

1995/06

S237

TESE DE
DOUTORADO

A CLASSIFICAÇÃO DE SEGRE
NA RELATIVIDADE GERAL E
NAS TEORIAS DE KALUZA-KLEIN

Janilo Santos

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS
RIO DE JANEIRO, NOVEMBRO DE 1995

Agradecimentos

- Aos Drs. Marcelo José Rebouças e Antônio Fernandes da Fonseca Teixeira pela orientação, colaboração e incentivo na elaboração desta tese. Pela amizade, apoio logístico e pelas conversas à-toa sobre garças tristes *que* moram à beira de rios, e coisas do gênero.
- A minha querida Beth, grande companheira, pela ajuda emocional e afetiva nos momentos mais duros deste trabalho, por suportar a solidão dos dias distantes.
- Ao professor da UFRN José Ademir S. de Lima, colega de trabalho e amigo que me conduziu ao mundo surpreendente da teoria da relatividade.
- Ao professor da UFPb Joel Batista Fonseca Neto, grande amigo, pela valiosa ajuda quando me iniciei nas manhas de um computador.
- Ao Geraldo Dirk (nossas macrobióticas conversas à frente de um prato de charque com couve fritos na manteiga) e ao Sérgio Duque, companheiros de sala durante minha estadia no CBPF.
- Aos Drs. Jim Skea e Filipe M. Paiva pela ajuda com o SHEEP e com o CLASSI.
- Ao Dr. Graham S. Hall da Universidade de Aberdeen pela colaboração e valiosas idéias na realização de alguns dos trabalhos desta tese.
- Ao professor da UFPb Carlos Romero pelas discussões e hospitalidade em João Pessoa.

- Aos colegas de trabalho na UFRN pelo peso da carga horária extra, e aos que me apoiaram durante minha ausência do DFTE. Em especial ao Márcio Maia, ao Mário Takeya e ao Osman, pela compreensão, incentivo e amizade.
- À CAPES e à UFRN pela ajuda financeira.

Resumo

Nesta tese apresentamos os resultados essenciais de nossas pesquisas sobre a classificação e a estrutura algébrica de tensores simétricos de segunda ordem definidos na teoria da relatividade e nas teorias do tipo Kaluza-Klein. No contexto da relatividade geral examinamos a estrutura do tensor energia-momento T_{ab} de um campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional. Usando bases de tétradas seminulas deduzimos um conjunto de formas canônicas para T_{ab} mostrando que o campo escalar pode ser classificado em quatro classes distintas de equivalência, dependendo do caráter vetorial do gradiente do campo. As formas canônicas são algebricamente classificadas em termos das características de Segre. Correspondente a cada classe de equivalência apresentamos uma solução das equações acopladas Einstein-campo-escalar. No contexto das teorias de Kaluza-Klein efetuamos, de duas maneiras distintas, a classificação de Segre para tensores simétricos de segunda ordem R definidos sobre variedades lorentzianas pentadimensionais (espaços-tempos 5-D) e demonstramos dois teoremas sobre subespaços vetoriais invariantes sob R . Deduzimos ainda um conjunto de formas canônicas para R em bases pentádicas reais seminulas, generalizando assim resultados anteriores obtidos para espaços-tempos de três e de quatro dimensões. Finalmente, após a demonstração de três proposições sobre a estrutura algébrica dos blocos de uma matriz de Jordan, estendemos a classificação de Segre dos tensores simétricos de segunda ordem para espaços-tempos n -dimensionais ($n \geq 3$), e obtemos expressões em bases reais seminulas para cada classe de Segre de R .

Summary

In this thesis we present the essential results of our investigations about classification and the algebraic structure of second order symmetric tensors defined in the relativity theory and Kaluza-Klein-type theories. In the framework of general relativity we examine the structure of the energy-momentum tensor T_{ab} associated to a scalar field minimally coupled to gravitation. Using half-null tetrads technique we derive a set of canonical forms for T_{ab} and show that the scalar field can be classified in four equivalence classes, depending upon the vectorial character of the gradient of the field. The canonical forms are algebraically classified in terms of Segre types. For each canonical form a solution of the Einstein-scalar-field equations is presented. In the context of Kaluza-Klein-type theories we realize, in two different ways, the Segre classification for second order symmetric tensors R defined on five-dimensional Lorentzian manifolds (5-D space-times) and prove two theorems about vectorial subspaces which are invariant under R . Using real half-null pentad bases we derive, in addition, a set of canonical forms for R , generalizing earlier results for space-times in three and four dimensions. Finally, after proving three propositions about algebraic structure of blocks in a Jordan matrix, we extend the Segre classification of second order symmetric tensors to n -dimensional ($n \geq 3$) space-times, and derive canonical forms in real half-null bases corresponding to each Segre class of R .

Índice

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | i |
| Resumo | iii |
| Resumo em inglês | iv |
| Índice | iv |
| Lista de tabelas | vii |
| 1 Classificação de tensores simétricos de segunda ordem na relatividade | 6 |
| 1.1 Introdução | 6 |
| 1.2 Formas canônicas para o tensor de Ricci | 7 |
| 1.2.1 Propriedades algébricas do tensor de Ricci | 12 |
| 1.3 Classificação do campo escalar | 14 |
| 1.4 Equações acopladas Einstein-campo-escalar sem massa | 18 |
| 2 Classificação do tensor de Ricci em teorias do tipo Kaluza-Klein 5-D | 22 |
| 2.1 Introdução | 22 |
| 2.2 Tipos de Segre em espaços-tempos 5-D | 23 |
| 2.3 Formas canônicas | 30 |
| 3 Estrutura algébrica do tensor de Ricci em espaços-tempos 5-D | 40 |
| 3.1 Introdução | 40 |
| 3.2 Pré-requisitos | 41 |
| 3.3 Classificação algébrica | 42 |
| 3.4 Propriedades algébricas do tensor de Ricci em espaços-tempos 5-D | 45 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Classificação de Segre para tensores simétricos em espaços-tempos n-D | 49 |
| 4.1 | Introdução | 49 |
| 4.2 | Pré-requisitos matemáticos | 50 |
| 4.3 | Classificação de Segre | 54 |
| 4.4 | Um conjunto de formas canônicas | 56 |
| | Referências | 62 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Tipos de Segre, autovetores e autovalores em espaços-tempos 5-D | 46 |
| 4.1 | Vetores nulos relacionados a um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ | 54 |
| 4.2 | Tipos de Segre permitidos para R^a_b em espaços-tempos n-D | 55 |

A RESPEITO DE PARÁBOLAS

Muitas pessoas se queixam de que as palavras dos doutos geralmente não passam de parábolas, não tendo a menor utilidade na vida quotidiana, que é a única que temos. Quando um sábio nos diz 'Passe até lá', ele não nos quer dizer que devemos ir até determinado lugar, o que poderíamos fazer se o esforço valesse a pena; 'lá', para ele, significa um além fabuloso, um sítio que desconhecemos e que ele próprio não pode indicar mais precisamente, estando por isso mesmo impossibilitado de nos dar a mínima ajuda.

Todas as parábolas, no fundo, servem apenas para confirmar que o incompreensível é de fato incompreensível, coisa que já sabíamos desde sempre. Mas as preocupações com que diariamente nos defrontamos constituem algo bem diferente.

A propósito disso, um homem certa vez disse: "Por que tanta relutância? Se vos dispusésseis a seguir as parábolas, vós mesmos vos transformaríeis nelas e, com isso, resolveríeis todos os vossos problemas quotidianos."

Um circunstante ouviu-o dizer tal coisa e logo acrescentou: "Aposto que isso também é uma parábola."

O primeiro respondeu-lhe: "Pois já ganhou a aposta."

O segundo prosseguiu: "Mas, infelizmente, apenas em parábola."

O primeiro corrigiu: "Não, *na realidade!* Se fosse em parábola, tê-la-ia perdido."

(*F. Kafka*)

Introdução

A teoria da relatividade geral de Einstein é uma teoria geométrica do campo gravitacional. Nesta teoria o universo é representado por uma variedade riemanniana de dimensão 4, o espaço-tempo M_4 , em que vale localmente a relatividade especial. Uma variedade é essencialmente um espaço topológico que é localmente homeomorfo a um espaço euclidiano, o que permite a introdução de sistemas de coordenadas locais. Contudo, a estrutura de variedade não distingue intrinsecamente diferentes sistemas de coordenadas que possam ser usados para descrever os campos físicos. Por outro lado, o princípio da relatividade geral (ou princípio da covariância) exige que a forma tensorial das leis físicas seja independente do sistema de coordenadas escolhido. Isto nos leva à procura de representações invariantes sob transformações de coordenadas das grandezas físicas relevantes.

Para o campo gravitacional esta caracterização é dada mais apropriadamente em termos do tensor de curvatura de Riemann mais um número finito de suas derivadas covariantes.^{6,29} Em um ponto da variedade espaço-tempo o tensor de curvatura pode ser univocamente decomposto em três partes irreduzíveis: o tensor de Weyl (W_{abcd}), o tensor de Ricci sem traço ($S_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab}$) e o escalar de Ricci ($R \equiv R_{ab} g^{ab}$). No vácuo S_{ab} e R anulam-se e o tensor de curvatura se reduz ao tensor de Weyl, que é interpretado como representante das propriedades puramente gravitacionais, independentes das fontes do espaço-tempo. A classificação algébrica do tensor de Weyl dada por Petrov⁴⁶ foi uma importante contribuição à teoria da relatividade geral. Petrov estabeleceu uma partição do campo gravitacional em seis classes diferentes que são atualmente conhecidas como Petrov tipo I (algebricamente geral), II, III, D, N e 0 (estas cinco últimas algebricamente

especiais). A utilidade e importância da classificação de Petrov na interpretação física da teoria de Einstein foi amplamente demonstrada em trabalhos como os de Pirani,^{48,49} Penrose,⁴³ e Bel³ entre outros.

O tensor de Ricci está diretamente relacionado, via equações de Einstein, ao conteúdo físico do espaço-tempo representado pelo tensor energia-momento, e sua classificação algébrica tem sido estudada por vários pesquisadores (cf. Churchill,⁸ Plebański,⁵⁰ Hall¹⁷ e Penrose,^{44,45} entre outros). Assim como a classificação algébrica do tensor de Weyl revelou-se de grande utilidade no estudo de soluções de vácuo da gravitação o conhecimento da estrutura algébrica do tensor de Ricci (ou equivalentemente do tensor de Einstein) é essencial no estudo dos espaços-tempos soluções das equações de Einstein com fontes.^{40,5,56,57} A classificação por tipos de Segre, uma das classificações do tensor de Ricci, é o principal objeto de estudo desta tese, e sobre a sua importância na relatividade geral nos deteremos um pouco mais no que se segue.

As equações de campo de Einstein

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \tag{0.1}$$

relacionam a geometria de um dado espaço-tempo à sua distribuição de matéria. O tensor de Einstein $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ é definido em termos do tensor métrico g_{ab} — que descreve a geometria do espaço-tempo — e suas derivadas. T_{ab} é o tensor energia-momento associado aos campos de matéria, κ é a constante do acoplamento entre o campo e a geometria, e Λ é a constante cosmológica. Na abordagem de Synge⁶³ às equações (0.1) elas são consideradas a definição do tensor energia-momento T_{ab} , ou seja, o conjunto de equações que determinam T_{ab} a partir de uma dada métrica g_{ab} . Esta abordagem, denominada por Synge de método g , é o análogo do tratamento newtoniano em que se admite um potencial gravitacional ϕ e se usa a equação de Poisson para calcular a correspondente distribuição de matéria. A procura de soluções das equações de Einstein pelo método g pode ser feita de uma maneira sistemática e simples se incorporarmos a caracterização invariante do tensor energia-momento através da classificação de Segre. Neste enfoque, parte-se de

uma dada métrica g_{ab} , calcula-se o tensor de Ricci e obtém-se a classe de Segre à qual ele pertence. A necessidade de concordância entre a classificação algébrica de G_{ab} e a de T_{ab} , exigida pelas equações de Einstein, é então empregada para determinar prováveis campos de matéria que podem ser usados para gerar espaços-tempo soluções das equações (0.1) (ver por exemplo Moody e Ray,⁴⁰ Rebouças e Teixeira⁵⁴⁻⁵⁶ e Santos et al.⁵⁷). Além disso, a classificação sistemática de campos de matéria é de valiosa ajuda na interpretação de novos campos obtidos, quer pelo método g de Synge, quer pela combinação de dois ou mais campos conhecidos (cf. Hall,¹⁸ Hall e Negm²² e Ferrando et al.¹²).

Um outro contexto da relatividade em que é relevante a classificação de Segre é no chamado *problema da equivalência*. Uma das hipóteses basilares da teoria da relatividade geral é a da invariância das leis físicas sob transformações de coordenadas arbitrárias. Por outro lado, a forma explícita do campo gravitacional g_{ab} (que é encontrada resolvendo-se as equações de Einstein) depende da escolha do sistema de coordenadas. Isto dá origem ao seguinte problema: dadas duas soluções das equações de Einstein (0.1), descreverão elas o mesmo campo gravitacional? Este problema foi resolvido teoricamente por Cartan,⁶ tendo Karlhede²⁹ posteriormente apresentado um algoritmo para sua implementação algébrico-computacional. Uma discussão mais detalhada do problema da equivalência pode ser encontrada em MacCallum³³⁻³⁶ incluindo os sistemas de computação algébrica SHEEP/CLASSI usados na implementação do algoritmo de Karlhede. As classificações de Segre e Petrov são usadas no passo inicial do algoritmo para fixar canonicamente (a menos de rotações eventuais) uma base vetorial para os escalares de Cartan. Para uma descrição didática, com apresentação de exemplos práticos da solução do problema da equivalência, veja Paiva.⁴¹

A classificação de Segre é também importante para o entendimento de características puramente geométricas dos espaços-tempos (cf. por exemplo Plebański,^{50,51} Crade e Hall,¹¹ Ludwig e Scanlan,³² Bona et al.⁴) e ainda na determinação invariante dos limites de famílias de métricas.^{41,42,20}

Nas últimas três décadas, principalmente após o aparecimento das teorias de super-

gravidade e de supercordas nos anos 70, ressurgiu um grande interesse pelas teorias tipo Kaluza-Klein de cinco ou mais dimensões (para uma revisão sobre este assunto ver Matos e Nieto³⁸). Essas teorias originaram-se do trabalho de Kaluza²⁸ em 1921 e são relevantes pelo menos por dois motivos. No contexto de teorias de gauge elas têm sido usadas como uma maneira elegante na tentativa de unificação das interações fundamentais da física. De um ponto de vista estritamente técnico, por outro lado, elas têm sido usadas como uma ferramenta matemática para se obter soluções exatas das equações de Einstein em quatro dimensões.^{26,27,15}

Nesta tese fazemos a classificação de um campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional e estendemos a classificação de Segre dos tensores simétricos de segunda ordem para espaços-tempos de cinco ou mais dimensões. Os principais resultados desta tese foram objeto de algumas publicações,^{57-60,23} e generalizam trabalhos anteriores referentes a espaços-tempos de três e de quatro dimensões.^{21,17}

No capítulo 1 apresentamos a classificação de Segre para tensores simétricos de segunda ordem na relatividade geral obtida através das matrizes canônicas de Jordan. Em seguida deduzimos, em bases de tétradas reais seminulas todas as formas canônicas possíveis para o tensor energia-momento de um campo escalar acoplado minimamente com o campo gravitacional. Para cada classe de campo escalar encontrada apresentamos um espaço-tempo solução das equações acopladas Einstein-campo-escalar.

No capítulo 2 obtemos a classificação de Segre para tensores simétricos de segunda ordem em teorias tipo Kaluza-Klein de cinco dimensões através do formalismo das matrizes de Jordan. Usando bases de pëntadas seminulas deduzimos um conjunto de formas canônicas para o tensor de Ricci, generalizando assim resultados anteriores para espaços-tempos de três e de quatro dimensões. Apresentamos ainda uma breve discussão sobre os grupos contínuos que deixam invariante cada uma das formas canônicas do tensor de Ricci.

No capítulo 3 demonstramos um teorema sobre autovetores de tensores simétricos de segunda ordem em uma variedade lorentziana de cinco dimensões. Empregamos este

teorema para reobter a classificação de Segre para o tensor de Ricci em espaços-tempos de cinco dimensões usando formas canônicas conhecidas da literatura sobre classificação em quatro dimensões. Encontramos ainda resultados novos concernentes à estrutura algébrica do tensor de Ricci os quais generalizam resultados conhecidos em quatro dimensões.

No capítulo 4 apresentamos estudos que realizamos sobre as matrizes de Jordan em espaços de dimensão $n \geq 3$. Os resultados são apresentados na forma de três proposições sobre produtos internos das bases de Jordan. Essas proposições são usadas para obter a classificação de tensores simétricos de segunda ordem em uma variedade lorentziana n -dimensional, generalizando assim os resultados de capítulos anteriores. Construímos ainda formas canônicas generalizadas, em bases n -ádicas seminulas correspondentes aos tipos de Segre do tensor de Ricci.

Capítulo 1

Classificação de tensores simétricos de segunda ordem na relatividade

1.1 Introdução

Quem primeiro abordou o problema da classificação algébrica de tensores simétricos de segunda ordem na relatividade parece ter sido Churchill⁸ em 1932. Sua versão segue uma linha mais geométrica e estuda os planos invariantes — espaços vetoriais bidimensionais — associados com o tensor. Posteriormente Plebański,⁵⁰ seguindo um esquema algébrico, apresentou uma classificação mais detalhada baseada em métodos espinoriais e no estudo dos autovetores da matriz associada ao tensor. Mais recentemente, discussões alternativas foram apresentadas usando-se técnicas de análise funcional,⁹ cálculo espinorial^{32,44} e estrutura de planos invariantes.^{16,10} Hall e colaboradores^{18,22} fizeram aplicações desses estudos na classificação do tensor energia-momento de diversos campos de matéria e suas combinações.

