r}_I = \vec{x}}, \quad (4.30)$$

com

$$A^I_I(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \frac{-e}{2\pi\kappa} \sum_{J \neq I} \epsilon^{ij} \frac{r_{jI} - r_{jJ}}{|\vec{r}_I - \vec{r}_J|^2}. \quad (4.31)$$

com ϵ^{ij} o tensor completamente antissimétrico, $\epsilon^{12} = 1$. Esta expressão pode ser reescrita como

$$A^I_I(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t)) = \frac{e}{2\pi\kappa} \frac{\partial}{\partial r_{iI}} \sum_{J \neq I} \Theta_{IJ}, \quad (4.32)$$

com

$$\Theta_{IJ} = \arctan \left(\frac{r_{2I} - r_{2J}}{r_{1I} - r_{1J}} \right). \quad (4.33)$$

Com isto, S fica escrita como

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_I^2 - \frac{e^2}{2\pi\kappa} \sum_I (\vec{v}_I^i - \vec{v}_J^i) \frac{\partial \Theta_{IJ}}{\partial r_{iI}} \right), \quad (4.34)$$

e, se observarmos que o termo que aparece na somatória é a derivada temporal da função Θ_{IJ} , podemos escrever para S

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_I^2 - \frac{e^2}{2\pi\kappa} \frac{d\Theta_{IJ}}{dt} \right), \quad (4.35)$$

que é da mesma forma que (4.21), com a identificação

$$\nu' = \frac{e^2}{2\pi\kappa} \quad (4.36)$$

Os mesmos resultados podem ser obtidos se considerarmos um campo de matéria fermiônico $\psi(\mathbf{x}, t)$ de massa m e carga e acoplado a um campo de Chern-Simons com ação dada por

$$S = \int d^3x \left[i\psi^\dagger D_0 \psi + \frac{i}{2m} \psi^\dagger (D_1^2 + D_2^2) \psi + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha \partial_\beta A_\gamma \right], \quad (4.37)$$

onde $D_\alpha = \partial_\alpha + ieA_\alpha$ é a derivada covariante, que fornece o acoplamento mínimo entre o

campo A_α e a corrente conservada j^α de componentes

$$j^0 = \rho = \psi^\dagger \psi, \quad (4.38)$$

e

$$j^i = \frac{i}{2m} \left(\psi^\dagger D^i \psi - (D^i \psi)^\dagger \psi \right). \quad (4.39)$$

Variando S com respeito ao potencial A_α obtemos as equações

$$\epsilon^{\alpha\beta\delta} \partial_\beta A_\gamma = \frac{e}{\kappa} j^\alpha \quad (4.40)$$

e tomando a componente $\alpha = 0$ desta equação obtemos a relação

$$B = -\frac{e}{\kappa} \rho \quad (4.41)$$

a qual tem a mesma forma de (4.29). Impondo a condição $\partial_i A^i = 0$, podemos resolver (4.41) e determinarmos as componentes do potencial $A^i(x)$ como sendo

$$A^i(\mathbf{x}) = \frac{e}{2\pi\kappa} \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^2y \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}), \quad (4.42)$$

onde a função ângulo Θ é dada por

$$\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \arctan \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \quad (4.43)$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e a mesma decomposição em componentes para \mathbf{y} . Então neste caso as componentes espaciais do potencial A_α são um puro calibre. Notemos que a função $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ introduzida acima é exatamente a definição usual de ângulo entre os pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} , e sendo assim é uma função multivalorada. Para que ela seja univalorada, torna-se necessário um corte no plano. Quando necessário, consideraremos que este corte está no eixo x negativo, e que o ângulo é medido a partir do eixo x positivo. Com isto, teremos $-\pi < \Theta < \pi$, com a relação

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Theta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \pi \operatorname{sgn}(x_2, y_2) & \text{se } x_2 \neq y_2, \\ \pi \operatorname{sgn}(x_1, y_1) & \text{se } x_2 = y_2. \end{cases} / \quad (4.44)$$

Vamos mostrar agora que a componente temporal do campo de calibre também é um puro gauge. Para isto, retornamos a (4.40) e tomamos as componentes espaciais, que são

$$\partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\frac{e}{\kappa} \epsilon_{ik} j^k, \quad (4.45)$$

e aplicando ∂_i e usando que $\partial_i A^i = 0$ podemos escrever para A_0

$$A_0(x) = -\frac{e}{2\pi\kappa} \int d^2 y \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_0 \rho(y). \quad (4.46)$$

Podemos escrever as equações (4.42) e (4.46) de forma covariante,

$$A_\alpha = \partial_\beta \Lambda, \quad (4.47)$$

com

$$\Lambda(x) = \frac{e}{2\pi\kappa} \int d^2 y \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(y). \quad (4.48)$$

Dado que a função ângulo $\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ é multivalorada, o mesmo ocorre com $\Lambda(x)$.

Já que o campo de calibre A_α é um puro gauge, podemos remove-lo completamente via a transformação

$$A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \Lambda \quad (4.49)$$

que faz com que o campo de matéria ψ se transforme como

$$\psi'(x) = e^{ie\Lambda(x)} \psi(x). \quad (4.50)$$

Com esta transformação de calibre, a ação se transforma em

$$S' = \int d^3 x \left[i\psi'^\dagger \partial_0 \psi' + \frac{1}{2m} \psi'^\dagger (\partial_1 + \partial_2) \psi' \right], \quad (4.51)$$

que nada mais é que a ação para uma partícula livre. Entretanto, a presença do campo de Chern-Simons pode ser notada quando analisamos quais são as relações de comutação entre o campo de matéria ψ' e seu conjugado. Para observarmos este efeito, tomemos as relações de anticomutação para os campos de matéria originais

$$\begin{aligned}\{\psi^\dagger(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})\} &= 0, \\ \{\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y})\} &= 0, \\ \{\psi^\dagger(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{4.52}$$

Usando (4.50) e a definição de $\Lambda(\mathbf{x})$, podemos determinar as relações equivalentes para os campos após a transformação de calibre, por exemplo

$$\psi'(\mathbf{x})\psi'(\mathbf{y}) = -e^{\nu\Theta(\mathbf{x}-\mathbf{y})-\Theta(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\psi'(\mathbf{y})\psi'(\mathbf{x}).\tag{4.53}$$

Se nos recordarmos da relação (4.44), e usando

$$q = e^{ie\pi},\tag{4.54}$$

podemos escrever

$$\psi'(\mathbf{x})\psi'(\mathbf{y}) = -q^{-1}\psi'(\mathbf{y})\psi'(\mathbf{x}),\tag{4.55}$$

para $x_2 > y_2$ ou $x_2 = y_2$ e $x_1 > y_1$. Caso contrário, obtemos a relação com a troca de q^{-1} por q .

Em conclusão, vemos que o efeito da introdução do campo de Chern-Simons é mudar a estatística fermiônica do campo de matéria para uma estatística aniônica.

4.2 Função Ângulo na Rêde e Osciladores Aniónicos

Nesta seção, vamos rever a construção de osciladores aniônicos definidos em uma rede bi-dimensional quadrada Ω cujo espaçamento é um, como foi feito na ref.[17], que utilizaremos nas próximas seções.

Osciladores aniônicos são objetos intrinsecamente bi-dimensionais [38, 42] que interpolam entre osciladores fermiônicos e bosônicos, construídos em uma rede quadrada Ω através de uma construção de Jordan-Wigner [43] que neste caso transmuta osciladores fermiônicos em aniônicos

Vamos começar retornando à função ângulo $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ do plano (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , com $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definida na seção anterior. Formalmente, ela pode ser definida a partir do operador Laplaciano

$$\partial_i \partial_i G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.56)$$

cuja solução é dada por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.57)$$

Se definirmos as funções

$$f^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\epsilon^{ij} \partial_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.58)$$

onde $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$, a função $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pode ser definida como a solução da equação

$$\partial_i \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.59)$$

De (4.58) e (4.59), é evidente que $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisfaz à equação

$$\epsilon^{ij} \partial_i \partial_j \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.60)$$

Uma possível solução para esta equação é

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}\right). \quad (4.61)$$

Deste resultado é que vem o nome da função ângulo, já que a fórmula acima é exatamente a definição de ângulo em duas dimensões (tangente = cateto oposto / cateto adjacente). Entretanto, esta solução é simétrica na troca $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y}$. Ela também é multivalorada, e torna-se necessário, para defini-la sem ambiguidades, escolher um corte para ela (por exemplo, $-\pi < \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \pi$).

Vamos procurar agora construir esta mesma estrutura em uma rede quadrada Ω de espaçamento um. O primeiro ponto a ser ressaltado é o fato que, na rede, podemos definir duas derivadas diferentes, uma *para a direita* e outra *para a esquerda*

$$\begin{aligned} \partial_i f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} + \vec{i}) - f(\mathbf{x}) \\ \tilde{\partial}_i f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x} - \vec{i}), \end{aligned} \quad (4.62)$$

onde \vec{i} é o versor na direção i ($i = 1, 2$, neste caso). Na rede, o operador Laplaciano é dado pelo produto destas duas derivadas, de modo que a função $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ fica definida como aquela que obedece à equação

$$\partial_i \tilde{\partial}_i G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2\pi \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.63)$$

onde $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ agora é a função delta na rede ($\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$ se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, anulando-se caso contrário). Seguindo o procedimento anterior, definimos a função

$$f^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\epsilon^{ij} \partial_j G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.64)$$

Uma solução para esta equação é

$$f^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, \mathbf{x} + \hat{i}). \quad (4.65)$$

Nesta equação \mathbf{y}^* é um ponto da rede dual $\tilde{\Omega}$, cujas componentes são dadas por $\mathbf{y}^* = (y_1 + 1/2, y_2 + 1/2)$. Portanto, o ângulo $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*, \mathbf{x} + \hat{i})$, é aquele pelo qual a ligação (orientada) entre os pontos \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \hat{i}$ é vista pelo ponto \mathbf{y}^* .

Em cada ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ da rede Ω vamos associar um corte γ_x , feito com *bonds* da rede dual $\tilde{\Omega}$ de menos infinito até $x^* = x + o^*$ ao longo do eixo horizontal x , onde $o^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é a origem da rede dual $\tilde{\Omega}$. Denotaremos por \mathbf{x}_γ o ponto \mathbf{x} e seu corte associado γ_x .

A função ângulo entre dois pontos diferentes \mathbf{x} e \mathbf{y} que pertencem à rede Ω é denotada por $\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e é definida como o ângulo do ponto \mathbf{x} medido a partir do ponto \mathbf{y}^* , que pertence à rede dual $\tilde{\Omega}$ com respeito a uma linha paralela ao eixo positivo x .

Pode-se mostrar que [17]

$$\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Theta_{\gamma_y}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{cases} \pi \operatorname{sgn}(x_2, y_2) & \text{se } x_2 \neq y_2 \\ \pi \operatorname{sgn}(x_1, y_1) & \text{se } x_2 = y_2. \end{cases} \quad (4.66)$$

De fato, para chegarmos a esse resultado é necessário que desprezemos um termo que depende da distancia entre os pontos \mathbf{x} e \mathbf{y} , que se anula quando eles estão muito distantes. A solução deste problema que está diretamente relacionado com o fato de estarmos trabalhando na rede é considerar que a rede Ω esteja inserida em uma rede Λ cujo espaçamento seja muito menor que um (o espaçamento de Ω). Com isto, qualquer quantidade definida em Ω é vista como restrição de alguma quantidade definida em Λ . No limite em que o espaçamento de Λ tende a zero, todos os pontos de Ω tornam-se, do ponto de vista da rede Λ , muito distantes entre si, e o resultado acima é obtido. Referimos a [17] para um discussão mais detalhada deste ponto.

A eq.(4.66) pode ser usada para introduzir em Ω um ordenamento entre seus pontos, que será bastante útil ao tratarmos com os osciladores aniônicos. Escolhendo-se o sinal

positivo na eq.(4.66) define-se

$$\mathbf{x} > \mathbf{y} = \begin{cases} x_2 > y_2 \\ x_2 = y_2, x_1 > y_1, \end{cases} \quad (4.67)$$

e com esta escolha a eq(4.66) torna-se

$$\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Theta_{\gamma_y}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \pi \quad \text{se } \mathbf{x} > \mathbf{y}. \quad (4.68)$$

Embora esta definição não seja ambígua, a função $\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ introduzida acima não é única, pois ela depende da escolha particular que fizemos para os cortes γ . Uma outra escolha que podemos fazer é considerarmos os cortes δ , feitos com bonds em $\tilde{\Omega}$ de menos infinito até $*x = y - o^*$, paralelo ao eixo x [17]. Com este corte δ pode-se definir uma outra função ângulo $\bar{\Theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a qual é o ângulo de \mathbf{x} visto a partir de $*y = y - o^*$. Com a ordem dada pela eq.(4.67) pode-se mostrar que

$$\bar{\Theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \bar{\Theta}_{\delta_y}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\pi \quad \text{se } \mathbf{x} > \mathbf{y}. \quad (4.69)$$

A partir de suas definições, pode-se também determinar uma relação entre estes dois ângulos

$$\bar{\Theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} -\pi & \text{se } \mathbf{x} > \mathbf{y} \\ \pi & \text{se } \mathbf{x} < \mathbf{y}, \end{cases} \quad (4.70)$$

e para qualquer \mathbf{x} e \mathbf{y} (mesmo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$) tem-se que

$$\bar{\Theta}_{\delta_y}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (4.71)$$

Pode-se usar estas funções $\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ introduzidas acima para definirmos osciladores aniônicos, que são relacionados por uma transformação de paridade. Eles são definidos como

$$a_i(\mathbf{x}_\alpha) = K_i(\mathbf{x}_\alpha)c_i(\mathbf{x}), \quad (4.72)$$

com $\alpha_x = \gamma_x$ ou δ_x , $i = 1, \dots, N$; o operador de desordem sendo dado por

$$K_i(x_\alpha) = \exp(i\rho \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{x}}} \Theta_{\alpha_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) c_i^\dagger(\mathbf{y}) c_i(\mathbf{y})), \quad (4.73)$$

e $c_i(x)$ são osciladores fermiônicos, que obedecem à álgebra

$$\begin{aligned} \{c_i(\mathbf{x}), c_i(\mathbf{y})\} &= 0 \\ \{c_i(\mathbf{x})^\dagger, c_i(\mathbf{y})\} &= \delta_{ij} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (4.74)$$

e suas relações conjugadas hermitianas, que nós estaremos omitindo continuamente neste capítulo. Na expressão acima (\mathbf{x}, \mathbf{y}) é a função delta em Ω , i.e.

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (4.75)$$

Os osciladores aniônicos do tipo γ obedecem às seguintes relações de comutação generalizadas, para $\mathbf{x} > \mathbf{y}$

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{x}_\gamma) a_i(\mathbf{y}_\gamma) + q^{-1} a_i(\mathbf{y}_\gamma) a_i(\mathbf{x}_\gamma) &= 0 \\ a_i(\mathbf{x}_\gamma) a_i^\dagger(\mathbf{y}_\gamma) + q a_i^\dagger(\mathbf{y}_\gamma) a_i(\mathbf{x}_\gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde $q = \exp(i\pi\rho)$. Para $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tem-se

$$\begin{aligned} (a_i(\mathbf{x}_\gamma))^2 &= 0, \\ a_i(\mathbf{x}_\gamma) a_i^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) + a_i^\dagger(\mathbf{y}_\gamma) a_i(\mathbf{x}_\gamma) &= 1. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Então, como se vê da discussão acima, osciladores aniônicos são objetos *hard core* que obedecem relações de q -comutação em pontos diferentes da rede mas as usuais relações de anticomutação no mesmo ponto.

As relações de comutação entre osciladores aniônicos do tipo δ podem ser obtidas a

partir das eqs.(4.76-4.77) trocando o fator q por q^{-1} e naturalmente os cortes γ por δ . Isto é devido ao fato que os osciladores do tipo δ podem ser obtidos dos osciladores tipo γ por uma transformação de paridade, que muda o parametro de *braiding* de q para q^{-1} [44].

Relações de comutação entre diferentes tipos de osciladores também podem ser calculadas, e obtem-se

$$\begin{aligned} \{a_i(\mathbf{x}_\gamma), a_i(\mathbf{y}_\delta)\} &= 0 \\ \{a_i^\dagger(\mathbf{y}_\delta), a_i(\mathbf{x}_\gamma)\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

e

$$\{a_i(\mathbf{x}_\delta), a_i^\dagger(\mathbf{y}_\gamma)\} = q \left(\sum_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{y} > \mathbf{x}} \right) c_i^\dagger(\mathbf{y}) c_i(\mathbf{y}). \quad (4.79)$$

Finalmente, devemos mencionar que diferente osciladores aniônicos (aqueles feitos com diferentes tipos de férmions) anticomutam.

Com os osciladores definidos nesta seção, todas as álgebras deformadas clássicas podem ser realizadas [45, 46]. Mostraremos adiante que álgebras deformadas a dois parâmetros também o podem, com um exemplo específico, o de $sl_{q,s}(2)$.

4.3 O semi-grupo Quântico $sl_{(q,s)}(2)$ e sua Realização não Local

Como já vimos na introdução, as relações de comutação entre os geradores da álgebra quântica a dois parâmetros $sl_{(q,s)}(2)$ [47]

$$\begin{aligned} [j_0, j_\pm] &= \pm j_\pm, \\ [j_+, j_-]_s &\equiv s^{-1} j_+ j_- - s j_- j_+ = s^{-2j_0} [2j_0], \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde $[x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$, pode ser obtida a partir da matriz R [49]

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

que é uma solução da equação de Yang-Baxter constante

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (4.82)$$

A estrutura de comultiplicação da álgebra [47]

$$\begin{aligned} \Delta(qs)^{-j_0} &= (qs)^{-j_0} \otimes (qs)^{-j_0}, \\ \Delta(j_{\pm}) &= (qs)^{-j_0} \otimes j_{\pm} + j_{\pm} \otimes (qs^{-1})^{j_0}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

juntamente com as equações de compatibilidade convertem $sl_{(q,s)}(2)$ em uma biálgebra. Não é possível encontrar-se uma função antípoda para esta álgebra, e portanto $sl_{(q,s)}(2)$ é mais propriamente chamado um semi-grupo quântico. No limite $s \rightarrow 1$, $sl_{(q,s)}(2)$ se torna $sl_{(q)}(2)$.