Neste capítulo descreveremos em detalhes a classificação algébrica de tensores simétricos de segunda ordem na teoria da relatividade através das formas canônicas de Jordan (FCJ) para matrizes quadradas. A compreensão deste procedimento, utilizado anteriormente por Linet³¹ e por Hall,^{17,19} será de grande valia para a generalização que faremos

nos capítulos seguintes. Embora nos reframos constantemente ao tensor de Ricci em toda a tese, as classificações que apresentaremos serão válidas para qualquer tensor simétrico de segunda ordem. No contexto da relatividade geral, devido às equações de Einstein (0.1), a classificação é extensiva ao tensor energia-momento dos campos de matéria. Nas seções seguintes descreveremos a notação de Segre para esta classificação, apresentaremos as formas canônicas para o tensor de Ricci em uma base tetrádica seminula, e faremos a classificação algébrica do tensor energia-momento T_{ab} de um campo escalar minimamente acoplado ao campo gravitacional. Mostraremos que o caráter vetorial do gradiente do campo escalar é suficiente para separar T_{ab} , de forma unívoca, em quatro diferentes classes de equivalência. Correspondente a cada classe será apresentada uma solução das equações de Einstein acopladas a um campo escalar sem massa. Uma das soluções discutidas sugere uma interpretação física alternativa para o universo estático de Einstein. Verifica-se que uma solução das equações de Einstein para radiação pura (“pure radiation”) encontrada por Petrov⁴⁷ pode ser considerada também solução para um campo escalar sem massa. Os resultados principais deste capítulo foram publicados no *Journal of Mathematical Physics*.⁵⁷

1.2 Formas canônicas para o tensor de Ricci

Vamos denotar por M a variedade espaço-tempo de 4 dimensões na qual está definida em todos os pontos uma métrica lorentziana g_{ab} com assinatura $(-+++)$, e por $T_p(M)$ o espaço vetorial tangente a M no ponto $p \in M$. Por todo este capítulo os índices latinos (a exceção de p) variam de 0 a 3. Na abordagem algébrica da classificação do tensor de Ricci em $T_p(M)$ parte-se do problema de autovalores para o tensor na forma mista R^a_b :

$$(R^a_b - \lambda \delta^a_b) v^b = 0. \quad (1.1)$$

Nesta forma o tensor pode ser visto como um operador linear $R : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$. Os vetores v^b que satisfazem o sistema de equações (1.1) são denominados autovetores

ou vetores característicos e desempenham importante papel no estudo da estrutura do operador R .

Um operador linear é dito ser de estrutura simples se ele tem n autovetores linearmente independentes, onde n é a dimensão do espaço em que ele atua.¹⁴ No presente caso, devido à assinatura lorentziana do $T_p(M)$, o operador R pode ter uma estrutura algébrica mais rica: o número de autovetores linearmente independentes pode ser menor que n (i.e., a matriz R^a_b não é em geral diagonalizável), e vetores característicos de natureza diferentes são possíveis (autovetores tipo tempo, tipo espaço e tipo nulo).

Matrizes constituem a ferramenta apropriada para o estudo dos operadores lineares. A teoria analítica dos divisores elementares mostra que uma matriz quadrada pode sempre ser reduzida a uma matriz similar com uma forma ‘normal’ ou ‘canônica’, a qual representa toda uma classe de operadores lineares.¹⁴ A investigação da estrutura destes operadores reduz-se então ao estudo das propriedades desta formas canônicas. No presente trabalho faremos uso intenso das FCJ para matrizes quadradas visando nos aprofundar um pouco mais no conhecimento da estrutura algébrica do operador R acima definido.

A teoria das matrizes de Jordan é bem estabelecida e pode ser encontrada em diversos livros sobre álgebra linear.^{14,25,61} O teorema básico é que dada uma matriz quadrada A no corpo dos complexos \mathbb{C} , sempre existe uma matriz não singular X tal que

$$X^{-1}AX = J \tag{1.2}$$

onde J , a FCJ de A , é uma matriz diagonal por blocos, os quais têm a forma

$$J_r(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Aqui r é a dimensão do *bloco de Jordan* $J_r(\lambda_k)$ e λ_k é uma raiz do polinômio característico. A forma de Jordan torna explícita a decomposição irredutível de um espaço vetorial na soma direta de subespaços invariantes sob o operador cuja matriz é A .¹⁴ As dimensões dos blocos de Jordan dão as dimensões destes subespaços e a cada bloco está associada uma única autodireção. Apesar de X em (1.2) não ser única – i.e., diferentes transformações de similaridade podem levar à mesma matriz J – a FCJ é univocamente determinada a menos de ordenamento dos blocos ao longo da diagonal.⁶¹

Convém dividir nosso estudo em duas partes; primeiro investigaremos as FCJ possíveis para aqueles R_b^a em que as raízes λ da equação característica $\det(R_b^a - \lambda \delta_b^a) = 0$ são todas reais, em seguida examinaremos os casos em que as raízes são complexas.

Vamos considerar A em (1.2) como sendo a matriz do operador R acima definido, isto é, nos restringimos ao espaço vetorial real de 4 dimensões $T_p(M)$. As FCJ e os correspondentes tipos de Segre possíveis para matrizes reais 4×4 podem ser enumeradas facilmente e são:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

(a) Segre [1, 111] (b) Segre [211] (c) Segre [31]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

(d) Segre [22] (e) Segre [4]

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Abaixo de cada FCJ está indicado o tipo (ou característica) de Segre,

que é uma lista $[r_1 r_2 \dots r_m]$ das dimensões r dos diferentes blocos de Jordan $J_r(\lambda_k)$ que aparecem naquela FCJ. Como cada bloco de Jordan está associado a uma autodireção, a quantidade m de números presentes na característica de Segre informa quantos são os autovetores linearmente independentes de R^a_b . Assim, a matriz cujo tipo de Segre é $[211]$ possui três autodireções, enquanto que para o tipo $[4]$ há apenas uma.

A degenerescência de um autovalor (isto é, a existência de dois ou mais autovetores linearmente independentes com o mesmo autovalor) é indicada colocando-se entre parênteses os dígitos correspondentes às dimensões r_i dos blocos de Jordan que envolvem aqueles autovetores. Então, se no tipo (b) tivermos $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ a característica de Segre será denotado como $[(21)1]$, e se tivermos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ então indicaremos por $[(211)]$. Nos tipos de Segre diagonais reais (isto é, o tipo $[1, 111]$ e degenerescências) sempre é possível selecionar quatro autovetores linearmente independentes, sendo um tipo tempo e os demais tipo espaço. Assinala-se neste caso a existência do autovetor tipo tempo separando o primeiro dígito dos demais por uma vírgula. Assim, para o tipo de Segre $[(1, 1)11]$ por exemplo, temos um autovalor degenerado envolvendo um autovetor tipo tempo e outro tipo espaço, além de dois autovalores não degenerados correspondentes aos outros dois autovetores tipo espaço.

Podemos perceber que a classificação de matrizes via tipos de Segre é menos minuciosa que a classificação mediante FCJ. Com efeito, a característica de Segre não indica o valor λ_k de cada autovalor, enquanto que a FCJ explicita esses valores. Duas matrizes com o mesmo tipo de Segre podem ter distintas FCJ, enquanto que matrizes com a mesma FCJ têm necessariamente o mesmo tipo de Segre.

Até aqui não levamos em consideração o caráter lorentziano da métrica; com este fim devemos então testar de algum modo se as formas canônicas acima enumeradas respeitam a assinatura da métrica definida em M . Uma maneira indireta de fazer isso é conferir a condição de simetria de R_{ab} , isto é, devemos verificar se

$$g_{ac}R^c_b = g_{bc}R^c_a \quad (1.4)$$

é verdadeira para cada um dos tipos de Segre. A equação acima coloca restrições sobre g_{ab} , e pode-se verificar que para os tipos de Segre [22] e [4] a condição de preservação da assinatura de Lorentz, ou seja, $\det(g_{ab}) < 0$, não é satisfeita.¹⁷ Portanto a simetria de R_{ab} e o caráter lorentziano de g_{ab} não podem ser simultaneamente impostos aos tipos [22] e [4]. Isto não ocorre com as formas (a), (b) e (c) e sobre elas nos deteremos a fim de estudarmos suas estruturas algébricas.

Tendo em vista um tratamento de forma unificada para os campos de matéria e de radiação, é conveniente introduzir-se no $T_p(M)$ uma téttrade $\mathcal{B} = \{l, m, x, y\}$ contendo vetores no cone de luz e vetores espaciais. Os únicos produtos internos não nulos em \mathcal{B} são dados por

$$l^a m_a = x^a x_a = y^a y_a = 1, \quad (1.5)$$

logo l e m são vetores tipo nulo e x e y são tipo espaço. A base \mathcal{B} é denominada *téttrade real seminula* e em termos dela a métrica é expressa como

$$g_{ab} = 2l_{(a}m_{b)} + x_a x_b + y_a y_b. \quad (1.6)$$

Fazendo uso do subgrupo de Lorentz das rotações nulas de \mathcal{B} , Hall^{16,17} mostrou que para os tipos de Segre remanescentes (a), (b) e (c), um dado tensor R_{ab} pode ser expresso em uma e apenas uma das seguintes formas abaixo:

tipo de Segre

$$[1, 111] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_{b)} + \rho_2 (l_a l_b + m_a m_b) + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b, \quad (1.7)$$

$$[211] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_{b)} \pm l_a l_b + \rho_2 x_a x_b + \rho_3 y_a y_b, \quad (1.8)$$

$$[31] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_{b)} + 2l_{(a}x_{b)} + \rho_1 x_a x_b + \rho_2 y_a y_b, \quad (1.9)$$

onde $\rho_1, \dots, \rho_4 \in \mathbb{R}$. Para a forma canônica correspondente ao tipo de Segre [1, 111] temos

o seguinte conjunto de autovetores e respectivos autovalores:

$$\begin{aligned}l - m &\longrightarrow \rho_1 - \rho_2, \\l + m &\longrightarrow \rho_1 + \rho_2, \\x &\longrightarrow \rho_3, \\y &\longrightarrow \rho_4.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Correspondente ao tipo de Segre [211] temos os seguintes autovetores e autovalores:

$$\begin{aligned}l &\longrightarrow \rho_1, \\x &\longrightarrow \rho_2, \\y &\longrightarrow \rho_3,\end{aligned}\tag{1.11}$$

e finalmente, associado ao tipo de Segre [31] temos

$$\begin{aligned}l &\longrightarrow \rho_1, \\y &\longrightarrow \rho_2.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Conforme a degenerescência dos autovalores teremos diferentes tipos de Segre, que são denominados *especializações* ou *degenerescências*. O caso [1, 111] dá origem a seis especializações: [1, 1(11)], [(1, 1)11], [(1, 1)(11)], [1, (111)], [(1, 11)1] e [(1, 111)]; o caso [211] dá origem a [2(11)], [(21)1], [(211)]; e o caso [31] apresenta apenas a degenerescência [(31)].

Temos assim concluída a classificação algébrica do tensor de Ricci quando seus autovalores são todos reais. O caso de autovalores complexos pode ser examinado mais facilmente após o reconhecimento de algumas propriedades dos subespaços bidimensionais de $T_p(M)$. É o que faremos a seguir.

1.2.1 Propriedades algébricas do tensor de Ricci

Os subespaços bidimensionais (ou *planos*) de $T_p(M)$ podem ser classificados de acordo com o número de direções nulas que contêm. Um plano é dito tipo tempo, tipo nulo ou

tipo espaço conforme ele contenha duas, uma ou nenhuma direção nula respectivamente. O plano ortogonal a um plano tipo tempo (tipo espaço) é tipo espaço (tipo tempo); o plano ortogonal a um plano tipo nulo é tipo nulo.

Dizemos que um plano $\mathcal{P} \in T_p(M)$ é invariante sob R se para todo vetor $v \in \mathcal{P}$ então $Rv \in \mathcal{P}$. Em geral um plano invariante pode ou não conter direções invariantes (autodireções, autovetores). Denominamos *autoplano* um plano invariante cujas direções são todas invariantes.

Interessantes resultados concernentes aos planos do $T_p(M)$ invariantes sob R^a_b podem ser obtidos examinando-se (1.7)-(1.9). Hall^{16,17} mostrou que

- (i) existe sempre no $T_p(M)$ um plano que é invariante sob R^a_b ;
- (ii) se \mathcal{P} é um plano em $T_p(M)$ invariante sob R^a_b , então o plano ortogonal a \mathcal{P} também é invariante sob R^a_b ;
- (iii) existirá no $T_p(M)$ um plano tipo nulo invariante sob R^a_b se e somente se R^a_b tiver uma única autodireção nula (que necessariamente estará contida nesse plano);
- (iv) existirá no $T_p(M)$ um plano tipo espaço (ou tipo tempo) invariante sob R^a_b se e somente se R^a_b tiver dois autovetores ortogonais tipo espaço (que necessariamente estarão situados nesse plano).

Quando a equação característica $\det(R^a_b - \lambda\delta^a_b) = 0$ tem raízes complexas é possível mostrar,^{16,17} usando (ii) e (iv) acima e a simetria de R_{ab} , que o tensor de Ricci é sempre diagonalizável e, em uma base de tétradas convenientemente escolhida \mathcal{B} , se reduz à seguinte forma

$$[z \bar{z} 11] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a} m_{b)} + \rho_2 (l_a l_b - m_a m_b) + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b, \quad (1.13)$$

onde $\rho_1, \dots, \rho_4 \in \mathbb{R}$ e $\rho_2 \neq 0$. A notação de Segre $[z \bar{z} 11]$ para este caso é feita com o uso de z e \bar{z} para denotar autovalores complexos conjugados. O tensor de Ricci tem dois autovetores complexos $l \pm im$ com correspondentes autovalores $\rho_1 \pm i\rho_2$, e dois autovetores

reais x e y com autovalores ρ_3 e ρ_4 respectivamente. Uma única especialização é possível para esta classe: $[z \bar{z} (11)]$. Com isto completamos o quadro da classificação de Segre do tensor de Ricci (ou qualquer tensor simétrico de segunda ordem na teoria de Einstein da relatividade).

Devido às equações de Einstein (0.1), a classificação do tensor de Ricci conforme (1.7)-(1.9) e (1.13) coincide com a do tensor energia-momento T_{ab} dos campos de matéria. Entretanto, aqui temos de levar em conta mais algumas restrições impostas pela teoria da relatividade sobre esses campos. São as denominadas condições de energia:^{24,50}

- (i) a densidade de energia local medida por um observador com 4-velocidade u^a é não-negativa, isto é, $T_{ab}u^a u^b \geq 0$.
- (ii) a velocidade do fluxo de energia não pode exceder a velocidade da luz. Em outras palavras, se u^a é um vetor tipo tempo ele deve obedecer à relação $s^a s_a \leq 0$, onde $s^a \equiv T^a_b u^b$.

Pode-se mostrar¹⁶ que os tipos de Segre [31] e $[z \bar{z} 11]$, assim como suas degenerescências, não obedecem a estas condições. Sobre o tipo de Segre $[1, 111]$ as condições de energia impõem que

$$\rho_1 \leq 0, \quad \rho_2 \geq 0, \quad \rho_1 - \rho_2 \leq \rho_3 \leq \rho_2 - \rho_1, \quad \rho_1 - \rho_2 \leq \rho_4 \leq \rho_2 - \rho_1$$

na forma canônica (1.7).^{17,24} Sobre o tipo de Segre [211] as condições de energia exigem o sinal positivo no segundo termo de (1.8)^{17,24} além de

$$\rho_1 \leq 0, \quad \rho_1 \leq \rho_2 \leq -\rho_1, \quad \rho_1 \leq \rho_3 \leq -\rho_1.$$

1.3 Classificação do campo escalar

Faremos aqui a classificação algébrica de um campo escalar usando a tetrada seminula descrita na seção anterior. O tensor energia-momento T_{ab} de um campo escalar massivo

ϕ minimamente acoplado ao campo gravitacional é dado por

$$T_{ab} = \phi_a \phi_b - \frac{1}{2} g_{ab} (\phi_c \phi_d g^{cd} + m^2 \phi^2) \quad (1.14)$$

onde m é a massa do campo escalar, $\phi_a \equiv \phi_{;a}$, e ponto-e-vírgula denota a derivada covariante.

Nossos estudos visando a classificação de (1.14) mostraram que o tensor energia-momento de um campo escalar pode ser separado em quatro diferentes classes conforme o caráter vetorial de ϕ^a .

Classe (i): ϕ^a é um vetor tipo tempo. Neste caso é sempre possível encontrar dois vetores nulos l e m tais que $l^a m_a = 1$, e ϕ^a pode ser escrito como

$$\phi^a = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (l^a - m^a), \quad (1.15)$$

onde α é um escalar. Em seguida escolhemos dois vetores tipo espaço x e y , pertencentes ao subespaço bidimensional ortogonal ao plano gerado por l e m , de modo a formar uma base tetrádica seminula \mathcal{B} . Tendo em conta as equações (1.5), (1.6), (1.14) e (1.15), uma expressão canônica para T_{ab} é então

$$T_{ab} = 2\sigma_0 l_{(a} m_{b)} + \sigma_1 (l_a l_b + m_a m_b) + \sigma_2 (x_a x_b + y_a y_b), \quad (1.16)$$

onde

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad \sigma_1 = \frac{\alpha^2}{2}, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2} (m^2 \phi^2 - \alpha^2). \quad (1.17)$$

Vemos que na base \mathcal{B} , T_{ab} apresenta uma forma análoga à forma canônica (1.7). Contudo, é preciso conhecer a degenerescência dos autovalores e o caráter dos autovetores para determinar corretamente o tipo de Segre. Verifica-se facilmente que um conjunto completo de autovetores linearmente independentes e os correspondentes autovalores de T^a_b em

(1.16) é dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l} - \mathbf{m} &\longrightarrow \sigma_0 - \sigma_1, \\
 \mathbf{l} + \mathbf{m} &\longrightarrow \sigma_2, \\
 \mathbf{x} &\longrightarrow \sigma_2, \\
 \mathbf{y} &\longrightarrow \sigma_2.
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

Observe-se que T_b^a tem um autovetor tipo tempo ($\mathbf{l} - \mathbf{m}$) e três autovetores tipo espaço, havendo uma tripla degenerescência em relação ao autovalor σ_2 . Portanto, o tipo de Segre para esta classe é $[1, (111)]$, que é o mesmo tipo de Segre de um fluido perfeito.³⁰ Em outras palavras, um campo escalar desta classe pode desempenhar o mesmo papel que um fluido perfeito na relatividade geral. Este resultado é similar ao obtido por Madsen³⁷ embora por outro caminho.

Classe (ii): ϕ^a é um vetor tipo espaço. Neste caso escolhemos uma base vetorial seminula tal que $\phi^a = \gamma y^a$ (γ um escalar real). Tendo em conta (1.5) e (1.6) verificamos que a forma canônica para (1.14) pode ser escrita como

$$T_{ab} = 2 \rho_0 l_{(a} m_{b)} + \rho_0 x_a x_b + \rho_1 y_a y_b, \tag{1.19}$$

onde

$$\rho_0 = -\frac{1}{2}(m^2 \phi^2 + \gamma^2), \quad \rho_1 = -\frac{1}{2}(m^2 \phi^2 - \gamma^2). \tag{1.20}$$

Para esta classe um conjunto de autovetores linearmente independentes e os correspondentes autovalores é dado por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{l} - \mathbf{m} &\longrightarrow \rho_0, \\
 \mathbf{l} + \mathbf{m} &\longrightarrow \rho_0, \\
 \mathbf{x} &\longrightarrow \rho_0, \\
 \mathbf{y} &\longrightarrow \rho_1.
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Vê-se novamente que T^a_b tem um autovetor tipo tempo ($1 - m$) e três autovetores tipo espaço, mas agora o autovalor correspondente ao autovetor tipo tempo é degenerado. Note-se que os vetores tipo nulo l e m são também autovetores neste caso. Contudo, a combinação que escolhemos torna evidente a existência de autovetor tipo tempo. Esta situação ocorre sempre que há um autovetor tipo tempo com autovalor degenerado. O tipo de Segre é portanto $[(1, 11)1]$. Isto mostra que campos escalares desta classe podem simular um fluido taquiônico (“tachyon fluid”).³⁰

Classe (iii): ϕ^a é um vetor tipo nulo. Escolhendo uma base tetradica seminula \mathcal{B} com $\phi^a = \vartheta l^a$ (ϑ um escalar real) tal que l , m , x e y satisfaçam as eqs. (1.5) e (1.6), encontramos a seguinte forma canônica para (1.14):

$$T_{ab} = 2\mu l_{(a}m_{b)} + l_a l_b + \mu(x_a x_b + y_a y_b), \quad (1.22)$$

onde $\mu = -\frac{1}{2}m^2\phi^2$. Novamente, para a completa caracterização deste tensor energia-momento precisamos encontrar os autovetores, autovalores e o correspondente tipo de Segre. Pode-se verificar facilmente que os três vetores l , x e y constituem um conjunto completo de autovetores linearmente independentes associados ao autovalor triplamente degenerado $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$. Portanto, o tipo de Segre correspondente à forma canônica (1.22) é $[(211)]$. Este é o mesmo tipo de Segre do campo eletromagnético nulo ou o do campo de radiação pura.³⁰ O campo eletromagnético nulo é caracterizado por apresentar $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ e $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$,⁶² onde \mathbf{E} e \mathbf{H} denotam o campo elétrico e o campo magnético respectivamente, ou seja, representa uma onda eletromagnética plana. Já o campo de radiação pura representa a superposição de ondas incoerentes que se propagam numa mesma direção como, por exemplo, campos de neutrinos ou ondas gravitacionais de alta frequência.³⁰ À primeira vista pode-se pensar que um campo escalar da *classe (iii)* pode representar esses dois campos na relatividade geral. Contudo, isto não é verdade pois o traço do tensor energia-momento (1.22) não é zero, a menos que $m = 0$. Ou seja, apenas campos escalares sem massa nesta classe podem representar ambos os campos eletromagnéticos. Esta característica possibilita interpretações alternativas para algumas soluções de espaço-tempo

Einstein-Maxwell. Na próxima seção discutiremos uma solução das equações acopladas Einstein-campo-escalar sem massa que ilustra esta ambigüidade.

Classe (iv): $\phi^a = 0$. Este caso ocorre quando o campo escalar ϕ é constante. Tendo em vista (1.6) encontra-se que o tensor energia-momento (1.14) pode ser posto na forma

$$T_{ab} = 2\xi l_{(a}m_{b)} + \xi(x_a x_b + y_a y_b) \quad (1.23)$$

com $\xi = -\frac{1}{2}m^2\phi^2$. Verifica-se facilmente que o conjunto de autovetores linearmente independentes $l - m$, $l + m$, x e y estão associados ao mesmo autovalor $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$. Portanto, a FCJ correspondente tem $[(1, 111)]$ como característica de Segre. Esta classe de campos pode representar soluções de vácuo com ou sem constante cosmológica Λ .³⁰

Para encerrar esta seção gostaríamos de mencionar que as condições de energia são identicamente satisfeitas para as quatro classes de equivalência apresentadas acima já que $m^2\phi^2 \geq 0$.

1.4 Equações acopladas Einstein-campo-escalar sem massa

Nesta seção discutiremos soluções para as equações acopladas Einstein-campo-escalar sem massa, que são realizações das diferentes classes de campo escalar estudadas na seção anterior. Apesar da classificação ter sido feita para campos escalares massivos, ela continua válida no limite $m \rightarrow 0$, já que o termo de massa modifica todos os autovalores pela mesma quantidade.

Consideremos um espaço-tempo M de 4 dimensões provido da métrica espacialmente isotrópica de Einstein

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{f^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1.24)$$

onde

$$f = 1 + \frac{1}{4a^2}(x^2 + y^2 + z^2), \quad (1.25)$$

onde a é uma constante. Vamos mostrar que o espaço-tempo (1.24) acima pode ser gerado por um campo escalar sem massa da *classe (i)*. De início precisamos verificar se o tipo de Segre do tensor de Ricci relativo a (1.24) é condizente com esta classe de campos escalares. Determinamos a característica de Segre [1, (111)] para o tensor de Ricci usando o pacote CLASSI^{1,36} escrito na linguagem de computação algébrica SHEEP^{13,36} (para detalhes de cálculo ver Rebouças & Teixeira⁵⁵). Como a geometria (1.24) é espacialmente isotrópica, é natural procurar por um campo escalar cujo tensor energia-momento T_{ab} seja também espacialmente isotrópico. O mais simples campo escalar sem massa da *classe (i)* que encontramos, capaz de engendrar o espaço-tempo (1.24), foi

$$\phi(t) = \alpha t + \beta; \quad \alpha, \beta = \text{const.} \quad (1.26)$$

De fato, o campo escalar (1.26) claramente satisfaz a equação de campo sem fontes

$$\phi^{;a}_{;a} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} \phi_{,a} g^{ab})_{,b} = 0, \quad (1.27)$$

onde $g \equiv \det(g_{ab})$. Um cálculo direto com o pacote CORD do sistema SHEEP dá os componentes não nulos do tensor de Einstein para o elemento de linha (1.24):

$$G^{00} = 3/a^2, \quad G^{11} = G^{22} = G^{33} = -f^2/a^2. \quad (1.28)$$

As equações de campo de Einstein reduzem-se, portanto, a um conjunto de duas equações algébricas, que podem ser combinadas para dar a solução

$$\Lambda = 2/a^2 = \alpha^2, \quad (1.29)$$

onde por simplicidade fizemos $\kappa = 1$ nas equações (0.1). A solução acima representa uma interpretação física alternativa à sugerida por Einstein para a (1.24). Ou seja, nós mostramos que o modelo estático de Einstein pode ser gerado também por um campo

escalar dependente do tempo. Rebouças e Teixeira⁵⁵ encontraram igualmente uma fonte alternativa para o universo de Einstein composta por um fluido não estático com *spin* combinado com um campo de Proca.

Como um exemplo de realização da *classe (ii)* de campos escalares consideremos o seguinte elemento de linha⁵⁶

$$ds^2 = -\cos^2(r/a) dt^2 + dr^2 + a^2 \sin^2(r/a) d\phi^2 + dz^2, \quad (1.30)$$

onde a é uma constante. A característica de Segre do tensor de Ricci da geometria (1.30) é $[(1, 11)1]$. Por outro lado, o campo escalar sem massa mais simples possível dentro da *classe (ii)* pode ser escrito como

$$\phi(z) = \gamma z + \delta; \quad \gamma, \delta = \text{const.} \quad (1.31)$$

As equações de Einstein para o espaço-tempo (1.30) são identicamente satisfeitas por (1.31) desde que as constantes Λ , a e γ satisfaçam a⁵⁶

$$\Lambda = 2/a^2 = \gamma^2. \quad (1.32)$$

A *classe (iii)* de campos escalares pode ser realizada pelo espaço-tempo

$$ds^2 = -dt^2 + C^2(t, z)(dx^2 + dy^2) + dz^2, \quad (1.33)$$

onde $C(t, z)$ obedece a equação diferencial

$$C_{,tt} = C_{,zz} = -bC, \quad (1.34)$$

e b é uma constante. Esta métrica, estudada por Petrov,⁴⁷ pode ser interpretada como uma radiação pura homogênea ($T_{ab} = b k_a k_b$, $k_a k^a = 0$) solução das equações de Einstein,³⁰ e o tipo de Segre do tensor de Ricci é $[(211)]$. Vamos então procurar um campo escalar sem

massa cujo tensor energia-momento associado tenha este tipo de Segre. Entre os campos escalares que examinamos o mais simples, e com a característica desejada, é dado por

$$\phi(t, z) = \vartheta(t - z) + v; \quad \vartheta, v = \text{const.} \quad (1.35)$$

Como ϕ_a é um vetor tipo nulo, o tensor energia-momento associado a (1.35) é do tipo [(211)]. Além disto, como $C_{,t} = -C_{,z}$, o campo escalar $\phi(t, z)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon completa

$$\phi_{,tt} - \frac{1}{C^2} (\phi_{,xx} + \phi_{,yy}) + \frac{2}{C} (C_{,t} \phi_{,t} - C_{,z} \phi_{,z}) - \phi_{,zz} = 0. \quad (1.36)$$

Usando novamente o programa de computação algébrica CORD nós descobrimos que os únicos componentes não nulos do tensor de Einstein para a métrica (1.33) são

$$G_{00} = -G_{03} = G_{33} = 2b. \quad (1.37)$$

As equações de campo de Einstein neste caso são satisfeitas desde que

$$\Lambda = 0, \quad \vartheta = \pm\sqrt{2b}. \quad (1.38)$$

Esta solução ilustra a ambigüidade que nós mencionamos na seção anterior com respeito a esta classe de campo escalar.

Por fim observemos que qualquer solução das equações $G_{ab} = -\Lambda g_{ab}$, $\Lambda = \text{const}$ (espaços de Einstein) pode ser tomada como realização da *classe (iv)* de campos escalares (i.e., $\phi = \text{const}$), como por exemplo os espaços-tempos de de-Sitter e anti-de-Sitter.

Capítulo 2

Classificação do tensor de Ricci em teorias do tipo Kaluza-Klein 5-D

2.1 Introdução

Observando-se a literatura científica das últimas três décadas nota-se o aparecimento de uma considerável quantidade de trabalhos envolvendo teorias do tipo Kaluza-Klein (ver, por ex., Matos e Nieto³⁸ para uma revisão recente destas teorias). Isto tem sido motivado principalmente pela questão da unificação da gravidade com as outras interações fundamentais da física. De um ponto de vista estritamente técnico, por outro lado, essas teorias têm servido como um caminho para encontrar-se novas soluções das equações de Einstein em quatro dimensões, sem atribuir-se, contudo, aos componentes adicionais do tensor métrico qualquer significado físico. Recentemente porém, diversas aplicações destas teorias a modelos cosmológicos pentadimensionais têm aparecido na literatura apresentando interpretações físicas para a quinta dimensão.^{2, 7, 39, 64}

Usando a teoria das matrizes de Jordan faremos neste capítulo a classificação algébrica de tensores simétricos de segunda ordem definidos sobre uma variedade lorentziana pentadimensional M (a bem da simplicidade, no restante desta tese nos referiremos a tais variedades como variedades 5-D ou n -D, conforme a dimensão). Mostraremos que em

um ponto $p \in M$ o tensor de Ricci pode ser classificado em quatro tipos de Segre e suas vinte e duas degenerescências. Usando bases de pêntadas reais seminulas deduzimos um conjunto de formas canônicas para R_{ab} , generalizando resultados anteriores obtidos para espaços-tempos de três e de quatro dimensões.^{21,16} Apresentaremos também uma breve discussão sobre os grupos contínuos que deixam invariante cada uma das formas canônicas obtidas para R_{ab} . Os resultados deste capítulo foram objeto de duas publicações.^{58,59}

2.2 Tipos de Segre em espaços-tempos 5-D

Para efetuarmos alguns cálculos em espaços-tempos 5-D, e também em dimensões mais altas, demonstraremos aqui um teorema sobre o produto interno de vetores nulos que é uma extensão de um resultado já conhecido em espaços-tempos 4-D.

Teorema 1 *Em um espaço vetorial real \mathcal{V} n -dimensional provido de uma métrica lorentziana $g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, dois vetores nulos são ortogonais se e somente se eles são colineares.*

Demonstração:

Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} dois vetores nulos em \mathcal{V} , i.e.,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1)$$

Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são colineares, ou seja, $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$ ($k \neq 0$), então tomando o produto interno de ambos os membros desta equação por \mathbf{A} e usando (2.1) obtemos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. Reciprocamente, suponhamos que os vetores nulos \mathbf{A} e \mathbf{B} são ortogonais, isto é, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. É sempre possível escolher uma base na qual $g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ com $\mathbf{A} = (a, a, 0, \dots, 0)$ e $\mathbf{B} = (b, c, d, 0, \dots, 0)$, onde $a \neq 0$ e $b^2 = c^2 + d^2$. Portanto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ implica $b = c$ e consequentemente $d = 0$. Logo os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} são colineares.

Neste e no próximo capítulo denotaremos por M a variedade espaço-tempo 5-D provida de uma métrica lorentziana g com assinatura $(-++++)$, $T_p(M)$ denota o espaço vetorial

tangente a M no ponto $p \in M$ e índices latinos (a exceção de p) variam de 0 a 4. A classificação algébrica do tensor de Ricci é feita a partir do problema de autovalores para o tensor na forma mista, conforme definido no Cap. 1 eq. (1.1), lembrando que agora R^a_b é uma matriz 5×5 .

Vamos considerar primeiro o caso em que as raízes da equação característica associada são reais. As FCJ possíveis para matrizes reais 5×5 (com os respectivos tipos de Segre) são:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(a) Segre [5]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(b) Segre [41]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) Segre [32]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(d) Segre [311]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(e) Segre [221]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

(f) Segre [2111]

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

(g) Segre [1,1111]

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$.

Mostraremos agora que o caráter lorentziano da métrica g definida sobre M , juntamente com a simetria de R_{ab} , excluem os casos (a), (b), (c) e (e) acima. A equação matricial para o caso (a) é

$$X^{-1}RX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

onde X é a matriz da transformação e R é a matriz do tensor R^a_b . Multiplicando (2.2) à esquerda por X e igualando as colunas da equação matricial resultante, obtemos o seguinte conjunto de equações vetoriais (*cadeia de Jordan*):

$$RX_1 = \lambda_1 X_1, \quad (2.3)$$

$$RX_2 = \lambda_1 X_2 + X_1, \quad (2.4)$$

$$RX_3 = \lambda_1 X_3 + X_2, \quad (2.5)$$

$$RX_4 = \lambda_1 X_4 + X_3, \quad (2.6)$$

$$RX_5 = \lambda_1 X_5 + X_4, \quad (2.7)$$

onde os \mathbf{X}_A 's ($A = 1, \dots, 5$) são os vetores coluna da matriz X e constituem uma base de Jordan. Como R_{ab} é simétrico, usando (2.3) e (2.4) obtemos $\lambda_1 \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \lambda_1 \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_1$, onde os produtos escalares definidos pela métrica lorentziana g são indicados por um ponto entre os vetores. Vemos assim que \mathbf{X}_1 é um vetor do tipo nulo. Analogamente, usando as equações (2.3), (2.5) e (2.6), encontramos $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$ e $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_3 = 0$. Usando este último resultado e as equações (2.4) e (2.5) obtemos $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$. Conclui-se então que \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são vetores nulos e ortogonais um ao outro. Como a métrica sobre M é localmente lorentziana, esses vetores são colineares, portanto X seria uma matriz singular. Isto mostra que R_b^a não pode se reduzir à FCJ [5] mediante transformações de similaridade.

Chamando de Y a matriz da transformação de similaridade tal que $Y^{-1}RY = J$, onde agora J é a matriz do caso (b), obtemos, de maneira análoga ao caso anterior, a seguinte cadeia de Jordan:

$$R \mathbf{Y}_1 = \lambda_1 \mathbf{Y}_1, \quad (2.8)$$

$$R \mathbf{Y}_2 = \lambda_1 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1, \quad (2.9)$$

$$R \mathbf{Y}_3 = \lambda_1 \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2, \quad (2.10)$$

$$R \mathbf{Y}_4 = \lambda_1 \mathbf{Y}_4 + \mathbf{Y}_3, \quad (2.11)$$

$$R \mathbf{Y}_5 = \lambda_2 \mathbf{Y}_5, \quad (2.12)$$

onde os \mathbf{Y}_A 's ($A = 1, \dots, 5$) são vetores coluna da matriz Y . Observemos que no caso anterior a sequência de operações que nos levou a descartar o tipo de Segre [5] envolveu apenas as quatro primeiras equações da cadeia de Jordan. Como as equações (2.8)–(2.11) são formalmente idênticas àquelas equações, realizando a mesma sequência de cálculos constatamos que neste caso \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 são vetores nulos e ortogonais, logo colineares. Portanto, Y seria singular, mostrando que R_b^a tampouco pode assumir a FCJ [41] mediante similaridade.