Um fato importante sobre $sl_{(q,s)}(2)$ é que as matrizes de Pauli são a sua representação fundamental. Portanto, sua representação fundamental é a mesma que para a álgebra $sl(2)$, e todas as suas outras representações podem ser obtidas a partir da fundamental pelo uso das regras de comultiplicação dadas pela eq.(4.83), da mesma maneira que obtemos as representações de $su(2)_q$ a partir da estrutura de comultiplicação.

Vamos agora retornar à rede Ω introduzida na última seção e assinalar a cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$ uma representação fundamental de $sl_{(q,s)}(2)$, seus geradores satisfazendo a álgebra local

$$[j_0(\mathbf{x}), j_{\pm}(\mathbf{x})] = \pm j_{\pm}(\mathbf{x})$$

$$[j_+(\mathbf{x}), j_-(\mathbf{x})]_s = s^{-2j_0(\mathbf{x})}[2j_0(\mathbf{x})]. \quad (4.84)$$

Como a representação fundamental de $sl_{(q,s)}(2)$ é a mesma que a de $sl(2)$, a estrutura q -deformada desta equação é apenas formal, nós apenas a escreveremos desta maneira para uso futuro.

Com os geradores locais $j_0(\mathbf{x}), j_\pm(\mathbf{x})$ pode-se definir

$$\begin{aligned} J_0(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}}^\otimes \mathbf{1}_y \otimes j_0(\mathbf{x}) \otimes \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}}^\otimes \mathbf{1}_z \\ J_\pm(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}}^\otimes (qs)^{-j_0(\mathbf{y})} \otimes j_\pm(\mathbf{x}) \otimes \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}}^\otimes (qs^{-1})^{j_0(\mathbf{z})}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

(daqui para a frente nós não utilizaremos o símbolo do produto direto) e os geradores

$$\begin{aligned} J_\pm &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_\pm(\mathbf{x}) \\ J_0 &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.86)$$

obedecem à álgebra de $sl_{(q,s)}(2)$, eq.(4.80), já que eles são obtidos do coproduto iterado da álgebra envolvente universal.

Os geradores $J_0(\mathbf{x}), J_\pm(\mathbf{x})$ definidos acima obedecem às relações de comutação

$$\begin{aligned} [J_0(\mathbf{x}), J_\pm(\mathbf{y})] &= \pm \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J_\pm(\mathbf{x}) \\ [J_+(\mathbf{x}), J_-(\mathbf{y})] &= 0 \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ [J_+(\mathbf{x}), J_-(\mathbf{y})]_s &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} (qs)^{-2j_0(\mathbf{y})} [j_+(\mathbf{x}), j_-(\mathbf{y})]_s \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} (qs^{-1})^{2j_0(\mathbf{z})}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

e as densidades $J_\pm(\mathbf{x})$ obedecem às relações de *braiding*

$$\begin{aligned} J_+(\mathbf{x})J_+(\mathbf{y}) &= q^2 J_+(\mathbf{y})J_+(\mathbf{x}) \\ J_-(\mathbf{x})J_-(\mathbf{y}) &= q^{-2} J_-(\mathbf{y})J_-(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.88)$$

a qual poderia ser usada para provar que J_0, J_\pm obedecem à álgebra $sl_{(q,s)}(2)$ eq.(4.80).

Vamos agora usar as funções ângulo $\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\bar{\Theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ introduzidas na última seção para construir novas densidades não locais $J_0(\mathbf{x})$, $J_{\pm}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}
 J_+(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} q^{-\frac{2}{\pi} \theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) j_0(\mathbf{y})} s^{-2j_0(\mathbf{y})} j_+(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} q^{-\frac{2}{\pi} \theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) j_0(\mathbf{z})} s^{-2j_0(\mathbf{z})} \\
 J_-(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} q^{\frac{2}{\pi} \bar{\theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) j_0(\mathbf{y})} s^{-2j_0(\mathbf{y})} j_-(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} q^{\frac{2}{\pi} \bar{\theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) j_0(\mathbf{z})} s^{-2j_0(\mathbf{z})} \\
 J_0(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} 1_{\mathbf{y}} j_0(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} 1_{\mathbf{z}}.
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

Usando as relações obedecidas pelas funções Θ e a álgebra local eq.(4.84), podemos provar que estas densidades obedecem à relação de comutação eq.(4.87) assim como as relações de *braiding* eq.(4.88) e então realizam a álgebra $sl_{(q,s)}(2)$, eq.(4.80).

4.4 Realização Aniônica de $sl_{(q,s)}(2)$

Nesta seção nós vamos mostrar como os osciladores aniônicos, definidos na seção (4.2), com uma escolha particular do operador de desordem $K_i(\mathbf{x}_\alpha)$, podem realizar, através da construção de Schwinger da álgebra de densidades eq.(4.87) e as relações de *braiding* eq.(4.87), e conseqüentemente também a álgebra $sl_{(q,s)}(2)$ dada pela eq.(4.80).

Vamos lembrar inicialmente que qualquer álgebra de Lie clássica pode ser construída *à la* Schwinger numa variedade Ω em termos de osciladores fermiônicos. Em particular, para a álgebra $sl(2)$ pode-se definir em cada ponto \mathbf{x} da rede Ω

$$\begin{aligned}
 j_+(\mathbf{x}) &= c_1^\dagger(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x}) \\
 j_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(c_1^\dagger(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x}) - c_2^\dagger(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x}) \right) \\
 j_-(\mathbf{x}) &= c_2^\dagger(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x}),
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

onde $c_i(\mathbf{x})$ são osciladores fermiônicos. Estes operadores obedecem uma uma álgebra local de $sl(2)$

$$[j_0(\mathbf{x}), j_{\pm}(\mathbf{y})] = \pm \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) j_{\pm}(\mathbf{x})$$

$$[j_+(\mathbf{x}), j_-(\mathbf{y})] = 2 j_0(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.91)$$

Também aqui, geradores globais J_\pm , J_0 podem ser definidos a partir das densidades $J_\pm(\mathbf{x})$, $J_0(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} J_\pm &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_\pm(\mathbf{x}) \\ J_0 &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.92)$$

onde

$$\begin{aligned} J_0(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} 1_{\mathbf{y}} j_0(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} 1_{\mathbf{z}} \\ J_\pm(\mathbf{x}) &= \prod_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} 1_{\mathbf{y}} j_\pm(\mathbf{x}) \prod_{\mathbf{z} > \mathbf{x}} 1_{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

e é fácil ver que J_\pm e J_0 obedecem à álgebra $sl(2)$. As representações de spin-0 e spin-1/2 da álgebra local podem ser combinadas para gerar todas as outras representações [17],

Como foi comentado na última seção a álgebra $sl_q(2)$ pode também ser gerada a partir da álgebra de $sl(2)$, bastando para isto mudar as regras de comultiplicação. Do ponto de vista da construção de Schwinger, isto é equivalente a mudar os osciladores da eq.(4.90) nos osciladores aniônicos introduzidos na seção 2. De fato com as escolhas das densidades

$$\begin{aligned} J_+(\mathbf{x}) &= a_1^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) a_2(\mathbf{x}_\gamma) \\ J_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (a_1^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) a_1(\mathbf{x}_\gamma) - a_2^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) a_2(\mathbf{x}_\gamma)) \\ j_-(\mathbf{x}) &= a_2^\dagger(\mathbf{x}_\delta) a_1(\mathbf{x}_\delta), \end{aligned} \quad (4.94)$$

e com a ajuda da eq.(4.79) é possível ver que $J_\pm(\mathbf{x})$, $J_0(\mathbf{x})$, obedecem à eq.(4.87-4.88) para $s = 1$ [17]. Então os geradores globais definidos como a soma direta obedecerão à álgebra $sl_q(2)$. É importante notar aqui que a escolha do corte γ em J_0 é irrelevante, já que o produto $a_i^\dagger(\mathbf{x}_\alpha) a_i(\mathbf{x}_\alpha)$ pode ser escrito em termos dos osciladores fermiônicos sem nenhuma dependência nos operadores de desordem $K_i(\mathbf{x}_\alpha)$.

A construção de Schwinger da álgebra $sl_{(q,s)}(2)$ tem, entretanto, uma sutileza devido à presença do comutador- s na álgebra local eq.(4.84). Vamos definir os geradores locais

$$\begin{aligned} j_+(\mathbf{x}) &= c_1^\dagger(\mathbf{x})s^{-\frac{1}{2}(c_1^\dagger(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x})-c_2^\dagger(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x}))}c_1(\mathbf{x}) \\ j_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(c_1^\dagger(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x}) - c_2^\dagger(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x})) \\ j_-(\mathbf{x}) &= c_2^\dagger(\mathbf{x})s^{\frac{1}{2}(c_1^\dagger(\mathbf{x})c_1(\mathbf{x})-c_2^\dagger(\mathbf{x})c_2(\mathbf{x}))}c_1(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Não é difícil ver que estes geradores obedecem à álgebra dada pela eq.(4.84).

Os osciladores aniônicos podem ser definidos como

$$A_i(\mathbf{x}_\alpha) = K_i(\mathbf{x}_\alpha)b_i(\mathbf{x}_\alpha), \quad (4.96)$$

com

$$\begin{aligned} K_i(\mathbf{x}_\gamma) &= \exp \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} \left(i\rho\Theta_{\gamma_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})c_i^\dagger(\mathbf{y})c_i(\mathbf{y}) + \frac{i}{2}\nu\pi c_i^\dagger(\mathbf{y})c_i(\mathbf{y}) \right) \\ K_i(\mathbf{x}_\delta) &= \exp \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{x}} \left(i\rho\bar{\Theta}_{\delta_x}(\mathbf{x}, \mathbf{y})c_i^\dagger(\mathbf{y})c_i(\mathbf{y}) - \frac{i}{2}\nu\pi c_i^\dagger(\mathbf{y})c_i(\mathbf{y}) \right), \end{aligned} \quad (4.97)$$

e

$$\begin{aligned} b_i(\mathbf{x}_\gamma) &= \exp\left(\frac{i\nu\pi}{2}c_i^\dagger(\mathbf{x})c_i(\mathbf{x})\right) c_i(\mathbf{x}) \\ b_i(\mathbf{x}_\delta) &= \exp\left(\frac{-i\nu\pi}{2}c_i^\dagger(\mathbf{x})c_i(\mathbf{x})\right) c_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Escolhendo

$$\begin{aligned} q &= e^{i\pi\rho} \\ s &= e^{i\pi\nu}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

podemos mostrar que estes operadores obedecem, em cada ponto $\mathbf{x} \in \Omega$, à álgebra

$$\begin{aligned} b_i^2(\mathbf{x}_\alpha) &= 0 \\ \{b_i(\mathbf{x}_\alpha), b_i^\dagger(\mathbf{x}_\alpha)\} &= 1 \\ \{b_i(\mathbf{x}_\alpha), b_j^\dagger(\mathbf{x}_\alpha)\} &= 0 \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{4.100}$$

onde α pode ser γ ou δ , e também

$$b_i(\mathbf{x}_\gamma) b_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta) + s b_j^\dagger(\mathbf{x}_\delta) b_i(\mathbf{x}_\gamma) = s^{N_i(\mathbf{x})}, \tag{4.101}$$

onde $N_i = c_i^\dagger c_i$. Portanto, os operadores b são objetos *hard-core* que obedecem a uma álgebra de Heisenberg s -deformada em cada ponto \mathbf{x} da rede Ω . Entretanto, estes s -osciladores são efetivamente fermiônicos, já que podemos, redefinindo os operadores acima, mudar (4.101) para uma equação de anticomutação, como vimos no final da seção (1.3), a partir da eq.(1.68).

A presença do fator s no segundo termo do operador de desordem $K_i(x_\gamma)$ dado pela eq.(4.97) tem como resultado uma mudança na linha de base que usamos para medir ângulos. Desta expressão, podemos ver que s faz com que o ângulo, quando consideramos o corte γ , passe a ser da forma $\tilde{\Theta}_\gamma = \Theta_\gamma + \frac{\nu}{\rho}\pi$, enquanto que para o corte δ torna-se $\tilde{\Theta}_\delta = \Theta_\delta - \frac{\nu}{\rho}\pi$. No primeiro caso, houve uma rotação na linha base no sentido horário, enquanto no segundo a rotação foi no sentido anti-horário, ambas por um ângulo $\frac{\nu}{\rho}\pi$.

Com isto, as densidades $J_\pm(\mathbf{x})$, $J_0(\mathbf{x})$ definidas por

$$\begin{aligned} J_+(\mathbf{x}) &= A_1^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) A_2(\mathbf{x}_\gamma) \\ J_0(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (A_1^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) A_1(\mathbf{x}_\gamma) - A_2^\dagger(\mathbf{x}_\gamma) A_2(\mathbf{x}_\gamma)) \\ J_-(\mathbf{x}) &= A_2^\dagger(\mathbf{x}_\delta) A_1(\mathbf{x}_\delta), \end{aligned} \tag{4.102}$$

obedecem à relação de comutação eq.(4.87), as relações de *braiding* (4.88) e consequente-

mente, J_0, J_{\pm} definidos por

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_{\pm}(\mathbf{x}) \\ J_0 &= \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} J_0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.103)$$

satisfazem á álgebra de $sl_{(q,s)}(2)$.

Das suas definições é fácil ver que os operadores de desordem $K_i(\mathbf{x}_{\alpha})$ comutam entre si

$$K_i(\mathbf{x}_{\alpha}) K_j(\mathbf{y}_{\beta}) = K_j(\mathbf{y}_{\beta}) K_i(\mathbf{x}_{\alpha}), \quad \text{para todo } \mathbf{x}, \mathbf{y} \quad (4.104)$$

para qualquer valor de i, j , onde os cortes α e β podem ser tanto γ quanto δ ,

A eq.(4.104), juntamente com as eq.(4.100,4.101) nos permitem determinar as seguintes relações para os operadores $A_i(\mathbf{x}_{\alpha})$

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}_{\gamma}) A_i(\mathbf{y}_{\gamma}) &= -q^{-1} A_i(\mathbf{y}_{\gamma}) A_i(\mathbf{x}_{\gamma}) \\ A_i(\mathbf{x}_{\gamma}) A_i^{\dagger}(\mathbf{y}_{\gamma}) &= -q A_i^{\dagger}(\mathbf{y}_{\gamma}) A_i(\mathbf{x}_{\gamma}), \end{aligned} \quad (4.105)$$

para todo $\mathbf{x} > \mathbf{y}$. Para o mesmo ponto nós obtemos

$$\{A_i(\mathbf{x}_{\gamma}), A_i^{\dagger}(\mathbf{x}_{\gamma})\} = 1. \quad (4.106)$$

As relações para o corte δ podem ser obtidas pela troca de q por q^{-1} nas relações acima. Também podemos calcular relações entre osciladores definidos com diferentes cortes, obtendo neste caso

$$A_i(\mathbf{x}_{\gamma}) A_i(\mathbf{y}_{\delta}) = -s^{-1} A_i(\mathbf{y}_{\delta}) A_i(\mathbf{x}_{\gamma}), \quad (4.107)$$

para todo \mathbf{x}, \mathbf{y} e

$$A_i(\mathbf{x}_{\delta}) A_i^{\dagger}(\mathbf{y}_{\gamma}) = -s^{-1} A_i^{\dagger}(\mathbf{y}_{\gamma}) A_i(\mathbf{x}_{\delta}), \quad (4.108)$$

para $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. No caso em que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nós temos

$$\begin{aligned}
 A_i(\mathbf{x}_\gamma)A_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta) &= K_i(\mathbf{x}_\gamma)b_i(\mathbf{x}_\gamma), K_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)b_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta) \\
 &= K_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)b_i(\mathbf{x}_\gamma)b_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)K_i(\mathbf{x}_\gamma) \\
 &= K_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta) \left(s^{N_i(\mathbf{x})} - sb_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)b_i(\mathbf{x}_\gamma) \right) K_i(\mathbf{x}_\gamma) \\
 &= -sA_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)A_i(\mathbf{x}_\gamma) + s^{N_i(\mathbf{x})}K_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)K_i(\mathbf{x}_\gamma),
 \end{aligned}
 \tag{4.109}$$

o que implica na relação

$$A_i(\mathbf{x}_\gamma)A_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta) + sA_i^\dagger(\mathbf{x}_\delta)A_i(\mathbf{x}_\gamma) = q \left(\sum_{\mathbf{y} < \mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{y} > \mathbf{x}} \right) c_i^\dagger(\mathbf{y})c_i(\mathbf{y}) \sum_s \mathbf{y} N(\mathbf{y}). \tag{4.110}$$

A construção que nós apresentamos aqui para a álgebra $sl_{(q,s)}(2)$ utiliza-se de osciladores aniônicos feitos com s -osciladores que, porém, são efetivamente férmions. A presença do fator s no segundo termo do operador de desordem $K_i(x_\gamma)$ (eq.(4.97)) faz com que a maneira com a qual medimos ângulos na rede fique modificada: o ângulo com o corte γ passa a ser $\tilde{\Theta}_\gamma = \Theta_\gamma + \frac{\nu}{\rho}\pi$, enquanto para o corte δ torna-se $\tilde{\Theta}_\delta = \Theta_\delta - \frac{\nu}{\rho}\pi$.