Com procedimento análogo aos casos anteriores obtemos a cadeia de Jordan para o caso (c):

$$R\mathbf{Z}_1 = \lambda_1\mathbf{Z}_1, \quad (2.13)$$

$$R\mathbf{Z}_2 = \lambda_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1, \quad (2.14)$$

$$R\mathbf{Z}_3 = \lambda_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2, \quad (2.15)$$

$$R\mathbf{Z}_4 = \lambda_2\mathbf{Z}_4, \quad (2.16)$$

$$R\mathbf{Z}_5 = \lambda_2\mathbf{Z}_5 + \mathbf{Z}_4, \quad (2.17)$$

onde denotamos por \mathbf{Z}_A ($A = 1, \dots, 5$) os vetores colunas da matriz Z da transformação de similaridade $Z^{-1}RZ = J$. Como R_{ab} é simétrico, das equações (2.13) e (2.14) facilmente obtemos

$$\lambda_1\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2 = \lambda_1\mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_1. \quad (2.18)$$

A equação (2.18) mostra que \mathbf{Z}_1 é um vetor nulo. Analogamente, as eqs. (2.16) e (2.17) nos levam a concluir que \mathbf{Z}_4 é também um vetor nulo. Além disso, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ das eqs. (2.13) e (2.16) vemos que $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_4 = 0$. Se $\lambda_1 = \lambda_2$ as equações (2.13), (2.16) e (2.17) implicam de novo em $\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_4 = 0$. Ou seja, \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_4 são ambos vetores nulos e ortogonais um ao outro. Como a métrica g sobre M é localmente lorentziana os vetores \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_4 devem ser colineares. Assim, Z é uma matriz singular, o que contradiz a hipótese subjacente às transformações de similaridade. Portanto, em um ponto $p \in M$ o tensor de Ricci definido sobre uma variedade 5-D lorentziana não pode ser reduzido ao tipo de Segre [32] ou sua degenerescência [(32)].

Quanto ao tipo de Segre [221], por cálculos análogos podemos mostrar que a transformação de similaridade $W^{-1}RW = J$ fornece a seguinte cadeia de Jordan:

$$R\mathbf{W}_1 = \lambda_1\mathbf{W}_1, \quad (2.19)$$

$$R\mathbf{W}_2 = \lambda_1\mathbf{W}_2 + \mathbf{W}_1, \quad (2.20)$$

$$R\mathbf{W}_3 = \lambda_2\mathbf{W}_3, \quad (2.21)$$

$$R W_4 = \lambda_2 W_4 + W_3, \quad (2.22)$$

$$R W_5 = \lambda_3 W_5, \quad (2.23)$$

onde denotamos por W_A ($A = 1, \dots, 5$) os vetores colunas da matriz W . Como os dois pares de equações (2.19)–(2.20) e (2.21)–(2.22) têm a mesma estrutura algébrica dos dois pares (2.13)–(2.14) e (2.16)–(2.17) do caso (c), podemos de modo semelhante usar essas equações para mostrar que W_1 e W_3 são vetores nulos. Além disso, independentemente de $\lambda_1 = \lambda_2$ ou $\lambda_1 \neq \lambda_2$ podemos mostrar que W_1 e W_3 são ortogonais um ao outro. Então, em um ponto $p \in M$, o tensor de Ricci, definido sobre uma variedade lorentziana 5-D, não pode ser levado às FCJ correspondentes aos tipos de Segre [221], [(22)1], [2(21)] e [(221)].

Em suma, para autovalores reais ficamos apenas com os casos (d), (f) e (g) e suas degenerescências como possíveis FCJ para R^a_b . Em outras palavras, quando os autovalores são reais, um tensor simétrico de segunda ordem definido sobre uma variedade 5-D lorentziana M tem como característica de Segre uma das seguintes possibilidades em um ponto $p \in M$:

- (i) [1, 1111] e suas degenerescências [1, 11(11)], [(1, 1)111], [1, (11)(11)], [(1, 1)(11)1], [1, 1(111)], [(1, 11)11], [(1, 1)(111)], [(1, 11)(11)], [1, (1111)], [(1, 111)1] e [(1, 1111)];
- (ii) [2111] e suas especializações [21(11)], [(21)11], [(21)(11)], [2(111)], [(211)1] e [(2111)];
- (iii) [311] e suas degenerescências [3(11)], [(31)1] e [(311)].

Na verdade, para completar a classificação para os casos em que os autovalores são reais, precisamos mostrar que os tipos de Segre acima são consistentes com a simetria de R_{ab} e o caráter lorentziano da métrica g_{ab} . Na próxima seção, além desta demonstração, deduziremos representações para cada forma canônica de R_{ab} em termos de pêntadas seminulas de vetores.

No restante desta seção discutiremos os casos em que R^a_b tem autovalores complexos. Para isto usaremos uma abordagem similar àquela empregada por Hall¹⁷ ao fazer a

classificação do tensor de Ricci em 4-D.

Suponhamos que R^a_b tenha um autovalor complexo $z_1 = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$) associado ao autovetor $V = Y + iZ$, onde $Y, Z \in T_p(M)$, com componentes $V^a = Y^a + iZ^a$ ($Y^a, Z^a \in \mathbb{R}$) relativos a uma base na qual os componentes R^a_b sejam reais. A equação de autovalores

$$R^a_b V^b = z_1 V^a \quad (2.24)$$

implica

$$R^a_b \bar{V}^b = \bar{z}_1 \bar{V}^a, \quad (2.25)$$

onde o autovalor $\bar{z}_1 = \alpha - i\beta$ e onde $\bar{V}^a = Y^a - iZ^a$ são os componentes de um segundo autovetor \bar{V} . Como R_{ab} é simétrico nós temos $\bar{V}_a R^a_b V^b = V_a R^a_b \bar{V}^b$, que juntamente com as eqs. (2.24) e (2.25) fornece $\bar{V}_a V^a = 0$, ou seja

$$Y_a Y^a + Z_a Z^a = 0. \quad (2.26)$$

Desta última equação segue-se que um dos vetores Y ou Z é tipo tempo e o outro tipo espaço ou ambos são nulos e, como $\beta \neq 0$, não colineares. Independente de Y e Z serem ambos vetores tipo nulos, ou um tipo tempo e o outro tipo espaço, a parte real e imaginária de (2.24) dá

$$R^a_b Y^b = \alpha Y^a - \beta Z^a, \quad (2.27)$$

$$R^a_b Z^b = \beta Y^a + \alpha Z^a. \quad (2.28)$$

Logo, em ambos os casos os vetores Y e Z geram um subespaço bidimensional tipo tempo de $T_p(M)$, que é invariante sob R^a_b . Ortogonal a este subespaço há um subespaço tridimensional de $T_p(M)$ que é tipo espaço, devendo portanto ter três vetores tipo espaço (x, y e z , digamos) linearmente independentes e autovetores de R^a_b com autovalores reais (ver a próxima seção para mais detalhes sobre este ponto). Estes autovetores, juntamente com V e \bar{V} , completam um conjunto de cinco autovetores linearmente independentes de

R^a_b em $p \in M$. Portanto, quando existe um autovalor complexo R^a_b é necessariamente diagonalizável e possui três autovalores reais. Os tipos de Segre possíveis são então $[z \bar{z} 111]$ e suas especializações $[z \bar{z} 1(11)]$ e $[z \bar{z} (111)]$.

Os resultados da presente seção podem ser resumidos no seguinte teorema:

Teorema 2 *Seja M uma variedade real pentadimensional provida de uma métrica lorentziana g de assinatura $(- + + +)$. Seja R um tensor simétrico de segunda ordem definido em qualquer ponto $p \in M$. Então R pode ter apenas os seguintes tipos de Segre: $[1, 1111]$, $[2111]$, $[311]$, $[z \bar{z} 111]$, ou alguma de suas degenerescências.*

2.3 Formas canônicas

Nesta seção veremos como, para cada tipo de Segre do teorema 2, o tensor de Ricci pode ser adequadamente escrito em uma base seminula, permitindo identificar facilmente sua característica de Segre uma vez escrito o tensor nessa base.

Consideremos a pêntada de vetores $\mathcal{P} = \{l, m, x, y, z\}$, tal que os únicos produtos internos não nulos são dados por

$$l^a m_a = x^a x_a = y^a y_a = z^a z_a = 1. \quad (2.29)$$

Logo l e m são vetores do tipo nulo e x, y e z são vetores tipo espaço.

Podemos combinar dois a dois todos os vetores da base \mathcal{P} de modo a formar tensores simétricos de segunda ordem. Em um ponto qualquer p em M o conjunto de todos os tensores simétricos de segunda ordem definidos sobre M constitui um espaço vetorial \mathcal{V}_p de dimensão 15 que pode ser gerado pelos 15 tensores simétricos de base

$$\begin{aligned} l_a l_b, m_a m_b, x_a x_b, y_a y_b, z_a z_b, 2l_{(a} m_{b)}, 2l_{(a} x_{b)}, 2l_{(a} y_{b)}, 2l_{(a} z_{b)}, \\ 2m_{(a} x_{b)}, 2m_{(a} y_{b)}, 2m_{(a} z_{b)}, 2x_{(a} y_{b)}, 2x_{(a} z_{b)}, 2y_{(a} z_{b)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Qualquer tensor simétrico de segunda ordem em M é um vetor de \mathcal{V}_p e pode ser escrito

como uma combinação linear dos elementos da base (2.30). Por exemplo, tendo em conta os produtos internos dados por (2.29), podemos obter a seguinte decomposição para o tensor métrico

$$g_{ab} = 2l_{(a}m_b) + x_ax_b + y_ay_b + z_az_b. \quad (2.31)$$

Considerando R_{ab} como um vetor em \mathcal{V}_p sua expressão mais geral é

$$\begin{aligned} R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a}m_b) + \rho_2 l_al_b + \rho_3 x_ax_b + \rho_4 y_ay_b + \rho_5 z_az_b + \rho_6 m_am_b \\ & + 2\rho_7 l_{(a}x_b) + 2\rho_8 l_{(a}y_b) + 2\rho_9 l_{(a}z_b) + 2\rho_{10} m_{(a}x_b) + 2\rho_{11} m_{(a}y_b) \\ & + 2\rho_{12} m_{(a}z_b) + 2\rho_{13} x_{(a}y_b) + 2\rho_{14} x_{(a}z_b) + 2\rho_{15} y_{(a}z_b), \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde os coeficientes $\rho_1, \dots, \rho_{15} \in \mathbb{R}$.

Vamos agora mostrar que para cada tipo de Segre do teorema 2 o tensor R_{ab} pode ser reduzido a uma das seguintes formas em \mathcal{V}_p :

tipo de Segre

$$[1, 1111] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_b) + \rho_2 (l_al_b + m_am_b) + \rho_3 x_ax_b + \rho_4 y_ay_b + \rho_5 z_az_b \quad (2.33)$$

$$[2111] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_b) \pm l_al_b + \rho_3 x_ax_b + \rho_4 y_ay_b + \rho_5 z_az_b \quad (2.34)$$

$$[311] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_b) + 2l_{(a}x_b) + \rho_1 x_ax_b + \rho_4 y_ay_b + \rho_5 z_az_b \quad (2.35)$$

$$[z\bar{z}111] \quad R_{ab} = 2\rho_1 l_{(a}m_b) + \rho_2 (l_al_b - m_am_b) + \rho_3 x_ax_b + \rho_4 y_ay_b + \rho_5 z_az_b \quad (2.36)$$

onde $\rho_1, \dots, \rho_5 \in \mathbb{R}$ e $\rho_2 \neq 0$ em (2.36).

A condição de simetria de R_{ab} , escrita como

$$g_{ac} R^c_b = g_{bc} R^c_a, \quad (2.37)$$

deve ser imposta sobre as matrizes de Jordan permitidas pelo teorema 2. Isto impõe vínculos sobre os componentes do tensor métrico g_{ab} , o que nos revelará o caráter vetorial de alguns vetores da base de Jordan.

Tipo de Segre [1,1111]. Para este tipo, se escrevermos uma matriz simétrica 5×5 geral g_{ab} , usarmos a eq. (2.37) e a matriz de Jordan correspondente (caso (g) pg. 25), obtemos

$$g_{ab} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \quad (2.38)$$

onde $\mu_1, \dots, \mu_5 \in \mathbb{R}$. Devido à assinatura lorentziana $(- + + + +)$ da métrica, um dos μ_a é negativo e os demais são positivos. Por outro lado R^a_b é real, simétrico e tem cinco diferentes autovalores. Portanto, tendo em mente que o produto escalar sobre $T_p(M)$ é definido por g_{ab} , os autovetores associados são ortogonais um ao outro e suas normas resultam iguais a $\mu_a \neq 0$. Logo, eles são vetores tipo tempo ou tipo espaço. Apenas um dos $\mu_a < 0$, assim um dos autovetores tem que ser tipo tempo e os outros necessariamente tipo espaço. Portanto, sem perda de generalidade, podemos sempre escolher uma base de Jordan com cinco vetores ortonormais $\bar{\mathcal{L}} = \{\mathbf{t}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ tais que $-t^a t_a = w^a w_a = x^a x_a = y^a y_a = z^a z_a = 1$, em termos da qual o tensor de Ricci é escrito como

$$R_{ab} = -\bar{\rho}_1 t_a t_b + \bar{\rho}_2 w_a w_b + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b + \rho_5 z_a z_b. \quad (2.39)$$

Finalmente introduzimos dois vetores nulos $\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{t} + \mathbf{w})$ e $\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{w} - \mathbf{t})$ para formar a base seminula $\mathcal{P} = \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, em termos da qual R_{ab} toma a forma canônica (2.33) com

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2) \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1). \quad (2.40)$$

Observe-se que de acordo com a forma (2.39) este tipo de Segre pode especializar-se em onze outros tipos. Além disso, eles são todos diagonalizáveis com cinco autovetores reais linearmente independentes, um dos quais é necessariamente tipo tempo. No caso não degenerado [1, 1111] uma base de pêntadas seminula \mathcal{P} é determinada de maneira unívoca (na verdade ela pode ser fixada a menos de transformações discretas, como inversões e reindexação dos vetores da base). Quando existem degenerescências, contudo, a forma (2.39) (ou alternativamente (2.33)) é invariante sob transformações contínuas apropriadas da base pentádica de vetores. Daqui para frente, ao tratarmos das simetrias de qualquer

tipo de Segre, consideraremos somente transformações contínuas da base pentádica. Portanto no tipo de Segre $[(1, 11)11]$, por exemplo, os vetores t, w e x são determinados a menos de rotações de Lorentz tridimensionais $SO(1, 2)$ no triespaco invariante de autovetores que contém estes vetores. Analogamente, para o tipo de Segre $[1, 1(111)]$ os vetores x, y e z podem ser fixados a menos de rotações espaciais 3-D $SO(3)$, ao passo que o tipo $[1, 11(11)]$ permite rotações espaciais no plano (y, z) . Por fim, o grupo de invariância para a classe de Segre $[(1, 1111)]$ é por definição o grupo de Lorentz generalizado.

Tipo de Segre [2111]. A partir da FCJ para este tipo (caso (f) pg. 24) verifica-se facilmente que os vetores da base de Jordan

$$l^a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{y}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são os únicos autovetores de R^a_b , linearmente independentes, com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 , respectivamente. Para sabermos o caráter (se tipo tempo, tipo espaço ou tipo nulo) destes vetores precisamos conhecer a métrica. Podemos descobrir os vínculos que este tipo de Segre impõe sobre a métrica escrevendo uma matriz 5×5 simétrica real g_{ab} e usando a condição de simetria (2.37) com a matriz de Jordan correspondente a este caso. Alguns cálculos nos dão

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & g_{12} & 0 & 0 & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$



onde $g_{12}, g_{22}, g_{33}, g_{44}, g_{55} \in \mathbb{R}$. Por simples inspeção de (2.41) percebe-se que \mathbf{l} é um vetor nulo e $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ são todos ortogonais a \mathbf{l} (o que significa que são vetores tipo espaço), além de serem ortogonais entre si. Tendo isto em conta, deduz-se que o $\det g_{ab}$ ($= -(g_{12})^2 g_{33} g_{44} g_{55}$) é sempre negativo, o que mostra que este tipo de Segre é consistente com a simetria de R_{ab} e preserva a assinatura lorentziana. Embora neste caso tenhamos apenas quatro direções invariantes definidas intrinsecamente por R^a_b , podemos fixar univocamente (a menos de transformações discretas) uma base pentádica seminula $\mathcal{P} = \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ obedecendo às equações (2.29) e (2.31). Para isto temos que primeiramente escolher um vetor nulo \mathbf{m} ortogonal a $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}},$ e $\tilde{\mathbf{z}}$ e tal que $g_{ab} l^a m^b = 1$. Denotando os componentes de \mathbf{m} na base de Jordan como $m^a = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$ e impondo as restrições dos produtos escalares obtemos $\gamma = \delta = \epsilon = 0$, $\alpha = -g_{22}/2g_{12}^2$ e $\beta = 1/g_{12}$. Em seguida normalizamos cada vetor $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}},$ e $\tilde{\mathbf{z}}$ e temos finalmente montada uma base seminula \mathcal{P} . Vale notar que, diferentemente do que ocorreu no caso Segre [1, 1111], a base seminula \mathcal{P} é também uma base de Jordan para o tipo de Segre [2111]. Em termos desta base, e tendo em conta que $\mathbf{l}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ e \mathbf{z} são autovetores, a eq. (2.32) simplifica-se para

$$R_{ab} = 2 \lambda_1 l_{(a} m_{b)} + \rho_2 l_a l_b + \lambda_2 x_a x_b + \lambda_3 y_a y_b + \lambda_4 z_a z_b, \quad (2.42)$$

onde a condição $\rho_2 \neq 0$ deve ser imposta, caso contrário \mathbf{m} seria um quinto autovetor de R^a_b . Uma transformação (rotação nula) da forma $\mathbf{l} \rightarrow \zeta \mathbf{l}$, $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}/\zeta$, ($\zeta \in \mathbb{R}^+$) pode ser usada para fazer $\rho_2 = 1$ se $\rho_2 > 0$, e $\rho_2 = -1$ se $\rho_2 < 0$, tornando evidente que (2.34) é uma forma canônica apropriada para o tipo de Segre [2111].