Capítulo 5

Propriedades Termodinâmicas dos q -Gases

Neste capítulo retornamos a discutir propriedades dos q -osciladores introduzidos na seção (1.3). O que estudaremos aqui são as propriedades termodinâmicas de um gás de q -osciladores. Em particular, determinaremos a expansão virial para a equação de estado e mostraremos que o fenômeno da condensação de Bose-Einstein está presente num gás de q -osciladores. Uma excelente apresentação destes tópicos para um sistema de partículas não interagentes (caso limite da situação que trataremos aqui) encontra-se na ref.([24]). Consideraremos um sistema imerso num reservatório ou, de outra forma, que temos um grande número de cópias do sistema. Em ambos os casos poderá haver troca de partículas e energia entre o sistema/reservatório ou entre as cópias do sistema. Este é o chamado ensemble grand-canônico.

Neste ensemble, todas as grandezas termodinâmicas de um sistema são obtidas a partir da função de partição grand-canônica. Esta, por sua vez, depende de uma forma direta da Hamiltoniana do sistema. Assim, antes de iniciarmos o estudo termodinâmico propriamente dito, vamos considerar que Hamiltoniana devemos tomar.

Seguindo [27], propomos então a seguinte Hamiltoniana

$$H = \sum_i \varepsilon_i (\alpha [N_i]_q + (1 - \alpha) [N_i + 1]_q), \quad (5.1)$$

a qual, usando as equações do capítulo 1 pode também ser escrita como

$$H = \sum_i \varepsilon_i (\alpha a_i^\dagger a_i + (1 - \alpha) a_i a_i^\dagger). \quad (5.2)$$

Os operadores a_i e a_i^\dagger obedecem à álgebra de q -osciladores, eq.(1.45). Interpretando os operadores a_i e a_i^\dagger como operadores de criação e aniquilação de partículas com energia ε_i , vemos que esta Hamiltoniana descreve um sistema de N partículas, com N_i sendo o operador que conta o número de partículas com energia ε_i .

Quando $q \rightarrow 1$, a Hamiltoniana se torna

$$H = \sum_i (N_i + 1 - \alpha). \quad (5.3)$$

Então tomaremos $0 \leq \alpha \leq 1$, o limite superior tomado para que o estado fundamental tenha energia não negativa. Notemos que neste caso o parâmetro α é apenas um *shift* na energia e que se $\alpha = 1$ a energia do vácuo (zero partículas) é nula.

As propriedades termodinâmicas de um sistema serão derivadas a partir da função de grand-partição

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta(H - \mu N)) = \exp(-\beta\Omega), \quad (5.4)$$

onde

$$N = \sum_i N_i \quad (5.5)$$

é o número total de partículas, que naturalmente deve ser igual à soma do número de partículas em cada nível, μ é o potencial químico e $\beta = \frac{1}{kT}$, k sendo a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema. O coeficiente da exponencial é o potencial grand-canônico Ω .

O traço em (5.4) deve ser tomado sobre um conjunto completo de estados. Usaremos os autoestados $|n_i\rangle$ introduzidos no capítulo 1 como o estado que descreve n partículas no i -ésimo nível. Da mesma forma que no gás ideal não deformado, a função grand-partição pode ser escrita como o produto de funções de grand-partição para cada nível,

$$Z = \prod_i Z_1(\epsilon, \beta, \mu), \quad (5.6)$$

sendo que a função grand-partição para cada nível é a soma das funções grand-partição para cada possível número de partículas presentes no nível,

$$Z_1(\epsilon, \beta, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_i(n) - \mu n)}. \quad (5.7)$$

No limite em que o parâmetro de deformação q vai a unidade, a função Z para Hamiltonianas da forma (5.1) pode ser calculada exatamente, gerando as estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, dependendo de como a soma sobre n é executada ($n = 0, 1$ no primeiro caso, $n = 0 \dots \infty$ no segundo). Se $q \neq 1$, não podemos calcular exatamente a soma, e seremos obrigados a fazer algum tipo de aproximação para calcular Z . Outro ponto a destacar é que quando q é raiz da unidade, o número de partículas por nível é limitado – se $q = e^{\frac{2\pi i}{k}}$, teremos k partículas por nível apenas. Como tomaremos todas as somas até o infinito, devemos tomar cuidado em não considerar tais valores. Nas próximas seções tomaremos sempre q real e ou muito grande ou muito pequeno. Uma análise para q como raiz da unidade foi feita na ref.[50], embora a álgebra considerada naquele caso seja a deformação da álgebra fermiônica e não da bosônica, como estamos considerando aqui.

Os possíveis valores para o potencial químico μ são aqueles que fazem com que (5.7) seja convergente. Então se todos os $\epsilon_i(n)$ são positivos, μ pode assumir qualquer valor real. Porém se algum nível tiver energia nula, que é o caso aqui considerado, então necessariamente μ deverá ser negativo.

De (5.7), podemos escrever para o potencial grand-canônico

$$\Omega = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln Z_i^0(\epsilon^i, \beta, \mu), \quad (5.8)$$

onde

$$Z_i^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \epsilon_i A_{n,\alpha}) \quad (5.9)$$

é a função grand-partição para as partículas no nível i , com

$$A_{n,\alpha} = (\alpha[n]_q + (1 - \alpha)[n + 1]_q). \quad (5.10)$$

O procedimento para determinarmos o potencial grand-canônico será o mesmo que o usado no caso não deformado. Nós então confinamos o sistema em um volume V e fazemos este volume muito grande. Nestas condições a soma sobre os níveis de energia pode ser trocada por uma integração já que estes serão praticamente contínuos. Isto nos permite fazer a troca

$$\sum_i \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3 p, \quad (5.11)$$

onde o momentum \vec{p} está relacionado com a energia através da relação

$$\epsilon^i \rightarrow \frac{p^2}{2m}, \quad (5.12)$$

visto que as partículas não interagem entre si e consideraremos o caso não-relativístico.

Portanto, Ω pode ser reescrito como

$$\Omega = -\frac{V}{h^3 \beta} \int d^3 p \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} A_{n,\alpha} - \mu n \right)}. \quad (5.13)$$

Nosso próximo passo será integrar as variáveis angulares, visto que o integrando somente depende do módulo do momentum. Tomando $\eta = \beta \frac{p^2}{2m}$, chamando $z = e^{\beta \mu}$ a fugacidade

do gás, obtemos

$$\Omega = \frac{-\Lambda^{-3}}{\Gamma(5/2)\beta} \int_0^\infty d\eta \eta^{3/2} \frac{\sum_0^\infty A_{n,\alpha} z^n e^{-\eta A_n}}{\sum_0^\infty z^n e^{-\eta A_n}}, \quad (5.14)$$

onde

$$\Lambda^{-3} = \frac{\pi^{3/2}}{h^3(\beta\gamma)^{3/2}}, \quad (5.15)$$

o comprimento de onda térmico Λ é (quando multiplicado pela densidade do gás) o parâmetro relevante para expansões das funções termodinâmicas [24].

Para calcularmos as funções termodinâmicas, recordemos que a pressão do gás pode ser calculada em função do potencial grand-canônico

$$P = -\frac{\Omega}{V}, \quad (5.16)$$

enquanto que a densidade é obtida pela sua derivada,

$$n = \left. \frac{\partial P}{\partial \mu} \right|_{T,V}, \quad (5.17)$$

ou seja, usando a definição de z

$$n = -\frac{\beta z}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (5.18)$$

5.1 Expansão Virial (aproximação para altas temperaturas)

Para determinarmos a equação de estado do q -gás, ou seja, uma relação entre a pressão P e a densidade n , devemos calcular o potencial grand-canônico Ω .

Claramente, o cálculo exato de Ω é muito difícil e como comentamos anteriormente, faremos algum tipo de aproximação. Consideraremos então valores pequenos para a fugacidade z , ou seja, z muito menor que um, o que significa, visto que $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$, altas temperaturas. Isto permitirá expandirmos a expressão para Ω em potências de z . Como os coeficientes $A_{n,\alpha}$ presentes no argumento da exponencial dependem diretamente de q ,

se considerarmos um alto valor para este parâmetro a série para Ω convergirá rapidamente [25]. Para um valor de q da ordem de 10, podemos considerar apenas os três primeiros termos da série, e teremos

$$\Omega = \int d\eta \eta^{3/2} \left(\frac{A_{0,\alpha} + A_{1,\alpha} z e^{-A_{1,\alpha}\eta} + A_{2,\alpha} z^2 e^{-A_{2,\alpha}\eta}}{1 + z e^{-A_{1,\alpha}\eta} + z^2 e^{-A_{0,\alpha}\eta}} \right). \quad (5.19)$$

Como z é pequeno, podemos expandir o denominador na forma binomial

$$\left(\frac{1}{1 + az + bz^2 + \dots} \right)^m = \left(\frac{1}{1 + az} \right)^m - mb \left(\frac{1}{1 + az} \right)^{m+1} + \dots \quad (5.20)$$

Com estas considerações podemos escrever

$$\begin{aligned} P = \int d\eta \eta^{3/2} \left[A_{0,\alpha} + z(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})e^{-\eta(A_{1,\alpha}-A_{0,\alpha})} + z^2((A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha}) \right. \\ \left. e^{-\eta(A_{2,\alpha}-A_{0,\alpha})} - (A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})e^{-2\eta(A_{1,\alpha}-A_{0,\alpha})}) + z^3((A_{3,\alpha} - A_{0,\alpha}) e^{-\eta(A_{3,\alpha}-A_{0,\alpha})} \right. \\ \left. + (A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})e^{-3\eta(A_{1,\alpha}-A_{0,\alpha})} + (2A_{0,\alpha} - A_{1,\alpha} - A_{2,\alpha})e^{-\eta(A_{1,\alpha}+A_{2,\alpha}+2A_{0,\alpha})}) \right] \quad (5.21) \end{aligned}$$

O primeiro termo desta integral se anula para $\alpha = 1$ e é divergente para os outros valores de α . Vamos então "renormalizar" esta expressão eliminando este termo, o que essencialmente significa redefinir a energia do vácuo. Resolvendo a integral com o auxílio da fórmula

$$\int dx x^{\nu-1} e^{-Ax} = (\nu - 1)! A^{-\nu}, \quad (5.22)$$

obtemos

$$P = \frac{\Lambda^{-3}}{\beta} z(F_0 + zF_1 + z^2F_2 + O(z^3)), \quad (5.23)$$

com

$$\begin{aligned} F_0 &= (A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{-3/2}, \\ F_1 &= (A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha})^{-3/2} - 2^{-5/2}(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{-3/2}, \\ F_2 &= (A_{3,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2} - (A_{1,\alpha} + A_{2,\alpha} - 2A_{0,\alpha})^{-3/2} + 3^{-5/2}(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Estes coeficientes podem ser escritos em função de q e α pelo uso direto de (5.10) que nos fornece as relações

$$\begin{aligned} A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha} &= \alpha + (1 - \alpha)(q + q^{-1} - 1), \\ A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha} &= \alpha(q - 1 + q^{-1}) + (1 - \alpha)(q^2 - q + 1 - q^{-1} + q^{-2}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Podemos calcular a densidade n da mesma forma, via a expansão em z até terceira ordem da eq(5.18). O resultado é

$$n = \Lambda^{-3} z (F_0 + 2zF_1 + 3z^2F_2 + O(z^3)), \quad (5.26)$$

compatível com (5.17).

Vamos inverter esta série, ou seja, escrever $z = z(n)$. Para isto, vamos calcular potências de n . Teremos

$$n^2 = \Lambda^{-6} z^2 (F_0^2 + 4zF_0F_1) \quad (5.27)$$

e

$$n^3 = \Lambda^{-9} z^3 F_0^3. \quad (5.28)$$

Combinando estas expressões obtemos

$$z = \frac{1}{F_0} (n\Lambda^3) - \frac{2F_1}{F_0^3} (n\Lambda^3)^2 + \left(\frac{8F_1^2}{F_0^5} - \frac{3F_2}{F_0^4} \right) (n\Lambda^3)^3 + \dots \quad (5.29)$$

Substituindo este resultado na expressão para P obtemos

$$P = \frac{n}{\beta} \left(1 - \frac{F_1}{F_0} (n\Lambda^3) + \left(\frac{4F_1^2}{F_0^4} - \frac{2F_2}{F_0^3} \right) (n\Lambda^3)^2 + \dots \right). \quad (5.30)$$

Em termos dos coeficientes $A_{n,\alpha}$, a pressão fica escrita como

$$\begin{aligned} P &= \frac{n}{\beta} \left[1 - \left(\frac{A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha}}{A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha}} \right)^{3/2} - \frac{1}{2^{5/2}} \right] \left((A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2} n\Lambda^3 \right) \\ &+ 2 \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^{5/2}} + \left(\frac{2(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^2}{A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha}} \right)^{3/2} + (A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2} \left(-\frac{1}{2^{3/2}(A_{2,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2}} + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(A_{3,\alpha}-A_{0,\alpha})^{3/2}} + \frac{1}{A_{1,\alpha}+A_{2,\alpha}-2A_{0,\alpha})^{3/2}}) \left((A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2} n\Lambda^3 \right)^2 + \dots \Big] \quad (5.31)$$

Portanto podemos considerar como coeficiente de expansão não apenas o fator $(n\Lambda^3)$, mas o produto $(n\Lambda^3)(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2}$, que é diferente de um caso $\alpha \neq 1$. Isto poderia parecer perigoso, já que este último fator é necessariamente maior que um, aumentando quanto mais nos afastamos de $q = 1$, como podemos ver da seguinte forma: queremos mostrar que a expressão

$$A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha} > 1 \quad (5.32)$$

é correta para $\alpha \neq 1$. Notemos entretanto que esta equação pode ser reescrita como

$$(\alpha - 1)(2 - q - q^{-1}) > 0 \quad (5.33)$$

e como $\alpha < 1$ nos resta apenas mostrar que

$$q + q^{-1} > 2. \quad (5.34)$$

Que esta última expressão é correta pode ser visto pelo fato que a função $f(x) = x + x^{-1} - 2$ tem seu ponto de mínimo em $x = 1$.

Entretanto, $(n\Lambda^3)$ pode ser calculada como função de z (via eq.(5.18)) e, como indica a tabela 5.3, para diversos valores de q e α o coeficiente como um todo é menor que um. Isto ocorre basicamente porque enquanto $(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2}$ cresce linearmente com q , $(n\Lambda^3)$ decresce exponencialmente.

Se tomarmos o parâmetro $\alpha = 1$ e q grande, de forma que possamos trocar o número de Gauss $[n]_q$ por q^{n-1} , a expressão para a pressão fica

$$P = \frac{n}{\beta} \left[1 - \left(\frac{-1}{2^{5/2}} + \frac{1}{q^{3/2}} \right) (n\Lambda^3) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{2}{q^2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^{5/2}} - \frac{1}{(2q)^{3/2}} + \frac{1}{(1+q)^{3/2}} \right) (n\Lambda^3)^2 + \dots \right]. \quad (5.35)$$

Desta expressão podemos ver que a pressão aumenta conforme aumentamos o valor do parâmetro q . Uma análise numérica mostra que, para um dado valor de q , a correção de primeira ordem na pressão aumenta quando passamos do valor mínimo para o máximo de α . Notamos então que os dois parâmetros q e α causam o mesmo efeito que a presença de uma força atrativa entre as partículas (um aumento no valor de q corresponde a um aumento na pressão). Entretanto o valor da pressão sente muito mais a variação de q que de α .

Uma expressão similar pode ser obtida no limite para q pequeno (próximo de zero) [25]. Isto ocorre porque o comportamento do número de Gauss tem uma estrutura semelhante para q grande (q^{n-1}) e pequeno ($q^{-(n-1)}$). Então se retornarmos à expressão da pressão dada pela eq.(5.35) e tomarmos o limite em que q é pequeno obteremos a mesma forma da expansão virial que a acima, com a troca de q por q^{-1} . Por outro lado, no limite em que q tende a infinito a expressão que resta é exatamente a expansão virial para um gás de férmions. Ressaltemos aqui que q grande pode ser, por exemplo, $q = 10$. Da expressão para o número de Gauss, vemos que para este valor da deformação o menor inteiro que é deformado, $n = 2$ vale $[2]_{10} = 10.1$, enquanto que na aproximação usada acima temos $[2]_{10} = 10$, uma diferença de 1%.

5.2 Condensação de Bose-Einstein

As expressões para a pressão e a densidade obtidas na seção anterior apresentam, da mesma forma que no caso não deformado, uma sutileza que analisaremos agora. Quando fazemos o limite contínuo e transformamos a soma sobre as energias para a integral sobre o momentum, não levamos em consideração a energia nula da partícula, o que podemos notar através do coeficiente $\eta^{3/2}$ em (5.14). Para levarmos em consideração esta situação reescrevemos

$$P = -\frac{\Omega}{V} - \frac{1}{\beta V} \ln(1 - z) \quad (5.36)$$

e

$$n = -\frac{\beta z}{V} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{z}{1-z}, \quad (5.37)$$

onde o último termo na pressão é o valor de Ω com o momentum nulo. O segundo termo na densidade é, naturalmente, a densidade de partículas no estado fundamental. Claramente estes termos somente contribuirão para z próximo de um e neste caso o número de partículas no estado fundamental pode ser significativo, mostrando então a ocorrência da condensação de Bose-Einstein. A condensação ocorre porque a deformação não altera o estado de energia nula relativo ao caso não deformado [25]. Já a correção na pressão pode ser desprezada mesmo para z próximo de um [24]. Se $z \ll 1$, o que significa temperatura muito grande, recuperamos os resultados anteriores.