Observando-se a forma canônica (2.34) vê-se que esta classe pode especializar-se nos seis tipos de Segre que foram enumerados na seção anterior. Quando há degenerescência a forma canônica (2.34) permite alguma liberdade na escolha da base de pântada, i.e., a forma canônica é invariante sob transformações contínuas apropriadas dos vetores de base. O tipo de Segre [21(11)], por exemplo, apresenta simetria rotacional local (SRL) no plano (\mathbf{y}, \mathbf{z}) . Do mesmo modo uma simetria rotacional nula local (SRNL) ocorre nos tipos de Segre degenerados [(21)11] e [(21)(11)]. Este último tipo admite ambas as isotropias

locais SRL e SRNL. Afirmações similares podem ser feitas sobre as outras especializações do tipo de Segre [2111]; não as discutiremos, contudo, a bem da brevidade.

Tipo de Segre [311]. Este caso pode ser tratado de maneira semelhante à do tipo de Segre [2111]. Da FCJ associada (caso (d) na pg. 24) segue-se que o primeiro, o quarto e o quinto vetores da base de Jordan

$$l^a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{y}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{z}^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

são os únicos autovetores de R^a , linearmente independentes, com autovalores λ_1 , λ_2 e λ_3 , respectivamente. Além disso, associada ao segundo vetor da base de Jordan \tilde{x} temos a relação

$$R^a_b \tilde{x}^a = \lambda_1 \tilde{x}^a + l^a, \quad (2.43)$$

que nos será útil na determinação dos coeficientes da forma canônica.

A condição de simetria de R_{ab} , dada pela eq. (2.37), reduz a matriz do tensor métrico g_{ab} no presente caso à forma

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & g_{23} & 0 & 0 \\ g_{22} & g_{23} & g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

onde $g_{22}, g_{23}, g_{33}, g_{44}, g_{55} \in \mathbb{R}$. Usando-se (2.44) é fácil verificar que $l^a l_a = l^a \tilde{x}_a = l^a \tilde{y}_a = l^a \tilde{z}_a = \tilde{x}_a \tilde{y}^a = \tilde{x}_a \tilde{z}^a = \tilde{y}_a \tilde{z}^a = 0$. Portanto l é um vetor nulo e \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} são vetores tipo espaço ortogonais entre si. Com isto deduz-se que o $\det g_{ab}$ ($= -(g_{22})^3 g_{44} g_{55}$) é

sempre negativo, logo o tipo de Segre [311] e suas degenerescências são consistentes com a assinatura lorentziana da métrica e a simetria de R_{ab} .

Para fixar (a menos de transformações discretas) uma base pentádica seminula $\mathcal{Q} = \{l, m, x, y, z\}$ obedecendo às equações (2.29) e (2.31), vamos primeiramente escolher um vetor nulo m ortogonal a \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} e tal que $g_{ab} l^a m^b = 1$, onde g_{ab} é dado por (2.44). Denotando os componentes de m na base de Jordan como $m^a = (a, b, c, d, e)$ e impondo as restrições dos produtos escalares obtemos $d = e = 0$, $b = -\frac{1}{2}g_{33}/(g_{22})^2$, $c = 1/g_{22}$ e $a = b(1/2 - b/c - 2g_{23})$. Finalmente, normalizamos os vetores \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{z} para formar a pênstada seminula $\mathcal{Q} = \{l, m, x, y, z\}$. Usando agora o fato de l , y e z serem autovetores de R^a_b , juntamente com a equação (2.43) reescrita na base normalizada, reduzimos a forma geral (2.32) para

$$R_{ab} = 2\lambda_1 l_{(a} m_{b)} + 2\rho_7 l_{(a} x_{b)} + \rho_2 l_a l_b + \lambda_1 x_a x_b + \lambda_2 y_a y_b + \lambda_3 z_a z_b, \quad (2.45)$$

onde $\rho_7 = 1/\sqrt{g_{22}} \neq 0$. Esta condição ($\rho_7 \neq 0$) deve ser imposta, do contrário teríamos x como um quarto autovetor linearmente independente. A transformação

$$x^a \rightarrow x^a + 2\xi l^a, \quad (2.46)$$

$$m^a \rightarrow m^a - 2\xi x^a - 2\xi^2 l^a, \quad (2.47)$$

onde $\xi = -\rho_2/(4\rho_7)$, anula o coeficiente de $l_a l_b$. Finalmente, a transformação (rotação nula) $l^a \rightarrow l^a/\rho_7$, $m^a \rightarrow \rho_7 m^a$ pode agora ser usada para fazer $\rho_7 = 1$, reduzindo portanto (2.45) à forma canônica (2.35).

Este tipo de Segre dá origem a três especializações, enumeradas na sec. 2.2, que admitem certas transformações contínuas apropriadas da base de pênstada. Assim, o tipo de Segre [3(11)], por exemplo, admite SRL, o tipo [(31)1] apresenta SRNL, e [(311)] admite ambas, SRL e SRNL.

Tipo de Segre [z \bar{z} 111]. Para este tipo, conforme vimos na sec. 2.2, R^a_b tem necessariamente dois autovetores complexos $V = Y \pm iZ$ com respectivos autovalores $\alpha \pm i\beta$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$). Além disto eles são ortogonais, isto é, a eq. (2.26) vale e os vetores reais \mathbf{Y} e \mathbf{Z} geram no $T_p(M)$ um subespaço bidimensional tipo tempo invariante sob R_b^a , conforme mostram as eqs. (2.27) e (2.28). Este plano tipo tempo contém duas direções nulas distintas, que usaremos para fixar um par de vetores nulos reais \mathbf{l} e \mathbf{m} de uma pêntada seminula. Quando \mathbf{Y} e \mathbf{Z} são ambos nulos escolhemos suas direções para fixar o par de vetores nulos da pêntada. Se entretanto \mathbf{Y} e \mathbf{Z} não forem vetores nulos, podemos aproveitá-los para encontrar o par de vetores nulos necessários da seguinte forma.

Se $\mathbf{V} = \mathbf{Y} + i\mathbf{Z}$ for um autovetor de R_b^a , também o será o vetor $\mathbf{V}' = \rho e^{i\theta}(\mathbf{Y} + i\mathbf{Z})$, cujos componentes, parte real e imaginária, são dados por

$$\mathbf{Y}' = \rho \cos \theta \mathbf{Y} - \rho \sin \theta \mathbf{Z}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{Z}' = \rho \cos \theta \mathbf{Z} + \rho \sin \theta \mathbf{Y}, \quad (2.49)$$

onde $0 < \rho < \infty$ e $0 \leq \theta < \pi$. Note-se que os valores de θ fora deste intervalo, i.e. $\theta \in [\pi, 2\pi)$, simplesmente revertem as direções de \mathbf{Y}' e \mathbf{Z}' , logo eles não precisam ser considerados. Para formar uma base seminula precisamos primeiro de um par de vetores (\mathbf{Y}', \mathbf{Z}') tais que

$$\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}' (= \mathbf{Z}' \cdot \mathbf{Z}') = 0, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Z}' = 1. \quad (2.51)$$

Se \mathbf{Y}' for um vetor nulo então, de (2.26), é claro que \mathbf{Z}' também o será. A substituição de (2.48) e (2.49) nas equações acima nos fornece o par

$$\begin{aligned} \rho^2(\cos(2\theta) \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z} + \sin(2\theta) \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}) &= 1 \\ \cos(2\theta) \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} &= \sin(2\theta) \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (2.52)$$

que podem ser resolvidas em termos de θ e ρ para dar

$$\cot(2\theta) = \frac{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z}}{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}}, \quad (2.53)$$

$$\rho^2 = \frac{\sin(2\theta)}{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}}. \quad (2.54)$$

Escolhemos então os dois vetores nulos de que precisamos para formar a pêntrada seminula fazendo $\mathbf{l} = \mathbf{Y}'$ e $\mathbf{m} = \mathbf{Z}'$. Em termos destes vetores a equação de autovalores (2.24) torna-se

$$R(\mathbf{l} \pm i \mathbf{m}) = (\alpha \pm i \beta)(\mathbf{l} \pm i \mathbf{m}), \quad (2.55)$$

deixando claro que para este tipo de Segre podemos sempre escolher um par de vetores nulos tais que $\mathbf{l} \pm i \mathbf{m}$ são autovetores com autovalores $\alpha \pm i \beta$.

Usando o fato de $\mathbf{l} \pm i \mathbf{m}$ serem autovetores a eq. (2.32) se reduz a

$$\begin{aligned} R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a} m_{b)} + \rho_2 (l_a l_b - m_a m_b) + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b + \rho_5 z_a z_b \\ & + 2\rho_{13} x_{(a} y_{b)} + 2\rho_{14} x_{(a} z_{b)} + 2\rho_{15} y_{(a} z_{b)}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde $\rho_1 = \alpha$ e $\rho_2 = \beta \neq 0$. Na base pentádica $\{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ a matriz R^a_b correspondente a (2.56) é uma matriz diagonal por blocos com dois blocos. O primeiro, T^a_b , é uma matriz (2×2) com os autovetores $\mathbf{l} \pm i \mathbf{m}$ e respectivos autovalores $\alpha \pm i \beta$, conforme mostrado por (2.55). Logo, T^a_b é diagonalizável sobre os complexos. O segundo bloco, E^a_b , é uma matriz (3×3) simétrica restrita ao espaço euclidiano tridimensional gerado pelos vetores $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Portanto E^a_b pode ser diagonalizada por transformações de similaridade neste espaço, isto é, existe uma base ortogonal $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}})$ relativa à qual E^a_b toma a forma diagonal com coeficientes reais. Na base $\bar{\mathbf{B}} = \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}\}$ assim construída devemos ter

$$R_{ab} = 2\alpha l_{(a} m_{b)} + \beta (l_a l_b - m_a m_b) + \bar{\rho}_3 \bar{x}_a \bar{x}_b + \bar{\rho}_4 \bar{y}_a \bar{y}_b + \bar{\rho}_5 \bar{z}_a \bar{z}_b, \quad (2.57)$$

tornando explícita a existência de três autovetores tipo espaço de R^a_b com autovalores

reais, conforme dito na seção anterior. Na verdade, esses três autovetores $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ constituem uma base do tri-espaço ortogonal ao plano tipo tempo gerado por (\mathbf{l}, \mathbf{m}) ou (\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) , em concordância com o que afirmamos na sec. 2.2.

Finalmente, podemos normalizar adequadamente a base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, então selecionar uma pêntada seminula de $T_p(M)$ contendo os vetores nulos (\mathbf{l}, \mathbf{m}) e os vetores tipo espaço normalizados $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ com as relações de ortonormalidade dadas por (2.29). Em termos desta base R_{ab} toma a forma canônica (2.36) para este tipo de Segre.

Note-se que a forma canônica (2.36) obtida torna claro que este tipo de Segre e suas degenerescências são consistentes com a simetria de R_{ab} e a assinatura lorentziana da métrica. Ela dá origem a duas especializações $[z \bar{z} 1(11)]$ e $[z \bar{z} (111)]$. Aqui novamente, para o caso não degenerado $[z \bar{z} 111]$, a base \mathcal{P} usada em (2.36) pode ser determinada univocamente, mas quando há degenerescências as bases canônicas são determinadas a menos de transformações contínuas apropriadas. Assim, para o tipo de Segre $[z \bar{z} (111)]$ os vetores \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} são fixados a menos de rotações espaciais 3-D do grupo $SO(3)$, enquanto o tipo de Segre $[z \bar{z} 1(11)]$ apresenta SRL.

A classificação discutida neste capítulo se aplica a qualquer tensor simétrico de segunda ordem definido em um ponto $p \in M$ e pode variar quando p muda em M .

Para concluir, gostaríamos de mencionar que esta classificação e as formas canônicas em base seminula que deduzimos, generalizam os resultados obtidos por Graham Hall e colaboradores para tensores simétricos de segunda ordem em espaços-tempos 3-D e 4-D.^{21,16}

Capítulo 3

Estrutura algébrica do tensor de Ricci em espaços-tempos 5-D

3.1 Introdução

No capítulo anterior a classificação algébrica do tensor de Ricci definido em uma variedade lorentziana 5-D foi obtida partindo de primeiros princípios, sem recorrer a resultados anteriores estabelecidos para espaços-tempos 3-D ou 4-D. Entretanto, os mesmos fins podem ser atingidos por um caminho mais simples e direto se incorporarmos à nossa análise os resultados conhecidos para 4-D e fizermos uso de um teorema que demonstraremos na próxima seção.

Neste capítulo nós reexaminaremos, sob diferentes fundamentos, a estrutura algébrica do tensor de Ricci (ou qualquer tensor simétrico de segunda ordem) definido sobre uma variedade lorentziana M em cinco dimensões. Reobteremos sob premissas diferentes todos os resultados do capítulo anterior e demonstraremos um conjunto de novas propriedades relativas à estrutura algébrica do tensor de Ricci. Estas propriedades são apresentadas sob a forma de dois teoremas que generalizam teoremas anteriores sobre a estrutura do tensor de Ricci para espaços-tempos 4-D.^{16,17}

Os resultados principais deste capítulo estão condensados em um outro artigo científico

que realizamos em colaboração.²³

3.2 Prê-requisitos

Trabalharemos neste capítulo com dois tipos de pêntadas de vetores definidas em $T_p(M)$: uma pêntada semi-nula \mathcal{P} conforme definida na sec. 2.3 com produtos internos e relação de completeza dados por (2.29) e (2.31) respectivamente; e uma pêntada pseudo-ortogonal $\mathcal{L} = \{t, w, x, y, z\}$, que chamaremos pêntada de Lorentz, cujos únicos produtos internos não nulos são

$$-t^a t_a = w^a w_a = x^a x_a = y^a y_a = z^a z_a = 1. \quad (3.1)$$

Em um ponto $p \in M$ o conjunto de todos os tensores simétricos de segunda ordem constituem um espaço vetorial \mathcal{V}_l pentadecadimensional, que pode ser gerado pela seguinte base:

$$\begin{aligned} t_a t_b, \quad w_a w_b, \quad x_a x_b, \quad y_a y_b, \quad z_a z_b, \quad 2t_{(a} w_{b)}, \quad 2t_{(a} x_{b)}, \quad 2t_{(a} y_{b)}, \quad 2t_{(a} z_{b)}, \\ 2w_{(a} x_{b)}, \quad 2w_{(a} y_{b)}, \quad 2w_{(a} z_{b)}, \quad 2x_{(a} y_{b)}, \quad 2x_{(a} z_{b)}, \quad 2y_{(a} z_{b)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Qualquer tensor simétrico de segunda ordem em $p \in M$ é um vetor em \mathcal{V}_l e pode ser escrito como combinações lineares dos elementos da base (3.2). Então, tendo em conta (3.1), podemos obter a seguinte decomposição (relação de completeza) para o tensor métrico:

$$g_{ab} = -t_a t_b + w_a w_b + x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \quad (3.3)$$

O tensor de Ricci, considerado como um vetor em \mathcal{V}_l , pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} R_{ab} = & \sigma_1 t_a t_b + \sigma_2 w_a w_b + \sigma_3 x_a x_b + \sigma_4 y_a y_b + \sigma_5 z_a z_b + 2\sigma_6 t_{(a} w_{b)} \\ & + 2\sigma_7 t_{(a} x_{b)} + 2\sigma_8 t_{(a} y_{b)} + 2\sigma_9 t_{(a} z_{b)} + 2\sigma_{10} w_{(a} x_{b)} + 2\sigma_{11} w_{(a} y_{b)} \\ & + 2\sigma_{12} w_{(a} z_{b)} + 2\sigma_{13} x_{(a} y_{b)} + 2\sigma_{14} x_{(a} z_{b)} + 2\sigma_{15} y_{(a} z_{b)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde os coeficientes $\sigma_1, \dots, \sigma_{15} \in \mathbb{R}$.

Podemos de maneira análoga construir outra base para \mathcal{V}_l usando combinações dos vetores da pêntada seminula \mathcal{P} definida em (2.29), conforme indicamos através da eq. (2.30). Nesta base o tensor de Ricci tem a forma geral (2.32).

3.3 Classificação algébrica

Nesta seção apresentaremos uma nova abordagem ao problema da classificação algébrica de tensores simétricos de segunda ordem em espaços-tempos 5-D. Nosso método baseia-se no seguinte teorema:

Teorema 3 *Seja M uma variedade 5-D provida de uma métrica g com a assinatura $(- + + + +)$. Seja R^a_b a forma mista de um tensor simétrico de segunda ordem R definido em um ponto qualquer $p \in M$. Então R^a_b tem pelo menos um autovetor real não nulo com autovalor real.*

Demonstração:

Primeiro consideraremos os casos em que os autovalores de R são reais. Se R^a_b tiver apenas um autovetor, seu tipo de Segre deverá ser [5], isto é, R^a_b poderá ser reduzido à FCJ mostrada no caso (a) sec. 2.2. Entretanto, conforme foi demonstrado lá (usando as eqs. (2.3)–(2.6)), a simetria de R_{ab} e o caráter lorentziano de g_{ab} não podem ser simultaneamente impostos ao tipo de Segre [5]. Logo, R^a_b deve ter mais de um autovetor.

Suponhamos agora que R^a_b tem dois autovetores linearmente independentes \mathbf{k} e \mathbf{n} , e que eles são ambos vetores do tipo nulo. Sejam $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ os autovalores associados. Então

$$R^a_b k^b = \mu k^a, \quad (3.5)$$

$$R^a_b n^b = \nu n^a. \quad (3.6)$$

Usando a simetria de R_{ab} é fácil mostrar que $R^a_b k^b n_a = R^a_b n^b k_a$, portanto esta equação juntamente com as eqs. (3.5) e (3.6) nos fornece $(\mu - \nu)k^a n_a = 0$. Como \mathbf{k} e \mathbf{n} são por

hipótese, vetores nulos linearmente independentes, devemos ter necessariamente $\mu = \nu$. Tendo em conta esta igualdade e somando as eqs. (3.5) e (3.6) obtemos a equação de autovalores

$$R^a_b (k^b + n^b) = \mu (k^a + n^a), \quad (3.7)$$

mostrando que o vetor $\mathbf{v} = \mathbf{k} + \mathbf{n}$ é também autovetor de R^a_b com o autovalor real μ , e é um autovetor não nulo, já que $v^a v_a = 2k^a n_a \neq 0$.

Se R^a_b tiver mais que dois autovetores linearmente independentes do tipo nulo, então sempre poderemos usar dois deles para construir, de modo semelhante ao que foi feito acima, um autovetor real não nulo com autovalor real.

Portanto, quando os autovalores são reais, R^a_b tem pelo menos um autovetor não nulo com autovalores reais.