Se considerarmos o número de partículas fixo e diminuirmos a temperatura, teremos um aumento em z . Quando z atinge o valor um, o sistema atinge a temperatura crítica T_c^q , definida pela relação

$$n\Lambda_c^3 = y_{q,\alpha}(1), \quad (5.38)$$

onde a função $y_{q,\alpha}(z) = z \frac{\partial Y_{q,\alpha}(z)}{\partial z}$, com

$$Y_{q,\alpha}(z) = \frac{-1}{\Gamma(5/2)\beta} \int_0^\infty d\eta \eta^{3/2} \frac{\sum_0^\infty A_{n,\alpha} z^n e^{-\eta A_n}}{\sum_0^\infty z^n e^{-\eta A_n}}. \quad (5.39)$$

Com isto, a temperatura crítica é dada por

$$T_c^q = \frac{\hbar^2}{2\pi m k} \left(\frac{n}{y_{q,\alpha}(1)} \right)^{2/3}. \quad (5.40)$$

Comparando esta temperatura crítica com a do caso não deformado T_c obtemos

$$T_c^q = \left(\frac{2.61}{y_{q,\alpha}(1)} \right)^{2/3} T_c. \quad (5.41)$$

Na próxima seção, quando fizermos uma análise numérica, mostraremos que a função $y_{q,\alpha}(1)$ é sempre menor que um. Isto significa que a deformação no sistema causa um

aumento da temperatura crítica.

Escrevendo a densidade de energia

$$u = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z, \quad (5.42)$$

ou seja,

$$u = n\mu - \beta \frac{\partial P}{\partial \beta} \Big|_n - P, \quad (5.43)$$

obtemos

$$P = -\frac{2}{3}u, \quad (5.44)$$

mostrando que a relação entre pressão e densidade de energia típica dos gases ideais não se altera na presença da deformação.

Vamos analisar agora o que ocorre com o calor específico a volume constante do sistema, em particular nas proximidades da temperatura crítica. O calor específico a volume constante é definido através da relação

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial T} \Big|_n, \quad (5.45)$$

onde a densidade de energia é dada em (5.42). Para calcular a derivada temos que levar em consideração os dois regimes de temperatura. Como comentamos anteriormente, a temperatura diminui conforme aumentamos z , atingindo seu valor crítico quando z atinge o valor um. Para valores menores da temperatura, o valor de z permanece constante em um. Isto significa que a pressão é calculada pelas equações

$$\begin{aligned} P(T) &= \frac{1}{\beta \Lambda^3} Y_{q,\alpha}(z(T)) & T > T^q_c, \\ P(T) &= \frac{1}{\beta \Lambda^3} Y_{q,\alpha}(1) & T \leq T^q_c. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Assim se $T > T_c^q$ teremos

$$C_V = k \frac{15}{4} \frac{1}{n\Lambda^3} Y_{q,\alpha}(z) - \frac{9}{4} \frac{y_{q,\alpha}(z)}{zy'_{q,\alpha}(z)}, \quad (5.47)$$

onde $y'_{q,\alpha}(z) = \frac{\partial y_{q,\alpha}(z)}{\partial z}$ e usamos também que $n\Lambda^3 = y_{q,\alpha}(z)$.

Já para $T \leq T_c^q$ a expressão para o calor específico é

$$C_V = k \frac{15}{4} \frac{1}{n\Lambda^3} Y_{q,\alpha}(1). \quad (5.48)$$

Na próxima seção veremos que $y'_{q,\alpha}(z)$ é finito para qualquer valor de q (desde que $q \neq 1$) e de α quando z tende a um. Isto significa que quando nos aproximamos da temperatura crítica pela direita (diminuindo T) o valor para o calor específico é diferente do obtido quando nos aproximamos pela esquerda. Isto faz com que tenhamos uma descontinuidade do tipo λ -*point* na curva do calor específico a volume constante, ao contrário do caso não deformado ($q = 1$) em que obtem-se uma singularidade tipo cúspide, pois neste caso $y'_{q,\alpha}(z)$ vai a infinito no limite em que z tende a um, fazendo com que as expressões para o calor específico coincidam neste limite. O comportamento do calor específico do tipo λ -*point* é encontrado em alguns fenômenos físicos como, por exemplo, no caso da superfluidez do He^4 .

5.3 Análise Numérica

Podemos obter resultados numéricos para as grandezas termodinâmicas tomando valores específicos para o parâmetro de deformação q , o parâmetro α e a fugacidade do gás z . Os resultados mais interessantes são obtidos quando a fugacidade tende a um, já que é neste limite que atingimos a temperatura crítica. Iniciaremos então analisando a função $Y_{q,\alpha}(z)$ e suas derivadas para $z = 1$ e diversos valores de q e α . Da forma destas funções, torna-se claro que quanto mais nos afastamos de $q = 1$ mais rapidamente ocorre a convergência. Por exemplo, se $q = 3$ notamos que $y_{3,1}(1)$ converge para o valor 0.933621 tomando os

primeiros nove termos da série, enquanto $y'_{3,1}(1)$ converge para 0.836505 a partir do oitavo termo. Para $q = 45$, a convergência se dá no segundo termo ($n = 1$). Portanto este é o valor "infinito" de q , em que recuperamos a estatística fermiônica, já que apenas os dois primeiros estados (sem partículas e com uma partícula) contribuirão para as grandezas termodinâmicas. Estes resultados são essencialmente independentes do valor tomado para α .

Na tabela 5.1, apresentamos os valores para $Y_{3,\alpha}(1)$, $y_{3,\alpha}(1)$ e $y'_{3,\alpha}(1)$ variando o parâmetro α , tomando os dez primeiros termos, suficientes para assegurarmos a convergência das expansões. Na tabela 5.2, mostramos as razões entre estas funções que aparecem na expressão para o calor específico a volume constante. Notamos que embora haja uma variação significativa nos valores das funções, a razão entre elas sofre uma variação muito menor. Isto mostra que o fator α não influi diretamente na estrutura de descontinuidade tipo λ -point, podendo entretanto servir como um *fine-tuning* para a descontinuidade.

Na tabela 5.3, mostramos que o coeficiente $n\Lambda^3(A_{1,\alpha} - A_{0,\alpha})^{3/2}$ é sempre menor que um, podendo ser utilizado como o parâmetro na expansão virial. Podemos ver destes dados que para um dado valor de q , o coeficiente diminui conforme diminuimos os valores para z . Além disso, o coeficiente também diminui quando aumentamos o valor de q .

Tabela 5.1: Valores para as diversas funções para $z = 1$ e $q = 3$

	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.0$
$Y_{3,\alpha}(1)$	0.972989	0.953104	0.801322	0.675058	0.443450	0.265922
$y_{3,\alpha}(1)$	0.933622	0.914069	0.765246	0.642439	0.419379	0.250207
$y'_{3,\alpha}(1)$	0.836509	0.818305	0.680740	0.568514	0.367574	0.217631

Tabela 5.2: Razões entre as funções que aparecem no cálculo do calor específico considerando $z = 1$ e $q = 3$

	$\alpha = 1$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.0$
$\frac{Y_{3,\alpha}(1)}{y_{3,\alpha}(1)}$	1.04217	1.04270	1.04714	1.05077	1.05747	1.06281
$\frac{y_{3,\alpha}(1)}{y'_{3,\alpha}(1)}$	1.16315	1.16473	1.17713	1.18741	1.20651	1.22189

Tabela 5.3: Valores para o parâmetro dependente de α na expansão virial.

q	α	z	coef.
3	0.9	0.999	0.922467
3	0.9	0.9	0.840014
3	0.9	0.5	0.484728
10	0.9	0.999	0.785808
10	0.9	0.9	0.782227
10	0.9	0.5	0.438222
10	0.0	0.999	0.784462
1000	0.0	0.999	0.764563

Conclusões

Nesta tese discutimos os grupos quânticos em três problemas distintos. Vamos agora resumir nossos resultados e apresentar alguns aspectos que podem vir a ser desenvolvidos no futuro.

Nos capítulos 2 e 3 mostramos que é possível uma generalização da supersimetria através das variáveis de Paragrassmann.

Esta generalização, entretanto, ainda apresenta alguns pontos em aberto. Por exemplo, o cálculo diferencial com as coordenadas quermiônicas não está ainda bem estabelecido e isto causa dificuldades na construção do formalismo no superespaço. Além disto, a homogeneidade das equações somente é obtida com a introdução dos fatores tipo cociclo os quais não possuem, até o momento, nenhuma interpretação a respeito de seu significado nem realização em função das demais variáveis do modelo. Estas mesmas dificuldades estão presentes em outros trabalhos que desenvolvem o mesmo assunto [51, 52] mesmo utilizando-se mais que uma variável de Paragrassmann [53].

Além dos pontos mencionados acima, outras questões em aberto e que podem vir a ser atacadas no futuro são a formulação de superespaço para modelos bi e tridimensionais e a generalização para valores inteiros arbitrários da nilpotência k das variáveis de Paragrassmann.

No capítulo 4 nós realizamos a álgebra $sl_{q,s}(2)$ em termos dos osciladores aniônicos em uma rede bidimensional. Inicialmente mostramos que os geradores da álgebra podem ser escritos em termos da função ângulo $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na rede quadrada bidimensional. Depois realizamos a construção de Schwinger para $sl_{q,s}(2)$, em termos dos osciladores aniônicos.