Se R^a_b tem autovalores complexos então, conforme demonstramos na sec. 2.2 e na 2.3, sua matriz é sempre diagonalizável, isto é, R^a_b tem cinco autovetores linearmente independentes, dos quais três são vetores reais tipo espaço com autovalores reais. Isto completa a demonstração do teorema 3.

Discutiremos agora a classificação algébrica do tensor de Ricci à luz deste teorema. Seja \mathbf{v} o autovetor real não nulo a que se refere o teorema 3 e seja $\eta \in \mathbb{R}$ o autovalor correspondente. O vetor normalizado \mathbf{u} definido por

$$u^a = \frac{v^a}{\sqrt{\epsilon v^b v_b}} \quad \text{com} \quad \epsilon \equiv \text{sinal}(v^b v_b) = u^b u_b. \quad (3.8)$$

é também autovetor de R^a_b associado ao autovalor η . Se o vetor \mathbf{u} for tipo tempo ($\epsilon = -1$), sem perda de generalidade podemos usá-lo como um vetor de base \mathbf{t} de uma pêntada de Lorentz $\tilde{\mathcal{L}} = \{\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}\}$. O fato de $\mathbf{u} \equiv \mathbf{t}$ ser um autovetor de R^a_b pode ser usado para eliminar coeficientes da forma geral (3.4) e reescrevê-la como

$$R_{ab} = E_{ab} - \eta t_a t_b, \quad (3.9)$$

onde $\eta = \sigma_1$ e

$$E_{ab} = \sigma_2 \tilde{w}_a \tilde{w}_b + \sigma_3 \tilde{x}_a \tilde{x}_b + \sigma_4 \tilde{y}_a \tilde{y}_b + \sigma_5 \tilde{z}_a \tilde{z}_b + 2\sigma_{10} \tilde{w}_{(a} \tilde{x}_{b)} + 2\sigma_{11} \tilde{w}_{(a} \tilde{y}_{b)} \\ + 2\sigma_{12} \tilde{w}_{(a} \tilde{z}_{b)} + 2\sigma_{13} \tilde{x}_{(a} \tilde{y}_{b)} + 2\sigma_{14} \tilde{x}_{(a} \tilde{z}_{b)} + 2\sigma_{15} \tilde{y}_{(a} \tilde{z}_{b)}. \quad (3.10)$$

O tensor simétrico E_b^a atua sobre o espaço vetorial \mathcal{T}^\perp (complemento ortogonal do subespaço \mathcal{T} de $T_p(M)$ gerado por t), o qual é um espaço euclidiano 4-D com assinatura $(++++)$. Portanto sua matriz pode ser diagonalizada por transformações dos vetores de base $(\tilde{w}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ sob o grupo $SO(4, \mathbb{R})$. Logo, existe uma pêntada de Lorentz ortonormal $\mathcal{L} = \{t, w, x, y, z\}$ relativamente à qual R_b^a tem forma diagonal com coeficientes reais. Portanto, o tipo de Segre neste caso é $[1, 1111]$ ou uma de suas degenerescências.

Se u for tipo espaço ($\epsilon = 1$) podemos usá-lo como o vetor de base z da pêntada seminula \mathcal{P} definida na sec. 2.3 com os produtos internos dados em (2.29). Nesta base R_{ab} é escrito na forma (2.32) mas, impondo a condição de que z é autovetor com autovalor η , podemos reescrevê-lo como

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} + \eta z_a z_b, \quad (3.11)$$

onde $\eta = \rho_5$ e

$$\tilde{R}_{ab} = 2\rho_1 l_{(a} m_{b)} + \rho_2 l_a l_b + \rho_3 x_a x_b + \rho_4 y_a y_b + \rho_6 m_a m_b + 2\rho_7 l_{(a} x_{b)} \\ + 2\rho_8 l_{(a} y_{b)} + 2\rho_{10} m_{(a} x_{b)} + 2\rho_{11} m_{(a} y_{b)} + 2\rho_{13} x_{(a} y_{b)}, \quad (3.12)$$

onde os coeficientes $\rho_i \in \mathbb{R}$. O tensor \tilde{R}_b^a tem ação efetiva apenas no espaço vetorial \mathcal{Z}^\perp de quatro dimensões ortogonal ao subespaço \mathcal{Z} de $T_p(M)$ gerado por z . Mas agora \mathcal{Z}^\perp é lorentziano com assinatura $(-+++)$, logo a classificação algébrica de \tilde{R}_{ab} é idêntica àquela feita por Churchill,⁸ Hall^{16,17} e outros^{43,50} para o tensor de Ricci em 4-D.

Portanto, levando-se em consideração a classificação para tensores simétricos de segunda ordem em 4-D e as eqs. (3.11) e (3.12), segue-se que os tipos de Segre permitidos são $[1, 1111]$, $[2111]$, $[311]$, $[z\bar{z}111]$ e suas degenerescências. As formas canônicas para

R_{ab} em pântadas seminulas podem ser agora reobtidas a partir das expressões canônicas conhecidas para 4-D. De fato, utilizando as eqs. (1.7)–(1.9), (1.13) e o que discutimos acima, podemos reobter facilmente as formas canônicas para R_{ab} em 5-D dadas pelas eqs. (2.33)–(2.36), mas omitidas aqui a bem da concisão.

3.4 Propriedades algébricas do tensor de Ricci em espaços-tempos 5-D

Nesta seção discutiremos alguns resultados acerca da estrutura algébrica de um tensor simétrico de segunda ordem definido sobre $T_p(M)$. De maneira análoga aos subespaços 2-D, os subespaços 3-D de $T_p(M)$ podem ser caracterizados invariavelmente conforme o número de direções nulas independentes que eles possuam. Assim, se existem duas ou mais direções nulas o subespaço é dito tipo tempo, se há apenas uma é tipo nulo e se nenhuma o subespaço é dito tipo espaço. As propriedades algébricas do tensor de Ricci (ou de qualquer tensor simétrico de segunda ordem) em um espaço-tempo 5-D serão agregadas sob a forma de dois teoremas que demonstraremos a seguir.

Teorema 4 *Seja M uma variedade real 5-D provida de uma métrica g de assinatura $(-++++)$. Seja R^a_b a forma mista do tensor de Ricci (ou de qualquer tensor simétrico de segunda ordem) definido em um ponto p em M . Então*

- (i) R^a_b tem autovetor tipo tempo se e somente se ele for diagonalizável sobre \mathbb{R} em p ;
- (ii) R^a_b tem pelo menos três autovetores reais ortogonais em p , dois dos quais pelo menos são tipo espaço;
- (iii) R^a_b tem todos os seus autovalores reais e é não diagonalizável se e somente se ele possui apenas uma autodireção real tipo nula em p ;
- (iv) se R^a_b tem dois autovetores nulos linearmente independentes em p , então ele é diagonalizável sobre \mathbb{R} e os autovalores são reais.

Tabela 3.1: Tipos de Segre, autovetores e autovalores em espaços-tempos 5-D

| Tipos de Segre | autovetores | autovalores |
|-------------------|-----------------------------|--|
| $[1, 1111]$ | $l - m, l + m, x, y, z$ | $\rho_1 - \rho_2, \rho_1 + \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ |
| $[2111]$ | l, x, y, z | $\rho_1, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ |
| $[311]$ | l, y, z | ρ_1, ρ_4, ρ_5 |
| $[z \bar{z} 111]$ | $l - i m, l + i m, x, y, z$ | $\rho_1 - i\rho_2, \rho_1 + i\rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$ |

Demonstração:

- (i) Na seção anterior mostramos que se R^a_b admite um autovetor tipo tempo ele é diagonalizável no corpo dos reais. Reciprocamente, se R^a_b é diagonalizável sobre \mathbb{R} então, conforme demonstramos na sec. 2.3, ele tem um autovetor tipo tempo (cf. eq. (2.39)).
- (ii) Os autovetores com os respectivos autovalores para cada tipo de Segre não degenerado são obtidos a partir das equações (2.33)–(2.36), e são apresentados na tabela 3.1. Como se vê, para todos os tipos de Segre há pelo menos três autovetores, dois dos quais são tipo espaço. A ortogonalidade dos autovetores é assegurada por (2.29). Para qualquer tipo de Segre a degenerescência entre autovalores dá origem a autoespaços de dimensões maiores onde a quantidade de autovetores é infinita.
- (iii) Se R^a_b tem todos os autovalores reais e é não diagonalizável então seu tipo de Segre é $[2111]$, $[311]$, ou uma de suas degenerescências. Conforme se vê da tabela 3.1, cada um tem apenas uma autodireção nula, representada pelo vetor l , independentemente de degenerescências de autovalores. Para demonstrar a recíproca observemos que, além dos tipos de Segre $[2111]$ e $[311]$, os únicos casos em que R^a_b tem autovetores tipo nulo são as degenerescências de $[1, 1111]$ envolvendo o autovalor associado ao autovetor tipo tempo. Mas nesses casos é fácil verificar, usando (3.4), que mesmo para o caso mais simples como $[(1,1)111]$ R^a_b admite um autoplano tipo tempo, o que implica na existência de dois autovetores tipo nulo não colineares. Logo, ficamos apenas com os casos não diagonalizáveis $[2111]$ e $[311]$.

- (iv) Sejam k e n autovetores nulos linearmente independentes de R^a_b com autovalores ξ e ζ respectivamente. A simetria de R_{ab} implica em $\xi = \zeta$ (cf. demonstração do teorema 3). Além disto, $k + n$ e $k - n$ são também autovetores linearmente independentes, um dos quais – pode ser mostrado facilmente – é tipo tempo. Mas isto implica um R^a_b necessariamente diagonalizável no corpo \mathbb{R} , conforme vimos em (i).

Teorema 5 *Seja M uma variedade real 5-D provida de uma métrica g de assinatura $(- + + + +)$. Seja R^a_b a forma mista do tensor de Ricci (ou de qualquer tensor simétrico de segunda ordem) definido em um ponto $p \in M$. Então*

- (i) *há sempre um subespaço 2-D tipo espaço de $T_p(M)$ que é invariante sob R^a_b ;*
- (ii) *se um subespaço não nulo \mathcal{V} de $T_p(M)$ for invariante sob R^a_b , então seu complemento ortogonal \mathcal{V}^\perp também será invariante sob R^a_b ;*
- (iii) *existe sempre um subespaço 3-D tipo tempo de $T_p(M)$ que é invariante sob R^a_b ;*
- (iv) *R^a_b admitirá um subespaço invariante tipo nulo \mathcal{N} de dimensão r ($r = 2, 3, 4$) se e somente se ele tiver um autovetor tipo nulo que, além disso, pertencerá a \mathcal{N} ;*
- (v) *R^a_b admitirá um subespaço invariante tipo espaço \mathcal{E} tridimensional se e somente se ele tiver três autovetores tipo espaço ortogonais, que pertencerão a \mathcal{E} .*

Demonstração:

- (i) Os autovetores tipo espaço y e z mencionados no item (ii) do teorema 4 geram um subespaço bidimensional de $T_p(M)$, que é do tipo espaço e invariante sob R^a_b .
- (ii) Seja r a dimensão do subespaço não nulo \mathcal{V} , e e_i ($i = 1, \dots, r$) uma base dele. Seja e_μ^\perp ($\mu = r + 1, \dots, 5$) uma base de \mathcal{V}^\perp . Como \mathcal{V} é invariante sob R^a_b , os vetores $R e_i \in \mathcal{V}$, e então $e_\mu^\perp \cdot R e_i = 0$, o que, juntamente com a simetria de R_{ab} leva a $e_i \cdot R e_\mu^\perp = 0$. Então para qualquer vetor $v \in \mathcal{V}^\perp$ nós temos $R v \in \mathcal{V}^\perp$, i.e. \mathcal{V}^\perp é também invariante sob R^a_b .

- (iii) Este resultado é consequência dos itens (i) e (ii) do teorema 5 acima já que o complemento ortogonal de subespaço 2-D tipo espaço é um subespaço 3-D tipo tempo. Das eqs. (2.33) – (2.36) vê-se facilmente que \mathbf{l} , \mathbf{m} e \mathbf{x} geram um subespaço tridimensional tipo tempo de $T_p(M)$ que é invariante sob R^a_b .
- (iv) Todo subespaço tipo nulo de $T_p(M)$ r -dimensional ($r = 2, 3, 4$) é gerado por um vetor tipo nulo \mathbf{n} (digamos) mais um conjunto de $r - 1$ vetores tipo espaço ortogonais \mathbf{x}_i , tais que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i = 0$. Consideremos o subespaço nulo 2-D gerado pelo par de vetores \mathbf{n} e \mathbf{x} . Então

$$R^a_b n^b = \alpha_1 n^a + \alpha_2 x^a, \quad (3.13)$$

$$R^a_b x^b = \beta_1 n^a + \beta_2 x^a, \quad (3.14)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$. Como R_{ab} é simétrico nós temos $x_a R^a_b n^b = n_a R^a_b x^b$, que juntamente com (3.13) e (3.14) nos dá $\alpha_2 = 0$. Logo, \mathbf{n} é um autovetor. As demonstrações para subespaços nulos de dimensões 3 e 4 são semelhantes. Para demonstrar a recíproca observemos que se R^a_b tem autovetor nulo então seu tipo de Segre deve ser [2111], [311], [(1,1)111] ou alguma de suas especializações. Das eqs. (2.33)–(2.35) constata-se, para todos esses tipos de Segre, que \mathbf{l} é um autovetor nulo, e que os subespaços de dimensão 2, 3, e 4 gerados por $\{\mathbf{l}, \mathbf{x}\}$, $\{\mathbf{l}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ e $\{\mathbf{l}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, respectivamente, são todos subespaços nulos e invariantes sob R^a_b .

- (v) Se R^a_b admite um subespaço invariante 3-D tipo espaço então, das formas canônicas (2.33)–(2.36) vê-se que seu tipo de Segre deve ser [1, 1111], [2111], [$z\bar{z}$ 111], ou alguma de suas degenerescências. Em todos esses casos, conforme se verifica facilmente usando as respectivas formas canônicas, R^a_b tem pelo menos três autovetores ortogonais tipo espaço. A demonstração da recíproca é imediata.

Capítulo 4

Classificação de Segre para tensores simétricos em espaços-tempos n -D

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos alguns estudos por nós realizados sobre matrizes de Jordan $n \times n$. Demonstraremos três proposições sobre produtos internos na base de Jordan para espaços vetoriais n -dimensionais, as quais são usadas na classificação algébrica do tensor de Ricci em espaços-tempos n -D. A classificação é obtida a partir de primeiros princípios, sem recorrer a trabalhos anteriores para dimensões mais baixas e generaliza resultados obtidos para espaços-tempos 3-D, 4-D e 5-D.^{21,17,59} Resultou de nossa investigação a classificação do tensor de Ricci, em espaços-tempos n -D, em quatro diferentes classes de equivalência mais suas especializações. Usando bases seminulã⁵ em n dimensões deduzimos para cada classe de equivalência uma forma canônica para R_{ab} , generalizando assim as formas canônicas obtidas em 3, 4 e 5 dimensões.

4.2 Pré-requisitos matemáticos

A classificação algébrica do tensor de Ricci em espaços-tempos n -dimensionais pode ser posta em termos do problema de autovalores

$$(R^a_b - \lambda \delta^a_b) V^b = 0, \quad (4.1)$$

onde λ é um escalar, V^b é um vetor e o tensor de Ricci misto R^a_b pode ser visto como um operador linear $R : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$. M é uma variedade espaço-tempo n -D provida de uma métrica lorentziana de assinatura $(- + + \cdots +)$, $T_p(M)$ denota o espaço tangente a M em um ponto $p \in M$ e índices latinos, a exceção de p , variam de 0 a $n - 1$.

Devido à assinatura lorentziana a matriz R^a_b nem sempre é diagonalizável sob transformações de similaridade, e recorreremos novamente às FCJ para tratar o problema de autovalores. Embora a matriz R^a_b seja real, os autovalores λ e os autovetores V^b são com frequência complexos. Convém então, no estudo das soluções da eq. (4.1), separar nossa análise em duas partes: primeiro consideraremos a possibilidade do polinômio característico $\det(R^a_b - \lambda \delta^a_b) = 0$ ser totalmente fatorável em \mathbb{R} , isto é, dos autovalores serem todos reais; depois analisaremos o caso de autovalores complexos.

As FCJ no presente caso são matrizes $n \times n$ e fica difícil desenvolvermos uma abordagem semelhante à que foi feita no cap. 2. Em vez disso, vamos demonstrar três proposições sobre a estrutura dos blocos nas matrizes de Jordan, com as quais iremos generalizar o procedimento de exclusão de FCJ empregado na sec. 2.2. Isto simplificará bastante a tarefa da classificação algébrica dos tensores simétricos de segunda ordem em espaços-tempos n -dimensionais.

Suponhamos que R seja redutível a uma matriz de Jordan J real, isto é, exista uma matriz não singular X tal que

$$X^{-1} R X = J \quad (4.2)$$

onde J é uma matriz diagonal por blocos, cada bloco sendo da forma

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde r é a dimensão do bloco e λ é uma raiz da equação característica $\det(R_b^a - \lambda\delta_b^a) = 0$.

Inicialmente queremos examinar a estrutura algébrico-vetorial de $J_r(\lambda)$, isto é, os autovalores, autovetores e caráter dos vetores associados a ele. Consideremos $J_r(\lambda)$ um bloco qualquer que começa na linha e coluna s e termina na linha e coluna t ($t = s + r - 1$) da matriz J . A equação matricial (4.2) pode ser reescrita como $RX = XJ$ e igualando as colunas de s a t em ambos os lados desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} RX_s &= \lambda X_s \\ RX_{s+1} &= \lambda X_{s+1} + X_s \\ &\vdots \\ RX_t &= \lambda X_t + X_{t-1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde X_q denota o vetor associado à q -ésima coluna da matriz X . Chamaremos de cadeia de Jordan associada ao bloco $J_r(\lambda)$ o conjunto de equações (4.4). Deve-se notar que (a) os vetores-coluna X_s, X_{s+1}, \dots, X_t são linearmente independentes (caso contrário X seria uma matriz singular) e formam um subconjunto da base de Jordan $\{X_a; a = 1, \dots, n\}$; (b) os primeiros m vetores deste subconjunto geram um subespaço de $T_p(M)$ o qual é invariante sob R_b^a e (c) como se vê de (4.4), associada a cada bloco de Jordan há uma única autodireção de R que é dada pelo vetor X_s que inicia a cadeia, sendo λ o autovalor associado. Discutiremos a seguir três proposições sobre blocos de Jordan $J_r(\lambda)$ ($r > 1$).

Proposição 1 *O primeiro vetor de uma cadeia de Jordan (isto é, o autovetor X_s) é ortogonal a todos os vetores de seu bloco, exceto possivelmente ao último.*

De fato, temos da cadeia de Jordan (4.4) que um vetor qualquer \mathbf{X}_{q+1} ($s \leq q < t$) obedece a equação

$$R\mathbf{X}_{q+1} = \lambda\mathbf{X}_{q+1} + \mathbf{X}_q. \quad (4.5)$$

Com esta última e a primeira das equações de (4.4), podemos fazer os seguintes produtos:

$$\begin{aligned} R\mathbf{X}_{q+1} \cdot \mathbf{X}_s &= \lambda\mathbf{X}_{q+1} \cdot \mathbf{X}_s + \mathbf{X}_q \cdot \mathbf{X}_s, \\ R\mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_{q+1} &= \lambda\mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_{q+1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por causa da simetria de R_{ab} os lados esquerdos das equações (4.6) são iguais, o que de imediato nos dá

$$\mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_q = 0, \quad s \leq q < t. \quad (4.7)$$

Quando $q = s$, (4.7) implica em $\mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_s = 0$, portanto o autovetor associado a um bloco de Jordan de dimensão $r > 1$ é um vetor do tipo nulo.

Proposição 2 *Dois vetores \mathbf{X}_p e \mathbf{X}_q (que não sejam autovetores) associados a um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ ($r > 2$) satisfazem*

$$\mathbf{X}_p \cdot \mathbf{X}_q = \mathbf{X}_{p-1} \cdot \mathbf{X}_{q+1}, \quad s < p \leq q < t. \quad (4.8)$$

Podemos demonstrar isto facilmente se observarmos que as equações

$$R\mathbf{X}_p = \lambda\mathbf{X}_p + \mathbf{X}_{p-1} \quad (4.9)$$

$$R\mathbf{X}_{q+1} = \lambda\mathbf{X}_{q+1} + \mathbf{X}_q \quad (4.10)$$

fazem parte da cadeia de Jordan, com p e q no intervalo estabelecido. Se agora tomarmos o produto interno de (4.9) e de (4.10) por \mathbf{X}_{q+1} e \mathbf{X}_p , respectivamente, e usarmos a simetria de R_{ab} , obtemos facilmente as eqs. (4.8).

Proposição 3 *Autovetores relacionados a diferentes blocos de Jordan são ortogonais desde que pelo menos um dos blocos tenha dimensão $r > 1$.*

Para demonstrar esta proposição vamos considerar dois blocos em uma mesma matriz de Jordan, $J_r(\lambda)$ e $J_{r'}(\lambda')$, tais que $J_r(\lambda)$ dá origem à cadeia de Jordan (4.4) e $J_{r'}(\lambda')$ gera uma cadeia similar com r' equações, a primeira das quais é

$$R \mathbf{X}_{s'} = \lambda' \mathbf{X}_{s'}. \quad (4.11)$$

De (4.4) e (4.11) podemos obter as seguintes equações:

$$R \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_s = \lambda' \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_s \quad (4.12)$$

$$R \mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_{s'} = \lambda \mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_{s'} \quad (4.13)$$

$$R \mathbf{X}_{s+1} \cdot \mathbf{X}_{s'} = \lambda \mathbf{X}_{s+1} \cdot \mathbf{X}_{s'} + \mathbf{X}_s \cdot \mathbf{X}_{s'} \quad (4.14)$$

$$R \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_{s+1} = \lambda' \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_{s+1}. \quad (4.15)$$

Novamente a simetria de R_{ab} , junto com (4.12) e (4.13) implicam em

$$(\lambda' - \lambda) \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_s = 0. \quad (4.16)$$

De modo semelhante as eqs. (4.14) e (4.15) nos dão

$$(\lambda' - \lambda) \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_{s+1} = \mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_s. \quad (4.17)$$

Portanto, independentemente de $\lambda' = \lambda$ ou $\lambda' \neq \lambda$, as eqs. (4.16) e (4.17) implicam em $\mathbf{X}_{s'} \cdot \mathbf{X}_s = 0$.

Na verdade, as proposições acima são ainda válidas mesmo quando as matrizes R_b^a e g_{ab} são complexas. Empregando recorrentemente a proposição 2, seguida da proposição 1, nós determinamos todos os vetores do tipo nulo relacionados a um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ para valores arbitrários de r . Os resultados são mostrados na tabela 4.1 juntamente com as relações de ortogonalidade envolvendo os vetores nulos. A tabela 4.1, mais a proposição 3 e o teorema 1 (pg. 23), nos habilitará à classificação de R_b^a em espaços-

Tabela 4.1: Vetores nulos relacionados a um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$

| r | vetores nulos | relações de ortogonalidade |
|----------|---|---|
| 2 | \mathbf{X}_1 | |
| 3 | \mathbf{X}_1 | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$ |
| 4 | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_3 = 0$ |
| 5 | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3 = 0$ |
| 6 | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_5 = 0$ $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_4 = 0$ |
| 7 | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_5 = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_6 = 0$ $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_4 = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_5 = \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{X}_4 = 0$ |
| \vdots | \vdots | \vdots |
| $2m$ | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_{2m-1} = 0$ $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3 = \dots = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_{2m-2} = 0$ \vdots $\mathbf{X}_{m-1} \cdot \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_{m-1} \cdot \mathbf{X}_{m+1} = 0$ |
| $2m + 1$ | $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ | $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = \dots = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_{2m} = 0$ $\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3 = \dots = \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_{2m-1} = 0$ \vdots $\mathbf{X}_{m-1} \cdot \mathbf{X}_m = \mathbf{X}_{m-1} \cdot \mathbf{X}_{m+1} = \mathbf{X}_{m-1} \cdot \mathbf{X}_{m+2} = \mathbf{X}_m \cdot \mathbf{X}_{m+1} = 0$ |

tempos n -dimensionais, conforme veremos na próxima seção.

4.3 Classificação de Segre

A classificação de R^a_b em termos das características de Segre pode ser agora facilmente obtida com a ajuda da tabela 4.1. Observando esta tabela inferimos que nenhuma FCJ de R^a_b pode ter um bloco de dimensão maior que 3. Em um bloco $J_4(\lambda)$, por exemplo, os vetores nulos \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 são ortogonais, portanto colineares num $T_p(M)$ lorentziano conforme o teorema 1; isto transformaria a matriz X de (4.2) em uma matriz singular. Além disto, a FCJ de R^a_b não pode ter mais que um bloco de dimensão $r > 1$. Isto porque associado a cada um dos blocos haveria um autovetor do tipo nulo e, pela proposição 3, esses vetores seriam ortogonais (por conseguinte colineares), o que faria de X em (4.2) uma matriz singular. Portanto, em um espaço-tempo 4-D, por exemplo, as FCJ reais

Tabela 4.2: Tipos de Segre permitidos para R^a_b em espaços-tempos n-D

| dimensão do espaço-tempo | tipos de Segre |
|--------------------------|--|
| 3 | [1, 11], [21], [3], [$z\bar{z}1$] |
| 4 | [1, 111], [211], [31], [$z\bar{z}11$] |
| 5 | [1, 1111], [2111], [311], [$z\bar{z}111$] |
| \vdots | \vdots |
| n | [1, 1...1], [21...1], [31...1], [$z\bar{z}11...1$] |

com tipos de Segre [4] e [22] serão incompatíveis com as transformações de similaridade requeridas, e ficamos então apenas com os tipos [1, 111], [211], [31] e suas degenerescências em conformidade com Hall.¹⁶ Com base nos mesmos argumentos descartamos os tipos de Segre [5], [41], [32] e [221] que, em princípio, seriam permitidos para R^a_b em um espaço-tempo 5-D.⁵⁹ Na tabela 4.2 apresentamos todos os tipos de Segre permitidos para R^a_b em espaços-tempos de diferentes dimensões, onde incluímos os casos complexos, denotados em geral por [$z\bar{z}1...1$], a serem discutidos no que se segue.

Agora examinaremos o que ocorre quando a equação característica correspondente a (4.1) tem raízes complexas. Vamos supor que $\alpha \pm i\beta$ são autovalores complexos da matriz real R^a_b correspondentes aos autovetores $\mathbf{V}_\pm = \mathbf{Y} \pm i\mathbf{Z}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ e \mathbf{Y}, \mathbf{Z} são vetores independentes definidos em $T_p(M)$. Como R_{ab} é simétrico e os autovalores são diferentes, os autovetores são necessariamente ortogonais, o que implica em $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} = 0$. Segue-se que um dos vetores (\mathbf{Y} ou \mathbf{Z}) é tipo tempo e o outro tipo espaço, ou ambos são nulos e, como $\beta \neq 0$, não colineares. Qualquer que seja o caso, a parte real e imaginária de (4.1) nos dá

$$R^a_b Y^b = \alpha Y^a - \beta Z^a, \tag{4.18}$$

$$R^a_b Z^b = \beta Y^a + \alpha Z^a. \tag{4.19}$$

Portanto, os vetores \mathbf{Y} e \mathbf{Z} dão origem a um subespaço bidimensional tipo tempo \mathcal{T} de $T_p(M)$ que é invariante sob R^a_b . O subespaço $(n-2)$ -dimensional \mathcal{E} ortogonal a \mathcal{T} é tipo

espaço, é também invariante sob R_b^a e contém $n - 2$ autovetores de R_b^a com autovalores reais (veja a próxima seção para mais detalhes sobre isto). Estes autovetores, juntamente com \mathbf{V}_+ e seu complexo conjugado \mathbf{V}_- , formam em $T_p(M)$ um conjunto de n autovetores linearmente independentes de R_b^a . Portanto, quando existem autovalores complexos de R_b^a , ele é diagonalizável e possui $n - 2$ autovalores reais. Seu tipo de Segre é denotado por $[z\bar{z}1 \dots 1]$, onde z e \bar{z} simbolizam o par de autovalores complexos.

4.4 Um conjunto de formas canônicas

Um tratamento freqüente em física, quando se quer escolher uma base canônica para um tensor, é alinhar a base vetorial ao longo de direções especiais intrinsecamente definidas pelo tensor. Tendo em vista que o tensor R seleciona direções preferenciais em $T_p(M)$, é conveniente atentar para estas direções na escolha de uma base vetorial relativa a qual R seja descrito de modo tão simples quanto possível. A frequente ocorrência de autovetores nulos sugere fortemente descrever R em termos de uma base \mathcal{B} consistindo de dois vetores nulos e $n - 2$ vetores tipo espaço,

$$\mathcal{B} = \{l, m, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-2)}\}, \quad (4.20)$$

tal que os únicos produtos internos não nulos são

$$l.m = \mathbf{x}^{(1)}. \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}. \mathbf{x}^{(2)} = \dots = \mathbf{x}^{(n-2)}. \mathbf{x}^{(n-2)} = 1. \quad (4.21)$$

A decomposição mais geral de R_{ab} em termos da base \mathcal{B} é

$$\begin{aligned} R_{ab} = & 2\varrho_1 l_{(a} m_{b)} + \varrho_2 l_a l_b + \\ & \varrho_3 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \varrho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} + \dots + \varrho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)} + \varrho_{n+1} m_a m_b + \\ & 2\varrho_{n+2} l_{(a} x_{b)}^{(1)} + 2\varrho_{n+3} l_{(a} x_{b)}^{(2)} + \dots + 2\varrho_{2n-1} l_{(a} x_{b)}^{(n-2)} + \\ & 2\varrho_{2n} m_{(a} x_{b)}^{(1)} + 2\varrho_{2n+1} m_{(a} x_{b)}^{(2)} + \dots + 2\varrho_{3n-3} m_{(a} x_{b)}^{(n-2)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 2\rho_{3n-2}x_{(a}^{(1)}x_b^{(2)} + 2\rho_{3n-1}x_{(a}^{(1)}x_b^{(3)} + \cdots + 2\rho_{4n-6}x_{(a}^{(1)}x_b^{(n-2)} + \\
 & 2\rho_{4n-5}x_{(a}^{(2)}x_b^{(3)} + 2\rho_{4n-4}x_{(a}^{(2)}x_b^{(4)} + \cdots + 2\rho_{5n-10}x_{(a}^{(2)}x_b^{(n-2)} \\
 & + \cdots + 2\rho_{n(n+1)/2}x_{(a}^{(n-3)}x_b^{(n-2)}, \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes $\rho_1, \dots, \rho_{n(n+1)/2}$ são escalares reais.

Mostraremos aqui que bases como \mathcal{B} sempre podem ser encontradas em $T_p(M)$ e tais que R_{ab} , conforme sua característica de Segre, assume uma das seguintes formas:

tipo de Segre

$$\begin{aligned}
 [1, 1 \dots 1] \quad R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a} m_b) + \rho_2 (l_a l_b + m_a m_b) + \rho_3 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \rho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} \\
 & + \cdots + \rho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)}, \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [21 \dots 1] \quad R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a} m_b) \pm l_a l_b + \rho_3 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \rho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} \\
 & + \cdots + \rho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)}, \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [31 \dots 1] \quad R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a} m_b) + 2l_{(a} x_b) + \rho_1 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \rho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} \\
 & + \cdots + \rho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)}, \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [z\bar{z}11 \dots 1] \quad R_{ab} = & 2\rho_1 l_{(a} m_b) + \rho_2 (l_a l_b - m_a m_b) + \rho_3 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \rho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} \\
 & + \cdots + \rho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)}, \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes ρ_1, \dots, ρ_n são escalares reais e $\rho_2 \neq 0$ em (4.26).

Usando os produtos internos definidos por (4.21) pode-se mostrar que cada uma das expressões acima para R_{ab} leva ao correspondente tipo de Segre. Contudo, mostrar a recíproca não é tão simples assim e examinaremos caso a caso.

Tipo de Segre [1,1...1]. Para este tipo de Segre, escrevemos uma matriz $n \times n$ simétrica para o tensor métrico g_{ab} e exigimos que

$$g_{ac} R^c_b = g_{bc} R^c_a \tag{4.27}$$

para levar em conta a simetria de R_{ab} . Numa base em que R^a_b é diagonal, g_{ab} reduz-se a

$$g_{ab} = \text{diag}(g_{00}, g_{11}, \dots, g_{(n-1)(n-1)}), \quad (4.28)$$

onde $g_{ii} \in \mathbb{R}$. Como $\det(g_{ab}) < 0$, então todos os $g_{ii} \neq 0$. Cada vetor de base é um autovetor de R^a_b e tem norma g_{aa} ($a = 0, 1, \dots, n-1$), portanto eles são tipo tempo ou tipo espaço e ortogonais uns aos outros. Devido ao caráter lorentziano da métrica, nós temos apenas um vetor tipo tempo e o restante tipo espaço. Portanto, sem perda de generalidade, podemos escolher uma base de vetores ortonormalizados $\bar{\mathcal{B}} = \{t, w, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-2)}\}$, onde t é o autovetor tipo tempo. Por fim, introduzimos os vetores nulos $l = \frac{1}{\sqrt{2}}(w + t)$ e $m = \frac{1}{\sqrt{2}}(w - t)$ para formar a base seminula $\mathcal{B} = \{l, m, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-2)}\}$, em termos da qual R_{ab} é escrito na forma (4.23). Os autovetores são $l - m, l + m, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-2)}$ com os respectivos autovalores $\varrho_1 - \varrho_2, \varrho_1 + \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \dots, \varrho_n$.

Tipo de Segre [21...1]. Este tipo indica que há um bloco na FCJ de dimensão 2 e $n - 2$ blocos de dimensão 1. Então, pelo que vimos na sec. 4.2, os tensores R^a_b redutíveis a esta forma têm $n - 1$ autovetores independentes que são vetores da base de Jordan. A tabela 4.1 mostra que neste caso o primeiro vetor da base de Jordan, a saber, o autovetor X_1 , é um vetor nulo. Além disto, usando a proposição 3 achamos que os autovetores X_3, X_4, \dots, X_n são todos ortogonais a X_1 , logo são vetores tipo espaço. Somos então naturalmente levados a escolher nossa base \mathcal{B} com l paralelo a X_1 , e $x^{(1)}, \dots, x^{(n-2)}$ paralelos a X_3, \dots, X_n , respectivamente. A direção do segundo vetor nulo m da base \mathcal{B} é fixada exigindo-se que m satisfaça as relações de ortogonalidade (4.21). Tendo em conta que $l, x^{(1)}, \dots, x^{(n-2)}$ são autovetores de R , verifica-se que R_{ab} em (4.22) pode ser escrito na forma simplificada

$$\begin{aligned} R_{ab} = & 2\varrho_1 l_{(a} m_{b)} + \varrho_2 l_a l_b + \varrho_3 x_a^{(1)} x_b^{(1)} + \varrho_4 x_a^{(2)} x_b^{(2)} \\ & + \dots + \varrho_n x_a^{(n-2)} x_b^{(n-2)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $\varrho_2 \neq 0$, caso contrário m seria um n -ésimo autovetor de R^a_b . Finalmente, fa-

zendo o *boost* $\mathbf{l} \rightarrow |\varrho_2|^{-1/2} \mathbf{l}$, $\mathbf{m} \rightarrow |\varrho_2|^{1/2} \mathbf{m}$, R_{ab} fica na forma (4.24) com os autovetores \mathbf{l} , $\mathbf{x}^{(1)}$, \dots , $\mathbf{x}^{(n-2)}$ e respectivos autovalores ϱ_1 , ϱ_3 , \dots , ϱ_n .