Acreditamos que seria interessante generalizar esta análise para o caso de álgebras deformadas multiparametricamente para entendermos o papel que os vários parâmetros destas deformações teriam, já que, no caso que aqui consideramos, o papel desempenhado por cada um dos dois parâmetros é diferente; um deles, q , está diretamente ligado ao parâmetro estatístico e o outro, s , relaciona-se com a maneira como os ângulos são medidos, sendo essencialmente um *shift* na função ângulo usada na definição do operador de desordem. Mais ainda, não se conhece todas as deformações multiparamétricas das álgebras de Lie, e a construção de Schwinger utilizada com os osciladores aniônicos cuja álgebra depende de dois parâmetros, como consideramos nesta tese, pode se tornar relevante na obtenção de álgebras deformadas a vários parâmetros ainda não conhecidas.

Uma outra questão interessante é que a definição da função ângulo na rede está diretamente ligada ao calibre escolhido [17]. Apesar dos resultados principais independermos desta escolha, por serem função de diferenças entre duas funções ângulo [17], seria interessante analisarmos quais seriam as alterações decorrentes da escolha de um outro calibre. É interessante lembrar ainda que acredita-se que os anions possam estar ligados ao efeito Hall quântico fracionário [54]

No capítulo 5 discutimos a termodinâmica de um gás de q -osciladores no ensemble grand-canônico. Determinamos a expansão virial da equação de estado do gás considerando que o parâmetro de deformação q seja real e distante de um. Observamos que o fenômeno da condensação de Bose-Einstein está presente no sistema que analisamos, como já observado por [25, 26], para uma Hamiltoniana em que o parâmetro α foi tomado igual a um, mas não por [27], que consideraram a Hamiltoniana com o parâmetro $\alpha \neq 1$ e uma deformação infinitesimal, com q muito próximo de um. Além disto, observamos que a temperatura crítica é maior que a do caso não deformado e que o comportamento do calor específico a volume constante na vizinhança da temperatura crítica é diferente do caso não deformado. Neste último, o calor específico é contínuo na temperatura crítica, mas sua derivada apresenta uma descontinuidade (comportamento tipo cúspide). No caso deformado, entretanto, o próprio calor específico é descontínuo na temperatura crítica,

tendo um comportamento associado a uma transição tipo λ -*point*. Esta descontinuidade aumenta conforme aumentamos o valor de q , deixando de existir no limite em que q tende a um. Ela também depende do parâmetro α - para um dado valor de q , ela é máxima para $\alpha = 1$ e mínima para $\alpha = 0$. Este é um comportamento semelhante ao do calor específico para o He^4 líquido, que possui uma transição tipo λ -*point* na temperatura crítica. Além disto, como a condensação de Bose-Einstein está presente no fenômeno da supercondutividade e a temperatura crítica é maior na presença da deformação, podemos esperar que um gás de q -osciladores pode ser útil no estudo de supercondutividade a altas temperaturas.

Concluindo, acreditamos que os resultados desta tese indicam que estruturas deformadas, a partir de álgebras ou grupos de Lie, podem vir a ter alguma relevância no entendimento de alguns fenômenos físicos .

Referências

- [1] V.G. Drinfeld, *Sov. Math. Dokl.* **27** (1983) 68.
- [2] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63, **11** (1986) 247.
- [3] L.D. Fadeev, N. Yu. Reshetikhin, L.A. Takhtadzhyan, *Algebra and Analysis 1* (1987) 178.
- [4] E. K. Sklyanin e L. D. Fadeev, *Sov. Phys. Dokl.* **23** (1978) 902.
- [5] C. Zachos, *Cont. Math.* **134** (1992) 351.
- [6] L. Castellani, *Phys. Lett.* **B292** (1992) 93.
- [7] A.J. Macfarlane, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) 4581.
- [8] L.C. Biedernharn, *J. Phys.* **A22** (1989) L873.
- [9] V. I. Man'ko, G. Marmo, S. Solimeno, F. Zaccaria, *Int. J. of Mod. Phys.* **A8** (1993) 3577.
- [10] S.L. Woronowicz, *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 613.
- [11] B. Jurco *Lett. Math. Phys.* **22** (1991) 177.
- [12] J.Wess e B. Zumino, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **B 18** (1990) 302.
- [13] Yu.I. Manin, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989) 163.
- [14] A.T. Filipov, A.P. Isaev e A.B. Kurdikov, *Mod. Phys. Lett.* **A 7**, (1992) 2129.

- [15] J.L. Matheus-Valle e Marco A.R. Monteiro, *Mod. Phys. Lett.* **A 7** (1992) 3023.
- [16] J.L. Matheus-Valle e Marco A.R. Monteiro, *Phys. Lett.* **B300** (1993) 66.
- [17] A. Lerda, S. Sciuto, *Nucl. Phys.* **B401** (1993), 613.
- [18] L.P. Colatto e J.L. Matheus-Valle, *On q-deformed Classical Mechanical Models*, preprint CBPF-NF-008/94 - hep-th 9504101.
- [19] J.L. Matheus-Valle e Marco A.R. Monteiro, *Mod. Phys. Lett.* **A9** (1994) 945.
- [20] J. Schwinger, in *Quantum theory of angular momentum*, eds. L.C. Biedenharn e H. Van Dam (Academic Press, New York, 1965).
- [21] J.M. Leinaas e J. Myrheim, *Nuovo Cimento* **37B** (1977) 1.
- [22] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 114.
- [23] F. Wilczek, in *Fractional Statistics and Anyonic Superconductivity* edited by f. Wilczek, (World Scientific Publishing Co., Singapore 1990).
- [24] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics* Pergamon Press, Oxford, (1972).
- [25] M. R. Monteiro, I. Roditi e Ligia M. C. S. Rodrigues, *Phys, Lett,* **A 188** (1994) 11.
- [26] M. R. Monteiro, I. Roditi e Ligia M. C. S. Rodrigues, *Int. J. Mod. Phys.* **B8** (1994) 3281.
- [27] M. Chaichian, R. Gonzales Filipe e C. Montonen, *J. Phys.* **A 26** (1993) 4017.
- [28] P. Aschieri e L. Castellani, *Int. Journ Mod. Phys.* **A8** (1993) 1667.
- [29] S. Majid, *Int. Jour. Mod. Phys. A* **5** (1990) 1,
- [30] J. Schwenk, "Differential Calculus for the N-dimensinal Quantum Plane", em *Quantum Groups*, ed. por T. Curtright, D. Fairlie e C. Zachos, World Scientific, Singapura.
- [31] P. Kulish e E. Damaskinsky, *J. Phys.* **A23** (1990) L415

- [32] T. Curtright e C Zachos, Phys. Lett. **B243** (1990) 237.
- [33] M. Lukin, A. Stern e L. Yakushin, J. Phys. **A 26** (1993) 5115.
- [34] C. Ahn, D. Bernard e A. LeClair, Nucl. Phys. **B346** (1990) 409
- [35] L. Baulieu e E. Floratos, Phys. Lett. B **258** (1991) 271
- [36] Y.-S. Wu, Phys. Rev. Lett. **52** (1984)2103
- [37] A. Lerda, curso ministrado no CBPF-RJ Brazil (1991)
- [38] E. Fradkin, Phys. Rev. **63** (1989) 322;
- [39] M. Luscher Nucl. Phys. **320** (1989) 557;
- [40] D. Eliezer, G.W. Semenoff, Phys. Lett. **266B** (1991) 375;
- [41] D. Eliezer, G.W. Semenoff, e S.S.C. Wu, Mod. Phys. Lett. **A7** (1992) 513;
- [42] D. Eliezer, G.W. Semenoff, Ann. Phys. **217** (1992) 66;
- [43] P. Jordan, E.P. Wigner, Z. Phys. **47** (1928) 631;
- [44] A. Lerda, *Anyons: quantum mechanics of particles with fractional statistics* (Springer, Berlin, 1992);
- [45] R. Caracciolo e M.R-Monteiro, Phys. Lett **308B** (1993) 58;
- [46] M. Frau, M.R-Monteiro e S. Sciuto, J. Phys. **A27** (1994) 801.
- [47] Č. Burdik, L. Hlavatý, J. Phys. A **24** (1991) L165;
- [48] S. Jing, Mod, Phys. Lett **A8** (1993) 543;
- [49] L. Hlavatý J. Phys. A **19** (1987) 1661;
- [50] R. Dutt, A. Gangopadhyaya, A. Khare e U. P. Sukhatme, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 2687.

- [51] S. Durand, Mod. Phys. Lett. **A8** 2323-2334 (1993) and *ibid.* 1795-1804 (1993).
- [52] N. Debergh, J. Phys. **26** 7219-7226 (1993).
- [53] N. Mohanmedi Mod. Phys. Lett **A 10** (1995) 1287.
- [54] A. P. Balachandran, E. Ercolessi, G. Morandi e A. M. Srivastava, *Hubbard Model and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990