Tipo de Segre [31...1]. A matriz de Jordan correspondente a este tipo de Segre apresenta um bloco de dimensão 3 e $n - 3$ blocos de dimensão 1. Então neste caso R_b^a tem $n - 2$ autovetores linearmente independentes. A tabela 4.1 mostra que o primeiro vetor da base de Jordan, isto é, o autovetor \mathbf{X}_1 , é um vetor nulo e, da relação de ortogonalidade com \mathbf{X}_2 (o segundo vetor da base de Jordan), este último deve ser um vetor tipo espaço. Além disto, através da proposição 3 descobrimos que os vetores $\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_5, \dots, \mathbf{X}_n$ da base de Jordan são autovetores de R_b^a mutuamente ortogonais, e todos ortogonais ao vetor nulo \mathbf{X}_1 , o que mostra que eles são vetores tipo espaço. Contudo, o caráter vetorial de \mathbf{X}_3 permanece desconhecido. Portanto, para formar uma base seminula para este caso devemos procurar uma nova base $\{\tilde{\mathbf{X}}_A, A = 1, \dots, n\}$ que deixe a FCJ de R_b^a invariante. Esta nova base pode ser dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_1 &= a\mathbf{X}_1, \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 &= a\mathbf{X}_2 + b\mathbf{X}_1, \\ \tilde{\mathbf{X}}_3 &= a\mathbf{X}_3 + b\mathbf{X}_2 + c\mathbf{X}_1, \\ \tilde{\mathbf{X}}_i &= d_i\mathbf{X}_i,\end{aligned}\tag{4.30}$$

onde a, b, c, d_i ($i = 4, \dots, n$) são n constantes reais com $a \neq 0$ e $d_i \neq 0$. Para dotar a nova base $\{\tilde{\mathbf{X}}_A\}$ com as relações de ortonormalidade (4.21) de uma base seminula temos simplesmente que impor os n vínculos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{X}}_2 &= \tilde{\mathbf{X}}_4 \cdot \tilde{\mathbf{X}}_4 = \dots = \tilde{\mathbf{X}}_n \cdot \tilde{\mathbf{X}}_n = 1 \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{X}}_3 &= \tilde{\mathbf{X}}_3 \cdot \tilde{\mathbf{X}}_3 = 0.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Os vínculos definem os valores de a, b, c, d_i em (4.30):

$$\begin{aligned}a &= (\mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_2)^{-1/2}, & b &= -\frac{1}{2}a^3 \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{X}_3, \\ c &= \frac{3}{2}b^2 a^{-1} - \frac{1}{2}a^3 \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{X}_3, & d_i &= (\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_i)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Finalmente construímos nossa base $\mathcal{B} = \{l, m, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-2)}\}$, onde $l = \tilde{X}_1$, $m = \tilde{X}_3$, $x^{(1)} = \tilde{X}_2$, e $x^{(i-2)} = \tilde{X}_i$ ($i = 4, \dots, n$). Nesta base, as três primeiras relações da cadeia de Jordan para o tipo de Segre [31 ... 1] são

$$\begin{aligned} R^a_b l^b &= \varrho_1 l^a, \\ R^a_b x^{(1)b} &= \varrho_1 x^{(1)a} + l^a, \\ R^a_b m^b &= \varrho_1 m^a + x^{(1)a}, \end{aligned} \tag{4.33}$$

onde ϱ_1 é um autovalor de R^a_b . Em termos da base \mathcal{B} o tensor de Ricci pode ser decomposto como (4.22) e impondo as relações (4.33), a expressão para R_{ab} reduz-se à forma (4.25). Os autovetores, com respectivos autovalores, são $l, x^{(2)}, \dots, x^{(n-2)}$ e $\varrho_1, \varrho_4, \varrho_5, \dots, \varrho_n$.

Tipo de Segre [z\bar{z}1 ... 1]. Na seção anterior foi mostrado que se R^a_b tem autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$ com respectivos autovetores $Y \pm iZ$, então os vetores reais Y e Z geram no $T_p(M)$ um subespaço 2-D tipo tempo \mathcal{T} que é invariante sob R^a_b . O subespaço \mathcal{T} contém duas direções nulas independentes, nas quais selecionamos dois vetores nulos l e m tais que $l \cdot m = 1$. Esta escolha pode ser feita em molde análogo ao da sec. (2.3), do que resultará que (4.18) e (4.19) sejam reescritas como

$$R^a_b l^b = \alpha l^a - \beta m^a, \tag{4.34}$$

$$R^a_b m^b = \beta l^a + \alpha m^a. \tag{4.35}$$

Ortogonal a \mathcal{T} existe em $T_p(M)$ um subespaço \mathcal{E} tipo espaço de dimensão $n - 2$ gerado por $\mathcal{B}_e = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(n-2)}\}$. A díada $\{l, m\}$, juntamente com \mathcal{B}_e , geram uma base de $T_p(M)$. Em termos desta base, e levando em conta (4.34) e (4.35), o tensor de Ricci pode ser escrito como a soma de dois tensores simétricos:

$$R_{ab} = t_{ab} + E_{ab}, \tag{4.36}$$

com

$$t_{ab} = 2\alpha l_{(a} m_{b)} + \beta(l_a l_b - m_a m_b), \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} E_{ab} = & E_1 \bar{x}_a^{(1)} \bar{x}_b^{(1)} + E_2 \bar{x}_a^{(2)} \bar{x}_b^{(2)} + \cdots + E_{n-2} \bar{x}_a^{(n-2)} \bar{x}_b^{(n-2)} + \\ & 2E_{n-1} \bar{x}_{(a}^{(1)} \bar{x}_{b)}^{(2)} + 2E_n \bar{x}_{(a}^{(1)} \bar{x}_{b)}^{(3)} + \cdots + 2E_{2n-5} \bar{x}_{(a}^{(1)} \bar{x}_{b)}^{(n-2)} \\ & + \cdots + 2E_{(n-2)(n-1)/2} \bar{x}_{(a}^{(n-3)} \bar{x}_{b)}^{(n-2)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $E_1, \dots, E_{(n-2)(n-1)/2}$ são escalares reais. Como E_{ab} está restrito ao subespaço euclidiano $(n-2)$ -dimensional \mathcal{E} com assinatura $(++ \cdots +)$, é sempre possível encontrar uma base ortonormal $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-2)}\}$, relativa à qual E_{ab} toma a forma diagonal com autovalores reais. Com respeito a t^a_b , é direto verificar que $\mathbf{l}^b \pm i\mathbf{m}^b$ são autovetores com autovalores $\alpha \pm i\beta$. Logo, t^a_b é também diagonalizável. Em vista disto, concluímos que quando o tensor de Ricci admite autovalores complexos ele é diagonalizável, com o tipo de Segre representado por $[z\bar{z}1 \dots 1]$, e pode ser escrito na forma covariante (4.26).

Referências

- [1] Åman, J. E. (1987), *A Manual for CLASSI: classification programs for geometries in general relativity*, University of Stockholm, Institute of Theoretical Physics technical report.
- [2] Banerjee, A., Panigrahi, D. e Chatterjee, S. (1994), “*A class of inhomogeneous cosmological models in Kaluza-Klein spacetime*”, *Class. Quantum Grav.* **11**, 1405.
- [3] Bel, L. (1962), “*Les états de radiation et le problème de l'énergie en relativité générale*”, *Cah. de Phys.* **16**, 59.
- [4] Bona, C., Coll, B. e Morales, J. A. (1992), “*Intrinsic characterization of space-time symmetric tensors*”, *J. Math. Phys.* **33**, 670.
- [5] Calvão, M. O., Rebouças, M. J., Teixeira, A. F. F. e Silva Jr., W. M. (1988), “*Notes on a class of homogeneous space-times*”, *J. Math. Phys.* **29**, 1127.
- [6] Cartan, E. (1983), *Leçons sur la Géométrie des Éspaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris (1951). Reimpressão, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988. Tradução inglesa por J. Glazebrook, Math. Sci. Press, Brookline (1983).
- [7] Chatterjee, S., Bhui, B., Basu, M. B. e Banerjee, A. (1994), “*Inhomogeneous model with a cosmological constant*”, *Phys. Rev. D* **50**, 2924.
- [8] Churchill, R. V. (1932), “*Canonical forms for symmetric linear vector functions in pseudo-euclidean space*”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **34**, 784.

- [9] Cormack, W. J. e Hall, G. S. (1979), “*Riemannian curvature and the classification of the Riemann and Ricci tensors in space-time*”, *Int. J. Theor. Phys.* **18**, 279.
- [10] Cormack, W. J. e Hall, G. S. (1979), “*Invariant two-spaces and canonical forms for the Ricci tensor in general relativity*”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **12**, 55.
- [11] Crade, R. F. e Hall, G. S. (1982), “*Second order symmetric tensors and quadric surfaces in general relativity*”, *Acta Phys. Polonica* **B13**, 405.
- [12] Ferrando, J. J., Morales, J. A. e Portilla, M. (1990), “*Two-perfect fluid interpretation of an energy tensor*”, *Gen. Rel. Grav.* **22**, 1021.
- [13] Frick, I. (1977), *The computer algebra system SHEEP, what it can and cannot do in general relativity*, University of Stockholm, Institute of Theoretical Physics technical report.
- [14] Gantmacher, F. R. (1960), *The Theory of Matrices*, Vol. 1, (Chelsea Publ. Co., New York, N. Y.).
- [15] Gleiser, R. J. e Diaz, M. C. (1988), “*Perfect-fluid cosmologies with extra dimensions*”, *Phys. Rev. D* **37**, 3761.
- [16] Hall, G. S. (1976), “*The classification of the Ricci tensor in general relativity theory*”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **9**, 541.
- [17] Hall, G. S. (1984), “*The classification of second order symmetric tensors in general relativity theory*”, *Diff. Geom.* **12**, 53, monografia do Stefan Banach International Mathematical Centre, Varsóvia.
- [18] Hall, G. S. (1984), “*The structure of the energy-momentum tensor in general relativity*”, *Arabian J. Sci. Eng.* **9**, 87.
- [19] Hall, G. S. (1993), *Physical and geometrical classification in general relativity*, CBPF-MO-001/93, monografia do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro.

- [20] Hall, G. S., MacCallum, M. A. H., Paiva, F. M. e Rebouças, M. J. (1995), “*Limits of the energy-momentum tensor in general relativity*”, (submetido a publicação).
- [21] Hall, G. S., Morgan, T. e Perjés, Z. (1987), “*Three-dimensional space-times*”, Gen. Rel. Grav. **19**, 1137.
- [22] Hall, G. S. e Negm, D. A. (1986), “*Physical structure of the energy-momentum tensor in general relativity*”, Int. J. Theor. Phys. **25**, 405.
- [23] Hall, G. S., Rebouças, M. J., Santos, J. e Teixeira, A. F. F. (1995), “*On the algebraic structure of second order symmetric tensors in 5-dimensional space-times*”, (submetido a publicação).
- [24] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. (1973), *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University, Cambridge).
- [25] Herstein, I. N. e Winter, D. J. (1988), *Matrix Theory and Linear Algebra* (Macmillan Publ. Co., New York, N. Y.).
- [26] Ibáñez, J. e Verdaguer, E. (1986), “*Radiative isotropic cosmologies with extra dimensions*”, Phys. Rev. D **34**, 1202. Ver também referências contidas aqui sobre este assunto.
- [27] Ibáñez, J. e Verdaguer, E. (1986), “*Finite perturbations on Friedmann-Robertson-Walker models*”, Astrophys. J. **306**, 401.
- [28] Kaluza, Th. (1921), “*Zum Unitätsproblem der Physik*”, Sitzungsberichte preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. **K1**, 966. Uma tradução para o inglês deste trabalho pode ser encontrada em *Modern Kaluza-Klein Theories*, editado por T. Appelquist, A. Chodos e P. G. O. Freund (Addison-Wesley, Menlo Park), 1987.
- [29] Karlhede, A. (1980), “*A review of the geometrical equivalence of metrics in general relativity*”, Gen. Rel. Grav. **12**, 693.

- [30] Kramer, D.; Stephani, H.; Herlt, E. e MacCallum, M. (1980), *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge U. P., Cambridge).
- [31] Linet, B. (1971), "*Étude de la structure algébrique du tenseur impulsion-énergie symétrique*", C. R. Acad. Sc. Paris, Série A **272**, 1142.
- [32] Ludwig, G. e Scanlan, G. (1971), "*Classification of the Ricci tensor*", Commun. Math. Phys. **20**, 291.
- [33] MacCallum, M. A. H. (1983), "*Classifying metrics in theory and practice*", em *Unified Field Theory in More Than 4 Dimensions, Including Exact Solutions*, editado por V. de Sabbata e E. Schmutzer. (World Scientific, Singapore).
- [34] MacCallum, M. A. H. (1984), "*Algebraic computing in general relativity*", em *Classical General Relativity*, editado por W. B. Bonnor, J. N. Islam e M. A. H. MacCallum (Cambridge U. P., Cambridge).
- [35] MacCallum, M. A. H. (1991), "*Computer-aided classification of exact solutions in general relativity*", em *General Relativity and Gravitational Physics (9th Italian Conference)*, editado por R. Cianci, R. de Ritis, M. Francaviglia, G. Marmo, C. Rubano e P. Scudellaro (World Scientific Publishing Co., Singapore).
- [36] MacCallum, M. A. H. e Skea, J. E. F. (1994), "*SHEEP: A computer algebra system for general relativity*," em *Algebraic Computing in General Relativity: Lectures Notes from the First Brazilian School on Computer Algebra*, Vol. 2, editado por M. J. Rebouças e W. L. Roque (Oxford U. P., Oxford).
- [37] Madsen, M. S. (1985), "*A note on the equations of state of a scalar field*" *Astrophys. and Space Sci.* **113**, 205.
- [38] Matos, T. e Nieto, J. A. (1993), "*Topics on Kaluza-Klein theory*", *Revista Mexicana de Física* **39**, 81.

- [39] McManus, Des J. (1994), “*Five-dimensional cosmological models in induced matter theory*”, J. Math. Phys. **35**, 4889.
- [40] Moody, M. C. e Ray, J. R. (1981), “*On the application of energy conditions and algebraic classification in general relativity*”, J. Math. Phys. **22**, 1727.
- [41] Paiva, F. M. (1993), *Limites de Espaços-Tempos em Gravitação*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 120 pp.
- [42] Paiva, F. M., Rebouças, M. J. e MacCallum, M. A. H. (1993), “*On limits of space-times — a coordinate-free approach*”, Class. Quantum Grav. **10**, 1165.
- [43] Penrose, R. (1960), “*A spinor approach to general relativity*”, Ann. Phys. (NY) **10**, 171.
- [44] Penrose, R. (1972), “*Spinor classification of energy tensors*” em *Gravitation: Problems, Prospects (Dedicated to the memory of A. Z. Petrov)*, Izdat. Naukova Dumka, Kiev, 203.
- [45] Penrose, R. e Rindler, W. (1986), *Spinors and Space-Time*, vol. 2, (Cambridge U. P., Cambridge).
- [46] Petrov, A. Z. (1954), “*Classification of spaces defining gravitational fields*”, Sci. Not. Kazan State Univ. **114**, 55.
- [47] Petrov, A. Z. (1969), *Einstein Spaces* (Pergamon, Oxford).
- [48] Pirani, F. A. E. (1957), “*Invariant formulation of gravitational radiation theory*”, Phys. Rev. **105**, 1089.
- [49] Pirani, F. A. E. (1964), “*Introduction to gravitational radiation theory*”, em *Brandeis Lectures on General Relativity*, vol. 1 (Prentice-Hall).
- [50] Plebański, J. (1964), “*The algebraic structure of the tensor of matter*”, Acta Phys. Polonica **26**, 963.

- [51] Plebański, J. e Stachel, J. (1968), "*Einstein tensor and spherical symmetry*", J. Math. Phys. **9**, 269.
- [52] Rebouças, M. J. e Aman, J. E. (1987), "*Computer-aided study of a class of Riemannian space-times*", J. Math. Phys. **28**, 888.
- [53] Rebouças, M. J., Aman, J. E. e Teixeira, A. F. F. (1986), "*A note on Gödel-type space-times*", J. Math. Phys. **27**, 1370.
- [54] Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1986), "*Rotating spacetimes of Gödel-type*", em *Proceedings of the Fourth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, editado por R. Ruffini (Elsevier Sci. Publ., p. 1025).
- [55] Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1991), "*Einstein universe as a moving fluid cosmology*", J. Math. Phys. **32**, 1861.
- [56] Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1992), "*Homogeneous space-times with seven isometries*", J. Math. Phys. **33**, 2855.
- [57] Santos, J., Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1993), "*Classification of scalar fields in general relativity*", J. Math. Phys. **34**, 186.
- [58] Santos, J., Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1994), "*Classification of the Ricci tensor in 5-dimensional spacetimes*", em *Gravitation: the Spacetime Structure*, Proceedings of the 8th Latin American Symposium on Relativity and Gravitation. Editado por P. Letelier e W. A. Rodrigues (World Scientific Publishing Co., Singapore).
- [59] Santos, J., Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1995), "*Classification of second order symmetric tensors in five-dimensional Kaluza-Klein-type theories*", J. Math. Phys. **36**, 3074.
- [60] Santos, J., Rebouças, M. J. e Teixeira, A. F. F. (1995), "*Segre types of symmetric two-tensors in n -dimensional spacetimes*", Gen. Rel. Grav. **27**, 989.

- [61] Shilov, G. E. (1977), *Linear Algebra* (Dover Publ. Inc., New York).
- [62] Synge, J. L. (1956), *Relativity: The Special Theory* (North-Holand, Amsterdam).
- [63] Synge, J. L. (1960), *Relativity: The General Theory* (North-Holand, Amsterdam),
pg. 184-194.
- [64] Wesson, P. S. e Ponce de Leon, J. (1994), “*Kaluza-Klein theory and Machian cosmology*”, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 555.

**“A CLASSIFICAÇÃO DE SEGRE NA RELATIVIDADE GERAL E
NAS TEORIAS DE KALUZA-KLEIN”**

Janilo Santos

Tese de Doutorado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:



Marcelo José Rebouças - Presidente



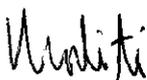
Antonio Fernandes da Fonseca Teixeira - Co-orientador



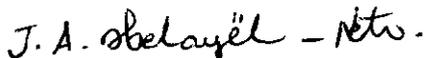
Silvestre Ragusa



Valdir Barboza Bezerra



Itzhak Roditi



José Abdalla Helahël-Neto

Rio de Janeiro, 15 de dezembro de 1995